El principio de mínima acción

José Rubén Morones Ibarra
Universidad Autónoma de Nuevo León, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, México
jose.moronesib@uanl.edu.mx

RESUMEN

En este artículo se presentan algunos aspectos históricos del desarrollo del Principio de Mínima Acción y se establecen los métodos matemáticos y principios variacionales que permiten implementar este Principio. Este Principio lleva implícita en su esencia y estructura, una de las ideas más fundamentales y profundas que se han establecido para entender a la naturaleza. El aspecto central de este Principio es el hecho de que para entender los fenómenos naturales es necesario partir de ideas relacionadas con la simplicidad, el orden, la perfección y la optimización de los recursos de que dispone la naturaleza para llevar a cabo sus procesos. En este artículo, el Principio de Mínima Acción y los métodos del cálculo de variaciones son aplicados a la física, la geometría y la ingeniería. Se supone que la naturaleza economiza todos sus procesos y el ser humano, en la ingeniería, en el diseño de estructuras y máquinas busca imitar a la naturaleza para optimizar recursos. Los métodos de optimización en la ingeniería se aplican mediante modelos matemáticos para determinar valores máximos o mínimos de ciertas variables o funciones.

PALABRAS CLAVE

Principio de mínima acción, cálculo de variaciones, Principio de Fermat, Ecuaciones de Euler-Lagrange.

ABSTRACT

In this article some historical aspects of the Principle of Least Action are introduced together with the mathematical methods and variational principles that allow this Principle to be implemented. This Principle carries implicit in its essence and structure, one of the most fundamental and profound ideas that have been established to understand nature. The central aspect of this Principle is the fact that to understand natural phenomena it is necessary to start from ideas related to simplicity, order, perfection and optimization of the resources available to nature to carry out its processes. In this article, the Principle of Least Action and the methods of calculus of variations are applied to physics, geometry and engineering. It is assumed that nature economizes all its processes and the human being, in engineering, in the design of structures and machines, seeks to imitate nature to optimize resources. Optimization methods in engineering are applied through mathematical models to determine maximum or minimum values of certain variables or functions.

KEYWORDS

Principle of least action, calculus of variations, Fermat's Principle, Euler-Lagrange equations.

INTRODUCCIÓN

Consideraremos primeramente los aspectos históricos y filosóficos del Principio de Mínima Acción (PMA). Para entender cómo nació el PMA debemos remontarnos a los griegos, a los estudios sobre el problema de la reflexión de la luz que realizó Herón de Alejandría. Realizó investigaciones sobre el fenómeno de la propagación de la luz y observó que al viajar la luz de un punto a otro reflejándose sobre un espejo, la trayectoria que sigue es aquella que corresponde a la trayectoria de mínima distancia. De estos experimentos, Herón estableció como Principio, que la luz escoge el camino más corto para viajar de un punto a otro en un medio dispersivo. De acuerdo con los registros de la historia de la ciencia, esta fue la primera vez que se introdujo la idea sobre valores mínimos asociadas a un proceso o fenómeno de la naturaleza. Diremos de paso, que este resultado lo obtuvo Herón de la observación de que el ángulo de incidencia de la luz sobre el espejo siempre es igual al ángulo de reflexión, resultado que conocemos hoy como la ley de la reflexión de la luz.

Apoyado en las ideas de Herón, más de mil seiscientos años después, Fermat propuso el Principio de Tiempo Mínimo en la trayectoria de la luz al viajar de un punto a otro. Este Principio se conoce ahora como Principio de Fermat, también llamado Principio de Mínimo Tiempo (PMT).

Cuando la luz se propaga en un mismo medio con un solo índice de refracción, lo hace siguiendo una trayectoria rectilínea. Sin embargo, cuando pasa de un medio a otro con diferente índice de refracción, entonces al viajar de un punto a otro, el PMT establece que la luz seguirá una trayectoria tal que el tiempo que invierte en el viaje corresponde a un tiempo mínimo. Esto significa que para cualquier otra trayectoria realizará el viaje entre los dos mismos puntos en un tiempo mayor.

Estos hechos provocaron el interés matemático por el estudio de lo que hoy conocemos como problemas de cálculo de extremales. Se desarrolló entonces el cálculo de variaciones el cual tomó gran importancia cuando en los siglos XVII y XVIII, Maupertuis (1698-1759), Euler (1707-1783) y Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) formularon ciertos principios físicos basados en la idea de simplicidad y economía que rigen todos los procesos naturales, para explicar la dinámica de los sistemas físicos. Lagrange logró probar que, apoyándose en el principio de conservación de la energía y un principio variacional, se podían obtener las ecuaciones de la mecánica Newtoniana. Las ideas de Lagrange fueron generalizadas por el matemático, físico y astrónomo irlandés William Rowan Hamilton (1805-1865) quien formalmente estableció el PMA en el año 1835 y probó de manera generalizada que la mecánica clásica se podía obtener de un principio variacional.[1]

El PMA ha resultado de gran utilidad en la ciencia y en la actualidad las teorías fundamentales de la física como la mecánica clásica, el electromagnetismo, las teorías de la relatividad especial y general, así como las teorías cuánticas de campos, se formulan a partir del Principio de Mínima Acción.

Los Principios de la física son suposiciones (axiomas o postulados) que no son apoyadas o basados en nada más fundamental. Son hipótesis de trabajo a partir de las cuales se construye todo el edificio de la física. Actualmente, el Principio de Mínima Acción, junto con las simetrías del espacio y el tiempo, entre otros, es considerado como un principio fundamental de la física.

El PMA involucra ideas sobre la manera cómo funciona la naturaleza a la vez que aspectos estéticos que permiten tener una visión y un entendimiento más profundo de los sistemas físicos y los procesos naturales.

En la actualidad, en la construcción de las teorías físicas hay dos corrientes filosóficas que dominan el escenario de la investigación básica. Una es la tradicional, o empírica, que es la que sigue el camino de la formulación de una teoría a partir de observaciones experimentales. La otra corriente, llamada axiomática, se basa en la propuesta de Hilbert en su conferencia del año de 1900 quien estableció que todas las teorías empíricas como la física, por ejemplo, que se apoyan en la matemática para su desarrollo y fundamentación, eran susceptibles de axiomatizarse.[2] Esta es la línea que han seguido, por ejemplo, los creadores de las teorías super-simétricas que han abierto nuevas líneas de investigación en la física y que pueden llevar a la solución de un de los retos más desafiante de la física que es el de la cuantización de la gravedad.

Dentro de esta última corriente de la física, encontramos entre los axiomas de la física el PMA, el cual establece que la dinámica de los sistemas físicos se obtiene del principio de Hamilton de acción estacionaria, o Principio de Mínima Acción.

Ideas filosóficas sobre el funcionamiento de la naturaleza

Si nos remontamos a los inicios de la construcción de las ideas sobre el comportamiento de la naturaleza y el universo, encontramos que no se tenía mucha información experimental u observacional para elaborar explicaciones o teorías sobre la naturaleza y el universo. El conocimiento empírico era escaso para proponer ideas y explicaciones de los fenómenos observados. El pensamiento dominante ere de naturaleza filosófica o teológica o metafísica. Aristóteles fue quien primero estableció el criterio de que la naturaleza en todos sus procesos y fenómenos, busca lo más simple y también el mínimo esfuerzo. Agregaba también argumentos de perfección y belleza. Siguiendo esta misma línea de pensamiento, Aristóteles argumentaba que la curva más perfecta era el círculo y que por lo tanto los cuerpos celestes en su movimiento deberían seguir una trayectoria circular, que a la vez implicaba que el movimiento se repetía eternamente.

El razonamiento de Aristóteles para explicar el movimiento de los planetas se basaba en ideas metafísicas. El movimiento circular es perfecto porque es continuo y eterno, afirmaba Aristóteles, por lo tanto, el movimiento de los planetas debe ser circular. Ideas asociadas con la simplicidad y la estética surgieron en el pensamiento griego y guiaron el razonamiento de Aristóteles a tal grado de incluir en su análisis de los fenómenos naturales hipótesis asociadas a conceptos extremales (máximos o mínimos). Para él, el círculo es la trayectoria que deben describir los planetas, ya que es la curva cerrada con una longitud dada que encierra la máxima área. Fue el primero en la historia que asoció estos conceptos a fenómenos de la naturaleza. El origen de esta idea de máximos o mínimos fue místico, pero ha resultado de gran utilidad en la ciencia. Estas ideas resultaron ser grandiosas, pero no fueron valoradas en su momento. Retomando estas ideas, Herón de Alejandría en el año 125 a. C. propuso la idea de que la luz viaja siempre en una trayectoria de longitud mínima.

Es importante destacar que el pensamiento griego, representado por las ideas de Tales de Mileto, Pitágoras, Aristóteles, Platón y otros más, de que el mundo y los fenómenos naturales pueden entenderse si nos guiamos por ideas relacionadas con la simplicidad, el orden, la perfección y la uniformidad, ha dado la pauta para el desarrollo de ideas científicas de gran valor y trascendencia. La simetría, la estética, el mínimo esfuerzo de la naturaleza y la simplicidad han sido conceptos que han resultado de gran utilidad para comprender los fenómenos de la naturaleza.[3]

La búsqueda de la explicación de por qué la naturaleza prefiere unas formas y no otras tiene su fundamento en los conceptos de economía u optimización de recursos en general. Además, tiene una componente de origen teológico de que Dios (la naturaleza) selecciona siempre lo mejor. Los primeros problemas asociados a extremales surgieron en la antigüedad cuando los griegos se plantearon el problema geométrico de determinar la forma de la curva de una longitud dada, que encierra la mayor área o la forma de una superficie dada que encierra el mayor volumen. Encontraron que la curva que encierra la mayor área es el círculo y que la superficie que encierra el mayor volumen es la de la esfera.

Concepto de extremales

Herón de Alejandría fue un matemático, ingeniero e inventor que vivió en Alejandría, Egipto, del año 10 al año 70. Herón, basado en conceptos filosóficos sobre el funcionamiento de la naturaleza, creía firmemente que la naturaleza buscaba ser lo más eficiente y ahorrativa posible y que siempre optaba por el camino más corto. Esta idea, conceptualmente muy buena, no es del todo correcta. Fue el primero que estableció un Principio Extremal al enunciar que la luz viaja de un punto a otro siguiendo el camino más corto. Aún cuando el enunciado no es correcto, la idea es fundamental y valiosa como concepto para establecer un principio minimalista en la óptica

Mucho tiempo después Pierre de Fermat (1607-1665) corregiría la idea de Herón de longitud mínima para la propagación de la luz, a la de un Principio de Tiempo Mínimo para la propagación de la luz de un punto a otro considerando el caso general de medios con diferente índice de refracción el cual obtuvo de la aplicación del cálculo de variaciones.[4]

La explicación de ciertos fengómenos de la naturaleza, como la trayectoria que sigue la luz en un medio o el movimiento de los planetas alrededor del Sol se realizan minimizando ciertas cantidades físicas como el tiempo de propagación en el caso de la luz, o minimizando una cantidad física llamada acción en el caso del movimiento plantario. En general, en los problemas de esta naturaleza, se busca encontrar un máximo o un mínimo para cierta expresión matemática llamada funcional. Al problema se le conoce como determinación de un extremal. El PMA es un problema de determinación de un extremal.

La idea detrás de un Principio Extremal, es la de construir una expresión matemática dada por una integral asociada a una cierta cantidad de la cual nos interesa obtener sus valores extremos. El integrando estará dado por una cierta función y el problema consiste en determinar la función que maximiza o minimiza la integral. Estas ideas son de aplicación casi universal, es por esto que su estudio representa un gran reto para muchas disciplinas. El método utilizado para analizar estos problemas se desarrolló en el siglo XVIII y es conocido como cálculo variacional.

Ejemplos de problemas de extremales los tenemos en la naturaleza como los casos de explicar por qué las pompas de jabón o las gotas de lluvia tienen forma esférica. La explicación se obtiene al determinar la forma de la superficie de ellas. Todo volumen está limitado por una superficie y para un volumen dado, la superficie de área mínima que lo limita es el de una superficie esférica. La razón es que la naturaleza busca estructuras que minimicen la energía del sistema. Las pompas de jabón están formadas esencialmente de agua, que a la vez están formadas por moléculas. Se puede calcular la energía de la pompa de jabón. La superficie que corresponde a la mínima energía es la superficie esférica. Los conceptos físicos que soportan los argumentos empleados en el cálculo se apoyan en la idea de que la naturaleza busca realizar sus procesos de tal manera que invierta la mínima cantidad de energía. Lo mismo ocurre con las gotas de lluvia.

Otro ejemplo de un problema extremal lo encontramos al tratar de determinar la forma que adquiere un cable colgante, como los alambres que conducen la electricidad. Un cable colgante siempre toma la forma de una curva llamada catenaria. Esta curva tiene la característica de que su energía potencial gravitacional es mínima.

Principio de Fermat

Fermat fue quien primero aplicó un Principio extremal con un gran éxito en el campo de la óptica, obteniendo a partir de este principio las leyes de la reflexión y la refracción de la luz. Basado en ciertas ideas filosóficas, en el año de 1658 Pierre Fermat estableció un Principio sobre la propagación de la luz. Este Principio, conocido hoy como Principio de Fermat establece que la luz que viaja de un punto a otro, en un mismo medio, en una trayectoria que debe incluir cierto número de reflexiones, debe seguir un camino que le tome el menor tiempo posible. Para cuando la propagación es en el mismo medio, este principio se conoce como Principio de Tiempo Mínimo. Se dice que el camino óptico de un rayo de luz está siempre asociado a un tiempo mínimo. En general, la trayectoria que sigue un rayo de luz para ir de un punto P_1 a un punto P_2 en un medio donde la velocidad de la luz depende de la posición, es aquella que minimiza el tiempo de recorrido.

Matemáticamente esto se expresa como un integral que debe ser sometida a la condición de que su valor sea un mínimo. Definiendo la integral respecto al tiempo t como

$$I = \int_{P_1}^{P_2} dt = \int_{P_1}^{P_2} \frac{ds}{C}$$

Se debe cumplir que I sea un mínimo. Donde ds es el elemento de longitud en el espacio de propagación de la luz, tomado a lo largo de la trayectoria de la luz. C es la velocidad de la luz que, en general, resulta ser una función de la posición para un medio donde varía el índice de refracción de acuerdo con la posición.

Principios variacionales

Gottfried Leibniz (1646-1716) notable matemático y filósofo alemán, era un hombre de fe religiosa. En el año de 1682 planteó la idea, basada en concepciones teológicas, de que la naturaleza siempre busca, en sus procesos, la máxima economía a esto le llamó Principio de Máxima Economía.[5] Establecía que, puesto que el mundo es creación de Dios, debe ser el mejor de los mundos posibles. Estas ideas se asocian a valores óptimos, por lo tanto, a valores máximos o mínimos de algunas cantidades físicas. En este sentido Leibniz se adelantó a Pierre Louis

Maupertuis. Maupertuis estableció como Principio para estudiar a la naturaleza que se debe partir de la idea de que la naturaleza es ahorrativa en todos sus fenómenos y procesos.

Pierre Louis Maupertuis fue un físico y matemático francés quien en 1744 propuso la idea de que el movimiento de los planetas se realizaba de tal manera que la trayectoria que seguían era aquella que minimiza la acción. Maupertuis definió la acción como el producto $masa \times velocidad \times distancia = mvs$. La deficiencia en esta definición de acción está en que la velocidad de un planeta varia con el tiempo. Sin embargo, la idea resultó ser de una notable importancia en la física. Posteriormente estas ideas evolucionarían hacia lo que hoy conocemos como Principio de Mínima Acción.[5]

Notemos que si escribimos la acción definida por Maupertuis como

$$mvs = mv\frac{ds}{dt}dt = mv^2dt,$$

este término correspondería al doble de la energía cinética de un cuerpo de masa m.

En los siglos XVIII y XIX, Euler, Lagrange y Hamilton dieron una forma matemática bien definida a estas ideas estableciendo lo que hoy conocemos como Principio de Mínima Acción. Introdujeron el concepto de acción definiéndolo de una manera muy técnica y precisa, a través de una funcional que se establecerá más adelante en este artículo.

Cálculo Variacional

El problema general del cálculo de variaciones (CV) se plantea de la siguiente manera. Consideremos la integral dada por

$$S[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} F[x, y(x), y'(x)\ ]dx \qquad (1)$$

El problema es el de terminar la función $y = y(x)$ que minimiza o maximiza la integral $S[y(x)]$.

Con el propósito de hacer una comparación entre el cálculo de variaciones y el cálculo diferencial ordinario, consideremos el procedimiento seguido en cálculo diferencial para obtener los valores máximos y mínimos de una función $y = f(x)$; Tomamos su derivada y la igualamos a cero. En este articulo nos interesa un asunto diferente. Para esto necesitamos introducir el concepto de funcional. Primeramente señalamos la diferencia entre función $y = f(x)$ y funcional $G(x, f(x))$ notando que la primara depende de una variable, x en este caso, mientas que una funcional, depende a su vez de una función, $f(x)$. En general, una funcional, dependerá de la coordenada x, la función $f(x)$ y de la derivada de $f(x)$. Esto lo escribimos como $G[x, f(x), f'(x)\ ]$, donde $f'(x)$ representa la derivada de $f(x)$.

En especial, para los casos de aplicaciones en extremales, nos interesará una funcional de la forma $S[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} F[x, y(x), y'(x)\ ]dx$. Dada esta funcional, el problema que queremos resolver es el siguiente: determinar la forma de la función $y(x)$que extremaliza la funcional $S[y(x)]$. Este es el problema fundamental del cálculo de variaciones.

En general, el problema fundamental del cálculo variacional es el de encontrar la forma matemática de la trayectoria o superficie que hace que una función determinada que depende de esta curva o superficie, tome un valor extremo, es decir, un máximo o un mínimo.

Busquemos la curva $y(x)$ que une los puntos $y(x_1)$ y $y(x_2)$ y que minimiza el valor de la integral definida por $S[y(x)]$ en la expresión de arriba. Para esto es conveniente introducir el operador de variación δ.[6]

El operador δ

El operador que designaremos con la letra δ llamado operador de variación e indica el cambio de una funcional, es decir, el cambio de una función de funciones cuando cambia la función $y(x)$ de la cual la funcional depende. Si consideramos la funcional $F[x, y(x), y'(x)]$, la variación de esta cuando producimos un cambio en $y(x)$, y como consecuencia también un cambio en $y'(x)$ está dada por

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'$$

Notemos que las variaciones δF , δy y $\delta y'$ ocurren en el mismo valor de la coordenada x. Por lo tanto, el operador de variación δ aplicado a $S[y(x)]$ conmuta con la integral sobre la variable x y puede entrar en el integrando, obteniéndose, después de aplicar la condición de extremalizaciòn $\delta S = 0$, obtenemos

$$\delta S[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \delta F[x, y(x), y'(x)]dx = 0$$

Lo cual puede expresarse como

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y\prime}\delta y'\right] dx = 0 \qquad (1)$$

donde

$$\delta y = y_2 - y_1$$
$$\delta y' = {y'}_2 - {y'}_1$$

Usando la identidad

$$\frac{d}{dx}\left[\delta y\left(\frac{\partial F}{\partial y\prime}\right)\right] = (\delta y')\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + (\delta y)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y\prime}\right) \qquad (2)$$

Despejando $(\delta y')\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)$, de la Ec (2), obtenemos

$$(\delta y')\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = -\frac{d}{dx}\left[\delta y\left(\frac{\partial F}{\partial y\prime}\right)\right] + (\delta y')\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) \qquad (3)$$

Sustituyendo en la Ec. (3), en la Ec. (1) obtenemos

$$\int_{x_1}^{x_2} \left\{\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \left[\frac{d}{dx}\left[\delta y\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right] - (\delta y)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\right\} dx = 0$$

Esto puede escribirse como

$$\int_{x_1}^{x_2} \left\{\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \left[-(\delta y)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y\prime}\right)\right]\right\} dx + \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{d}{dx}\left[\delta y\left(\frac{\partial F}{\partial y\prime}\right)\right]\right] dx = 0$$

donde el último término es cero, ya que

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{d}{dx}\left[\delta y\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\right] dx = \left[\left[\delta y\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]_{x_1}^{x_2}\right] = 0$$

debido a que la variación δy evaluada en los extremos x_1 y x_2 es cero.

$$\int_{x_1}^{x_2} \left\{\frac{\partial F}{\partial y} + \left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y\prime}\right)\right]\right\} \delta y dx = 0 \qquad (4)$$

Debido a que la Ec. (4) se cumple para cualquier valor de δy y este a su vez es arbitrario, entonces para que se satisfaga la Ec. (4) con δy arbitrario, debe cumplirse la condición de que el integrando sea cero, esto es,

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y\prime}\right)\right] = 0 \tag{5}$$

Estas ecuaciones son conocidas como las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Aquí hemos resuelto el problema para una trayectoria $y = y(x)$ que es una curva representada por una sola función, $y = y(x)$. Esto se puede generalizar al considerar la representaciòn paramètrica de una curva en n- dimensiones, en la forma,

$$y_i = y_i(x)$$

donde $i = 1,2,3, \dots n$. Con este cambio, las Ecs. de Euler-Lagrange toman la forma más general

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} + \left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i\prime}\right)\right] = 0 \tag{6}$$

Las Ecs. de Euler-Lagrange (E-L) dadas en la Ec. (6), están entre las ecuaciones más importantes de la física y la matemática por su poder unificador en las teorías físicas y por tener aplicaciones muy generales.

En el caso en el que la función F en la Ec. (5), no dependa explícitamente de x, se puede probar que las ecuaciones de E.L dadas por la Ec. (5) toman la forma

$$F - y' \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = c \tag{7}$$

Donde c es una constante que se determina según las condiciones impuestas al problema que se está considerando. Se utilizará esta forma de las ecuaciones de E-L para obtener la forma matemática de la catenaria.

La Ec. (7) se conoce como ecuaciones de E-L modificadas.[7]

Historia del cálculo de variaciones

El inicio del cálculo de variaciones usualmente se ubica en el año de 1696, cuando el gran matemático suizo Johannes Bernoulli lanzó el reto de determinar la trayectoria, determinada por dos puntos dados, que debe seguir una partícula que cae bajo la influencia de la gravedad para que este descenso tome el menor tiempo.

El problema se conoce como “Problema de la Braquistocrona” y fue planteado por Johannes Bernoulli publicándolo en una revista especializada, dando un plazo de seis meses para resolverlo. Nadie respondió y el famoso matemático Gottfried Leibniz pidió una ampliación del plazo. Se extendió este plazo por un año y en enero de 1697 Johannes Bernoulli recibió una respuesta correcta al problema. Se dice que Bernoulli identificó inmediatamente a Newton como el autor de la solución. Lo cual resultó cierto.

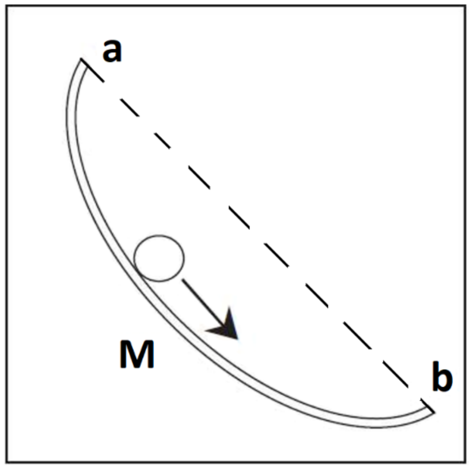

Fig. 1. Braquistocrona.

La baquistocrona

El problema de la braquistrocrona es un problema que consiste en minimizar el tiempo. Lo trataremos aquí para ilustrar los métodos de cálculo junto con el problema de la catenaria.

Problema de la Braquistocrona

La Braquistocrona es la trayectoria entre dos puntos A y B que sigue una partícula, cayendo únicamente bajo la influencia de la fuerza de gravedad, empleando el mínimo tiempo[9].

$$T = \frac{distancia}{velocidad}$$

Notemos que la línea recta que une los puntos A y B minimiza la distancia, pero no significa que la velocidad con la que cae la partícula sea la máxima velocidad. La partícula podría ir muy lenta en esta trayectoria y por lo tanto el tiempo invertido del punto A al B no sería el mínimo. El problema es entonces determinar la forma de la curva que minimiza ese tiempo. Esto es lo que calcularemos. Lo primero que debemos hacer es obtener una expresión general para el tiempo de viaje de la partícula, entre los puntos A y B y posteriormente minimizar esta funcional.

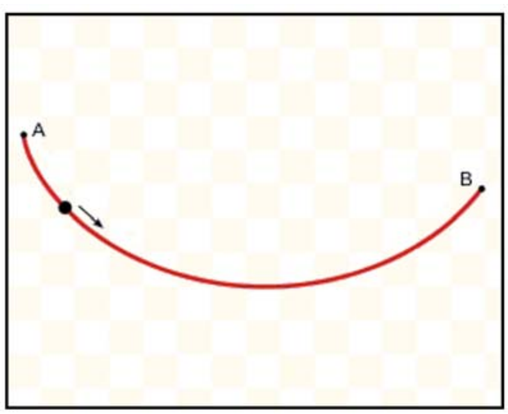

Fig. 2. Braquistocrona.

$$T = \int_A^B dt$$

$$dt = \frac{ds}{v}$$

Como en el caso de la catenaria,

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Para obtener una expresión para la velocidad, usamos la ley de conservación de la energía.

$$mgH = mgy + \frac{mv^2}{2}$$

$$v = \sqrt{2g(H - y)}$$

La expresión para el tiempo total en términos de estas nuevas cantidades es

$$T = \int_A^B \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{2g(H - y)}}\, dx$$

El siguiente paso es minimizar el tiempo total T, lo cual se consigue usando las ecuaciones de Euler-Lagrange dadas por la Ec. (5). El resultado obtenido es la ecuación de una curva que corresponde a un segmento de una cicloide. Esta es la ecuación de la braquistócrona.[9]

La Catenaria

La catenaria es la curva determinada por la forma que adquiere un cable tendido entre sus dos puntos extremos fijos, de donde está suspendido cuando solo la gravedad está actuando sobre él. La palabra catenaria proviene del latín catenarius que significa propio de la cadena. La catenaria es la curva que minimiza la energía potencial gravitacional del sistema formado por el cable y la Tierra y es por lo tanto la curva más estable. Este es un ejemplo de un sistema estático que satisface el principio de mínimo valor de alguna cantidad física; en este caso, la energía potencial gravitacional. Este concepto tiene grandes aplicaciones en la ingeniería. Por ejemplo, los puentes de arco son diseñados con una forma de catenaria invertida. La característica física principal del arco de catenaria es el hecho de que no existen esfuerzos cortantes en una estructura de diseño en forma de catenaria.

La tensión sobre cada sección de la cadena colgante resulta ser un mínimo. Si ahora damos la forma de catenaria a una varilla sólida formando un arco rígido e invertimos su posición vertical, colocando la curvatura hacia abajo, lo que obtenemos es un arco rígido donde las fuerzas de compresión son mínimas. Este arco será el más estable y soportará el mayor peso. Un arco en forma de catenaria será el más fuerte que podamos construir al colocarlo verticalmente. Es por esto que en la construcción es tan importante conocer las propiedades de la catenaria.

Cualquier deformación que sufra la cadena debido a la aplicación de una fuerza externa o perturbación, desaparecerá al eliminar esta fuerza y la cadena recuperará la forma de la catenaria. El estado determinado por la catenaria es el estado más estable para una cadena o cable colgante (de mínima energía potencial).

El poder determinar la forma matemática de la curva que corresponde a la cadena colgante más estable representó un logro muy importante y con grandes aplicaciones en la ingeniería. Las curvas del tipo de catenarias son frecuentemente usadas en la construcción y en otras aplicaciones tecnológicas.

Durante mucho tiempo se pensó que la forma de una cuerda colgante soportada en sus dos extremos, correspondía a la de una parábola. No fue sino hasta el año de 1691 cuando Johann Bernoulli siguió un tratamiento riguroso del problema y encontró la expresión matemática correcta para esta curva[10].

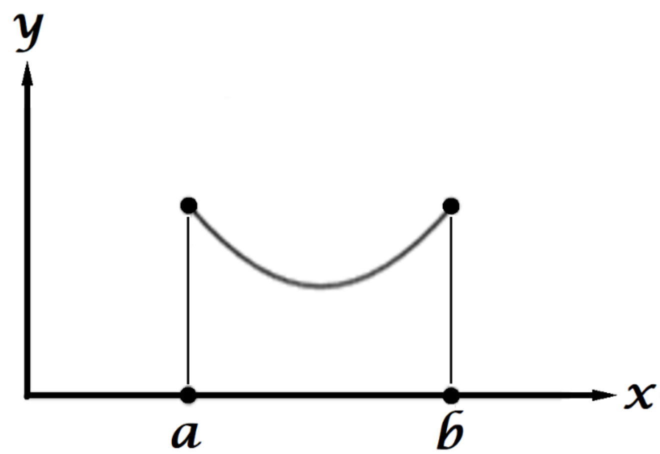

Fig. 3. Representación gráfica de una catenaria.

Para determinar la ecuación de la catenaria consideremos un sistema de coordenadas x-y, y expresemos la forma de la curva (de la cuerda) como una función de x.

$$y = f(x)$$

Consideremos el elemento de longitud $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ tomado sobre la cuerda.

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Supondremos una cuerda uniforme y de densidad lineal de masa constante λ, dada por

$$\lambda = \frac{dm}{ds} = cte$$

Siendo ds el elemento de longitud tomado sobre la cuerda.


Fig. 4. Catenarias.

Algunos arcos tienen la forma de catenarias invertidas.

Como en todo sistema físico en equilibrio, como la cuerda colgante, se debe cumplir que la energía potencial debe ser un mínimo. La energía potencial asociada a un segmento de la cuerda de longitud ds está dada por

$$dE_p = (dm)gy = \lambda dsgy \qquad (8)$$

Para calcular la energía potencial total integramos la Ec (8), con λ y g constantes y obtenemos

$$E_p = \lambda g \int_0^L yds = \lambda g \int_0^L y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \qquad (9)$$

Debemos proceder ahora a minimizar E_p en la ecuación (9).

Definimos $F = y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ (10)

Observamos que el integrando en la Ec. (9), esto es, la función F dada por (10), no depende explícitamente de x. En estos casos se puede utilizar las ecuaciones de E-L modificadas dadas por

$$F - y'\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = c \qquad (11)$$

Donde c es una constante que se determina según las condiciones impuestas al problema que se está considerando.

Aplicando la Ec. (11) a la función dada por (10), obtenemos la ecuación

$$-\frac{y}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = c \qquad (12)$$

Manipulando algebraicamente la Ec. (1.5), llegamos a

$$y(x) = \int \sqrt{\left(\frac{y^2}{c^2} - 1\right)}\,dx$$

Es conveniente escribir esta ecuación en la forma

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y^2}{c^2} - 1\right)}}$$

Integrando obtenemos

$$y(x) = ccosh\left(\frac{x + D}{c}\right)$$

Esta es la ecuación de la catenaria.

Las constantes c y D se determinan de las condiciones a la frontera $y(a) = y_0$ y $y(b) = y_0$.

Actualmente el concepto de Principios Minimales relacionado con la minimalización o la optimización juega un papel importante en la ingeniería y en el desarrollo de teorías físicas.

Arco catenario

Algunos arcos tienen la forma de catenarias invertidas. Uno de los más famosos arcos catenarios es el Gateway Arc, de San Luis Missouri, en EUA.

Definimos un Arco Ideal como aquel sobre el cual no actúan esfuerzos cortantes, es decir, donde la fuerza siempre actúa a lo largo de la línea del arco. En términos geométricos esto corresponde a la catenaria, donde la tensión siempre actúa a lo largo de la cuerda. Si el arco ideal se construye de material con densidad uniforme, tendremos que el arco ideal tiene la forma de una catenaria invertida, donde la tensión de la catenaria corresponde a la presión entre las secciones del arco ideal. La característica principal de un arco ideal es que no tiene la tendencia a caerse o colapsarse bajo su propio peso, por lo cual decimos que se soporta a sí mismo.

Fig. 5. Gateway Arch, San Louis Missouri, EUA. Este arco tiene la forma de una catenaria invertida.

Fig. 6. Ejemplos de Catenaria.

Sistemas dinámicos clásicos

Consideremos ahora sistemas dinámicos, es decir, sistemas cuyo estado depende del tiempo, o que se mueven.

En el año de 1778, el físico-matemático y astrónomo, Lagrange partiendo de la utilidad que tiene en la física la conservación de la energía mecánica, siendo esta la suma de la energía cinética y la energía potencial, estudió una nueva función, hoy llamada Lagrangiana, que consiste en tomar la diferencia entre la energía cinética y energía potencial. Encontró que podían obtenerse las ecuaciones de la mecánica Newtoniana a partir de un principio variacional impuesto sobre la acción S, la cual definió como

$S = \int L dt$ donde $L = T - V$, siendo T la energía cinética y V la energía potencial del sistema.

Imponiendo la condición de que la acción S tenga un valor extremal, es decir, $\delta S = 0$, Euler probó la equivalencia de las ecuaciones obtenidas de su formulación con las leyes de Newton.

Ejemplo. Partícula en un movimiento unidimensional

Para una partícula de masa m moviéndose bajo la acción de una fuerza conservativa $\vec{F} = -\nabla V$, tendremos que $F = -\frac{\partial V}{\partial x}$. Por otra parte, la energía cinética $T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$. Donde $\dot{x}$ representa la derivada de x respecto al tiempo.

La Lagrangiana L estará dada por $L = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - V$. Sustituyendo L en las ecuaciones de E-L,

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0 \tag{13}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = F \tag{14}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{d}{dt} m\dot{x} = m\ddot{x} \tag{15}$$

Sustituyendo en (14) y (15) en (13) obtenemos

$F = m\ddot{x}$ que corresponde a la ecuación de movimiento de Newton.

Esto prueba, para este caso particular, la equivalencia entre la formulación Lagrangiana y la Newtoniana para el movimiento.

La generalización al caso de tres dimensiones y para un sistema de más partículas puede realizarse de manera similar.

Teorías relativistas

En una teoría relativista de partículas establecemos que para una partícula libre relativista con velocidad $\vec{V}$, y tri-momento $\vec{p}$, se satisface la relación $\vec{p} = m_{rel}\vec{V} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{(V^2)}{c^2}}}\vec{V}$

El objetivo es encontrar una función Lagrangiana $L = L(x, \dot{x})$ tal que nos permita obtener la ecuación para el tri-momento

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{(V^2)}{c^2}}}\dot{x} \tag{16}$$

y que podamos obtener la ecuación de movimiento relativista para una partícula de masa en reposo m_0 , dada por

$$\dot{\vec{p}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{(V^2)}{c^2}}}\vec{V}\right) \tag{17}$$

La función Lagrangiana $L(x, \dot{x})$ que reproduce estos resultados es[11].

$$L = m_0 c^2\left(1 - \sqrt{1 - \frac{(V^2)}{c^2}}\right) \tag{18}$$

donde $\dot{x} = V_x$ es la componente x de la velocidad de la partícula.

Se puede probar que la función L dada en la Ec. (18), satisface las relaciones (16) y (17).

En general, cualquier sistema dinámico puede describirse a partir de una función Lagrangiana L , a la cual le aplicamos el principio de mínima acción.

En la relatividad general, también un rayo de luz sigue la trayectoria de mínimo tiempo al viajar entre dos puntos. Esto conduce al resultado de que la luz se "dobla" al pasar cerca de una estrella. Fenómeno conocido como desviación de la luz por un campo gravitacional.

Epilogo

Del PMA, que es un principio simple, se obtienen todas las ecuaciones de movimiento de la mecánica y del electromagnetismo. Combinando esta idea con conceptos de simetría para el espacio y el tiempo se obtienen las leyes de conservación de la energía, y de momento lineal y angular. De cualquier forma en que veamos la presencia de un principio variacional, este resulta ser algo externo a la propia teoría que se quiere construir. No es algo que venga de la física, sino algo que imponemos desde fuera de la teoría apoyados en la idea de que la naturaleza debe ser eficiente en sus procesos.

El Principio de minia Acción se presenta como un Principio Superior que gobierna los procesos de la naturaleza y rige también la formación de estructuras naturales. Parece ser el resultado de los eventos evolutivos que han conducido al mejoramiento y la optimización de los recursos de que dispone la naturaleza para llevar a cabo sus procesos. El PMA ha mostrado ser un instrumento muy poderoso que ha permitido realizar cálculos y obtener generalizaciones y la unificación de diversos campos de la física. Además de la elegancia y capacidad de simplificar las ideas en la física el PMA permite conectar fenómenos aparentemente separados desde el punto de vista de los fenómenos naturales.

Como ya se ha mencionado, la idea de que existe un Principio Universal que establece que la naturaleza realiza sus procesos de tal manera que lo hace con la máxima eficiencia, tuvo raíces filosóficas y teológicas. La ciencia ha tomado estas ideas para establecer como hipótesis de trabajo que este mundo debe ser gobernado o regido por principios simples y de gran contenido estético y de eficiencia, lo cual ha dado magníficos resultados para entender a la naturaleza.

REFERENCIAS

1. Cropper, William H., Great Physicist, Oxford, University Press, 2001.
2. Wolfgang Yourgrau and Stanley Mandelstam, Variational Principles in Dynamics and Quntum Theory, Dover publications, 1979.
3. Papp, Desiderio, Historia de la Física, Madrid, Espasa-Calpe, 1961.
4. E.T. Bell, Men of Mathematics, Fireside Books, 1965.
5. Leroy E. Loemker, Struggle for Synthesis, Harvard University Press, 1972.
6. Arfken George and Weber Hans, Mathematical Methods for Physicists, Academic Press, 1995.
7. Courant & Hilbert, Methods of Mathematical Physics, Wiley, 1989.
8. Roinila Markku, Leibniz on Rational Decision-Making (braquistocrona) Department of Philosophy, University of Helsinki Finland. 2007.
9. Boas, M. L., Mathematical Methods in the Physical Sciences, John Wiley and Sons, 1966.
10. E.T. Bell, Historia de las Matemáticas, Fondo de Cultura Económica, 2003.
11. Feynman, Fìsica, Volumen II, Fondo Educativo Interamericano, S. A., 1972.