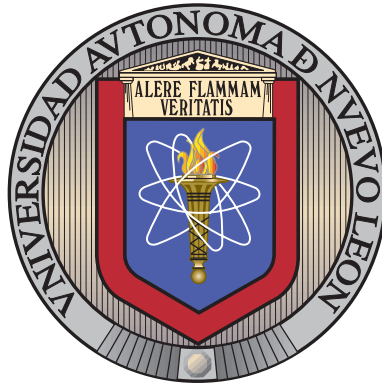


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



TEORÍA EFECTIVA EN LA DESCRIPCIÓN DE
DECAIMIENTOS DE RESONANCIAS.

POR

JOSÉ ABRAHAM BARAJAS AGUILAR

BAJO LA DIRECCIÓN DEL

DR. FRANCISCO VICENTE FLORES BAEZ

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN

20 DE MAYO DE 2026

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



TEORÍA EFECTIVA EN LA DESCRIPCIÓN DE
DECAIMIENTOS DE RESONANCIAS.

POR

JOSÉ ABRAHAM BARAJAS AGUILAR

EN OPCIÓN AL GRADO DE
DOCTOR EN INGENIERÍA FÍSICA

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN

20 DE MAYO DE 2026

Universidad Autónoma de Nuevo León
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
División de Estudios de Posgrado

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis “*Teoría efectiva en la descripción de decaimientos de resonancias*”, realizada por el alumno **José Abraham Barajas Aguilar**, con número de matrícula **2128833**, sea aceptada para su defensa como opción al grado de Doctor en Ingeniería Física.

El Comité de Tesis

Dr. Francisco Vicente Flores Baez
Presidente

Dr. José Rubén Morones Ibarra
Secretario

Dr. Leonardo Di Girolamo Sigalotti
Vocal 1

Dr. Carlos Luna Criado
Vocal 2

Dr. Francisco Javier Almaguer Martínez
Vocal 3

Vo. Bo.

Dr. Álvaro Eduardo Cordero Franco
Subdirector de Posgrado

San Nicolás de los Garza, Nuevo León, 20 de mayo de 2026

Declaración de Autoría

Declaro solemnemente que el presente documento es resultado de mi propio esfuerzo. Hasta donde tengo conocimiento, no contiene material previamente publicado o redactado por otra persona, salvo aquellos contenidos que han sido debidamente citados y referenciados, dando el reconocimiento correspondiente a sus autores. Todas las figuras y tablas fueron elaboradas por mi autoría, a menos que se indique explícitamente que provienen de material con licencia *Creative Commons* o de otras fuentes autorizadas.

Afirmo también que este trabajo no ha sido presentado antes, total ni parcialmente, como requisito para obtener algún grado académico o diploma en esta u otra institución.

M.C. José Abraham Barajas Aguilar

Dedicatoria

Esta tesis es el resultado de años de esfuerzo, dedicación y aprendizaje, y deseo dedicarla a ti, mi querida madre, María C. Aguilar, cuyo apoyo incondicional ha sido fundamental en mi formación. Sin ti, no habría llegado hasta aquí.

A mi esposa, Luz P., quien me acompañó en todo momento. Su paciencia y comprensión durante este exigente trayecto —la formación como físico, que demanda tiempo completo— han sido invaluable, incluso cuando implicó sacrificar momentos a su lado.

A mis hijos Aarón, Cristóbal, Vania y Jean, quienes son el motor que me impulsa a seguir adelante cada día y mi mayor inspiración.

ÍNDICE GENERAL

Agradecimientos	XI
Resumen	XII
1. Introducción	1
1.1. Objetivos	5
1.1.1. Objetivo general	5
1.1.2. Objetivos específicos	5
1.1.3. Hipótesis	5
2. Cromodinámica Cuántica	7
2.1. QCD a bajas energías y la simetría quiral	17
3. Teorías efectivas de la QCD a bajas energías	28
3.1. El grupo quiral $SU(3)_L \times SU(3)_R$ y su realización sobre los campos	30
3.2. Teoría de la Perturbación Quiral (Chiral Perturbation Theory, ChPT) . . .	31
3.2.1. Paridad intrínseca	33
3.2.2. Rompimiento explícito de simetría por las masas de los quarks . . .	34
3.2.3. Construcción del lagrangiano quiral a LO localmente invariante . .	36
3.2.4. ChPT a NLO	39
3.2.5. Formalismo no lineal del lagrangiano quiral a orden $\mathcal{O}(p^2)$	42

3.2.6. El sector de paridad intrínseca impar en ChPT	45
3.3. Teoría de Perturbación Quiral con Resonancias (Resonance Chiral Theory, $R\chi T$)	47
4. Descripción del decaimiento $\rho^0 \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma$ dentro de $R\chi T$	52
4.1. Vértice de interacción $\rho^0\omega^0\pi^0$	53
4.1.1. Vértice $\rho^0\omega^0\pi^0$ en la aproximación on-shell	54
4.1.2. Vértice de interacción $\omega^0\gamma\pi^0$	55
4.1.3. Vértice $\omega^0\gamma\pi^0$ en la aproximación <i>on-shell</i>	57
4.2. Decaimiento de ρ^0 en $\pi^0\pi^0\gamma$	58
4.2.1. Escenario 1: El decaimiento $\rho^0 \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma$ mediante vértices puramente <i>on-shell</i>	58
4.2.2. Escenario 2: El decaimiento $\rho^0 \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma$ mediante el vértice $V_{\rho\omega\pi}$ <i>on-shell</i>	61
4.2.3. Escenario 3: El decaimiento $\rho^0 \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma$ mediante el vértice $V_{\omega\gamma\pi}$ <i>on-shell</i>	61
4.2.4. Escenario 4: El decaimiento $\rho^0 \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma$ con vértices off-shell.	62
5. Conclusiones	65
6. Productos académicos derivados de la tesis	67
6.1. Actividades de retribución social y formación de recursos humanos	68
6.2. Formación académica complementaria	69
A. Expresiones analíticas detalladas y suplementarias	70
B. Complementos teóricos y matemáticos	76
B.1. Método de Gell-Mann y Lévy para la obtención de corrientes no necesariamente conservadas	76
B.2. Incorporación de resonancias en el marco quiral	78

ÍNDICE DE FIGURAS

1.	Representación esquemática de las partículas elementales del Modelo Estándar, clasificadas en quarks, leptones y bosones. Los valores experimentales se tomaron del Particle Data Group [1].	8
2.	Hadrones según el modelo de quarks.	9
3.	Vértices de interacción característicos en QCD.	15
4.	Representación de la formación de jets (chorros) de hadrones en un proceso de aniquilación electrón-positrón en el sistema de centro de masa.	16
5.	Comportamiento de la constante de acoplamiento fuerte α_s predicho por la ecuación del grupo de renormalización (2.34), con $n_f = 5$ sabores activos y utilizando como condición de referencia el valor central de la ecuación (2.36).	17
6.	Ejemplos ilustrativos del conteo quiral. A la izquierda se muestra un diagrama de contacto a cuatro puntos proveniente de un vértice del lagrangiano \mathcal{L}_{2k} , que contribuye a orden $\mathcal{O}(p^{2k})$. A la derecha se presenta un diagrama con un lazo construido a partir de dos vértices del mismo orden, cuya contribución aparece a orden $\mathcal{O}(p^{4k})$	40
7.	Convención de momentos e índices de Lorentz en el vértice de interacción $\rho^0\omega^0\pi^0$. Las flechas indican la dirección de aniquilación.	54
8.	Convención de momentos e índices de Lorentz para el vértice $\omega^0\gamma\pi^0$. Las flechas indican la dirección de aniquilación..	57
9.	Diagrama de Feynman a orden árbol para el proceso $\rho^0(Q) \rightarrow \pi^0(P_1)\pi^0(P_2)\gamma(k)$, mediado por una resonancia ω virtual.	58

10.	Región cinemáticamente permitida (Diagrama de Dalitz) para el decaimiento $\rho^0 \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma$, delimitada por las curvas azul y naranja, que corresponden a los límites cinemáticos superior e inferior dados por la Ec. (4.63).	60
11.	Lugar geométrico en el espacio de parámetros (c_{57}, d_4) consistente con el valor experimental $\mathcal{BR}(\rho \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma) = 4.5 \times 10^{-5}$, sujeto a las restricciones (3.118)–(3.123).	63
12.	Distribución del \mathcal{BR} diferencial $dB/d\sqrt{m_{12}}$ para tres pares específicos (c_{57}, d_4) compatibles con el \mathcal{BR} experimental.	64

LISTA DE TABLAS

1.	Hadrones ligeros: mesones pseudoscalares, mesones vectoriales y bariones, con sus respectivos números cuánticos, donde se indican como $I^G(J^{PC})$, siendo I el isoespín, G la paridad G , J el momento angular total, P la paridad y C la conjugación de carga.	18
2.	Esquema de conteo quiral.	37
3.	Invariantes quirales hasta orden $\mathcal{O}(p^2)$	38
4.	Valores numéricos de las LECs renormalizadas L_i^r , tomados de la compilación fenomenológica presentada por Schere/Schindle [2]. Determinaciones más recientes para las LECs L_4^r , L_5^r , L_6^r y L_8^r pueden encontrarse en la colaboración FLAG [3], basadas en simulaciones de Lattice QCD.	42
5.	Predicción de $\mathcal{BR} \equiv \mathcal{BR}(\rho^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0 \gamma)$ obtenida a partir de combinaciones de los valores de c_{57} y d_4 correspondientes a los escenarios 2 y 3.	63
6.	La primera columna muestra el valor de d_4 tomado como variable independiente, mientras que las columnas posteriores presentan los valores de c_{57} que reproducen el \mathcal{BR} experimental, obtenidos mediante las restricciones (3.118)–(3.123).	64

AGRADECIMIENTOS

Quisiera expresar mi más profundo agradecimiento a las siguientes personas:

A mi asesor, el **Dr. Francisco Vicente Flores Báez**, quien me introdujo en el extenso y complejo camino de la Teoría Cuántica de Campos. Su paciencia, dedicación y guía constante lo han convertido en un verdadero mentor, por quien guardo un profundo respeto y un sincero agradecimiento.

Al **Dr. Carlos Luna Criado**, anterior coordinador del posgrado, por su constante interés en el bienestar de los estudiantes y en el fortalecimiento del programa.

Al **Dr. Edgar Martínez Guerra**, también anterior coordinador del posgrado, por su orientación ética y amable en todos los procedimientos administrativos. Su apoyo resultó clave en momentos decisivos.

Al **Dr. Omar Amezcua**, actual coordinador del posgrado, por brindarme la oportunidad de impartir cursos en la Licenciatura en Física de la Universidad Autónoma de Nuevo León (UANL). Esta experiencia fortaleció mis habilidades en docencia y divulgación, y contribuyó de manera significativa a consolidar mis conocimientos para formarme como el físico que soy hoy.

A mis compañeros de posgrado, **Hernán Valtierra, Servando Rojas, Alan Pánuco, Jordan Santillán, Issac Leija, Sao Leija, Diego Partida y Felipe Segovia**, por las numerosas charlas compartidas en el intento de comprender el vasto y desafiante campo de la Teoría Cuántica de Campos.

Finalmente, expreso mi agradecimiento a la **UANL** por brindarme las facilidades académicas y el acceso a sus instalaciones a lo largo de esta etapa de formación. Extiendo también mi reconocimiento a la Secretaría de Educación, Ciencia, Innovación, Humanidades, Tecnología e Innovación (**SECIHTI**) por la beca de doctorado, cuyo respaldo ha sido fundamental para impulsar mi desarrollo profesional y mi integración a la sociedad como investigador.

RESUMEN

En este trabajo calculamos el *Branching Ratio* (\mathcal{BR}) del proceso de decaimiento $\rho^0 \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma$ al orden más bajo (*Leading Order*, LO) empleando el marco teórico de la Teoría de Perturbación Quiral con resonancias ($R\chi T$) en el sector de paridad intrínseca impar. Esta formulación constituye una teoría efectiva que surge de la necesidad de describir el carácter no perturbativo de la QCD en el régimen de bajas energías.

El lagrangiano del sector impar contiene once constantes de acoplamiento de baja energía (LECs) que no han sido determinadas por completo; en consecuencia, el \mathcal{BR} depende de tres acoplamientos desconocidos del modelo: d_4 y la combinación $c_5 + c_7 \equiv c_{57}$.

El valor experimental del \mathcal{BR} de este decaimiento permite restringir dichos acoplamientos. Inicialmente se consideran las condiciones on-shell (en la capa de masa) para los vértices de interacción presentes en los diagramas de Feynman; sin embargo, nuestros resultados predicen valores alejados del \mathcal{BR} experimental. Esto sugiere que la descripción adecuada requiere imponer condiciones off-shell (fuera de la capa de masa) en ambos vértices, lo que conduce a un espacio de parámetros permitido para el par (c_{57}, d_4) acotando sus valores.

Palabras clave: Teoría Cuántica de Campos (QFT), Cromodinámica Cuántica (QCD), Teoría de Perturbación Quiral (ChPT), Electrodinámica Cuántica (QED), ChPT con resonancias ($R\chi T$), Teorías Efectivas de la QCD (EFT).

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

El Modelo Estándar (SM) de la física de partículas [4, 5] es una de las teorías más precisas de la física moderna. Describe con gran exactitud las interacciones fundamentales conocidas —electromagnética, débil y fuerte— junto con las partículas gauge que actúan como mediadoras, salvo la interacción gravitatoria. Sin embargo, pese a su notable éxito predictivo, el SM presenta limitaciones importantes: no explica el origen de la materia oscura ni la gravedad, no predice las masas de los neutrinos y tampoco aclara la asimetría materia–antimateria observada en el universo.

En la práctica, el SM se interpreta como una teoría efectiva (Effective Field Theory, EFT) [6] caracterizada por 19 parámetros libres que no pueden determinarse a partir de la teoría misma. Estos parámetros deben extraerse de la fenomenología, ya sea mediante datos de colisionadores de altas energías [7] o a partir de fenómenos naturales observados en el universo [8, 9]. Este último tipo de determinaciones suele presentar mayores dificultades experimentales y menor precisión, debido a la falta de condiciones controladas. Un resumen actualizado y consistente de los valores experimentales de estos parámetros se encuentra en el Particle Data Group (PDG) [1].

En el régimen de bajas energías, típicamente por debajo de 1 GeV, el espectro físico está dominado por estados hadrónicos, estados compuestos por quarks confinados y enlazados por gluones, que son los bosones de gauge sin masa y de espín uno de la Cromodinámica Cuántica (Quantum Chromodynamics, QCD). En esta escala, la constante de acoplamiento fuerte α_s crece significativamente, lo que impide el uso de métodos perturbativos. Por ello, la estructura interna y la dinámica de los hadrones no pueden describirse directamente dentro del marco perturbativo del SM, lo que constituye una limitación importante para explorar la física hadrónica en esta región de energías.

En este régimen existen diversas aproximaciones no perturbativas para estudiar QCD. Una de ellas es *Lattice QCD* [3, 10], un método numérico formulado en un espacio–tiempo discretizado. Otra alternativa es la construcción de teorías efectivas (EFTs), elaboradas de acuerdo al teorema de Weinberg [11], las cuales se basan únicamente en las

simetrías de la teoría subyacente dentro de un rango específico de energía. En una EFT, los grados de libertad relevantes no tienen por qué coincidir con los de la teoría fundamental, lo cual resulta especialmente ventajoso en el caso de la QCD a bajas energías. En este enfoque, nuestra ignorancia se codifica en constantes de acoplamiento que no están fijadas por simetrías. Estas constantes pueden, en principio, obtenerse a partir de la teoría fundamental; cuando esto no es posible —como ocurre en QCD no perturbativa— se determinan a partir de la fenomenología. En el contexto de las EFTs de QCD, estas constantes reciben el nombre de *–constantes de acoplamiento de baja energía (LECs)–*.

Existen diversas teorías y modelos efectivos aplicables al estudio de QCD a bajas energías. Entre ellos se encuentran modelos como Vector Meson Dominance (VMD) [12], Hidden Local Symmetry (HLS) [13], el modelo de Nambu–Jona-Lasinio (NJL) [14], entre otros, así como teorías efectivas más sistemáticas como la Teoría de Perturbación Quiral (Chiral Perturbation Theory, ChPT) y la Teoría de Perturbación Quiral con Resonancias (Resonance Chiral Theory, R χ T). Estas últimas se construyen siguiendo el enfoque moderno de EFT.

En esta tesis nos centramos en ChPT, que es la EFT de QCD en el límite quiral, donde los quarks ligeros u , d y s se consideran sin masa. ChPT se formula como una expansión en potencias de los momentos externos, cuyos grados de libertad son los bosones de Goldstone asociados a la ruptura espontánea de la simetría quiral, identificados con los mesones pseudoscalares más ligeros [2]: $\{\pi, K, \eta\}$.

A orden líder (LO, $\mathcal{O}(p^2)$), ChPT depende únicamente de dos LECs: F_0 , relacionado con la constante de decaimiento del pión, y B_0 , asociado al condensado escalar de quarks mediante $\langle \bar{q}q \rangle = -F_0^2 B_0$, el cual desempeña un papel central en la ruptura espontánea de la simetría quiral. Ambas constantes están hoy bien determinadas [2, 15]; por lo tanto, ChPT es una teoría con poder predictivo a LO.

Para alcanzar mayor precisión es necesario incluir órdenes superiores. En el siguiente orden (NLO, $\mathcal{O}(p^4)$) aparecen 10 LECs adicionales (L_i con $i = 1, \dots, 10$). La inclusión de estos términos permite describir con mayor precisión los efectos de orden superior, aunque al precio de introducir parámetros adicionales que deben determinarse experimentalmente. Actualmente, todas ellas se conocen con buena precisión excepto L_4 , L_6 y L_7 , que presentan grandes incertidumbres [16]. A NNLO ($\mathcal{O}(p^6)$) surgen 90 LECs, lo que refleja la naturaleza sistemática pero compleja de la expansión quiral.

A pesar del incremento en el número de parámetros, ChPT ha demostrado ser una EFT altamente predictiva en el régimen donde sus LECs están bien determinados. Entre sus logros más relevantes se encuentran: la relación de Gell-Mann–Oakes–Renner para las masas de los piones, la determinación del radio electromagnético y las polarizabilidades

del pión, la descripción del factor de forma electromagnético, y predicciones para procesos semileptónicos como $K_{\ell 3}$, fundamentales para la extracción del elemento V_{us} de la matriz CKM [2, 15]. También sistematiza de forma consistente las correcciones isoespínicas y electromagnéticas en decaimientos hadrónicos ligeros.

El lagrangiano a LO de ChPT pertenece al sector de paridad intrínseca par. Sin embargo, a partir de $\mathcal{O}(p^4)$ es necesario incluir también el sector de paridad intrínseca impar, ya que procesos como $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ no pueden describirse sin el término anómalo de Wess–Zumino–Witten [17]. Este término reproduce la anomalía quiral de QCD y la constante que aparece en el lagrangiano de Wess–Zumino–Witten no es un parámetro libre; su valor está completamente fijado por la estructura de la anomalía quiral de QCD.

A pesar de que ChPT es muy exitosa y describe una gran variedad de procesos hadrónicos y semileptónicos —como el decaimiento del pión $\pi \rightarrow \mu\nu_\mu$, la dispersión pión–pión $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$, la dispersión de Compton $\gamma\pi \rightarrow \gamma\pi$, entre otros— gracias a que contiene términos de interacción entre los mesones pseudoescalares de Goldstone y fuentes externas (interacciones electromagnéticas y débiles), su rango de validez es limitado. En particular, ChPT no incluye de manera explícita partículas de resonancia, como el ρ , ω , el a_1 , entre otras. A medida que la energía se acerca a 1 GeV, estas resonancias comienzan a desempeñar un papel relevante y deben incorporarse como nuevos grados de libertad. Esto conduce a una extensión natural denominada *Teoría de Perturbación Quiral con Resonancias* (Resonance Chiral Theory, $R\chi T$) [18, 15], que amplía ChPT incluyendo mesones vectoriales, axiales, escalares y pseudoescalares de forma consistente con las simetrías quirales.

En el sector de paridad intrínseca **par** [18], formulado en el formalismo de campos tensoriales antisimétricos, el lagrangiano LO contiene seis constantes de acoplamiento: F_V (acoplamiento de la resonancia vectorial a la corriente vectorial), G_V (acoplamiento de la resonancia vectorial a dos campos pseudo-Goldstone) y F_A (acoplamiento axial). Además aparecen los parámetros c_d y c_m (asociados a resonancias escalares). Sus valores numéricos se determinan mediante condiciones de consistencia a altas energías, saturación por resonancias y ajustes fenomenológicos. Actualmente se conocen con una precisión moderada, del orden del 10–20%.

Por otro lado, en el sector de paridad intrínseca **impar** —formulado por primera vez en Ref. [19], también dentro del formalismo antisimétrico— el lagrangiano incluye operadores que describen interacciones de tipo vector–vector–pseudoescalar (VVP) y vector–fuente externa–pseudoescalar (VJP). En total, aparecen once LECs independientes: d_i con $i = 1, \dots, 4$ y c_i con $i = 1, \dots, 7$. Estas constantes aún no han sido completamente determinadas; sólo se cuenta con un conjunto de restricciones provenientes de la compatibilidad con QCD a altas energías.

A pesar de estas restricciones, algunos parámetros —en particular c_5 , c_7 y d_4 — continúan sin determinarse completamente, lo que hace necesario recurrir a análisis fenomenológico para establecer cotas razonables.

En el estudio de correcciones por ruptura de simetría de isoespín en el decaimiento $\tau^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0 \bar{\nu}_\tau$, la Ref. [20] obtiene una estimación $|d_4| < 0.15$. Estas correcciones son relevantes para la determinación del aporte hadrónico a la polarización del vacío en el cálculo del momento magnético anómalo del muón [21].

Asimismo, en la Ref. [22] se muestra que el decaimiento $\omega^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0 \gamma$ permite obtener información adicional sobre d_4 , bajo la suposición de que el vértice $\rho^0 \omega^0 \pi^0$ se encuentra en la capa de masa (on-shell). Allí se obtienen dos soluciones compatibles con el Branching Ratio (\mathcal{BR}) experimental:

$$d_4 = 0.82 \pm 0.05, \quad d_4 = -0.12 \pm 0.05,$$

sin embargo, los autores favorecen la solución negativa, ya que es consistente con la estimación $|d_4| < 0.15$ obtenida en la Ref. [20].

Considerando estas observaciones, se hace evidente la necesidad de un análisis más general que permita acotar o fijar alguno o eventualmente de todos los LECs del sector impar.

El objetivo del presente trabajo es extraer información sobre estos LECs mediante el estudio del decaimiento $\rho^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0 \gamma$ a través del \mathcal{BR} , considerando tanto vértices on-shell como off-shell (dentro y fuera de la capa de masa).

La presente tesis está organizada de la siguiente manera:

En el Capítulo 2 se presentan los fundamentos de la QCD y se discute el régimen de bajas energías, donde la teoría adquiere un carácter no perturbativo. Con el propósito de construir una EFT válida en este rango, se analizan las simetrías de la QCD en el límite quiral.

En el Capítulo 3 se desarrolla ChPT a partir de las simetrías de la QCD a bajas energías. Asimismo, se introduce el marco de la $R\chi T$, que constituye una extensión natural de ChPT mediante la incorporación explícita de resonancias vectoriales. En este capítulo se identifican los sectores de paridad intrínseca par e impar, junto con las constantes de acoplamiento (LECs) que emergen en cada formulación.

En el Capítulo 4 se describe el proceso de decaimiento $\rho^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0 \gamma$ y se calcula su \mathcal{BR} empleando el marco de $R\chi T$. Se muestra que el resultado depende de las constantes

de acoplamiento $c_{57} \equiv c_5 + c_7$ y d_4 . Parte de los resultados obtenidos en este trabajo fueron publicados en la revista *Particles*, véase la Ref. [23].

Finalmente, en el Capítulo 5 se presentan las principales conclusiones del trabajo.

Adicionalmente, se incluyen los apéndices A y B, en los cuales se recopilan las expresiones analíticas completas, así como material teórico complementario relevante para el desarrollo de esta tesis.

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 OBJETIVO GENERAL

- Determinar el espacio de valores posibles de un subconjunto de acoplamientos de baja energía (LECs) de la Teoría quiral con resonancias ($R\chi T$), a través del branching ratio (\mathcal{BR}) del decaimiento $\rho^0 \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma$.

1.1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Construir la amplitud del proceso $\rho \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma$ dentro del formalismo de la $R\chi T$.
- Identificar las constantes de acoplamiento (LECs) relevantes que contribuyen al proceso.
- Calcular el \mathcal{BR} .
- Reducir el número de parámetros libres de la observable mediante las condiciones de su comportamiento a altas energías.
- Explorar los escenarios que se generan a partir de las condiciones *on-shell* y *off-shell* sobre los vértices del Diagrama de Feynman del proceso.
- Comparar el espacio de parámetros del análisis realizado, con las propuestas en la literatura.

1.1.3 HIPÓTESIS

Se plantea que el proceso de decaimiento $\rho \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma$ puede ser descrito dentro del marco de la Teoría de Perturbaciones Quirales con Resonancias ($R\chi T$), lo que permite obtener una predicción para el \mathcal{BR} al imponer restricciones de comportamiento a altas

energías. En este contexto, dichas condiciones reducen el número de parámetros libres del modelo y hacen posible establecer resultados con poder predictivo.

En caso contrario, se plantea que el estudio de este proceso puede emplearse para imponer restricciones adicionales o establecer cotas sobre dichas constantes, contribuyendo así a su determinación fenomenológica.

CAPÍTULO 2

CROMODINÁMICA CUÁNTICA

La Cromodinámica Cuántica (Quantum Chromodynamics, QCD) es la teoría cuántica de campos que describe la interacción fuerte, una de las cuatro fuerzas fundamentales de la naturaleza, responsable de mantener unidos a protones y neutrones dentro del núcleo atómico. Su formulación se basa en el modelo de quarks, en el cual los grados de libertad están constituidos por fermiones de espín $1/2$, denominados quarks, que existen en seis tipos o sabores: up (u), down (d), strange (s), charm (c), bottom (b) y top (t).

Cada quark porta una carga de color, que puede tomar uno de los tres valores posibles: green (g), blue (b), red (r). Esta carga de color no se refiere a un color en el sentido visual, sino a una propiedad cuántica asociada a la simetría de gauge $SU(3)_{\text{color}}$.

Los mediadores de la interacción fuerte son los gluones, campos de gauge asociados al grupo $SU(3)$, que también portan carga de color. La no conmutatividad de $SU(3)$ permite la interacción directa entre gluones, a diferencia de lo que ocurre con los fotones en Electrodinámica Cuántica (Quantum Electrodynamics, QED).

Desde el descubrimiento del electrón en 1897, se han identificado una amplia variedad de partículas. Estas se clasifican en partículas elementales (véase la Fig. 1) y partículas compuestas, siendo estas últimas conformadas por partículas elementales denominadas hadrones [24].

Las partículas fundamentales se dividen en dos categorías:

1. Fermiones, constituyentes de la materia que observamos, clasificados en:
 - a) Quarks, ya mencionados al inicio de este capítulo, junto con sus correspondientes antipartículas.
 - b) Leptones, fermiones de espín $1/2$ que incluyen el electrón (e), el muón (μ), el tau (τ) y sus respectivos neutrinos (ν_e, ν_μ, ν_τ), así como sus antipartículas correspondientes.

Las antipartículas se denotan mediante una barra sobre el símbolo; por ejemplo, el antiquark d se escribe como \bar{d} , y así sucesivamente para cada antipartícula. Los antiquarks portan anticolor, que se suele representar visualmente como el color complementario en el modelo de luz RGB, es decir, cian (anti-rojo), magenta (anti-verde) y amarillo (anti-azul). Cabe subrayar que esta asociación visual constituye únicamente una convención gráfica y carece de significado físico literal.

QUARKS	masa= 2.16 ± 0.07 MeV carga= $+2/3$ espín= $1/2$ símbolo: u nombre: up	1.2730 ± 0.0046 GeV $+2/3$ $1/2$ c charm	172.56 ± 0.31 GeV $+2/3$ $1/2$ t top	0 0 1 γ fotón	125.20 ± 0.11 GeV 0 0 H bosón de Higgs
	4.70 ± 0.07 MeV $-1/3$ $1/2$ d down	93.5 ± 0.8 MeV $-1/3$ $1/2$ s strange	4.183 ± 0.007 GeV $-1/3$ $1/2$ b bottom	0 0 1 g gluón	BOSONES
	≈ 0.511 MeV -1 $1/2$ e electrón	≈ 105.66 MeV -1 $1/2$ μ muón	1776.93 ± 0.09 MeV -1 $1/2$ τ tau	80.3692 ± 0.0133 GeV ± 1 1 W bosón W	
< 0.8 eV 0 $1/2$ ν_e neutrino electrónico	< 0.19 MeV 0 $1/2$ ν_μ neutrino muónico	< 18.2 MeV 0 $1/2$ ν_τ neutrino tau	91.188 ± 0.002 GeV 0 1 Z bosón Z		
LEPTONES					

Figura 1: Representación esquemática de las partículas elementales del Modelo Estándar, clasificadas en quarks, leptones y bosones. Los valores experimentales se tomaron del Particle Data Group [1].

2. Bosones, responsables de mediar las interacciones fundamentales:

- a) Fotón (γ): mediador de la interacción electromagnética.
- b) Gluones (g): mediadores de la interacción fuerte.
- c) Bosones W y Z (W^+ , W^- y Z^0): mediadores de la interacción débil.
- d) Bosón de Higgs: encargado de conferir masa a otras partículas a través del campo de Higgs.

En lo que respecta a los hadrones, de acuerdo con el modelo de quarks, estos están constituidos por quarks confinados y unidos mediante gluones, clasificándose en:

1. Bariones: compuestos por tres quarks.

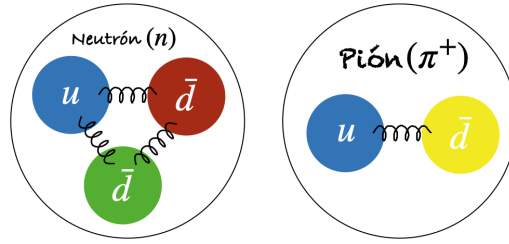


Figura 2: Hadrones según el modelo de quarks.

2. Mesones: compuestos por un quark y un antiquark (véase la Fig 2).

Por lo tanto, la densidad lagrangiana que describe a los quarks ψ^f , donde $f = u, d, s, c, b, t$ representa el sabor (cada sabor con $k = r, b, g$ posibles valores de color), está descrita por

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}_r^f(x)(i\not{\partial} - m_f)\psi_r^f(x) + \bar{\psi}_g^f(x)(i\not{\partial} - m_f)\psi_g^f(x) + \bar{\psi}_b^f(x)(i\not{\partial} - m_f)\psi_b^f(x), \quad (2.1)$$

de ahora en adelante, se entenderá que los índices repetidos en f implican una suma sobre los sabores y que x representa el 4-vector posición en el espacio-tiempo, es decir, $x \doteq (x^0, x^1, x^2, x^3)$. Por otro lado, resulta conveniente organizar los campos en vectores de tres componentes¹:

$$\Psi^f(x) \doteq \begin{pmatrix} \psi_r^f(x) \\ \psi_g^f(x) \\ \psi_b^f(x) \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

análogamente, se define

$$\bar{\Psi}^f(x) \doteq \left(\bar{\psi}_r^f(x), \bar{\psi}_g^f(x), \bar{\psi}_b^f(x) \right). \quad (2.3)$$

Con estas definiciones, la Ec. (2.1) se reduce a

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\Psi}^f(x)(i\not{\partial} - m_f)\Psi^f(x), \quad (2.4)$$

¹El símbolo \doteq indica que las expresiones no constituyen una igualdad estricta, sino una representación particular.

la cual resulta invariante bajo transformaciones globales del grupo $SU(3)$ actuando sobre los campos Ψ , es decir,

$$\Psi^f(x) \rightarrow \Psi^{f'}(x) = U(\alpha)\Psi^f(x), \quad (2.5)$$

$$\bar{\Psi}^f(x) \rightarrow \bar{\Psi}^{f'}(x) = \bar{\Psi}^f(x)U(\alpha)^\dagger. \quad (2.6)$$

El grupo $SU(3)$ se define como el conjunto de todas las matrices 3×3 que cumplen las siguientes condiciones:

1. Unitariedad: $U^\dagger U = \mathbb{I}$, donde U^\dagger denota la matriz conjugada transpuesta de U y \mathbb{I} es la matriz identidad.
2. Unimodularidad: $\det(U) = 1$, donde $\det(U)$ representa el determinante de la matriz U .

Además cualquier elemento $U \in SU(3)$ puede expresarse mediante el mapeo exponencial

$$U(\alpha) = \exp\left(i \sum_{c=1}^8 \frac{\alpha_c \lambda_c}{2}\right), \quad (2.7)$$

donde λ_a son las matrices de Gell-Mann, que constituyen una base del álgebra de Lie $\mathfrak{su}(3)$ asociada a $SU(3)$. Una representación común de estas matrices es la siguiente:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Las matrices de Gell-Mann son hermíticas y de traza nula, caracterizan la estructura del álgebra $\mathfrak{su}(3)$ y satisfacen las relaciones de conmutación

$$\left[\frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2}\right] = if_{abc} \frac{\lambda_c}{2}, \quad (a, b, c = 1, \dots, 8), \quad (2.9)$$

las cuales corresponden a una operación binaria, denominada corchete de Lie, mientras que las cantidades f_{abc} se denominan constantes de estructura. Para un tratamiento más riguroso y detallado, se remite al lector a las Refs. [25, 26, 27]. De ahora en adelante, se adoptará la convención de suma de Einstein también para índices que no corresponden a índices tensoriales del espacio-tiempo y serán denotados con las primeras letras del alfabeto latino a, b, c, d, \dots , teniendo en cuenta que la posición superior o inferior es indistinta; por lo tanto, no intentaremos subirlos o bajarlos con la métrica.

Las constantes de estructura f_{abc} pueden determinarse multiplicando ambos lados de la ecuación (2.9) por λ_c y, posteriormente, tomando la traza. De esta manera se obtiene

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left(\left[\frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2} \right] \lambda_c \right) &= \text{Tr} \left(i f_{abd} \frac{\lambda_d}{2} \lambda_c \right), \\ \frac{1}{4} \text{Tr} ([\lambda_a, \lambda_b] \lambda_c) &= i \frac{f_{abd}}{2} \text{Tr} (\lambda_d \lambda_c), \\ &= i \frac{f_{abd}}{2} 2\delta_{dc}, \\ &= i f_{abc}, \\ \Rightarrow f_{abc} &= \frac{1}{4i} \text{Tr} ([\lambda_a, \lambda_b] \lambda_c). \end{aligned} \quad (2.10)$$

A partir de la ecuación (2.10), es inmediato calcular explícitamente algunas de las constantes no nulas

$$f_{147} = f_{345} = f_{257} = f_{246} = -f_{156} = -f_{367} = \frac{1}{2}, \quad (2.11)$$

$$f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (2.12)$$

$$f_{123} = 1, \quad (2.13)$$

las restantes pueden obtenerse a partir de las ecuaciones (2.11)–(2.13), haciendo uso de la antisimetría total de f_{abc} .

La invarianza del lagrangiano (2.4) bajo las transformaciones globales $SU(3)$ (2.5)–(2.6), a través del teorema de Noether (véase el apéndice B), da lugar a las siguientes corrientes conservadas:

$$J_c^\mu(x) = \frac{1}{2} \bar{\Psi}^f(x) \gamma^\mu \lambda_c \Psi^f(x), \quad (2.14)$$

y las correspondientes cargas conservadas

$$Q_c = \frac{1}{2} \int d^3x \Psi^{f\dagger}(x) \lambda_c \Psi^f(x). \quad (2.15)$$

La QED nos ha enseñado que la interacción con el campo electromagnético puede ser obtenida al exigir que la simetría de gauge $U(1)$ sea local. Hoy en día es ampliamente aceptado que el principio de gauge es exitoso para la generación de interacciones entre campos de materia mediante el intercambio de bosones de gauge sin masa. En el caso de la QCD, esto se logra al promover la simetría global $SU(3)$ a una local, es decir reemplazando

$$U \rightarrow U(x) = \exp\left(ig_s \frac{\omega_c(x)\lambda_c}{2}\right), \quad (2.16)$$

donde g_s se identifica con la constante de acoplamiento fuerte. Sin embargo, bajo estas transformaciones locales, la lagrangiana (2.4) deja de ser invariante y se transforma como:

$$\mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{L}'_0 = \mathcal{L}_0 - \frac{1}{2}g_s \bar{\Psi}^f(x)\lambda_c \partial_\mu \omega_c(x) \Psi^f(x). \quad (2.17)$$

Para que la lagrangiana (2.4) permanezca invariante bajo transformaciones locales (2.16), es necesario reemplazar la derivada ordinaria por

$$\partial^\mu \rightarrow D^\mu = \partial^\mu + ig_s \mathcal{A}^\mu, \quad (2.18)$$

denominada derivada covariante, la cual transforma como

$$\begin{aligned} D^\mu \rightarrow (D^\mu \psi)' &= D'^\mu \psi', \\ &= (\partial^\mu + ig_s \mathcal{A}'^\mu) \psi', \\ &= \left[\partial^\mu + ig_s \left(U \mathcal{A}^\mu U^\dagger + \frac{i}{g_s} (\partial^\mu U) U^\dagger \right) \right] (U \psi), \\ &= (\partial^\mu U) \psi + U (\partial^\mu \psi) + U ig_s \mathcal{A}^\mu \psi - (\partial^\mu U) \psi, \\ &= U [\partial^\mu + ig_s \mathcal{A}^\mu] \psi, \\ \implies (D^\mu \psi)' &= U(x) (D^\mu \psi). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Nótese que se han introducido ocho potenciales de gauge A_c^μ , definidos por

$$\mathcal{A}^\mu \equiv \frac{\lambda_c}{2} A_c^\mu(x), \quad (2.20)$$

los cuales transforman de acuerdo a

$$\mathcal{A}_\mu \rightarrow \mathcal{A}'_\mu = U \mathcal{A}_\mu U^\dagger + \frac{i}{g_s} (\partial_\mu U) U^\dagger. \quad (2.21)$$

Usando la forma explícita del grupo $SU(3)$ dada por la ecuación (2.16), y considerando la aproximación infinitesimal en la cual se retienen únicamente términos lineales en el parámetro de transformación $g_s\omega(x)$, se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}'^\mu &= \left(\mathbb{I} + i\frac{g_s}{2}\omega_c(x)\lambda_c \right) A_a^\mu \frac{\lambda_a}{2} \left(\mathbb{I} - i\frac{g_s}{2}\omega_b(x)\lambda_b \right) + \frac{i}{g_s} \left[\partial^\mu \left(\mathbb{I} + i\frac{g_s}{2}\omega_c(x)\lambda_c \right) \right] \left(\mathbb{I} - i\frac{g_s}{2}\omega_c(x)\lambda_c \right), \\
&= A_a^\mu \frac{\lambda_a}{2} + \left(A_a^\mu \frac{\lambda_a}{2} \right) \left(-i\frac{g_s}{2}\omega_b(x)\lambda_b \right) + i\frac{g_s}{2}\omega_c(x)\lambda_c \left(A_a^\mu \frac{\lambda_a}{2} \right) + \frac{i}{g_s} \left(\partial^\mu \left\{ i\frac{g_s}{2}\omega_c(x)\lambda_c \right\} \right), \\
&= A_a^\mu \frac{\lambda_a}{2} - ig_s\omega_b(x)A_a^\mu \frac{\lambda_a}{2} \frac{\lambda_b}{2} + ig_s\omega_b(x)A_a^\mu \frac{\lambda_b}{2} \frac{\lambda_a}{2} - \frac{\lambda_c}{2} (\partial^\mu\omega_c(x)), \\
&= A_a^\mu \frac{\lambda_a}{2} - ig_s\omega_b(x)A_a^\mu \left[\frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2} \right] - (\partial^\mu\omega_c(x)) \frac{\lambda_a}{2}, \\
&= A_a^\mu \frac{\lambda_a}{2} - ig_s\omega_b(x)A_a^\mu if_{abc} \frac{\lambda_c}{2} - (\partial^\mu\omega_c(x)) \frac{\lambda_a}{2}, \\
A_c'^\mu \frac{\lambda_c}{2} &= [A_c^\mu - \partial^\mu\omega_c(x) + g_sf_{abc}\omega_b(x)A_a^\mu] \frac{\lambda_c}{2},
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\Rightarrow A_c'^\mu = A_c^\mu - \partial^\mu\omega_c(x) + g_sf_{abc}\omega_b(x)A_a^\mu. \quad (2.22)$$

En consecuencia, la densidad lagrangiana que resulta localmente invariante bajo el grupo $SU(3)$ puede escribirse como

$$\mathcal{L}(x) = \bar{\Psi}^f(x) [i\not{D} - m_f] \Psi^f(x) = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I, \quad (2.23)$$

donde \mathcal{L}_0 ha sido definida en la ecuación (2.4), mientras que \mathcal{L}_I representa la lagrangiana de interacción, dada por

$$\mathcal{L}_I = -\frac{1}{2}g_s\bar{\Psi}^f(x)\gamma_\mu\lambda_c\Psi^f(x)A_c^\mu(x). \quad (2.24)$$

Por otro lado, el campo gluónico de gauge local asociado a $SU(3)$ es de la forma

$$\mathcal{G}^{\mu\nu}(x) = D^\mu A^\nu - D^\nu A^\mu, \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned}
G_c^{\mu\nu} \frac{\lambda_c}{2} &= \left(\partial^\mu + ig_s A_b^\mu \frac{\lambda_b}{2} \right) A_c^\nu \frac{\lambda_c}{2} - \left(\partial^\nu + ig_s A_b^\nu \frac{\lambda_b}{2} \right) A_c^\mu \frac{\lambda_c}{2}, \\
&= \partial^\mu A_c^\nu \frac{\lambda_c}{2} - \partial^\nu A_c^\mu \frac{\lambda_c}{2} + ig_s A_b^\mu A_c^\nu \left[\frac{\lambda_b}{2}, \frac{\lambda_c}{2} \right], \\
&= \partial^\mu A_c^\nu \frac{\lambda_c}{2} - \partial^\nu A_c^\mu \frac{\lambda_c}{2} + ig_s A_b^\mu A_c^\nu \left(if_{bcd} \frac{\lambda_d}{2} \right),
\end{aligned}$$

$$G_a^{\mu\nu} \frac{\lambda_a}{2} = [\partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu + g_sf_{abc}A_b^\mu A_c^\nu] \frac{\lambda_a}{2}, \quad (2.26)$$

por lo tanto

$$\implies G_a^{\mu\nu} = \partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu + g_s f_{abc} A_b^\mu A_c^\nu. \quad (2.27)$$

Cabe mencionar que el tensor de campo $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ transforma de acuerdo con

$$\mathcal{G}^{\mu\nu} \rightarrow \mathcal{G}'^{\mu\nu} = U \mathcal{G}^{\mu\nu} U^{-1}, \quad (2.28)$$

de este modo, la densidad lagrangiana completa de QCD debe incluir también los términos cinéticos del campo de gluones

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \bar{\Psi}^f (i\not{D} - m_f) \Psi^f - \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathcal{G}_{\mu\nu} \mathcal{G}^{\mu\nu}). \quad (2.29)$$

Obsérvese que el término

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \text{Tr}(\mathcal{G}_{\mu\nu} \mathcal{G}^{\mu\nu}) &= -\frac{1}{2} \text{Tr} \left(G_a^{\mu\nu} \frac{\lambda_a}{2} G_{\mu\nu}^c \frac{\lambda_c}{2} \right), \\ &= -\frac{G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^c}{2^3} \text{Tr}(\lambda_a \lambda_c), \\ &= -\frac{G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^c}{2^3} 2\delta_{ac}, \\ \implies -\frac{1}{2} \text{Tr}(\mathcal{G}_{\mu\nu} \mathcal{G}^{\mu\nu}) &= -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^c G_c^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

El lagrangiano escrito en la forma (2.29) permite verificar de manera directa su invarianza local bajo el grupo $SU(3)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{QCD}} \rightarrow \mathcal{L}'_{\text{QCD}} &= \bar{\Psi}'^f (iD'_\mu - m_f) \Psi'^f - \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathcal{G}'_{\mu\nu} \mathcal{G}'^{\mu\nu}), \\ &= \bar{\Psi}^f U^\dagger (iD'_\mu - m_f) U \Psi^f - \frac{1}{2} \text{Tr}(U \mathcal{G}_{\mu\nu} U^{-1} U \mathcal{G}^{\mu\nu} U^{-1}), \\ \mathcal{L}'_{\text{QCD}} &= \bar{\Psi}^f (iD_\mu - m_f) \Psi^f - \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathcal{G}_{\mu\nu} \mathcal{G}^{\mu\nu}) = \mathcal{L}_{\text{QCD}}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

donde se ha utilizado la propiedad cíclica de la traza $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.

Retomemos la ecuación (2.24), la cual representa un término de interacción que da lugar a un vértice quark–gluón de tres puntos, como se ilustra en la Fig. 3(a).

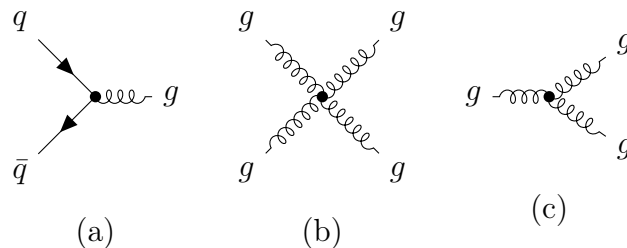


Figura 3: Vértices de interacción característicos en QCD.

Por otro lado, el término (2.30) da lugar a interacciones gluón-gluón tanto de tres como de cuatro puntos, las cuales se muestran en la Fig. 3(b,c). Este comportamiento refleja el hecho de que el grupo $SU(3)$ es no abeliano².

En física de altas energías, los experimentos de colisión e^+e^- han sido fundamentales para el estudio de la estructura de la materia y, en particular, para la confirmación de los principios de la QCD. La sección eficaz (σ) del proceso $e^+ + e^- \rightarrow q + \bar{q} + g$ es, de acuerdo con la QCD perturbativa, proporcional a la constante de acoplamiento fuerte $\alpha_s \equiv g_s^2/(4\pi)$. Dado que los quarks no se han observado como partículas libres en la naturaleza debido al confinamiento, en los detectores se manifiestan en forma de tres jets (chorros) de hadrones, los cuales se interpretan como rastros del quark, antiquark y el gluón emitidos (Fig. 4). La observación de estos jets constituye evidencia experimental directa de la existencia de los quarks y gluones.

Fenomenológicamente, en el rango de energías de centro de masa comprendido entre 15 GeV y 40 GeV, los análisis experimentales permitieron obtener un valor de $\alpha_s \approx 0.14$. Este resultado es consistente con la libertad asintótica, que establece que, a altas energías (o, equivalentemente, a cortas distancias), la interacción fuerte se debilita progresivamente. En este régimen, los quarks y gluones pueden tratarse de manera aproximada como partículas libres, lo que permite la aplicación confiable de métodos perturbativos.

Por otro lado, el esquema de renormalización *on-shell* comúnmente utilizado en QED no es adecuado para QCD, ya que los quarks están confinados y no se les puede estudiar como partículas libres. En su lugar, se emplean esquemas alternativos; uno de ellos es el esquema de sustracción mínima modificada ($\overline{\text{MS}}$) [28], que introduce una escala de masa arbitraria. La libertad de variar esta escala sin alterar los resultados físicos conduce a la ecuación del grupo de renormalización para la constante de acoplamiento fuerte α_s , que

²Se denomina grupo abeliano a aquel en el que todos sus elementos conmutan bajo la operación del grupo.

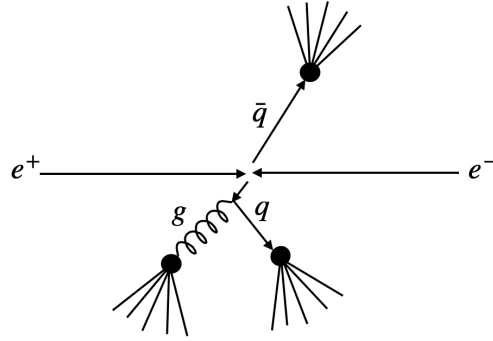


Figura 4: Representación de la formación de jets (chorros) de hadrones en un proceso de aniquilación electrón-positrón en el sistema de centro de masa.

a un lazo (loop) se expresa como

$$\mu \frac{\partial \alpha_s}{\partial \mu} = -\frac{\beta_0}{2\pi} \alpha_s^2, \quad (2.32)$$

cuya solución es de la forma

$$\alpha_s(\mu) = \frac{4\pi}{\beta_0 \ln(\mu^2/\Lambda^2)}, \quad (2.33)$$

donde Λ es un parámetro de escala que debe determinarse fenomenológicamente a partir de un valor de referencia de $\alpha_s(\mu_0)$. Así, se obtiene la forma equivalente

$$\alpha_s(\mu) = \frac{\alpha_s(\mu_0)}{1 + \frac{\beta_0}{4\pi} \alpha_s(\mu_0) \ln\left(\frac{\mu^2}{\mu_0^2}\right)}, \quad (2.34)$$

con

$$\beta_0 = 11 - \frac{2}{3} n_f, \quad (2.35)$$

donde n_f representa el número de sabores activos a la escala μ .

Convencionalmente, la escala de referencia se elige en correspondencia con la masa del bosón Z^0 ($\mu_0 = m_Z = 91.1880 \pm 0.0020$ GeV). Según los valores reportados por el Particle Data Group [1], el acoplamiento fuerte en dicha escala es

$$\alpha_s(M_Z) = 0.1184 \pm 0.0007, \quad (2.36)$$

lo que permite explorar el comportamiento de la teoría en el régimen de altas energías y, en particular, deducir su propiedad característica de libertad asintótica, tal como se ilustra en la Fig. 5.

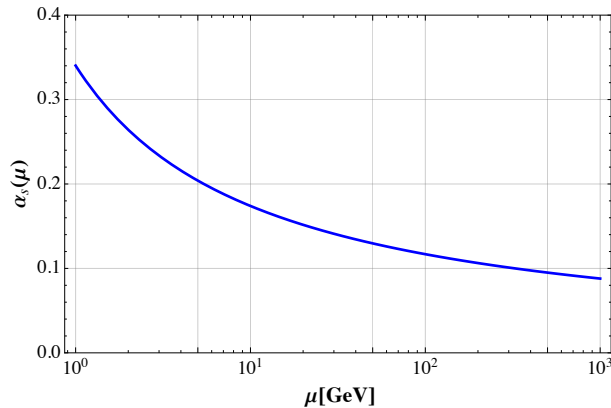


Figura 5: Comportamiento de la constante de acoplamiento fuerte α_s predicho por la ecuación del grupo de renormalización (2.34), con $n_f = 5$ sabores activos y utilizando como condición de referencia el valor central de la ecuación (2.36).

La Fig. 5 muestra también que a bajas energías la constante de acoplamiento fuerte α_s adquiere valores considerablemente grandes. Por ejemplo, $\alpha_s(1 \text{ GeV}) \approx 0.34$, lo que indica que el tratamiento perturbativo comienza a perder validez. A energías aún menores, como 200 MeV, el valor incluso supera la unidad, lo cual refleja la divergencia de la serie perturbativa, y en consecuencia la necesidad de recurrir a enfoques no perturbativos para describir la dinámica en dicho régimen.

En esta dirección, se pueden distinguir dos enfoques principales. El primero corresponde a Lattice QCD [29], el cual permite abordar de manera no perturbativa la dinámica cuántica mediante simulaciones numéricas en un espacio-tiempo discretizado. El segundo corresponde a las teorías efectivas, que, de acuerdo con el teorema de Weinberg [11], constituyen marcos teóricos independientes construidos a partir de los principios y simetrías de la teoría subyacente, válidos únicamente en una región determinada de energías. Cabe destacar que, en este último enfoque, los grados de libertad relevantes no necesariamente coinciden con los de la teoría fundamental.

2.1 QCD A BAJAS ENERGÍAS Y LA SIMETRÍA QUIRAL

En la sección anterior se mostró que la QCD no es perturbativa en el régimen de bajas energías. En esta sección se analizará la simetría de QCD en dicho régimen, con el propósito de construir una EFT aplicable a bajas energías, conocida como ChPT [15, 2].

El espectro de hadrones de bajas energías indica que los estados observables están constituidos predominantemente por los quarks ligeros u , d y s , como se muestra en la Tabla. 1. Además es importante señalar que las masas de estos quarks son significativamente menores en comparación con las de los quarks pesados c , b y t , como se presenta a

Tipo	Partícula (\approx Masa, MeV)	$I^G(J^{PC}) / I(J^P)$	Constituyentes
Mesones pseudoscalares			
	π^+, π^-, π^0 (140 MeV)	$1^-(0^{-+})$	$u\bar{d}, d\bar{u}, \frac{u\bar{u} - d\bar{d}}{\sqrt{2}}$
	K^+, K^-, K^0, \bar{K}^0 (494 MeV)	$\frac{1}{2}(0^-)$	$u\bar{s}, s\bar{u}, d\bar{s}, s\bar{d}$
	$\eta(547)$	$0^+(0^{-+})$	mezcla de $u\bar{u}, d\bar{d}, s\bar{s}$
	$\eta'(958)$	$0^+(0^{-+})$	mezcla de $u\bar{u}, d\bar{d}, s\bar{s}$
Mesones vectoriales			
	ρ^+, ρ^-, ρ^0 (770 MeV)	$1^+(1^{--})$	$u\bar{d}, d\bar{u}, \frac{u\bar{u} - d\bar{d}}{\sqrt{2}}$
	$\omega(782)$	$0^-(1^{--})$	$\frac{u\bar{u} + d\bar{d}}{\sqrt{2}}$
	$\phi(1020)$	$0^-(1^{--})$	$s\bar{s}$
	$K^{*+}, K^{*-}, K^{*0}, \bar{K}^{*0}$ (892 MeV)	$\frac{1}{2}(1^-)$	$u\bar{s}, s\bar{u}, d\bar{s}, s\bar{d}$
Bariones			
	Nucleón (p,n) (1000)	$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}^+)$	uud, udd
	$\Lambda(1116)$	$0(\frac{1}{2}^+)$	uds
	$\Sigma^+, \Sigma^-, \Sigma^0$ (1193 MeV)	$1(\frac{1}{2}^+)$	uus, dds, uds
	Ξ^-, Ξ^0 (1318 MeV)	$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}^+)$	dss, uss

Tabla 1: Hadrones ligeros: mesones pseudoscalares, mesones vectoriales y bariones, con sus respectivos números cuánticos, donde se indican como $I^G(J^{PC})$, siendo I el isospín, G la paridad G , J el momento angular total, P la paridad y C la conjugación de carga.

continuación:

$$\left(\begin{array}{l} m_u = (2.16 \pm 0.07) \text{ MeV} \\ m_d = (4.7 \pm 0.07) \text{ MeV} \\ m_s = 93.5 \pm 0.8 \text{ MeV} \end{array} \right) \ll 1 \text{ GeV} \ll \left(\begin{array}{l} m_c = 1.2730 \pm 0.0046 \text{ GeV} \\ m_b = 4.183 \pm 0.007 \text{ GeV} \\ m_t = (172.56 \pm 0.31) \text{ GeV} \end{array} \right). \quad (2.37)$$

Esta marcada diferencia sugiere, como primera aproximación, considerar el límite en el que las masas de los quarks ligeros son nulas ($m_u, m_d, m_s \rightarrow 0$). Este límite se conoce como el *límite quiral* [2], y en tal caso la ecuación (2.29) adopta la forma:

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} \rightarrow \mathcal{L}_{\text{QCD}}^0 = \bar{\Psi}^f i \not{D} \Psi^f - \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathcal{G}_{\mu\nu} \mathcal{G}^{\mu\nu}); \quad f = u, d, s. \quad (2.38)$$

Con el objetivo de exhibir la simetría global de la lagrangiana $\mathcal{L}_{\text{QCD}}^0$ en el límite quiral, se introducen los operadores de proyección de quiralidad, definidos como \mathbb{P}_L para la quiralidad zurda (*left-handed*) y \mathbb{P}_R para la quiralidad diestra (*right-handed*)

$$\mathbb{P}_R = \frac{1}{2} (\mathbb{I} + \gamma_5) = \mathbb{P}_R^\dagger, \quad (2.39)$$

$$\mathbb{P}_L = \frac{1}{2} (\mathbb{I} - \gamma_5) = \mathbb{P}_L^\dagger, \quad (2.40)$$

donde \mathbb{I} denota el operador identidad y γ^5 se define mediante

$$\gamma_5 = \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma_5^\dagger, \quad (2.41)$$

cumpliendo además las relaciones fundamentales

$$\{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0, \quad (2.42)$$

$$\gamma_5^2 = \mathbb{I}. \quad (2.43)$$

De estas definiciones se deducen las siguientes propiedades de los operadores de proyección:

$$\mathbb{P}_L + \mathbb{P}_R = \mathbb{I} \quad (\text{completitud}), \quad (2.44)$$

$$\mathbb{P}_L^2 = \mathbb{P}_L, \quad \mathbb{P}_R^2 = \mathbb{P}_R \quad (\text{idempotencia}), \quad (2.45)$$

$$\mathbb{P}_L\mathbb{P}_R = \mathbb{P}_R\mathbb{P}_L = 0 \quad (\text{ortogonalidad}). \quad (2.46)$$

Los operadores (2.39) y (2.40) proyectan los campos de Dirac en sus componentes de quiralidad izquierda y derecha, respectivamente. De manera explícita

$$\Psi_L = \mathbb{P}_L\Psi, \quad (2.47)$$

$$\Psi_R = \mathbb{P}_R\Psi, \quad (2.48)$$

$$\bar{\Psi}_R = \Psi_R^\dagger\gamma^0 = (\Psi^\dagger\mathbb{P}_R^\dagger)\gamma^0 = \Psi^\dagger\left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)\gamma^0 = \Psi^\dagger\gamma^0\left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right) = \bar{\Psi}\mathbb{P}_L, \quad (2.49)$$

$$\bar{\Psi}_L = \bar{\Psi}\mathbb{P}_R. \quad (2.50)$$

Por lo tanto la Ec. (2.38) puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{QCD}}^0 &= \bar{\Psi}^f \mathbb{I} i\not{D} \mathbb{I} \Psi^f - \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathcal{G}_{\mu\nu}\mathcal{G}^{\mu\nu}), \\ &= \bar{\Psi}^f (\mathbb{P}_R + \mathbb{P}_L) i\not{D} (\mathbb{P}_R + \mathbb{P}_L) \Psi^f - \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathcal{G}_{\mu\nu}\mathcal{G}^{\mu\nu}), \\ \mathcal{L}_{\text{QCD}}^0 &= \bar{\Psi}_L^f i\not{D} \Psi_L^f + \bar{\Psi}_R^f i\not{D} \Psi_R^f - \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathcal{G}_{\mu\nu}\mathcal{G}^{\mu\nu}); \quad f = u, d, s. \end{aligned} \quad (2.51)$$

además definiendo

$$q_L = \begin{pmatrix} \psi_L^u \\ \psi_L^d \\ \psi_L^s \end{pmatrix}, \quad q_R = \begin{pmatrix} \psi_R^u \\ \psi_R^d \\ \psi_R^s \end{pmatrix}, \quad (2.52)$$

obtenemos

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}}^0 = \bar{q}_L i \not{D} q_L + \bar{q}_R i \not{D} q_R - \frac{1}{2} \text{Tr} (\mathcal{G}_{\mu\nu} \mathcal{G}^{\mu\nu}). \quad (2.53)$$

Se observa que $\mathcal{L}_{\text{QCD}}^0$ es invariante bajo transformaciones

$$q_L \mapsto U_L q_L = \exp \left(-i \sum_{a=1}^8 \Theta_L^a \frac{\lambda_a}{2} \right) e^{-i\Theta_L} q_L, \quad (2.54)$$

$$q_R \mapsto U_R q_R = \exp \left(-i \sum_{a=1}^8 \Theta_R^a \frac{\lambda_a}{2} \right) e^{-i\Theta_R} q_R. \quad (2.55)$$

Es decir, la simetría a nivel clásico de $\mathcal{L}_{\text{QCD}}^0$ es

$$SU(3)_L \times U(1)_L \times SU(3)_R \times U(1)_R. \quad (2.56)$$

A partir del teorema de Noether expuesto en el Apéndice B.1, se obtienen las siguientes dieciocho corrientes conservadas:

$$L_c^\mu = \bar{q}_L \gamma^\mu \frac{\lambda_c}{2} q_L, \quad (2.57)$$

$$L^\mu = \bar{q}_L \gamma^\mu q_L, \quad (2.58)$$

$$R_c^\mu = \bar{q}_R \gamma^\mu \frac{\lambda_c}{2} q_R, \quad (2.59)$$

$$R^\mu = \bar{q}_R \gamma^\mu q_R. \quad (2.60)$$

En su lugar, podemos usar las combinaciones

$$\begin{aligned} V_c^\mu &= R_c^\mu + L_c^\mu, \\ &= \bar{q}_R \gamma^\mu \frac{\lambda_c}{2} q_R + \bar{q}_L \gamma^\mu \frac{\lambda_c}{2} q_L, \\ &= \bar{q} \mathbb{P}_L \gamma^\mu \frac{\lambda_c}{2} \mathbb{P}_R q + \bar{q} \mathbb{P}_R \gamma^\mu \frac{\lambda_c}{2} \mathbb{P}_L q, \\ &= \bar{q} (\gamma^\mu \mathbb{P}_R \mathbb{P}_R + \gamma^\mu \mathbb{P}_L \mathbb{P}_L) \frac{\lambda_c}{2} q, \\ &= \bar{q} \gamma^\mu (\mathbb{P}_R + \mathbb{P}_L) \frac{\lambda_c}{2} q, \\ V_c^\mu &= \bar{q} \gamma^\mu \frac{\lambda_c}{2} q. \end{aligned} \quad (2.61)$$

De manera análoga, pueden definirse las combinaciones vectoriales y axiales de las corrientes quirales, dadas por

$$V^\mu = R^\mu + L^\mu = \bar{q}\gamma^\mu q, \quad (2.62)$$

$$A_c^\mu = R_c^\mu - L_c^\mu = \bar{q}\gamma^\mu\gamma_5\frac{\lambda_c}{2}q, \quad (2.63)$$

$$A^\mu = R^\mu - L^\mu = \bar{q}\gamma^\mu\gamma_5q, \quad (2.64)$$

las cuales transforman bajo paridad como sigue

$$P : V_c^\mu(t, \vec{x}) \mapsto P^\mu{}_\nu V_c^\nu(t, -\vec{x}), \quad \text{corriente vectorial}, \quad (2.65)$$

$$P : A_c^\mu(t, \vec{x}) \mapsto -P^\mu{}_\nu A_c^\nu(t, -\vec{x}), \quad \text{corriente axial-vectorial}, \quad (2.66)$$

$$P : V^\mu(t, \vec{x}) \mapsto P^\mu{}_\nu V^\nu(t, -\vec{x}), \quad \text{corriente vectorial singlete}, \quad (2.67)$$

$$P : A^\mu(t, \vec{x}) \mapsto -P^\mu{}_\nu A^\nu(t, -\vec{x}), \quad \text{corriente axial-vectorial singlete}, \quad (2.68)$$

donde $P^\mu{}_\nu = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ es la matriz que implementa la transformación de paridad.

Es importante señalar que, a nivel cuántico, la simetría axial singlete clásica deja de conservarse. Esta ruptura recibe el nombre de anomalía cuántica [30].

A partir de estas corrientes, se definen los operadores de carga:

$$Q_L^c(t) = \int d^3x q_L^\dagger(t, \vec{x}) \frac{\lambda^c}{2} q_L(t, \vec{x}), \quad (2.69)$$

$$Q_R^c(t) = \int d^3x q_R^\dagger(t, \vec{x}) \frac{\lambda^c}{2} q_R(t, \vec{x}), \quad (2.70)$$

$$Q_V(t) = \int d^3x q^\dagger(t, \vec{x}) q(t, \vec{x}). \quad (2.71)$$

En el formalismo cuántico, la conservación de una corriente es equivalente a que el operador de carga asociado conmute con el Hamiltoniano del sistema. En particular

$$[Q_{La}, H_{\text{QCD}}^0] = [Q_{Ra}, H_{\text{QCD}}^0] = [Q_V, H_{\text{QCD}}^0] = 0, \quad (2.72)$$

donde H_{QCD}^0 puede ser obtenido a partir de la densidad lagrangiana $\mathcal{L}_{\text{QCD}}^0$ mediante la transformación de Legendre.

Estos operadores de carga satisfacen las siguientes relaciones de conmutación:

$$[Q_{La}, Q_{Lb}] = \int d^3x d^3y \left[q^\dagger(t, \vec{x}) \mathbb{P}_L \frac{\lambda^a}{2} q(t, \vec{x}), q^\dagger(t, \vec{y}) \mathbb{P}_L \frac{\lambda^b}{2} q(t, \vec{y}) \right],$$

$$\begin{aligned}
&= \int d^3x d^3y \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) q^\dagger(t, \vec{x}) \mathbb{P}_L \mathbb{P}_L \frac{\lambda^a}{2} \frac{\lambda^b}{2} q(t, \vec{y}) \\
&\quad - \int d^3x d^3y \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) q^\dagger(t, \vec{x}) \mathbb{P}_L \frac{\lambda^b}{2} \frac{\lambda^a}{2} q(t, \vec{x}), \\
&= if_{abc} \int d^3x q^\dagger(t, \vec{x}) \mathbb{P}_L \frac{\lambda^c}{2} q(t, \vec{x}), \\
[Q_{La}, Q_{Lb}] &= if_{abc} Q_{Lc}. \tag{2.73}
\end{aligned}$$

Análogamente,

$$[Q_{Ra}, Q_{Rb}] = if_{abc} Q_{Rc}, \tag{2.74}$$

$$[Q_{La}, Q_{Rb}] = [Q_{La}, Q_V] = [Q_{Ra}, Q_V] = 0. \tag{2.75}$$

En la obtención de estas expresiones se han empleado las relaciones de anticonmutación canónicas de los campos fermiónicos:

$$\{q(t, \vec{x}), q^\dagger(t, \vec{y})\} = \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad \{q, q\} = \{q^\dagger, q^\dagger\} = 0, \tag{2.76}$$

así como también la identidad algebraica siguiente

$$[ab, cd] = a\{b, c\}d - ac\{b, d\} + \{a, c\}db - c\{a, d\}b. \tag{2.77}$$

Las ecuaciones (2.73)–(2.75) satisfacen las relaciones de conmutación correspondientes al álgebra de Lie $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$.

No obstante, la presencia de términos de masa para los quarks ligeros u , d y s rompe explícitamente la simetría quiral. Para analizar dicha ruptura, se introduce la matriz de masa \mathbb{M} , que en el caso general puede escribirse como:

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 \\ 0 & 0 & m_s \end{pmatrix}. \tag{2.78}$$

En consecuencia, el término de masa que rompe explícitamente la simetría corresponde a

$$\mathcal{L}_{\mathbb{M}} = -\bar{q} \mathbb{M} q, \tag{2.79}$$

$$\mathcal{L}_{\mathbb{M}} = -(\bar{q}_R \mathbb{M} q_L + \bar{q}_L \mathbb{M} q_R). \tag{2.80}$$

A partir de la variación de este término con respecto a los parámetros de transformación quirál, se obtienen expresiones para las divergencias de las corrientes de Noether asociadas (véase el apéndice B.1)

$$\partial_\mu L_a^\mu = \frac{\partial(\delta\mathcal{L}_M)}{\partial\epsilon_{La}} = -i \left(\bar{q}_L \frac{\lambda_a}{2} \mathbb{M} q_R - \bar{q}_R \mathbb{M} \frac{\lambda_a}{2} q_L \right), \quad (2.81)$$

$$\partial_\mu R_a^\mu = -i \left(\bar{q}_R \frac{\lambda_a}{2} \mathbb{M} q_L - \bar{q}_L \mathbb{M} \frac{\lambda_a}{2} q_R \right), \quad (2.82)$$

$$\partial_\mu L^\mu = -i (\bar{q}_L \mathbb{M} q_R - \bar{q}_R \mathbb{M} q_L), \quad (2.83)$$

$$\partial_\mu R^\mu = -i (\bar{q}_R \mathbb{M} q_L - \bar{q}_L \mathbb{M} q_R). \quad (2.84)$$

O bien, en términos de las corrientes vectorial y axial

$$\partial_\mu V_a^\mu = i\bar{q} \left[\mathbb{M}, \frac{\lambda_a}{2} \right] q, \quad (2.85)$$

$$\partial_\mu A_a^\mu = i\bar{q}\gamma_5 \left\{ \frac{\lambda_a}{2}, \mathbb{M} \right\} q, \quad (2.86)$$

$$\partial_\mu V^\mu = 0, \quad (2.87)$$

$$\partial_\mu A^\mu = 2i\bar{q}\gamma_5 \mathbb{M} q + \frac{3g_s^2}{32\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} G_a^{\mu\nu} G_a^{\rho\sigma}. \quad (2.88)$$

En esta última expresión, el segundo término corresponde a la contribución de la anomalía axial. Además, de las ecuaciones (2.85)–(2.88) se desprenden varias conclusiones importantes. **En primer lugar**, la corriente vectorial singlete permanece siempre conservada independientemente de los valores de las masas de los quarks. **En segundo lugar**, si las masas de los tres quarks ligeros son idénticas ($m_u = m_d = m_s$), el conmutador $[\mathbb{M}, \frac{\lambda_a}{2}]$ se anula, lo que implica que la simetría vectorial se conserva. En cambio, si $m_u = m_d \neq m_s$, la simetría de sabor $SU(3)$ se reduce a $SU(2)$, correspondiente a la simetría de isoespín.

QCD puede acoplarse a campos externos mediante la incorporación de campos vectoriales y axiales en el lagrangiano. En particular, se consideran las ocho corrientes vectoriales asociadas al octete de $SU(3)$, una corriente vectorial singlete correspondiente al grupo $U(1)_V$, así como las ocho corrientes axial-vectoriales. Adicionalmente, es posible incluir campos escalares y pseudoescalares externos. Por lo tanto el lagrangiano \mathcal{L} total se puede escribir como

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{QCD}}^0 + \mathcal{L}_{\text{ext}}, \quad (2.89)$$

donde \mathcal{L}_{ext} representa el término que describe el acoplamiento de QCD con los campos externos, cuya forma explícita es

$$\mathcal{L}_{\text{ext}} = v_c^\mu \left(\bar{q} \gamma_\mu \frac{\lambda_c}{2} q \right) + \frac{v_{(s)}^\mu}{3} (\bar{q} \gamma_\mu q) + a_c^\mu \left(\bar{q} \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\lambda_c}{2} q \right) - s_A (\bar{q} \lambda_A q) + p_A i (\bar{q} \gamma_5 \lambda_A q), \quad (2.90)$$

con $c = 1, \dots, 8$ y $A = 0, \dots, 8$.

La expresión anterior puede escribirse de forma más compacta como

$$\mathcal{L}_{\text{ext}} = \bar{q} \gamma_\mu \left(v^\mu + \frac{1}{3} v_{(s)}^\mu + \gamma_5 a^\mu \right) q - \bar{q} (s - i \gamma_5 p) q, \quad (2.91)$$

donde se han definido 34 funciones reales mediante

$$v^\mu = v_c^\mu \frac{\lambda_c}{2}; \quad c = 1, \dots, 8, \quad (2.92)$$

$$a^\mu = a_c^\mu \frac{\lambda_c}{2}, \quad (2.93)$$

$$s = s_A \lambda_A; \quad A = 0, \dots, 8, \quad (2.94)$$

$$p = p_A \lambda_A, \quad (2.95)$$

las cuales se denotan colectivamente como $[v, a, s, p]$. La versión lagrangiana de QCD con tres sabores se recupera haciendo $v^\mu = v_{(s)}^\mu = a^\mu = p = 0$ y $s = \text{diag}(m_u, m_d, m_s)$ en la ecuación (2.89). Obsérvese que todas las cantidades definidas en las ecuaciones (2.92)–(2.95) son matrices en el espacio de sabores. Además, hemos introducido una novena matriz de 3×3 (λ_0), definida como

$$\lambda_0 \equiv \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbb{I}_{3 \times 3}, \quad (2.96)$$

la cual completa la base de generadores del álgebra $\mathfrak{u}(3)$ del grupo $U(3)$.

Empleando el formalismo de Lehmann–Symanzik–Zimmermann (LSZ) junto con el funcional generador, es posible construir funciones de Green del mundo real a partir del acoplamiento con fuentes externas. Por ejemplo, la función de Green de tres puntos asociada al *factor de forma electromagnético del pión* se puede escribir como

$$\left\langle 0 \left| T [P_a(x) J^\mu(y) P_b(z)] \right| 0 \right\rangle = (-i)^3 \frac{\delta}{\delta p_a(x)} \frac{\delta}{\delta v_\mu(y)} \frac{\delta}{\delta p_b(z)} \exp(iZ[v, a, s, p]) \Big|_{v=a=p=0, s=M}, \quad (2.97)$$

donde $\exp(iZ[v, a, s, p])$ denota el funcional generador.

En el siguiente capítulo discutiremos cómo la construcción de una EFT se fundamenta en la incorporación sistemática de las simetrías relevantes de la teoría subyacente, restringidas a un régimen específico de energías. En este sentido, las simetrías que debe respetar una EFT de la QCD a bajas energías se reflejan en que su lagrangiano cumpla los siguientes criterios:

1. Escalar de Lorentz y hermítico;
2. Presentar invariancia frente a las simetrías discretas P , C y T ;
3. Mantener invariancia local bajo el grupo $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$.

Por lo tanto, es necesario conocer la transformación de los campos de quarks y de los campos externos bajo paridad:

$$q_f(t, \vec{x}) \xrightarrow{P} \gamma^0 q_f(t, -\vec{x}), \quad \bar{q}_f(t, \vec{x}) \xrightarrow{P} \bar{q}_f(t, -\vec{x}) \gamma^0, \quad (2.98)$$

$$v_\mu(t, \vec{x}) \xrightarrow{P} P_\mu^\nu v_\nu(t, -\vec{x}), \quad v_\mu^{(s)}(t, \vec{x}) \xrightarrow{P} P_\mu^\nu v_\nu^{(s)}(t, -\vec{x}), \quad (2.99)$$

$$a_\mu(t, \vec{x}) \xrightarrow{P} -P_\mu^\nu a_\nu(t, -\vec{x}), \quad (2.100)$$

$$s(t, \vec{x}) \xrightarrow{P} s(t, -\vec{x}), \quad p(t, \vec{x}) \xrightarrow{P} -p(t, -\vec{x}), \quad (2.101)$$

donde $P_\mu^\nu \doteq \text{diag}(1, -1, -1, -1)$.

Así como también la transformación bajo conjugación de carga C :

$$q_{\alpha,f} \xrightarrow{C} C_{\alpha\beta} \bar{q}_{\beta,f}, \quad \bar{q}_{\alpha,f} \xrightarrow{C} -q_{\beta,f} C_{\beta\alpha}^{-1}, \quad (2.102)$$

$$v_\mu \xrightarrow{C} -v_\mu^T, \quad v_\mu^{(s)} \xrightarrow{C} -\left(v_\mu^{(s)}\right)^T, \quad (2.103)$$

$$a_\mu \xrightarrow{C} a_\mu^T, \quad (2.104)$$

$$s \xrightarrow{C} s^T, \quad p \xrightarrow{C} p^T. \quad (2.105)$$

donde $C_{\alpha\beta}$ es la matriz de conjugación de carga, definida por

$$C = i\gamma^2\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.106)$$

En estas expresiones, la transpuesta actúa en el espacio de sabores, es decir, sobre la estructura matricial asociada al grupo de simetría $SU(3)$. Además, debido al teorema CPT, la simetría de inversión temporal (T) queda automáticamente garantizada una vez que se imponen las invariancias bajo conjugación de carga (C) y paridad (P).

Definimos ahora

$$l_\mu = v_\mu - a_\mu, \quad r_\mu = v_\mu + a_\mu, \quad (2.107)$$

con lo cual el lagrangiano extendido con fuentes externas (2.89) puede escribirse como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{QCD}}^0 + \bar{q}_L \gamma^\mu \left(l_\mu + \frac{1}{3} v_\mu^{(s)} \right) q_L + \bar{q}_R \gamma^\mu \left(r_\mu + \frac{1}{3} v_\mu^{(s)} \right) q_R \\ - \bar{q}_R (s + ip) q_L - \bar{q}_L (s - ip) q_R. \end{aligned} \quad (2.108)$$

Este lagrangiano es invariante bajo transformaciones locales del grupo $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$, siempre que las fuentes externas transformen de acuerdo a

$$r_\mu \rightarrow V_R r_\mu V_R^\dagger + i V_R \partial_\mu V_R^\dagger, \quad l_\mu \rightarrow V_L l_\mu V_L^\dagger + i V_L \partial_\mu V_L^\dagger, \quad (2.109)$$

$$v_\mu^{(s)} \rightarrow v_\mu^{(s)} - \partial_\mu \Theta, \quad (2.110)$$

mientras que los campos escalares y pseudoescalares deben transformarse como

$$s + ip \rightarrow V_R (s + ip) V_L^\dagger, \quad (2.111)$$

$$s - ip \rightarrow V_L (s - ip) V_R^\dagger, \quad (2.112)$$

donde, las matrices

$$V_L(x) \equiv L(x) \in SU(3)_L(x), \quad (2.113)$$

$$V_R(x) \equiv R(x) \in SU(3)_R(x), \quad (2.114)$$

representan transformaciones locales, es decir, matrices que dependen explícitamente del espacio-tiempo. En cambio,

$$L \in SU(3)_L, \quad R \in SU(3)_R, \quad (2.115)$$

denotan transformaciones globales, cuyos parámetros son constantes.

Nótese que los campos l_μ y r_μ permiten incorporar interacciones con campos externos. Por ejemplo, el cuatro-potencial electromagnético externo A_μ se introduce mediante

$$r_\mu = l_\mu = -e A_\mu Q, \quad (2.116)$$

donde

$$Q = \text{diag}\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right), \quad (2.117)$$

es la matriz de cargas de los quarks. Asimismo, es posible incorporar interacciones débiles semileptónicas; véase la Ref. [2].

CAPÍTULO 3

TEORÍAS EFECTIVAS DE LA QCD A BAJAS ENERGÍAS

Ahora estamos en posición de construir una EFT de la QCD a bajas energías que, de acuerdo con el teorema de Weinberg [11], incorpore las simetrías de la teoría fundamental en ese régimen. En particular, la EFT debe respetar las simetrías C , P , la invarianza de Lorentz y la simetría $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$. La referencia principal de este capítulo es la Ref. [2], cuyo desarrollo y notación seguimos de manera cercana.

En este marco, los grados de libertad relevantes ya no son quarks ni gluones, sino los hadrones. La simetría $U(1)_V$ se interpreta como la conservación del número bariónico: los estados con $B = 0$ corresponden a mesones y aquellos con $B = 1$ corresponden a bariones.

Por otro lado, la simetría $SU(3)_L \times SU(3)_R$ no se observa presente en la naturaleza, ya que implicaría la existencia de multipletes degenerados pero con paridad opuesta, es decir, para cada octete de bariones de paridad positiva debería existir otro de igual masa con paridad negativa, como se muestra a continuación:

Definamos los operadores de carga

$$Q_{Va} \equiv Q_{Ra} + Q_{La}; \quad Q_{Aa} \equiv Q_{Ra} - Q_{La}. \quad (3.1)$$

En el límite quiral de QCD se cumple que las cargas axiales conmutan con el hamiltoniano:

$$[H_{\text{QCD}}^0, Q_{Aa}] = 0. \quad (3.2)$$

Sea $|\alpha, +\rangle$ un autovector de H_{QCD}^0 con energía E_α y paridad positiva:

$$H_{\text{QCD}}^0 |\alpha, +\rangle = E_\alpha |\alpha, +\rangle, \quad P|\alpha, +\rangle = |\alpha, +\rangle. \quad (3.3)$$

Por otro lado

$$|\psi_{a\alpha}\rangle = Q_{Aa} |\alpha, +\rangle. \quad (3.4)$$

Demostremos que este nuevo estado es degenerado en energía:

$$\begin{aligned} H_{\text{QCD}}^0 |\psi_{a\alpha}\rangle &= H_{\text{QCD}}^0 Q_{Aa} |\alpha, +\rangle \\ &= Q_{Aa} H_{\text{QCD}}^0 |\alpha, +\rangle \\ &= Q_{Aa} E_\alpha |\alpha, +\rangle \\ &= E_\alpha Q_{Aa} |\alpha, +\rangle \\ H_{\text{QCD}}^0 |\psi_{a\alpha}\rangle &= E_\alpha |\psi_{a\alpha}\rangle. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Finalmente, usando la transformación bajo paridad,

$$P Q_{Aa} P^{-1} = -Q_{Aa}, \quad (3.6)$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} P |\psi_{a\alpha}\rangle &= P Q_{Aa} P^{-1} P |\alpha, +\rangle \\ &= -Q_{Aa} |\alpha, +\rangle \\ &= -|\psi_{a\alpha}\rangle. \end{aligned}$$

Así que, el estado generado tiene paridad negativa y ambos estados son degenerados:

$$|\alpha, +\rangle \quad (\text{paridad positiva}), \quad |\psi_{a\alpha}\rangle \quad (\text{paridad negativa}),$$

ambos con energía E_α .

Esta predicción —la existencia de pares de bariones degenerados con paridad opuesta— no coincide con el espectro observado en la naturaleza. Además, un análisis análogo con las cargas vectoriales Q_{Va} , se encuentra que estas generan multipletes de estados degenerados *con la misma paridad*, lo cual sí corresponde, al menos de manera aproximada, con la organización experimental de los hadrones ligeros en octetes y decupletes. Esto indica que el grupo de simetría quiral $G = SU(3)_L \times SU(3)_R$ se rompe espontáneamente a $H \equiv SU(3)_V$.

Otra evidencia de la ruptura espontánea de la simetría quiral proviene del hecho de que el condensado escalar singlete $\langle \bar{q}q \rangle$ adquiere un valor distinto de cero en el vacío de QCD. Un valor distinto de cero de este condensado constituye una condición suficiente

—aunque no necesaria— para la existencia de dicha ruptura. Véase la sección 3.2.2 de la Ref. [2] para una discusión detallada.

De acuerdo con el teorema de Goldstone [31, 32], cuando un sistema físico posee una simetría continua pero el estado fundamental (el vacío) no es invariante bajo dicha simetría, se dice que esta se encuentra *espontáneamente rota*. En tal situación surgen modos de excitación sin masa —los llamados *bosones de Goldstone*— cuya existencia está directamente relacionada con el número de generadores rotos de la simetría: por *cada generador* que no deja invariante al vacío aparece un *modo de Goldstone independiente*.

En nuestro caso, la ruptura espontánea ocurre desde el grupo quiral $G = SU(3)_L \times SU(3)_R$ el cual posee 16 generadores, hacia el subgrupo vectorial $H = SU(3)_V$ que cuenta con 8 generadores. Por lo tanto, quedan $16 - 8 = 8$ generadores rotos, de modo que *surgen ocho bosones de Goldstone sin masa* ϕ_a en el límite quiral. Estos campos presentan las mismas transformaciones que los generadores axiales bajo la operación de paridad:

$$\phi_a(t, \vec{x}) \xrightarrow{P} -\phi_a(t, -\vec{x}), \quad (3.7)$$

lo que muestra que se comportan como campos pseudoescalares y transforman bajo el subgrupo H .

3.1 EL GRUPO QUIRAL $SU(3)_L \times SU(3)_R$ Y SU REALIZACIÓN SOBRE LOS CAMPOS

El grupo quiral global relevante para la QCD con tres sabores de quarks ligeros se define como

$$G = SU(3)_L \times SU(3)_R = \{(L, R) \mid L \in SU(3), R \in SU(3)\}. \quad (3.8)$$

Entonces el subgrupo vectorial no roto queda determinado por

$$H = SU(3)_V = \{(V, V) \mid V \in SU(3)\}, \quad (3.9)$$

mientras que el subgrupo axial se introduce análogamente mediante

$$SU(3)_A = \{(A, A^\dagger) \mid A \in SU(3)\}. \quad (3.10)$$

Un elemento genérico del grupo quiral se escribe como

$$g = (L, R) \in SU(3)_L \times SU(3)_R, \quad (3.11)$$

bajo cuya acción los campos de quarks transforman de acuerdo con las representaciones fundamentales izquierda y derecha,

$$q_L \mapsto q'_L = L q_L, \quad q_R \mapsto q'_R = R q_R. \quad (3.12)$$

El objeto central en la construcción quiral es el campo de matriz $U(\phi) \in SU(3)$, el cual codifica los grados de libertad asociados a los bosones de Goldstone. La acción del grupo quiral sobre U está definida por

$$U(x) \mapsto U'(x) = L U(x) R^\dagger, \quad (3.13)$$

lo cual constituye una transformación lineal en U , aunque no en los campos $\phi_a(x)$ que lo parametrizan.

Los bosones de Goldstone se introducen mediante la parametrización exponencial estándar

$$U(\phi) = \exp\left(\frac{i\sqrt{2}\Phi}{F_0}\right); \quad \Phi(x) \equiv \phi_a(x) \frac{\lambda^a}{\sqrt{2}} \quad (3.14)$$

donde λ^a son los generadores de $SU(3)$ y F_0 es una constante introducida para asegurar que el argumento de la exponencial sea adimensional.

Los campos ϕ_a no transforman linealmente bajo el grupo quiral completo G , ni bajo su parte axial $SU(3)_A$. No obstante, sí transforman linealmente bajo el subgrupo vectorial $SU(3)_V$, reflejando que los bosones de Goldstone forman un octete bajo las transformaciones de sabor no rotas.

3.2 TEORÍA DE LA PERTURBACIÓN QUIRAL (CHIRAL PERTURBATION THEORY, CHPT)

Como se discutió en la sección anterior, los grados de libertad relevantes de la QCD a bajas energías están descritos por el campo matricial $U \in SU(3)$, el cual codifica los ocho bosones de Goldstone asociados al rompimiento espontáneo de la simetría quiral

$$SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V \longrightarrow SU(3)_V \times U(1)_V. \quad (3.15)$$

La ChPT constituye la EFT que describe la dinámica de estos grados de libertad a energías por debajo de la escala característica de la QCD, típicamente identificada con la escala de ruptura quiral, $\Lambda_\chi \sim 4\pi F \sim 1 \text{ GeV}$, implementando de forma sistemática la realización no lineal de la simetría quiral y respetando las simetrías globales y discretas de la teoría subyacente.

Dado que el campo $U(\phi)$ transforma linealmente bajo el grupo quiral global,

$$U \longrightarrow R U L^\dagger, \quad U^\dagger \longrightarrow L U^\dagger R^\dagger, \quad (3.16)$$

con $L \in SU(3)_L$ y $R \in SU(3)_R$ constantes en el espacio-tiempo, sus derivadas transforman de la forma

$$\begin{aligned} \partial_\mu U &\longrightarrow \partial_\mu (R U L^\dagger) = \underbrace{(\partial_\mu R)}_{=0} U L^\dagger + R (\partial_\mu U) L^\dagger + R U \underbrace{(\partial_\mu L^\dagger)}_{=0}, \\ \partial_\mu U &\longrightarrow R (\partial_\mu U) L^\dagger, \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\partial_\mu U^\dagger \longrightarrow L (\partial_\mu U^\dagger) R^\dagger. \quad (3.18)$$

En consecuencia, es posible construir el lagrangiano efectivo como una expansión ordenada en derivadas (o, equivalentemente, en momentos externos), conocida como la *expansión quiral*. Así que a LO, el término cinético más general viene dado por

$$\mathcal{L}_2 = \frac{F_0^2}{4} \text{Tr}(\partial_\mu U^\dagger \partial^\mu U), \quad (3.19)$$

donde F_0 es la constante de decaimiento de los bosones de Goldstone en el límite quiral y debe fijarse a partir de la fenomenología.

La invariancia de \mathcal{L}_2 bajo el grupo quiral global se verifica de manera inmediata a partir de las transformaciones dadas en las Ecs. (3.17) y (3.18):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 &\longrightarrow \mathcal{L}'_2 = \frac{F_0^2}{4} \text{Tr}(L \partial_\mu U^\dagger R^\dagger R \partial^\mu U L^\dagger) \\ \implies \mathcal{L}'_2 &= \frac{F_0^2}{4} \text{Tr}(\partial_\mu U^\dagger \partial^\mu U) = \mathcal{L}_2, \end{aligned} \quad (3.20)$$

donde se ha utilizado la propiedad cíclica de la traza, $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.

Finalmente, la invariancia bajo $U(1)_V$ se satisface de manera trivial, ya que los bosones de Goldstone no portan número bariónico.

3.2.1 PARIDAD INTRÍNSECA

Expandiendo la exponencial del campo quiral U , se obtiene

$$U = \mathbb{I} + \frac{i\sqrt{2}\Phi}{F_0} - \frac{\Phi^2}{F_0^2} + \dots, \quad (3.21)$$

$$\partial_\mu U = \frac{i\sqrt{2}\partial_\mu\Phi}{F_0} - \frac{1}{F_0^2} [(\partial_\mu\Phi)\Phi + \Phi(\partial_\mu\Phi)] + \dots. \quad (3.22)$$

Sustituyendo estas expresiones en la Ec. (3.19), entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 &= \frac{F_0^2}{4} \text{Tr} \left\{ \left[-\frac{i\sqrt{2}}{F_0} \partial_\mu\Phi - \frac{1}{F_0^2} \left((\partial_\mu\Phi)\Phi + \Phi(\partial_\mu\Phi) \right) + \dots \right] \right. \\ &\quad \left. \times \left[\frac{i\sqrt{2}}{F_0} \partial^\mu\Phi - \frac{1}{F_0^2} \left((\partial^\mu\Phi)\Phi + \Phi(\partial^\mu\Phi) \right) + \dots \right] \right\}, \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu\Phi_a \partial^\mu\Phi_a - \frac{1}{6F_0^2} f_{abe} f_{cde} \Phi_a \partial_\mu\Phi_b \Phi_c \partial^\mu\Phi_d + \mathcal{O}(\Phi^6), \\ \mathcal{L}_2 &= \mathcal{L}_{\text{kin}} + \mathcal{L}_{\text{int}}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Aquí, \mathcal{L}_{kin} corresponde al término cinético, mientras que \mathcal{L}_{int} agrupa términos de interacción. De la expresión anterior se observa que el factor $F_0^2/4$ ha sido introducido de tal forma que el término cinético adopta la forma canónica. Además, se aprecia que este lagrangiano contiene únicamente un número par de campos de bosones de Goldstone. Esto motiva la siguiente clasificación, denominada como *paridad intrínseca*.

Diremos que un operador \mathcal{O} (o lagrangiano) pertenece al sector de paridad intrínseca par (*even*) o impar (*odd*) si es, respectivamente, par o impar en el número de campos de bosones de Goldstone.

Dado que los bosones de Goldstone transforman bajo paridad como pseudoescalares, $\Phi_a(t, \vec{x}) \xrightarrow{P} -\Phi_a(t, -\vec{x})$, se sigue inmediatamente que el campo quiral transforma como

$$U(t, \vec{x}) \xrightarrow{P} U^\dagger(t, -\vec{x}). \quad (3.24)$$

Esta propiedad proporciona un método simple para determinar si una expresión pertenece al sector de paridad intrínseca par o impar, examinando su comportamiento bajo la transformación $U \rightarrow U^\dagger$, es decir:

$$\mathcal{O}[U] \xrightarrow{U \rightarrow U^\dagger} +\mathcal{O}[U]; \quad (\text{Paridad intrínseca par}), \quad (3.25)$$

$$\mathcal{O}[U] \xrightarrow{U \rightarrow U^\dagger} -\mathcal{O}[U]; \quad (\text{Paridad intrínseca impar}). \quad (3.26)$$

En el caso de \mathcal{L}_2 , se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2[U] \xrightarrow{U \rightarrow U^\dagger} \mathcal{L}_2[U^\dagger] &= \frac{F_0^2}{4} \text{Tr}(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger), \\ &= \frac{F_0^2}{4} \text{Tr}(\partial^\mu U^\dagger \partial_\mu U), \quad (\text{ciclicidad de la traza}) \\ \mathcal{L}_2[U] \xrightarrow{U \rightarrow U^\dagger} \mathcal{L}_2[U^\dagger] &= +\mathcal{L}_2[U], \end{aligned} \quad (3.27)$$

por lo tanto (3.19) pertenece al sector de paridad intrínseca par.

\mathcal{L}_2 constituye el lagrangiano más general a LO, ya que términos como $\text{Tr}(UU^\dagger) = 3$ corresponden a una constante independiente de los campos dinámicos y, por tanto, no contribuyen a la dinámica del sistema. Asimismo, el término $\text{Tr}[(\partial_\mu \partial^\mu U) U^\dagger]$ es proporcional, salvo derivadas totales, al término $\text{Tr}(\partial^\mu U \partial_\mu U^\dagger)$ por lo que no introduce nuevas estructuras dinámicas independientes a este orden.

3.2.2 ROMPIMIENTO EXPLÍCITO DE SIMETRÍA POR LAS MASAS DE LOS QUARKS

Hasta ahora se ha asumido una simetría quiral exacta $SU(3)_L \times SU(3)_R$. Sin embargo, como se ha discutido en secciones anteriores, esta no es una simetría exacta de la naturaleza. En particular, el término de masa de los quarks en QCD introduce un rompimiento explícito. Por ello, dicho efecto debe incorporarse de manera sistemática en el lagrangiano efectivo quiral.

El término que rompe explícitamente la simetría quiral en QCD es el término de masa de los quarks,

$$\mathcal{L}_{\text{masa}} = -\bar{q} \mathbb{M} q = -\bar{q}_L \mathbb{M} q_R - \bar{q}_R \mathbb{M}^\dagger q_L, \quad (3.28)$$

donde $\mathbb{M} = \text{diag}(m_u, m_d, m_s)$ es la matriz de masas de los quarks. Obsérvese que este término no es invariante bajo el grupo quiral $G = SU(3)_L \times SU(3)_R$. Formalmente, la invariancia se restauraría si la matriz de masas transformara como

$$\mathbb{M} \xrightarrow{G} R \mathbb{M} L^\dagger, \quad (3.29)$$

con $L \in SU(3)_L$ y $R \in SU(3)_R$. Sin embargo, en QCD la matriz \mathbb{M} es un parámetro fijo y no transforma, lo que da lugar a un rompimiento explícito de la simetría quiral.

En el marco de la EFT quiral, este rompimiento explícito se incorpora introduciendo un término efectivo que reproduzca las propiedades de transformación anteriores y que esté relacionado con la matriz de masas de los quarks. El término más general a LO que cumple estas condiciones es

$$\mathcal{L}_{\text{s.b.}} = \frac{F_0^2 B_0}{2} \text{Tr}(\mathbb{M}U^\dagger + U\mathbb{M}^\dagger), \quad (3.30)$$

donde el subíndice “s.b.” denota *symmetry breaking*, U es el campo quiral definido en la Ec. (3.14) y B_0 es una nueva LEC, relacionada con el condensado quiral y que parametriza el rompimiento explícito de la simetría.

Expandiendo $\mathcal{L}_{\text{s.b.}}$ en potencias del campo U , se obtiene

$$\mathcal{L}_{\text{s.b.}} = F_0^2 B_0 \text{Tr}(\mathbb{M}) - B_0 \text{Tr}(\mathbb{M}\Phi^2) + \mathcal{O}(\Phi^4). \quad (3.31)$$

El primer término es una constante independiente de los campos dinámicos y, por tanto, no contribuye a la dinámica del sistema. El segundo término es cuadrático en los campos de Goldstone y da lugar a los términos de masa de los pseudo-bosones de Goldstone.

Usando la forma explícita del campo Φ , dada por la Ec. (3.14):

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta_8 & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta_8 & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\eta_8 \end{pmatrix}, \quad (3.32)$$

se tiene

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\mathbb{M}\Phi^2) &= (m_u + m_d)\pi^+\pi^- + (m_u + m_s)K^+K^- + (m_d + m_s)K^0\bar{K}^0 \\ &+ \frac{m_u + m_d}{2}(\pi^0)^2 + \frac{m_u + m_d + 4m_s}{6}\eta_8^2 + \frac{m_u - m_d}{\sqrt{3}}\pi^0\eta_8. \end{aligned} \quad (3.33)$$

La expresión anterior permite identificar directamente las contribuciones diagonales responsables de las masas de los pseudo-bosones de Goldstone cargados. Asimismo, surge un término de mezcla entre los campos neutros π^0 y η_8 , proporcional a $(m_u - m_d)$, que indica que, en presencia de rompimiento de isospín ($m_u \neq m_d$), dichos campos no corresponden a autovalores de masa. Definiendo

$$\hat{m} \equiv \frac{m_u + m_d}{2}, \quad (3.34)$$

las masas de los mesones cargados se obtienen directamente

$$M_{\pi^\pm}^2 = 2\hat{m} B_0, \quad M_{K^\pm}^2 = (m_u + m_s) B_0, \quad M_{K^0}^2 = (m_d + m_s) B_0. \quad (3.35)$$

En el sector neutro, los términos cuadráticos en π^0 y η_8 definen la matriz de masas

$$\mathbb{M}_{\{\pi^0, \eta_8\}}^2 = B_0 \begin{pmatrix} m_u + m_d & \frac{m_u - m_d}{\sqrt{3}} \\ \frac{m_u - m_d}{\sqrt{3}} & m_u + m_d + 4m_s \end{pmatrix}, \quad (3.36)$$

la cual debe diagonalizarse para obtener los autovalores físicos. Realizando esta diagonalización de forma perturbativa en el rompimiento de isoespín, se obtienen

$$M_{\pi^0}^2 = 2\hat{m} B_0 - \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (3.37)$$

$$M_{\eta_8}^2 = \frac{2}{3} (\hat{m} + 2m_s) B_0 + \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (3.38)$$

donde el parámetro

$$\varepsilon \equiv \frac{B_0}{4} \frac{(m_u - m_d)^2}{m_s - \hat{m}} \quad (3.39)$$

cuantifica los efectos del rompimiento de isoespín y es de orden $(m_u - m_d)^2$.

3.2.3 CONSTRUCCIÓN DEL LAGRANGIANO QUIRAL A LO LOCALMENTE INVARIANTE

En la sección anterior se estableció que el lagrangiano de ChPT a LO, el cual incorpora tanto el rompimiento espontáneo como el rompimiento explícito de la simetría quiral, está dado por

$$\mathcal{L}_2 = \frac{F_0^2}{4} \text{Tr}(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger) + \frac{F_0^2 B_0}{2} \text{Tr}(MU^\dagger + UM^\dagger). \quad (3.40)$$

Con el fin de incorporar de manera sistemática interacciones con campos externos, **se promueve la simetría quiral global a una simetría local**. Para preservar la invarianza local bajo transformaciones quirales, las derivadas parciales se reemplazan por derivadas covariantes, definidas por

$$D_\mu A \equiv \partial_\mu A - ir_\mu A + iAl_\mu, \quad (3.41)$$

donde A representa cualquier objeto que transforme bajo el grupo quiral local

$$A \longrightarrow V_R A V_L^\dagger.$$

Bajo estas transformaciones, la derivada covariante satisface

$$D_\mu A \longrightarrow V_R (D_\mu A) V_L^\dagger. \quad (3.42)$$

Ademas se han introducido los campos externos derecho $r_\mu = r_\mu^a \frac{\lambda_a}{2}$ e izquierdo $l_\mu = l_\mu^a \frac{\lambda_a}{2}$, cuyos tensores de campo se definen como

$$f_{R\mu\nu} \equiv \partial_\mu r_\nu - \partial_\nu r_\mu - i[r_\mu, r_\nu], \quad (3.43)$$

$$f_{L\mu\nu} \equiv \partial_\mu l_\nu - \partial_\nu l_\mu - i[l_\mu, l_\nu], \quad (3.44)$$

y satisfacen

$$\text{Tr}(f_{R\mu\nu}) = \text{Tr}(f_{L\mu\nu}) = 0. \quad (3.45)$$

El rompimiento explícito de la simetría quiral se incorpora mediante la incorporación del campo:

$$\chi \equiv 2B_0(s + ip), \quad (3.46)$$

donde s y p son campos externos escalares y pseudoescalares, respectivamente. El rompimiento explícito de simetría se recupera al fijar $s = \mathbb{M}$ y $p = 0$.

La construcción del lagrangiano más general a orden $\mathcal{O}(p^2)$ se basa en el esquema de conteo quiral (véase la Tabla 2), el cual asigna a cada objeto un orden específico en potencias de momento.

Objeto	Orden quiral
U	$\mathcal{O}(p^0)$
$D_\mu U$	$\mathcal{O}(p)$
r_μ, l_μ	$\mathcal{O}(p)$
$f_{L\mu\nu}, f_{R\mu\nu}$	$\mathcal{O}(p^2)$
χ	$\mathcal{O}(p^2)$

Tabla 2: Esquema de conteo quiral.

En particular, si dos objetos A y B transforman como $A \rightarrow V_R A V_L^\dagger$ y $B \rightarrow V_R B V_L^\dagger$, entonces la traza

$$\text{Tr}(AB^\dagger) \quad (3.47)$$

es invariante bajo transformaciones quirales locales.

La lista completa de bloques de construcción relevantes hasta e incluyendo orden $\mathcal{O}(p^2)$,

que transforman como $V_R \cdots V_L^\dagger$, está dada por

$$U, D_\mu U, D_\mu D_\nu U, \chi, U f_{L\mu\nu}, f_{R\mu\nu} U. \quad (3.48)$$

A partir de estos bloques, los invariantes independientes hasta orden $\mathcal{O}(p^2)$ que pueden ser construidos son mostrados en la Tabla 3.

Orden quirral	Invariantes
$\mathcal{O}(p^0)$	$\text{Tr}(UU^\dagger) = 3$
$\mathcal{O}(p)$	$\text{Tr}(D_\mu U U^\dagger) = -\text{Tr}[U(D_\mu U)^\dagger] = 0$
$\mathcal{O}(p^2)$	$\text{Tr}(D_\mu D_\nu U U^\dagger) = -\text{Tr}[D_\nu U(D_\mu U)^\dagger] = \text{Tr}[U(D_\nu D_\mu U)^\dagger]$ $\text{Tr}(\chi U^\dagger)$ $\text{Tr}(U \chi^\dagger)$ $\text{Tr}(U f_{L\mu\nu} U^\dagger) = \text{Tr}(f_{L\mu\nu}) = 0$ $\text{Tr}(f_{R\mu\nu}) = 0$

Tabla 3: Invariantes quirales hasta orden $\mathcal{O}(p^2)$.

En consecuencia, el lagrangiano efectivo quirral más general, localmente invariante bajo el grupo quirral y de paridad intrínseca par, a LO en la expansión quirral, queda finalmente dado por

$$\mathcal{L}_2 = \frac{F_0^2}{4} \text{Tr}[D_\mu U(D^\mu U)^\dagger] + \frac{F_0^2}{4} \text{Tr}(\chi U^\dagger + U \chi^\dagger). \quad (3.49)$$

La combinación $\text{Tr}(\chi U^\dagger - U \chi^\dagger)$ se excluye debido a su comportamiento impar bajo la transformación de paridad.

Hasta este punto, el lagrangiano quirral a LO depende únicamente de dos LECs, F_0 y B_0 . Para que ChPT sea predictiva, es necesario fijar el valor de dichas constantes a partir de la fenomenológica. A LO en la expansión quirral, la constante F_0 coincide con la constante física de decaimiento del pión, F_π . En consecuencia, F_0 puede determinarse a partir del decaimiento leptónico débil del pión, $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$, obteniéndose el valor empírico

$$F_0 \simeq F_\pi \simeq 92.4 \text{ MeV}. \quad (3.50)$$

Las diferencias entre F_0 , F_π y F_K aparecen únicamente a orden superior, $\mathcal{O}(p^4)$, y se asocian al rompimiento explícito de la simetría quirral y a correcciones de loops.

Por otro lado, la constante B_0 está relacionada con el condensado escalar de los quarks en el vacío y fija la escala de las masas de los bosones pseudo-Goldstone (3.35). En el límite quiral se tiene la relación

$$B_0 = -\frac{\langle 0|\bar{q}q|0\rangle}{F_0^2}, \quad \bar{q}q \equiv \bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s. \quad (3.51)$$

donde $\langle 0|\bar{q}q|0\rangle$ denota el condensado quiral de los quarks ligeros.

Una vez que las LECs F_0 y B_0 han sido fijadas, es posible evaluar el alcance y el poder predictivo de la ChPT. Un ejemplo es la dispersión de piones, $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$. A LO en la expansión quiral, ChPT predice de manera unívoca las longitudes de dispersión en los distintos canales de isoespín, obteniendo

$$a_0^0 = \frac{7M_\pi^2}{32\pi F_\pi^2} \approx 0.156, \quad a_0^2 = -\frac{M_\pi^2}{16\pi F_\pi^2} \approx -0.0454. \quad (3.52)$$

Estos resultados coinciden exactamente con las predicciones clásicas obtenidas a partir de álgebra de corrientes y PCAC por Weinberg [2], lo que constituye una verificación no trivial de la consistencia de la formulación efectiva y del papel central de la simetría quiral en la dinámica hadrónica de baja energía. Los valores numéricos empleados en la evaluación anterior son $F_\pi = 92.4$ MeV y $M_\pi = 139.57$ MeV.

3.2.4 CHPT A NLO

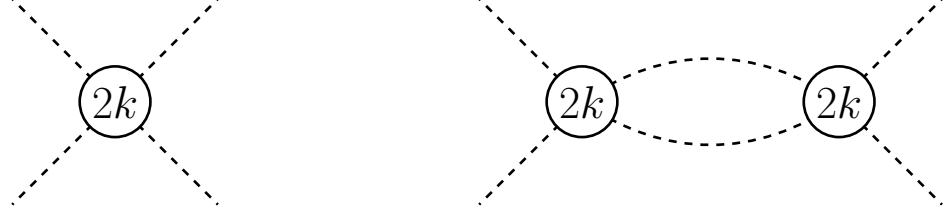
El resultado obtenido en la sección anterior constituye un éxito importante de la ChPT. Sin embargo, aún se encuentra por debajo del valor de referencia extraído de datos experimentales, $a_0^{\text{exp}} = 0.220 \pm 0.005$ [33], lo que indica la necesidad de incorporar correcciones de mayor precisión. En el marco de ChPT, una mejora sistemática en la precisión se logra mediante la inclusión de contribuciones de tipo *loop* asociadas a los propagadores de los bosones de Goldstone.

De acuerdo con la fórmula de conteo quiral de Weinberg, el orden quiral D de un diagrama de Feynman viene dado por

$$D = nN_L - 2N_I + \sum_{k=1}^{\infty} 2k N_{2k}, \quad (3.53)$$

donde n denota la dimensión del espacio-tiempo, N_L el número de *loops*, N_I indica el número de líneas internas (propagadores) y N_{2k} representa el número de vértices provenientes del lagrangiano efectivo de orden $\mathcal{O}(p^{2k})$. Esta expresión muestra que las contribuciones

de *loops* aparecen por primera vez a orden $\mathcal{O}(p^4)$ como se visualiza en la Fig. 6. En consecuencia, para alcanzar una mayor precisión es necesario construir el lagrangiano quiral más general al siguiente orden, denotado por \mathcal{L}_4 .



$$D = 0 - 0 + 2k = 2k = \begin{cases} 2, & \text{para } k = 1. \end{cases} \quad D = 4 - 2(2) + 2(2k) = 4k = \begin{cases} 4, & \text{para } k = 1. \end{cases}$$

Figura 6: Ejemplos ilustrativos del conteo quiral. A la izquierda se muestra un diagrama de contacto a cuatro puntos proveniente de un vértice del lagrangiano \mathcal{L}_{2k} , que contribuye a orden $\mathcal{O}(p^{2k})$. A la derecha se presenta un diagrama con un lazo construido a partir de dos vértices del mismo orden, cuya contribución aparece a orden $\mathcal{O}(p^{4k})$.

Siguiendo el conteo quiral discutido en la sección anterior, el lagrangiano efectivo a orden $\mathcal{O}(p^4)$ puede escribirse como

$$\mathcal{L}_4 = \sum_{i=1}^{10} L_i \mathcal{O}_i + \sum_{j=1}^2 H_j \mathcal{O}_j^{\text{contacto}}, \quad (3.54)$$

donde

$$\mathcal{O}_1^{(4)} = \left\{ \text{Tr}[(D_\mu U)(D^\mu U)^\dagger] \right\}^2, \quad (3.55)$$

$$\mathcal{O}_2^{(4)} = \text{Tr}[(D_\mu U)(D_\nu U)^\dagger] \text{Tr}[(D^\mu U)(D^\nu U)^\dagger], \quad (3.56)$$

$$\mathcal{O}_3^{(4)} = \text{Tr}[(D_\mu U)(D^\mu U)^\dagger (D_\nu U)(D^\nu U)^\dagger], \quad (3.57)$$

$$\mathcal{O}_4^{(4)} = \text{Tr}[(D_\mu U)(D^\mu U)^\dagger] \text{Tr}(\chi U^\dagger + U \chi^\dagger), \quad (3.58)$$

$$\mathcal{O}_5^{(4)} = \text{Tr}[(D_\mu U)(D^\mu U)^\dagger (\chi U^\dagger + U \chi^\dagger)], \quad (3.59)$$

$$\mathcal{O}_6^{(4)} = \left[\text{Tr}(\chi U^\dagger + U \chi^\dagger) \right]^2, \quad (3.60)$$

$$\mathcal{O}_7^{(4)} = \left[\text{Tr}(\chi U^\dagger - U \chi^\dagger) \right]^2, \quad (3.61)$$

$$\mathcal{O}_8^{(4)} = \text{Tr}(U \chi^\dagger U \chi^\dagger + \chi U^\dagger \chi U^\dagger), \quad (3.62)$$

$$\mathcal{O}_9^{(4)} = -i \text{Tr}[f_{\mu\nu}^R (D^\mu U)(D^\nu U)^\dagger + f_{\mu\nu}^L (D^\mu U)^\dagger (D^\nu U)], \quad (3.63)$$

$$\mathcal{O}_{10}^{(4)} = \text{Tr}(U f_{\mu\nu}^L U^\dagger f_R^{\mu\nu}), \quad (3.64)$$

$$\mathcal{O}_{H_1} = \text{Tr}(f_{\mu\nu}^R f_R^{\mu\nu} + f_{\mu\nu}^L f_L^{\mu\nu}), \quad (3.65)$$

$$\mathcal{O}_{H_2} = \text{Tr}(\chi\chi^\dagger). \quad (3.66)$$

Nótese que una mayor precisión requiere de un mayor número de LECs, en este caso L_i, H_i y por lo tanto, un incremento en la complejidad para fijar las nuevas LECs a partir de información fenomenológica o de otros métodos no perturbativos.

Por otro lado, algunas de las contribuciones de *loops* mencionadas anteriormente corresponden a integrales ultravioleta divergentes. En consecuencia, se requiere de un método de regularización y renormalización que permita absorber dichos infinitos. Aunque ChPT no es una teoría renormalizable en el sentido tradicional de la QFT, sí lo es en el contexto de una EFT, en el cual las divergencias pueden eliminarse orden por orden en la expansión quiral mediante la incorporación de contraterminos adecuados.

Dado que las contribuciones de *loops* surgen a orden $\mathcal{O}(p^4)$, las divergencias ultravioletas correspondientes a este orden no pueden ser absorbidas por las LECs F_0 y B_0 que surgen del lagrangiano \mathcal{L}_2 . En su lugar, dichas divergencias deben ser absorbidas por las LECs L_i ($i = 1, \dots, 10$) y H_i que acompañan a los operadores del lagrangiano \mathcal{L}_4 .

Bajo la elección de un esquema de regularización y renormalización —típicamente la regularización dimensional—, las constantes L_i y H_i se introducen inicialmente como cantidades desnudas. Por lo tanto, las divergencias ultravioletas provenientes de los diagramas de *loops* se absorben mediante la redefinición de las LECs

$$L_i = L_i^r + \frac{\Gamma_i}{32\pi^2} R, \quad i = 1, \dots, 10, \quad (3.67)$$

$$H_i = H_i^r + \frac{\Delta_i}{32\pi^2} R, \quad i = 1, 2, \quad (3.68)$$

$$R = \frac{2}{n-4} - [\ln(4\pi) + \gamma_E + 1]. \quad (3.69)$$

$L_i^r(\mu)$ denotan las constantes renormalizadas, las cuales dependen de la escala de renormalización μ ; Γ_i y Δ_i son coeficientes numéricos fijados de manera que cancelan las divergencias ultravioletas, y γ_E es la constante de Euler. Los valores numéricos de las constantes L_i se presentan en la Tabla 4.

Al incluir de forma conjunta las correcciones de orden $\mathcal{O}(p^4)$, tanto de tipo *loop* como a nivel árbol, se obtiene

$$a_0^0 = 0.200, \quad (3.70)$$

Γ_i	$L_i^r (\times 10^{-3})$
3/32	$L_1^r = 0.4 \pm 0.3$
3/16	$L_2^r = 1.35 \pm 0.3$
0	$L_3^r = -3.5 \pm 1.1$
1/8	$L_4^r = -0.3 \pm 0.5$
3/8	$L_5^r = 1.4 \pm 0.5$
11/144	$L_6^r = -0.2 \pm 0.3$
0	$L_7^r = -0.4 \pm 0.2$
5/48	$L_8^r = 0.9 \pm 0.3$
1/4	$L_9^r = 6.9 \pm 0.7$
-1/4	$L_{10}^r = -5.5 \pm 0.7$

Tabla 4: Valores numéricos de las LECs renormalizadas L_i^r , tomados de la compilación fenomenológica presentada por Schere/Schindler [2]. Determinaciones más recientes para las LECs L_4^r , L_5^r , L_6^r y L_8^r pueden encontrarse en la colaboración FLAG [3], basadas en simulaciones de Lattice QCD.

lo que representa una corrección del orden del 28% con respecto al resultado a LO. Este valor resulta significativamente más cercano al valor de referencia a_0^{exp} extraído de datos experimentales, véase [2].

Finalmente, cerramos esta sección señalando que, a NNLO, $\mathcal{O}(p^6)$, el lagrangiano efectivo contiene 90 términos independientes, así como 4 términos de contacto, cada uno acompañado por una LEC. Remitimos al lector a la Ref. [34] para una discusión detallada.

3.2.5 FORMALISMO NO LINEAL DEL LAGRANGIANO QUIRAL A ORDEN $\mathcal{O}(p^2)$

El formalismo empleado en esta sección se basa en la realización no lineal del grupo quiral desarrollada por Callan, Coleman, Wess y Zumino [35]. Seguimos la notación estándar construida a partir de los bloques quirales u_μ y χ_\pm , tal como se presenta en la Ref. [36]. Con el fin de facilitar la lectura, algunos de los pasos intermedios se escriben de forma explícita y detallada que en ocasiones suelen omitirse en la literatura.

Será conveniente introducir una nueva parametrización del campo quiral, definida mediante la relación

$$u^2 \equiv U. \quad (3.71)$$

En consecuencia, en lo que resta de esta sección nos proponemos reescribir el lagrangiano (3.49) en términos de esta nueva parametrización. Para ello, comenzaremos expresando el campo $u(x)$ en función de los campos de Goldstone, los cuales fueron introducidos previamente en la Ec. (3.14):

$$u(x) = \exp\left(i \frac{\Phi(x)}{\sqrt{2} F_0}\right), \quad (3.72)$$

donde, por construcción, $u(x) \in SU(3)$. El campo $u(x)$ puede interpretarse como un representante del espacio cociente $SU(3)_L \times SU(3)_R / SU(3)_V$.

Dado que el campo U transforma bajo el grupo quirral como

$$U \longrightarrow R U L^\dagger, \quad (3.73)$$

se sigue que el campo u transforma de la forma

$$u \longrightarrow R u h^\dagger(\phi) = h(\phi) u g_L^\dagger, \quad (3.74)$$

donde $h(\phi) \in SU(3)_V$ y depende de las coordenadas del espacio-tiempo. En consecuencia, $u(x)$ no transforma linealmente bajo el grupo quirral completo, sino que realiza una representación no lineal de $SU(3)_L \times SU(3)_R$.

Se define el vector quirral como

$$u_\mu \equiv i u^\dagger D_\mu U u^\dagger, \quad (3.75)$$

del cual se sigue inmediatamente que transforma linealmente bajo el subgrupo vectorial,

$$u_\mu \xrightarrow{G} h(\phi) u_\mu h^\dagger(\phi). \quad (3.76)$$

A partir de la definición (3.75)

$$\begin{aligned} u_\mu &= i u^\dagger D_\mu (u^2) u^\dagger \\ &= i u^\dagger [(\partial_\mu u)u + u(\partial_\mu u) - i r_\mu u^2 + i u^2 l_\mu] u^\dagger \\ &= i [u^\dagger (\partial_\mu u) + (\partial_\mu u) u^\dagger - i u^\dagger r_\mu u + i u l_\mu u^\dagger] \\ u_\mu &= i \{ u^\dagger (\partial_\mu - i r_\mu) u - u (\partial_\mu - i l_\mu) u^\dagger \}. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Este objeto satisface además la propiedad de hermiticidad,

$$u_\mu = u_\mu^\dagger \quad (3.78)$$

la cual puede verificarse explícitamente como sigue:

$$\begin{aligned}
u_\mu^\dagger &= (i u^\dagger D_\mu U u^\dagger)^\dagger, \\
&= -i u (D_\mu U^\dagger) u, \\
&= -i u (-U^\dagger (D_\mu U) U^\dagger) u, \\
&= -i u (-u^\dagger u^\dagger (D_\mu U) u^\dagger u^\dagger) u, \\
&= i u^\dagger (D_\mu U) u^\dagger, \\
u_\mu^\dagger &= u_\mu.
\end{aligned} \tag{3.79}$$

donde hemos utilizado

$$\begin{aligned}
D_\mu(UU^\dagger) &= D_\mu \mathbb{I} = 0, \\
(D_\mu U)U^\dagger + U(D_\mu U^\dagger) &= 0, \\
\Rightarrow D_\mu U^\dagger &= -U^\dagger (D_\mu U) U^\dagger,
\end{aligned} \tag{3.80}$$

Por lo tanto, el término cinético de la Ec. (3.49) puede reescribirse como

$$\begin{aligned}
Tr(D_\mu U D^\mu U^\dagger) &= Tr[(u u^\dagger) D_\mu U (u^\dagger u) D^\mu U^\dagger] \\
&= Tr[u^\dagger D_\mu U u^\dagger u D^\mu U^\dagger u] \\
&= Tr[(-i u_\mu)(+i u^\mu)] = Tr(u_\mu u^\mu).
\end{aligned} \tag{3.81}$$

Definamos ahora

$$\chi_\pm \equiv u^\dagger \chi u^\dagger \pm u \chi^\dagger u, \tag{3.82}$$

las cuales transforman covariantemente bajo el subgrupo vectorial,

$$\chi_\pm \longrightarrow h(\phi) \chi_\pm h^\dagger(\phi). \tag{3.83}$$

En consecuencia,

$$\chi_+^\dagger = \chi_+, \quad \chi_-^\dagger = -\chi_-. \tag{3.84}$$

Por lo tanto, el segundo término de la Ec. (3.49), toma la forma:

$$\begin{aligned}
Tr(\chi U^\dagger + U \chi^\dagger) &= Tr(\chi u^\dagger u^\dagger) + Tr(u u \chi^\dagger), \\
&= Tr(u^\dagger \chi u^\dagger + u \chi^\dagger u), \\
Tr(\chi U^\dagger + U \chi^\dagger) &= Tr(\chi_+).
\end{aligned} \tag{3.85}$$

En consecuencia, el lagrangiano quiral a LO $\mathcal{O}(p^2)$ adopta la forma

$$\mathcal{L}_2 = \frac{F_0^2}{4} \text{Tr}(u_\mu u^\mu + \chi_+). \quad (3.86)$$

3.2.6 EL SECTOR DE PARIDAD INTRÍNSECA IMPAR EN CHPT

Hasta el momento, la formulación estándar de la ChPT en el sector mesónico se limita únicamente al *sector de paridad intrínseca par*, lo cual restringe su aplicabilidad a procesos en los que interviene un número par de bosones pseudoescalares. En consecuencia, fenómenos como $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$, el vértice anómalo $\gamma^* \rightarrow 3\pi$ (observable en presencia de campos externos o fotones virtuales) y reacciones hadrónicas del tipo $K\bar{K} \rightarrow 3\pi$, no pueden ser descritos dentro de este marco utilizando únicamente el sector par del lagrangiano quiral.

Por otra parte, el lagrangiano quiral (3.86) posee simetrías adicionales que no están presentes en la QCD subyacente, como se discute en [17]. Estas inconsistencias se corrigen mediante la incorporación de la acción anómala de Wess–Zumino–Witten (WZW) [37, 17], la cual codifica la anomalía quiral de QCD a nivel de la EFT. La acción de WZW permite describir procesos con un número impar de bosones pseudoescalares, definiendo así el *sector de paridad intrínseca impar*, el cual comienza a partir de $\mathcal{O}(p^4)$ en la expansión quiral. Aunque este sector se clasifica como de paridad intrínseca impar, el lagrangiano resultante es invariante bajo paridad física, propiedad que se garantiza mediante la presencia explícita del tensor antisimétrico de Levi-Civita, el cual transforma con un signo menos bajo paridad y compensa el comportamiento del resto de los campos.

La acción de Wess–Zumino puede escribirse como

$$S_{WZ} = \int_{M^5} \omega_{ijklm} d\Sigma^{ijklm}, \quad (3.87)$$

donde M^5 es una variedad de cinco dimensiones cuyo borde corresponde al espacio–tiempo físico. El integrando adopta la forma explícita

$$\omega_{ijklm} d\Sigma^{ijklm} = -\frac{i}{240\pi^2} d\Sigma^{ijklm} \text{Tr} \left(U^{-1} \frac{\partial U}{\partial y^i} U^{-1} \frac{\partial U}{\partial y^j} U^{-1} \frac{\partial U}{\partial y^k} U^{-1} \frac{\partial U}{\partial y^l} U^{-1} \frac{\partial U}{\partial y^m} \right), \quad (3.88)$$

con y^i ($i = 1, \dots, 5$) las coordenadas en M^5 y U el campo quiral. Esta acción reproduce correctamente la anomalía quiral de QCD dentro del marco de la EFT.

Es posible acoplar la acción (3.88) a campos gauge externos promoviendo la simetría quiral global a una simetría local. En el caso del electromagnetismo, esto se realiza introduciendo el campo gauge A_μ y reemplazando las derivadas ordinarias por derivadas

covariantes. La acción gauge invariante resultante esta dada por

$$\begin{aligned}
S(U, A_\mu)_{WZW} &= S_{WZ} - e \int d^4x A_\mu J^\mu + \\
&+ \frac{ie^2}{24\pi^2} \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} (\partial_\mu A_\nu) A_\alpha \text{Tr} [Q^2 (\partial_\beta U) U^{-1} + Q^2 U^{-1} (\partial_\beta U) + QUQU^{-1} (\partial_\beta U) U^{-1}],
\end{aligned}
\tag{3.89}$$

donde Q es la matriz de cargas eléctricas de los quarks, definida en la Ec. (2.117) y J^μ es la corriente electromagnética asociada.

Esta última expresión contiene una contribución que describe el proceso $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$. Al expandir el campo quiral U y retener únicamente términos correspondiente el campo π^0 , se obtiene el término efectivo

$$\mathcal{L}_{\pi^0\gamma\gamma} = \frac{ne^2}{48\pi^2 F_\pi} \pi^0 \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta},
\tag{3.90}$$

donde $F_{\mu\nu}$ es el tensor de campo electromagnético.

El coeficiente entero n no constituye un parámetro libre, a diferencia de las LECs F_0 y B_0 , sino que queda completamente determinado por la anomalía quiral. Al comparar este resultado con el cálculo realizado en QCD mediante diagramas triangulares de corrientes axial–vector [38], se encuentra que ambos coinciden cuando

$$n = N_c,
\tag{3.91}$$

donde N_c es el número de colores. De este modo, la acción de Wess–Zumino–Witten reproduce correctamente la estructura anómala de QCD en el régimen de bajas energías.

Cabe señalar que el acoplamiento a campos externos no se limita al electromagnetismo. En general, es posible introducir fuentes gauge externas arbitrarias asociadas a subgrupos de $SU(3)_L \times SU(3)_R$, lo que permite estudiar extensiones, como acoplamientos electrodébiles. Para más detalles, véase [17].

En el siguiente orden, $\mathcal{O}(p^6)$, de la expansión quiral en el sector de paridad intrínseca impar, el lagrangiano efectivo fue clasificado sistemáticamente en la Ref. [39], donde se identificaron 23 operadores independientes para el caso de tres sabores ligeros ($N_f = 3$). Más recientemente, en la Ref. [40], este sector se extendió hasta $\mathcal{O}(p^8)$, derivándose la base completa de operadores. En particular, al restringirse a estructuras sin traza singlete, se obtuvieron 705 términos independientes para $N_f = 3$.

Finalmente, el lagrangiano efectivo más general de la ChPT puede descomponerse en la suma de dos contribuciones, correspondientes a los sectores de paridad intrínseca

par e impar,

$$\mathcal{L}_{\text{ChPT}} = \mathcal{L}^{\text{even}} + \mathcal{L}^{\text{odd}}. \quad (3.92)$$

El sector de paridad intrínseca par admite una expansión en potencias del momento externo (o, equivalentemente, en derivadas) de la forma

$$\mathcal{L}^{\text{even}} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_6 + \dots, \quad (3.93)$$

mientras que el sector de paridad intrínseca impar comienza a orden $\mathcal{O}(p^4)$ y puede escribirse como

$$\mathcal{L}^{\text{odd}} = \mathcal{L}_4^{\text{odd}} + \mathcal{L}_6^{\text{odd}} + \mathcal{L}_8^{\text{odd}} + \dots. \quad (3.94)$$

3.3 TEORÍA DE PERTURBACIÓN QUIRAL CON RESONANCIAS (RESONANCE CHIRAL THEORY, $R\chi T$)

Como se ha mencionado anteriormente, a medida que la energía se aproxima a la región de 1 GeV, el espectro hadrónico presenta estados resonantes, caracterizados por la aparición de picos bien definidos en las secciones eficaces. La posición del máximo de estos picos está asociada a la masa de la resonancia, mientras que su anchura está relacionada con su ancho de decaimiento Γ . En consecuencia, estas resonancias deben incorporarse explícitamente como grados de libertad en la descripción efectiva de QCD.

Una teoría en esta dirección es la Teoría de Perturbación Quiral con Resonancias (Resonance Chiral Theory, $R\chi T$), cuyo objetivo es extender el rango de aplicabilidad de ChPT mediante la inclusión explícita de resonancias hadrónicas. A diferencia de ChPT, que puede formularse como una EFT ordenada, sistemática y renormalizable orden por orden en una expansión quiral, $R\chi T$ no admite, en general, una organización estricta en potencias de momentos externos.

Sin embargo, $R\chi T$ proporciona una descripción efectiva hadrónica útil en el régimen de energías intermedias, cuya construcción está fuertemente motivada por la expansión en $1/N_c$ de QCD y por sus simetrías quirales subyacentes. En el límite large- N_c , la dinámica mesónica se describe a nivel árbol por un lagrangiano local efectivo con un espectro que contiene una torre infinita de estados resonantes estables, es decir de ancho nulo. En la práctica, se trabaja con una aproximación en la que sólo se retiene un número finito de resonancias; este truncamiento se considera razonable a bajas energías, donde se espera que la contribución de resonancias más pesadas esté suprimida.

No obstante, la ausencia de una escala de corte efectiva definida, análoga a Λ_χ en ChPT, impide interpretar el lagrangiano truncado con resonancias como una teoría efectiva bien definida en el sentido usual. Más bien, se trata de un modelo fenomenológico inspirado en QCD que busca reproducir tantas características de esta teoría fundamental como sea posible [41].

A pesar de la ausencia de un conteo quiral estricto, el lagrangiano de $R\chi T$ posee una estructura general bien definida y puede descomponerse, al igual que ChPT, en sectores de paridad intrínseca par e impar,

$$\mathcal{L}_{R\chi T} = \mathcal{L}_{R\chi T}^{\text{even}} + \mathcal{L}_{R\chi T}^{\text{odd}}. \quad (3.95)$$

En el sector de paridad intrínseca par, a LO en la expansión $1/N_c$ y considerando únicamente el primer multiplete de resonancias vectoriales con un número mínimo de derivadas compatible con la simetría quiral, se tiene

$$\mathcal{L}_{\chi V} = \mathcal{L}_\chi^{(2)} + \mathcal{L}_V^{(2)} + \mathcal{L}_{\text{kin}}(V), \quad (3.96)$$

donde $\mathcal{L}_\chi^{(2)}$ coincide con la expresión dada en (3.86), mientras que $\mathcal{L}_V^{(2)}$ describe la interacción de las resonancias vectoriales con los bosones de pseudo-Goldstone y con las fuentes externas, dada por:

$$\mathcal{L}_V^{(2)} = \frac{F_V}{2\sqrt{2}} \text{Tr}(V_{\mu\nu} f_+^{\mu\nu}) + i \frac{G_V}{\sqrt{2}} \text{Tr}(V_{\mu\nu} u^\mu u^\nu), \quad (3.97)$$

siendo F_V y G_V LECs del sector vectorial en $R\chi T$. Los tensores $f_\pm^{\mu\nu}$ se definen como

$$f_\pm^{\mu\nu} = u F_L^{\mu\nu} u^\dagger \pm u^\dagger F_R^{\mu\nu} u, \quad (3.98)$$

con

$$F_L^{\mu\nu} = \partial^\mu \ell^\nu - \partial^\nu \ell^\mu - i[\ell^\mu, \ell^\nu], \quad (3.99)$$

$$F_R^{\mu\nu} = \partial^\mu r^\nu - \partial^\nu r^\mu - i[r^\mu, r^\nu], \quad (3.100)$$

donde ℓ_μ y r_μ denotan las fuentes externas izquierda y derecha, respectivamente.

El término cinético de las resonancias vectoriales, descritas en el formalismo de campos antisimétricos, viene dado por

$$\mathcal{L}_{\text{kin}}(V) = -\frac{1}{2} \text{Tr} \left(\nabla^\lambda V_{\lambda\mu} \nabla_\nu V^{\nu\mu} - \frac{M_V^2}{2} V_{\mu\nu} V^{\mu\nu} \right), \quad (3.101)$$

donde M_V es la masa del octete vectorial y

$$\nabla_\mu V = \partial_\mu V + [\Gamma_\mu, V], \quad (3.102)$$

es la derivada covariante definida para garantizar la invariancia quiral (véase el apéndice B.2) bajo la transformación

$$V \xrightarrow{G} h(\phi, g) V h^\dagger(\phi, g). \quad (3.103)$$

Finalmente, Γ_μ corresponde a la conexión natural en el espacio cociente G/H y esta dada por

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{2} \{u^\dagger(\partial_\mu - ir_\mu)u + u(\partial_\mu - i\ell_\mu)u^\dagger\}. \quad (3.104)$$

Nótese que, aunque las resonancias se introducen como campos pesados con masa $M_V \sim O(p^0)$ y no forman parte de la expansión quiral estándar de ChPT, los operadores en $\mathcal{L}_V^{(2)}$ contribuyen a $O(p^2)$. En consecuencia, el intercambio de resonancias a nivel árbol induce contribuciones efectivas de orden $O(p^4)$ en el lagrangiano puramente quiral una vez que los campos resonantes son integrados [18]. La representación explícita de las resonancias vectoriales se escribe como sigue:

$$V_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\rho^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\omega_8 & \rho^+ & K^{*+} \\ \rho^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\rho^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\omega_8 & K^{*0} \\ K^{*-} & \bar{K}^{*0} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\omega_8 \end{pmatrix}_{\mu\nu}. \quad (3.105)$$

Por otro lado, el lagrangiano en el sector de paridad intrínseca impar fue introducido por primera vez en la Ref. [19], escrito como

$$\mathcal{L}_V^{odd} = \sum_{a=1}^7 \frac{c_a}{M_V} \mathcal{O}_{VJP}^a + \sum_{a=1}^4 d_a \mathcal{O}_{VVP}^a, \quad (3.106)$$

donde los operadores \mathcal{O}_{VVP}^a están dados por

$$\mathcal{O}_{VVP}^1 = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \text{Tr}(\{V^{\mu\nu}, V^{\rho\alpha}\} \nabla_\alpha u^\sigma), \quad (3.107)$$

$$\mathcal{O}_{VVP}^2 = i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \text{Tr}(\{V^{\mu\nu}, V^{\rho\sigma}\} \chi_-), \quad (3.108)$$

$$\mathcal{O}_{VVP}^3 = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \text{Tr}(\{\nabla_\alpha V^{\mu\nu}, V^{\rho\alpha}\} u^\sigma), \quad (3.109)$$

$$\mathcal{O}_{VVP}^4 = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \text{Tr}(\{\nabla^\sigma V^{\mu\nu}, V^{\rho\alpha}\} u_\alpha). \quad (3.110)$$

Estos operadores describen la interacción entre dos resonancias vectoriales y una pseudoscalar (VVP).

Por otra parte, los operadores \mathcal{O}_{VJP}^a dados por

$$\mathcal{O}_{VJP}^1 = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \text{Tr} (\{V^{\mu\nu}, f_+^{\rho\sigma}\} \nabla_\alpha u^\sigma), \quad (3.111)$$

$$\mathcal{O}_{VJP}^2 = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \text{Tr} (\{V^{\mu\alpha}, f_+^{\rho\sigma}\} \nabla_\alpha u^\nu), \quad (3.112)$$

$$\mathcal{O}_{VJP}^3 = i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \text{Tr} (\{V^{\mu\nu}, f_+^{\rho\sigma}\} \chi_-), \quad (3.113)$$

$$\mathcal{O}_{VJP}^4 = i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \text{Tr} (V^{\mu\nu} [f_-^{\rho\sigma}, \chi_+]), \quad (3.114)$$

$$\mathcal{O}_{VJP}^5 = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \text{Tr} (\{\nabla_\alpha V^{\mu\nu}, f_+^{\rho\sigma}\} u^\sigma), \quad (3.115)$$

$$\mathcal{O}_{VJP}^6 = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \text{Tr} (\{\nabla_\alpha V^{\mu\alpha}, f_+^{\rho\sigma}\} u^\nu), \quad (3.116)$$

$$\mathcal{O}_{VJP}^7 = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \text{Tr} (\{\nabla^\sigma V^{\mu\nu}, f_+^{\rho\alpha}\} u_\alpha), \quad (3.117)$$

describen la interacción entre una resonancia vectorial, una fuente vectorial externa y una pseudoscalar (VJP).

Las constantes c_a y d_a son LECs que pueden restringirse utilizando el límite de gran- N_c y de la compatibilidad con el comportamiento a cortas distancias de QCD [19], resultando

$$c_1 = -4c_3, \quad (3.118)$$

$$c_2 = c_5 - 4c_3, \quad (3.119)$$

$$c_6 = c_5 - \frac{N_C M_V}{64\pi^2 \sqrt{2} F_V}, \quad (3.120)$$

$$d_1 + 8d_2 = -\frac{N_C M_V^2}{64\pi^2 F_V^2} + \frac{F^2}{4F_V^2}, \quad (3.121)$$

$$d_3 = -\frac{N_C M_V^2}{64\pi^2 F_V^2} + \frac{F^2}{8F_V^2}, \quad (3.122)$$

$$F_V^2 = 2F^2. \quad (3.123)$$

Más recientemente, la Ref. [42] ha proporcionado un conjunto actualizado de restricciones de altas energías

$$d_1 + 8d_2 = -\frac{N_C M_V^2}{64\pi^2 F_V^2} + \frac{F^2}{8F_V^2}, \quad (3.124)$$

$$d_3 = -\frac{N_C M_V^2}{64\pi^2 F_V^2}, \quad (3.125)$$

$$F_V^2 = 3F^2. \quad (3.126)$$

Por lo tanto, el lagrangiano total

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\chi V} + \mathcal{L}_V^{odd}, \quad (3.127)$$

es suficiente para describir el proceso de decaimiento $\rho^0 \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma$ a nivel árbol. Interacciones que no son relevantes para este estudio, tales como aquellas que involucran una resonancia vectorial, resonancias axiales y un pseudoscalar, entre otras, se discuten en las Refs. [18, 41, 43, 44, 45, 46].

DESCRIPCIÓN DEL DECAIMIENTO
 $\rho^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0 \gamma$ EN EL MARCO DE LA TEORÍA
DE PERTURBACIÓN QUIRAL CON
RESONANCIAS

El proceso de decaimiento $\rho \rightarrow \pi^0 \pi^0 \gamma$ ha sido ampliamente estudiado en la literatura. La primera medición del $\mathcal{BR}(\rho^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0 \gamma)$ se obtuvo a partir del proceso $e^+ e^- \rightarrow \pi^0 \pi^0 \gamma$ a energías por debajo de 1 GeV [47]. Este proceso ha sido descrito teóricamente dentro del marco de la dominancia de mesones vectoriales (VMD), incluyendo contribuciones de lazos de kaones y estados escalares intermedios, como el mesón σ [48, 49, 50, 51, 52]. No obstante, a pesar de estos avances, los modelos existentes no logran reproducir de manera satisfactoria los resultados experimentales, persistiendo una discrepancia significativa con los datos observados. En este contexto, se han realizado esfuerzos adicionales [53] mediante la inclusión de estados intermedios adicionales, como el $f_0(600)$ (actualmente denominado $f_0(500)$); sin embargo, incluso con estas extensiones, la predicción teórica permanece alejada del valor experimental.

Con el objetivo de explorar posibles contribuciones adicionales que permitan esclarecer esta discrepancia, analizamos el proceso de decaimiento $\rho^0 \rightarrow \omega \pi^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0 \gamma$ dentro del marco de la $R\chi T$, poniendo especial énfasis en el papel de las constantes de acoplamiento aún desconocidas.

Los resultados presentados en este capítulo se encuentran parcialmente publicados en la Ref. [23].

4.1 VÉRTICE DE INTERACCIÓN $\rho^0 \omega^0 \pi^0$

La regla de Feynman para el vértice de interacción $V_{\rho\omega\pi}$ fuera de la masa de capa (off-shell) se obtiene a partir de los operadores VVP de la ecuación (3.106), tras restringir el espacio de campos únicamente a los grados de libertad relevantes (ρ , ω , π) y despreciar términos de orden superior, se obtiene:

$$\phi(x) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \text{diag}(1, -1, 0), \quad (4.1)$$

$$u(\phi) = \text{diag} \left(1 + i \frac{\pi}{2F}, 1 - i \frac{\pi}{2F}, 1 \right), \quad (4.2)$$

$$V^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{diag} (\omega^{\mu\nu} + \rho^{\mu\nu}, \omega^{\mu\nu} - \rho^{\mu\nu}, 0), \quad (4.3)$$

$$\nabla_\alpha V^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{diag} (\partial_\alpha \omega^{\mu\nu} + \partial_\alpha \rho^{\mu\nu}, \partial_\alpha \omega^{\mu\nu} - \partial_\alpha \rho^{\mu\nu}, 0), \quad (4.4)$$

$$u_\mu = \frac{\partial_\mu \pi}{F} \text{diag}(-1, 1, 0), \quad (4.5)$$

$$\nabla_\alpha u_\mu = \frac{\partial_\alpha \partial_\mu \pi}{F} \text{diag}(-1, 1, 0), \quad (4.6)$$

$$\chi_- = -\frac{2 i m_\pi^2}{F} \pi \text{diag}(1, -1, 0), \quad (4.7)$$

donde *diag* denota una matriz diagonal; por ejemplo

$$\text{diag}(a_1, a_2, a_3) \equiv \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

En consecuencia, los operadores VVP¹ dados por (3.107)–(3.110) adoptan la siguiente forma:

$$\tilde{\mathcal{O}}_{\rho\omega\pi}^1 = -\frac{2}{F} \epsilon_{\mu\nu\delta\sigma} (\rho^{\mu\nu} \omega^{\delta\alpha} + \rho^{\delta\alpha} \omega^{\mu\nu}) \partial_\alpha \partial^\sigma \pi, \quad (4.9)$$

$$\tilde{\mathcal{O}}_{\rho\omega\pi}^2 = \frac{8m_\pi^2}{F} \epsilon_{\mu\nu\delta\alpha} \rho^{\mu\nu} \omega^{\delta\alpha} \pi, \quad (4.10)$$

$$\tilde{\mathcal{O}}_{\rho\omega\pi}^3 = -\frac{2}{F} \epsilon_{\mu\nu\delta\sigma} (\partial_\alpha \rho^{\mu\nu} \omega^{\delta\alpha} + \partial_\alpha \omega^{\mu\nu} \rho^{\delta\alpha}) \partial^\sigma \pi, \quad (4.11)$$

$$\tilde{\mathcal{O}}_{\rho\omega\pi}^4 = -\frac{2}{F} \epsilon_{\mu\nu\delta\sigma} (\partial^\sigma \rho^{\mu\nu} \omega^{\delta\alpha} + \partial^\sigma \omega^{\mu\nu} \rho^{\delta\alpha}) \partial_\alpha \pi. \quad (4.12)$$

¹A partir de este punto, los subíndices ρ , ω , γ y π en $\tilde{\mathcal{O}}$ se utilizarán exclusivamente como etiquetas identificadoras y no deberán interpretarse como índices tensoriales.

A partir de estas expresiones, la regla de Feynman para el vértice $\rho\omega\pi$ off-shell (véase la Fig. 7) se obtiene de manera directa

$$V_{\rho\omega\pi}^{\mu\nu\delta\alpha} = \sum_{j=1}^4 d_j \mathcal{V}_{j\rho\omega\pi}^{\mu\nu\delta\alpha}, \quad (4.13)$$

donde

$$\mathcal{V}_{1\rho\omega\pi}^{\mu\nu\delta\alpha} = \frac{2}{F} (\epsilon^{\mu\nu\delta\lambda} P^\alpha + \epsilon^{\mu\lambda\delta\alpha} P^\nu) P_\lambda, \quad (4.14)$$

$$\mathcal{V}_{2\rho\omega\pi}^{\mu\nu\delta\alpha} = \frac{8m_\pi^2}{F} \epsilon^{\mu\nu\delta\alpha}, \quad (4.15)$$

$$\mathcal{V}_{3\rho\omega\pi}^{\mu\nu\delta\alpha} = \frac{2}{F} (\epsilon^{\mu\nu\delta\lambda} Q^\alpha + \epsilon^{\mu\lambda\delta\alpha} q^\nu) P_\lambda, \quad (4.16)$$

$$\mathcal{V}_{4\rho\omega\pi}^{\mu\nu\delta\alpha} = \frac{2}{F} (\epsilon^{\mu\nu\delta\lambda} Q_\lambda P^\alpha + \epsilon^{\mu\lambda\delta\alpha} q_\lambda P^\nu). \quad (4.17)$$

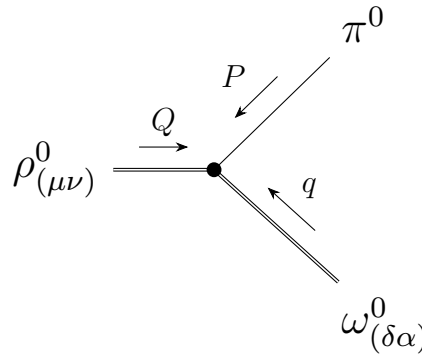


Figura 7: Convención de momentos e índices de Lorentz en el vértice de interacción $\rho^0\omega^0\pi^0$. Las flechas indican la dirección de aniquilación.

4.1.1 VÉRTICE $\rho^0\omega^0\pi^0$ EN LA APROXIMACIÓN ON-SHELL

Más adelante se mostrará que la descripción del decaimiento $\rho^0 \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma$ dentro del marco de la $R\chi T$ se ve obstaculizada por su dependencia en un conjunto de LECs cuyos valores permanecen desconocidos hasta el día de hoy en la literatura. Por otro lado, en la Ref. [22] se emplean vértices de interacción evaluados en la aproximación *on-shell*, mostrando que es posible reducir el número de grados de libertad asociados a las LECs. Por aproximación *on-shell* nos referimos a la aplicación de la regla de Feynman de un vértice bajo la suposición de que todas las partículas externas se encuentran *on-shell*, incluso cuando una de las piernas del diagrama corresponde a una línea interna, es decir, a una partícula virtual (*off-shell*).

Esta observación nos motivó a seguir la misma estrategia de análisis y, en consecuencia, a calcular los vértices correspondientes a nuestro proceso en la aproximación *on-shell*.

Para construir el vértice $\rho^0 \omega^0 \pi^0$ en la aproximación *on-shell*, consideraremos el proceso $\rho^0(Q) \rightarrow \omega^0(q), \pi^0(P)$, suponiendo que todas las partículas se encuentran *on-shell*. Esto implica que sus cuatro-momentos satisfacen las relaciones:

$$Q^2 = m_\rho^2, \quad (4.18)$$

$$q^2 = m_\omega^2, \quad (4.19)$$

$$P^2 = m_\pi^2. \quad (4.20)$$

Por lo tanto la amplitud de Feynman² puede escribirse como:

$$\mathcal{M}_{\rho \rightarrow \omega \pi} = g_{\rho \omega \pi} \epsilon_{\mu \nu \alpha \beta} \frac{2Q^\nu \epsilon_\rho^\beta}{m_\rho} \frac{2q^\mu \epsilon_\omega^\alpha}{m_\omega}, \quad (4.21)$$

donde ϵ_ρ y ϵ_ω son los vectores de polarización de los mesones ρ y ω , respectivamente. A partir de la expresión anterior, la regla de Feynman *on-shell* para el vértice³ ρ - ω - π viene dada por

$$V_{\rho \omega \pi}^{\mu \nu \delta \alpha} = g_{\rho \omega \pi} \epsilon^{\delta \mu \alpha \nu}, \quad (4.22)$$

donde

$$g_{\rho \omega \pi} = \frac{m_\pi^2 (d_1 + 8d_2) + d_3 (m_\rho^2 + m_\omega^2 - m_\pi^2)}{F}. \quad (4.23)$$

Como puede apreciarse, el vértice *on-shell* (4.22) depende de una combinación específica de LECs que, de acuerdo con la Sección 3.3, es bien conocida. En consecuencia, esta cantidad queda completamente determinada.

4.1.2 VÉRTICE DE INTERACCIÓN $\omega^0 \gamma \pi^0$

Siguiendo el procedimiento descrito en la Sección 4.1, a continuación calculamos el vértice de interacción que involucra a las partículas ω , π y γ a partir de los operadores VJP dados en las Ecs. (3.111)-(3.117). Para ello, restringimos el contenido del espacio de campos a los grados de libertad relevantes, π , γ y ω , descartando las contribuciones asociadas a otros campos y despreciando términos de orden superior. Como resultado, se obtiene

$$V^{\mu \nu} = \frac{\omega^{\mu \nu}}{\sqrt{2}} \text{diag}(1, 1, 0), \quad (4.24)$$

²La reducción de estructuras tensoriales se realizaron utilizando la librería `FeynCalc` [54, 55].

³Los índices tensoriales se asignan de acuerdo con la Fig. 7.

$$\bar{F}^{\delta\alpha} \equiv \partial^\delta A^\alpha - \partial^\alpha A^\delta, \quad (4.25)$$

$$\mathcal{F}_+^{\delta\alpha} = \frac{2}{3} e \bar{F}^{\delta\alpha} \text{diag}(2, -1, -1), \quad (4.26)$$

$$\mathcal{F}_-^{\delta\alpha} = 0, \quad (4.27)$$

$$\nabla_\alpha V^{\mu\nu} = \frac{\partial_\alpha \omega^{\mu\nu}}{\sqrt{2}} \text{diag}(1, 1, 0), \quad (4.28)$$

$$\chi_+ = 2m_\pi^2 \text{diag}(1, 1, -1). \quad (4.29)$$

En consecuencia, los operadores VJP, toman la forma

$$\tilde{\mathcal{O}}_{\omega\gamma\pi}^1 = -\frac{2\sqrt{2}e}{F} \epsilon_{\mu\nu\delta\sigma} \bar{F}^{\delta\alpha} \omega^{\mu\nu} \partial_\alpha \partial^\sigma \pi, \quad (4.30)$$

$$\tilde{\mathcal{O}}_{\omega\gamma\pi}^2 = -\frac{2\sqrt{2}e}{F} \epsilon_{\mu\nu\delta\sigma} \bar{F}^{\delta\sigma} \omega^{\mu\alpha} \partial_\alpha \partial^\nu \pi, \quad (4.31)$$

$$\tilde{\mathcal{O}}_{\omega\gamma\pi}^3 = \frac{4\sqrt{2}e m_\pi^2}{F} \epsilon_{\mu\nu\delta\sigma} \bar{F}^{\delta\sigma} \omega^{\mu\nu} \pi, \quad (4.32)$$

$$\tilde{\mathcal{O}}_{\omega\gamma\pi}^4 = 0, \quad (4.33)$$

$$\tilde{\mathcal{O}}_{\omega\gamma\pi}^5 = -\frac{2\sqrt{2}e}{F} \epsilon_{\mu\nu\delta\sigma} \bar{F}^{\delta\alpha} \partial_\alpha \omega^{\mu\nu} \partial^\sigma \pi, \quad (4.34)$$

$$\tilde{\mathcal{O}}_{\omega\gamma\pi}^6 = -\frac{2\sqrt{2}e}{F} \epsilon_{\mu\nu\delta\sigma} \bar{F}^{\delta\sigma} \partial_\alpha \omega^{\mu\alpha} \partial^\nu \pi, \quad (4.35)$$

$$\tilde{\mathcal{O}}_{\omega\gamma\pi}^7 = -\frac{2\sqrt{2}e}{F} \epsilon_{\mu\nu\delta\sigma} \bar{F}^{\delta\alpha} \partial^\sigma \omega^{\mu\nu} \partial_\alpha \pi. \quad (4.36)$$

Por lo tanto, la regla de Feynman correspondiente al vértice⁴ $\omega^0 \pi^0 \gamma$ (Fig. 8) viene dada por

$$V_{\omega\gamma\pi}^{\mu\nu l} = \sum_{a=1}^7 \frac{c_j}{M_V} \mathcal{V}_{j\omega\pi\gamma}^{\mu\nu l}, \quad (4.37)$$

donde

$$\mathcal{V}_{1\omega\gamma\pi}^{\mu\nu l} = \frac{2\sqrt{2}e i}{F} (\epsilon^{\mu\nu l \lambda} k_\alpha P^\alpha - \epsilon^{\mu\nu \alpha \lambda} k_\alpha P^l) P_\lambda, \quad (4.38)$$

$$\mathcal{V}_{2\omega\gamma\pi}^{\mu\nu l} = \frac{4\sqrt{2}e i}{F} \epsilon^{\mu\delta\lambda l} k_\delta P_\lambda P^\nu, \quad (4.39)$$

$$\mathcal{V}_{3\omega\gamma\pi}^{\mu\nu l} = \frac{8\sqrt{2}e i m_\pi^2}{F} \epsilon^{\mu\nu l \lambda} k_\lambda, \quad (4.40)$$

$$\mathcal{V}_{4\omega\gamma\pi}^{\mu\nu l} = 0, \quad (4.41)$$

$$\mathcal{V}_{5\omega\gamma\pi}^{\mu\nu l} = \frac{2\sqrt{2}e i}{F} (\epsilon^{\mu\nu l \lambda} k_\alpha q^\alpha - \epsilon^{\mu\nu \alpha \lambda} k_\alpha q^l) P_\lambda, \quad (4.42)$$

⁴La asignación de los índices de Lorentz μ, ν y l se realiza de acuerdo con la Fig. 8.

$$\mathcal{V}_{6\omega\gamma\pi}^{\mu\nu l} = \frac{4\sqrt{2}e i}{F} \epsilon^{\mu\lambda\alpha} k_\alpha q^\nu P_\lambda, \quad (4.43)$$

$$\mathcal{V}_{7\omega\gamma\pi}^{\mu\nu l} = \frac{2\sqrt{2}e i}{F} (\epsilon^{\mu\nu\lambda} k_\alpha P^\alpha - \epsilon^{\mu\nu\alpha\lambda} k_\alpha P^l) q_\lambda. \quad (4.44)$$

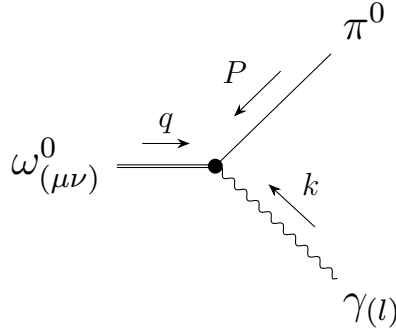


Figura 8: Convención de momentos e índices de Lorentz para el vértice $\omega^0 \gamma \pi^0$. Las flechas indican la dirección de aniquilación..

4.1.3 VÉRTICE $\omega^0 \gamma \pi^0$ EN LA APROXIMACIÓN *ON-SHELL*

Esta sección sigue de cerca el procedimiento presentado en la Sección 4.1.1. El vértice *on-shell* puede obtenerse a partir del decaimiento $\omega^0 \rightarrow \pi^0 \gamma$. Este proceso ya fue estudiado en la Ref. [19], donde además se determina la amplitud de Feynman correspondiente. A continuación citamos su expresión

$$\mathcal{M}_{\omega^0 \rightarrow \pi^0 \gamma} = e g_{\omega\pi} \epsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} k^\sigma \frac{2\epsilon_\omega^\alpha q^\rho}{m_\omega} \epsilon_\gamma^\beta, \quad (4.45)$$

donde $g_{\omega\pi}$, al utilizar las Ecs. (3.118)–(3.120), puede escribirse

$$g_{\omega\pi} = \frac{N_c}{32\pi^2 F_V F} m_\omega^2. \quad (4.46)$$

Por lo tanto, el vértice *on-shell* está dado por

$$V_{\omega\gamma\pi}^{\mu\nu l}{}_{on\ shell} = e g_{\omega\pi} \epsilon_{\mu\nu\sigma} k^\sigma, \quad (4.47)$$

lo cual coincide con la expresión reportada en la Ref. [22].

4.2 DECAIMIENTO DE ρ^0 EN $\pi^0 \pi^0 \gamma$

En esta sección analizamos el proceso $\rho^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0 \gamma$ utilizando el lagrangiano dado en la Ec. (3.127). A orden árbol, la amplitud de Feynman \mathcal{M} se calcula a partir del diagrama mostrado en la Fig. 9. En particular, se requiere la regla de Feynman correspondiente al vértice VJP , así como al vértice VVP , en el cual la resonancia ω es intercambiada como partícula virtual. Nuestros resultados muestran que el $\mathcal{BR}(\rho^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0 \gamma)$ depende de la combinación específica de LECs $c_{57} \equiv c_5 + c_7$ y d_4 . Con el fin de reducir el número de acoplamientos desconocidos, es posible emplear el vértice *on-shell* $\rho\omega\pi$, el vértice *on-shell* $\omega\pi\gamma$, o bien considerar ambos vértices *on-shell*.

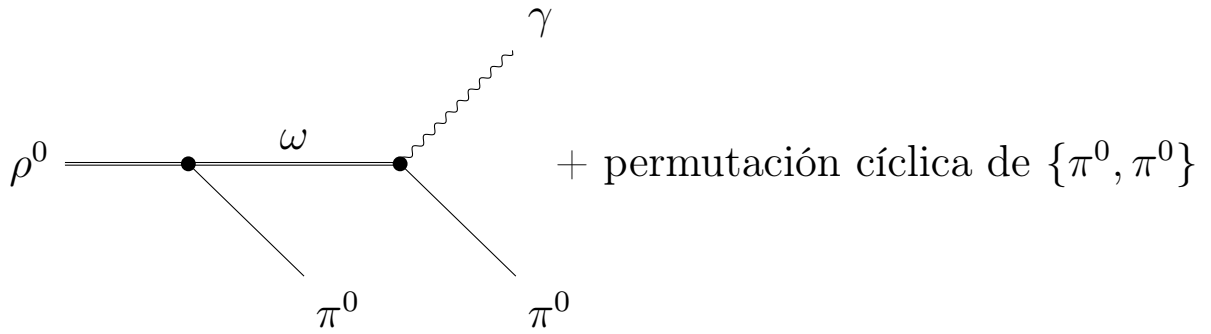


Figura 9: Diagrama de Feynman a orden árbol para el proceso $\rho^0(Q) \rightarrow \pi^0(P_1) \pi^0(P_2) \gamma(k)$, mediado por una resonancia ω virtual.

4.2.1 ESCENARIO 1: EL DECAIMIENTO $\rho^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0 \gamma$ MEDIANTE VÉRTICES PURAMENTE *ON-SHELL*

En este escenario analizamos el \mathcal{BR} suponiendo ambos vértices *on-shell*, tal como se definen en las Ecs. (4.22) y (4.47). La amplitud de Feynman asociada viene dada por

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}|_{q=P_1+k} + \mathcal{M}|_{q=P_2+k}, \quad (4.48)$$

donde

$$\mathcal{M}|_q = \frac{8e g_\rho g_{\omega\pi\rho}}{m_\rho(M_V^2 - q^2) M_V^2} [(\epsilon_\gamma \cdot \epsilon_\rho) f_1 + (\epsilon_\rho \cdot k) (\epsilon_\gamma \cdot f_2) + (\epsilon_\rho \cdot q) (\epsilon_\gamma \cdot f_3)], \quad (4.49)$$

y

$$f_1 = (k \cdot q) (q \cdot Q) - M_V^2 (k \cdot Q), \quad (4.50)$$

$$f_2^\alpha = M_V^2 Q^\alpha - q^\alpha (q \cdot Q), \quad (4.51)$$

$$f_3^\alpha = q^\alpha (k \cdot Q) - Q^\alpha (k \cdot q). \quad (4.52)$$

Los productos escalares pueden reescribirse en términos de las variables de Mandelstam m como sigue:

$$Q \cdot P_1 = \frac{m_\rho^2 + m_\pi^2 - m_{23}}{2}, \quad (4.53)$$

$$Q \cdot k = \frac{m_\rho^2 - m_{12}}{2}, \quad (4.54)$$

$$Q \cdot P_2 = \frac{m_\rho^2 + m_\pi^2 - m_{31}}{2}, \quad (4.55)$$

$$k \cdot P_2 = \frac{m_{23} - m_\pi^2}{2}, \quad (4.56)$$

$$P_1 \cdot P_2 = \frac{m_{12} - 2m_\pi^2}{2}, \quad (4.57)$$

donde

$$m_{31} \equiv (k + P_1)^2, \quad (4.58)$$

$$m_{23} \equiv (k + P_2)^2, \quad (4.59)$$

$$m_{12} \equiv (P_1 + P_2)^2. \quad (4.60)$$

Dado que solo dos de las tres variables de Mandelstam son independientes, la cinemática del proceso queda completamente determinada por un par de ellas. En este trabajo se eligen m_{12} y m_{23} ; por lo tanto, el \mathcal{BR} se calcula como

$$\mathcal{BR}(\rho^0 \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma) = \frac{1}{\Gamma_\rho} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{32m_\rho^3} \int_{m_\pi^2}^{(m_\rho - m_\pi)^2} \int_{m_{23-}}^{m_{23+}} X \, dm_{12} \, dm_{23}, \quad (4.61)$$

donde

$$X = \frac{1}{3} \sum_{r=1}^3 \sum_{s=1}^2 |\mathcal{M}|^2, \quad (4.62)$$

y Γ_ρ denota el ancho total de decaimiento. Los valores mínimos y máximos permitidos de m_{12} y m_{23} delimitan la región del llamado diagrama de Dalitz (Fig. 10), definida por las siguientes relaciones:

$$m_{23\pm} = (E_2^* + E_3^*)^2 - \left(E_2^* \mp \sqrt{E_3^{*2} - m_\pi^2} \right)^2, \quad (4.63)$$

$$E_2^* = \frac{m_{12} - m_\pi^2}{2\sqrt{m_{12}}}, \quad (4.64)$$

$$E_3^* = \frac{m_\rho^2 - m_{12} - m_\pi^2}{2\sqrt{m_{12}}}. \quad (4.65)$$

Por lo tanto, la predicción del \mathcal{BR}^5 al considerar ambos vértices *on-shell* y aplicar las restricciones (3.121)–(3.123) conduce al valor

$$\mathcal{BR}(\rho^0 \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma)_{on\ shell} = 2.111(10) \times 10^{-4}, \quad (4.66)$$

mientras que, al emplear las restricciones (3.124)–(3.126), se obtiene

$$\mathcal{BR}(\rho^0 \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma)_{on\ shell} = 1.606(6) \times 10^{-4}. \quad (4.67)$$

Los valores de las masas de los mesones y de sus anchos de decaimiento utilizados han sido extraídos del Particle Data Group [1]: $m_\omega = 782.66(13)$ MeV, $m_\rho = 775.26(23)$ MeV, $m_\pi = 134.9768(5)$ MeV, $\Gamma_\rho = 147.4(8)$ MeV y $\Gamma_\omega = 8.68(13)$ MeV. Asimismo, de la Ref. [19] se adoptan los valores $M_V = m_\rho$, $F_V = 92.4$ MeV y $N_c = 3$. Los números entre paréntesis indican las incertidumbres.

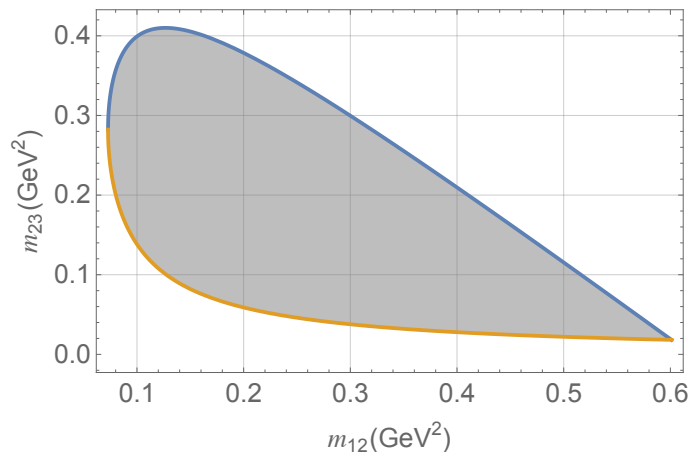


Figura 10: Región cinemáticamente permitida (Diagrama de Dalitz) para el decaimiento $\rho^0 \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma$, delimitada por las curvas azul y naranja, que corresponden a los límites cinemáticos superior e inferior dados por la Ec. (4.63).

La incertidumbre propagada mostrada en las ecuaciones (4.67) y (4.66) se ha estimado del siguiente modo. Los parámetros de entrada tomados del PDG poseen una incertidumbre σ ; en consecuencia, la evaluación se realiza empleando el valor central de todos los parámetros, así como los valores desplazados en $\pm 1\sigma$. Finalmente, la incertidumbre se obtiene como la suma de las desviaciones con respecto al valor central.

⁵Todas las integrales que aparecen a lo largo de este manuscrito resultantes del cálculo del \mathcal{BR} fueron evaluadas numéricamente mediante las rutinas y librerías predefinidas implementadas en el software *Mathematica* [56].

La comparación de nuestras predicciones con el valor experimental $\mathcal{BR}_{\text{exp}}(\rho^0 \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma) = 4.5(8) \times 10^{-5}$ muestra de manera inequívoca que el tratamiento con ambos vértices *on-shell* no proporciona una descripción adecuada y consistente del proceso.

4.2.2 ESCENARIO 2: EL DECAIMIENTO $\rho^0 \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma$ MEDIANTE EL VÉRTICE $V_{\rho\omega\pi}$ ON-SHELL.

En esta sección se trata el vértice $V_{\omega\gamma\pi}$ (4.38)–(4.44) como *off-shell*, mientras que el vértice $V_{\rho\omega\pi}$ (4.22) se mantiene *on-shell*. En consecuencia, la amplitud de Feynman viene dada por

$$\mathcal{M} = \frac{16 i \sqrt{2} e g_{\rho\omega\pi}}{F m_\rho M_V^2} \left[-c_{57} H_1 + \frac{c_{56} M_V^2 H_2 - c_{13} m_\pi^2 H_3 + c_{125} H_4}{M_V^2 - (k + P_2)^2} \right] + \{P_1 \longleftrightarrow P_2\}, \quad (4.68)$$

donde las funciones H_1 , H_2 , H_3 y H_4 se presentan en el Apéndice A. Con el fin de simplificar la notación, se define

$$c_1 + 4c_3 \equiv c_{13}, \quad (4.69)$$

$$c_1 - c_2 + c_5 \equiv c_{125}, \quad (4.70)$$

$$c_5 - c_6 \equiv c_{56}, \quad (4.71)$$

$$c_5 + c_7 \equiv c_{57}. \quad (4.72)$$

Al aplicar las relaciones (3.118)–(3.120), la ecuación (4.68) depende únicamente de c_{57} . En consecuencia, al imponer $\mathcal{BR}_{\text{th}} = \mathcal{BR}_{\text{exp}}$, se obtiene una ecuación cuadrática para c_{57} . A partir de la restricción (3.123) se encuentran las raíces $c_{57} = \{0.032(3), -0.025(3)\}$, mientras que para la restricción (3.126) $c_{57} = \{0.030(3), -0.025(3)\}$.

4.2.3 ESCENARIO 3: EL DECAIMIENTO $\rho^0 \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma$ MEDIANTE EL VÉRTICE $V_{\omega\gamma\pi}$ ON-SHELL.

En este escenario, se elige el vértice $V_{\omega\gamma\pi}$ (4.47) como *on-shell*, mientras que el vértice $V_{\rho\omega\pi}$ (4.14)–(4.17) se mantiene *off-shell*. En consecuencia, la amplitud de Feynman se reduce a

$$\mathcal{M} = \frac{8 e g_{\omega\pi}}{F m_\rho M_V^2} \left[d_4 h_1 + \frac{-d_{12} m_\pi^2 h_2 + d_3 h_3}{M_V^2 - (k + P_2)^2} \right] + \{P_1 \longleftrightarrow P_2\}, \quad (4.73)$$

donde las funciones h_1 , h_2 y h_3 están definidas en el Apéndice A, y

$$d_1 + 8d_2 \equiv d_{12}. \quad (4.74)$$

Una vez impuestas las relaciones (3.121) y (3.122), o bien (3.124) y (3.125), la Ec. (4.73) se simplifica, de modo que la dependencia queda únicamente en la LEC d_4 . En consecuencia, al imponer la condición $\mathcal{BR}_{\text{th}} = \mathcal{BR}_{\text{exp}}$, se obtiene una ecuación cuadrática para d_4 . Sus raíces son $d_4 = \{0.901(54), -0.221(54)\}$ al emplear las restricciones (3.121)–(3.123), mientras que al utilizar (3.124)–(3.126) se obtiene $d_4 = \{1.059(65), -0.327(65)\}$.

Como se discutió previamente, un análisis similar fue realizado en la Ref. [22] para el decaimiento $\omega \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma$, donde se reportan los valores $d_4 = \{0.82(5), -0.12(5)\}$. Aunque los valores centrales obtenidos en nuestro análisis no coinciden exactamente con los reportados en dicha referencia, se encuentran del mismo orden de magnitud.

4.2.4 ESCENARIO 4: EL DECAIMIENTO $\rho^0 \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma$ CON VÉRTICES OFF-SHELL.

Finalmente, regresamos al escenario en el que ambos vértices se encuentran en condición *off-shell*. En este escenario, la amplitud de Feynman está dada por

$$\mathcal{M} = \frac{16 i e \sqrt{2}}{F^2 m_\rho M_V^3} \left[\frac{c_{56} M_V^2 l_1 + c_{13} m_\pi^2 l_2 - c_{57} l_3 - c_{125} l_4}{M_V^2 - (k + P_2)^2} \right] + P_1 \longleftrightarrow P_2. \quad (4.75)$$

Al imponer las restricciones discutidas en la Sección 3.3, la Ec. (4.75) depende únicamente de c_{57} y d_4 ⁶.

Es importante notar que en los escenarios anteriores ya se han obtenido valores para c_{57} y d_4 . Estos valores pueden combinarse para calcular el \mathcal{BR} y estudiar el efecto del uso de vértices *on-shell*, particularmente en los escenarios 2 y 3. Los resultados correspondientes se muestran en la Tabla 5.

Los resultados de la Tabla 5 indican que la combinación de vértices *on-shell* y *off-shell* proporciona una estimación más precisa en el \mathcal{BR} en comparación con el escenario que emplea únicamente vértices *on-shell*. Por ejemplo, el par de parámetros $(c_{57}, d_4) = (0.030(3), 1.059(65))$ produce un valor de $\mathcal{BR}(\rho^0 \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma) = 3.65(88) \times 10^{-5}$, lo que representa una mejora notable con respecto al resultado obtenido en el escenario 1. Sin embargo, este valor aún se encuentra por debajo de la medición experimental,

⁶La dependencia en d_4 está contenida en las funciones l_1 , l_2 , l_3 y l_4 , definidas en el Apéndice A.

Restricciones (3.118)–(3.123)			Restricciones (3.124)–(3.126)		
c_{57}	d_4	$\mathcal{BR} \times 10^{-5}$	c_{57}	d_4	$\mathcal{BR} \times 10^{-5}$
0.032(3)	0.901(54)	3.08(63)	0.030(3)	1.059(65)	3.65(88)
-0.025(3)	0.901(54)	1.17(35)	-0.025(3)	1.059(65)	1.74(53)
0.032(3)	-0.221(54)	0.63(19)	0.030(3)	-0.327(65)	0.93(30)
-0.025(3)	-0.221(54)	0.78(20)	-0.025(3)	-0.327(65)	1.09(30)

Tabla 5: Predicción de $\mathcal{BR} \equiv \mathcal{BR}(\rho^0 \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma)$ obtenida a partir de combinaciones de los valores de c_{57} y d_4 correspondientes a los escenarios 2 y 3.

$\mathcal{BR}(\rho^0 \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma) = 4.5(8) \times 10^{-5}$, lo que corresponde a una desviación relativa de aproximadamente 19% respecto al valor central.

En consecuencia, el enfoque adecuado es el uso de vértices *off-shell*. Sin embargo, en este marco ($R\chi T$) existen dos grados de libertad, c_{57} y d_4 , por lo que la restricción impuesta por el valor experimental del \mathcal{BR} únicamente permite acotar el espacio de parámetros (c_{57}, d_4) , como se muestra en la Fig. 11. Algunos valores seleccionados de esta solución se presentan en la Tabla 6.

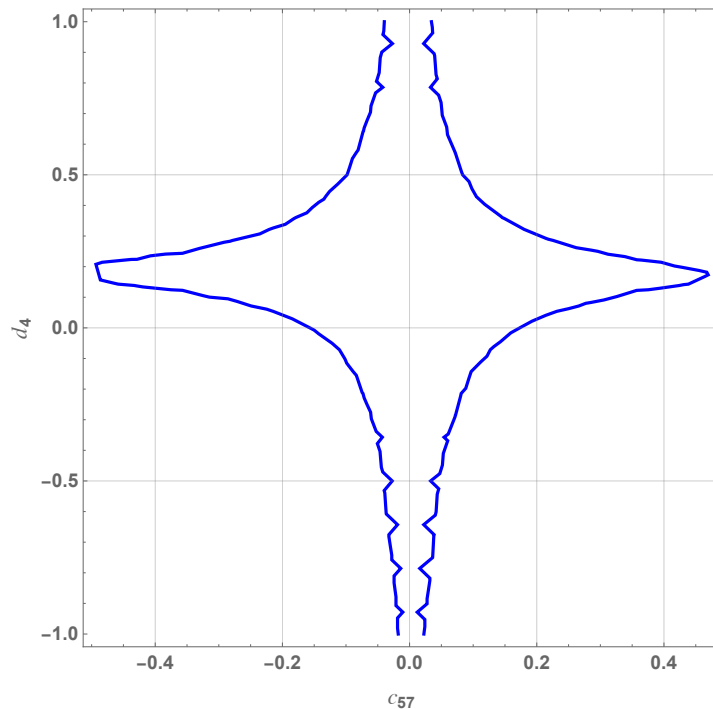


Figura 11: Lugar geométrico en el espacio de parámetros (c_{57}, d_4) consistente con el valor experimental $\mathcal{BR}(\rho \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma) = 4.5 \times 10^{-5}$, sujeto a las restricciones (3.118)–(3.123).

Cabe destacar que los pares (c_{57}, d_4) de la Fig. 11 presentan tres características predominantes en el \mathcal{BR} diferencial $dB/d\sqrt{m_{12}} \equiv d\mathcal{BR}(\rho \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma)/d\sqrt{m_{12}}$, como se

ilustra en la Fig. 12. En particular, la curva azul muestra un acuerdo cualitativo con los resultados reportados en la Ref. [48], donde la interacción está mediada por bucles de piones dentro de un marco teórico que combina el modelo de Dominancia de Mesones Vectoriales y el modelo sigma lineal.

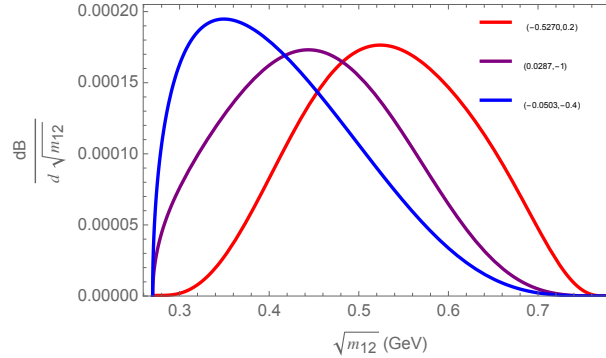


Figura 12: Distribución del \mathcal{BR} diferencial $dB/d\sqrt{m_{12}}$ para tres pares específicos (c_{57}, d_4) compatibles con el \mathcal{BR} experimental.

d_4	$c_{57}(sol1)$	$c_{57}(sol2)$
-0.98	0.03	-0.03
0.90	0.03	-0.03
-0.80	0.03	-0.03
-0.70	0.04	-0.03
-0.60	0.04	-0.04
-0.50	0.05	-0.04
-0.40	0.06	-0.05
-0.30	0.07	-0.06
-0.20	0.09	-0.08
-0.10	0.12	-0.10
0.02	0.20	-0.18
0.10	0.33	-0.31
0.20	0.44	-0.53
0.30	0.21	-0.25
0.40	0.12	-0.15
0.50	0.09	-0.10
0.60	0.07	-0.08
0.70	0.05	-0.07
0.80	0.05	-0.05
0.90	0.04	-0.05
0.98	0.04	-0.04

Tabla 6: La primera columna muestra el valor de d_4 tomado como variable independiente, mientras que las columnas posteriores presentan los valores de c_{57} que reproducen el \mathcal{BR} experimental, obtenidos mediante las restricciones (3.118)–(3.123).

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

En este trabajo se estudió el proceso de decaimiento $\rho^0 \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma$ dentro del marco de la teoría quiral de perturbaciones con resonancias ($R\chi T$). En particular, al considerar vértices puramente *off-shell*, se observa que el *Branching Ratio* (\mathcal{BR}) depende únicamente de las constantes de acoplamiento de baja energía (LECs) $c_{57} \equiv c_5 + c_7$ y d_4 .

Con el fin de reducir los grados de libertad asociados a las LECs, se analizaron los distintos escenarios que surgen de las posibles combinaciones de vértices de interacción *on-shell* y *off-shell*. Se encuentra que el escenario puramente *on-shell* conduce a un \mathcal{BR} significativamente mayor que el valor experimental, lo que indica que dicha aproximación no describe adecuadamente el proceso. En cambio, al imponer que uno de los vértices sea *on-shell*, el número de acoplamientos desconocidos se reduce a uno, ya sea c_{57} o d_4 . El acoplamiento restante puede entonces determinarse a partir de las raíces de la ecuación cuadrática obtenida al imponer la condición $\mathcal{BR}_{\text{th}} = \mathcal{BR}_{\text{exp}}$. Sin embargo, este procedimiento no permite discriminar entre las dos soluciones resultantes.

Los valores de c_{57} y d_4 obtenidos bajo este supuesto se resumen en la Tabla 5. Al utilizar simultáneamente dichos acoplamientos para evaluar nuevamente el \mathcal{BR} , se observa que, incluso en el mejor de los casos, la predicción teórica difiere en un 19% del valor experimental 4.5×10^{-5} . Este resultado sugiere que una descripción adecuada del proceso requiere considerar vértices puramente *off-shell*. Sin embargo, como se mencionó al inicio de esta sección, bajo esta hipótesis el \mathcal{BR} depende de manera conjunta de c_{57} y d_4 , por lo que el valor experimental sólo permite restringir el espacio de parámetros (c_{57}, d_4) a una región compatible con los datos, como se muestra en la Fig. 11.

Por otro lado, la LEC d_4 fue reportada por primera vez en la Ref. [22] a partir del decaimiento $\omega \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma$, siguiendo una estrategia en la que el vértice $\rho\omega\pi$ se considera *on-shell*. En dicho análisis se obtuvo $d_4 = \{0.82(5), -0.12(5)\}$. Estos valores son comparables, en orden de magnitud, con los considerados en nuestro análisis. Si se adoptan estos valores para d_4 , la región permitida en el espacio de parámetros conduce a $c_{57} = \{0.04, -0.05\}$ si $d_4 = 0.82$ y $c_{57} = \{0.11, -0.10\}$ si $d_4 = -0.12$. Sin embargo, estos valores no satisfacen la

estimación $|c_i| \leq 0.015$ propuesta en la Ref. [20].

Debe enfatizarse, no obstante, que la determinación de d_4 en la Ref. [22] asume el vértice $\rho\omega\pi$ *on-shell*, mientras que la estimación para c_i de la Ref. [20] se infiere a partir de diversas determinaciones fenomenológicas disponibles, tales como combinaciones del tipo $c_5 - c_6$, así como valores de c_3 y c_4 , junto con un criterio de consistencia para el conjunto de acoplamientos. Por esta razón, estas comparaciones deben interpretarse con cautela.

Finalmente, en la Fig. 12 mostramos la distribución diferencial del *branching ratio* ($d\mathcal{BR}$) para tres conjuntos representativos de (c_{57}, d_4) . Se observa que la forma de la distribución depende de los valores de estas LECs, por lo que esta información podría emplearse para restringir aún más el espacio de parámetros mediante un ajuste a los datos experimentales de la $d\mathcal{BR}$ (trabajo en progreso).

CAPÍTULO 6

PRODUCTOS ACADÉMICOS DERIVADOS DE LA TESIS

Como resultado del trabajo de investigación desarrollado durante la presente tesis doctoral, se generaron los siguientes productos académicos:

- **Artículo científico publicado:** Barajas-Aguilar, J. A., Flores-Báez, F. V., Morones-Ibarra, J. R., “Decay $\rho^0 \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma$ within Resonance Chiral Theory”, *Particles* **8**, 88 (2025). DOI: <https://doi.org/10.3390/particles8040088>
- Barajas-Aguilar, J. A., “Teorías efectivas de la Cromodinámica Cuántica (QCD)”, presentado en la XV School of the Division of Gravitation and Mathematical Physics of the Mexican Physical Society, 2025.
- Mención honorífica en el concurso de pósters de la XV School of the Division of Gravitation and Mathematical Physics of the Mexican Physical Society, 2025.
- Barajas-Aguilar, J. A., Flores-Báez, F. V., “Teoría cuántica de la fuerza fuerte: quarks y gluones”, cartel científico presentado en el marco del 25° Aniversario del Posgrado en Ingeniería Física, UANL, 2025.
- Barajas-Aguilar, J. A., “Análisis de la resonancia ρ en el marco de la Teoría de Perturbaciones Quiral con Resonancias”, presentada en el 4to. Coloquio Interdisciplinario de Posgrado, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Universidad Autónoma de Nuevo León, 2025.
- Barajas-Aguilar, J. A., Flores-Báez, V., Santillán-Moreno, J. D., “Taller Construcción de amplitudes con reglas de Feynman”, V Escuela de Verano de Modelación y Herramientas para el Análisis de Datos, Universidad Autónoma de Nuevo León, 2025.
- Barajas-Aguilar, J. A., Flores-Báez, V., Santillán-Moreno, J. D., “Taller Evaluación de loops y funciones de Passarino–Veltman”, V Escuela de Verano de Modelación

y Herramientas para el Análisis de Datos, Universidad Autónoma de Nuevo León, 2025.

- Barajas-Aguilar, J. A., Flores-Báez, V., Santillán-Moreno, J. D., “Taller FeynCalc en Jupyter Notebook”, V Escuela de Verano de Modelación y Herramientas para el Análisis de Datos, Universidad Autónoma de Nuevo León, 2025.
- Barajas-Aguilar, J. A., A., Flores-Báez, “Taller Instalación y uso de FeynCalc”, IV Escuela de Verano de Modelación y Herramientas para el Análisis de Datos, Universidad Autónoma de Nuevo León, 2024.
- Barajas-Aguilar, J. A., “Modelos de Universos Homogéneos e Isotrópicos”, presentado en el 2do. Coloquio Interdisciplinario de Posgrado, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Universidad Autónoma de Nuevo León, 2023.

6.1 ACTIVIDADES DE RETRIBUCIÓN SOCIAL Y FORMACIÓN DE RECURSOS HUMANOS

Como parte de las actividades de retribución social y fortalecimiento de la formación académica, se llevaron a cabo las siguientes acciones durante el periodo de realización de la tesis:

- Participación como jurado evaluador en el Encuentro de Carteles Científicos de Física Experimental, Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, UANL, 2025.
- Participación como jurado calificador en la Olimpiada Nacional de Física, Sociedad Mexicana de Física, 2025.
- Representante del delegado estatal en la Olimpiada Nacional de Física, SMF, 2025.
- Organización de actividades académicas y de divulgación científica en el evento “Un siglo de la mecánica cuántica: fundamentos, desafíos y aplicaciones emergentes”, FCFM-UANL, 2025.
- Evaluador de proyectos de investigación de la Unidad de Aprendizaje de Física Experimental, Licenciatura en Física, UANL, 2024.
- Barajas-Aguilar, J. A., Hinojosa-Saldaña, E. I., “Geometría simpléctica en mecánica clásica”, presentado en modalidad póster en el LXVII Congreso Nacional de Física, Sociedad Mexicana de Física, 2024.

6.2 FORMACIÓN ACADÉMICA COMPLEMENTARIA

Durante el desarrollo del programa doctoral se participó en diversas actividades de formación especializada, entre las que destacan:

- Curso “Herramientas para el manejo de estrés”, Universidad Autónoma de Nuevo León, julio de 2021 (participante).
- Cátedra Bogdan Mielnik, “Quantum field theory in curved spacetimes: a modern perspective”, Departamento de Física, Cinvestav, 14–18 de agosto de 2023 (asistente).
- Diplomado “Diplomado básico en docencia universitaria”, Universidad Autónoma de Nuevo León, Programa de Superación Académica, 150 horas (5 créditos UANL), 2023.
- Certificación de competencia laboral “Facilitar procesos de aprendizaje para el desarrollo de competencias en el nivel medio superior”, Estándar de Competencia EC0999, CONOCER – Secretaría de Educación Pública, 2021.

APÉNDICE A

EXPRESIONES ANALÍTICAS DETALLADAS Y SUPLEMENTARIAS

Este apéndice tiene como finalidad presentar las expresiones analíticas explícitas y extensas obtenidas al calcular las amplitudes de Feynman para los distintos escenarios que involucran vértices *on-shell* y *off-shell*, descritos en el Capítulo 4.

Las expresiones explícitas para las funciones H_1 , H_2 , H_3 y H_4 se presentan a continuación:

$$\begin{aligned}
H_1 = & -(k \cdot P_2)(\varepsilon_\gamma \cdot \varepsilon_\rho)(Q \cdot (k + P_2)) \\
& + (k \cdot \varepsilon_\rho) [(k \cdot P_2)(\varepsilon_\gamma \cdot Q) + (Q \cdot P_2)(\varepsilon_\gamma \cdot P_2)] \\
& + (\varepsilon_\rho \cdot P_2) [(k \cdot P_2)(\varepsilon_\gamma \cdot Q) - (k \cdot Q)(\varepsilon_\gamma \cdot P_2)], \tag{A.1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_2 = & -(\varepsilon_\gamma \cdot \varepsilon_\rho) [(k \cdot Q) ((k \cdot P_2) + m_\pi^2) - (k \cdot P_2)(Q \cdot P_2)] \\
& + (k \cdot \varepsilon_\rho) [((k \cdot P_2) + m_\pi^2) (\varepsilon_\gamma \cdot Q) - (Q \cdot P_2)(\varepsilon_\gamma \cdot P_2)] \\
& + (\varepsilon_\rho \cdot P_2) [(k \cdot Q)(\varepsilon_\gamma \cdot P_2) - (k \cdot P_2)(\varepsilon_\gamma \cdot Q)], \tag{A.2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_3 = & (\varepsilon_\gamma \cdot \varepsilon_\rho) [(k \cdot Q) (M_V^2 - (k \cdot P_2)) - (k \cdot P_2)(Q \cdot P_2)] \\
& + (k \cdot \varepsilon_\rho) [((k \cdot P_2) - M_V^2) (\varepsilon_\gamma \cdot Q) + (Q \cdot P_2)(\varepsilon_\gamma \cdot P_2)] \\
& + (\varepsilon_\rho \cdot P_2) [(k \cdot P_2)(\varepsilon_\gamma \cdot Q) - (k \cdot Q)(\varepsilon_\gamma \cdot P_2)], \tag{A.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_4 = & (\varepsilon_\gamma \cdot \varepsilon_\rho) [(k \cdot Q) ((k \cdot P_2)^2 + m_\pi^2 M_V^2) + (k \cdot P_2)(Q \cdot P_2) ((k \cdot P_2) - M_V^2)] \\
& + (k \cdot \varepsilon_\rho) [(Q \cdot P_2) (M_V^2 - (k \cdot P_2)) (\varepsilon_\gamma \cdot P_2) - (\varepsilon_\gamma \cdot Q) ((k \cdot P_2)^2 + m_\pi^2 M_V^2)] \\
& + (M_V^2 - k \cdot P_2)(\varepsilon_\rho \cdot P_2) [(k \cdot P_2)(\varepsilon_\gamma \cdot Q) - (k \cdot Q)(\varepsilon_\gamma \cdot P_2)]. \tag{A.4}
\end{aligned}$$

De manera análoga, las expresiones explícitas para las funciones h_1 , h_2 y h_3 son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 h_1 = & (\varepsilon_\gamma \cdot P_2) [(k \cdot Q)(\varepsilon_\rho \cdot P_1) - (Q \cdot P_1)(k \cdot \varepsilon_\rho)] \\
 & + (k \cdot P_2) [(Q \cdot P_1)(\varepsilon_\gamma \cdot \varepsilon_\rho) - (Q \cdot \varepsilon_\gamma)(\varepsilon_\rho \cdot P_1)], \tag{A.5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h_2 = & (\varepsilon_\gamma \cdot \varepsilon_\rho) [(k \cdot Q) ((k \cdot P_2) - M_V^2) + (k \cdot P_2)(Q \cdot P_2)] \\
 & + (k \cdot \varepsilon_\rho) [(M_V^2 - (k \cdot P_2)) (\varepsilon_\gamma \cdot Q) - (Q \cdot P_2)(\varepsilon_\gamma \cdot P_2)] \\
 & + (\varepsilon_\rho \cdot P_2) [(k \cdot Q)(\varepsilon_\gamma \cdot P_2) - (k \cdot P_2)(\varepsilon_\gamma \cdot Q)], \tag{A.6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h_3 = & -(P_1 \cdot P_2) \left[(k \cdot P_2) \left((\varepsilon_\gamma \cdot \varepsilon_\rho)(Q \cdot (k + P_2) + m_\rho^2) - (Q \cdot \varepsilon_\gamma)(\varepsilon_\rho \cdot (P_2 + Q)) \right) \right. \\
 & \left. + (k \cdot Q)(\varepsilon_\gamma \cdot P_2)(\varepsilon_\rho \cdot (P_2 + Q)) \right] \\
 & + (k \cdot P_1) \left[(M_V^2 - k \cdot P_2)(\varepsilon_\gamma \cdot \varepsilon_\rho)(Q \cdot (k + P_2) + m_\rho^2) \right. \\
 & \left. - (M_V^2 - k \cdot P_2)(Q \cdot \varepsilon_\gamma)(\varepsilon_\rho \cdot (P_2 + Q)) \right. \\
 & \left. + (\varepsilon_\gamma \cdot P_2) \left((Q \cdot P_2)(\varepsilon_\rho \cdot Q) - (k \cdot Q + m_\rho^2)(\varepsilon_\rho \cdot P_2) \right) \right] \\
 & + M_V^2(k \cdot Q)(\varepsilon_\gamma \cdot P_1)(\varepsilon_\rho \cdot (P_2 + Q)) \\
 & + (k \cdot P_2)(Q \cdot P_1)(\varepsilon_\gamma \cdot \varepsilon_\rho)(Q \cdot (k + P_2)) \\
 & - (k \cdot P_2)(Q \cdot \varepsilon_\rho)(\varepsilon_\gamma \cdot P_1)(Q \cdot (k + P_2)) \\
 & + m_\rho^2(k \cdot P_2)(\varepsilon_\gamma \cdot P_1)(\varepsilon_\rho \cdot P_2) \\
 & + (k \cdot \varepsilon_\rho) \left[m_\rho^2(k \cdot P_2)(\varepsilon_\gamma \cdot P_1) + (P_1 \cdot P_2)(\varepsilon_\gamma \cdot P_2)(Q \cdot P_2 + m_\rho^2) \right. \\
 & \left. - m_\rho^2 M_V^2(\varepsilon_\gamma \cdot P_1) - M_V^2(Q \cdot P_2)(\varepsilon_\gamma \cdot P_1) \right. \\
 & \left. + (k \cdot P_1) \left((k \cdot P_2 - M_V^2)(Q \cdot \varepsilon_\gamma) + (Q \cdot P_2)(\varepsilon_\gamma \cdot P_2) \right) \right. \\
 & \left. + (Q \cdot \varepsilon_\gamma) \left((Q \cdot P_1)(M_V^2 - k \cdot P_2) + (P_1 \cdot P_2)(k \cdot P_2) \right) \right. \\
 & \left. - (Q \cdot P_1)(Q \cdot P_2)(\varepsilon_\gamma \cdot P_2) \right] \\
 & + M_V^2(-k \cdot Q)(Q \cdot P_1)(\varepsilon_\gamma \cdot \varepsilon_\rho) \\
 & - (k \cdot P_2)(Q \cdot P_1)(Q \cdot \varepsilon_\gamma)(\varepsilon_\rho \cdot P_2)
 \end{aligned}$$

$$+ (k \cdot Q)(Q \cdot P_1)(\epsilon_\gamma \cdot P_2)(\epsilon_\rho \cdot P_2). \quad (\text{A.7})$$

Finalmente, las expresiones para las funciones l_1 , l_2 , l_3 y l_4 están dadas por

$$\begin{aligned} l_1 = & \left((\epsilon_\gamma \cdot P_1) [(k \cdot P_2)(\epsilon_\rho \cdot P_2) - (k \cdot P_2 + m_\pi^2)(k \cdot \epsilon_\rho)] \right. \\ & + (k \cdot P_1) [(k \cdot P_2 + m_\pi^2)(\epsilon_\gamma \cdot \epsilon_\rho) - (\epsilon_\gamma \cdot P_2)(\epsilon_\rho \cdot P_2)] \\ & \left. + (P_1 \cdot P_2) [(\epsilon_\gamma \cdot P_2)(k \cdot \epsilon_\rho) - (k \cdot P_2)(\epsilon_\gamma \cdot \epsilon_\rho)] \right) \\ & \times \left(2d_3(k \cdot P_2) + d_{12}m_\pi^2 + d_3m_\rho^2 \right), \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{aligned} l_2 = & -2(k \cdot P_2)^2 \left[(\epsilon_\gamma \cdot P_1) \left(d_3(\epsilon_\rho \cdot (k + P_2)) + (d_3 - d_4)(\epsilon_\rho \cdot P_1) \right) \right. \\ & \left. + (\epsilon_\gamma \cdot \epsilon_\rho) \left(d_4(P_1 \cdot P_2) + m_\pi^2(d_{12} - d_3 + d_4) \right) \right] \\ & + (k \cdot P_2) \left[(k \cdot \epsilon_\rho) \left(2(\epsilon_\gamma \cdot P_2) \left(d_4(P_1 \cdot P_2) + m_\pi^2(d_{12} - d_3 + d_4) \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(m_\pi^2(d_{12} - 2d_3) + d_3m_\rho^2 \right) (\epsilon_\gamma \cdot P_1) \right) \right. \\ & \left. + (\epsilon_\gamma \cdot P_1) \left((\epsilon_\rho \cdot P_2) \left(d_{12}m_\pi^2 + d_3(-2m_\pi^2 + m_\rho^2 + 2M_V^2) \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + (d_3 - d_4)(M_V - m_\pi)(M_V + m_\pi)(\epsilon_\rho \cdot P_1) \right) \right. \\ & \left. + (\epsilon_\gamma \cdot \epsilon_\rho) \left(m_\pi^2(M_V - m_\pi)(M_V + m_\pi)(d_{12} - d_3 + d_4) \right. \right. \\ & \left. \left. - (P_1 \cdot P_2) \left(d_{12}m_\pi^2 + (d_3 - d_4)(M_V - m_\pi)(M_V + m_\pi) + d_3m_\rho^2 \right) \right) \right] \\ & + (k \cdot P_1) \left[(\epsilon_\gamma \cdot \epsilon_\rho) \left((k \cdot P_2) \left(-2d_4(k \cdot P_2) - m_\pi^2(d_{12} + d_4) \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + d_3(m_\pi^2 - m_\rho^2 + M_V^2) + d_4M_V^2 \right) + M_V^2(d_{12}m_\pi^2 + d_3m_\rho^2) \right) \\ & \left. + (\epsilon_\gamma \cdot P_2) \left(-(\epsilon_\rho \cdot P_2) \left(-2d_3(k \cdot P_2) + d_{12}m_\pi^2 \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + d_3(-2m_\pi^2 + m_\rho^2 + 2M_V^2) \right) \right. \\ & \left. - \left((-2(k \cdot P_2) - m_\pi^2 + M_V^2) \left((d_3 + d_4)(k \cdot \epsilon_\rho) + (d_3 - d_4)(\epsilon_\rho \cdot P_1) \right) \right) \right] \\ & + (k \cdot \epsilon_\rho) \left[(\epsilon_\gamma \cdot P_2) \left((P_1 \cdot P_2) \left(d_{12}m_\pi^2 + (d_3 - d_4)(M_V - m_\pi)(M_V + m_\pi) + d_3m_\rho^2 \right) \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + m_\pi^2(m_\pi - M_V)(m_\pi + M_V)(d_{12} - d_3 + d_4) \\
 & - M_V^2(d_{12}m_\pi^2 + d_3m_\rho^2)(\epsilon_\gamma \cdot P_1) \Big], \tag{A.9}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 l_3 = & -4(k \cdot P_2)^3 \left[(\epsilon_\gamma \cdot P_1) \left((d_3 - d_4)(\epsilon_\rho \cdot P_1) + d_3(\epsilon_\rho \cdot (k + P_2)) \right) \right. \\
 & \left. + (\epsilon_\gamma \cdot \epsilon_\rho) \left((d_{12} - d_3 + d_4)m_\pi^2 + d_4(P_1 \cdot (k + P_2)) \right) \right] \\
 & + 2 \left[(d_3 - d_4) \left((M_V^2 - 2m_\pi^2)(\epsilon_\gamma \cdot P_1) + 2(k \cdot P_1)(\epsilon_\gamma \cdot P_2) \right) (\epsilon_\rho \cdot P_1) \right. \\
 & + \left((d_{12}m_\pi^2 + d_3(M_V^2 - 3m_\pi^2 + m_\rho^2))(\epsilon_\gamma \cdot P_1) + 2d_3(k \cdot P_1)(\epsilon_\gamma \cdot P_2) \right) (\epsilon_\rho \cdot P_2) \\
 & + (k \cdot \epsilon_\rho) \left((d_{12}m_\pi^2 + d_3(M_V^2 - 3m_\pi^2 + m_\rho^2))(\epsilon_\gamma \cdot P_1) \right. \\
 & \left. + 2(\epsilon_\gamma \cdot P_2) \left((d_{12} - d_3 + d_4)m_\pi^2 + (d_3 + d_4)(k \cdot P_1) + d_4(P_1 \cdot P_2) \right) \right) \\
 & \left. + (\epsilon_\gamma \cdot \epsilon_\rho) \left((d_{12} - d_3 + d_4)(M_V^2 - 2m_\pi^2)m_\pi^2 \right. \right. \\
 & \left. \left. + \left(-d_{12}m_\pi^2 + d_4(M_V^2 - 2m_\pi^2) + d_3(m_\pi - m_\rho)(m_\pi + m_\rho) \right) (P_1 \cdot (k + P_2)) \right) \right] (k \cdot P_2)^2 \\
 & + \left[(d_3 - d_4) \left((M_V - m_\pi)m_\pi^2(M_V + m_\pi)(\epsilon_\gamma \cdot P_1) \right. \right. \\
 & - 2(M_V^2 - 2m_\pi^2)(k \cdot P_1)(\epsilon_\gamma \cdot P_2) \left. \left. \right) (\epsilon_\rho \cdot P_1) \right. \\
 & - \left((M_V - m_\pi)(M_V + m_\pi) \left((d_{12} - 2d_3)m_\pi^2 + d_3m_\rho^2 \right) (\epsilon_\gamma \cdot P_1) \right. \\
 & + 2(d_{12}m_\pi^2 + d_3(M_V^2 - 3m_\pi^2 + m_\rho^2))(k \cdot P_1)(\epsilon_\gamma \cdot P_2) \left. \right) (\epsilon_\rho \cdot P_2) \\
 & + (k \cdot \epsilon_\rho) \left(2(\epsilon_\gamma \cdot P_2) \left((d_{12} - d_3 + d_4)(2m_\pi^2 - M_V^2)m_\pi^2 \right. \right. \\
 & \left. \left. - (d_3 + d_4)(M_V^2 - 2m_\pi^2)(k \cdot P_1) \right) \right. \\
 & \left. + \left((d_{12} - d_3)m_\pi^2 + d_3m_\rho^2 - d_4(M_V^2 - 2m_\pi^2) \right) (P_1 \cdot P_2) \right) \\
 & - (M_V - m_\pi)(M_V + m_\pi) \left((d_{12} - 2d_3)m_\pi^2 + d_3m_\rho^2 \right) (\epsilon_\gamma \cdot P_1) \\
 & + (M_V - m_\pi)(M_V + m_\pi)(\epsilon_\gamma \cdot \epsilon_\rho) \left((d_{12} - d_3 + d_4)m_\pi^4 \right. \\
 & \left. + \left((d_{12} - d_3 + d_4)m_\pi^2 + d_3m_\rho^2 \right) (P_1 \cdot (k + P_2)) \right) \Big] (k \cdot P_2) \\
 & - (M_V - m_\pi)(M_V + m_\pi)(\epsilon_\gamma \cdot P_2) \\
 & \times \left[(k \cdot P_1) \left((d_3 - d_4)m_\pi^2(\epsilon_\rho \cdot P_1) \right. \right. \\
 & \left. \left. - \left((d_{12} - 2d_3)m_\pi^2 + d_3m_\rho^2 \right) (\epsilon_\rho \cdot P_2) \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (k \cdot \epsilon_\rho) \left((d_{12} - d_3 + d_4) m_\pi^4 + (d_3 + d_4) (k \cdot P_1) m_\pi^2 \right. \\
 & \left. + \left((d_{12} - d_3 + d_4) m_\pi^2 + d_3 m_\rho^2 \right) (P_1 \cdot P_2) \right), \tag{A.10}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 l_4 = & 2(k \cdot P_2)^3 \left[(\epsilon_\gamma \cdot P_1) \left((d_3 - d_4) (\epsilon_\rho \cdot P_1) + d_3 (\epsilon_\rho \cdot (k + P_2)) \right) \right. \\
 & \left. + (\epsilon_\gamma \cdot \epsilon_\rho) \left((d_{12} - d_3 + d_4) m_\pi^2 + d_4 (P_1 \cdot P_2) \right) \right] \\
 & - (k \cdot P_2)^2 \left[(\epsilon_\gamma \cdot P_1) \left((d_3 - d_4) (M_V - m_\pi) (M_V + m_\pi) (\epsilon_\rho \cdot P_1) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \left((d_{12} - 2d_3) m_\pi^2 + d_3 m_\rho^2 \right) (\epsilon_\rho \cdot P_2) \right) \right. \\
 & \left. + (\epsilon_\gamma \cdot \epsilon_\rho) \left((d_{12} - d_3 + d_4) (M_V - m_\pi) (M_V + m_\pi) m_\pi^2 \right. \right. \\
 & \left. \left. + \left(d_4 M_V^2 - (d_{12} + d_4) m_\pi^2 + d_3 (M_V^2 + m_\pi^2 - m_\rho^2) \right) (P_1 \cdot P_2) \right) \right. \\
 & \left. + (k \cdot \epsilon_\rho) \left(\left(d_{12} m_\pi^2 + d_3 (2M_V^2 - 2m_\pi^2 + m_\rho^2) \right) (\epsilon_\gamma \cdot P_1) \right. \right. \\
 & \left. \left. + 2(\epsilon_\gamma \cdot P_2) \left((d_{12} - d_3 + d_4) m_\pi^2 + d_4 (P_1 \cdot P_2) \right) \right) \right] \\
 & + (k \cdot P_2) \left[\left(d_{12} m_\pi^2 + d_3 m_\rho^2 \right) \left((\epsilon_\gamma \cdot P_1) (\epsilon_\rho \cdot P_2) - (\epsilon_\gamma \cdot \epsilon_\rho) (P_1 \cdot P_2) \right) M_V^2 \right. \\
 & \left. + (k \cdot \epsilon_\rho) \left((\epsilon_\gamma \cdot P_2) \left((d_{12} - d_3 + d_4) (M_V - m_\pi) (M_V + m_\pi) m_\pi^2 \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. + \left(d_4 M_V^2 - (d_{12} + d_4) m_\pi^2 + d_3 (M_V^2 + m_\pi^2 - m_\rho^2) \right) (P_1 \cdot P_2) \right) \right. \\
 & \left. \left. - 2d_3 M_V^2 m_\pi^2 (\epsilon_\gamma \cdot P_1) \right) \right] \\
 & + (k \cdot P_1) \left[\left(M_V^2 \left(d_{12} m_\pi^2 + d_3 m_\rho^2 \right) m_\pi^2 \right. \right. \\
 & \left. \left. + (k \cdot P_2) \left(2d_3 M_V^2 m_\pi^2 \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. + (k \cdot P_2) \left(d_{12} m_\pi^2 + d_3 m_\rho^2 + (d_3 - d_4) (M_V - m_\pi) (M_V + m_\pi) + 2d_4 (k \cdot P_2) \right) \right) \right) (\epsilon_\gamma \cdot \epsilon_\rho) \\
 & \left. + (\epsilon_\gamma \cdot P_2) \left((M_V^2 - m_\pi^2 - 2(k \cdot P_2)) (k \cdot P_2) \right) \right. \\
 & \left. \times \left((d_3 + d_4) (k \cdot \epsilon_\rho) + (d_3 - d_4) (\epsilon_\rho \cdot P_1) \right) \right. \\
 & \left. - \left((d_{12} m_\pi^2 + d_3 m_\rho^2) M_V^2 + 2d_3 (k \cdot P_2)^2 \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[(d_{12} - 2d_3)m_\pi^2 + d_3m_\rho^2 \right] (k \cdot P_2) (\epsilon_\rho \cdot P_2) \\
& - M_V^2 (d_{12}m_\pi^2 + d_3m_\rho^2) (k \cdot \epsilon_\rho) \left(m_\pi^2 (\epsilon_\gamma \cdot P_1) - (\epsilon_\gamma \cdot P_2) (P_1 \cdot P_2) \right).
\end{aligned} \tag{A.11}$$

APÉNDICE B

COMPLEMENTOS TEÓRICOS Y
MATEMÁTICOS

B.1 MÉTODO DE GELL-MANN Y LÉVY PARA LA
OBTENCIÓN DE CORRIENTES NO NECESARIAMENTE
CONSERVADAS

Para obtener corrientes asociadas a simetrías cuyas divergencias no se anulan necesariamente, se emplea el método desarrollado por Gell-Mann y Lévy. Este procedimiento generaliza el Teorema de Noether permitiendo transformaciones con parámetros *locales*, es decir, dependientes de la posición, lo que conduce naturalmente a corrientes que no son estrictamente conservadas.

Consideremos una densidad lagrangiana que depende de un conjunto de n campos independientes Φ_i y de sus derivadas $\partial_\mu \Phi_i$:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi). \quad (\text{B.1})$$

A partir del principio variacional estándar se obtienen las ecuaciones de Euler–Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_i)} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (\text{B.2})$$

Consideremos ahora una transformación infinitesimal de los campos

$$\Phi_i(x) \longrightarrow \Phi'_i(x) = \Phi_i(x) - i \varepsilon_a(x) F_{ai}[\Phi(x)], \quad (\text{B.3})$$

donde $\varepsilon_a(x)$ ¹ son parámetros locales y F_{ai} describe la acción del generador correspondiente sobre los campos. La variación inducida en la densidad lagrangiana es

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_i} \delta\Phi_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_i)} \partial_\mu\delta\Phi_i. \quad (\text{B.4})$$

Sustituyendo $\delta\Phi_i = -i\varepsilon_a F_{ai}$ se obtiene

$$\delta\mathcal{L} = -i\varepsilon_a \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_i} F_{ai} - i\partial_\mu\varepsilon_a \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_i)} F_{ai} - i\varepsilon_a \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_i)} \partial_\mu F_{ai}. \quad (\text{B.5})$$

Reorganizando términos, la variación se expresa como

$$\delta\mathcal{L} = \varepsilon_a \left(-i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_i} F_{ai} - i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_i)} \partial_\mu F_{ai} \right) + \partial_\mu\varepsilon_a \left(-i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_i)} F_{ai} \right). \quad (\text{B.6})$$

A partir de esta última expresión se introduce la definición de la corriente

$$J_a^\mu = -i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_i)} F_{ai}, \quad (\text{B.7})$$

de modo que la variación de la lagrangiana adopta la forma compacta

$$\delta\mathcal{L} = \varepsilon_a \partial_\mu J_a^\mu + (\partial_\mu\varepsilon_a) J_a^\mu, \quad (\text{B.8})$$

donde

$$\partial_\mu J_a^\mu = -i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_i} F_{ai} - i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_i)} \partial_\mu F_{ai}. \quad (\text{B.9})$$

De manera equivalente, el método de Gell-Mann y Lévy permite obtener directamente la corriente y su divergencia a partir de la variación de la lagrangiana (B.8) con respecto al parámetro local:

$$J_a^\mu = \frac{\partial\delta\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varepsilon_a)}, \quad (\text{B.10})$$

$$\partial_\mu J_a^\mu = \frac{\partial\delta\mathcal{L}}{\partial\varepsilon_a}. \quad (\text{B.11})$$

Estas expresiones muestran que, al permitir parámetros locales $\varepsilon_a(x)$, la divergencia de la corriente no se anula necesariamente, lo cual distingue este método del Teorema de Noether en su formulación usual. En cambio, si el parámetro es constante en el espacio-tiempo (transformación global), esto es $\partial_\mu\varepsilon_a = 0$, la ecuación (B.8) implica la

¹Con el fin de simplificar las expresiones, se omitirá momentáneamente la dependencia explícita del parámetro $\varepsilon_a(x)$ con el espacio-tiempo.

conservación de la corriente correspondiente:

$$\partial_\mu J_a^\mu = 0. \quad (\text{B.12})$$

B.2 INCORPORACIÓN DE RESONANCIAS EN EL MARCO QUIRAL

En la Ref. [18] se muestra cómo pueden incorporarse las resonancias hadrónicas dentro de una EFT, tratándolas como campos $R(x)$ que transforman linealmente bajo el grupo $SU(3)_V$, es decir

$$R \xrightarrow{G} h(\phi) R h^\dagger(\phi), \quad (\text{B.13})$$

donde $h(\phi) \in SU(3)_V$ es el elemento compensador, dependiente de los campos de Goldstone, asociado a una transformación quiral global.

Como consecuencia de la ley de transformación (B.13), las resonancias que pertenecen al octete de sabor se representan mediante matrices hermíticas 3×3 , correspondientes a la representación adjunta de $SU(3)_V$. En cambio, las resonancias singletes bajo $SU(3)_V$, denotadas genéricamente por R_1 , transforman trivialmente,

$$R_1 \xrightarrow{G} R_1. \quad (\text{B.14})$$

En el formalismo tensorial antisimétrico, los campos vectoriales y axiales se describen mediante tensores $V_{\mu\nu}(x)$ y $A_{\mu\nu}(x)$, los cuales se transforman de acuerdo con (B.13) como

$$V_{\mu\nu} \xrightarrow{G} h(\phi) V_{\mu\nu} h^\dagger(\phi), \quad A_{\mu\nu} \xrightarrow{G} h(\phi) A_{\mu\nu} h^\dagger(\phi). \quad (\text{B.15})$$

De forma análoga, los campos escalares y pseudoescalares de octete se transforman en la misma representación, mientras que sus contrapartes singletes permanecen invariantes bajo $SU(3)_V$.

Los campos de resonancia de octete pueden expandirse en la base de generadores de Gell–Mann,

$$V_{\mu\nu} = \sum_{a=1}^8 V_{\mu\nu}^a \frac{\lambda^a}{2}, \quad A_{\mu\nu} = \sum_{a=1}^8 A_{\mu\nu}^a \frac{\lambda^a}{2}. \quad (\text{B.16})$$

Dado que $h(\phi)$ depende del espacio–tiempo, la derivada parcial de un campo resonante no se transforma covariantemente bajo $SU(3)_V$. En particular, si $R \rightarrow hRh^\dagger$,

entonces

$$\partial_\mu R \rightarrow (\partial_\mu h) R h^\dagger + h (\partial_\mu R) h^\dagger + h R (\partial_\mu h^\dagger), \quad (\text{B.17})$$

lo cual introduce contribuciones adicionales proporcionales a $\partial_\mu h$.

Para restaurar la covariancia quirral se introduce la derivada covariante

$$\nabla_\mu R = \partial_\mu R + [\Gamma_\mu, R], \quad (\text{B.18})$$

donde Γ_μ es la conexión quirral natural del espacio cociente G/H , definida por

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{2} [u^\dagger (\partial_\mu - ir_\mu) u + u (\partial_\mu - il_\mu) u^\dagger]. \quad (\text{B.19})$$

Bajo transformaciones quirales, la conexión se transforma como

$$\Gamma_\mu \xrightarrow{G} h \Gamma_\mu h^\dagger + h \partial_\mu h^\dagger, \quad (\text{B.20})$$

lo cual garantiza que

$$\nabla_\mu R \xrightarrow{G} h (\nabla_\mu R) h^\dagger. \quad (\text{B.21})$$

En contraste, para los campos singletes R_1 , que transforman trivialmente bajo $SU(3)_V$, la derivada parcial es suficiente y no es necesario introducir una derivada covariante.

Los bloques quirales básicos que intervienen en la construcción del lagrangiano efectivo obedecen el conteo quirral estándar,

$$u_\mu \sim \mathcal{O}(p), \quad \chi_\pm \sim \mathcal{O}(p^2), \quad f_\pm^{\mu\nu} \sim \mathcal{O}(p^2), \quad (\text{B.22})$$

y todos ellos transforman covariantemente como $X \rightarrow hXh^\dagger$. Obsérvese que, por esta razón, resulta más conveniente trabajar con la realización u en lugar de U . Por su parte, las resonancias no portan conteo quirral propio.

A LO $\mathcal{O}(p^2)$ en la expansión quirral, es posible incluir explícitamente resonancias en el lagrangiano efectivo:

$$\mathcal{L}_{\text{LO}} = \mathcal{L}_2 + \sum_{R=V,A,S,P} (\mathcal{L}_{\text{kin}}^R + \mathcal{L}_2^R). \quad (\text{B.23})$$

Los términos $\mathcal{L}_{\text{kin}}^R$ corresponden a los lagrangianos cinéticos de las resonancias y describen su propagación libre en el límite quirral. Para resonancias vectoriales y axiales ($R = V, A$), descritas mediante el formalismo tensorial antisimétrico, dichos términos

toman la forma

$$\mathcal{L}_{\text{kin}}(R) = -\frac{1}{2} \text{Tr} \left(\nabla^\lambda R_{\lambda\mu} \nabla_\nu R^{\nu\mu} - \frac{M_R^2}{2} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} \right) - \frac{1}{2} \partial^\lambda R_{1,\lambda\mu} \partial_\nu R_1^{\nu\mu} + \frac{M_{R_1}^2}{4} R_{1,\mu\nu} R_1^{\mu\nu}, \quad (\text{B.24})$$

mientras que para resonancias escalares y pseudoescalares ($R = S, P$), el término cinético viene dado por

$$\mathcal{L}_{\text{kin}}(R) = \frac{1}{2} \text{Tr} \left(\nabla^\mu R \nabla_\mu R - M_R^2 R^2 \right) + \frac{1}{2} \left(\partial^\mu R_1 \partial_\mu R_1 - M_{R_1}^2 R_1^2 \right), \quad (\text{B.25})$$

donde M_R denota la masa de la resonancia correspondiente en el límite quiral.

Los términos \mathcal{L}_2^R contienen los acoplamientos quirales de menor orden $\mathcal{O}(p^2)$ entre resonancias y campos pseudo-Goldstone, de acuerdo con (B.22), y están dados por:

$$\mathcal{L}_2[V(1^{--})] = \frac{F_V}{2\sqrt{2}} \text{Tr} (V_{\mu\nu} f_+^{\mu\nu}) + \frac{iG_V}{\sqrt{2}} \text{Tr} (V_{\mu\nu} u^\mu u^\nu), \quad (\text{B.26})$$

$$\mathcal{L}_2[A(1^{++})] = \frac{F_A}{2\sqrt{2}} \text{Tr} (A_{\mu\nu} f_-^{\mu\nu}), \quad (\text{B.27})$$

$$\mathcal{L}_2[S(0^{++})] = c_d \text{Tr} (S u_\mu u^\mu) + c_m \text{Tr} (S \chi_+) + \tilde{c}_d S_1 \text{Tr} (u_\mu u^\mu) + \tilde{c}_m S_1 \text{Tr} (\chi_+), \quad (\text{B.28})$$

$$\mathcal{L}_2[P(0^{-+})] = i d_m \text{Tr} (P \chi_-) + i \tilde{d}_m P_1 \text{Tr} (\chi_-). \quad (\text{B.29})$$

Las constantes $F_V, G_V, F_A, c_d, c_m, d_m, \dots$ son LECs que pueden estimarse a partir de observables fenomenológicos, como los decaimientos $\rho^0 \rightarrow e^+ e^-$ y $\rho \rightarrow \pi\pi$, o bien mediante restricciones teóricas basadas en simetrías, reglas de suma, el límite de gran N_c , etc. Cabe destacar que este lagrangiano pertenece al sector de paridad intrínseca par.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] S. Navas et al. Review of particle physics. *Phys. Rev. D*, 110(3):030001, 2024.
- [2] S. Scherer and M.R. Schindler. *A Primer for Chiral Perturbation Theory*. Lecture Notes in Physics. Springer Berlin Heidelberg, 2011.
- [3] Yasumichi Aoki, T Blum, G Colangelo, S Collins, M Della Morte, P Dimopoulos, S Dürr, X Feng, H Fukaya, M Golterman, et al. Flag review 2021. *The European Physical Journal C*, 82(10):869, 2022.
- [4] Matthew D. Schwartz. *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Cambridge University Press, 2014.
- [5] Y. Grossman and Y. Nir. *The Standard Model: From Fundamental Symmetries to Experimental Tests*. Princeton University Press, 2023.
- [6] Ilaria Brivio and Michael Trott. The standard model as an effective field theory. *Physics Reports*, 793:1–98, 2019. The standard model as an effective field theory.
- [7] S Heinemeyer, C Mariotti, G Passarino, R Tanaka, JR Andersen, P Artoisenet, EA Bagnaschi, A Banfi, T Becher, FU Bernlochner, et al. Handbook of LHC higgs cross sections: 3. higgs properties. *arXiv preprint:1307.1347*, 2013.
- [8] DM Webber, V Tishchenko, Q Peng, S Battu, RM Carey, DB Chitwood, J Crnkovic, PT Debevec, S Dhamija, W Earle, et al. Measurement of the positive muon lifetime and determination of the fermi constant to part-per-million precision. *Physical review letters*, 106(4):041803, 2011.
- [9] Q Retal Ahmad, RC Allen, TC Andersen, JD Anglin, JC Barton, EW Beier, M Bercovitch, J Bigu, SD Biller, RA Black, et al. Direct evidence for neutrino flavor transformation from neutral-current interactions in the sudbury neutrino observatory. *Physical review letters*, 89(1):011301, 2002.
- [10] Thomas A Degrand and Carleton DeTar. *Lattice Methods For Quantum Chromodynamics*. World Scientific, 2006.

-
- [11] Steven Weinberg. Phenomenological lagrangians. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 96(1):327–340, 1979.
- [12] M. Benayoun, H. B. O’Connell, and A. G. Williams. Vector meson dominance and the ρ meson. *Phys. Rev. D*, 59:074020, Mar 1999.
- [13] Koichi Yamawaki. Hidden local symmetry and beyond. *International Journal of Modern Physics E*, 26(01n02):1740032, 2017.
- [14] Tetsuo Hatsuda and Teiji Kunihiro. QCD phenomenology based on a chiral effective lagrangian. *Physics Reports*, 247(5):221–367, 1994.
- [15] A Pich. Chiral perturbation theory. *Reports on Progress in Physics*, 58(6):563, jun 1995.
- [16] Johan Bijnens and Gerhard Ecker. Mesonic low-energy constants. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, 64(1):149–174, 2014.
- [17] Edward Witten. Global aspects of current algebra. *Nuclear Physics B*, 223(2):422–432, 1983.
- [18] Gerhard Ecker, Jürg Gasser, Antonio Pich, and Eduardo De Rafael. The role of resonances in chiral perturbation theory. *Nuclear Physics B*, 321(2):311–342, 1989.
- [19] Pedro D. Ruiz-Femenía, A. Pich, and J. Portolés. Odd-intrinsic-parity processes within the resonance effective theory of qcd. *Journal of High Energy Physics*, 2003(07):003, jul 2003.
- [20] J. A. Miranda and P. Roig. New τ -based evaluation of the hadronic contribution to the vacuum polarization piece of the muon anomalous magnetic moment. *Phys. Rev. D*, 102:114017, Dec 2020.
- [21] R. Aliberti et al. The anomalous magnetic moment of the muon in the Standard Model: an update. *Phys. Rept.*, 1143:1–158, 2025.
- [22] Cheng Chen, Chun-Gui Duan, and Zhi-Hui Guo. Triple-product asymmetry in the radiative two-pion tau decay. *JHEP*, 08:144, 2022.
- [23] José A. Barajas-Aguilar, Francisco V. Flores-Baez, and José R. Morones-Ibarra. Study of the ρ^0 decay into $\pi^0\pi^0\gamma$ within framework of chiral perturbation theory with resonances. *Particles*, 8(4), 2025.
- [24] D. Griffiths. *Introduction to Elementary Particles*. Physics textbook. Wiley, 2008.

-
- [25] M.J.D. Hamilton. *Mathematical Gauge Theory: With Applications to the Standard Model of Particle Physics*. Universitext. Springer International Publishing, 2017.
- [26] M. Nakahara. *Geometry, Topology and Physics, Second Edition*. Graduate student series in physics. Taylor & Francis, 2003.
- [27] I.N. Herstein. *Algebra moderna: grupos, anillos, campos, teoría de Galois*. Biblioteca de matemática superior. Trillas, 1974.
- [28] F. Mandl and G. Shaw. *Quantum Field Theory*. A Wiley-Interscience publication. Wiley, 2010.
- [29] I. Montvay and G. Münster. *Quantum Fields on a Lattice*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1994.
- [30] R.A. Bertlmann. *Anomalies in Quantum Field Theory*. International Series of Monographs on Physics. Clarendon Press, 2000.
- [31] G. S. Guralnik, C. R. Hagen, and T. W. B. Kibble. Broken symmetries and the Goldstone theorem. *Adv. Part. Phys.*, 2:567–708, 1968.
- [32] Jeffrey Goldstone, Abdus Salam, and Steven Weinberg. Broken symmetries. *Phys. Rev.*, 127:965–970, Aug 1962.
- [33] G. Colangelo, J. Gasser, and H. Leutwyler. $\pi\pi$ scattering. *Nuclear Physics B*, 603(1):125–179, 2001.
- [34] Johan Bijnens, Gilberto Colangelo, and Gerhard Ecker. The mesonic chiral lagrangian of order p^6 . *Journal of High Energy Physics*, 1999(02):020, 1999.
- [35] S. Coleman, J. Wess, and Bruno Zumino. Structure of phenomenological lagrangians. i. *Phys. Rev.*, 177:2239–2247, Jan 1969.
- [36] G. Ecker, J. Gasser, H. Leutwyler, A. Pich, and E. De Rafael. Chiral lagrangians for massive spin-1 fields. *Physics Letters B*, 223(3):425–432, 1989.
- [37] J. Wess and B. Zumino. Consequences of anomalous ward identities. *Physics Letters B*, 37(1):95–97, 1971.
- [38] Stephen L Adler. Axial-vector vertex in spinor electrodynamics. *Physical Review*, 177(5):2426, 1969.
- [39] Johan Bijnens, Luca Girlanda, and P Talavera. The anomalous chiral lagrangian of order. *The European Physical Journal C-Particles and Fields*, 23(3):539–544, 2002.

- [40] Johan Bijnens, Nils Hermansson-Truedsson, and Joan Ruiz-Vidal. The anomalous chiral lagrangian at order p^8 . *Journal of High Energy Physics*, 2024(1):1–21, 2024.
- [41] Karol Kampf and Jiří Novotný. Resonance saturation in the odd-intrinsic parity sector of low-energy QCD. *Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology*, 84(1):014036, 2011.
- [42] Pablo Roig and Juan José Sanz Cillero. Consistent high-energy constraints in the anomalous QCD sector. *Physics Letters B*, 733:158–163, 2014.
- [43] V. Cirigliano, G. Ecker, M. Eidemüller, R. Kaiser, A. Pich, and J. Portolés. Towards a consistent estimate of the chiral low-energy constants. *Nuclear Physics B*, 753(1):139–177, 2006.
- [44] D. Gómez Dumm and P. Roig. Resonance chiral lagrangian analysis of $\tau^- \rightarrow \eta^{(\prime)}\pi^-\pi^0\nu_\tau$. *Phys. Rev. D*, 86:076009, Oct 2012.
- [45] D. Gómez Dumm, A. Pich, and J. Portolés. $\vec{\tau} \pi\pi\nu_\tau$ decays in the resonance effective theory. *Phys. Rev. D*, 69:073002, Apr 2004.
- [46] V. Cirigliano, G. Ecker, M. Eidemüller, A. Pich, and J. Portolés. $\langle VAP \rangle$ green function in the resonance region. *Physics Letters B*, 596(1):96–106, 2004.
- [47] MN Achasov, KI Beloborodov, AV Berdyugin, AG Bogdanchikov, AV Bozhenok, AD Bukin, DA Bukin, SV Burdin, AV Vasil'ev, DI Ganyushin, et al. The $e^+e^- \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma$ process below 1.0 gev. *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, 71:355–358, 2000.
- [48] A Bramon, R Escribano, M Napsuciale, et al. Scalar σ meson effects in ρ and ω decays into $\pi^0\pi^0\gamma$. *Physics Letters B*, 517(3-4):345–354, 2001.
- [49] MN Achasov, KI Beloborodov, AV Berdyugin, AV Bozhenok, DA Bukin, SV Burdin, AV Vasiljev, VB Golubev, TV Dimova, VP Druzhinin, et al. Experimental study of $\rho \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma$ and $\omega \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma$ decays. *Physics Letters B*, 537(3-4):201–210, 2002.
- [50] A Gokalp and OSMAN Yilmaz. The decay $\rho^0 \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma$ and the role of σ -meson. *Physics Letters B*, 508(1-2):25–30, 2001.
- [51] E Marco, S Hirezaki, E Oset, and H Toki. Radiative decay of ρ^0 and φ mesons in a chiral unitary approach. *Physics Letters B*, 470(1-4):20–26, 1999.
- [52] A. Gokalp, S. Solmaz, and O. Yilmaz. Scalar σ meson effects in radiative ρ^0 -meson decays. *Phys. Rev. D*, 67:073007, Apr 2003.

-
- [53] RR Akhmetshin, VM Aulchenko, V Sh Banzarov, A Baratt, LM Barkov, SE Baru, NS Bashtovoy, AE Bondar, DV Bondarev, AV Bragin, et al. Study of the process $e^+e^- \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma$ in cm energy range 600–970 mev at cmd-2. *Physics Letters B*, 580(3-4):119–128, 2004.
- [54] Vladyslav Shtabovenko, Rolf Mertig, and Frederik Orellana. FeynCalc 10: Do multiloop integrals dream of computer codes? *Computer Physics Communications*, 306:109357, 2025.
- [55] R. Mertig, M. Böhm, and A. Denner. Feyn Calc-Computer-Algebraic calculation of feynman amplitudes. *Computer Physics Communications*, 64(3):345–359, 1991.
- [56] Wolfram Research, Inc. Mathematica, 2025.