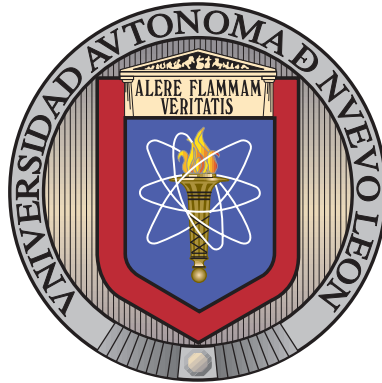


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



EMPAQUETAMIENTO ÓPTIMO DE POLÍGONOS
CONVEXOS SUAVES

POR

ALBERTO MARTÍNEZ NOA

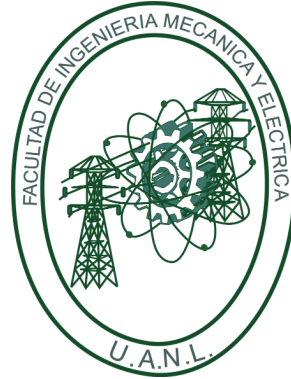
DOCTOR EN INGENIERÍA DE SISTEMAS

NOVIEMBRE 2025

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



EMPAQUETAMIENTO ÓPTIMO DE POLÍGONOS
CONVEXOS SUAVES

POR

ALBERTO MARTÍNEZ NOA

DOCTOR EN INGENIERÍA DE SISTEMAS

NOVIEMBRE 2025

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Posgrado

Los miembros del Comité de Evaluación de Tesis recomendamos que la tesis “Empaquetamiento óptimo de polígonos convexos suaves”, realizada por el estudiante Alberto Martínez Noa, con número de matrícula 1985271, sea aceptada para su defensa como requisito parcial para obtener el grado de Doctorado en Ingeniería de Sistemas.

El Comité de Evaluación de Tesis

Dr. Igor Semionovich Litvinchev
Director

Dr. José Antonio Marmolejo Saucedo
Co-director

Dra. Edith Lucero Ozuna Espinosa
Revisora

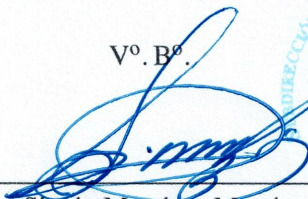
Dr. César Emilio Villarreal Rodríguez
Revisor

Dr. José Daniel Mosquera Artamonov
Revisor

Dr. Fernando López Irarragorri
Revisor

Dr. Luis Alfonso Infante Rivera
Revisor

Vº. Bº.



Dr. Simón Martínez Martínez
Subdirector de Estudios de Posgrado



Institución 190001

Programa 557620

Acta núm. 370

Ciudad Universitaria, a 2 de febrero de 2026.

A mi papa, mi mamá y hermana, que siempre han estado presente en cada momento de mi vida y por ser mi fuerte red de seguridad.

A mi incondicional y amada esposa, que siempre ve lo mejor de mi, apoyarme en mis proyectos académicos y en cada paso de este viaje de la vida.

A mi pequeño hijo, luz de mi vida, cuya sonrisa ha sido mi mayor motivación y cuya presencia me ha enseñado el verdadero significado de la perseverancia y el amor incondicional.

Ustedes son la fuerza que me mueve cada día.

ÍNDICE GENERAL

| | |
|---|-------------|
| Agradecimientos | XIII |
| Resumen | xv |
| 1. Introducción | 1 |
| 1.1. Motivación y justificación | 2 |
| 1.2. Hipótesis | 4 |
| 1.3. Objetivos | 5 |
| 1.3.1. Objetivo general | 5 |
| 1.3.2. Objetivos específicos | 5 |
| 1.4. Metodología | 6 |
| 1.5. Resultados esperados | 7 |
| 1.5.1. Estructura del documento de investigación | 8 |
| 2. Marco Teórico | 10 |
| 2.1. Clasificación general de problemas de C&P | 10 |
| 2.2. Problema de contenedores de dimensiones abiertas o variables | 13 |

| | |
|---|-----------|
| 2.2.1. Problemas de minimización de perímetro o área | 14 |
| 2.2.2. Empaquetamiento en Tiras | 15 |
| 2.2.3. El Problema de Empaquetamiento en Tiras Irregular | 17 |
| 2.3. Trabajos sobre problemas de corte y empaquetamiento encontrados en la literatura revisada | 18 |
| 2.3.1. Problemas de empaquetamiento de elementos rígidos | 18 |
| 2.3.2. Empaquetamiento de elementos suaves | 20 |
| 2.3.3. Trabajos de revisión de la literatura y libros acerca de los problemas de corte y empaquetamiento | 22 |
| 2.4. Análisis y áreas de oportunidad | 23 |
| 3. Metodología de Solución | 26 |
| 3.1. Descripción de la metodología | 26 |
| 3.2. Descripción de la solución | 27 |
| 3.3. Representación geométrica de los polígonos | 27 |
| 3.3.1. Representación de los polígonos rígidos | 28 |
| 3.3.2. Representación de polígonos flexibles | 32 |
| 3.4. Condiciones de no intersección | 36 |
| 3.5. Condiciones de contención | 38 |
| 3.6. Función Objetivo | 39 |
| 3.7. Formulación del modelo Circular | 42 |
| 3.8. Extensión del modelo para determinar la flexibilidad mínima | 44 |

| | |
|--|-----------|
| 3.8.1. Motivación | 44 |
| 3.8.2. Formulación del modelo extendido | 44 |
| 3.8.3. Aplicación propuesta | 45 |
| 4. Validación del modelo propuesto | 46 |
| 4.1. Objetivos | 46 |
| 4.2. Experimentación | 46 |
| 4.2.1. Instancias utilizadas en la experimentación | 47 |
| 4.3. Diseño experimental | 49 |
| 5. Experimentación y Resultados | 60 |
| 5.1. Objetivos | 60 |
| 5.2. Primera fase de la experimentación | 61 |
| 5.2.1. Instancias utilizadas en la experimentación | 61 |
| 5.3. Diseño experimental | 62 |
| 5.4. Restricciones de convexidad | 65 |
| 5.5. Segunda fase de la experimentación | 66 |
| 5.6. Análisis de resultados | 74 |
| 5.6.1. Empaquetamiento en contenedor circular | 74 |
| 5.6.2. Empaquetamiento en contenedor cuadrado | 74 |
| 5.6.3. Comparación entre contenedores | 75 |
| 5.6.4. Efecto del número de elementos | 75 |

| | |
|--|-----------|
| 5.6.5. Flexibilidad mixta | 75 |
| 5.7. Determinación de la flexibilidad mínima | 76 |
| 5.7.1. Metodología de experimentación con modelo extendido | 76 |
| 5.8. Resultados de la nueva experimentación | 77 |
| 5.8.1. Conclusiones | 79 |
| 6. Conclusiones | 80 |
| 6.1. Resumen de los hallazgos principales | 80 |
| 6.2. Implicaciones teóricas | 81 |
| 6.3. Implicaciones prácticas | 82 |
| 6.4. Limitaciones del estudio | 82 |
| 6.5. Direcciones para futuras investigaciones | 83 |
| 6.6. Conclusiones finales | 84 |

ÍNDICE DE FIGURAS

| | |
|--|----|
| 2.1. Clasificación general de los problemas de C&P por [49] | 13 |
| 3.1. Triángulos iguales | 30 |
| 3.2. Pentágonos con lados de igual tamaño pero con una posición diferentes de sus vértices. | 31 |
| 3.3. Triangulación de pentágono | 35 |
| 3.4. Ejemplo de pentágono con vértices x^s dentro del contenedor Ω | 38 |
| 4.1. Soluciones obtenidas para triángulos rígidos en contenedor rectangular | 51 |
| 4.2. Configuraciones de triángulos flexibles (80 %) en contenedor rectangular | 53 |
| 4.3. Disposición de triángulos rígidos en contenedor circular | 55 |
| 4.4. Arreglos de triángulos flexibles (80 %) en contenedor circular | 57 |
| 5.1. 10 pentágonos flexibles en contenedor circular | 64 |
| 5.2. Cuatro pentágonos rígidos y seis flexibles en contenedor circular . . . | 64 |
| 5.3. Pentágono cuyos lados son tomados como vectores consecutivos . . . | 65 |
| 5.4. Veinte pentágonos flexibles en contenedor circular | 68 |

| | |
|--|----|
| 5.5. Cinco pentágonos rígidos y quince flexibles en contenedor circular . . . | 68 |
| 5.6. Veinte pentágonos flexibles en contenedor cuadrado | 69 |
| 5.7. Ocho pentágonos rígidos y doce pentágonos flexibles en contenedor circular | 70 |
| 5.8. Cinco pentágonos rígidos y quince pentágonos flexibles en contenedor circular | 70 |
| 5.9. Treinta pentágonos flexibles en contenedor circular | 71 |
| 5.10. Diez pentágonos rígidos y veinte flexibles en contenedor circular . . . | 72 |
| 5.11. Treinta pentágonos flexibles en contenedor cuadrado | 73 |
| 5.12. Ocho pentágonos rígidos y veintidós pentágonos flexibles en contene- dor cuadrado | 73 |
| 5.13. Veinte y treinta pentágonos flexibles en contenedor circular minimi- zando la flexibilidad (ρ) | 77 |
| 5.14. Ocho pentágonos rígidos y veintidós pentágonos flexibles en contene- dor cuadrado | 78 |

ÍNDICE DE TABLAS

| | |
|---|----|
| 2.1. Modelación en dos dimensiones donde se minimiza la dimensión del contenedor cuando este es un círculo, un cuadrado, una tira, un rectángulo y un triángulo equilátero. | 15 |
| 3.1. Modelación bidimensional para optimizar la/s dimensión/es del contenedor | 40 |
| 4.1. Número de instancias según tipo de elemento | 47 |
| 4.2. Estructura matricial: ángulos(σ) entre lados y distancia(d) | 48 |
| 4.3. Empaquetamiento de triángulos rígidos en contenedor rectangular | 50 |
| 4.4. Empaquetamiento de triángulos flexibles en contenedor rectangular | 52 |
| 4.5. Empaquetamiento de triángulos rígidos en contenedor circular | 54 |
| 4.6. Empaquetamiento de triángulos flexibles en contenedor circular | 56 |
| 4.7. Comparación de resultados del modelo M1 y M2 | 59 |
| 5.1. Número de instancias según tipo de elemento | 61 |
| 5.2. Estructura matricial: ángulos(σ) entre lados y distancia(d) | 62 |
| 5.3. Resultados de 10 pentágonos flexibles en contenedor circular | 63 |

| | |
|--|----|
| 5.4. Resultados de 20 pentágonos flexibles en contenedor circular | 67 |
| 5.5. Resultados de 20 pentágonos flexibles en contenedor cuadrado | 69 |
| 5.6. Resultados de 30 pentágonos flexibles en contenedor circular | 71 |
| 5.7. Resultados de 30 pentágonos flexibles en contenedor cuadrado | 72 |
| 5.8. 20 y 30 pentágonos flexibles minimizando el valor (ρ) en contenedor circular | 77 |
| 5.9. Resultado de 20 y 30 pentágonos flexibles minimizando el valor de flexibilidad (ρ) en contenedor cuadrado | 78 |

AGRADECIMIENTOS

Mi agradecimiento es para:

Mi esposa, que día tras día me ha ayudado a mantenerme centrado en mis metas. Sin ella de seguro el camino sería más difícil.

Toda mi familia, por ser mi apoyo incondicional y estar para mí siempre que lo he necesitado.

Mi hijo, que es el motor que me impulsa todos los días en la búsqueda de una mejor versión de mí.

Mis asesores, el Dr. Igor Litvinchev y el Dr. José Antonio Marmolejo Saucedo por la paciencia y dedicación brindadas.

Mis revisores de tesis, la Dra. Edith Lucero Ozuna Espinosa, Dr. José Daniel Mosquera Artamonov, el Dr. César Emilio Villarreal Rodríguez, Dr. Luis Alfonso Infante Rivera y el Dr. Fernando López Irarragorri, que con sus consejos y recomendaciones oportunas que me trajeron hasta la culminación de este trabajo.

CONACyT que me brindó la oportunidad de poder estudiar un doctorado en una universidad de gran prestigio.

PISIS este excelente posgrado que con su prestigioso claustro de profesores me nutrieron de lo necesario para seguir en el camino de la investigación y aprendizaje.

FIME facultad que proporcionó valiosos recursos para mi formación. lugar

que llege a sentir como mi hogar.

Las amistades cosechadas en mi estancia en la UANL.

Todos los profesores que en el trascurso de mi vida me nutrieron con sus conocimientos.

RESUMEN

Alberto Martínez Noa. Candidato para obtener el grado de Doctor en Ciencias de la Ingeniería en Sistemas.

Universidad Autónoma de Nuevo León.

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica.

Título del estudio: EMPAQUETAMIENTO ÓPTIMO DE POLÍGONOS CONVEXOS SUAVES.

Número de páginas: 92.

El modelo que se propone usa programación no lineal e incluye restricciones de no intersección que son más eficientes, lo que permite una deformación controlada de los polígonos. Una aportación importante es la forma en que se incorporan las restricciones de convexidad usando el producto vectorial de lados consecutivos del polígono, esto asegura que la geometría de los elementos se mantenga íntegra aunque se deformen.

La investigación incluye una experimentación computacional bastante completa que valida que el modelo funciona al resolver instancias más grandes y complejas que las de trabajos anteriores. Se exploraron varios escenarios de empaquetamiento con contenedores circulares y cuadrados, trabajando con polígonos regulares e irregulares. Los resultados muestran que se logran mejoras importantes en la densidad de empaquetado, sobre todo en instancias con muchos polígonos.

En una segunda fase de experimentación se buscó identificar cuál es el nivel óptimo de flexibilidad que se necesita para conseguir las mayores densidades de empaquetamiento. Lo que se encontró es que se pueden obtener densidades muy altas con niveles moderados de flexibilidad, lo cual tiene implicaciones prácticas importantes para usar el modelo en situaciones reales.

El modelo demostró tener bastante versatilidad ya que se adapta a diferentes

formas de contenedores y tipos de polígonos. Se lograron densidades de empaquetamiento de hasta 99.99 % en contenedores cuadrados y 99.20 % en contenedores circulares, confirmando que el enfoque propuesto es efectivo.

Además de las contribuciones teóricas y metodológicas, en la tesis se analizan aplicaciones prácticas del modelo en sectores como la industria textil, manufactura de metales, Industria 4.0 y nanotecnología. También se discuten las limitaciones del estudio y se proponen líneas para investigación futura, por ejemplo, extender el modelo a problemas en tres dimensiones y combinarlo con técnicas de aprendizaje automático.

En general, este trabajo representa un avance significativo en cómo se modelan y resuelven problemas complejos de empaquetamiento, estableciendo bases para futuros desarrollos en optimización geométrica y problemas de corte y empaquetamiento.

Los resultados principales de trabajo fueron publicados en dos artículos en revistas indexadas (JCR, Q2) y un capítulo de libro:

1. Igor Litvinchev, Luis Infante, Tatiana Romanova, Alberto Martinez-Noa, & Luis Gutierrez (2024). Packing Soft Convex Polygons in an Optimized Convex Container. *Mobile Networks and Applications*, 29, 211–220. <https://doi.org/10.1007/s11036-023-02286-5>
2. Igor Litvinchev, Tatiana Romanova, Rogelio Corrales-Diaz, Aned Esquerra-Arguelles, Alberto Martinez-Noa (2020). Lagrangian Approach to Modeling Placement Conditions in Optimized Packing Problems. *Mobile Networks and Applications*, 25, 2126–2133. <https://doi.org/10.1007/s11036-020-01556-w>
3. Igor Litvinchev, Luis Infante, Tatiana Romanova, Alberto Martinez-Noa, & Luis Gutierrez (2024). Optimized packing soft convex polygons. In: Marmolejo-Saucedo, J.A. et al. (eds) *Computer Science and Engineering in Health Services. COMPSE 2022. EAI/Springer Innovations in Communication and Computing*. Springer, Cham., Chapter 7, pp 89-97. https://doi.org/10.1007/978-3-031-34750-4_7

Estas publicaciones demuestran la relevancia y el impacto del trabajo en el campo de la optimización y problemas de corte y empaquetamiento, presentando los resultados más significativos de la investigación.

Firma del asesor:



Dr. Igor Semionovich Litvinchev

Firma del coasesor:



Dr. José Antonio Marmolejo Saucedo

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

La historia del desarrollo humano muestra que siempre se ha buscado usar los recursos de manera eficiente. Esta tendencia se ha venido heredando de generación en generación, desde las necesidades más básicas de supervivencia hasta las operaciones productivas complejas que se tienen ahora, quedando arraigada como una aspiración natural hacia la mejora continua.

Hoy en día, con el avance tecnológico y el flujo constante de información las computadoras han alcanzado niveles de capacidad bastante impresionantes. Los avances científicos que se tienen permiten simular comportamientos naturales y sociales con bastante precisión. Campos como la Ingeniería de Sistemas, la Investigación de Operaciones y la Economía Cuantitativa han surgido justamente para abordar los retos actuales de manera efectiva.

Así mismo, la optimización encuentra su aplicación en prácticamente todos los aspectos de nuestra cotidianidad. Actividades diarias, por pequeñas que sean, pueden ser analizadas y perfeccionadas mediante las técnicas desarrolladas con este fin. No hay ámbito de la actividad humana que escape a la posibilidad de ser estudiado y mejorado.

Los sectores de la industria primaria, la manufactura, los servicios, así como las operaciones logísticas, los problemas de distribución geográfica y las cadenas de

suministro, han sido objeto de extensas investigaciones mediante estas metodologías. Esta aplicación se ha reflejado en una serie de investigaciones de gran repercusión en el ámbito de las materias primas.

Los desafíos específicos tratados en este estudio están vinculados principalmente con los ámbitos logístico, textil y automotor. No obstante, gracias a la flexibilidad de los modelos utilizados, la diversidad de problemáticas dentro de un mismo sector y la facilidad con la que pueden adaptarse a distintos contextos, el espectro de aplicación se expande a nuevas áreas del conocimiento. Estas cuestiones se engloban bajo la denominación de problemas de optimización de corte y empaquetamiento (C&P).

Los problemas de C&P han captado la atención de investigadores y profesionales desde hace décadas debido a su amplia variedad de aplicaciones en diversas áreas del conocimiento y sectores industriales. Estos problemas consisten en asignar de manera eficiente un conjunto de elementos pequeños, denominados *ítems*, a uno o varios objetos grandes, conocidos como contenedores, de modo que se satisfagan ciertas condiciones geométricas y se optimice alguna medida de desempeño [4].

El presente trabajo de investigación se centra en problemas de empaquetado óptimo de polígonos convexos, considerando dimensiones variables del contenedor. El enfoque propuesto permite resolver problemas de corte o empaquetamiento tanto de objetos rígidos como de elementos tolerantes a deformaciones. Además, se considerarán algunos elementos no convexos formados a partir de la unión de elementos convexos, como triángulos, rectángulos, cuadrados y pentágonos.

1.1 MOTIVACIÓN Y JUSTIFICACIÓN

La resolución eficiente de los problemas de C&P tiene un impacto significativo en diversos sectores industriales, como el textil, donde el corte óptimo de piezas irregulares a partir de rollos de tela es crucial para minimizar el desperdicio de material

[27], y la industria del acero, donde el aprovechamiento de las láminas metálicas mediante un adecuado posicionamiento de las piezas permite reducir costos y optimizar recursos [46]. Además, en el contexto de la Industria 4.0, el empaquetamiento eficiente de objetos irregulares se aplica en tecnologías como la manufactura aditiva [44, 40].

Más allá del ámbito industrial, los problemas de empaquetamiento están presentes en campos como la física, biología, medicina, ciencia de materiales y nanotecnología. Por ejemplo, en el estudio de materiales granulares, la optimización del empaquetamiento de partículas es fundamental para entender sus propiedades y comportamiento [14], mientras que en medicina, la planificación de tratamientos radioquirúrgicos implica el acomodo óptimo de haces de radiación, lo cual puede modelarse como un problema de empaquetamiento [48].

Dado el alto impacto de estos problemas en la sociedad y su cada vez mayor relevancia en el uso eficiente de recursos, la implementación de modelos y métodos de solución efectivos es una necesidad. Esta investigación busca contribuir en este sentido, proponiendo un modelo general que se adapte a una gran variedad de problemáticas con aplicación en la vida real.

Este trabajo parte de una modelación de programación no lineal desarrollado anteriormente por el autor [36], el cual aborda el empaquetamiento de polígonos convexos en un contenedor dimensiones variables. Aunque se obtuvieron buenos resultados para instancias de pocos elementos, la complejidad del problema hace difícil tratar instancias con mayor número de elementos. Por lo tanto, se plantea la incorporación de mejoras en las restricciones de no intersección y la extensión del modelo para considerar el empaquetamiento de elementos de dimensiones flexibles.

Tradicionalmente, este problema se ha estudiado considerando objetos rígidos con formas regulares como rectángulos y círculos [37, 30]. Sin embargo, en muchos contextos prácticos, los objetos a empaquetar presentan cierta flexibilidad o capacidad de deformación, lo que ha llevado al surgimiento del área de investigación de

empaquetamiento de objetos suaves [28].

En años recientes, se han propuesto diversos modelos y algoritmos para el empaquetamiento de objetos suaves, principalmente enfocados en formas rectangulares y elipsoidales [13, 22, 6, 45]. Por ejemplo, Fügenschuh et al. [13] desarrollaron algoritmos exactos y de aproximación para el empaquetamiento de rectángulos suaves, mientras que Bui et al. [6] estudiaron variantes con restricciones de corte tipo guillotina. Por otro lado, Romanova et al. [45] consideraron el empaquetamiento de elipses suaves en contenedores optimizados. Estos trabajos han sentado bases importantes para la modelación matemática y solución algorítmica de problemas de empaquetamiento de objetos “suaves”.

No obstante, en muchas aplicaciones los objetos a empaquetar tienen formas más complejas que pueden aproximarse mejor mediante polígonos o combinaciones de ellos. Tal es el caso en problemas de diseño de plantillas (floorplanning) de circuitos integrados [24], generación de mallas de elementos finitos [19] y caracterización de agregados de partículas [3]. A pesar de su relevancia práctica, el empaquetamiento de polígonos suaves ha sido mucho menos estudiado en la literatura.

1.2 HIPÓTESIS

La incorporación de mejoras en las restricciones de no intersección y la extensión del modelo de programación no lineal (PNL) que considere el empaquetamiento de elementos no convexos y de dimensiones flexibles permitirá obtener soluciones de alta calidad para instancias de mayor tamaño del problema de empaquetamiento en contenedores de dimensiones variables, superando las limitaciones de los modelos existentes y ampliando su aplicabilidad a problemas reales en diversos sectores industriales y áreas del conocimiento.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 OBJETIVO GENERAL

Elaborar un modelo de PNL mejorado para problemas de corte y empaquetamiento de polígonos convexos en contenedores con dimensiones abiertas, que incorpore restricciones de no intersección más eficientes y permita el empaquetamiento de elementos de dimensiones flexibles, con el fin de obtener soluciones de alta calidad para instancias de mayor tamaño y ampliar su aplicabilidad a problemas reales en diversos sectores industriales y áreas del conocimiento.

1.3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Analizar limitaciones en el modelo de PNL previamente desarrollado para el empaquetado de polígonos convexos en contenedores con dimensiones abiertas e identificar oportunidades de mejora.
2. Diseñar e implementar mejoras en las restricciones de no intersección usando técnicas avanzadas. Esto reducirá la complejidad computacional y permitirá resolver instancias más grandes.
3. Incorporar al modelo la capacidad de empaquetar elementos de dimensiones flexibles, permitiendo cierta tolerancia a la deformación de los objetos y explorando diferentes enfoques para representar y controlar la flexibilidad.
4. Desarrollar un conjunto de instancias de prueba diversas y representativas, que abarquen diferentes tamaños, formas y características de los elementos a empaquetar, para evaluar el desempeño del modelo mejorado.
5. Realizar experimentación computacional exhaustiva con las instancias de prue-

ba, comparando los resultados obtenidos por nuestro modelo mejorado con los modelos existentes en la literatura, analizando su eficiencia, calidad de las soluciones y escalabilidad.

6. Identificar aplicaciones potenciales del modelo mejorado en problemas reales de C&P en diversos sectores industriales y áreas del conocimiento, y discutir su impacto y potenciales beneficios.

1.4 METODOLOGÍA

1. Revisión bibliográfica: Se revisará exhaustivamente la literatura sobre problemas de C&P, modelos matemáticos, técnicas de solución y aplicaciones en diferentes áreas. Identificando las limitaciones de los modelos existentes y las oportunidades de mejora.
2. Desarrollo del modelo mejorado: Se diseñarán e implementarán las mejoras propuestas al modelo de programación no lineal. Esto incluye restricciones de no intersección más eficientes, manejo de polígonos no convexos y elementos con dimensiones flexibles. Se utilizarán avanzadas de modelado matemático para validar la formulación de modelo propuesto.
3. Generación de instancias de prueba: Se desarrollará un conjunto variado de instancias de prueba, considerando diferentes tamaños, formas y características de los elementos a empaquetar. Se utilizará un generador de instancias y se recopilarán dichas instancias para asegurar la replicabilidad de los casos de prueba.
4. Experimentos computacionales: Se realizarán una experimentación exhaustiva con las instancias de prueba, utilizando el modelo mejorado en un entorno de programación adecuado y empleando solvers comerciales de optimización

no lineal. Se registrarán los resultados obtenidos, incluyendo la calidad de las soluciones y los tiempos de ejecución.

5. Análisis de resultados: Se compararán los resultados obtenidos por el modelo mejorado con los modelos existentes en la literatura, evaluando la calidad de las soluciones, tamaño de las instancias y la eficiencia computacional. Se realizará un análisis de los resultados y se discutirán las fortalezas y limitaciones del enfoque propuesto.
6. Identificación de aplicaciones: Se explorarán las posibles aplicaciones del modelo mejorado en problemas reales de C&P en diferentes sectores industriales y áreas del conocimiento. Se discutirá el impacto y los beneficios del modelo en términos de reducción de desperdicios, optimización de recursos.
7. Documentación y difusión de resultados: Se elaborará una tesis de grado que plasme todo el proceso de investigación, incluyendo la formulación del modelo propuesto, la metodología a utilizar, los resultados alcanzados y las conclusiones. Se escribirá al menos dos científicos para su publicación en revistas especializadas y se presentarán los resultados en conferencias de relevancia.

1.5 RESULTADOS ESPERADOS

1. Un modelo de PNL mejorado para problemas de empaquetamiento de polígonos convexos en contenedores de dimensiones abiertas, que incorpore restricciones de no intersección más eficientes y permita el empaquetamiento de elementos de dimensiones flexibles.
2. Un conjunto de instancias de prueba diversas y representativas, que sirvan como *benchmarks* para evaluar el desempeño de modelos de empaquetamiento.
3. Resultados computacionales que demuestren la efectividad del modelo mejorado en términos de calidad de los resultados, capacidad de resolución de

instancias de mayor tamaño y eficiencia computacional, en comparación con los modelos existentes.

4. Análisis y discusión de las fortalezas y limitaciones del enfoque propuesto, así como su impacto y beneficios en la resolución de problemas reales de empaquetamiento en diversos sectores industriales y áreas del conocimiento.

Se espera que los resultados obtenidos en la investigación contribuyan significativamente al avance del conocimiento en el campo de los problemas de C&P, proporcionando un modelo mejorado y flexible que pueda ser aplicado en una amplia gama de problemas reales. Además, se busca fomentar la colaboración con investigadores y profesionales de diferentes áreas para explorar nuevas aplicaciones y extender aún más el alcance del modelo propuesto.

1.5.1 ESTRUCTURA DEL DOCUMENTO DE INVESTIGACIÓN

El presente documento de investigación se estructura de la manera siguiente:

En el Capítulo 2 se presenta lo referido al marco teórico, donde se describen conceptos fundamentales asociados al tema de los problemas C&P, los tipos de objetos y contenedores, los modelos y métodos de solución existentes, y las aplicaciones en la industria.

El Capítulo 3 detalla la metodología de solución adoptada. Se describe la representación geométrica de los polígonos, tanto rígidos como flexibles, se formulan las condiciones de no intersección y contenimiento, se desarrolla la función objetivo y la formalización del modelo matemático mejorado que se propone.

En el Capítulo 4 se presenta la validación del modelo propuesto. Se describen los objetivos específicos de la validación, el diseño experimental para la validación, las instancias analizadas y se presentan y discuten los resultados preliminares.

El Capítulo 5 abarca la experimentación completa y sus resultados. Se detallan las fases de experimentación, se revisan y interpretan los resultados obtenidos en diferentes variantes contenedores y polígonos, y se evalúa el impacto de las restricciones de convexidad en el modelo.

Para finalizar, en el Capítulo 6 se presentan las conclusiones generales de este trabajo, se resaltan las contribuciones principales y se plantean posibles direcciones para trabajo futuro.

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO

2.1 CLASIFICACIÓN GENERAL DE PROBLEMAS DE C&P

Este tipo de problemas abarcan una amplia gama de variantes y características que han sido reiteradamente objeto de investigación en la literatura. Wäscher et al. [49] propusieron una tipología mejorada para clasificar estos problemas considerando diferentes aspectos, tales como:

- Tipos de asignación: Se refiere a si el objetivo es maximizar la utilización de los objetos grandes (problemas de minimización de entradas) o maximizar el valor de los elementos pequeños seleccionados (problemas de maximización de salidas).
- Colección de elementos pequeños: Considera si las demandas de los objetos pequeños son uniformemente estructuradas o son variables.
- Colección de elementos de gran tamaño: Distingue entre objetos grandes con forma regular (rectangular) y material homogéneo, y objetos con forma irregular o material no homogéneo.

- Dimensionalidad: Clasifica los problemas según el número de dimensiones espaciales relevantes, pudiendo ser problemas de una, dos, tres o más dimensiones.
- Forma de los elementos pequeños: Diferencia entre elementos con formas regulares (rectángulos, círculos, cajas, cilindros, esferas) y formas irregulares.

A partir de estas características, se definen las principales categorías de problemas de C&P [5]. Dentro de los problemas de minimización de entradas, se encuentran:

- Single Stock-Size Cutting Stock Problem (SSSCSP)
- Multiple Stock-Size Cutting Stock Problem (MSSCSP)
- Residual Cutting Stock Problem (RCSP)
- Single Bin-Size Bin Packing Problem (SBSBPP)
- Multiple Bin-Size Bin Packing Problem (MBSBPP)
- Residual Bin Packing Problem (RBPP)
- Open Dimension Problem (ODP)

Por otro lado, en los problemas de maximización de salidas, se incluyen:

- Identical Item Packing Problem (IIPP)
- Single Large Object Placement Problem (SLOPP)
- Multiple Identical Large Object Placement Problem (MILOPP)
- Multiple Heterogeneous Large Object Placement Problem (MHLOPP)
- Single Knapsack Problem (SKP)
- Multiple Identical Knapsack Problem (MIKP)

- Multiple Heterogeneous Knapsack Problem (MHKP)

Este trabajo está centrado específicamente en problemas de dimensiones abiertas (ODP), se categoriza como uno de los problemas de minimización de entradas. En los ODP, se busca empaquetar una colección de elementos pequeños en uno o varios contenedores, teniendo en cuenta que al menos una de las dimensiones del contenedor puede variar. El objetivo es minimizar las dimensiones del contenedor requerido para acomodar todos los elementos.

Dentro de la clase ODP, se pueden encontrar variantes como el problema de empaquetamiento ortogonal (OPP) así como el problema de empaquetamiento en tiras (SPP), ambos considerados como problemas ODP rectangulares en dos dimensiones. Otra variante son los llamados problemas de empaquetado en tiras de irregulares o de anidamiento (ISPP), muy utilizado en las industrias como la manufacturera, que se clasifica como un problema ODP irregular en dos dimensiones.

En particular, el presente trabajo ataca el problema de corte y empaquetamiento de una colección arbitraria de polígonos convexos (regulares y irregulares) contenidos en contenedores también convexos con dimensiones variables. Este problema se enmarca dentro de la clase ODP y presenta desafíos interesantes en términos de modelado matemático y desarrollo de algoritmos de solución eficientes.

La figura 2.1 presenta el lugar del problema abordado en este trabajo dentro de la tipología básica de los problemas de C&P propuesta por Wäscher et al. [49].

En la siguiente sección, se presentarán modelos matemáticos y perspectivas de solución presentadas en la literatura para diferentes variantes del ODP, con el fin de contextualizar y fundamentar la elaboración del modelo propuesto por el autor para atacar el problema de empaquetado de polígonos convexos dentro de contenedores de dimensiones abiertas.

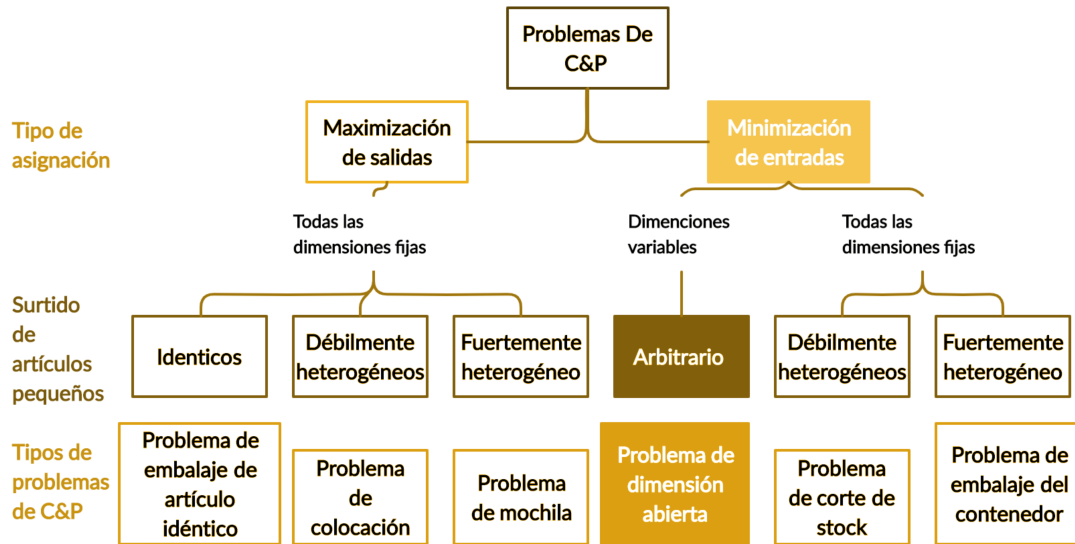


FIGURA 2.1: Clasificación general de los problemas de C&P por [49]

2.2 PROBLEMA DE CONTENEDORES DE DIMENSIONES ABIERTAS O VARIABLES

El problema de dimensiones abiertas (ODP, Open Dimension Problem) es una clase de problemas de corte y empaquetamiento donde al menos una de las dimensiones del contenedor es variable. El objetivo principal es minimizar las dimensiones del contenedor requerido para acomodar todos los elementos pequeños.

Dentro de la clase ODP, se pueden encontrar diversas variantes según las características específicas del problema. A continuación, se muestran algunas de las variantes más relevantes y se presentan modelos matemáticos propuestos en la literatura para abordarlas.

2.2.1 PROBLEMAS DE MINIMIZACIÓN DE PERÍMETRO O ÁREA

Birgin y Sobral [2] contemplan una amplia gama de modelos de programación no lineal para abordar el problema de minimizar las dimensiones del contenedor en problemas de empaquetamiento en 2D y 3D, considerando elementos idénticos y de diferentes tamaños. En la Tabla 2.1 se muestran los modelos para contenedores en 2D, incluyendo círculo, cuadrado, tira, rectángulo y triángulo equilátero. Para cada tipo de contenedor, se especifica el modelo, el número restricciones así como el de variable. El objetivo puede ser minimizar el perímetro o área del contenedor, sujeto a que los elementos se ajusten dentro del contenedor sin superposición. Los autores implementan una metodología eficiente para reducir el costo computacional de calcular la superposición y utilizan un método práctico para resolver todos los modelos propuestos, demostrando su aplicabilidad.

TABLA 2.1: Modelación en dos dimensiones donde se minimiza la dimensión del contenedor cuando este es un círculo, un cuadrado, una tira, un rectángulo y un triángulo equilátero.

| Contenedor | Modelo | # de Variables | # de Restricciones |
|----------------------|--|----------------|---|
| Círculo | Mins.t. R $(c\hat{x}_i)^2 + (c\hat{y}_i)^2 \leq (R - r_i)^2, \forall i$ $R \geq r_{max} \equiv \max_i = 1, \dots, Nr_i$ non-overlapping constraint (3) | $2N + 1$ | $N + 2$ |
| Cuadrado | Mins.t. L $r_i \leq c\hat{x}_i \leq L - r_i, \forall i$ $r_i \leq c\hat{y}_i \leq L - r_i, \forall i$ non-overlapping constraint (3) | $2N + 1$ | $4N + 1$ ($2N$ are box constraints) |
| Tira | Min W s.t. $r_i \leq c\hat{x}_i \leq \bar{L} - r_i, \forall i$ $r_i \leq c\hat{y}_i \leq W - r_i, \forall i$ non-overlapping constraint (3) | $2N + 1$ | $4N + 1$ ($3N$ are box constraints) |
| Rectángulo | Mins.t. LW or Min $L + W$ $r_i \leq c\hat{x}_i \leq L - r_i, \forall i$ $r_i \leq c\hat{y}_i \leq W - r_i, \forall i$ non-overlapping constraint (3) | $2N + 2$ | $4N + 1$ ($2N$ are box constraints) |
| Triángulo Equilátero | Mins.t. L $c\hat{y}_i \geq r_i, \forall i$ $6c\hat{x}_i + 2\sqrt{3}c\hat{y}_i \leq 3L - 4\sqrt{3}r_i, \forall i$ $-6c\hat{x}_i + 2\sqrt{3}c\hat{y}_i \leq 3L - 4\sqrt{3}r_i, \forall i$ non-overlapping constraint (3) | $2N + 1$ | $3N + 1$ (N are box constraints) |

2.2.2 EMPAQUETAMIENTO EN TIRAS

Martello et al. [38] proponen un enfoque exacto para el problema de empaquetado en tiras (Strip Packing Problem, SPP). En este problema, se tiene un conjunto de n elementos rectangulares, cada uno con ancho w_j y altura h_j ($j \in J$), y la tira que los contiene presenta un ancho W y altura infinita. Lo que se busca es asignar todos los elementos de manera ortogonal y sin superposición en la tira, minimizando la

altura total del empaquetado. Los autores presentan el siguiente modelo matemático para SPP:

$$\text{Min } H \quad (2.1)$$

$$\text{sujeto a :} \quad (2.2)$$

$$x_j + w_j \leq W \quad \forall j \in J \quad (2.3)$$

$$y_j + h_j \leq H \quad \forall j \in J \quad (2.4)$$

$$x_i + w_i \leq x_j \text{ o } x_j + w_j \leq x_i \text{ o } y_i + h_i \leq y_j \text{ o } y_j + h_j \leq y_i \quad \forall i, j \in J, i \neq j \quad (2.5)$$

$$x_j, y_j \geq 0 \quad \forall j \in J \quad (2.6)$$

donde (x_j, y_j) representa la ubicación en coordenadas de la esquina inferior izquierda del elemento j dentro de la tira, así como H es la altura total del contenedor. Las restricciones aseguran que:

- Cada elementos se encuentre dentro del ancho de la tira.
- Cada elementos se encuentre dentro de la altura del contenedor.
- No haya superposición entre los elementos.

El modelo es resuelto mediante un algoritmo de ramificación y acotamiento (branch-and-bound). Para obtener cotas inferiores efectivas, los autores proponen una nueva relajación basada en “cortar” cada ítem en h_j rebanadas de altura unitaria y resolver el problema resultante como un problema de empaquetado en contenedores unidimensionales. Esta relajación es resuelta mediante un algoritmo enumerativo especializado. Además, se desarrollan nuevos algoritmos heurísticos para obtener buenas soluciones iniciales. Los experimentos computacionales muestran que el enfoque propuesto tiene la capacidad dar solución a instancias de la literatura con hasta 200 ítems.

2.2.3 EL PROBLEMA DE EMPAQUETAMIENTO EN TIRAS IRREGULAR

Los problema de empaquetado en tiras irregulares (ISPP, Irregular Strip Packing Problem) es una variante del SPP donde los elementos a empacar tienen formas irregulares. Este problema es común en la industria manufacturera, como en el corte de piezas de tela o cuero.

Gomes y Oliveira [15] propusieron un modelo para el ISPP utilizando el concepto de polígonos de no ajuste (NFP):

$$\text{Min } L \quad (2.7)$$

sujeto a:

$$x_i \leq L - l_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.8)$$

$$y_i \leq W - l_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.9)$$

$$\alpha_{ijk}(x_j - x_i) + \beta_{ijk}(y_j - y_i) \leq q_{ijk} + M(1 - b_{ijk}) \quad 1 \leq i < j \leq N, \quad k = 1, \dots, m_{ij} \quad (2.10)$$

$$\sum_{k=1}^{m_{ij}} b_{ijk} \geq 1 \quad 1 \leq i < j \leq N \quad (2.11)$$

$$b_{ijk} \in \{0, 1\} \quad 1 \leq i < j \leq N \quad (2.12)$$

$$x_i, y_i \geq 0 \quad 1 \leq i \leq N \quad (2.13)$$

En la (2.7) se presenta la función objetivo, la misma consiste en minimizar la longitud total utilizada. Las restricciones (2.8)-(2.10) aseguran el contenimiento de las piezas irregulares dentro de la tira, mientras que las restricciones (2.11)-(2.12) evitan el solapamiento entre las piezas utilizando los NFP.

Los modelos presentados anteriormente brindan una idea de cómo abordar diferentes variantes del problema ODP. En el caso particular de este trabajo, donde se consideran polígonos convexos como elementos a empacar, las restricciones de no solapamiento pueden ser más complejas. Sin embargo, la estructura general tanto de

la función objetivo como la de las restricciones de contención pueden ser similares a los modelos propuestos por Birgin y Sobral [2].

En las secciones siguientes se desarrolla una modelación matemática específica para empaquetar polígonos convexos en contenedores de dimensiones variables, aprovechando las ideas y enfoques encontrados en la literatura, adaptándolos a las características particulares del problema tratado en este trabajo.

2.3 TRABAJOS SOBRE PROBLEMAS DE CORTE Y EMPAQUETAMIENTO ENCONTRADOS EN LA LITERATURA REVISADA

La literatura sobre problemas de corte y empaquetamiento (CP) es extensa y diversa. A continuación, se presentan trabajos relevantes organizados en tres categorías principales.

2.3.1 PROBLEMAS DE EMPAQUETAMIENTO DE ELEMENTOS RÍGIDOS

El trabajo de [42] trata el empaquetamiento de contenedores bidimensionales de tamaño variable. La estrategia usa descomposición de Dantzig-Wolfe para obtener límites inferiores de calidad. La relajación de programación lineal se resuelve mediante generación retardada de columnas. Se desarrolla un algoritmo exacto basado en ramificación y precio. Este enfoque maneja eficientemente la complejidad del problema. Consigue soluciones de alta calidad para instancias de tamaño moderado.

En [9] presentan un método exacto basado en descomposición de Benders para el problema de empaquetamiento en tiras. El problema maestro corta los artículos en

rodajas de ancho unitario. Los empaqueta contiguos en la tira. El problema esclavo intenta reconstruir los artículos rectangulares fijando las posiciones verticales de las rodajas. Este enfoque aborda eficazmente la naturaleza combinatoria del problema.

Los autores de [10] proponen un método basado en descomposición de Benders para problemas de corte ortogonal. El problema maestro utiliza programación lineal entera con la formulación de flujo de arco. El problema esclavo emplea programación de restricciones. Esta combinación maneja eficientemente las restricciones geométricas y de empaquetamiento.

El trabajo de [1] presenta el problema de encontrar el empaque con mayor densidad de N círculos idénticos dentro de un contenedor circular. Proponen un procedimiento de optimización global cuasifísico. Este simula desplazamientos por presiones elásticas, fuerzas atractivas y fuerzas de repulsión. El enfoque consigue soluciones de alta calidad para objetos circulares.

En [20] se presenta una revisión profunda de métodos exactos y técnicas de relajación. Se enfoca en resolver problemas de corte y empaquetamiento bidimensional de rectángulos. Cubre cuatro problemas principales: empaquetamiento en una tira (2D-SPP), empaquetamiento en contenedores (2D-BPP), problema de la mochila bidimensional (2D-KP) y problema de empaquetamiento ortogonal (2D-OPP). Se discuten variantes como rotación ortogonal, cortes guillotina y contenedores de tamaño variable. Revisan métodos como programación lineal entera, descomposición de Benders, generación de columnas y ramificación y poda. Este trabajo recopila una lista de instancias no resueltas.

Los problemas de empaquetamiento de tiras tridimensionales y de mochila tridimensional para esferas de diferentes tamaños se estudian en [26]. Implementan algoritmos codiciosos que adaptan enfoques del caso bidimensional. Logran mejoras considerables. Este trabajo demuestra la efectividad de enfoques heurísticos para problemas tridimensionales.

En [7] se propone un método constructivo basado en búsqueda en haz filtra-

da (FBS). Aborda el empaquetado de elementos circulares unitarios dentro de un contenedor circular minimizando su radio. La estrategia de colocación emplea una técnica de ocupación de esquinas. Utiliza un proceso de selección en dos fases para elegir la mejor posición de cada círculo. La precisión y eficiencia se regulan mediante dos parámetros: ancho de filtro y ancho de haz. El rendimiento se evalúa en dos conjuntos de datos de referencia. Se compara con un método de optimización global y cinco algoritmos constructivos. Los resultados muestran que el algoritmo supera a los enfoques constructivos previos. Esto destaca la eficacia del marco FBS en este problema.

El trabajo de [47] implementa un algoritmo de mallado basado en empaquetado de polígonos convexos. Lo usa para modelar rocas y medios porosos. Utiliza optimización combinatoria para generar empaquetados densos de polígonos. Combina técnicas de geometría computacional con algoritmos de optimización.

2.3.2 EMPAQUETAMIENTO DE ELEMENTOS SUAVES

En [23] se muestra una alternativa innovadora para modelar la evolución de agregados multicelulares como un problema de empaquetado blando. Los autores utilizan un enfoque de interfaz difusa. Esto permite que las células se deformen y crezcan. El método emplea ecuaciones diferenciales parciales para modelar el crecimiento y la división celular. Ofrece una nueva perspectiva en el modelado de sistemas biológicos complejos.

El trabajo de [51] analiza el comportamiento de ensamblajes 2D de varillas elípticas bajo cizallamiento biaxial. Aunque no es un problema clásico de empaquetamiento, el análisis de las respuestas locales resulta relevante. Ayuda a comprender cómo los elementos interactúan en configuraciones densas. Los autores utilizan simulaciones de elementos discretos para modelar el comportamiento de las partículas. Esto proporciona perspectivas valiosas sobre la mecánica de materiales granulares.

Las propiedades estructurales y estadísticas del empaquetamiento atascado de elipsoides suaves se investigan en [8]. Los autores emplean simulación numérica para generar y analizar los empaquetados. El método implica minimizar la energía del sistema. Esto permite el análisis detallado de las distintas configuraciones de empaquetado densas y sus propiedades.

En [6], los autores abordan varios problemas de empaquetado de rectángulos blandos con restricciones de guillotina. El método combina programación lineal entera mixta con heurísticas de búsqueda local. Este enfoque híbrido maneja efectivamente las restricciones de guillotina. Al mismo tiempo optimiza el empaquetamiento de los rectángulos deformables.

Los autores de [53] presentan un enfoque para el problema de empaquetado tridimensional en contenedores para artículos que admiten deformación. Proponen un modelo matemático que incorpora la deformabilidad mediante factores de compresión. Para la solución combinan una heurística de ubicación adaptativa con un algoritmo genético. Esto ofrece una estrategia eficaz para problemas 3D de elementos deformables.

El empaquetado optimizado de elipses suaves se aborda en [45]. Utilizan funciones cuasi-phi para modelar las condiciones de no intersección. El método emplea un algoritmo que descompone el problema. Lo reduce a una serie de subproblemas de programación no lineal de menor dimensión. Maneja eficientemente la complejidad geométrica del problema.

En [31] se centra el trabajo en el empaquetado optimizado de polígonos convexos suaves. Utilizan funciones phi y cuasi-phi para modelar las condiciones de no superposición y contención. El método emplea un enfoque de descomposición similar al utilizado para elipses blandas. Esto permite manejar eficientemente la deformabilidad de los polígonos.

El trabajo de [52] estudia el empaquetado de diferentes partículas tetraédricas bajo vibraciones tridimensionales. Usan experimentos físicos y simulaciones DEM.

Investigan cómo afectan las condiciones de vibración y la formación de las partículas en la densidad de empaquetado. Identifican factores clave que influyen en la densidad de empaquetamiento.

2.3.3 TRABAJOS DE REVISIÓN DE LA LITERATURA Y LIBROS ACERCA DE LOS PROBLEMAS DE CORTE Y EMPAQUETAMIENTO

En [50] se da una visión bastante completa de los problemas de corte y empaquetamiento desde el punto de vista de la optimización combinatoria. Cubre una gama amplia de elementos, tanto formas regulares como irregulares, presentando varios métodos de solución que incluyen algoritmos exactos, heurísticas y metaheurísticas.

Otro trabajo importante es el de [25] donde se explora cómo usar programación matemática y otras perspectivas para resolver problemas de C&P, yendo desde métodos exactos hasta heurísticas más avanzadas. Muestran técnicas de descomposición y enfoques de optimización global que son bastante potentes para atacar problemas de gran escala con bastante complejidad.

Por su parte, [28] revisan los modelos matemáticos que se han propuesto recientemente para problemas de anidamiento. Realizan un análisis comparativo bajo un marco común de notación destacando las diferencias, similitudes, fortalezas y debilidades que tienen los diversos enfoques.

Un análisis profundo de la literatura enfocada en problemas de corte y empaquetamiento cuando hay incertidumbre se hace en [16], donde los autores proponen un marco de clasificación novedoso que organiza y categoriza los estudios que ya existen en este campo.

Respecto al empaquetado de círculos en regiones del plano euclidiano, [18] hace una revisión de literatura sobre métodos y modelos eficaces, analizando varios enfoques como optimización asistida por computadora, enfoques constructivos, ra-

mificación y acotamiento, simulación de billar, minimización no convexa, heurísticas multifase y metaheurísticas.

Las formulaciones principales y métodos de solución para problemas de empaquetado bidimensional ortogonal son revisados en [21]. Los autores analizan métodos exactos y relajaciones para cuatro problemas principales: encontrar un empaque de altura mínima, empaquetar elementos en el mínimo número de contenedores, encontrar un empaque de valor máximo y determinar si existe un empaque factible.

La revisión de literatura presentada muestra la gran variedad y complejidad que tienen los problemas de C&P. Los trabajos abarcan desde problemas clásicos hasta aplicaciones en varios campos, además de mostrar la diversidad de enfoques y métodos que se han desarrollado para resolverlos, lo cual ofrece una base sólida para investigaciones futuras en esta área.

2.4 ANÁLISIS Y ÁREAS DE OPORTUNIDAD

La revisión de la literatura sobre problemas de corte y empaquetamiento (C&P) revela un campo de investigación rico y diverso, con enfoques que abarcan desde elementos rígidos hasta suaves, y desde métodos exactos hasta heurísticas avanzadas. En este contexto, nuestro modelo propuesto para el empaquetamiento óptimo de polígonos convexos suaves presenta varias áreas de oportunidad y ventajas potenciales:

1. **Flexibilidad en la representación geométrica:** A diferencia de muchos modelos que se centran en formas específicas como rectángulos o círculos, nuestro enfoque permite la representación de polígonos convexos arbitrarios definidos por sus vértices. Esto ofrece una mayor versatilidad para abordar problemas del mundo real donde las formas pueden ser irregulares o variadas.
2. **Manejo de elementos suaves y rígidos:** Mientras que la mayoría de los

trabajos se centran en elementos rígidos o suaves exclusivamente, nuestro modelo tiene el potencial de manejar ambos tipos en un marco unificado. Esto podría ser especialmente valioso en aplicaciones donde coexisten elementos con diferentes grados de flexibilidad.

3. **Enfoque de hiperplano separador:** Nuestra utilización de un enfoque de hiperplano separador para las condiciones de no intersección ofrece una alternativa prometedora a los métodos tradicionales de no solapamiento. Esto podría conducir a formulaciones más eficientes computacionalmente, especialmente para problemas de gran escala.
4. **Optimización de contenedores de dimensiones variables:** Al abordar el problema con contenedores de dimensiones variables, nuestro modelo se alinea con las tendencias actuales en la investigación de C&P, como se ve en trabajos como el de [42]. Esto permite una mayor flexibilidad en la optimización del espacio de empaquetamiento.
5. **Potencial para aplicaciones interdisciplinarias:** Dado que nuestro modelo puede manejar formas complejas y flexibles, tiene el potencial de aplicarse en campos diversos como la biología celular (similar al trabajo de [23]) o la ciencia de materiales (como en [8]).
6. **Integración de técnicas avanzadas:** Existe la oportunidad de incorporar técnicas avanzadas vistas en la literatura, como la descomposición de Benders utilizada por [9] y [10] para así mejorar la eficiencia y escalabilidad de nuestro modelo.
7. **Extensión a problemas tridimensionales:** Aunque nuestro modelo actual se centra en el empaquetamiento bidimensional, existe la oportunidad de extenderlo a problemas tridimensionales, siguiendo la línea de trabajos como el de [52, 41].

Estas áreas de oportunidad posicionan nuestro modelo como una contribución po-

tencialmente significativa al campo de C&P. Al abordar la flexibilidad geométrica, la variabilidad de las dimensiones del contenedor y la posibilidad de manejar tanto elementos rígidos como suaves, nuestro enfoque podría ofrecer soluciones más versátiles y aplicables a una gama más amplia de problemas prácticos.

CAPÍTULO 3

METODOLOGÍA DE SOLUCIÓN

Para comprender completamente un problema hay que estudiarlo con detalle y desarrollar un modelo matemático adecuado. Este trabajo de investigación plantea un modelo para empaquetado óptimo varios polígonos convexos (regulares e irregulares) dentro de contenedores convexos de tamaño variable. Lo distintivo de esta propuesta es que se representa a los polígonos a través de las coordenadas de sus vértices, lo cual ofrece flexibilidad y precisión para describir su geometría.

3.1 DESCRIPCIÓN DE LA METODOLOGÍA

Como primera fase del trabajo incluye una revisión detallada de la literatura relacionada con:

- Modelos de PNL para problemas de dimensiones abiertas.
- Modelos de empaquetamiento de polígonos convexos y no convexos.
- Problemas de área y perímetro mínimos
- Problema de contenedor mínimo sin restricción de forma.
- Instancias grandes utilizadas en la literatura.

Tomando en cuenta el resultado de la búsqueda en la literatura:

- Modificación del modelo matemático.
- Adaptar el modelo a los problemas área, perímetros mínimos.
- Adaptar el modelo al problema de contenedor mínimo sin restricción de forma.
- Realizar experimentación con el modelo modificado y compáralo con los encontrados en la literatura y los resultados obtenidos con el modelo sin modificar.

3.2 DESCRIPCIÓN DE LA SOLUCIÓN

Tomando en cuenta el resultado de la revisión en la literatura y las áreas de oportunidad encontradas, se procede a la realización de las modificaciones necesarias al modelo propuesto en [36]. Las principales modificaciones se realizan en el conjunto de restricciones geométricas y las restricciones de intersección. A continuación, se detallan las modificaciones.

3.3 REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE LOS POLÍGONOS

La representación geométrica de un objeto en el espacio se refiere a la forma en que se definen sus propiedades y características espaciales. Existen diversos enfoques para establecer estas condiciones, y en el presente estudio nos centraremos en la representación de polígonos.

Existen dos tipos principales de polígonos según sus ángulos internos: los regulares y los irregulares. En los polígonos regulares todos los ángulos internos tienen

la misma medida. Los polígonos irregulares, por el contrario, no presentan esta uniformidad angular.

Los polígonos irregulares a su vez se pueden dividir en convexos y no convexos. Para este trabajo utilizará las propiedades de convexidad de los polígonos al momento de formular las restricciones de no intersección entre ellos. Por esta razón el trabajo se centra principalmente en trabajar con polígonos convexos.

3.3.1 REPRESENTACIÓN DE LOS POLÍGONOS RÍGIDOS

La formulación rígida de los objetos constituye una herramienta fundamental en este trabajo para representar polígonos con precisión. Esta formulación consiste en describir un conjunto de puntos que definen una región en el plano, de tal manera que aunque se modifique la posición de dichos puntos, el objeto resultante conserva sus ángulos originales y las distancias entre vértices.

Entre todos los polígonos, los triángulos presentan una propiedad única: si se mantiene las distancias entre sus vértices consecutivos, resulta posible reposicionarlos en el plano sin alterar sus ángulos o las longitudes de sus lados. Esta propiedad se sustenta en el teorema de congruencia de triángulos, que establece la congruencia (misma forma y tamaño) de dos triángulos cuando comparten las longitudes de sus tres lados.

En la figura 3.1 se ilustra este concepto mediante un triángulo equilátero de lado 10. Al reposicionar sus vértices arbitrariamente, respetando únicamente las distancias entre vértices consecutivos, se obtiene el mismo triángulo ubicado en otra zona del plano.

Las distancias entre vértices en este trabajo se determinan mediante la norma

euclidiana, definida como:

$$d(p, q) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (q_i - p_i)^2} \quad (3.1)$$

Donde:

- $d(p, q)$ es la distancia euclidiana entre dos puntos p y q
- n es el número de dimensiones
- p_i y q_i son las coordenadas de los puntos p y q en la dimensión i

En el caso bidimensional, esta expresión se simplifica a:

$$d(p, q) = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2} \quad (3.2)$$

donde $D_{1,2}$ describe la distancia entre los puntos x_1 y x_2 en un espacio bidimensional \mathbb{R}^2 .

El modelo matemático desarrollado incorpora la siguiente restricción para preservar el tamaño de los lados de los triángulos:

$$\sum_k (x_{ijk} - x_{ij+1k})^2 = D(i, j, j+1)^2 \quad (3.3)$$

donde x_{ijk} representa la coordenada k del vértice j del polígono i , y $D(i, j, j+1)$ denota la distancia fija entre los vértices adyacentes j y $j+1$ del polígono i .

Mediante esta restricción se asegura que durante el proceso de optimización de las posiciones de los vértices, la longitud de los lados del triángulo permanezca constante, preservando así su forma y tamaño. Esto permite obtener una formulación para triángulos rígidos, elemento clave del modelo desarrollado.

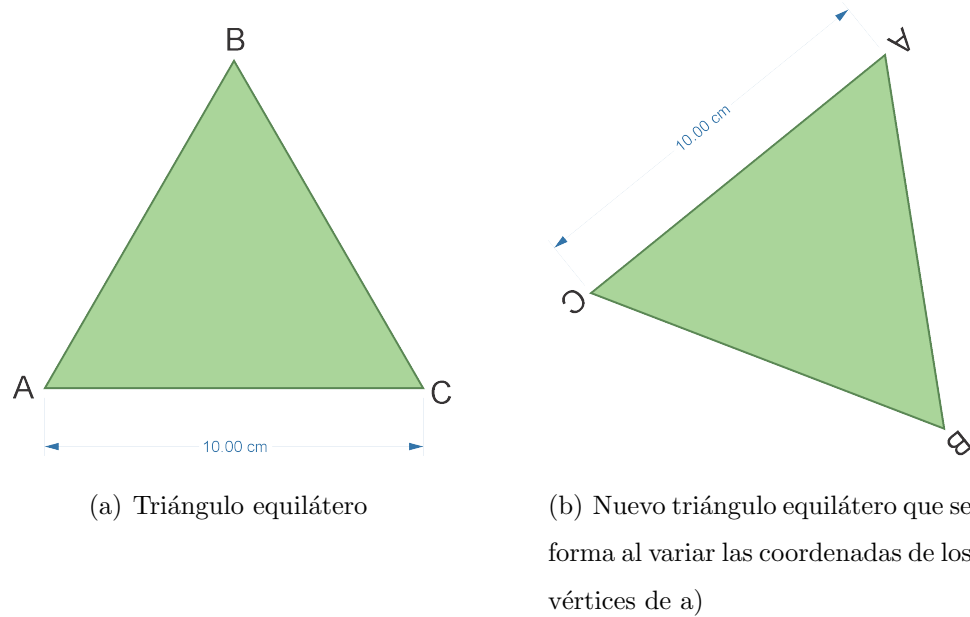


FIGURA 3.1: Triángulos iguales

3.3.1.1 REPRESENTACIÓN RÍGIDA DE POLÍGONOS CON MÁS DE TRES LADOS

A diferencia de los triángulos, en el caso de los polígonos con más de tres lados, mantener únicamente la distancia entre los vértices adyacentes no es suficiente para garantizar la rigidez de los objetos. Esto significa que, al modificar la posición de los vértices en el plano, la forma del polígono puede verse alterada, incluso si se conservan las longitudes de los lados.

La figura 3.2 ilustra claramente este concepto. En la parte a) aparece un polígono regular con lados de longitud uno. La parte b), en cambio, muestra un polígono con todos sus lados de longitud uno, pero resulta en una figura completamente distinta. Este ejemplo demuestra que conservar solo las distancias entre vértices consecutivos no garantiza mantener la forma original del polígono.

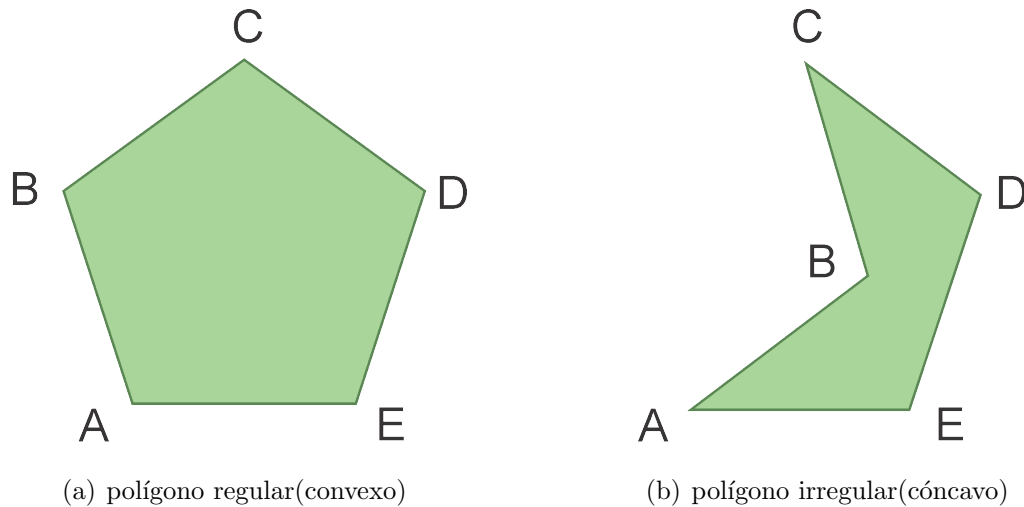


FIGURA 3.2: Pentágonos con lados de igual tamaño pero con una posición diferentes de sus vértices.

Con el fin de garantizar la rigidez en polígonos con más de tres lados, además de conservar las distancias entre vértices consecutivos mediante la ecuación 3.2, resulta necesario preservar también los ángulos entre lados adyacentes. Así, al cambiar arbitrariamente la posición de los vértices en el plano, se obtiene el mismo polígono sin deformaciones.

Una forma de conseguir esto consiste en usar el producto escalar de los vectores que representan los lados adyacentes. El producto escalar de dos vectores \vec{u} y \vec{v} se define como:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \alpha \quad (3.4)$$

donde $|\vec{u}|$ y $|\vec{v}|$ representan las magnitudes de los vectores \vec{u} y \vec{v} , respectivamente, y α es el ángulo comprendido entre ellos.

Si se aplica este concepto al pentágono regular de la figura 3.2, sabiendo que cada ángulo interior mide 108° , la preservación de estos ángulos se puede asegurar mediante las siguientes ecuaciones:

$$(x_1 - x_2, x_3 - x_2) = 1^2 \cos 108^\circ, \quad (x_2 - x_3, x_4 - x_3) = 1^2 \cos 108^\circ \quad (3.5)$$

donde (x_1, x_2) , (x_2, x_3) , (x_3, x_4) representan las coordenadas de los vértices adyacentes del pentágono.

Al generalizar este enfoque, si se conoce la longitud de los lados que forman un polígono y los ángulos entre lados adyacentes, resulta posible obtener una formulación rígida del polígono. Esto se logra estableciendo restricciones tanto para las distancias entre vértices consecutivos como para los ángulos entre lados adyacentes, usando las ecuaciones 3.2 y 3.4, respectivamente.

De este modo se asegura que al optimizar la posición de los vértices en el plano, se mantenga la forma y tamaño originales del polígono, evitando deformaciones indeseadas. Esta formulación rígida de los polígonos constituye un elemento fundamental para el modelo de empaquetamiento propuesto, ya que permite representar y manipular con precisión los objetos poligonales convexos.

3.3.2 REPRESENTACIÓN DE POLÍGONOS FLEXIBLES

Trabajar con politopos representados por sus vértices ofrece una ventaja importante cuando se trata de objetos con formas flexibles. La flexibilidad en este caso se refiere a que los lados del politopo pueden variar su longitud dentro de ciertos límites, en lugar de mantener una longitud fija.

Esta idea se puede formalizar adaptando la definición de distancia de la ecuación (3.2) y tratándola como un intervalo en vez de un valor único. Se puede establecer la siguiente restricción:

$$(1 - \rho)D(i, j, j + 1)^2 \leq \sum_k (x_{ijk} - x_{ij+1k})^2 \leq (1 + \rho)D(i, j, j + 1)^2 \quad (3.6)$$

donde ρ es un parámetro que controla la flexibilidad permitida en la longitud de los lados. Cuando $\rho = 0$, esta restricción coincide con la formulación rígida presentada anteriormente, donde las distancias entre vértices consecutivos son fijas. Al

usar valores de ρ diferentes de cero, se incorpora cierta flexibilidad en la longitud de los lados, permitiendo que varíen dentro del intervalo $[(1 - \rho)D(i, j, j + 1)^2, (1 + \rho)D(i, j, j + 1)^2]$.

Otra consideración importante al trabajar con polígonos flexibles es la conservación del área. A diferencia de los polígonos rígidos, donde el área permanece constante, en el caso de los polígonos flexibles es necesario garantizar que el área se mantenga dentro de ciertos límites o se conserve exactamente.

Una forma de asegurar la conservación del área es mediante el uso de la fórmula del área de Gauss, que es una formulación válida para calcular el área de cualquier polígono, ya sea regular, irregular, convexo o cóncavo [43]. Para un triángulo, la restricción basada en esta fórmula se puede expresar de la siguiente manera:

$$\sum_j (x_{ij1}x_{i(j+1)2} - x_{ij2}x_{i(j+1)1}) = 2\text{Área del Triángulo} \quad (3.7)$$

donde x_{ijk} representa la coordenada k del vértice j del triángulo i . Esta restricción asegura que la suma de los determinantes de las coordenadas de los vértices adyacentes sea igual al doble del área deseada del triángulo.

Esta restricción asegura que aunque las longitudes de los lados del polígono puedan cambiar, el área total se mantiene de acuerdo con el valor especificado.

La formulación de polígonos flexibles ofrece varias ventajas y aplicaciones de interés. Permite, por ejemplo, modelar objetos que se deforman ligeramente sin perder su forma general, lo cual resulta útil cuando se necesita cierta adaptabilidad o ajuste en el empaquetamiento. Además, al conservar el área se asegura que los objetos mantengan una medida de su tamaño original, evitando deformaciones excesivas o cambios drásticos en su forma.

3.3.2.1 REPRESENTACIÓN DE POLÍGONOS FLEXIBLES DE MÁS DE TRES LADOS

Para polígonos con más de tres lados, la restricción del determinante de Gauss presentada en la ecuación 3.7 puede extenderse para garantizar la conservación del área total del polígono. La restricción generalizada se expresa de la siguiente manera:

$$\sum_j (x_{ij1}x_{i(j+1)2} - x_{ij2}x_{i(j+1)1}) = 2\text{Área del Polígono} \quad (3.8)$$

donde x_{ijk} representa la coordenada k del vértice j del polígono i . Esta restricción asegura que la suma de los determinantes de las coordenadas de los vértices adyacentes sea igual al doble del área deseada del polígono.

No obstante, es importante destacar que la restricción 3.8 por sí sola no garantiza que el polígono mantenga todos sus vértices originales durante el proceso de deformación. Aunque se cumpla la restricción de conservación del área y la restricción de flexibilidad de los lados presentada en la ecuación 3.15, el polígono puede sufrir deformaciones que resulten en la pérdida de algunos de sus vértices originales.

Por ejemplo, considere un pentágono que se somete a deformaciones permitidas por las restricciones 3.8 y 3.15. Es posible que durante el proceso de deformación, el pentágono se transforme en un cuadrado con la misma área que el pentágono original, pero con un vértice menos. En este caso, aunque se cumplan las restricciones de conservación del área y flexibilidad de los lados, el polígono resultante ha perdido uno de sus vértices originales.

Para abordar este problema y asegurar que los polígonos flexibles mantengan todos sus vértices durante las deformaciones, se propone una técnica de división del polígono en triángulos. En lugar de aplicar la restricción 3.8 al polígono completo, se divide el polígono en triángulos y se aplica la restricción de conservación del área a cada uno de estos triángulos.

Tomando como ejemplo un pentágono, se puede dividir en cinco triángulos, como se muestra en la figura 3.3. Cada triángulo está formado por dos lados consecutivos del pentágono y una línea que conecta los vértices opuestos correspondientes. Al aplicar la restricción de conservación del área a cada uno de estos triángulos, se asegura que el pentágono mantenga su forma general y todos sus vértices originales, incluso cuando se permiten deformaciones en los lados.

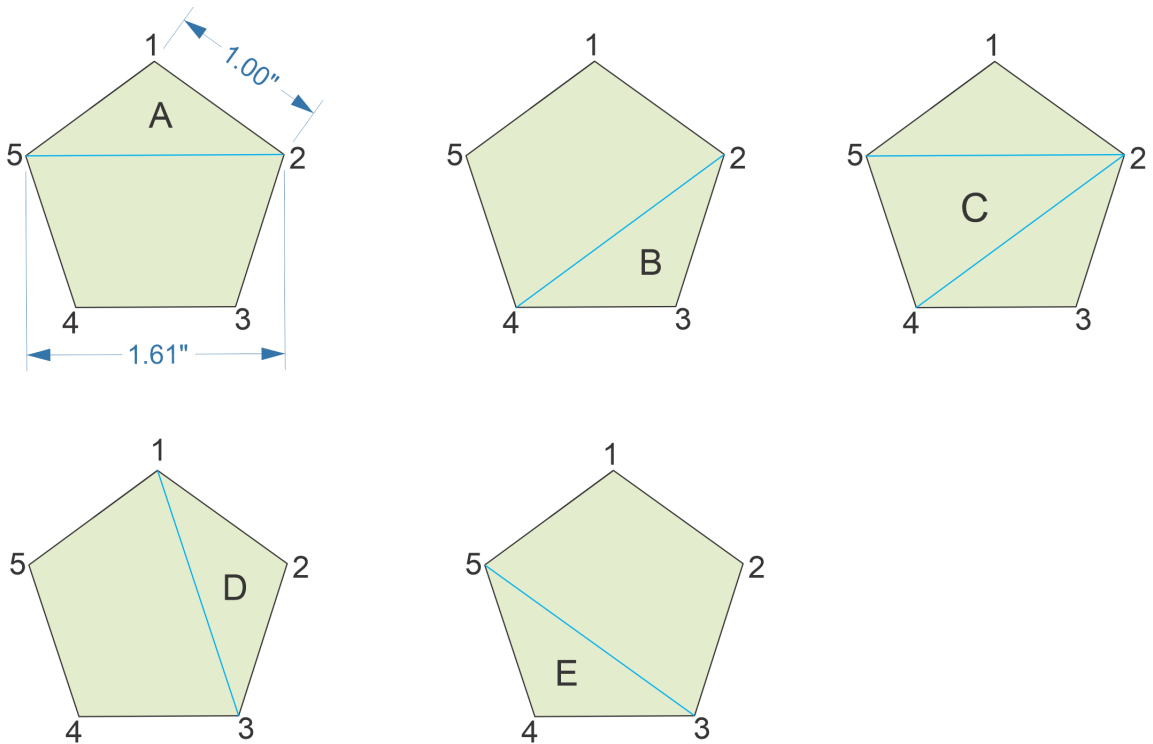


FIGURA 3.3: Triangulación de pentágono

Matemáticamente, para un pentágono dividido en cinco triángulos, tendríamos las siguientes restricciones de conservación del área:

$$\sum_j (x_{ij1}x_{i(j+1)2} - x_{ij2}x_{i(j+1)1}) = 2\text{Área del Triángulo}_k, \quad k = 1, 2, 3, 4, 5 \quad (3.9)$$

donde Área del Triángulo_k representa el área deseada para cada uno de los

cinco triángulos que componen el pentágono.

Al combinar las restricciones 3.9 con la restricción de flexibilidad de los lados 3.15, se logra un equilibrio entre la flexibilidad del pentágono y la conservación de su forma y vértices originales. Los lados del pentágono pueden variar en longitud dentro de los límites permitidos, pero la división en triángulos y la aplicación de la restricción de conservación del área a cada triángulo aseguran que el pentágono no se deforme de manera irreconocible.

Esta técnica de división en triángulos se puede extender a polígonos con más lados, como hexágonos, heptágonos, etc. En cada caso, se divide el polígono en triángulos y se aplica la restricción de conservación del área a cada triángulo individual. De esta manera, se logra una representación flexible de los polígonos que permite deformaciones controladas mientras se mantiene la integridad de su forma y vértices originales.

3.4 CONDICIONES DE NO INTERSECCIÓN

La no intersección entre objetos es un requisito básico en estos problemas de empaquetamiento. A continuación se detallan estas condiciones siguiendo lo descrito en [31].

Consideremos dos politopos T_k y T_p en \mathbb{R}^n cuyos vértices son $\{X_k^j, j \in J_k\}$ y $\{X_p^j, j \in J_p\}$ respectivamente. Decimos que estos politopos no se interceptan (pero sí pueden tocarse en sus bordes) si podemos encontrar un vector $v_{kp} \in \mathbb{R}^n$, donde $v_{kp} \neq 0$, y un valor escalar b_{kp} , de manera que el hiperplano dado por $v_{kp}^t x \leq b_{kp}$ logre separar a T_k de T_p . Esto significa que:

$$v_{kp}^t x \leq b_{kp} \quad \text{para toda } x \in T_k$$

$$v_{kp}^t x \geq b_{kp} \quad \text{para toda } x \in T_p$$

Estas condiciones se pueden expresar de otra forma:

$$\begin{aligned} \max\{v_{kp}^t x : x \in T_k\} &\leq b_{kp} \\ \min\{v_{kp}^t x : x \in T_p\} &\geq b_{kp} \end{aligned}$$

o de manera equivalente:

$$\max\{v_{kp}^t x : x \in T_k\} \leq \min\{v_{kp}^t x : x \in T_p\}$$

Como sabemos que el valor extremo de una función lineal sobre un polígono acotado se obtiene en alguno de sus vértices, podemos escribir:

$$\max_{j \in J_k} \{v_{kp}^t X_k^j\} \leq \min_{j \in J_p} \{v_{kp}^t X_p^j\} \quad (3.10)$$

Definimos ahora las siguientes variables auxiliares:

$$\alpha_{kp} = \max_{j \in J_k} \{v_{kp}^t X_k^j\}, \quad -\beta_{kp} = \min_{j \in J_p} \{v_{kp}^t X_p^j\}.$$

Usando las propiedades del máximo y mínimo, la expresión (3.10) puede reescribirse como:

$$\alpha_{kp} + \beta_{kp} \leq 0 \quad (3.11)$$

$$\alpha_{kp} \geq v_{kp}^t X_k^j, \quad j \in J_k$$

$$-\beta_{kp} \leq v_{kp}^t X_p^j, \quad j \in J_p$$

$$v_{kp} \neq 0$$

Notemos que si (v_{kp}) satisface (3.10), cualquier múltiplo $\rho(v_{kp})$ con $\rho > 0$ también lo hará. Para garantizar que $v_{kp} \neq 0$ podemos normalizar este vector, por ejemplo exigiendo que $\|v_{kp}\|^2 \geq 1$ bajo alguna norma $\|\cdot\|$ (que no tiene que ser necesariamente la norma Euclidiana). Otra opción es usar

$$e^t v \geq 1,$$

donde $e \in \mathbb{R}^n$ representa un vector con todos sus componentes unitarios. Esta restricción descarta el vector cero y también aquellos vectores donde todas las componentes sean negativas. Vale mencionar que si v_{kp} funciona como plano separador, entonces $-v_{kp}$ también separará T_k de T_p . Finalmente, las condiciones para garantizar que T_k y T_p no se intercepten quedan así:

$$\begin{aligned} \alpha_{kp} + \beta_{kp} &\leq 0 & (3.12) \\ \alpha_{kp} &\geq v_{kp}^t X_k^j, \quad j \in J_k \\ -\beta_{kp} &\leq v_{kp}^t X_p^j, \quad j \in J_p \\ e^t v_{kp} &\geq 1 \end{aligned}$$

3.5 CONDICIONES DE CONTENCIÓN

Si consideramos un contenedor convexo Ω , las restricciones que garantizan que los objetos estén completamente dentro del contenedor quedan descritas mediante:

$$x^s \in \Omega, \quad s = 1, 2, \dots, S \quad (3.13)$$

Un ejemplo de lo anterior se muestra en la figura 3.4.

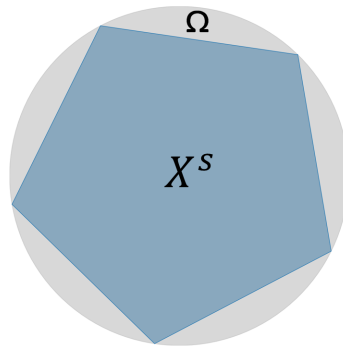


FIGURA 3.4: Ejemplo de pentágono con vértices x^s dentro del contenedor Ω

3.6 FUNCIÓN OBJETIVO



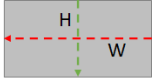
Los problemas de empaquetamiento bidimensional de dimensión abierta (2D-ODP) tienen funciones objetivo que buscan un contenedor de dimensiones optimizadas. Las funciones objetivo comunes son:

- Minimizar el espacio desocupado (área o perímetro).
- Minimizar el número de contenedores necesarios.
- Minimizar la altura del contenedor rectangular.

La elección de la función objetivo y las restricciones de contenimiento depende del tipo de contenedor y las restricciones de contenimiento aseguran que los objetos estén completamente dentro del contenedor y no se solapen. La tabla 3.1 de la página 40 presenta ejemplos de funciones objetivo y condiciones de contenimiento para cada tipo de contenedor.

La selección adecuada de la función objetivo y las restricciones permite modelar el problema 2D-ODP y encontrar la configuración óptima de empaquetamiento.

TABLA 3.1: Modelación bidimensional para optimizar la/s dimensión/es del contenedor

| Contenedor | Modelación | figura |
|------------|--|--|
| Círculo | Modelo de la sección (3.4) | (a)  |
| Cuadrado | $\text{Min } H$ $x_{ijk} \leq H \quad \forall i, j, k$ restricciones de no superposición en (3.4) restricciones de no negatividad en (3.4) | (b)  |
| Rectángulo | $\text{Min } H \cdot W(\text{área}) \quad \text{o} \quad H + W(\text{perímetro})$ $x_{ij2} \leq H \quad \forall i, j$ $x_{ij1} \leq W \quad \forall i, j$ restricciones de no superposición en (3.4) restricciones de no negatividad en (3.4) | (c)  |

En el contexto de los problemas de empaquetamiento, la elección de la función objetivo y las restricciones de contenimiento depende del tipo de contenedor utilizado. A continuación, se describen las consideraciones para diferentes formas de contenedores:

- Contenedor sección-circular y circular: En el caso de los contenedores con forma de sección circular o circular, minimizar el área ocupada por los objetos empaquetados es equivalente a minimizar el radio del contenedor, representado por las variables R_s y R , respectivamente. Para garantizar la no negatividad de las coordenadas de los objetos, es necesario desplazar el centro del contenedor circular desde el origen en ambas dimensiones. Por ejemplo, se puede aplicar una traslación de 30 unidades, resultando en la restricción $(x_{ij1} - 30)^2 + (x_{ij2} - 30)^2 \leq R^2$, donde x_{ij1} y x_{ij2} representan las coordenadas del vértice j del objeto i .
- Contenedor cuadrado: Cuando se utiliza un contenedor cuadrado, minimizar la longitud del lado del cuadrado, representada por la variable H , es equivalente a minimizar el área total del contenedor. Considerando que la esquina inferior izquierda del contenedor se encuentra en el origen de coordenadas y que sus lados son paralelos a los ejes coordenados, la restricción de contenimiento del polígono puede ser representada mediante la restricción $x_{ijk} \leq H \quad \forall i, j, k$, donde x_{ijk} representa la coordenada k del vértice j del polígono i .
- Contenedor rectangular y tira: Los casos del contenedor rectangular y el contenedor en forma de tira son análogos al contenedor cuadrado. La diferencia radica en que el contenedor rectangular tiene dos dimensiones independientes, representadas por las variables W y H , que corresponden al ancho y la altura del rectángulo, respectivamente. Por lo tanto, minimizar el área del contenedor rectangular implica minimizar el producto $W * H$, mientras que minimizar el perímetro implica minimizar la suma $W + H$. En contraste, el contenedor en forma de tira tiene un ancho fijo y una altura variable, por lo que el objetivo es minimizar únicamente la altura H .
- Contenedores convexos formados por restricciones lineales: La extensión del modelo para considerar contenedores convexos más generales, definidos por un conjunto de restricciones lineales, es relativamente sencilla. En este caso, las restricciones de contenimiento se pueden expresar como un conjunto de

desigualdades lineales que delimitan la región convexa del contenedor. Por ejemplo, si el contenedor está definido por las restricciones $a_1x + b_1y \leq c_1$, $a_2x + b_2y \leq c_2$, ..., $a_nx + b_ny \leq c_n$, entonces el contenimiento de un polígono se puede asegurar imponiendo estas restricciones para cada uno de sus vértices.

Es importante destacar que la elección de la función objetivo y las restricciones de contenimiento depende del tipo de contenedor y de los objetivos específicos del problema de empaquetamiento. La formulación adecuada permite encontrar la configuración óptima de los objetos dentro del contenedor, ya sea minimizando el área, el perímetro o alguna otra medida relevante. Además, la consideración de contenedores convexos más generales amplía la aplicabilidad del modelo a una gama más amplia de problemas de empaquetamiento, donde los contenedores pueden tener formas más complejas.

3.7 FORMULACIÓN DEL MODELO CIRCULAR

Declaración de variables:

- **i** Conjunto de polígonos.
- **j** Conjunto de vértices
- **k** Dimensiones.
- **R** Radio del contenedor circular.
- $\alpha_{i,h}$ Multiplicador.
- $\beta_{i,h}$ Multiplicador.
- $v_{i,h,k}$ vector.
- $x_{i,j,k}$ Variable decisión.

- $D(i, j, j + 1)$ Distancia del punto j al punto $j + 1$ en el triángulo i

la ecuación 3.14 representa la función objetivo del modelo de empaquetamiento en el contenedor circular de radio mínimo.

$$Z = \text{Min } R \quad (3.14)$$

S.a

las ecuaciones (3.15) y (3.16) son las condiciones geométricas que conservan la forma y el área de los triángulos a empaquetar. En la ecuación (3.15) $(1 \pm \rho)D(i, j, j + 1)^2$ es la distancia en la figura i entre los puntos j y $j + 1$ con un intervalo ρ de flexibilidad.

$$(1 - \rho)D(i, j, j + 1)^2 \leq \sum_k (x_{ijk} - x_{ij+1k})^2 \leq (1 + \rho)D(i, j, j + 1)^2 \quad (3.15)$$

$$\sum_j (x^{ij1}x^{i(j+1)2} - x^{ij2}x^{i(j+1)1}) = 2\text{Área del Triángulo} \quad (3.16)$$

las ecuaciones (3.17),(3.18),(3.19),(3.20) garantizan la no intersección entre los polígonos.

$$\alpha_{ih} + \beta_{ih} \leq 0, \quad i, h \in I, \quad h > i \quad (3.17)$$

$$\sum_k (v_{ihk} \cdot x_{ijk}) \leq \alpha_{ih}, \quad \forall i, h, \quad h > i \quad (3.18)$$

$$\sum_k (v_{ihk} \cdot x_{ijk}) \geq -\beta_{ih}, \quad \forall i, h, \quad h > i \quad (3.19)$$

$$(v_{ih1})^2 + (v_{ih2})^2 \geq 1, \quad \forall i, h, \quad h > i \quad (3.20)$$

la restricción (3.21) garantiza que los polígonos estén contenidos en el círculo que representa el contenedor.

$$(x_{ij1} - 30)^2 + (x_{ij2} - 30)^2 \leq R^2 \quad (3.21)$$

la restricción (3.22) la naturaleza de las variables.

$$x_{ijk}, v \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha_{ih}, \beta_{ih}, R \in \mathbb{R}^1 \quad \forall i, j, k \quad (3.22)$$

3.8 EXTENSIÓN DEL MODELO PARA DETERMINAR LA FLEXIBILIDAD MÍNIMA

Esta sección presenta una extensión del modelo original. El objetivo es analizar con mayor profundidad la relación entre la flexibilidad de los objetos y la eficiencia del empaquetamiento. La propuesta busca determinar la flexibilidad mínima requerida para alcanzar una densidad de empaquetamiento específica.

3.8.1 MOTIVACIÓN

El modelo original permite analizar cómo la flexibilidad de los elementos impacta en la densidad de empaquetamiento. Sin embargo, desde un punto de vista tanto práctico como teórico, resulta relevante determinar cuál es el nivel mínimo de flexibilidad que se necesita para poder alcanzar una densidad específica. Este enfoque inverso da información valiosa acerca de cómo se relacionan la flexibilidad y la densidad de empaquetamiento, lo cual es fundamental cuando las aplicaciones están orientadas a minimizar la deformación de los objetos.

3.8.2 FORMULACIÓN DEL MODELO EXTENDIDO

Para poder abordar este nuevo objetivo se plantean las siguientes modificaciones al modelo matemático original:

1. **Nueva variable de decisión:** Se introduce ρ como variable de decisión, la cual representa el nivel de flexibilidad de los pentágonos.
2. **Función objetivo modificada:** La nueva función objetivo lo que busca es

minimizar ρ :

$$\text{mín } \rho$$

3. **Nueva restricción de densidad:** Se agrega una restricción que garantiza que la densidad de empaquetamiento alcance o supere un valor objetivo δ^* :

$$\frac{\sum_{i=1}^n A_i}{A_{\text{contenedor}}} \geq \delta^*$$

donde A_i es el área de cada pentágono y $A_{\text{contenedor}}$ representa el área del contenedor.

4. **Ajuste de las restricciones de flexibilidad:** Las restricciones que definen la flexibilidad de los pentágonos se tienen que ajustar para usar la variable ρ en lugar de tener un valor fijo.

3.8.3 APLICACIÓN PROPUESTA

Después de aplicar el modelo original y obtener resultados para distintos niveles de flexibilidad, se sugiere emplear el modelo extendido de la siguiente forma:

1. Primero hay que identificar la densidad máxima δ^* que se obtuvo con el modelo original para cada configuración, esto incluye el número de pentágonos y el tipo de contenedor que se usó.
2. Después se utiliza este δ^* como parámetro en el modelo extendido.
3. Finalmente se resuelve el modelo extendido para encontrar cuál es el valor mínimo de ρ que debe permitir alcanzar la densidad δ^* .

CAPÍTULO 4

VALIDACIÓN DEL MODELO PROPUESTO

En este capítulo se presentan la experimentación realizada para evaluar el empaquetamiento de polígonos convexos dentro de contenedores convexos con geometrías circular y rectangular. Los experimentos se ejecutaron usando el modelo matemático desarrollado, con el objetivo de verificar su efectividad y aplicabilidad.

Se describen los procedimientos experimentales empleados, incluyendo la metodología seguida, los parámetros utilizados y los resultados alcanzados.

4.1 OBJETIVOS

Esta fase experimental busca verificar el desempeño del modelo desarrollado comparándolo con los resultados reportados en [39]. Adicionalmente, se validan los distintos enfoques o variantes de problemas que se pueden resolver con este modelo.

4.2 EXPERIMENTACIÓN

Los experimentos incluyen el empaquetamiento de polígonos convexos (triángulos rígidos y flexibles) y no convexos (construidos a partir de triángulos rígidos)

dentro de contenedores convexos (rectangular y circular) con dimensiones variables.

4.2.1 INSTANCIAS UTILIZADAS EN LA EXPERIMENTACIÓN

Las instancias empleadas en esta investigación se generaron mediante un programa escrito en Python, con el propósito de validar el modelo. La tabla 5.1 muestra las características de las instancias para ambos tipos de contenedores estudiados (rectangular y circular):

- elementos a empaquetar
- tipo de elementos
- números de instancias según el tamaño del elemento

TABLA 4.1: Número de instancias según tipo de elemento

| Contenedor | elemento | Tipo de elemento | Número instancias |
|-------------|------------|------------------|-------------------|
| rectangular | triángulos | regulares | 16 |
| | triángulos | irregulares | 16 |
| circular | triángulos | regulares | 16 |
| | triángulos | irregulares | 16 |

4.2.1.1 ESTRUCTURA DE LAS INSTANCIAS

Los datos de cada instancia utilizada incluyen:

- cantidad de elementos de instancia
- cantidad de vértices de los elementos ($n-1$)
- cantidad de dimensiones (K)

En la tabla 5.2 se presenta la estructura matricial que define cada figura, donde (\mathbf{d}) representa la distancia entre vértices, ($\mathbf{n-1}$) indica el número de vértices y (σ) corresponde al ángulo entre los lados de la figura.

TABLA 4.2: Estructura matricial: ángulos(σ) entre lados y distancia(d)

| param distancias:= | | | | | |
|---------------------------|---|---|---|-----|----------|
| [1,*,*]: | 1 | 2 | 3 | ... | n:= |
| 1 | 0 | d | 0 | 0 | σ |
| 2 | 0 | 0 | d | 0 | σ |
| ... | 0 | 0 | 0 | d | σ |
| n-1 | d | 0 | 0 | 0 | σ |

4.2.1.2 HARDWARE Y SOFTWARE UTILIZADOS

La experimentación se realiza en una computadora portátil Dell Latitude 5580, equipada con 16gb RAM, 256gb SSD, pantalla FHD 15.6", procesador Intel (R) Core (TM) i7-7600, CPU @ 3.4Ghz, 3201Mhz, 4 núcleos y 8 hilos, bajo sistema operativo Windows 10. Para el modelado matemático se empleó AMPL. La resolución de los problemas no lineales se llevó a cabo utilizando el solver de optimización global Baron (*del inglés Branch & Reduce Optimization Navigator*) para AMPL versión 19.12.7.

La generación de las instancias de prueba y la visualización gráfica de las soluciones obtenidas se desarrollaron mediante programas escritos en lenguaje Python.

4.3 DISEÑO EXPERIMENTAL

Este diseño experimental preliminar se centra en validar el modelo propuesto. En esta etapa se consideran dos tipos de contenedores y dos categorías de elementos a empaquetar. Se aplica un diseño factorial completo con dos factores de control por tratamiento, resultando en 4 tratamientos. Los factores de control son:

- Tipo de contenedor con dos niveles (rectangular, circular)
- Tipos de figuras con dos niveles (triángulos rígidos, triángulos flexibles)

4.3.0.1 RESULTADOS DE LA EXPERIMENTACIÓN PRELIMINAR

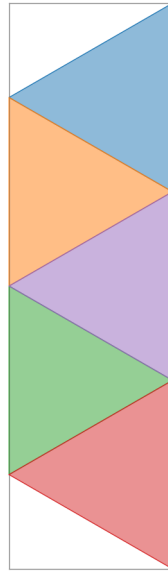
Se experimentó con instancias de 5, 6, 7, 8, 9, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55 y 60 elementos idénticos para triángulos rígidos. En el caso de triángulos flexibles se permitió la variación en las longitudes de los lados, conservando el área de un triángulo equilátero de lado unitario. Estos elementos se empaquetaron en dos tipos de contenedores (rectangular y circular). Se estableció como criterio de parada un límite de tiempo de 3600 segundos para cada tratamiento.

Los resultados obtenidos se presentan a continuación, organizados según el tipo de contenedor y categoría de figuras:

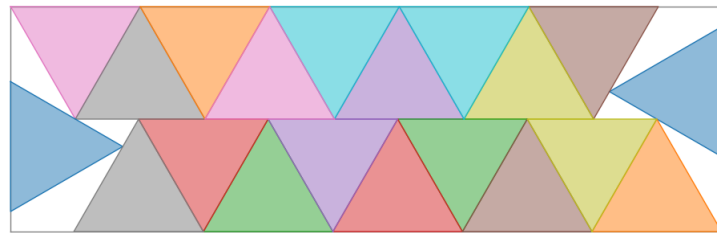
CONTENEDOR RECTANGULAR Las tablas 4.3 y 4.4 muestran los resultados del empaquetamiento para cada tipo de figura en este contenedor. Las figuras 5.12 y 4.2 presentan una selección gráfica de estos resultados.

TABLA 4.3: Empaquetamiento de triángulos rígidos en contenedor rectangular

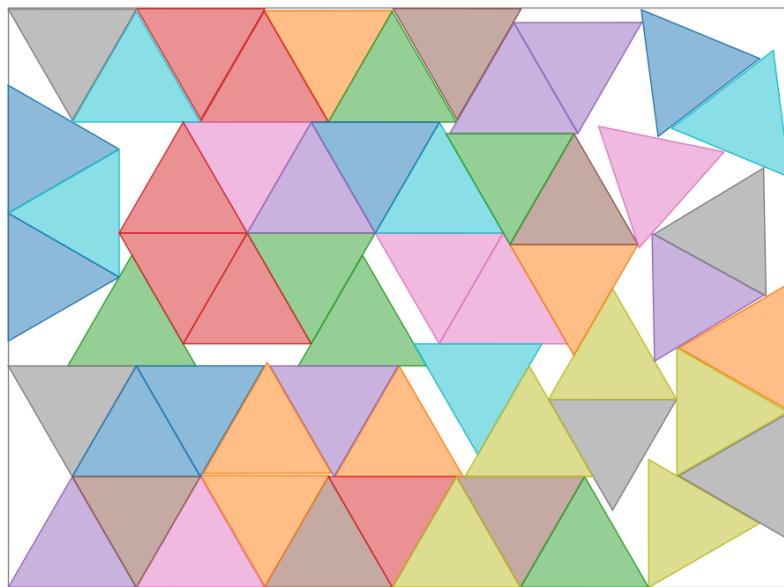
| Elementos | | | Contenedor | | Modelo | | Resultados |
|-----------|---------|------------------|------------|---------|-----------|---------------|----------------|
| Inst. | Tipo | Cantidad figuras | Largo | Ancho | Variables | Restricciones | % de ocupación |
| 1 | Regular | 5 | 3.0000 | 0.8660 | 82 | 130 | 83.3334 |
| 2 | Regular | 6 | 0.8660 | 3.5000 | 113 | 180 | 85.7143 |
| 3 | Regular | 7 | 0.8660 | 4.0000 | 149 | 238 | 87.5000 |
| 4 | Regular | 8 | 4.5000 | 0.8660 | 190 | 304 | 88.8889 |
| 5 | Regular | 9 | 0.8660 | 5.0000 | 236 | 378 | 90.0000 |
| 6 | Regular | 10 | 5.5000 | 0.8660 | 287 | 460 | 90.9091 |
| 7 | Regular | 15 | 8.0000 | 0.8660 | 617 | 990 | 93.7500 |
| 8 | Regular | 20 | 1.7321 | 5.4880 | 1072 | 1720 | 91.1074 |
| 9 | Regular | 25 | 0.8660 | 13.0000 | 1652 | 2650 | 96.1539 |
| 10 | Regular | 30 | 8.0000 | 1.7321 | 2357 | 3780 | 93.7500 |
| 11 | Regular | 35 | 9.8660 | 1.7321 | 3187 | 5110 | 88.6882 |
| 12 | Regular | 40 | 2.5981 | 7.4711 | 4142 | 6640 | 89.2328 |
| 13 | Regular | 45 | 6.2705 | 3.4706 | 5222 | 8370 | 89.5372 |
| 14 | Regular | 50 | 29.0000 | 0.8660 | 6427 | 10300 | 86.2069 |
| 15 | Regular | 55 | 4.5347 | 6.1143 | 7757 | 12430 | 85.8957 |
| 16 | Regular | 60 | 4.4010 | 6.7839 | 9212 | 14760 | 87.0208 |



(a) Instancia con 5 elementos: largo
= 3.0000, ancho = 0.8660



(b) Instancia con 20 elementos: largo = 1.7321, ancho = 5.4880

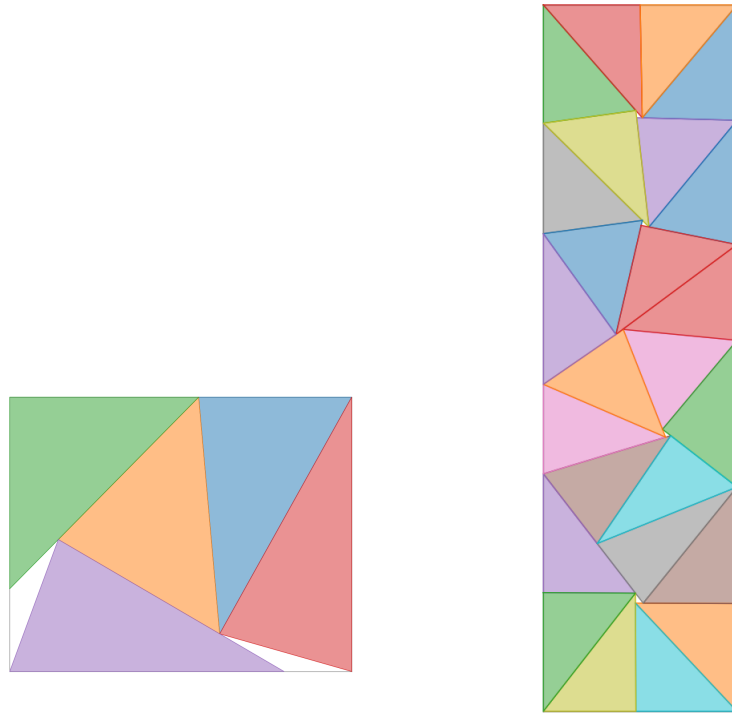


(c) Instancia con 55 elementos: largo = 4.5347, ancho = 6.1143

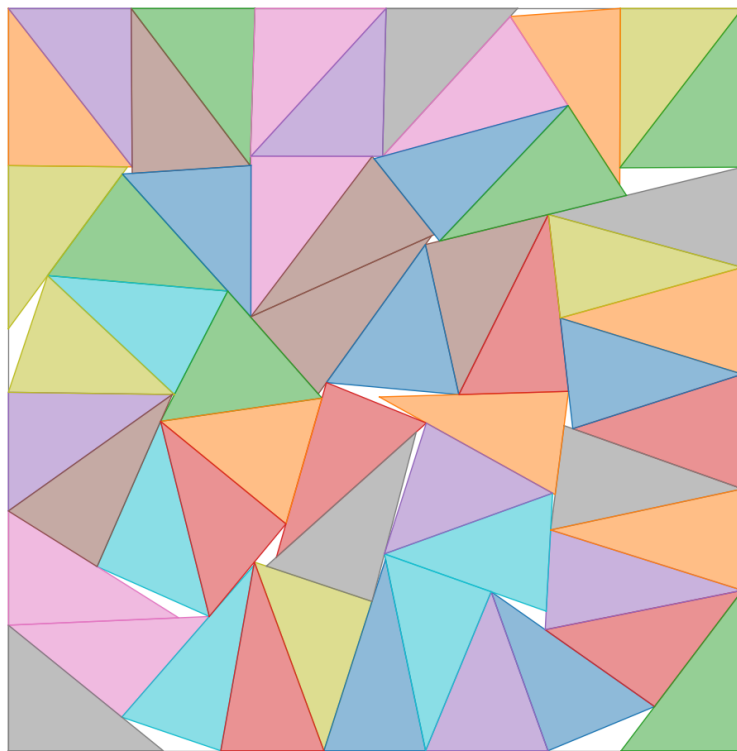
FIGURA 4.1: Soluciones obtenidas para triángulos rígidos en contenedor rectangular

TABLA 4.4: Empaquetamiento de triángulos flexibles en contenedor rectangular

| Elementos | | | Contenedor | | Modelo | | Resultados |
|-----------|-----------|------------------|------------|---------|-----------|---------------|----------------|
| Inst. | Tipo | Cantidad figuras | Largo | Ancho | Variables | Restricciones | % de ocupación |
| 1 | Irregular | 5 | 1.3416 | 1.6723 | 82 | 145 | 96.5014 |
| 2 | Irregular | 6 | 3.0155 | 0.8616 | 113 | 198 | 100.0000 |
| 3 | Irregular | 7 | 2.3355 | 1.3389 | 149 | 259 | 96.9378 |
| 4 | Irregular | 8 | 0.8376 | 4.1360 | 190 | 328 | 100.0000 |
| 5 | Irregular | 9 | 1.6393 | 2.4117 | 236 | 405 | 98.5754 |
| 6 | Irregular | 10 | 5.2461 | 0.8254 | 287 | 490 | 99.9999 |
| 7 | Irregular | 15 | 3.2701 | 1.9951 | 617 | 1035 | 99.5540 |
| 8 | Irregular | 20 | 0.8167 | 10.6042 | 1072 | 1780 | 99.9996 |
| 9 | Irregular | 25 | 6.2898 | 1.7224 | 1652 | 2725 | 99.9248 |
| 10 | Irregular | 30 | 2.3207 | 5.6085 | 2357 | 3870 | 99.8068 |
| 11 | Irregular | 35 | 3.8067 | 4.0002 | 3187 | 5215 | 99.5272 |
| 12 | Irregular | 40 | 2.1749 | 8.0218 | 4142 | 6760 | 99.2780 |
| 13 | Irregular | 45 | 5.2272 | 3.7712 | 5222 | 8505 | 98.8463 |
| 14 | Irregular | 50 | 5.7671 | 3.8205 | 6427 | 10450 | 98.2656 |
| 15 | Irregular | 55 | 4.9522 | 4.8967 | 7757 | 12595 | 98.2111 |



(a) Instancia con 5 elementos: largo = 1.3416, ancho = 1.6723
(b) Instancia con 25 elementos: largo = 6.2898, ancho = 1.7224



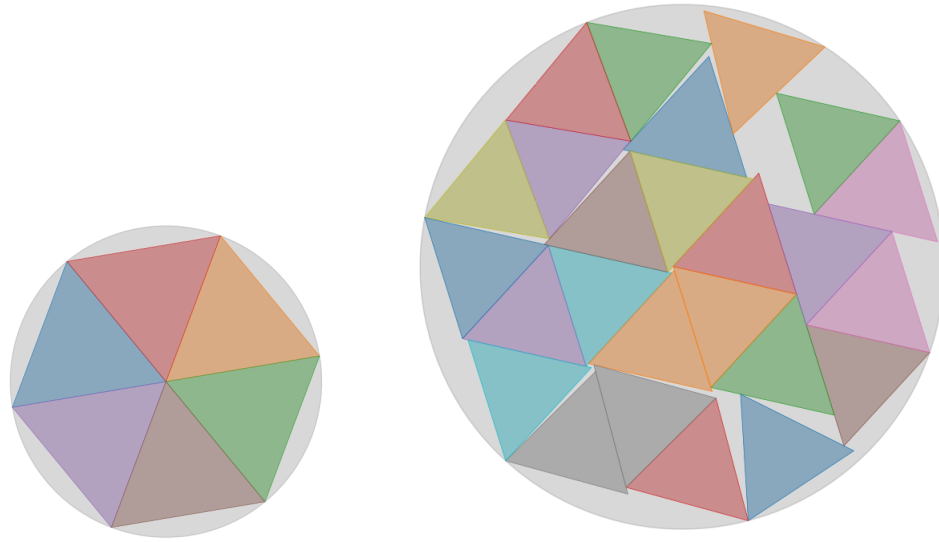
(c) Instancia con 55 elementos: largo = 4.9522, ancho = 4.8967

FIGURA 4.2: Configuraciones de triángulos flexibles (80 %) en contenedor rectangular

CONTENEDOR CIRCULAR Las tablas 4.5 y 4.6 presentan los resultados del empaquetado para cada tipo de elemento en este contenedor. Una selección gráfica de estos resultados se muestra en las figuras 4.3 y 4.4.

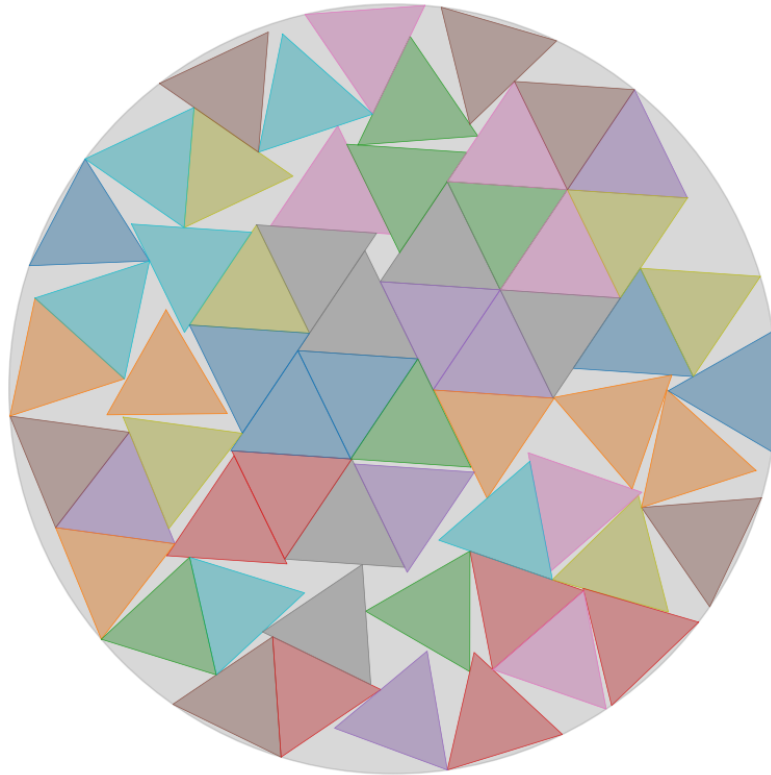
TABLA 4.5: Empaquetamiento de triángulos rígidos en contenedor circular

| Elementos | | | Contenedor | Modelo | | Resultados |
|-----------|---------|------------------|--------------|-----------|---------------|----------------|
| Inst. | Tipo | Cantidad figuras | Dim. (radio) | Variables | Restricciones | % de ocupación |
| 1 | Regular | 5 | 1.0000 | 81 | 115 | 68.9161 |
| 2 | Regular | 6 | 1.0000 | 112 | 162 | 82.6993 |
| 3 | Regular | 7 | 1.1524 | 148 | 217 | 72.6536 |
| 4 | Regular | 8 | 1.2634 | 189 | 280 | 69.0854 |
| 5 | Regular | 9 | 1.3148 | 235 | 351 | 71.7640 |
| 6 | Regular | 10 | 1.3847 | 286 | 430 | 71.8873 |
| 7 | Regular | 15 | 1.6367 | 616 | 945 | 77.1780 |
| 8 | Regular | 20 | 1.9043 | 1071 | 1660 | 76.0209 |
| 9 | Regular | 25 | 2.0698 | 1651 | 2575 | 80.4345 |
| 10 | Regular | 30 | 2.2869 | 2356 | 3690 | 79.0645 |
| 11 | Regular | 35 | 2.4496 | 3186 | 5005 | 80.3955 |
| 12 | Regular | 40 | 2.6371 | 4141 | 6520 | 79.2783 |
| 13 | Regular | 45 | 2.7860 | 5221 | 8235 | 79.9077 |
| 14 | Regular | 50 | 2.9510 | 6426 | 10150 | 79.1359 |
| 15 | Regular | 55 | 3.0704 | 7756 | 12265 | 80.4146 |
| 16 | Regular | 60 | 3.1910 | 9211 | 14580 | 81.2157 |



(a) Instancia con 6 elementos:
radio = 1.0000

(b) Instancia con 25 elementos: radio = 2.0698

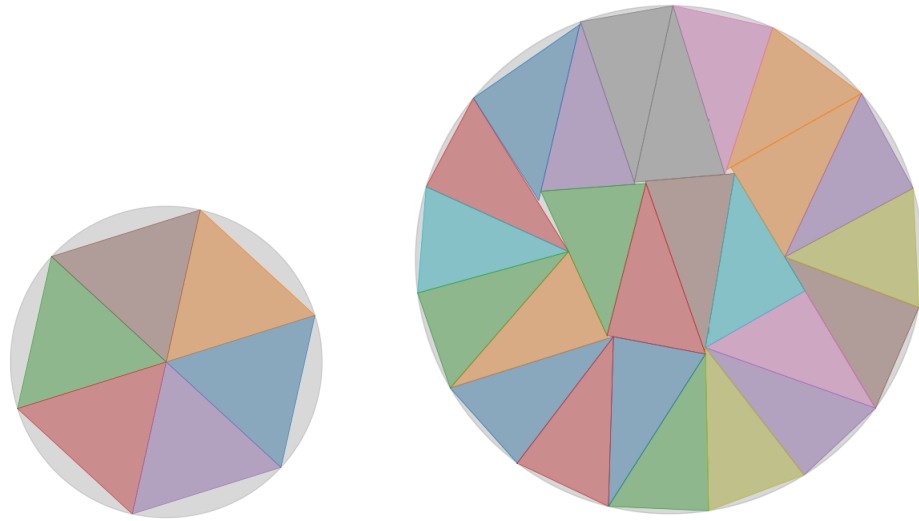


(c) Instancia con 60 elementos: radio = 3.1910

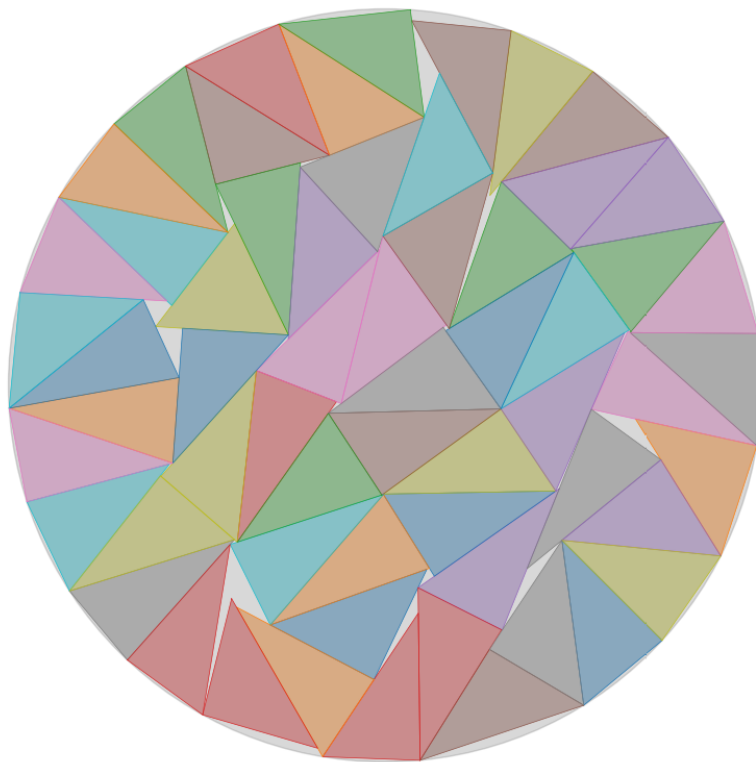
FIGURA 4.3: Disposición de triángulos rígidos en contenedor circular

TABLA 4.6: Empaquetamiento de triángulos flexibles en contenedor circular

| Elementos | | | Contenedor | Modelo | | Resultados |
|-----------|-----------|------------------|--------------|-----------|---------------|----------------|
| Inst. | Tipo | Cantidad figuras | Dim. (radio) | Variables | Restricciones | % de ocupación |
| 1 | Irregular | 5 | 0.9512 | 81 | 130 | 76.1693 |
| 2 | Irregular | 6 | 1.0000 | 112 | 180 | 82.6993 |
| 3 | Irregular | 7 | 1.0525 | 148 | 238 | 87.1022 |
| 4 | Irregular | 8 | 1.1067 | 189 | 304 | 90.0319 |
| 5 | Irregular | 9 | 1.1607 | 235 | 378 | 92.0727 |
| 6 | Irregular | 10 | 1.2138 | 286 | 460 | 93.5497 |
| 7 | Irregular | 15 | 1.4791 | 616 | 990 | 94.5097 |
| 8 | Irregular | 20 | 1.6942 | 1071 | 1720 | 96.0410 |
| 9 | Irregular | 25 | 1.8871 | 1651 | 2650 | 96.7663 |
| 10 | Irregular | 30 | 2.0694 | 2356 | 3780 | 96.5569 |
| 11 | Irregular | 35 | 2.2427 | 3186 | 5110 | 95.9119 |
| 12 | Irregular | 40 | 2.3981 | 4141 | 6690 | 95.8686 |
| 13 | Irregular | 45 | 2.5405 | 5221 | 8370 | 96.1003 |
| 14 | Irregular | 50 | 2.6635 | 6426 | 10300 | 97.1461 |
| 15 | Irregular | 55 | 2.7988 | 7756 | 12430 | 96.7744 |
| 16 | Irregular | 60 | 2.9262 | 9211 | 14760 | 96.5815 |



(a) Instancia con 6 elementos: radio = 1.0000
(b) Instancia con 25 elementos: radio = 1.8871



(c) Instancia con 60 elementos: radio = 2.9262

FIGURA 4.4: Arreglos de triángulos flexibles (80 %) en contenedor circular

Los resultados obtenidos confirman la validez del modelo propuesto tanto para elementos rígidos como flexibles. Se planea continuar la experimentación aumentando el número de elementos y diversificando las formas geométricas.

4.3.0.2 ANÁLISIS DE RESULTADOS PRELIMINARES

A continuación se presenta una comparativa de los resultados obtenidos en [39] para los elementos triángulos rígidos en contenedor tipo circular. Como se puede apreciar en la tabla 4.7 de la página 59 los valores de densidad de empaque o porcentaje de ocupación del contenedor obtenidos con el modelo propuesto en este trabajo de investigación supera a los presentados en el trabajo anterior para las cantidades de elementos 5, 6, 7, 8, 9 y 10. Para el caso de las instancias de número de elementos 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60 el modelo Modelo presentado en [39](M1) no obtuvo resultados en el tiempo determinado para el experimento, a diferencia del modelo propuesto (M2). Además, se observa una reducción del número de variables y restricciones en el modelo M2.

TABLA 4.7: Comparación de resultados del modelo M1 y M2

| Inst. | Tipo | Cant.figuras | Contenedor | | Dim. (radio) | | Contenedor | | M1 | | M2 | | Resultados | | Resultados | |
|-------|---------|--------------|------------|--------|--------------|-----|------------|---------------|-----------|---------------|----|----|-------------|-------------|------------|--|
| | | | M1 | M2 | M1 | M2 | Variables | Restricciones | Variables | Restricciones | M1 | M2 | % ocupación | % ocupación | | |
| 1 | Regular | 5 | 1.0033 | 1.0000 | 131 | 140 | 81 | 115 | 68.4580 | 68.9161 | | | | | | |
| 2 | Regular | 6 | 1.0000 | 1.0000 | 187 | 201 | 112 | 162 | 82.0025 | 82.6993 | | | | | | |
| 3 | Regular | 7 | 1.1524 | 1.1524 | 253 | 273 | 148 | 217 | 72.1132 | 72.6536 | | | | | | |
| 4 | Regular | 8 | 1.2634 | 1.2634 | 329 | 356 | 189 | 280 | 68.5494 | 69.0854 | | | | | | |
| 5 | Regular | 9 | 1.3148 | 1.3148 | 415 | 450 | 235 | 351 | 65.9086 | 71.7640 | | | | | | |
| 6 | Regular | 10 | 1.3847 | 1.3847 | 511 | 555 | 286 | 430 | 67.3483 | 71.8873 | | | | | | |
| 7 | Regular | 15 | 0.0000 | 1.6367 | - | - | - | - | - | 77.1780 | | | | | | |
| 8 | Regular | 20 | 0.0000 | 1.9043 | - | - | - | - | - | 76.0209 | | | | | | |
| 9 | Regular | 25 | 0.0000 | 2.0698 | - | - | - | - | - | 80.4345 | | | | | | |
| 10 | Regular | 30 | 0.0000 | 2.2869 | - | - | - | - | - | 79.0645 | | | | | | |
| 11 | Regular | 35 | 0.0000 | 2.4496 | - | - | - | - | - | 80.3955 | | | | | | |
| 12 | Regular | 40 | 0.0000 | 2.6371 | - | - | - | - | - | 79.2783 | | | | | | |
| 13 | Regular | 45 | 0.0000 | 2.7860 | - | - | - | - | - | 79.9077 | | | | | | |
| 14 | Regular | 50 | 0.0000 | 2.9510 | - | - | - | - | - | 79.1359 | | | | | | |
| 15 | Regular | 55 | 0.0000 | 3.0704 | - | - | - | - | - | 80.4146 | | | | | | |
| 16 | Regular | 60 | 0.0000 | 3.1910 | - | - | - | - | - | 81.2157 | | | | | | |

* M1 (Modelo presentado en [39])

* M2 (Modelo propuesto en este trabajo)

CAPÍTULO 5

EXPERIMENTACIÓN Y RESULTADOS

En este capítulo se presentan los experimentos que se realizaron para evaluar el empaquetamiento de pentágonos dentro de contenedores convexos con geometrías circular y cuadrada. Lo que se busca principalmente con estos experimentos es validar que el modelo matemático que se desarrolla en esta investigación sea efectivo y se pueda aplicar de manera práctica.

En las secciones que siguen se describe la metodología experimental que se emplea, incluyendo los parámetros que se consideran, las instancias de prueba que se utilizan y los criterios de evaluación que se establecen. Además, se presentan y analizan los resultados obtenidos en cada experimento, esto con el fin de comprender mejor cómo se desempeña el modelo matemático y qué capacidad tiene para resolver el problema de empaquetamiento de pentágonos en distintos tipos de contenedores.

5.1 OBJETIVOS

Esta fase experimental busca verificar el desempeño del modelo desarrollado comparándolo con los resultados reportados en [39]. Adicionalmente, se validan los distintos enfoques o variantes de problemas que se pueden resolver con este modelo.

5.2 PRIMERA FASE DE LA EXPERIMENTACIÓN

Los experimentos incluyen el empaquetamiento de polígonos convexos (pentágonos rígidos y flexibles) dentro de contenedores convexos (cuadrados y circulares) con dimensiones variables.

5.2.1 INSTANCIAS UTILIZADAS EN LA EXPERIMENTACIÓN

Las instancias empleadas en esta investigación se generaron mediante un programa escrito en Python, con el propósito de validar el modelo. La tabla 5.1 muestra las características de las instancias para ambos tipos de contenedores estudiados (cuadrado y circular):

- elementos a empaquetar
- tipo de elementos
- números de instancias según el tamaño del elemento

TABLA 5.1: Número de instancias según tipo de elemento

| Contenedor | elemento | Tipo de elemento | Número de instancias |
|------------|------------|------------------|----------------------|
| cuadrado | pentágonos | regulares | 2 |
| | pentágonos | irregulares | 16 |
| circular | pentágonos | regulares | 2 |
| | pentágonos | irregulares | 16 |

5.2.1.1 ESTRUCTURA DE LAS INSTANCIAS

Los datos de cada instancia utilizada incluyen:

- cantidad de elementos de instancia
- cantidad de vértices de los elementos ($n-1$)
- cantidad de dimensiones (K)

En la tabla 5.2 se presenta la estructura matricial que define cada figura, donde (\mathbf{d}) representa la distancia entre vértices, ($\mathbf{n-1}$) indica el número de vértices y (σ) corresponde al ángulo entre los lados de la figura.

TABLA 5.2: Estructura matricial: ángulos(σ) entre lados y distancia(d)

| param distancias:= | | | | | |
|---------------------------|-----|-----|-----|-----|----------|
| $[1, *, *]:$ | 1 | 2 | 3 | ... | $n:=$ |
| 1 | 0 | d | 0 | 0 | σ |
| 2 | 0 | 0 | d | 0 | σ |
| ... | 0 | 0 | 0 | d | σ |
| $n-1$ | d | 0 | 0 | 0 | σ |

5.3 DISEÑO EXPERIMENTAL

Este diseño experimental preliminar se centra en validar el modelo propuesto. En esta etapa se considera un tipo de contenedor y una categoría de elemento a empaquetar. Se aplica un diseño factorial completo con tres factores de control por tratamiento, resultando en 7 tratamientos. Los factores de control son los siguientes:

- Tipo de contenedor de un nivel (circular)

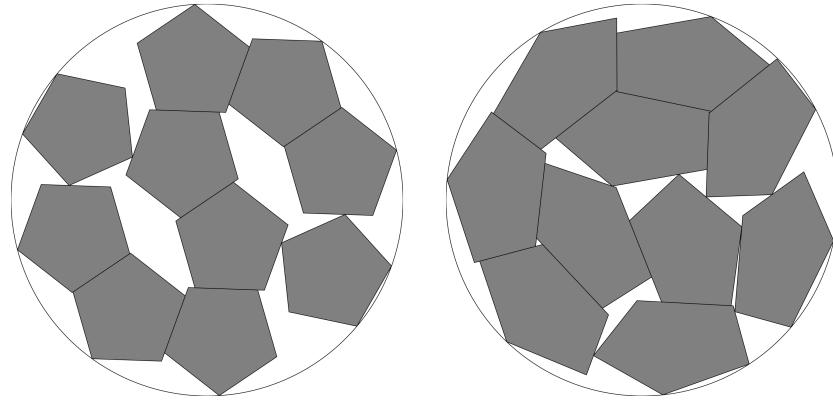
- Tipos de figuras de un nivel (pentágonos)
- Flexibilidad de los lados del pentágonos de siete niveles $\rho = (0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 0.95, \text{inf})$

5.3.0.1 RESULTADOS DE LA PRIMERA FASE DE EXPERIMENTACIÓN

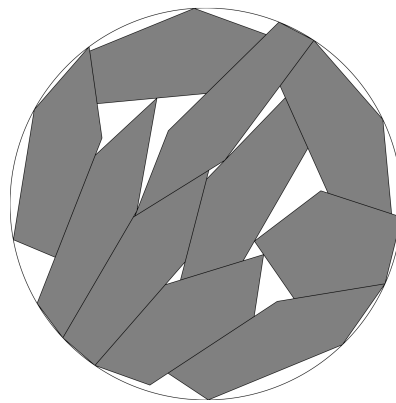
Esta experimentación se realiza para una instancia de 10 elementos idénticos para pentágonos flexibles en los cuales se permite la variación de los lados en siete intervalos de deformación ρ (0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 0.95, inf), pero conservado el área de un pentágonos de lado tamaño uno. Las figuras son empaquetadas en un contenedor circular. Se define como criterio de paro un tiempo de 8000 segundos para cada tratamiento.

TABLA 5.3: Resultados de 10 pentágonos flexibles en contenedor circular

| Elementos | | Contenedor circular | | Resultados | |
|-----------|------------|---------------------|-------|---------------------|----------------|
| Inst. | figura | Cantidad figuras | Radio | Suavidad (ρ) | % de ocupación |
| 1 | Pentágonos | 10 | 2.822 | 0 | 68.7663 |
| 2 | Pentágonos | 10 | 2.701 | 0.2 | 75.0644 |
| 3 | Pentágonos | 10 | 2.648 | 0.4 | 78.0709 |
| 4 | Pentágonos | 10 | 2.579 | 0.6 | 82.3353 |
| 5 | Pentágonos | 10 | 2.572 | 0.8 | 82.7848 |
| 6 | Pentágonos | 10 | 2.562 | 0.95 | 83.4095 |
| 7 | Pentágonos | 10 | 2.506 | inf | 87.1985 |
| 8 | Pentágonos | 10 | 2.359 | inf | 98.3634 |
| 9 | Pentágonos | 10 | 2.669 | 4 (0) - 6 (inf) | 76.8745 |

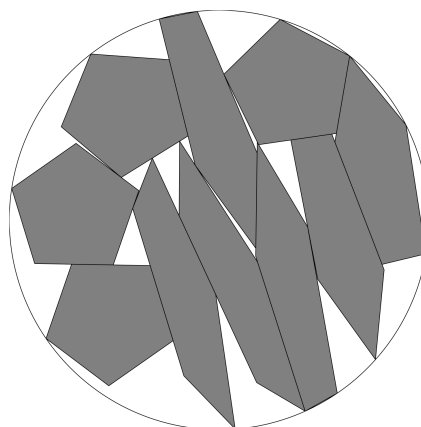


(a) $\rho = 0\%$, $r = 2.822$, $d = 0.687$ (b) $\rho = 0.6\%$, $r = 2.579$, $d = 0.828$



(c) $\rho = \text{inf}$, $r = 2.506$, $d = 0.872$

FIGURA 5.1: 10 pentágonos flexibles en contenedor circular



(a) $\rho = 0\%$ y, $\rho = \text{inf}$, $r = 2.669$

FIGURA 5.2: Cuatro pentágonos rígidos y seis flexibles en contenedor circular

5.4 RESTRICCIONES DE CONVEXIDAD

Durante el proceso de experimentación con diez pentágonos, se observó que los polígonos conservaban su forma y todos sus vértices, lo cual era un resultado esperado. Sin embargo, se detectó que la deformación de los pentágonos respecto a su forma original era limitada. Esto llevó a la necesidad de garantizar que los polígonos mantuvieran su convexidad durante las deformaciones, y así reemplazar la restricción 3.9. La convexidad es una propiedad fundamental que asegura que el polígono no presente concavidades o “dobles” hacia adentro, lo cual podría generar soluciones inválidas o no deseadas en el contexto del problema abordado.

Para abordar este desafío y permitir una flexibilidad completa en los polígonos de más de tres lados, se diseñaron restricciones específicas basadas en el producto vectorial de los lados consecutivos del polígono. Estas restricciones tienen como objetivo mantener la convexidad del polígono durante todo el proceso de deformación.

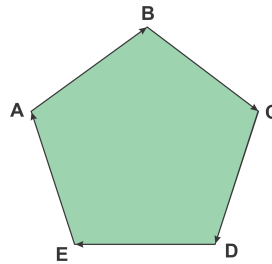


FIGURA 5.3: Pentágono cuyos lados son tomados como vectores consecutivos

En un polígono convexo todos los productos vectoriales $v_k \times v_{k+1}$ tienen el mismo signo [17]. Aquí $k = 1, 2, \dots, n$ y $v_{n+1} = v_1$. El producto de dos vectores $a = \{ a_1, a_2 \}$, $b = \{ b_1, b_2 \}$ se define como:

$$a \times b = a_1 b_2 - a_2 b_1 \quad (5.1)$$

Si el i -ésimo vértice tiene componentes $X_i = \{ x_i, y_i \}$, entonces

$$v_k = X_{k+1} - X_k = \{ (x_{k+1} - x_k), (y_{k+1} - y_k) \} \quad (5.2)$$

la condición de convexidad (para la experimentación se utilizó $\text{signó} \leq 0$)

$$v_k \times v_{k+1} = (X_{k+1} - X_k)(y_{k+2} - y_{k+1}) - (y_{k+1} - y_k)(x_{k+2} - x_{k+1}) \leq 0, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (5.3)$$

Al incorporar estas restricciones en el modelo matemático, se logra mantener la convexidad del polígono durante las deformaciones. Esto significa que, incluso si algunos vértices parecen desaparecer visualmente debido a la flexibilidad permitida, el polígono sigue siendo conexo y mantiene su forma convexa general.

Es importante destacar que, gracias a las características del modelo propuesto, estas restricciones de convexidad se integran de manera natural y permiten una manipulación adecuada de los polígonos flexibles. El modelo asegura que los vértices se mantengan conectados y que la forma del polígono sea consistente, evitando así soluciones inválidas o no deseadas.

5.5 SEGUNDA FASE DE LA EXPERIMENTACIÓN

Esta fase de experimentación se enfoca en la validación del modelo propuesto con la nueva restricción de convexidad, en la misma se contemplan dos tipos de contenedor, un tipo de figura a empaquetar y siete intervalos de deformación ρ (0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 0.95, inf) para los lados de los pentágonos. Se utiliza un diseño factorial completo con tres factores de control por tratamiento, por lo que se tiene 14 tratamientos. Dichos factores de control son:

- Tipo de contenedor de dos niveles (cuadrado, circular)
- Tipos de figuras de un nivel niveles (pentágonos)
- Flexibilidad de los lados del pentágonos de siete niveles $\rho = (0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 0.95, \text{inf})$

5.5.0.1 RESULTADOS SEGUNDA FASE DE EXPERIMENTACIÓN

Esta experimentación se lleva a cabo con instancias de 20 y 30 elementos idénticos de pentágonos flexibles. Los pentágonos permiten que sus lados varíen según siete intervalos de deformación ρ : 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 0.95 e inf, manteniendo siempre el área constante de un pentágono regular con lado unitario.

Las figuras se empaican en dos tipos de contenedores: cuadrado y circular. Como criterio de paro, establecemos un tiempo límite de 8000 segundos para cada tratamiento.

A continuación presentamos los resultados de la experimentación, organizados según el tipo de contenedor utilizado y la cantidad de elementos evaluados:

TABLA 5.4: Resultados de 20 pentágonos flexibles en contenedor circular

| Elementos | | Contenedor circular | | Resultados | |
|-----------|--------------|---------------------|--------|--------------------|----------------|
| Inst. | figura | Cantidad figuras | Radio | Suavidad(ρ) | % de ocupación |
| 8 | pentágono | 20 | 3.8350 | 0 | 74.4711 |
| 9 | pentágono | 20 | 3.3924 | 0.2 | 95.1684 |
| 10 | pentágono | 20 | 3.3742 | 0.4 | 96.1984 |
| 11 | pentágono | 20 | 3.3674 | 0.6 | 96.5868 |
| 12 | pentágono | 20 | 3.3324 | 0.8 | 98.6257 |
| 13 | pentágono | 20 | 3.3366 | 0.99 | 98.3770 |
| 14 | pentágono | 20 | 3.3227 | inf | 99.2018 |
| 17 | pentágonomix | 20 | 3.3781 | 5 (0) - 15(0.8) | 95.9759 |
| 18 | pentágonomix | 20 | 3.3567 | 5 (0) - 15(inf) | 97.2041 |

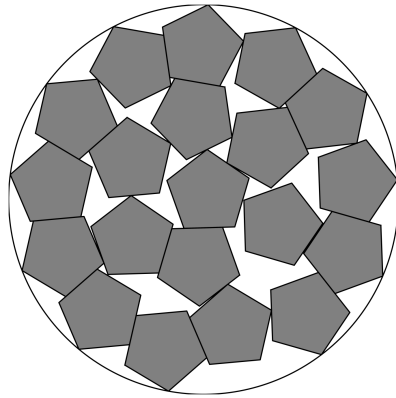
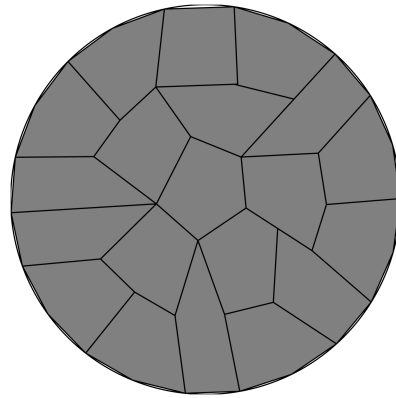
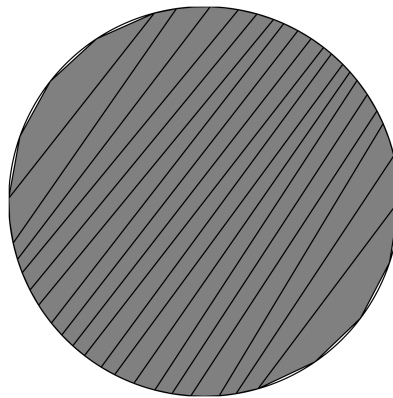
(a) $\rho = 0\%$, $r = 3.835$, $d = 0.745$ (b) $\rho = 0.99\%$, $r = 3.336$, $d = 0.984$ (c) $\rho = \text{inf}$, $r = 3.322$, $d = 0.992$

FIGURA 5.4: Veinte pentágonos flexibles en contenedor circular

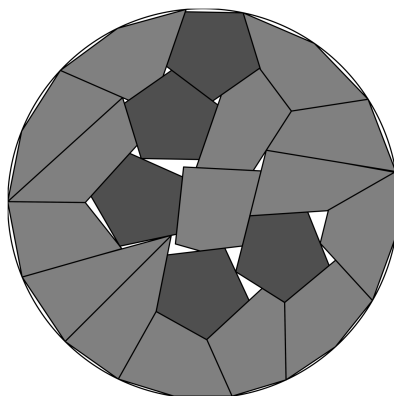
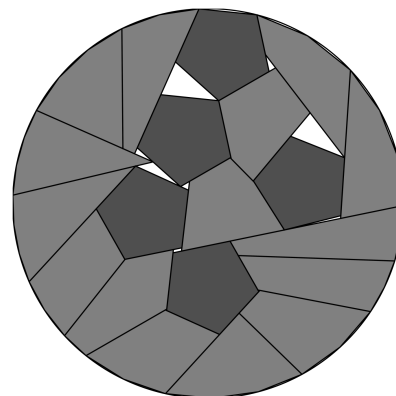
(a) $\rho = 0\%$ y $\rho = 0.8\%$, $r = 3.378$,
 $d = 95.975$ (b) $\rho = 0\%$ y $\rho = \text{inf}$, $r = 3.356$, d
 $= 97.204$

FIGURA 5.5: Cinco pentágonos rígidos y quince flexibles en contenedor circular

TABLA 5.5: Resultados de 20 pentágonos flexibles en contenedor cuadrado

| Elementos | | | Contenedor cuadrado | | Resultados | |
|-----------|---------------|------------------|---------------------|--------|---------------------|----------------|
| Inst. | figura | Cantidad figuras | largo | ancho | Suavidad (ρ) | % de ocupación |
| 8 | pentágono | 20 | 6.8017 | 6.8017 | 0 | 74.3739 |
| 9 | pentágono | 20 | 6.1060 | 6.1060 | 0.2 | 92.2872 |
| 10 | pentágono | 20 | 5.8931 | 5.8931 | 0.4 | 99.0778 |
| 11 | pentágono | 20 | 5.866 | 5.866 | 0.6 | 99.9953 |
| 12 | pentágono | 20 | 5.866 | 5.866 | 0.8 | 99.9953 |
| 13 | pentágono | 20 | 5.866 | 5.866 | 0.99 | 99.9953 |
| 14 | pentágono | 20 | 5.866 | 5.866 | inf | 99.9953 |
| 17 | pentágono mix | 20 | 6.062 | 6.062 | 8(0) - 12(0.8) | 92.6333 |
| 18 | pentágono mix | 20 | 5.9089 | 5.9089 | 5(0) - 15(inf) | 98.5473 |

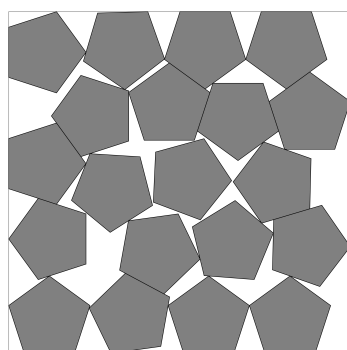
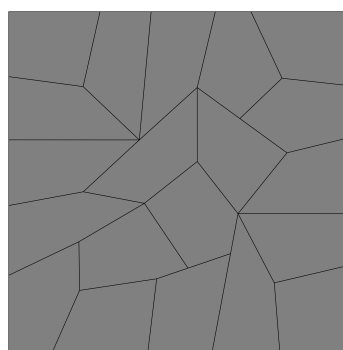
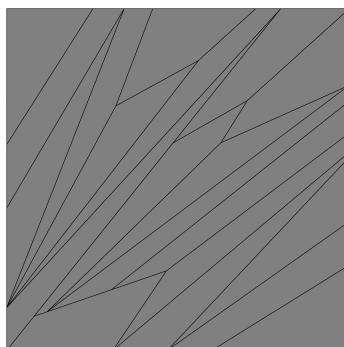
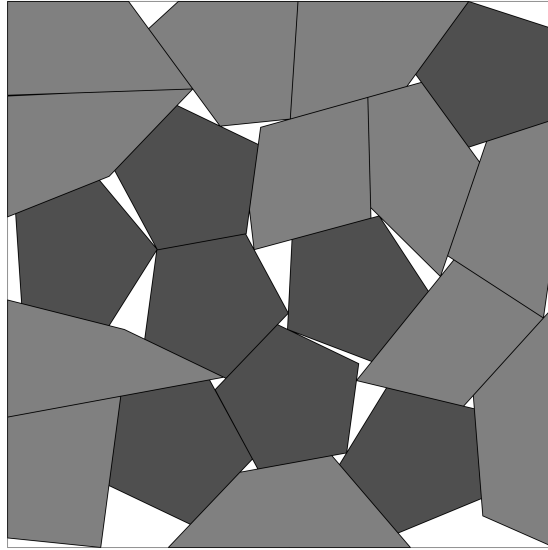
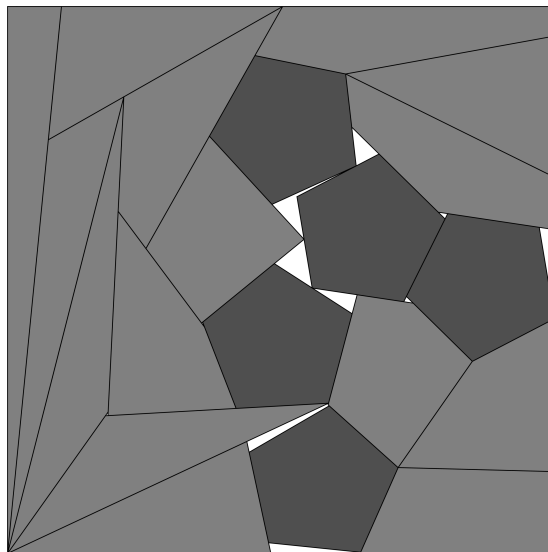
(a) $\rho = 0\%$, $l = 6.801$, $d = 0.744$ (b) $\rho = 0.8\%$, $l = 5.866$, $d = 0.995$ (c) $\rho = \text{inf}$, $l = 5.866$, $d = 0.995$

FIGURA 5.6: Veinte pentágonos flexibles en contenedor cuadrado



(a) $\rho = 0\%$ y $\rho = 0.8\%$, $l = 6.062$, $d = 0.926$

FIGURA 5.7: Ocho pentágonos rígidos y doce pentágonos flexibles en contenedor circular

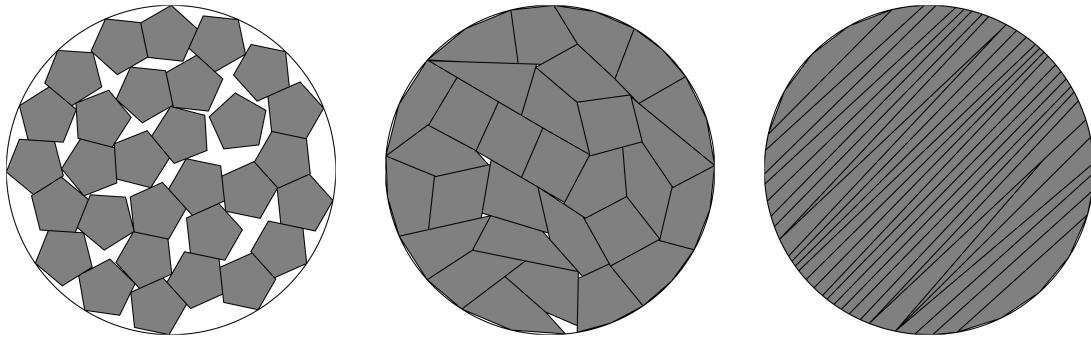


(a) $\rho = 0\%$ y $\rho = \text{inf}$, $l = 5.908$, $d = 0.985$

FIGURA 5.8: Cinco pentágonos rígidos y quince pentágonos flexibles en contenedor circular

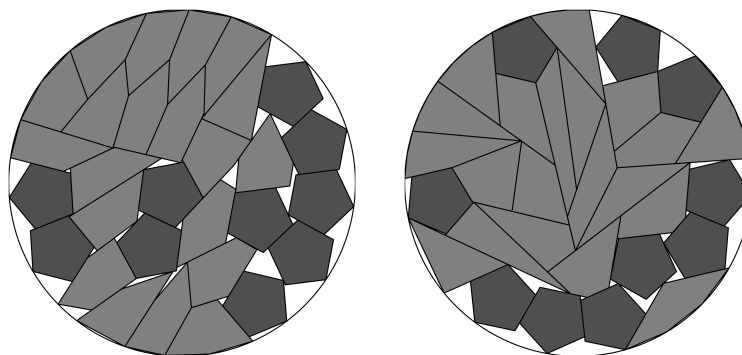
TABLA 5.6: Resultados de 30 pentágonos flexibles en contenedor circular

| Elementos | | Contenedor circular | | Resultados | |
|-----------|---------------|---------------------|--------|--------------------|----------------|
| Inst. | figura | Cantidad figuras | Radio | Suavidad(ρ) | % de ocupación |
| 1 | pentágono | 30 | 4.6215 | 0 | 76.9199 |
| 2 | pentágono | 30 | 4.1754 | 0.2 | 94.2311 |
| 3 | pentágono | 30 | 4.1483 | 0.4 | 95.4672 |
| 4 | pentágono | 30 | 4.1017 | 0.6 | 97.6497 |
| 5 | pentágono | 30 | 4.0894 | 0.8 | 98.2380 |
| 6 | pentágono | 30 | 4.0761 | 0.99 | 98.8806 |
| 7 | pentágono | 30 | 4.0640 | inf | 99.4679 |
| 15 | pentágono mix | 30 | 4.255 | 10 (0) - 20(0.8) | 90.7402 |
| 16 | pentágono mix | 30 | 4.2136 | 10 (0) - 20(inf) | 92.5320 |



(a) $\rho = 0\%$, $r = 4.670$, $d = 0.753$ (b) $\rho = 0.8\%$, $r = 4.089$, $d = 0.982$ (c) $\rho = \text{inf}$, $r = 3.835$, $d = 0.995$

FIGURA 5.9: Treinta pentágonos flexibles en contenedor circular



(a) $\rho = 0\%$ y $\rho = 0.8\%$, $r = 4.255$, $d = 0.907$ (b) $\rho = 0\%$ y $\rho = \text{inf}$, $r = 4.213$,
 $d = 0.9253$

FIGURA 5.10: Diez pentágonos rígidos y veinte flexibles en contenedor circular

TABLA 5.7: Resultados de 30 pentágonos flexibles en contenedor cuadrado

| Elementos | | Contenedor cuadrado | | | Resultados | |
|-----------|---------------|---------------------|---------|---------|---------------------|----------------|
| Inst. | figura | Cantidad figuras | largo | ancho | Suavidad (ρ) | % de ocupación |
| 1 | pentágono | 30 | 8.2625 | 8.2625 | 0 | 75.6009 |
| 2 | pentágono | 30 | 7.6092 | 7.6092 | 0.2 | 89.1400 |
| 3 | pentágono | 30 | 7.2664 | 7.2664 | 0.4 | 97.7481 |
| 4 | pentágono | 30 | 7.1907 | 7.1907 | 0.6 | 99.8190 |
| 5 | pentágono | 30 | 7.1843 | 7.1843 | 0.8 | 99.9955 |
| 6 | pentágono | 30 | 7.1843 | 7.1843 | 0.99 | 99.9955 |
| 7 | pentágono | 30 | 7.1843 | 7.1843 | inf | 99.9955 |
| 8 | pentágono mix | 30 | 7.4251 | 7.4251 | 8(0) - 22(0.8) | 93.6156 |
| 9 | pentágono mix | 30 | 7.37491 | 7.37491 | 8(0) - 22(inf) | 94.8937 |

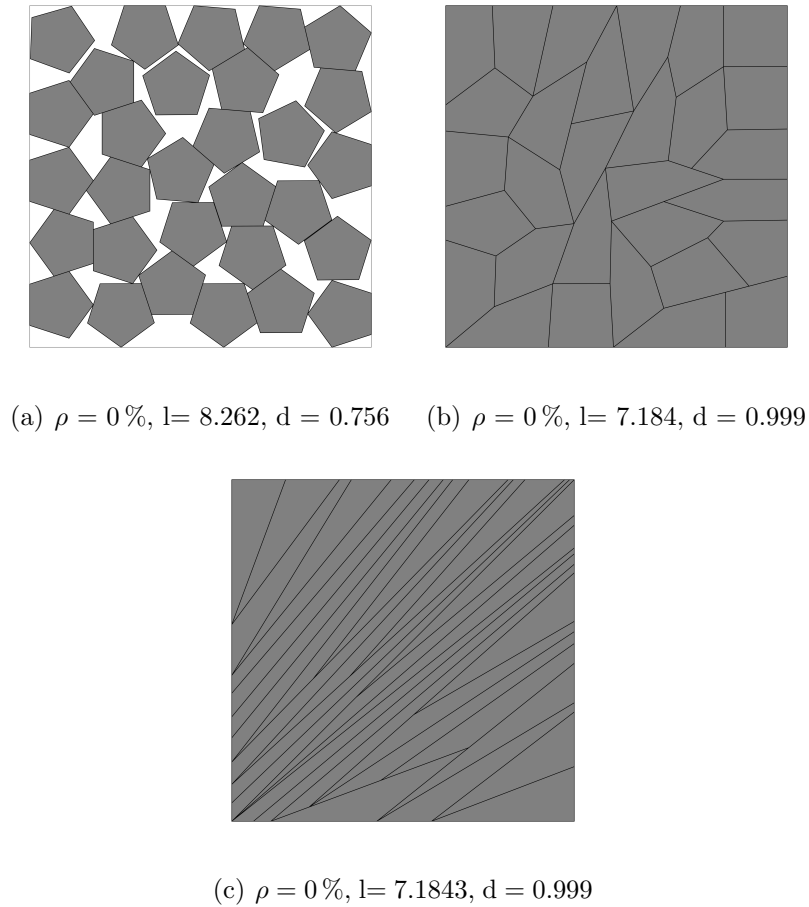


FIGURA 5.11: Treinta pentágonos flexibles en contenedor cuadrado

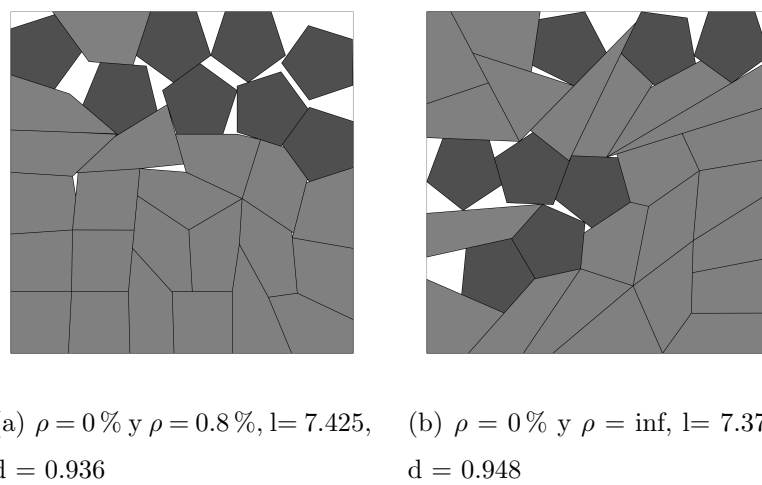


FIGURA 5.12: Ocho pentágonos rígidos y veintidós pentágonos flexibles en contenedor cuadrado

5.6 ANÁLISIS DE RESULTADOS

Los experimentos realizados en este estudio se centraron en el empaquetamiento de pentágonos flexibles en contenedores circulares y cuadrados, explorando diferentes niveles de elasticidad y tamaños de instancias. Los resultados obtenidos proporcionan hallazgos valiosos sobre la eficacia del modelo propuesto y su capacidad para manejar problemas de empaquetamiento complejos.

5.6.1 EMPAQUETAMIENTO EN CONTENEDOR CIRCULAR

Para el caso del contenedor circular, se observaron mejoras significativas en la densidad de empaquetamiento a medida que aumentaba el nivel de elasticidad de los pentágonos. En la instancia de 20 pentágonos (Tabla 5.4), la densidad de empaquetamiento aumentó de 74.47 % para pentágonos rígidos ($\rho = 0$) a 99.20 % para pentágonos con elasticidad infinita. Este incremento sustancial en la densidad demuestra la efectividad de permitir la deformación controlada de los objetos.

Es notable que incluso con niveles moderados de elasticidad, como $\rho = 0.2$, se logró una mejora considerable, alcanzando una densidad del 95.17 %. Esto sugiere que pequeñas concesiones en la rigidez de los objetos pueden llevar a ganancias significativas en la eficiencia del empaquetamiento.

5.6.2 EMPAQUETAMIENTO EN CONTENEDOR CUADRADO

Los resultados para el contenedor cuadrado (Tabla 5.5) mostraron tendencias similares, pero con algunas diferencias interesantes. Se alcanzó una densidad de empaquetamiento del 99.99 % con un nivel de elasticidad de $\rho = 0.6$, y esta densidad se mantuvo constante para niveles más altos de elasticidad. Esto sugiere que, para

el contenedor cuadrado, existe un punto de saturación en el beneficio obtenido por aumentar la elasticidad.

5.6.3 COMPARACIÓN ENTRE CONTENEDORES

Al comparar los resultados entre contenedores circulares y cuadrados, se observa que el contenedor cuadrado permitió alcanzar densidades máximas ligeramente superiores (99.99% contra 99.20% para 20 pentágonos). Esto podría atribuirse a la mayor facilidad de los pentágonos para adaptarse a los ángulos rectos del contenedor cuadrado.

5.6.4 EFECTO DEL NÚMERO DE ELEMENTOS

El aumento en el número de elementos de 20 a 30 pentágonos (Tablas 5.6 y 5.7) mostró que el modelo es capaz de manejar instancias más grandes sin una degradación significativa en la calidad de las soluciones. Para el contenedor circular, se mantuvo la tendencia de mejora en la densidad con el aumento de la elasticidad, alcanzando un 99.47% para elasticidad infinita.

5.6.5 FLEXIBILIDAD MIXTA

Los experimentos con niveles mixtos de elasticidad (Figuras 5.5 y 5.8) demostraron la versatilidad del modelo para manejar escenarios más complejos y realistas. En estos casos, se logró un equilibrio entre la preservación de la forma de algunos objetos y la deformación de otros, resultando en densidades de empaquetamiento intermedias pero aún altamente eficientes.

5.7 DETERMINACIÓN DE LA FLEXIBILIDAD MÍNIMA

En esta sección, se presentan los resultados de la experimentación con el modelo extendido propuesto en la sección 3.8 el Capítulo 3. El objetivo principal de esta fase experimental es determinar la flexibilidad mínima necesaria para alcanzar una densidad de empaquetamiento específica, complementando así los resultados obtenidos con el modelo original.

5.7.1 METODOLOGÍA DE EXPERIMENTACIÓN CON MODELO EXTENDIDO

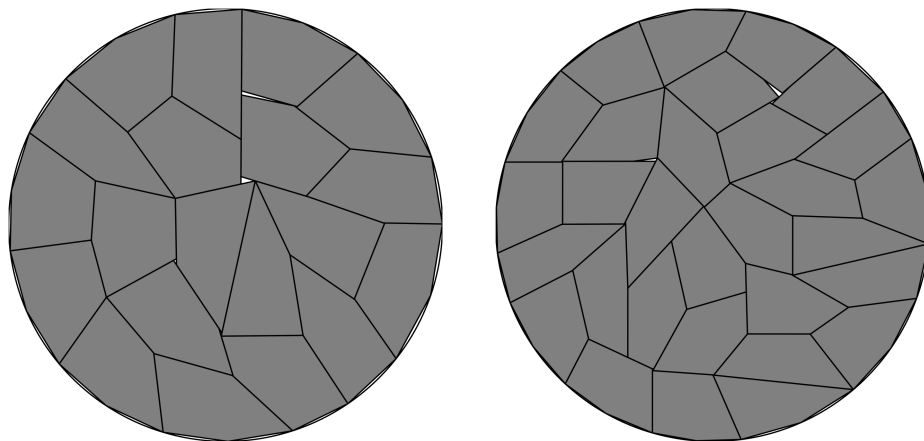
Para cada configuración de pentágonos y tipo de contenedor, se siguió el siguiente proceso:

1. Se identificó la densidad máxima δ^* obtenida en la experimentación inicial.
2. Se utilizó el modelo extendido, con δ^* como parámetro, para encontrar el valor mínimo de ρ que permite alcanzar esta densidad.

TABLA 5.8: 20 y 30 pentágonos flexibles minimizando el valor (ρ) en contenedor circular

| Elementos | | Contenedor | | Resultados | |
|-----------|-----------|------------------|--------|--------------------|----------------|
| Inst. | figura | Cantidad figuras | Radio | Suavidad(ρ) | % de ocupación |
| 1 | pentágono | 20 | 3.3366 | 0.58427 | 98.3770 |
| 2 | pentágono | 30 | 4.0761 | 0.799737 | 98.8806 |

5.8 RESULTADOS DE LA NUEVA EXPERIMENTACIÓN



(a) $\rho = 0.584\%$, $r = 3.3366$, $d = 0.937$ (b) $\rho = 0.799\%$, $r = 4.0761$, $d = 0.988$

FIGURA 5.13: Veinte y treinta pentágonos flexibles en contenedor circular minimizando la flexibilidad (ρ)

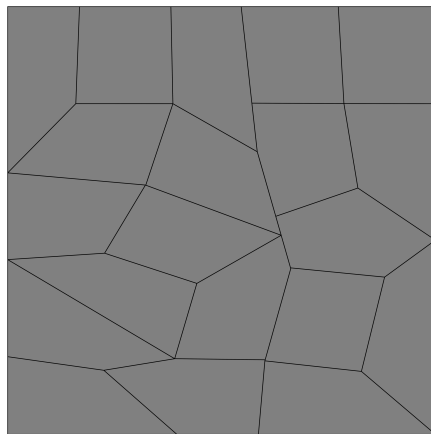
Para el caso del contenedor circular (Tabla 5.8 y Figura 5.13), se observa que:

- Con 20 pentágonos, se alcanza una densidad de empaquetamiento del 98.37% con un nivel de suavidad (ρ) de 0.584. Esto es significativamente menor que el valor de $\rho = 0.99$ utilizado en la experimentación inicial para lograr una densidad similar.

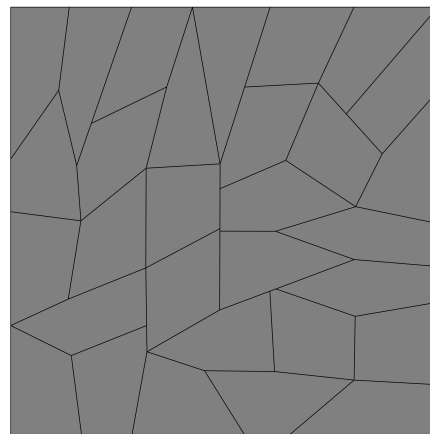
- Para 30 pentágonos, se logra una densidad del 98.88 % con $\rho = 0.799$, nuevamente menor que el valor de $\rho = 0.99$ usado inicialmente.
- Estos resultados sugieren que es posible alcanzar densidades de empaquetamiento muy altas con niveles de flexibilidad más moderados que los inicialmente considerados.

TABLA 5.9: Resultado de 20 y 30 pentágonos flexibles minimizando el valor de flexibilidad (ρ) en contenedor cuadrado

| Elementos | | | Contenedor cuadrado | | Resultados | |
|-----------|-----------|------------------|---------------------|--------|---------------------|----------------|
| Inst. | figura | Cantidad figuras | largo | ancho | Suavidad (ρ) | % de ocupación |
| 1 | pentágono | 20 | 5.866 | 5.866 | 0.772957 | 99.9953 |
| 2 | pentágono | 30 | 7.1843 | 7.1843 | 0.785322 | 99.9955 |



(a) $\rho = 0.772\%$, $l = 5.866$, $d = 0.999$



(b) $\rho = 0.785\%$, $l = 7.184$, $d = 0.999$

FIGURA 5.14: Ocho pentágonos rígidos y veintidós pentágonos flexibles en contenedor cuadrado

En el caso del contenedor cuadrado (Tabla 5.9y Figura5.14), los resultados muestran que:

- Para 20 pentágonos, se alcanza una densidad del 99.99% con $\rho = 0.772$ por encima del $\rho = 0.6$ que arrojó el mismo valor de densidad en la experimentación anterior.
- Con 30 pentágonos, se logra una densidad del 99.99% con $\rho = 0.785$ menor a $\rho = 0.8$ con que se obtuvo la misma densidad en la experimentación anterior.

5.8.1 CONCLUSIONES

La experimentación con el modelo extendido ha proporcionado una comprensión más matizada de la relación entre la flexibilidad de los objetos y la eficiencia del empaquetamiento. Ha demostrado que es posible optimizar el nivel de flexibilidad para lograr densidades de empaquetamiento muy altas sin necesidad de permitir deformaciones extremas. Estos hallazgos tienen el potencial de informar el diseño de soluciones de empaquetamiento más prácticas y eficientes en una variedad de aplicaciones industriales.

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES

6.1 RESUMEN DE LOS HALLAZGOS PRINCIPALES

Esta tesis doctoral ha tratado el problema de empaquetamiento óptimo de polígonos convexos definidos por sus vértices en contenedores convexos de dimensiones variables. Se puso énfasis particular en la flexibilidad de los objetos. Los principales hallazgos de esta investigación son:

- Se desarrolló un modelo PNL mejorado que incorpora restricciones de no intersección eficientes, lo que permite empaquetar elementos con dimensiones flexibles manteniendo constante su área.
- Los experimentos computacionales demuestran que el modelo propuesto resuelve instancias de hasta 30 pentágonos en contenedores circulares y cuadrados, mejorando considerablemente la densidad de empaquetamiento en comparación con objetos rígidos.
- Se observa un aumento sustancial en la densidad de empaquetamiento al incrementar la flexibilidad de los objetos. Por ejemplo, para 20 pentágonos en un contenedor circular, la densidad aumentó de 74.47 % con objetos rígidos a 99.20 % con elasticidad infinita.

- El modelo demuestra eficacia tanto en contenedores circulares como cuadrados, alcanzando densidades de empaquetamiento de hasta 99.99 % en contenedores cuadrados.
- La experimentación de ρ mínima revela que es posible alcanzar densidades de empaquetamiento muy altas con niveles de flexibilidad moderados. Para 20 pentágonos en un contenedor circular, se logró una densidad del 98.38 % con un nivel de suavidad (ρ) de solo 0.58427. Este valor es significativamente menor que el $\rho = 0.99$ utilizado inicialmente.
- En contenedores cuadrados, se alcanzaron densidades prácticamente perfectas (99.99 %) con niveles de flexibilidad inferiores a 0.8 para instancias de 20 y 30 pentágonos.

6.2 IMPLICACIONES TEÓRICAS

Las implicaciones teóricas que tiene este trabajo son significativas para el campo de la optimización combinatoria, sobre todo en lo que se refiere a los problemas de corte y empaquetamiento (C&P).

La incorporación de restricciones de convexidad que están basadas en el producto vectorial de los lados consecutivos del polígono representa un enfoque novedoso que se puede aplicar a otros problemas de optimización geométrica. Por su parte, el manejo simultáneo de elementos rígidos y flexibles dentro del mismo marco da una base teórica que permite abordar problemas de empaquetamiento más realistas y con mayor complejidad.

En cuanto a la adaptación del modelo a diferentes tipos de contenedores, tanto circulares como cuadrados, esto demuestra la versatilidad que tiene y sienta las bases para que pueda extenderse a formas de contenedores que sean más complejas. Además, el estudio de cómo se relaciona la elasticidad de los objetos con la densidad

de empaquetamiento da nuevos enfoques que revelan aspectos importantes sobre la naturaleza de los problemas de empaquetamiento óptimo.

6.3 IMPLICACIONES PRÁCTICAS

Las implicaciones prácticas que se derivan de esta investigación son bastante diversas y tienen relevancia para múltiples sectores industriales.

En el caso de la industria de embalaje y logística, el modelo que se propone puede emplearse para optimizar el empaquetamiento de productos flexibles, permitiendo minimizar el espacio que se utiliza y así reducir los costos de transporte. Por otro lado, en la industria electrónica el enfoque propuesto resulta bastante útil para el diseño de layouts de circuitos integrados, ya que al tener flexibilidad en la forma de los componentes se pueden lograr diseños más compactos y eficientes.

En cuanto a la ciencia de materiales, el modelo puede usarse para estudiar y optimizar cómo se empaquetan partículas deformables, lo cual contribuye al diseño de nuevos materiales que tengan propiedades específicas. Además, la capacidad que tiene el modelo para manejar niveles mixtos de elasticidad hace posible su aplicación en escenarios donde hay objetos rígidos y flexibles al mismo tiempo, como por ejemplo en la optimización de carga en contenedores de transporte.

6.4 LIMITACIONES DEL ESTUDIO

A pesar de los avances que se alcanzaron, es importante reconocer las limitaciones que tiene este estudio.

El tiempo de cómputo que se necesita para resolver instancias de gran tamaño sigue representando un desafío bastante importante, sobre todo cuando se trata de polígonos con numerosos vértices y niveles altos de elasticidad. Por otro lado, el

modelo actual está restringido a problemas bidimensionales, lo cual significa que para extenderlo a tres dimensiones se va a requerir un esfuerzo adicional considerable.

Otra limitación es que no se ha abordado la inclusión de objetos no convexos en este estudio, lo que limita su aplicabilidad a ciertas clases de problemas reales. Además, el enfoque actual no contempla factores como tener una orientación fija de ciertos polígonos o la presencia de zonas prohibidas en el contenedor, aspectos que pueden ser relevantes en aplicaciones prácticas específicas.

6.5 DIRECCIONES PARA FUTURAS INVESTIGACIONES

Esta tesis abre varias líneas prometedoras para futuras investigaciones:

- Aplicación de modelos de empaquetamiento a problemas de gestión de proyectos, donde los proyectos se interpretan como objetos a empaquetar y el contenedor representa los recursos disponibles. Este enfoque podría ser particularmente útil en la selección de carteras de proyectos de I+D, como se discute en [11], [32] y [12].
- Desarrollo de métodos especiales para facilitar la solución de problemas de gran escala, como los considerados en este trabajo. La descomposición Lagrangiana, por ejemplo, podría ser una técnica efectiva para abordar estos problemas [33], [34], [29]. Las cotas Lagrangianas obtenidas también podrían utilizarse directamente en el solver Baron para refinar el modelo.
- Exploración de la aplicación de modelos de empaquetamiento con objetos suaves en problemas de logística verde, particularmente en el transporte de desechos. Dado que muchos materiales desechables son suaves y no necesitan mantener su forma inicial, este enfoque podría ofrecer soluciones más eficientes y sostenibles [35].

- Extensión del modelo a problemas tridimensionales, lo que ampliaría significativamente su aplicabilidad en campos como la logística y el diseño de embalajes.
- Incorporación de técnicas de aprendizaje automático para mejorar la generación de soluciones iniciales y la exploración del espacio de soluciones.
- Estudio de la extensión del modelo para incluir objetos no convexos y restricciones adicionales como orientación fija y zonas prohibidas.

Estas direcciones de investigación ofrecen un camino claro para continuar avanzando en el campo de la optimización geométrica y los problemas de corte y empaquetamiento, con el potencial de generar impactos significativos tanto en la teoría de la optimización como en sus aplicaciones prácticas en la industria y la tecnología.

6.6 CONCLUSIONES FINALES

En conclusión, esta tesis doctoral ha realizado contribuciones significativas al campo de los problemas de corte y empaquetamiento, proporcionando un modelo matemático mejorado y flexible para el empaquetamiento óptimo de polígonos convexos en contenedores de dimensiones variables. El enfoque propuesto, que permite manejar tanto elementos rígidos como flexibles, representa un avance importante en la modelización de problemas de empaquetamiento complejos y realistas.

Los resultados obtenidos demuestran la eficacia del modelo para resolver instancias de mayor tamaño y complejidad en comparación con enfoques anteriores, especialmente en el caso de contenedores circulares y cuadrados. La capacidad del modelo para mejorar significativamente la densidad de empaquetamiento a través de la flexibilidad controlada de los objetos, y para determinar el nivel óptimo de esta flexibilidad, tiene implicaciones importantes para una amplia gama de aplicaciones prácticas en diversos sectores industriales.

Si bien existen limitaciones y desafíos por abordar, esta investigación sienta las bases para futuros desarrollos en el campo de la optimización y los problemas de corte y empaquetamiento. Las direcciones de investigación propuestas ofrecen un camino claro para continuar avanzando en este importante campo de estudio, con el potencial de generar impactos significativos tanto en la teoría de la optimización como en sus aplicaciones prácticas en la industria y la tecnología.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Ernesto G Birgin, Rafael D Lobato, and Reinaldo Morabito. An effective recursive partitioning approach for the packing of identical rectangles in a rectangle. *Journal of the Operational Research Society*, 61(2):306–320, 2010.
- [2] Ernesto G Birgin and Francisco Nogueira Calmon Sobral. Minimizing the object dimensions in circle and sphere packing problems. *Computers & Operations Research*, 35(7):2357–2375, 2008.
- [3] Arman Boromand, Alexandra Signoriello, Fangfu Ye, Corey S O’Hern, and Mark D Shattuck. Jamming of deformable polygons. *Physical review letters*, 121(24):248003, 2018.
- [4] Andreas Bortfeldt and Gerhard Wäscher. Constraints in container loading—a state-of-the-art review. *European Journal of Operational Research*, 229(1):1–20, 2013.
- [5] Andreas Bortfeldt and Gerhard Wäscher. Constraints in container loading—a state-of-the-art review. *European Journal of Operational Research*, 229(1):1–20, 2013.
- [6] Quoc Trung Bui, Thibaut Vidal, and Minh Hoàng Hà. On three soft rectangle packing problems with guillotine constraints. *Journal of global optimization*, 74:45–62, 2019.
- [7] Mao Chen, Yajing Yang, Zeyu Zeng, Xiangyang Tang, Xicheng Peng, and Sanyu Liu. A filtered beam search based heuristic algorithm for packing unit

- circles into a circular container. *Computers & Operations Research*, 166:106636, 2024.
- [8] Yinfei Chen, Ming Yuan, Zhichao Wang, Yu Zhao, Jianqi Li, Bingwen Hu, and Chengjie Xia. Structural characterization and statistical properties of jammed soft ellipsoid packing. *Soft Matter*, 17(10):2963–2972, 2021.
- [9] Jean-François Côté, Mauro Dell’Amico, and Manuel Iori. Combinatorial benders’ cuts for the strip packing problem. *Operations Research*, 62(3):643–661, 2014.
- [10] Maxence Delorme, Manuel Iori, and Silvano Martello. Logic based benders’ decomposition for orthogonal stock cutting problems. *Computers & Operations Research*, 78:290–298, 2017.
- [11] Giorgio Fasano. *Solving non-standard packing problems by global optimization and heuristics*. Springer, 2014.
- [12] Eduardo Fernandez, Fernando Lopez, Jorge Navarro, Ines Vega, and Igor Litvinchev. An integrated mathematical-computer approach for r&d project selection in large public organisations. *International Journal of Mathematics in Operational Research*, 1(3):372–396, 2009.
- [13] Armin Fügenschuh, Konstanty Junosza-Szaniawski, and Zbigniew Lonc. Exact and approximation algorithms for a soft rectangle packing problem. *Optimization*, 63(11):1637–1663, 2014.
- [14] Jieqing Gan and Aibing Yu. Dem study on the packing density and randomness for packing of ellipsoids. *Powder Technology*, 361:424–434, 2020.
- [15] A Miguel Gomes and José Fernando Oliveira. Solving irregular strip packing problems by hybridising simulated annealing and linear programming. *European Journal of Operational Research*, 171(3):811–829, 2006.

-
- [16] Khadija Hadj Salem, Elsa Silva, and José Fernando Oliveira. Cutting and packing problems under uncertainty: literature review and classification framework. *International Transactions in Operational Research*, 30(6):3329–3360, 2023.
- [17] Paul Heckbert. *Graphics gems IV (IBM version)*. Elsevier, 1994.
- [18] Mhand Hifi and Rym M Hallah. A literature review on circle and sphere packing problems: Models and methodologies. *Advances in Operations Research*, 2009(1):150624, 2009.
- [19] Khanh Ho-Le. Finite element mesh generation methods: a review and classification. *Computer-aided design*, 20(1):27–38, 1988.
- [20] Manuel Iori, Vinícius L De Lima, Silvano Martello, Flávio K Miyazawa, and Michele Monaci. Exact solution techniques for two-dimensional cutting and packing. *European Journal of Operational Research*, 289(2):399–415, 2021.
- [21] Manuel Iori, Vinícius L De Lima, Silvano Martello, Flávio K Miyazawa, and Michele Monaci. Exact solution techniques for two-dimensional cutting and packing. *European Journal of Operational Research*, 289(2):399–415, 2021.
- [22] Pengli Ji, Kun He, Yan Jin, Hongsheng Lan, and Chumin Li. An iterative merging algorithm for soft rectangle packing and its extension for application of fixed-outline floorplanning of soft modules. *Computers & Operations Research*, 86:110–123, 2017.
- [23] Jiuhui Jiang, Krishna Garikipati, and Shiva Rudraraju. A diffuse interface framework for modeling the evolution of multi-cell aggregates as a soft packing problem driven by the growth and division of cells. *Bulletin of mathematical biology*, 81:3282–3300, 2019.
- [24] Andrew B Kahng, Jens Lienig, Igor L Markov, and Jin Hu. *VLSI physical design: from graph partitioning to timing closure*, volume 312. Springer, 2011.

-
- [25] Josef Kallrath. Cutting and packing beyond and within mathematical programming. In *Business Optimization Using Mathematical Programming: An Introduction with Case Studies and Solutions in Various Algebraic Modeling Languages*, pages 495–526. Springer, 2021.
- [26] Timo Kubach, Andreas Bortfeldt, Thomas Tilli, and Hermann Gehring. Greedy algorithms for packing unequal spheres into a cuboidal strip or a cuboid. *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, 28(06):739–753, 2011.
- [27] Aline AS Leao, Franklina MB Toledo, José Fernando Oliveira, and Maria Antónia Carravilla. A semi-continuous mip model for the irregular strip packing problem. *International Journal of Production Research*, 54(3):712–721, 2016.
- [28] Aline AS Leao, Franklina MB Toledo, José Fernando Oliveira, Maria Antónia Carravilla, and Ramón Alvarez-Valdés. Irregular packing problems: A review of mathematical models. *European Journal of Operational Research*, 282(3):803–822, 2020.
- [29] Igor Litvinchev. Refinement of lagrangian bounds in optimization problems. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 47:1101–1107, 2007.
- [30] Igor Litvinchev, Luis Infante, and Edith Lucero Ozuna Espinosa. Approximate circle packing in a rectangular container: Integer programming formulations and valid inequalities. In Rosa G. González-Ramírez, Frederik Schulte, Stefan Voß, and Jose A. Ceroni Díaz, editors, *Computational Logistics*, pages 47–60, Cham, 2014. Springer International Publishing.
- [31] Igor Litvinchev, Luis Infante, Tatiana Romanova, Alberto Martinez-Noa, and Luis Gutierrez. Optimized packing soft convex polygons. In *International Conference on Computer Science and Health Engineering*, pages 89–97. Springer, 2022.

-
- [32] Igor Litvinchev, Fernando López, HJ Escalante, and M Mata. A milp bi-objective model for static portfolio selection of r&d projects with synergies. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 50:942–952, 2011.
- [33] Igor Litvinchev and Lucero Ozuna. Lagrangian bounds and a heuristic for the two-stage capacitated facility location problem. *International Journal of Energy Optimization and Engineering (IJEEO)*, 1(1):59–71, 2012.
- [34] Igor Litvinchev, Socorro Rangel, and Jania Saucedo. A lagrangian bound for many-to-many assignment problems. *Journal of Combinatorial Optimization*, 19:241–257, 2010.
- [35] Igor Litvinchev, Yasmín Rios, D Özdemir, and LG Hernández-Landa. Multiperiod and stochastic formulations for a closed loop supply chain with incentives. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 53:201–211, 2014.
- [36] Igor Litvinchev, Tatiana Romanova, Rogelio Corrales-Diaz, Aned Esquerra-Arguelles, and Alberto Martínez-Noa. Lagrangian approach to modeling placement conditions in optimized packing problems. *Mobile Networks and Applications*, 25(6):2126–2133, 2020.
- [37] Andrea Lodi, Silvano Martello, and Michele Monaci. Two-dimensional packing problems: A survey. *European journal of operational research*, 141(2):241–252, 2002.
- [38] Silvano Martello, Michele Monaci, and Daniele Vigo. An exact approach to the strip-packing problem. *INFORMS journal on Computing*, 15(3):310–319, 2003.
- [39] Alberto Martínez-Noa. Optimal packing of convex polygons defined by their vertices. Master’s thesis, Faculty of Mechanical and Electrical Engineering, Nuevo Leon State University, 2020.
- [40] Alexander Pankratov, Tatiana Romanova, and Igor Litvinchev. Packing oblique 3d objects. *Mathematics*, 8(7), 2020.

-
- [41] Alexander Pankratov, Tatiana Romanova, Igor Litvinchev, and Jose Antonio Marmolejo-Saucedo. An optimized covering spheroids by spheres. *Applied Sciences*, 10(5), 2020.
- [42] David Pisinger and Mikkel Sigurd. The two-dimensional bin packing problem with variable bin sizes and costs. *Discrete Optimization*, 2(2):154–167, 2005.
- [43] Hans Pretzsch and Hans Pretzsch. *Forest dynamics, growth, and yield: A review, analysis of the present state, and perspective*. Springer, 2009.
- [44] Tatiana Romanova, Yuri Stoyan, Alexander Pankratov, Igor Litvinchev, Konstantin Avramov, M. Chernobryvko, Ihor Yanchevskiy, Irina Mozgova, and Julia Bennell. Optimal layout of ellipses and its application for additive manufacturing. *International Journal of Production Research*, 0(0):1–16, 12 2019.
- [45] Tatiana Romanova, Yuri Stoyan, Alexander Pankratov, Igor Litvinchev, O Kravchenko, Z Duryagina, Oksana Melashenko, and Andrey Chugay. Optimized packing soft ellipses. In *Human-Assisted Intelligent Computing: Modeling, simulations and applications*, pages 9–1. IOP Publishing Bristol, UK, 2023.
- [46] Guntram Scheithauer. *Introduction to cutting and packing optimization: Problems, modeling approaches, solution methods*, volume 263. Springer, 2017.
- [47] Joaquín Torres, Nancy Hitschfeld, Rafael O Ruiz, and Alejandro Ortiz-Bernardin. Convex polygon packing based meshing algorithm for modeling of rock and porous media. In *International Conference on Computational Science*, pages 257–269. Springer, 2020.
- [48] Jie Wang. Packing of unequal spheres and automated radiosurgical treatment planning. *Journal of Combinatorial Optimization*, 3:453–463, 1999.
- [49] Gerhard Wäscher, Heike Haußner, and Holger Schumann. An improved typology of cutting and packing problems. *European journal of operational research*, 183(3):1109–1130, 2007.

-
- [50] Mutsunori Yagiura, Shunji Umetani, Shinji Imahori, and Yannan Hu. Cutting and packing problems: from the perspective of combinatorial optimization, 2021.
- [51] Quan Yuan, Zhaofeng Li, Yan Gao, YH Wang, and Xia Li. Local responses in 2d assemblies of elliptical rods when subjected to biaxial shearing. *Acta Geotechnica*, 14:1685–1697, 2019.
- [52] Bo Zhao, Xizhong An, Yang Wang, Haiyang Zhao, Lingling Shen, Xudong Sun, and Ruiping Zou. Packing of different shaped tetrahedral particles: Dem simulation and experimental study. *Powder Technology*, 360:21–32, 2020.
- [53] Qiruyi Zuo, Xinglu Liu, Lu Xu, Li Xiao, Chengyin Xu, Jianfeng Liu, and Wai Kin Victor Chan. The three-dimensional bin packing problem for deformable items. In *2022 IEEE International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management (IEEM)*, pages 0911–0918. IEEE, 2022.

RESUMEN AUTOBIOGRÁFICO

Alberto Martínez Noa

Candidato para obtener el grado de
Doctor en Ciencias de la Ingeniería en Sistemas

Universidad Autónoma de Nuevo León
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

Tesis:

EMPAQUETAMIENTO ÓPTIMO DE POLÍGONOS CONVEXOS SUAVES

Nací el 14 de septiembre de 1988 en La Habana, Cuba. En el año 2009, comencé mis estudios de Ingeniería Informática en la Universidad Tecnológica de La Habana (CUJAE). Posteriormente, en el año 2018, ingresé al Posgrado de Ingeniería en Sistemas (PISIS) para realizar los estudios de Maestría en Ciencias de la Ingeniería con Orientación en Sistemas en la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la Universidad Autónoma de Nuevo León, México. Al concluir la maestría, continué en 2020 mis estudios de doctorado en PISIS.

