Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Centro de Investigación en Ciencias Físico Matemáticas

Equilibrio Conjeturado Consistente en un Modelo Binivel de Migración Humana

por

Daniela Osorio González

en opción al grado de

Doctorado en Ciencias

con Orientación en Matemáticas

San Nicolás de los Garza, Nuevo León Agosto 2025

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Centro de Investigación en Ciencias Físico Matemáticas

Equilibrio Conjeturado Consistente en un Modelo Binivel de Migración Humana

por

Daniela Osorio González

en opción al grado de

Doctorado en Ciencias

con Orientación en Matemáticas

San Nicolás de los Garza, Nuevo León Agosto 2025

Universidad Autónoma de Nuevo León
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Centro de Investigación en Ciencias Físico Matemáticas

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis "Equilibrio Conjeturado Consistente en un Modelo Binivel de Migración Humana", realizada por la alumna Daniela Osorio González, con número de matrícula 1558072, sea aceptada para su defensa como opción al grado de Doctorado en Ciencias con Orientación en Matemáticas.

El Comité de Tesis

Dra. Nataliya Kalashnykova
Asesora

Dr. José Guadalupe Flores Muñiz
Co-asesor

Dr. Viacheslav Kalashnikov
Revisor

Dra. María Aracelia Alcorta García
Revisor

Dr. Manuel Alejandro Jiménez Lizárraga
Revisor

Vo. Bo.

Dr. Pablo César Rodríguez Ramírez
Coordinar del Posgrado en Ciencias con
Orientación en Matemáticas

San Nicolás de los Garza, Nuevo León, Agosto 2025

Dedicatoria

Dedico esta tesis, en primer lugar a Dios, por su infinito amor, por darme la fortaleza de no rendirme y ser mejor cada día.

A toda mi familia, en especial: a mi madre la señora Esther González, a mi papá el señor Juvencio Osorio; a mis abuelos Rosendo González y Martha Sánchez; a mis tíos Nicolás González y Andrea Quintanar; a mi hermano Freddy Osorio y Vanesa, a mis primos Rigoberto y Rosendo González, quienes son como unos hermanos más para mí. Gracias a todos por su apoyo incondicional y por motivarme a superar cada obstáculo que se me presenta.

A mi asesora la Dra. Nataliya y al Dr. Viacheslav, por su guía y valiosa ayuda en este camino.

A mi esposo, Erik Daniel, quien siempre me da ánimos para alcanzar mis metas; a mi hijo Rosendo Caleb y mi sobrino Edgar Arat, quienes me motivan e inspiran a ser mejor persona y a no rendirme. A mis amadas mascotas.

A todas las personas que creen en mí.

Les dedico esta tesis con todo mi cariño y gratitud.

Índice general

Agradecimientos

Primeramente quiero darle gracias a Dios por darme la fortaleza para seguir adelante y cumplir siempre cada una de mis metas, porque sin él no sé en dónde estaría.

Quiero agradecer a mi asesora, la Dra. Nataliya Kalashnykova, por darme la oportunidad de trabajar con ella, por ser una guía a lo largo de mis estudios de maestría y después en el doctorado, por su apoyo, consejos, críticas constructivas y sugerencias para lograr esta tesis, a pesar de los obstáculos que se nos presentaron, y sobre todo por transmitirme nuevos conocimientos y motivarme a seguir con mis estudios y cada una de mis metas.

También quiero agradecer al Dr. Viacheslav Kalashnikov por escuchar mis presentaciones y darme sus consejos.

Le agradezco también a mi co-asesor, el Dr. José Guadalupe Flores Muñiz por su gran ayuda a lo largo de mi maestría y doctorado, por los consejos, sugerencias, por ser un guía, por su tiempo y todos los conocimientos brindados a lo largo de la elaboración de esta tesis.

Agradezco a mis revisores de tesis, la Dra. María Aracelia Alcorta García y el Dr. Manuel Alejandro Jiménez Lizárraga por sus conocimientos brindados en esta tesis.

Agradezco también a mi familia, a mi mamá la Sra. Esther González Sánchez, a mi papá el Sr. Juvencio Osorio Vera , a mi hermano Freddy Osorio González quien siempre me ha brindado su apoyo incondicional a lo largo de mi vida, por alentarme a superarme a pesar de todos los obstáculos que se me presenten, por quererme y apoyarme en todo.

A mis amados abuelos, Martha Sánchez Catarina y Rosendo González Sánchez, quienes han sido una parte importante a lo largo de mi vida, ya que ellos me han enseñado que no importa la edad, siempre se puede lograr todo lo que nos propongamos, la importancia del respeto y la honestidad. Sin olvidar a mis tíos Nicolás González Sánchez quien ha sido como un segundo padre para mí, y me ha motivado a seguir estudiando y ser una profesional, gracias tío por ser uno de mis ejemplos a seguir.

A mi esposo Erik Daniel Hernández Carrillo quien siempre me motiva y apoya en cada una de mis metas, quien me motiva a no rendirme.

Agradezco a los maestros que me dieron clases en la licenciatura, maestría y doctorado, así como a mis compañeros y amigos que he conseguido a lo largo de mi maestría y doctorado, algunos se fueron y otros se quedaron pero atesoro con mucho cariño el tiempo de su amistad. Quiero agradecer a mis amigos y compañeros de doctorado Vale, Rodrigo, Yulitza, Diana, Yuliana, Karla y Brandon, por sus consejos y brindarme su apoyo. Al Dr. Omar Jorge Ibarra Rojas por sus consejos.

Agradezco por último, pero no menos importante al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por la beca proporcionada la cual fue una gran ayuda a lo largo de la Maestría y después en mis estudios de Doctorado.

A todos ustedes, Muchas Gracias.

Notación

– N localidades, denotadas por i, agrupadas en el conjunto $\mathcal{N} = \{1, ..., N\}$;

– K clases sociales, denotadas por k, agrupadas en el conjunto $\mathcal{K} = \{1, ..., K\}$;

– $\overline{Q}_i^k$ es la población inicial fija de clase k en la localidad i.

– Q_i^k es la población final de clase k en la localidad i, después del movimiento migratorio;

– s_{ij}^k es el flujo migratorio de la clase k desde el origen i hacia el destino j.

– $c_{ij}^k = c_{ij}^k(s_{ij}^k)$ es la función de costo marginal de la migración para la clase k desde el origen i hacia el destino j;

– $u_i^k = u_i^k(Q_i^k)$ es la función de utilidad (atractivo) de la localidad i percibida por la clase k.

Resumen

Este trabajo amplía un modelo binivel de migración humana introducido previamente, al marco del equilibrio consistente con variaciones conjeturales (CCVE), el cual describe el movimiento de los migrantes entre localidades. En el nivel superior, los agentes son los municipios de diferentes localidades en competencia, cuyas estrategias consisten en invertir en las infraestructuras con el objetivo de hacer sus localidades (ciudades, pueblos, etc.) más atractivas, tanto para los residentes actuales como para los migrantes potenciales. En el nivel inferior, los residentes actuales, agrupados en comunidades profesionales, también pueden ser migrantes potenciales. Ellos deciden si migrar o permanecer en su localidad actual, y en caso de optar por la migración, eligen a que localidad trasladarse. Ambos niveles se formulan como problemas de equilibrio.

Se definió el concepto de equilibrio con variaciones conjeturales (CVE) y se establecieron condiciones para garantizar la existencia y unicidad del equilibrio. Además, se abordó el concepto de consistencia para las conjeturas de los migrantes y se formalizó el equilibrio consistente con variaciones conjeturales (CCVE), también se determinaron las condiciones para garantizar la existencia del equilibrio consistente. A diferencia de estudios anteriores sobre variaciones conjeturales, en los cuales los migrantes hacen conjeturas sobre la población final en cada localidad, en este trabajo se propone un nuevo enfoque en el que los migrantes, en cambio, conjeturan directamente la utilidad de cada localidad, simplificando tanto la complejidad del problema como su solución. Además, se demuestra que esta reformulación de de la conjetura es equivalente a la conjetura anterior.

Finalmente, se realiza un experimento numérico con el objetivo de comparar el equilibrio obtenido bajo el enfoque de competencia perfecta, ampliamente utilizado en la literatura previa, con los equilibrios resultantes de conjeturas variacionales distintas, incluyendo el equilibrio consistente. De igual manera, se efectúa una comparación con el equilibrio consistente obtenido en un trabajo previo, en el cual se utiliza la conjetura sobre el cambio en la población final.

Palabras clave: Migración humana, variaciones conjeturales, equilibrio consistente, equilibrio de Nash, Binivel.

Abstract

This work extends a previously introduced bilevel human migration model into the framework of the Consistent Conjectural Variations Equilibrium (CCVE), which describes the movement of migrants between localities. At the upper level, the agents are the municipalities of different localities in competition, whose strategies involve investing in infrastructure with the aim of making their localities (cities, towns, etc.) more attractive to both current residents and potential migrants. At the lower level, current residents, grouped into professional communities, can also act as potential migrants. They decide whether to migrate or remain in their current locality, and if they choose to migrate, they select a destination locality. Both levels are formulated as equilibrium problems.

The concept of Conjectural Variations Equilibrium (CVE) is defined, and conditions are established to ensure the existence and uniqueness of equilibrium. Additionally, the concept of consistency for migrant conjectures is addressed, and the Consistent Conjectural Variations Equilibrium (CCVE) is formalized, with conditions also provided to guarantee the existence of the consistent equilibrium. Unlike previous studies on conjectural variations, in which migrants form conjectures about the final population in each locality, this work proposes a new approach in which migrants instead directly conjecture the utility of each locality, thus simplifying both the complexity of the problem and its solution. Moreover, it is shown that this reformulated conjecture is equivalent to the former population-based one.

Finally, a numerical experiment is conducted with the aim of comparing the equilibrium obtained under the perfect competition assumption, widely used in previous literature, with the equilibria resulting from different conjectural variation approaches, including the consistent equilibrium. A comparison is also made with the consistent equilibrium obtained in a previous study, which was based on conjectures about changes in final population.

Keywords: Human migration, conjectural variations, consistent equilibrium, Nash equilibrium, Bilevel.

Capítulo 1
Introducción

Los modelos de migración humana se han estudiado activamente en muchos países alrededor del mundo, debido a que los datos de predicción de la información son extremadamente útiles a gran escala económica. Predecir datos acerca de la migración puede estipular el desarrollo de instalaciones que promuevan el empleo, la ecología, la educación y los servicios de salud. Recíprocamente, las localidades con una infraestructura más avanzada, mejores oportunidades laborales, ambientes ecológicamente amigables, etc., pueden generar el afecto de los habitantes, atrayendo a más migrantes potenciales. Sin embargo, las instalaciones de vivienda e infraestructuras sobrecargadas pueden disminuir la calidad de vida de sus habitantes, contradiciendo así los principios de Ingeniería de Kansei.

La Ingeniera Kansei (IK) es una de las metodologías precursoras y más completas en el campo del diseño emocional. Se trata de una herramienta de ingeniería que permite captar las necesidades emocionales de los usuarios y establecer modelos matemáticos de predicción que relacionan las características de los productos con dichas necesidades emocionales (como se puede ver en Vergara and Mondragón Donés (2008)). La aplicación de la ingeniería afectiva (Ingeniería de Kansei) a la programación binivel en un caso de migración humana se presenta en Kalashnikov et al. (2014).

1.1 Motivación

El movimiento de la población desde su localidad de origen hacia otra localidad puede estar motivado por muchos factores. Algunas personas migran en búsqueda de mejores condiciones de vida, como accesos a servicios de salud de mayor calidad, empleos mejor remunerados, oportunidades educativas y mayor seguridad pública. Otras personas se ven forzadas a desplazarse debido a la violencia, guerras, persecución, cambio climático o desastres naturales (Nagurney et al. (2021)).

Sin embargo, el crecimiento excesivo de la población en las localidades de destino puede generar efectos negativos, como sobrepoblación, la saturación del transporte público, aumento de la contaminación, insuficiencias en los servicios de recolección de basura, el desempleo y el tráfico vehicular. Estos factores pueden reducir la calidad de vida tanto de los migrantes como de los residentes actuales.En particular, resulta de interés analizar si en términos de utilidad, el cambio de localidad realmente beneficia a los individuos que deciden migrar.

Desde la perspectiva de las autoridades municipales, su objetivo es maximizar la utilidad neta de sus localidades mediante la realización de inversiones en infraestructura, salud, educación, transporte, medio ambiente, entre otros rubros. Por ello, surgen las siguientes preguntas importantes: ¿Cómo impacta la migración al lugar de origen? ¿Cuáles son los efectos en el lugar de destino? ¿Y hasta qué punto es beneficiosa la decisión de trasladarse?

Estas preguntas motivan el presente trabajo, en el cual se extiende el concepto de equilibrio consistente con variaciones conjeturales al contexto de un modelo de migración basado en los trabajos de Kalashnikov and Kalashnykova (2006); Kalashnikov et al. (2007, 2008, 2012, 2014). Este enfoque permite comprender mejor los efectos económicos y sociales de la migración y evaluar si las decisiones de los individuos conducen a un equilibrio estable en las localidades involucradas. Se busca alcanzar un equilibrio tanto entre los migrantes potenciales y los habitantes actuales, como entre el monto de inversión de las autoridades municipales.

1.2 Revisión de literatura

A lo largo del tiempo, se han desarrollado diversas teorías acerca de la migración humana. En el aspecto histórico corto, destaca la excelente encuesta fundamental de Akkoyunlu and Vickerman (2001). Los modelos de migración humana atrajeron un fuerte interés por parte de los investigadores en los años noventa del siglo pasado (cf. Nagurney (1990); Nagurney et al. (1992); Nagurney (1999), entre otros).

Más recientemente, en Cappello et al. (2021), se presenta un modelo de red optimizado para múltiples clases migratorias, incorporando costos y regulaciones migratorias inspirados en la pandemia de COVID-19. En Passacantando et al. (2023), los autores exploran intervenciones políticas sobre los flujos migratorios internacionales, centrándose en la formación de coaliciones entre países de destino para establecer límites a los flujos migratorios y evaluando posibles escenarios derivados con cambios en dichas coaliciones.

La mayoría de los artículos y libros citados anteriormente considera una red de localidades y se desarrollan condiciones que garantizan la existencia y unicidad de un equilibrio en los modelos propuestos. En particular, en estos trabajos se examinaron diversas formas del equilibrio de Nash bajo el supuesto de competencia perfecta, es decir, cada uno de los grupos de migrantes conjetura que su cambio de localidad no tiene ninguna influencia en la utilidad de las ciudades de destino ni en las ciudades de origen.

Este supuesto implica que la estrategia de cada jugador (o migrante) no influye en el entorno del juego. Sin embargo, este enfoque es poco realista, y rara vez se cumple, ya que la migración de ciertos individuos puede alterar el atractivo de una localidad, influyendo así en las decisiones de otros posibles migrantes.

Posteriormente, las ideas de los trabajos propuestos en Nagurney (1990); Nagurney et al. (1992); Nagurney (1999) fueron ampliadas a nuevos trabajos bajo enfoques distintos, por ejemplo, usando el concepto de la conjetura variacional.

1.2.1 Equilibrio con Variaciones Conjeturales

Los equilibrios con variaciones conjeturales (CVE, por sus siglas en inglés) fueron introducidos por Bowley (1924) y Frisch (1933) como otro concepto para dar solución a los juegos estáticos. En este enfoque, cada uno de los jugadores selecciona su conjetura más favorable tomando en cuenta las estrategias de los demás jugadores como una función conjeturada de su propia estrategia. Es decir, cada uno de los jugadores conjetura su estrategia óptima a la respuesta de los demás jugadores ante su estrategia.

No obstante, el uso de este concepto presenta una dificultad cuando el número de jugadores es mayor a dos. En un juego con n jugadores, existen n funciones de mejor respuesta y $n(n-1)$ conjeturas posibles. El problema radica en que la idea descrita arriba es válida únicamente cuando se cumple la siguiente igualdad $n(n-1) = n$ (n es el número total de jugadores y $n(n-1)$ es el número total de las conjeturas), lo que se cumple solamente cuando $n = 2$. Por esta razón, el enfoque propuesto por Bowley y Frisch no garantiza la existencia del equilibrio para juegos con más de dos jugadores, lo cual limitó su aplicación para juegos de dos jugadores (véase, Figuières et al. (2004)).

Aunque la conjetura propuesta por Bowley y Frisch es más realista que la conjetura propuesta por Nash, el equilibrio de Nash siguió siendo el enfoque predominante por años. No obstante, investigaciones posteriores desarrollaron extensiones que superaron estas dificultades.

En particular, en los trabajos de Bulavsky and Kalashnikov (1994, 1995); Isac et al. (2002); Figuières et al. (2004) se amplió este concepto, introduciendo una nueva gama de equilibrios con variaciones conjeturales (CVE), en el que las variaciones conjeturales para cada jugador están representadas por un parámetro especial llamado coeficiente de influencia, los cuales afectan a la estructura del equilibrio de Nash.

En estudios posteriores, Kalashnikov et al. (2007, 2008, 2012, 2014) se amplió el modelo de migración humana al caso donde los coeficientes de variación conjeturados pueden no ser solo constantes, sino también las funciones de la población total en el destino y de la fracción del grupo en este. Además, se consideró la utilidad tanto en la localidad de origen como en la localidad de destino, y se establecieron condiciones que garantizan la existencia y unicidad bajo la conjetura variacional.

Dado que el concepto de conjetura variacional permite la existencia de múltiples soluciones, dependiendo de las conjeturas seleccionadas, se plantea un nuevo problema: ¿cómo determinar cuál es la conjetura más adecuada? Para abordar esta pregunta, Bulavsky (1997) propuso un enfoque completamente nuevo basado en un criterio de consistencia, que da lugar al concepto de equilibrio consistente con variaciones conjeturales.

1.2.2 Equilibrio Consistente

En Bulavsky (1997) se formuló un criterio de consistencia para modelos de oligopolio, donde cada agente conoce las conjeturas de sus rivales y puede verificar la *consistencia* de su propia conjetura mediante un procedimiento de verificación. Si todas las conjeturas resultan ser consistentes entre sí, se denomina equilibrio consistente con variaciones conjeturales (CCVE, por sus siglas en inglés).

Sin embargo, este procedimiento de verificación no puede aplicarse directamente a modelos que poseen una estructura distinta a los problemas de oligopolio, como es el caso de los modelos de migración humana. Por lo tanto, el objetivo de este trabajo es extender el concepto de equilibrio consistente con variaciones conjeturales (equilibrio consistente) al modelo binivel de migración humana de Kalashnikov et al. (2014); Osorio González et al. (2024).

Para lograrlo, se utiliza el enfoque alternativo desarrollado por Kalashnikov et al. (2019), que permite formular un **nuevo criterio de consistencia** mediante la construcción de un **meta-juego**. En el meta-juego, los jugadores son los mismos agentes que pertenecen al modelo original, pero ahora utilizan sus conjeturas como estrategias.

Además, en Kalashnikov et al. (2019) se demuestra que el equilibrio consistente con variaciones conjeturales (CCVE) del modelo original es equivalente al equilibrio de Nash para el meta-juego. Este meta-juego se formula como un juego de dos etapas:

- **Primera etapa**: Los jugadores seleccionan sus conjeturas factibles (coeficientes de influencia) como sus estrategias del juego.
- **Segunda etapa**: Con base en las conjeturas seleccionadas, los mismos jugadores resuelven el modelo original, optimizando su función objetivo basada en su estrategia previa.

Este meta-juego se utiliza como base para definir el equilibrio consistente con variaciones conjeturales en el nivel inferior del modelo de migración humana. Una aplicación de esta metodología puede encontrarse en el modelo financiero de Solis-García et al. (2022) y en el modelo de migración humana de Osorio González et al. (2024).

En el modelo binivel de migración humana de Kalashnikov et al. (2014); Osorio González et al. (2024) se consideran los siguientes niveles.

- **Nivel inferior**: Los residentes actuales son migrantes potenciales a otras localidades. Toman su decisión de a dónde migrar (si es que lo hacen) con el objetivo de mejorar su calidad de vida.
- **Nivel superior**: Las autoridades municipales compiten entre ellos, utilizando como sus estrategias posibles inversiones en la infraestructura de sus localidades. Su objetivo es mantener a los residentes actuales y atraer a posibles migrantes de otras localidades.

Las funciones de utilidad consideradas en este modelo reflejan la técnica de la ingeniería afectiva (ingeniería Kansei), por lo que sus valores se basan en el afecto de los migrantes potenciales hacia las localidades de origen y posibles destinos.

En Kalashnikov et al. (2014); Osorio González et al. (2024) se definieron las conjeturas consistentes, con una estructura binivel donde en el nivel superior las localidades están en competencia, y en el nivel inferior se busca el equilibrio entre los migrantes potenciales y los habitantes actuales. En especial, en Osorio González et al. (2024) se define el equilibrio consistente con variaciones conjeturadas, y se proporcionaron condiciones para garantizar la existencia del equilibrio consistente.

A pesar del importante avance en los modelos de migración con variaciones conjeturales, aún se presentan algunas limitaciones. Por ejemplo, la mayoría no considera conjeturas sobre la utilidad directamente, ni incorpora elementos afectivos en la toma de decisiones migratorias.

Con base en lo anterior, a continuación se establecen los objetivos, las aportaciones y la estructura general de este trabajo.

1.3 Objetivos

A partir de la motivación planteada y del análisis de la literatura especializada, se definen a continuación los objetivos que guían el desarrollo del presente trabajo.

Objetivo general:

Extender el concepto de equilibrio consistente con variaciones conjeturales al modelo binivel de migración humana propuesto en trabajos previos, incorporando los principios de Ingeniería de Kansei. Para ello se aplicará el concepto de "meta-juego" desarrollado en (cf. Kalashnikov et al. (2019)), con el fin de analizar el modelo propuesto bajo el marco del equilibrio consistente con variaciones conjeturales, evaluando su impacto en la toma de decisiones de los migrantes.

Objetivos específicos:

- Formular un modelo de migración basado en la estructura binivel propuesta en Kalashnikov et al. (2014), retomando elementos clave de los trabajos de Kalashnikov and Kalashnykova (2006); Kalashnikov et al. (2007, 2008, 2012, 2014); Osorio González et al. (2024). Esta formulación incluirá el concepto de equilibrio consistente con variaciones conjeturales, tomando en cuenta la influencia de la población en la utilidad de cada localidad y el concepto de Ingeniería de Kansei.
- Definir y aplicar el concepto de equilibrio con variaciones conjeturales (CVE) en el modelo de migración humana propuesto, así como establecer las condiciones necesarias para garantizan la existencia y unicidad del equilibrio con variaciones conjeturales en el modelo de migración humana.
- Utilizar el concepto de meta-juego para definir la consistencia de las conjeturas y establecer las condiciones que garantizan la existencia del equilibrio consistente con variaciones conjeturales (CCVE).
- Comparar los resultados obtenidos bajo diferentes supuestos (competencia perfecta, equilibrio con variaciones conjeturales y equilibrio consistente con variaciones conjeturales) con los modelos previos, con el fin de analizar las diferencias en los patrones de migración. Para ello, se implementara un experimento numérico basado en datos de estudios anteriores, lo cual permitirá evaluar el desempeño del modelo propuesto y analizar los resultados obtenidos.

1.4 Aportaciones

- El artículo Osorio González et al. (2024) presenta parte de la investigación desarrollada durante mis estudios de doctorado, el cual ha sido publicado en la revista JOTA. El modelo de migración humano presentado en este trabajo considera las mismas conjeturas que están en Kalashnikov and Kalashnykova (2006); Kalashnikov et al. (2007, 2008, 2012, 2014). Sin embargo, para la formulación de las conjeturas consistentes y la formulación del criterio de la consistencia se aplica el resultado teórico publicado en Kalashnikov et al. (2019), es decir, construimos el meta-juego, en el cual los jugadores son los mismos, pero sus estrategias son las conjeturas. A partir de este enfoque, se busca el equilibrio de Nash, el cual nos da las conjeturas consistentes. En Osorio González et al. (2024), está demostrada la existencia del equilibrio consistente.

- Se definió el meta-juego para el modelo de migración humana propuesto formulado como un juego de dos etapas. De igual manera, se definió el concepto de consistencia para las conjeturas, así como el equilibrio consistente con variaciones conjeturales (CCVE), utilizando su equivalencia con el equilibrio de Nash en el meta-juego asociando al modelo original.

- Se reformulo la conjetura utilizada en trabajos anteriores, en la cual los migrantes conjeturaban la razón de cambio de la población final en su localidad de origen y destino con respecto al flujo migratorio. En este trabajo, se propone una nueva conjetura, conjeturando directamente la utilidad esperada en las localidades. Este cambio está inspirado en la modificación introducida por Bulavsky (1997), donde la conjetura sobre el volumen total de producción en un modelo de oligopolio fue reemplazada por una conjetura sobre el precio de mercado.

- Se formulo y demostró la existencia del equilibrio consistente y la equivalencia entre las conjeturas propuestas y las conjeturas del artículo Osorio González et al. (2024).

- Como resultado adicional, derivado de la nueva conjetura, se logró extender el modelo para que pueda aplicarse a funciones no lineales en el nivel superior y funciones de utilidad no diferenciables en el nivel inferior, ampliando así su aplicabilidad a contextos más realistas y complejos.

1.5 Estructura de la tesis

La tesis se encuentra estructurada de la siguiente manera: En el Capítulo 1, se presenta una revisión de la literatura en la que se fundamenta la extensión desarrollada en esta tesis, basada en los trabajos fundamentales sobre modelos de migración humana. En esta sección se da una breve introducción de los conceptos de equilibrio con variaciones conjeturales, el concepto de equilibrio consistente con variaciones conjeturales y el concepto de meta-juego. Además, se discuten las contribuciones más relevantes en la literatura que han abordado estos enfoques. En el capítulo 2, se introduce la formulación del modelo de migración humana basado en los trabajos de Kalashnikov and Kalashnykova (2006); Kalashnikov et al. (2007, 2008, 2012, 2014); Osorio González et al. (2024) y en especial en la estructura binivel presentada en Kalashnikov et al. (2012, 2014). En el capítulo 3, se define el equilibrio en el nivel inferior, y se demuestra la existencia y unicidad del equilibrio. También, se establece y demuestra un teorema de equivalencia entre las conjeturas formuladas en esta tesis y las propuestas en Osorio González et al. (2024). En el capítulo 4, se define el equilibrio en el nivel superior del modelo propuesto, considerando el marco teórico previamente establecido. En el capítulo 5, se desarrollaron condiciones para garantizar la existencia del equilibrio consistente con variaciones conjeturales, utilizando como base los resultados presentados en Kalashnikov et al. (2019) y extendiéndolos al contexto propuesto. En el capítulo 6, se lleva a cabo un experimento numérico con el objetivo de comparar los resultados obtenidos en esta tesis con los del artículo Osorio González et al. (2024), analizando las diferencias y similitudes en el comportamiento del modelo. En el capítulo 7, se presentan las conclusiones generales del trabajo y se plantea el trabajo a futuro. Finalmente, en el apéndice se incluyen las demostraciones completas de los teoremas.

Capítulo 2
Especificación del modelo

Modelo básico:
Similar a Nagurney et al. (1992); Kalashnikov and Kalashnykova (2006); Kalashnikov et al. (2007, 2008, 2014); Osorio González et al. (2024) se introduce un modelo general de red con múltiples clases de migración humana. Se considera una economía cerrada con los siguientes parámetros:

- N localidades (denotadas típicamente por i o j), agrupadas en el conjunto $\mathcal{N} = \{1, ..., N\}$.
- K clases sociales (denotadas típicamente por k), agrupadas en el conjunto $\mathcal{K} = \{1, ..., K\}$.
- $\overline{Q}_i^k$ denota la población inicial, fija, de clase k en la localidad i.

  Las variables consideradas en el modelo se definen a continuación:

- s_{ij}^k denota el flujo migratorio de la clase k desde el origen i hacia el destino j.
- Q_i^k denota la población final de clase k en la localidad i, después del movimiento migratorio.

A continuación, se describen las funciones que modelan los costos de la migración y la utilidad percibida por los individuos:

- $c_{ij}^k = c_{ij}^k(s_{ij}^k)$ denota el costo marginal de la migración percibido por la clase k al trasladarse desde la localidad de origen i hacia la localidad de destino j.
- $u_i^k = u_i^k(Q_i^k)$ denota la utilidad afectiva (o atractivo) de la localidad i, percibida por la clase k.

Las variables de flujo migratorio s_{ij}^k y las variables de población final Q_i^k se agrupan en los siguientes vectores:

$$s = \{s_{ij}^k | k \in \mathcal{K}, i, j \in \mathcal{N}, i \neq j\} \in \mathbb{R}^{KN(N-1)}, \tag{1}$$

$$Q = \{Q_i^k | k \in \mathcal{K}, i \in \mathcal{N}\} \in \mathbb{R}^{KN}. \tag{2}$$

Las funciones de costos c_{ij}^k y las funciones de utilidad u_i^k se agrupan en las siguientes funciones vectoriales:

$$c(s) = \{c_{ij}^k(s_{ij}^k) | k \in \mathcal{K}, i, j \in \mathcal{N}, i \neq j\}, \tag{3}$$

$$u(Q) = \{u_i^k(Q_i^k) | k \in \mathcal{K}, i \in \mathcal{N}\}. \tag{4}$$

Todos los vectores se consideran como vectores columna.

Basándonos en el concepto de Ingeniería de Kansei, se asume que el costo de la migración refleja no solo el costo del movimiento físico, sino también el costo personal y psicológico (afecto) percibido por los individuos de la clase k al trasladarse entre localidades. Este costo de migración c_{ij}^k depende del flujo migratorio s_{ij}^k, es decir, $c_{ij}^k = c_{ij}^k(s_{ij}^k)$, y se considera siendo siempre no negativo.

De forma análoga, la utilidad afectiva u_i^k depende de la población final Q_i^k de la clase k en esta localidad i, es decir, $u_i^k = u_i^k(Q_i^k)$, $k \in \mathcal{K}, i \in \mathcal{N}$. Esta función también refleja el valor personal y psicológico percibido por los individuos.

Esta suposición es bastante natural: en muchos casos, las ciudades con mayor población brindan muchas más oportunidades de empleo, mejores servicios médicos e instalaciones, una infraestructura desarrollada, etc., lo cual es descrito fácilmente con los principios de ingeniería de Kansei. Por otro lado, cuando el desarrollo de la infraestructura no logra mantenerse al ritmo de las demandas de la ciudad moderna, el aumento de la población puede conducir a una cierta disminución en el nivel de vida, una reducción en el afecto de los habitantes por su localidad y, por lo tanto, una disminución en los valores de utilidad afectiva.

Estas funciones de utilidad afectiva u_i^k también incorporan parámetros que reflejan los niveles de inversión realizados por las autoridades municipales de las localidades para mejorar la infraestructura, las oportunidades de empleo, la construcción de viviendas, el suministro de energía, la alimentación, etc., todo ello alineado con los principios de ingeniería de Kansei. Tales inversiones realizadas por las autoridades municipales representan las estrategias implementadas en el juego del nivel superior, desarrollado en el capítulo 5.

Finalmente, con el propósito de extender los modelos de migración humana propuestos en Nagurney et al. (1992); Kalashnikov and Kalashnykova (2006); Kalashnikov et al. (2007, 2008, 2014); Osorio González et al. (2024), en la siguiente sección se procederá a definir formalmente el problema correspondiente al nivel inferior.

Capítulo 3

Equilibrio en el nivel inferior

Asumiendo que no hay migración repetida o en cadena, las ecuaciones de conservación de flujo para la clase k en la localidad i se expresan de la siguiente manera:

$$Q_i^k = \overline{Q}_i^k + \sum_{j \in \mathcal{N} \setminus \{i\}} s_{ji}^k - \sum_{j \in \mathcal{N} \setminus \{i\}} s_{ij}^k, \quad \forall k \in \mathcal{K}, i \in \mathcal{N}; \tag{5}$$

$$\sum_{j \in \mathcal{N} \setminus \{i\}} s_{ij}^k \leq \overline{Q}_i^k, \quad \forall k \in \mathcal{K}, i \in \mathcal{N}; \tag{6}$$

$$s_{ij}^k \geq 0, \quad \forall k \in \mathcal{K}, i, j \in \mathcal{N}, i \neq j. \tag{7}$$

Dado que se considera una economía cerrada, se excluyen los nacimientos, las muertes y las migraciones hacia o desde localidades externas al modelo.

La igualdad (5) establece que la población final de la clase k en la localidad i será igual a la población inicial de la clase k en la localidad i, más el flujo migratorio que entra a i desde todas las otras localidades para la misma clase, menos el flujo migratorio que sale de i hacia cualquier otra localidad de esa misma clase k. La desigualdad (6) representa que el flujo migratorio total que sale de la localidad i de clase k no puede exceder la población inicial de la clase, ya que no se permite la migración en cadena. Las desigualdades (7) son las restricciones usuales de no negatividad.

El conjunto factible del modelo se define como:

$$M = \{(Q, s) | (Q, s) \text{ satisface } (5) - (7)\}. \tag{8}$$

Al igual que en el trabajo de Nagurney et al. (1992), se asume que los migrantes son racionales y están motivados por la utilidad o afecto asociado a las localidades. Se considera que la migración continuará hasta que ningún individuo tenga beneficio por moverse a otra localidad; es decir, cuando no tenga ningún motivo para mudarse, ya que una decisión unilateral ya no generará una ganancia neta positiva (la ganancia en la utilidad esperada menos el costo de migración). En el equilibrio, la ganancia asociada a cada localidad debe ser máxima y no negativa.

A continuación, introducimos el concepto de variaciones conjeturales y las conjeturas de los migrantes, tal como se define en Osorio González et al. (2024).

Sea $\omega_{ij}^{k+} \geq 0$ un coeficiente de influencia conjeturado por un individuo de clase k que se mueve de la localidad i a la j, determinado por el supuesto de que después de la migración de s_{ij}^k individuos de clase k de i a j, la población total de clase k en la localidad j será igual a:

$$Q_j^k = \overline{Q}_j^k + \omega_{ij}^{k+} s_{ij}^k, \quad k \in \mathcal{K}, i, j \in \mathcal{N}, i \neq j, \tag{9}$$

De manera análoga, sea $\omega_{ij}^{k-} \geq 0$ un coeficiente de influencia conjeturado por un individuo de clase k que se mueve de la localidad i a la j, determinado por el supuesto de que después de la migración de s_{ij}^k individuos de clase k de i a j, la población total de clase k en i será igual a

$$Q_i^k = \overline{Q}_i^k - \omega_{ij}^{k-} s_{ij}^k, \quad k \in \mathcal{K}, i, j \in \mathcal{N}, i \neq j. \tag{10}$$

Los siguientes axiomas describen el comportamiento de las funciones de utilidad afectiva y las variaciones esperadas de los valores de utilidad:

A1 *La utilidad afectiva $u_i^k = u_i^k(Q_i^k)$, definida para cada clase $k \in \mathcal{K}$ y cada localidad $i \in \mathcal{N}$, es una función decreciente y diferenciable.*

A2 *Cada individuo de clase k, al considerar su posibilidad de moverse de la localidad i a la localidad j, toma en cuenta no solo la diferencia en los valores de utilidad afectiva en la localidad de origen y el destino, sino también el incremento esperado (negativo) del valor de la función de utilidad en j:*

$$s_{ij}^k \omega_{ij}^{k+} \frac{du_j^k}{dQ_j^k}, \quad k \in \mathcal{K}, i, j \in \mathcal{N}, j \neq i, \tag{11}$$

y el incremento esperado (positivo) del valor de la utilidad en la localidad i:

$$-s_{ij}^k \omega_{ij}^{k-} \frac{du_i^k}{dQ_i^k}, \quad k \in \mathcal{K}, i, j \in \mathcal{N}, j \neq i. \tag{12}$$

Observación 1 *Los signos de los incrementos anteriores están determinados por el hecho de que los flujos migratorios, junto con los coeficientes de influencia, son no negativos, mientras que, por el supuesto **A1**, los valores de las derivadas de las funciones de utilidad son negativos.*

Observación 2 *Para interpretar lo que realmente significan los coeficientes de influencia, supongamos que cada individuo de la clase k, al considerar su posibilidad de trasladarse de la localidad i a la localidad j, estima la población total resultante de la clase k en la localidad j como una función conjetural determinada por la fórmula* (9)*, mientras que la población total resultante de la clase k en la localidad i, estaría dada por la función conjetural* (10)*.*

En otras palabras, los valores de $\omega_{ij}^{k+}, \omega_{ij}^{k-}$ se pueden interpretar como tasas de cambio en la población total con respecto al flujo migratorio:

$$\frac{\partial Q_j^k}{\partial s_{ij}^k} = \omega_{ij}^{k+} \geq 0, \quad k \in \mathcal{K}, i, j \in \mathcal{N}, j \neq i, \tag{13}$$

$$\frac{\partial Q_i^k}{\partial s_{ij}^k} = -\omega_{ij}^{k-} \leq 0, \quad k \in \mathcal{K}, i, j \in \mathcal{N}, j \neq i. \tag{14}$$

Estas conjeturas reflejan las expectativas que los individuos tienen respecto a los cambios en la población de sus localidades de origen y destino después de la migración.

El caso cuando $\omega_{ij}^{k+} = \omega_{ij}^{k-} = 1$ corresponde a la conjetura de Cournot, en la cual el individuo anticipa plenamente el efecto de su migración sobre las localidades. Por otro lado el caso cuando $\omega_{ij}^{k+} = \omega_{ij}^{k-} = 0$ corresponde a la conjetura de competencia perfecta, en la que el individuo asume que su migración no tiene impacto apreciable en las localidades respectivas.

El modelo presentado permite que el coeficiente de influencia tome cualquier valor no negativo, describiendo así una gama completa de agentes con diferentes niveles de precaución. De hecho, los valores más altos del coeficiente de influencia son característicos de agentes con cierta aversión al riesgo, mientras que los valores más bajos del coeficiente de influencia describen a personas menos cautelosas, que no creen que su traslado a otra localidad afecte en gran medida a la población total en esa localidad. Estas situaciones justifican la introducción de los coeficientes de influencia.

Dado que las funciones de utilidad son estrictamente decrecientes, podemos traducir las conjeturas sobre las poblaciones esperadas Q_i^k y Q_j^k, descritas mediante los coeficientes $\omega_{ij}^{k+}, \omega_{ij}^{k-}$, en conjeturas equivalentes sobre los valores marginales de utilidad. Esta nueva formulación permite trabajar directamente con las derivadas de las funciones de utilidad con respecto al flujo migratorio.

Este cambio en el tipo de conjetura está inspirado en la modificación propuesta en Bulavsky (1997), donde la conjetura original sobre el volumen total de producción en un modelo de oligopolio es reemplazada por una conjetura sobre el precio de mercado.

Para calcular el beneficio de moverse a otra localidad, cada individuo que migra de una localidad i a j toma en cuenta que los individuos que habitan en la localidad j pueden migrar a otra localidad y que los habitantes de otras localidades pueden migrar a la localidad i, como respuesta a su decisión. Es decir, un individuo en i que se moverá a j conjetura la utilidad en las localidades i y j como una función de reacción a su cambio de localidad de la siguiente manera:

$$\frac{\partial u_j^k}{\partial s_{ij}^k} = \frac{du_j^k}{dQ_j^k}\frac{\partial Q_j^k}{\partial s_{ij}^k} = \frac{du_j^k}{dQ_j^k}\omega_{ij}^{k+} = -\nu_{ij}^{k+} \leq 0, \quad k \in \mathcal{K}, i,j \in \mathcal{N}, j \neq i,$$

$$\frac{\partial u_i^k}{\partial s_{ij}^k} = \frac{du_i^k}{dQ_i^k}\frac{\partial Q_i^k}{\partial s_{ij}^k} = -\frac{du_i^k}{dQ_i^k}\omega_{ij}^{k-} = \nu_{ij}^{k-} \geq 0, \quad k \in \mathcal{K}, i,j \in \mathcal{N}, j \neq i.$$

En las relaciones anteriores, se introducen los signos negativos para trabajar con valores no negativos de ν_{ij}^{k+} y ν_{ij}^{k-}.

Entonces, podemos considerar las siguientes relaciones como nuevas conjeturas sobre las utilidades marginales percibidas por los individuos al migrar de la localidad i a la localidad j:

$$\frac{\partial u_j^k}{\partial s_{ij}^k} = -\nu_{ij}^{k+}, \quad k \in \mathcal{K}, i,j \in \mathcal{N}, j \neq i, \tag{15}$$

$$\frac{\partial u_i^k}{\partial s_{ij}^k} = \nu_{ij}^{k-}, \quad k \in \mathcal{K}, i,j \in \mathcal{N}, j \neq i. \tag{16}$$

Los valores de ν_{ij}^{k+} y ν_{ij}^{k-} se pueden interpretarse como los cambios de las utilidades u_j^k y u_i^k, respectivamente, con respecto al flujo migratorio s_{ij}^k. Además, estos valores (coeficientes) pueden ser agrupados en vectores de la siguiente manera:

$$\nu^+ = \{\nu_{ij}^{k+} | k \in \mathcal{K}, i,j \in \mathcal{N}, i \neq j\} \in \mathbb{R}^{KN(N-1)}, \tag{17}$$

$$\nu^- = \{\nu_{ij}^{k-} | k \in \mathcal{K}, i,j \in \mathcal{N}, i \neq j\} \in \mathbb{R}^{KN(N-1)}. \tag{18}$$

Entonces, podemos reescribir las expresiones (11) y (12) de la siguiente manera:

$$s_{ij}^k \omega_{ij}^{k+} \frac{\partial u_j^k}{\partial Q_j^k} = -s_{ij}^k \nu_{ij}^{k+}, \quad k \in \mathcal{K}, i,j \in \mathcal{N}, j \neq i, \tag{19}$$

$$-s_{ij}^k \omega_{ij}^{k-} \frac{\partial u_i^k}{\partial Q_i^k} = s_{ij}^k \nu_{ij}^{k-}, \quad k \in \mathcal{K}, i,j \in \mathcal{N}, j \neq i. \tag{20}$$

Nota 1. A partir de esta nueva formulación de la conjetura, podemos permitir que las funciones de utilidad $u_i^k = u_i^k(Q_i^k)$, $k \in \mathcal{K}, i, j \in \mathcal{N}, j \neq i$, sean únicamente funciones continuas y estrictamente decrecientes, sin requerir que sean diferenciables. Más adelante, demostraremos que las nuevas conjeturas dadas en las expresiones (15)–(16) son equivalentes a las conjeturas originales (13)–(14).

Antes de definir la consistencia de las conjeturas, es necesario introducir el concepto de **equilibrio exterior**. Para ello, se presenta a continuación la definición del estado de equilibrio exterior para el modelo de migración humana en el nivel inferior, utilizando la nueva formulación de la conjetura.

Definición1 *Sean $\nu^+, \nu^- \geq 0$ fijos. Un vector de poblaciones y flujos migratorios $(Q^*, s^*) \in M$ es un* ***equilibrio exterior*** *en el nivel inferior, si para cada clase $k \in \mathcal{K}$, y para cada par de localidades (i, j), $i, j \in \mathcal{N}, i \neq j$, se cumplen las siguientes relaciones:*

$$u_i^k(Q_i^{k*}) + s_{ij}^{k*}\nu_{ij}^{k-} + c_{ij}^k(s_{ij}^{k*}) \begin{cases} = u_j^k(Q_j^{k*}) - s_{ij}^{k*}\nu_{ij}^{k+} - \lambda_i^k \ , \ si \ \ s_{ij}^{k*} > 0 \\ \geq u_j^k(Q_j^{k*}) - s_{ij}^{k*}\nu_{ij}^{k+} - \lambda_i^k \ , \ si \ \ s_{ij}^{k*} = 0 \end{cases} \tag{21}$$

$\forall k \in \mathcal{K}$ e $i, j \in \mathcal{N}, i \neq j$;

$$\lambda_i^k \begin{cases} \geq 0 \ , \ si \displaystyle\sum_{j \in \mathcal{N} \setminus \{i\}} s_{ij}^{k*} = \overline{Q}_i^k \\ = 0 \ , \ si \displaystyle\sum_{j \in \mathcal{N} \setminus \{i\}} s_{ij}^{k*} < \overline{Q}_i^k \end{cases} \tag{22}$$

$\forall k \in \mathcal{K}$ e $i \in \mathcal{N}$; donde los coeficientes λ_i^k son multiplicadores de Lagrange.

Las condiciones de equilibrio (21) y (22) son exactamente las condiciones de optimalidad de Karush-Kuhn-Tucker aplicadas al problema de optimización de los individuos de clase $k \in \mathcal{K}$ que viajan entre la localidad $i \in \mathcal{N}$ y $j \in \mathcal{N} \setminus \{i\}$:

$$\max_{s_{ij}^k} \left\{ \left[u_j^k(Q_j^k) - u_i^k(Q_i^k)\right] s_{ij}^k - \int_0^{s_{ij}^k} c_{ij}^k(t)\, dt \right\} \tag{23}$$

$$\text{sujeto a: } (Q, s) \in M, \tag{24}$$

donde la variable s_{ij}^k puede cambiar arbitrariamente dentro de la región factible M, dada por las restricciones (5)–(7), y la tasa de variación de las variables u_i^k y u_j^k se determina con los coeficientes de influencia conjeturales ν_{ij}^{k-} y ν_{ij}^{k+}, respectivamente.

$$\pi_{ij}^k = \left[u_j^k(Q_j^{k^*}) - u_i^k(Q_i^{k^*})\right] s_{ij}^{k^*} - \int_0^{s_{ij}^{k^*}} c_{ij}^k(t)\,dt, \tag{25}$$

donde (Q^*, s^*) es el equilibrio exterior para ν. Utilizaremos esta función dentro del metajuego y el experimento numérico en las siguientes secciones.

Se puede dar una interpretación económica de las condiciones de equilibrio (21) y (22) de la siguiente manera: el grupo de migrantes de clase k que se trasladan de la localidad i a la localidad j en un número total de $s_{ij}^{k^*}$ personas si, y sólo si, la diferencia marginal en la utilidad es igual (si $s_{ij}^{k^*} > 0$) o menor (si $s_{ij}^{k^*} = 0$) al costo marginal de transporte más el multiplicador de Lagrange correspondiente. A su vez, el multiplicador de Lagrange λ_i^k, asociado con la restricción (6) para prohibir la migración en cadena, puede tener un valor positivo solo si todos los residentes del grupo k abandonan la localidad i; de lo contrario, es igual a cero.

Con el objetivo de simplificar la notación en los pasos siguientes, introducimos el siguiente vector auxiliar:

$$d(s^*) = \{d_{ij}^k(s_{ij}^{k^*}) | k \in \mathcal{K}, i, j \in \mathcal{N}, i \neq j\}, \tag{26}$$

donde

$$d_{ij}^k(s_{ij}^{k^*}) = s_{ij}^{k^*}\nu_{ij}^{k-} + s_{ij}^{k^*}\nu_{ij}^{k+} \tag{27}$$

$$= s_{ij}^{k^*}(\nu_{ij}^{k-} + \nu_{ij}^{k+}), \tag{28}$$

para todo $k \in \mathcal{K}$ e $i, j \in \mathcal{N}, i \neq j$

Si asumimos que los coeficientes de influencia son constantes y no negativos, podemos demostrar la existencia y unicidad del equilibrio. Este resultado se presenta en los siguientes teoremas.

Teorema 1 *Sean $\nu^+, \nu^- \geq 0$ fijos. Un vector de poblaciones y flujos migratorios $(Q^*, s^*) \in M$ satisface las condiciones de equilibrio exterior* (21) *y* (22) *si, y sólo si, resuelve la siguiente desigualdad variacional:*

$$\langle -u(Q^*), Q - Q^*\rangle + \langle c(s^*) + d(s^*), s - s^*\rangle \geq 0, \forall (Q, s) \in M \tag{29}$$

Demostración. Ver apéndice 8.1.

En contraste con la formulación anterior, donde las conjeturas se realizan sobre la población final de las localidades, podemos relajar las propiedades requeridas de las funciones del modelo, exigiendo únicamente continuidad para garantizar la existencia del equilibrio con variaciones conjeturales en el problema de migración humana.

Teorema 2 *(Existencia) Sean* $\nu^+, \nu^- \geq 0$ *fijos. Si las funciones de utilidad* $u_i^k(Q_i^k), k \in \mathcal{K}, i \in \mathcal{N}$*; y las funciones de costos de migración* $c_{ij}^k(s_{ij}^k), k \in \mathcal{K}, i, j \in \mathcal{N}, i \neq j$*; son continuas, entonces existe el equilibrio exterior.*

Demostración. Ver apéndice 8.2.

De forma análoga a trabajos previos, la monotonía estricta de la función vectorial en la desigualdad variacional (29) constituye una condición suficiente para garantizar la unicidad del equilibrio con variaciones conjeturales.

Teorema 3 *(Unicidad) Sean* $\nu^+, \nu^- \geq 0$ *fijos y consideremos la desigualdad variacional dada por* (29).

Si el operador

$$\begin{pmatrix} -u(Q) \\ c(s) + d(s) \end{pmatrix} : R^{K\times N} \times R^{K\times N\times(N-1)} \to R^{K\times N} \times R^{K\times N\times(N-1)}$$

es estrictamente monótono sobre M*, es decir,*

$$\left\langle \begin{pmatrix} -u(Q^1) \\ c(s^1) + d(s^1) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -u(Q^2) \\ c(s^2) + d(s^2) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Q^1 - Q^2 \\ s^1 - s^2 \end{pmatrix} \right\rangle > 0, \forall \begin{pmatrix} Q^1 \\ s^1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} Q^2 \\ s^2 \end{pmatrix},$$

$\forall (Q^1, s^1), (Q^2, s^2) \in M$*, entonces el equilibrio exterior (si existe) es único.*

Demostración. Ver apéndice 8.1.

Corolario 1 *Sean* $\nu^+, \nu^- \geq 0$ *fijos. Si las funciones de utilidad* $u_i^k(Q_i^k), k \in \mathcal{K}, i, i \in \mathcal{N}$*; son estrictamente decrecientes y continuas, y las funciones de costos de migración* $c_{ij}^k(s_{ij}^k), k \in \mathcal{K}, i, j \in \mathcal{N}, i \neq j$*; son estrictamente crecientes y continuas, entonces* $(Q^*, s^*) \in M$ *el equilibrio exterior existe y es único.*

Para concluir esta sección, presentamos el siguiente teorema que establece la equivalencia entre las conjeturas originales introducidas en Kalashnikov et al. (2014); Osorio González et al. (2024) y las nuevas conjeturas propuestas en este trabajo, es decir, la equivalencia de las conjeturas $(\nu_{ij}^{k+}, \nu_{ij}^{k-})$ y $(\omega_{ij}^{k+}, \omega_{ij}^{k-})$.

Teorema 4 *(Equivalencia de las conjeturas) La definición de equilibrio (Definición 1) con las conjeturas* $(\nu_{ij}^{k+}, \nu_{ij}^{k-}) \geq 0$, *dadas por* (15)–(16), *es equivalente a la definición de equilibrio (véase Osorio González et al. (2024), Definición 3.1]) con las conjeturas* $(\omega_{ij}^{k+}, \omega_{ij}^{k-}) \geq 0$, *dadas por* (13)–(14), *siempre y cuando las funciones de utilidad* $u_i^k(Q_i^k)$ *sean estrictamente decrecientes, es decir,* $u_i^{k'}(Q_i^k) < 0$ *para todo* $i \in \mathcal{N}, k \in \mathcal{K}$.

Demostración. Ver apéndice 8.4.

Esta equivalencia permite escoger entre las dos formulaciones alternativas de las conjeturas, dependiendo de las características disponibles de las funciones de utilidad (derivabilidad o continuidad), sin afectar el equilibrio resultante.

Un resultado adicional se presenta a continuación en la siguiente nota.

Nota 2. El equilibrio (exterior) con las conjeturas $(\nu_{ij}^{k+}, \nu_{ij}^{k-})$ en realidad depende únicamente de la suma $\nu_{ij}^k = \nu_{ij}^{k-} + \nu_{ij}^{k+}$, como se puede ver en la identidad (28). Es decir, todos los vectores de conjeturas $(\nu^+, \nu^-) \geq 0$ tales que $\nu^- + \nu^+ = \nu \geq 0$ tienen el mismo equilibrio exterior (s^ν, Q^ν). Por lo tanto, es suficiente considerar sólo las conjeturas de la forma $(\nu_{ij}^{k+}, \nu_{ij}^{k-}) = (\nu_{ij}^k, 0)$, con $\nu_{ij}^k \geq 0$. Lo anterior justifica su aplicación a los experimentos numéricos más adelante.

Capítulo 4

Equilibrio en el nivel superior

De manera similar a Kalashnikov et al. (2014), suponemos que la función de utilidad afectiva de cada localidad i y de cada migrante potencial de la clase k, tiene la siguiente forma:

$$u_i^k(Q_i^k) = A_i^k - \frac{B_i^k}{R_i} Q_i^k - \beta_i^k (Q_i^k)^2, \quad \forall k \in \mathcal{K}, i \in \mathcal{N}, \tag{30}$$

donde A_i^k, R_i, B_i^k, $\beta_i^k > 0$ son parámetros relacionados con la infraestructura y/o factores ambientales en general de las localidades percibidas por los grupos de **migrantes** k en la localidad i. Por ejemplo, el coeficiente A_i^k podría representar el atractivo de la localidad i se basa en su infraestructura, oportunidad laboral, el costo promedio de un hogar, calidad del aire, etc. Por otra parte, los coeficientes B_i^k y β_i^k pueden representar que tan rápido decrece el atractivo de la localidad i con el aumento de la población. Finalmente, el parámetro $R_i > 0$ representa la cantidad de inversión por parte de las autoridades de la localidad i en la mejora del entorno para los recién llegados y los habitantes habituales: cuanto mayor sea la cantidad invertida, menor será el efecto negativo del crecimiento de la población en el atractivo de la localidad y grado de afecto tanto para los residentes actuales como para los habitantes potenciales.

Las autoridades municipales de la localidad i eligen el monto de inversión $R_i > 0$ con el objetivo de incrementar el atractivo de las localidades. Para lograr este objetivo, cada autoridad municipal busca maximizar su función de utilidad afectiva del municipio.

Aquí, la función de utilidad afectiva del municipio $U_i = U_i(R)$ de la localidad i, es la suma ponderada de las funciones de utilidad de todas las clases de migrantes potenciales de la localidad i, definida de la siguiente manera:

$$U_i(R) = \sum_{k \in \mathcal{K}} \frac{Q_i^{k*}}{\sum_{k \in \mathcal{K}} Q_i^{k*}} u_i^k(Q^*), \quad Q_i^* = \sum_{k \in \mathcal{K}} Q_i^{k*}, \quad i \in \mathcal{N}. \tag{31}$$

donde Q^* es el vector de poblaciones de cada localidad bajo el equilibrio del nivel inferior cuando los coeficientes de influencia ν son fijos. Bajo las suposiciones de los Teoremas 1 a 3, el equilibrio del nivel inferior existe de forma única para cualquier vector fijo de inversiones R involucrado en las funciones de utilidad afectiva (31) de las localidades. Por lo tanto, si el equilibrio del nivel inferior es único, el problema del nivel superior está bien definido.

Suponiendo ahora que el monto de inversión $R_i > 0$ se utiliza como la estrategia de las autoridades municipales de las localidades involucradas (los jugadores del nivel superior) dichos montos se deciden antes de que inicie el proceso migratorio, procedemos a definir el estado de equilibrio en el juego no cooperativo del nivel superior.

Definición2 *Sean ν^+, ν^- fijos. Un vector de inversión $R^* = (R_1^*, ..., R_N^*)$ se llama equilibrio en el nivel superior si para cualquier localidad i, $i \in \mathcal{N}$, la función de utilidad de la autoridad municipal $U_i = U_i(R_i, R_{-i}^*)$ alcanza su valor máximo exactamente en $R_i = R_i^*$, es decir, R_i^* es un equilibrio de Nash para el nivel superior, si se supone que todos los demás jugadores están apegados al monto de inversión $R_{-i}^* = (R_1^*, ..., R_{i-1}^*, R_{i+1}^*, ..., R_N^*)$. Entonces la inversión $R_i = R_i^*$, resuelve el siguiente problema de maximización:*

$$\max_{R_i > 0} U_i(R) = \sum_{k \in \mathcal{K}} \frac{Q_i^{k*}}{\sum_{k \in \mathcal{K}} Q_i^{k*}} u_i^k(Q^*), \quad i \in \mathcal{N} \tag{32}$$

$$\textit{sujeto a: } (Q^*, s^*) \in M \textit{ es el equilibrio exterior para } \nu^+, \nu^-. \tag{33}$$

Dado que los coeficientes de influencia son dados de manera exógena, el equilibrio obtenido puede cambiar con cada selección de coeficientes de influencia; por lo tanto, es importante determinar cómo los migrantes pueden elegir estos valores. Para abordar esto, introducimos el concepto de consistencia (siguiendo el enfoque descrito en Kalashnikov et al. (2019)) definiendo otro juego no cooperativo llamado meta-juego.

Capítulo 5
Equilibrio consistente

Tal como se introdujo en el Capítulo 1, el procedimiento de verificación (también conocido como "criterio de consistencia") propuesto por Bulavsky (1997) fue desarrollado para un modelo de oligopolio. Sin embargo, debido a que los modelos de migración humana como el modelo considerado en esta tesis tienen una estructura diferente, dicho procedimiento no puede aplicarse directamente.

Para superar esta limitación, en Kalashnikov et al. (2019) se desarrolló un enfoque alternativo basado en la formulación de un *meta-juego*, donde los jugadores eligen sus coeficientes de influencia como estrategias, y luego resuelven el modelo original bajo esas conjeturas. A diferencia del procedimiento de verificación, el meta-juego puede formularse en cualquier modelo matemático que utilice variaciones conjeturales.

En este capítulo, se presenta formalmente el meta-juego adaptado al modelo de migración humana propuesto. Se define su función de pago, y se introduce el concepto de equilibrio consistente como el equilibrio de Nash del juego, siguiendo la metodología de Kalashnikov et al. (2019). Los jugadores serán los mismos grupos de migrantes del modelo introducido en capítulos anteriores, pero ahora tomando como estrategia su coeficiente de influencia (conjetura), antes de decidir si migrarán a otra localidad o no.

Definición3 *El* ***meta-juego*** *es definido como el siguiente juego no cooperativo* $\Gamma = (X, V, \Pi)$*, donde:*

- *El conjunto de jugadores* $X = \{(k, i, j) \mid i, j \in \mathcal{N}, i \neq j, k \in \mathcal{K}\}$ *son los mismos grupos de migrantes que se trasladan de una localidad de origen* i *a una localidad de destino* j*.*
- *El conjunto* $V = R_+^{2N(N-1)K}$ *representa el conjunto de posibles estrategias para los jugadores en la primera etapa del modelo de migración humana, es decir, el conjunto de posibles vectores de conjeturas* $\{(\nu_{ij}^{k+}, \nu_{ij}^{k-}) \mid i, j \in \mathcal{N}, i \neq j, k \in \mathcal{K}\}$ *seleccionadas por los jugadores.*

- *La función de pago* $\Pi = \Pi(\nu)$ *son las funciones objetivo para cada uno de los grupos de migrantes en la segunda etapa, cuyos valores* $\pi_{ij}^k = \pi_{ij}^k(\nu)$*,* $(k, i, j) \in X$ *están definidos por la fórmula* (23)*, calculada con los valores correspondientes al equilibrio exterior que se obtiene con las conjeturas* $\nu \in V$*. La existencia y unicidad del equilibrio está garantizada por los Teoremas 1 a 3 o el corolario 1 de la sección anterior.*

En otras palabras, el juego no cooperativo $\Gamma = (X, V, \Pi)$, llamado **meta-juego**, está dado de la siguiente manera:

$$\max_{(\nu_{ij}^{k+}, \nu_{ij}^{k-})} \left[u_j^k(Q_j^{k^*}) - u_i^k(Q_i^{k^*})\right] s_{ij}^{k^*} - \int_0^{s_{ij}^{k^*}} c_{ij}^k(t)\, dt, \quad (k, i, j) \in X, \tag{34}$$

$$\text{sujeto a: } (Q^*, s^*) \in M \text{ es un equilibrio exterior para } \nu. \tag{35}$$

La función objetivo (34) representa que cada uno de los grupos de migrantes quiere seleccionar su vector de coeficientes de influencia $(\nu_{ij}^{k+}, \nu_{ij}^{k-})$ para optimizar su utilidad neta dada por el equilibrio exterior correspondiente al vector ν de todos los coeficientes de influencia de todos los grupos de migrantes (véase, restricción (35)).

Basándonos en los resultados de Kalashnikov et al. (2019), definimos la consistencia de los coeficientes de influencia y el equilibrio consistente como sigue.

Definición4 *(Criterio de consistencia) Los coeficientes de influencia* $(\nu_{ij}^{k+}, \nu_{ij}^{k-})$ *son llamados* ***consistentes*** *si estos proveen una solución para el problema dado por* (34)-(35) *correspondiente al jugador* $(k, i, j) \in X$*, cuando los coeficientes de influencia de todos los demás grupos de migrantes están fijos.*

De la Definición 4, podemos ver que el equilibrio de Nash para el juego Γ es equivalente a que los coeficientes de influencia de todos los grupos de migrantes sean consistentes al mismo tiempo. Sin embargo, es posible que no exista un equilibrio de Nash puro. En tal caso, cada grupo de migrantes $(k, i, j) \in X$ puede recurrir a una estrategia mixta, seleccionando sus coeficientes de influencia al azar de acuerdo con una distribución de probabilidad que puede definirse como una medida de probabilidad (de Borel) σ_{ij} en el conjunto de todos los posibles vectores de conjeturas $(\nu_{lj}^{k+}, \nu_{lj}^{k-})$.

Definición5 *Un vector de poblaciones y flujos migratorios* $(Q^*, s^*) \in M$ *es llamado un* ***equilibrio interior*** *o* ***equilibrio consistente*** *para el modelo de migración humana, y las conjeturas* $\nu \in V$ *son llamadas* ***consistentes****, si* ν *es un equilibrio de Nash para el juego* $\Gamma = (X, V, \Pi)$ *y* (Q^*, s^*) *es un equilibrio exterior para* ν*.*

La existencia de un equilibrio de Nash (puro) para el meta-juego puede calcularse haciendo uso de un algoritmo de punto fijo, como se ilustra en los resultados presentados en Kalashnikov et al. (2019)

Capítulo 6
Experimentación numérica

Se realizó el mismo experimento presentado en el artículo Osorio González et al. (2024), pero aplicando la nueva formulación de la conjetura propuesta en esta tesis, con el objetivo de analizar las diferencias entre los resultados obtenidos en ambos trabajos.

Los datos numéricos utilizados se basan en los artículos de Kalashnikov et al. (2007) y Kalashnikov et al. (2008), los cuales sirvieron como base para los experimentos numéricos.

Como consecuencia del resultado obtenido en el **Teorema de equivalencia**, se considera la conjetura $\nu_{ij} = \nu_{ij}^{+} + \nu_{ij}^{-}$. Al igual que en el artículo de Osorio González et al. (2024), los estados de equilibrio consistentes se determinan mediante un algoritmo de punto fijo.

Consideremos una red de migración conformada por tres ciudades (localidades) con una única clase social. Nos referiremos a estas ciudades como ciudad 1, ciudad 2 y ciudad 3. La población en la ciudad i es dada por $Q_i, i \in \{1, 2, 3\}$. Basándonos en el experimento numérico de Kalashnikov et al. (2007), consideramos las siguientes poblaciones iniciales fijas de las ciudades como:

$$\overline{Q}_1 = 105000, \qquad \overline{Q}_2 = 55000, \qquad \overline{Q}_3 = 23000. \tag{36}$$

Las funciones de utilidad asociadas a cada cuidad son:

$$\begin{aligned} u_1(Q_1) &= 25 - \frac{Q_1}{8600}, \\ u_2(Q_2) &= 22.5 - \frac{Q_2}{4800}, \\ u_3(Q_3) &= 16 - \frac{Q_3}{2000}. \end{aligned} \tag{37}$$

Los costos de trasladarse de una localidad i a una localidad j , denotados por $c_{ij}(s_{ij})$ (expresados en miles de pesos mexicanos), son los siguientes:

$$\begin{aligned} c_{12}(s_{12}) &= 0.0006s_{12} + 1.3, & c_{13}(s_{13}) &= 0.0006s_{13} + 1.3, \\ c_{21}(s_{21}) &= 0.0002s_{21} + 1.3, & c_{23}(s_{23}) &= 0.0004s_{23} + 0.8, \\ c_{31}(s_{31}) &= 0.0006s_{31} + 1.3, & c_{32}(s_{32}) &= 0.0004s_{32} + 0.8. \end{aligned} \tag{38}$$

Inicialmente, se supone que los migrantes actúan bajo el supuesto de competencia perfecta, es decir, no anticipan cambios en la utilidad marginal de su localidad de origen ni en la localidad de destino como consecuencia de su desplazamiento. Esto equivale a asumir que cada grupo de migrantes, que viaja de la localidad i a la localidad j, selecciona su conjetura de la siguiente manera:

$$\nu_{ij} = 0, \forall i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j. \tag{39}$$

Por lo anterior, el estado de equilibrio (exterior) alcanzado por estos grupos de migrantes correspondientes es :

- Población final en la cuidad i, $i \in \{1, 2, 3\}$:

$$Q_1 \approx 110504, \qquad Q_2 \approx 57211, \qquad Q_3 \approx 15285. \tag{40}$$

- El flujo migratorio de la cuidad i a la cuidad j, $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$:

$$\begin{aligned} s_{12} &= 0, & s_{13} &= 0, \\ s_{21} &\approx 1348, & s_{23} &= 0, \\ s_{31} &\approx 4156, & s_{32} &\approx 3559. \end{aligned} \tag{41}$$

- La utilidad neta obtenida para cada grupo de migrantes:

$$\begin{aligned} \pi_{12} &= 0, & \pi_{13} &= 0, \\ \pi_{21} &\approx 181.79, & \pi_{23} &= 0, \\ \pi_{31} &\approx 5180.60, & \pi_{32} &\approx 2533.58 \end{aligned} \tag{42}$$

Como se observa, los flujos migratorios s_{12}, s_{13} y s_{23} son todos iguales a cero. Esto significa que estos individuos no obtienen ningún beneficio al trasladarse a otra ciudad, ya que los costos de viaje superarían la utilidad que podrían obtener, resultando en una utilidad neta igual a cero.

En contraste, los flujos migratorios s_{21}, s_{31} y s_{32} son estrictamente positivos y menores que la población inicial en sus respectivas ciudades de origen. Por lo tanto, estos individuos podrían aumentar el valor de su utilidad neta si consideran que la utilidad marginal de su localidad de origen y destino puede cambiar como consecuencia a su movimiento o al movimiento de otros grupos migratorios. En otras palabras, podrían beneficiarse al seleccionar coeficiente de influencia (conjeturas) distintos de cero.

Supongamos que ahora el grupo de migrantes que viaja de la ciudad 2 a la ciudad 1 aprende sobre el concepto de variaciones conjeturales consistentes y selecciona coeficientes de influencia distintos de cero, de acuerdo con la Definición 4. Dado que este grupo en particular sabe que los otros grupos migratorios asumen el enfoque bajo competencia perfecta, resuelve su problema de maximización, definido por (34)–(35), y encuentra que su coeficiente de influencia consistente es:

$$\nu_{21} \approx 0.0002408 \tag{43}$$

Este grupo de migrantes ajusta su flujo migratorio según sus nuevas conjeturas (consistentes), lo que, a su vez, perturba el equilibrio. Como consecuencia, los otros grupos de migrantes también deben ajustar sus flujos migratorios hasta que se alcance un nuevo estado de equilibrio.

El nuevo equilibrio (exterior) alcanzado es el siguiente:

- Población final en la cuidad i, $i \in \{1, 2, 3\}$:

$$Q_1 \approx 110129, \qquad Q_2 \approx 57552, \qquad Q_3 \approx 15319. \tag{44}$$

- El flujo migratorio de la cuidad i a la cuidad j, $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$:

$$\begin{aligned} s_{12} &= 0, & s_{13} &= 0, \\ s_{21} &\approx 872, & s_{23} &= 0, \\ s_{31} &\approx 4257, & s_{32} &\approx 3424. \end{aligned} \tag{45}$$

- La utilidad neta obtenida para cada grupo de migrantes, determinada por la función (25), es:

$$\begin{aligned} \pi_{12} &= 0, & \pi_{13} &= 0, \\ \pi_{21} &\approx 259.12, & \pi_{23} &= 0, \\ \pi_{31} &\approx 5435.74, & \pi_{32} &\approx 2344.83 \end{aligned} \tag{46}$$

Este nuevo equilibrio muestra que, al anticipar la disminución de la utilidad marginal del destino después de su movimiento (junto con el movimiento de otros grupos de migrantes hacia el mismo destino), el grupo de migrantes que se traslada de la ciudad 2 a la ciudad 1 reduce su flujo migratorio, mejorando así su utilidad neta. Al mismo tiempo, el grupo de migrantes que viaja de la ciudad 3 a la ciudad 1 también incrementa su utilidad gracias a una menor población final en su destino. En contraste, la utilidad del grupo de migrantes que viaja de la ciudad 3 a la ciudad 2 disminuye debido al aumento de la población en las ciudades 2 y 3.

Si todos los grupos migratorios adoptan el enfoque de variaciones conjeturales consistentes, ajustan sus coeficientes de influencia y flujos migratorios hasta alcanzar el equilibrio consistente de nivel inferior. Dicho equilibrio puede determinarse mediante un algoritmo de punto fijo, y para este ejemplo, es el siguiente:

- Coeficientes de influencia conjeturados:

$$\nu_{21} \approx 0.0002749, \qquad \nu_{31} \approx 0.0004160, \qquad \nu_{32} \approx 0.0004799 \tag{47}$$

- Población final en la cuidad i, $i \in \{1, 2, 3\}$:

$$Q_1 \approx 109173, \qquad Q_2 \approx 56885, \qquad Q_3 \approx 16942. \tag{48}$$

- El flujo migratorio de la cuidad i a la cuidad j, $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$:

$$\begin{aligned} s_{12} &= 0, & s_{13} &= 0, \\ s_{21} &\approx 751, & s_{23} &= 0, \\ s_{31} &\approx 3422, & s_{32} &\approx 2636. \end{aligned} \tag{49}$$

- La utilidad neta obtenida para cada grupo de migrantes en el nivel inferior es:

$$\begin{aligned} \pi_{12} &= 0, & \pi_{13} &= 0, \\ \pi_{21} &\approx 211.43, & \pi_{23} &= 0, \\ \pi_{31} &\approx 8383.07, & \pi_{32} &\approx 4725.99. \end{aligned} \tag{50}$$

Dado que cada grupo de migrantes considera la disminución en la utilidad marginal de su destino después de su movimiento, el flujo migratorio total disminuye en todas las ciudades. En consecuencia, la utilidad neta de cada grupo de migrantes aumenta en comparación con el equilibrio bajo competencia perfecta.

Al comparar estos resultados con los obtenidos en Osorio González et al. (2024), se observa que los resultados son equivalentes bajo las conjeturas propuestas. El Teorema 4 reafirma esta equivalencia al demostrar que es suficiente considerar una única conjetura (ya sea del origen o del destino) para alcanzar el equilibrio, debido a que el flujo migratorio depende de la suma de dichas conjeturas.

Este experimento numérico demuestra que, cuando los grupos de migrantes utilizan el enfoque de variaciones conjeturales consistentes, mejora la eficiencia de las decisiones migratorias individuales, al considerar de manera anticipada los efectos de la congestión poblacional. La comparación con el enfoque de competencia perfecta y con estudios previos confirma que el modelo propuesto es útil para analizar escenarios de migración humana.

Capítulo 7

Conclusiones y trabajo a Futuro

En este trabajo se formuló un modelo de migración humana con una estructura binivel, utilizando como base modelos de migración humana previamente propuestos, considerando la influencia de la población en la utilidad de cada localidad y el concepto de ingeniería de Kansei.

Se definió y aplicó el concepto de equilibrio con variaciones conjeturales (CVE) al modelo de migración humana, y se propuso una nueva formulación de la conjetura que permitió extender los resultados obtenidos originalmente en un trabajo previo, ahora a funciones de utilidad continuas, pero no necesariamente diferenciables en el nivel inferior, así como a funciones no lineales para el nivel superior de las localidades municipales.

Se establecieron condiciones que garantizan la existencia y unicidad del equilibrio con variaciones conjeturales (CVE). Además, se utilizó el concepto de "meta-juego"para definir la consistencia de las conjeturas (coeficientes de influencia) de los grupos de migrantes.

Para evaluar el impacto de esta formulación de la conjetura en la toma de decisiones de los migrantes, se realizó un experimento numérico basado en los datos de estudios previos. Los resultados se compararon bajo distintos supuestos: competencia perfecta, equilibrio con variaciones conjeturales(CVE) y equilibrio consistente con variaciones conjeturales(CCVE). Esta comparación permitió analizar diferencias en los patrones migratorios y mostrar las mejoras en la utilidad neta de los migrantes al aplicar la conjetura consistente.

Se verificó que el equilibrio es equivalente al obtenido en un trabajo previo bajo conjeturas específicas. También, se mostró que es suficiente considerar únicamente una de las dos conjeturas, ya sea de la localidad de origen o de la localidad de destino, para definir el equilibrio, lo que simplifica considerable el cálculo del equilibrio consistente, al reducir el problema a funciones de una sola variable para los grupos de migrantes.

Finalmente. como trabajo futuro se propone aplicar los resultados obtenidos a casos reales, aprovechando la posibilidad de modelar las utilidades de las localidades y costos de migración mediante funciones no necesariamente lineales (o diferenciables) en el nivel inferior (y por consecuencia, en el nivel superior).

Capítulo 8

Apéndices

8.1 Demostración del Teorema 1

Teorema 1 *Sean* $\nu^+, \nu^- \geq 0$ *fijos. Un vector de poblaciones y flujos migratorios* $(Q^*, s^*) \in M$ *satisface las condiciones de equilibrio exterior* (21) *y* (22) *si, y sólo si, resuelve la siguiente desigualdad variacional:*

$$\langle -u(Q^*), Q - Q^* \rangle + \langle c(s^*) + d(s^*), s - s^* \rangle \geq 0, \forall (Q, s) \in M \tag{29}$$

Demostración. (**Necesidad**) Primero mostramos que si el vector $(Q^*, s^*) \in M$ satisface las condiciones de equilibrio (21) y (22) (sujeto a las restricciones (5)–(7)) entonces también satisface la desigualdad variacional (29).

Sea $(Q^*, s^*) \in M$ el equilibrio exterior, es decir, (Q^*, s^*) satisface las condiciones de equilibrio (21) y (22). Entonces,

$$s_{ij}^{k*} \geq 0 \qquad \text{y} \qquad \sum_{j \in \mathcal{N} \setminus \{i\}} s_{ij}^{k*} \leq \overline{Q}_i^k, \quad \forall k \in \mathcal{K}, i \in \mathcal{N}, i \neq j.$$

Para la clase fija k, y el origen fijo i, podemos definir los conjuntos

$$\Gamma_1^k = \Gamma_1^k(i) = \{j \in \mathcal{N} \setminus \{i\} \mid s_{ij}^{k*} > 0\}, \quad k \in \mathcal{K}, i \in \mathcal{N}, \tag{51}$$

y

$$\Gamma_2^k = \Gamma_2^k(i) = \{j \in \mathcal{N} \setminus \{i\} \mid s_{ij}^{k*} = 0\}, \quad k \in \mathcal{K}, i \in \mathcal{N}, \tag{52}$$

los cuales satisfacen que $\Gamma_1^k \cup \Gamma_2^k = \mathcal{N} \setminus \{i\}$ y $\Gamma_1^k \cap \Gamma_2^k = \emptyset$, para toda k e i.

Entonces, para cualesquiera $k \in \mathcal{K}, i \in \mathcal{N}$, y $(Q, s) \in M$, tenemos que las relaciones

$$\sum_{j \in \mathcal{N} \setminus \{i\}} \left[u_i^k(Q_i^{k*}) + c_{ij}^k(s_{ij}^{k*}) + d_{ij}^k(s_{ij}^{k*}) - u_j^k(Q_i^{k*}) \right] \left[s_{ij}^k - s_{ij}^{k*} \right]$$

$$= \sum_{j\in\Gamma_1^k} \left[u_i^k(Q_i^{k*}) + c_{ij}^k(s_{ij}^{k*}) + d_{ij}^k(s_{ij}^{k*}) - u_j^k(Q_i^{k*})\right]\left[s_{ij}^k - s_{ij}^{k*}\right]$$
$$+ \sum_{j\in\Gamma_2^k} \left[u_i^k(Q_i^{k*}) + c_{ij}^k(s_{ij}^{k*}) + d_{ij}^k(s_{ij}^{k*}) - u_j^k(Q_i^{k*})\right]\left[s_{ij}^k - s_{ij}^{k*}\right]$$
$$\geq \sum_{j\in\Gamma_1^k}(-\lambda_i^k)(s_{ij}^k - s_{ij}^{k*}) + \sum_{j\in\Gamma_2^k}(-\lambda_i^k)s_{ij}^k$$
$$= -\lambda_i^k\left(\sum_{j\in\mathcal{N}\setminus\{i\}} s_{ij}^k - \sum_{j\in\mathcal{N}\setminus\{i\}} s_{ij}^{k*}\right)\begin{cases} \geq 0\ ,\ si \displaystyle\sum_{j\in\mathcal{N}\setminus\{i\}} s_{ij}^{k^*} = \overline{Q}_i^k \\ = 0\ ,\ si \displaystyle\sum_{j\in\mathcal{N}\setminus\{i\}} s_{ij}^{k^*} < \overline{Q}_i^k \end{cases} \tag{53}$$

son validas para todo i.

Por lo tanto, mostramos que

$$\sum_{j\in\mathcal{N}\setminus\{i\}} \left[u_i^k(Q_i^{k*}) + c_{ij}^k(s_{ij}^{k*}) + d_{ij}^k(s_{ij}^{k*}) - u_j^k(Q_i^{k*})\right]\left[s_{ij}^k - s_{ij}^{k*}\right] \geq 0, \tag{54}$$

$\forall k \in \mathcal{K}, i \in \mathcal{N}$, y $(Q^*, s^*) \in M$. Además

$$\sum_{i\in\mathcal{N}}\sum_{j\in\mathcal{N}\setminus\{i\}} \left[u_i^k(Q_i^{k*}) - u_j^k(Q_i^{k*})\right]\left[s_{ij}^k - s_{ij}^{k*}\right]$$
$$= \sum_{i\in\mathcal{N}}\sum_{j\in\mathcal{N}\setminus\{i\}} u_i^k(Q_i^{k*})\left(s_{ij}^k - s_{ij}^{k*}\right) - \sum_{i\in\mathcal{N}}\sum_{j\in\mathcal{N}\setminus\{i\}} u_i^k(Q_i^{k*})\left(s_{ji}^k - s_{ji}^{k*}\right)$$
$$= \sum_{i\in\mathcal{N}} u_i^k(Q_i^{k*})\left[\left(\sum_{j\in\mathcal{N}\setminus\{i\}} s_{ji}^{k*} - \sum_{j\in\mathcal{N}\setminus\{i\}} s_{ij}^{k*}\right) - \left(\sum_{j\in\mathcal{N}\setminus\{i\}} s_{ij}^k - \sum_{j\in\mathcal{N}\setminus\{i\}} s_{ij}^k\right)\right] \tag{55}$$

Para toda $k \in \mathcal{K}$.

Usando la restricción de conservación de flujo (5), podemos reescribir (55) de la siguiente manera:

$$\sum_{i\in\mathcal{N}}\sum_{j\in\mathcal{N}\setminus\{i\}} \left[u_i^k(Q_i^{k*}) - u_j^k(Q_i^{k*})\right]\left[s_{ij}^k - s_{ij}^{k*}\right]$$
$$= \sum_{i\in\mathcal{N}} u_i^k(Q_i^{k*})\left[\left(Q_i^{k*} - \overline{Q}_i^k\right) - \left(Q_i^k - \overline{Q}_i^k\right)\right]$$
$$= \sum_{i\in\mathcal{N}}\left(-u_i^k(Q_i^{k*})\right)\left(Q_i^k - Q_i^{k*}\right), \quad \forall k \in \mathcal{K}; \tag{56}$$

entonces, de (54) y (56) tenemos:

$$\sum_{k\in\mathcal{K}}\sum_{i\in\mathcal{N}}\sum_{j\in\mathcal{N}\setminus\{i\}}\left[u_i^k(Q_i^{k*})+c_{ij}^k(s_{ij}^{k*})+d_{ij}^k(s_{ij}^{k*})-u_j^k(Q_i^{k*})\right]\left[s_{ij}^k-s_{ij}^{k*}\right]\geq 0. \quad (57)$$

$$=\sum_{k\in\mathcal{K}}\sum_{i\in\mathcal{N}}\left(u_i^k(Q_i^{k*})\right)\left(Q_i^k-Q_i^{k*}\right)+\sum_{k\in\mathcal{K}}\sum_{i\in\mathcal{N}}\sum_{i\in\mathcal{N}\setminus\{i\}}\left[c_{ij}^k(s_{ij}^{k*})+d_{ij}^k(s_{ij}^{k*})\right]\left(s_{ij}^k-s_{ij}^{k*}\right) \quad (58)$$

$$=\langle -u(Q^*),Q-Q^*\rangle+\langle c(s^*)+d(s^*),s-s^*)\rangle\geq 0,\forall(Q,s)\in M. \quad (59)$$

Por lo tanto, de (59), concluimos que (Q^*,s^*) satisface la desigualdad variacional (29).

(**Suficiencia**) Ahora mostramos que si el vector $(Q^*,s^*)\in M$ satisface la desigualdad variacional (29), entonces también satisface las condiciones de equilibrio (21) y (22), sujeto a las restricciones (5)–(7).

Supongamos que $(Q^*,s^*)\in M$ resuelve la desigualdad variacional (29). Entonces,

$$\langle -u(Q^*),Q\rangle+\langle c(s^*)+d(s^*),s)\rangle\geq\langle -u(Q^*),Q^*\rangle+\langle c(s^*)+d(s^*),s^*\rangle,\forall(Q,s)\in M; \quad (60)$$

es decir, (Q^*,s^*) resuelve el problema de minimización:

$$\min_{(Q,s)\in M}\langle -u(Q^*),Q^*\rangle+\langle c(s^*)+d(s^*),s^*\rangle, \quad (61)$$

$$\text{sujeto a: }(Q,s)\in M. \quad (62)$$

De (8), podemos ver que el conjunto M está dado por las condiciones (5)–(7), los cuales son lineales con respecto a (Q,s), entonces (61)–(62) es un problema de programación lineal, y se puede aplicar el teorema de Karush-Kuhn-Tucker como condición necesaria y suficiente.

Entonces, podemos encontrar valores μ_i^k y λ_i^k, $k\in\mathcal{K}$, $i\in\mathcal{N}$, tales que (Q^*,s^*) satisface:

$$-u_i^k(Q_i^{k*})+\mu_i^k=0,\quad\forall k\in\mathcal{K},i\in\mathcal{N}, \quad (63)$$

$$c_{ij}^k(s_{ij}^{k*})+d_{ij}^k(s_{ij}^{k*})+\mu_i^k-\mu_j^k+\lambda_i^k\geq 0,\quad\forall k\in\mathcal{K},i,j\in\mathcal{N},i\neq j, \quad (64)$$

$$\left(c_{ij}^k(s_{ij}^{k*})+d_{ij}^k(s_{ij}^{k*})+\mu_i^k-\mu_j^k+\lambda_i^k\right)s_{ij}^{k*}=0\quad\forall k\in\mathcal{K},i,j\in\mathcal{N},i\neq j, \quad (65)$$

$$Q_i^{k*}-\overline{Q}_i^k-\sum_{j\in\mathcal{N}\setminus\{i\}}s_{ji}^{k*}+\sum_{j\in\mathcal{N}\setminus\{i\}}s_{ij}^{k*}=0,\quad\forall\quad\forall k\in\mathcal{K},i\in\mathcal{N}, \quad (66)$$

$$\overline{Q}_i^k - \sum_{j \in \mathcal{N} \setminus \{i\}} s_{ij}^{k*} \geq 0, \quad \forall k \in \mathcal{K}, i \in \mathcal{N}, \tag{67}$$

$$\left(\overline{Q}_i^k - \sum_{j \in \mathcal{N} \setminus \{i\}} s_{ij}^{k*} \right) \lambda_i^k = 0, \quad \forall k \in \mathcal{K}, i \in \mathcal{N}, \tag{68}$$

$$\lambda_i^k \geq 0, \quad \forall k \in \mathcal{K}, i \in \mathcal{N}. \tag{69}$$

$$s_{ij}^k \geq 0, \quad \forall k \in \mathcal{K}, i, j \in \mathcal{N}, i \neq j. \tag{70}$$

Sustituyendo la identidad $\mu_i^k = u_i^k(Q_i^{k*})$, dada por (63), y usando la definición de d_{ij}^k, dada por (27), podemos reescribir (64)–(65) de la siguiente manera:

$$u_i^k(Q_i^{k*}) + s_{ij}^{k^*} \nu_{ij}^{k-} + c_{ij}^k(s_{ij}^{k*}) \geq u_j^k(Q_j^{k*}) - s_{ij}^{k^*} \nu_{ij}^{k+} - \lambda_i^k, \tag{71}$$

$$\left(u_i^k(Q_i^{k*}) + s_{ij}^{k^*} \nu_{ij}^{k-} + c_{ij}^k(s_{ij}^{k*}) - u_j^k(Q_j^{k*}) + s_{ij}^{k^*} \nu_{ij}^{k+} + \lambda_i^k \right) s_{ij}^{k*} = 0, \tag{72}$$

para todo $k \in \mathcal{K}, i, j \in \mathcal{N}, i \neq j$.

Finalmente, podemos notar que las condiciones (70)–(72) son equivalentes a (21), y las condiciones (67)–(69) son equivalentes a (22); por lo tanto, (Q^*, s^*) satisface las condiciones (21) y (22), es decir, (Q^*, s^*) es equilibrio exterior. ■

8.2 Demostración del Teorema 2

Teorema 2 *(Existencia) Sean $\nu^+, \nu^- \geq 0$ fijos. Si las funciones de utilidad $u_i^k(Q_i^k), k \in \mathcal{K}, i \in \mathcal{N}$; y las funciones de costos de migración $c_{ij}^k(s_{ij}^k), k \in \mathcal{K}, i, j \in \mathcal{N}, i \neq j$; son continuas, entonces existe el equilibrio exterior.*

Demostración. Dado que las funciones de utilidad u_i^k y las funciones de costos c_{ij}^k son continuas, entonces la desigualdad variacional (29) está dada por una función continua sobre el conjunto M, el cual es no vacío, convexo y compacto. Por lo tanto, existe al menos una solución de la desigualdad variacional (29) y, por el Teorema 1, es equilibrio exterior. ■

8.3 Demostración del Teorema 3

Teorema 3 *(Unicidad) Sean $\nu^+, \nu^- \geq 0$ fijos y consideremos la desigualdad variacional dada por* (29).

Si el operador

$$\begin{pmatrix} -u(Q) \\ c(s)+d(s) \end{pmatrix} : R^{K\times N} \times R^{K\times N\times(N-1)} \to R^{K\times N} \times R^{K\times N\times(N-1)}$$

es estrictamente monótono sobre M, es decir,

$$\left\langle \begin{pmatrix} -u(Q^1) \\ c(s^1)+d(s^1) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -u(Q^2) \\ c(s^2)+d(s^2) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Q^1-Q^2 \\ s^1-s^2 \end{pmatrix} \right\rangle > 0, \forall \begin{pmatrix} Q^1 \\ s^1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} Q^2 \\ s^2 \end{pmatrix},$$

$\forall (Q^1, s^1), (Q^2, s^2) \in M$, *entonces el equilibrio exterior (si existe) es único.*

Demostración. La desigualdad variacional (29) es equivalente a:

$$\left\langle \begin{pmatrix} -u(Q^*) \\ c(s^*)+d(s^*) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Q-Q^* \\ s-s^* \end{pmatrix} \right\rangle \geq 0, \quad \forall (Q,s) \in M,$$

y por la hipótesis del teorema tenemos que la función $\begin{pmatrix} -u(Q) \\ c(s)+d(s) \end{pmatrix}$ es estrictamente monótona para todo $(Q,s) \in M$. Además, de los resultados clásicos de la teoría de desigualdades variacionales (ver, por ejemplo, Kinderlehrer and Stampacchia (1980)), sabemos que cualquier desigualdad variacional con una función monótona tiene a lo más una solución; por lo tanto, la desigualdad variacional (29) tiene a lo más un equilibrio exterior $(Q^*, s^*) \in M$. ■

8.4 Demostración del Teorema 4

Teorema 4 *(Equivalencia de las conjeturas) La definición de equilibrio (Definición 1) con las conjeturas* $(\nu_{ij}^{k+}, \nu_{ij}^{k-}) \geq 0$*, dadas por* (15)–(16)*, es equivalente a la definición de equilibrio (véase Osorio González et al. (2024), Definición 3.1]) con las conjeturas* $(\omega_{ij}^{k+}, \omega_{ij}^{k-}) \geq 0$*, dadas por* (13)–(14)*, siempre y cuando las funciones de utilidad* $u_i^k(Q_i^k)$ *sean estrictamente decrecientes, es decir,* $u_i^{k\prime}(Q_i^k) < 0$ *para todo* $i \in \mathcal{N}, k \in \mathcal{K}$*.*

Demostración. Sea $(\omega^+, \omega^-) \geq 0$ y (s^*, Q^*) su equilibrio exterior. Definimos $(\nu^+, \nu^-) \geq 0$ de la siguiente manera:

$$\nu_{ij}^{k+} = -\omega_{ij}^{k+} u_j^{k\prime}(Q_j^{k*}) \tag{73}$$

$$\nu_{ij}^{k-} = -\omega_{ij}^{k-} u_i^{k\prime}(Q_i^{k*}) \tag{74}$$

Lo anterior implica que (s^*, Q^*) es un equilibrio para (ν^+, ν^-).

Por el contrario, sea $(\nu^+, \nu^-) \geq 0$ y (s^*, Q^*) su equilibrio exterior. Definimos $(\omega^+, \omega^-) \geq 0$ de la siguiente manera:

$$\omega_{ij}^{k+} = -\frac{\nu_{ij}^{k+}}{u_j^{k\prime}(Q_j^{k*})} \tag{75}$$

$$\omega_{ij}^{k-} = -\frac{\nu_{ij}^{k-}}{u_i^{k\prime}(Q_i^{k*})} \tag{76}$$

Lo anterior implica que (s^*, Q^*) es un equilibrio exterior para (ω^+, ω^-). ■

8.5 Comprobante de Publicación en revista

Journal of Optimization Theory and Applications
https://doi.org/10.1007/s10957-024-02489-0

Consistent Conjectural Variations Equilibrium for a Bilevel Human Migration Model

Daniela Osorio-González[1] · José Guadalupe Flores-Muñiz[1] ·
Nataliya Kalashnykova[1] · Viacheslav Kalashnikov[1]

Received: 23 April 2023 / Accepted: 5 July 2024

Abstract

This paper extends the human migration model introduced in previous works to the framework of consistent conjectural variations. First, we introduce the standard multiclass human migration network equilibrium model that describes the movement of migrants between locations. Next, we introduce the concept of conjectural variations, in which migrants conjecture about the (expected) utility of locations after their migration. We define the concept of conjectural variations equilibrium and present results regarding the conditions for its existence and uniqueness. Following that, we define the concept of consistency for the migrants' conjectures and the consistent conjectural variations equilibrium (CCVE). Finally, we describe the conditions that guarantee the existence of the CCVE.

Keywords Game theory · Human migration · Conjectural variations · Meta-game

1 Introduction

Migration problems are very important in everyday life, and various migration theories have been developed by researchers. As an example, we can cite the fundamental survey by Akkoyunlu and Vickerman [1]. The basic work that piqued our interest in

Communicated by Nguyen Dong Yen.

✉ José Guadalupe Flores-Muñiz
jfloresm@uanl.edu.mx

Daniela Osorio-González
daniela.osoriognz@uanl.edu.mx

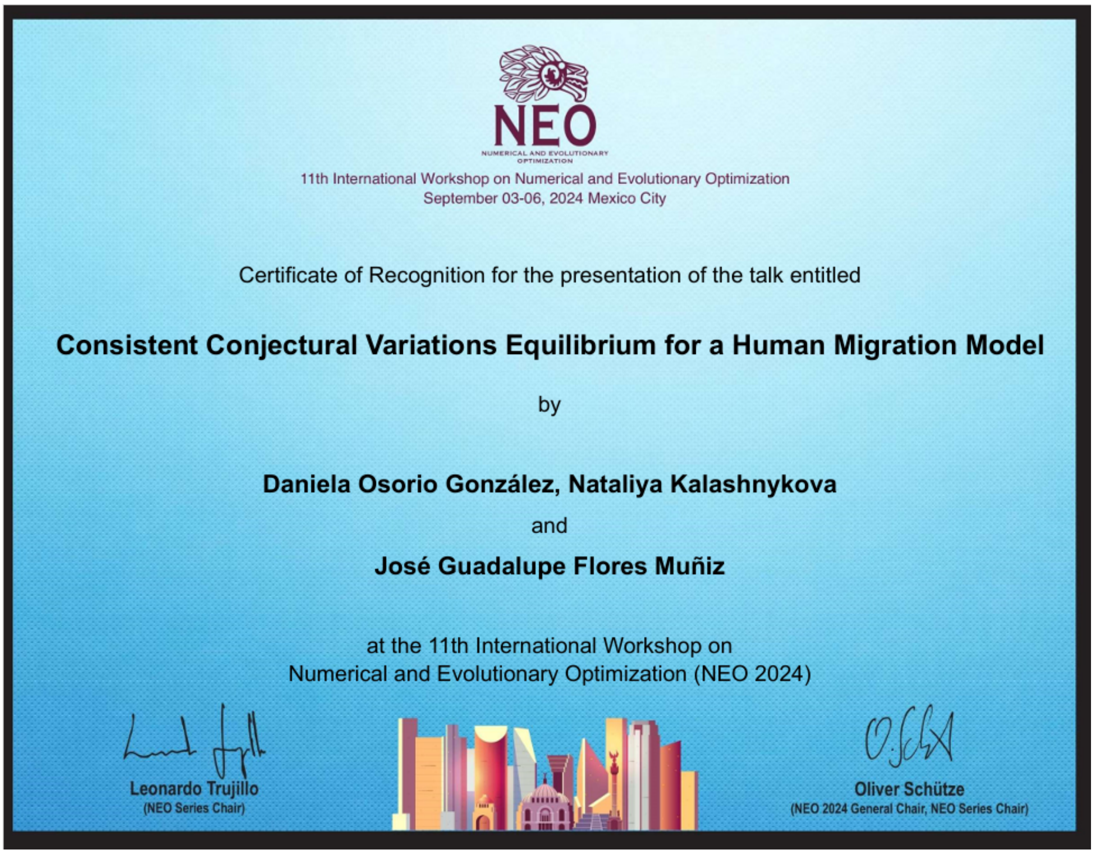
Nataliya Kalashnykova
nataliya.kalashnykova@uanl.edu.mx

Viacheslav Kalashnikov
viacheslav.kalashnikovx@uanl.edu.mx

1 Department of Physics and Mathematics, Universidad Autónoma de Nuevo León (UANL), San Nicolás de los Garza, Nuevo León, Mexico

Published online: 16 July 2024 Springer

8.6 Comprobante de Congreso internacional



NEO
NUMERICAL AND EVOLUTIONARY OPTIMIZATION

11th International Workshop on Numerical and Evolutionary Optimization
September 03-06, 2024 Mexico City

Certificate of Recognition for the presentation of the talk entitled

Consistent Conjectural Variations Equilibrium for a Human Migration Model

by

Daniela Osorio González, Nataliya Kalashnykova

and

José Guadalupe Flores Muñiz

at the 11th International Workshop on
Numerical and Evolutionary Optimization (NEO 2024)

Leonardo Trujillo
(NEO Series Chair)

Oliver Schütze
(NEO 2024 General Chair, NEO Series Chair)

Bibliografía

Akkoyunlu, S. and Vickerman, R. (2001), Migration and the efficiency of european labour markets, *in* Bröcker, J. and Herrmann, H., eds, 'Spatial Change and Interregional Flows in the Integrating Europe: Essays in Honour of Karin Peschel', Physica-Verlag HD, Heidelberg, 157–170.

Bowley, A. L. (1924), 'The mathematical groundwork of economics', *Social Forces* **3**(1), 185.

Bulavsky, V. A. (1997), 'Structure of demand and equilibrium in a model of oligopoly', *Economics and Mathematical Methods (Ekonomika i Matematicheskie Metody)* **33**, 112–134. In Russian.

Bulavsky, V. A. and Kalashnikov, V. V. (1994), 'One-parametric method to study equilibrium', *Economics and Mathematical Methods (Ekonomika i Matematicheskie Metody)* **30**, 129–138. In Russian.

Bulavsky, V. A. and Kalashnikov, V. V. (1995), 'Equilibrium in generalized Cournot and Stackelberg models', *Economics and Mathematical Methods (Ekonomika i Matematicheskie Metody)* **31**, 164–176. In Russian.

Cappello, G., Daniele, P. and Nagurney, A. (2021), 'A system-optimization model for multiclass human migration with migration costs and regulations inspired by the covid-19 pandemic', *Minimax Theory and Applications* **6**(2), 281–294.

Figuières, C., Jean-Marie, A., Quérou, N. and Tidball, M. (2004), *Theory of Conjectural Variations*, World Scientific, Singapore.

Frisch, R. (1933), 'Monopole-polypole: La notion de force dans l'économie', *Nationaløkonomisk Tidsskrift* **71**, 241–259. In french, translated to english in Frisch (1951).

Frisch, R. (1951), 'Monopoly, polypoly: The concept of force in the economy', *International Economics Papers* **1**, 23–36.

Isac, G., Bulavsky, V. A. and Kalashnikov, V. V. (2002), *Complementarity, equilibrium, efficiency and economics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Kalashnikov, V., Kalashnykova, N., Luévanos Rojas, R., Méndez Muños, M., Uranga, C. and Luévanos Rojas, A. (2007), 'Un modelo de migración humana: experimentos numéricos basados sobre los datos de las tres ciudades laguneras', *Estudios demográficos y urbanos* **22**(3), 731–760.

Kalashnikov, V., Kalashnykova, N., Rojas, R. L., Muños, M. M., Uranga, C. and Rojas, A. L. (2008), 'Numerical experimentation with a human migration model', *European Journal of Operational Research* **189**(1), 208–229.

Kalashnikov, V. V., Alcort, M. A. G., Acosta, Y. G. S., Kalashnykova, N. and Kalashnikov, V. I. (2012), 'A bilevel human migration model: Consistency of a bilevel conjectural variations equilibrium', *ICIC Express Letters* **6**(4), 885–890.

Kalashnikov, V. V. and Kalashnykova, N. I. (2006), 'Simulation of a conjectural variation equilibrium in a human migration model', *The International Journal of Simulation: Science, Systems and Technologies* .

Kalashnikov, V. V., Kalashnykova, N. I., Acosta, Y. G. S. and Kalashnikov, V. V. (2014), Affective engineering in application to bi-level human migration models, *in* 'Industrial Applications of Affective Engineering', Springer, 27–38.

Kalashnikov, V. V., Kalashnykova, N. I. and Flores-Muñiz, J. G. (2019), 'Special issue on variational inequalities: Consistent conjectural variations coincide with the nash solution in the meta-model', *Networks and Spatial Economics* 1–25.

Kinderlehrer and Stampacchia (1980), 'An introduction to vanational ine-quahties and their apphcations'.

Nagurney, A. (1990), 'A network model of migration equilibrium with movement costs', *Mathematical and Computer Modelling* **13**(5), 79–88.

Nagurney, A. (1999), *Network Economics: A Variational Inequality Approach*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Nagurney, A., Daniele, P. and Cappello, G. (2021), 'Human migration networks and policy interventions: bringing population distributions in line with system optimization', *International Transactions in Operational Research* **28**(1), 5–26.

Nagurney, A., Pan, J. and Zhao, L. (1992), 'Human migration networks', *European Journal of Operational Research* **59**(2), 262–274.

Osorio González, D., Flores Muñiz, J. G., Kalashnykova, N. and Kalashnikov, V. (2024), 'Consistent conjectural variations equilibrium for a bilevelhuman migration model', *Journal of Optimization Theory and Applications* **203**, 2354—2369.

Passacantando, M., Raciti, F. and Nagurney, A. (2023), 'International migrant flows: Coalition formation among countries and social welfare', *EURO Journal on Computational Optimization* **11**, 100062.

Solis-García, N., Flores-Muñiz, J. G., Kreinovich, V., Kalashnykova, N. and Kalashnikov, V. (2022), 'Consistent conjectural variations equilibrium for a financial model', *Journal of Optimization Theory and Applications* **194**(3), 966–987.

Vergara, M. and Mondragón Donés, S. (2008), 'Ingeniería kansei. una potente metodología aplicada al diseño emocional'.