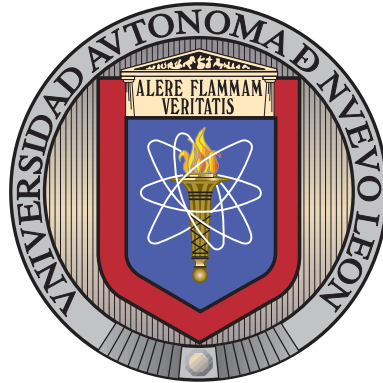


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



EMPAQUETAMIENTO DE CUERPOS POLIEDRALES
DEFORMABLES: EL CASO DE TETRAEDROS EN
RECIPIENTES CONVEXOS

POR

MSc. ANED ESQUERRA ARGUELLES

DOCTORADO EN INGENIERÍA DE SISTEMAS

30 DE ENERO DE 2026

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



EMPAQUETAMIENTO DE CUERPOS POLIEDRALES
DEFORMABLES: EL CASO DE TETRAEDROS EN
RECIPIENTES CONVEXOS

POR

MSc. ANED ESQUERRA ARGUELLES

DOCTORADO EN INGENIERÍA DE SISTEMAS

30 DE ENERO DE 2026

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Posgrado

Los miembros del Comité de Evaluación de Tesis recomendamos que la tesis "Empaquetamiento de cuerpos poliedrales deformables: el caso de tetraedros en recipientes convexos", realizada por el estudiante Aned Esquerra Arguelles, con número de matrícula 1985276, sea aceptada para su defensa como requisito parcial para obtener el grado de Doctorado en Ingeniería de Sistemas.

El Comité de Evaluación de Tesis

Dr. Igor Semionovich Litvinchev
Director

Dr. José Daniel Mosquera Artamonov
Co-director

Dra. Edith Lucero Ozuna Espinosa
Revisor

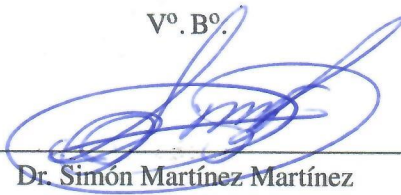
Dr. Cesar Emilio Villarreal Rodríguez
Revisor

Dr. José Antonio Marmolejo Saucedo
Revisor

Dr. Fernando López Irarragorri
Revisor

Dr. Luis Alfonso Infante Rivera
Revisor

Vº. Bº.



Dr. Simón Martínez Martínez
Subdirector de Estudios de Posgrado



Institución 190001
Programa 557620
Acta núm. 378

Ciudad Universitaria, a 17 de abril de 2026.

*“Por eso, ya no vivan ni se conduzcan como antes,
cuando los malos deseos dirigían su manera de vivir.
Ustedes deben cambiar completamente su manera de pensar,
y ser honestos y santos de verdad,
como corresponde a personas que
Dios ha vuelto a crear, para ser como él.”*

Efesios. 4:22-24

Dedicatoria

A mi madre, de quien soy fruto.

A mi padre, por heredarme su terquedad.

*A Adriano Alessandro e Izza Valentina, mis amados hijos por ser el motor de mis
logros diarios.*

*A Carmen Luisa, mi amor eterno y esposa por su constante e incondicional apoyo
y comprensión durante todo el tiempo que he estado lejos.*

ÍNDICE

Resumen	xviii
Resumen:	xviii
Objetivos y método de estudio:	xix
Contribuciones y conclusiones:	xx
Abstract	1
1 INTRODUCCIÓN	2
1.1 Antecedentes	2
1.1.1 Representación de objetos en 3D mediante la definición de sus vértices	2
1.1.2 Importancia de la representación de objetos en 3D mediante vértices en empaquetamiento (C&P)	6
1.2 Problema de investigación	8
1.3 Relevancia	9
1.4 Alcance y limitaciones	10
1.4.1 Contribuciones	10

<i>ÍNDICE</i>	iv
1.5	Objetivos del estudio 11
1.6	Preguntas e hipótesis de investigación 12
1.7	Estructura de la tesis 13
2	MARCO TEÓRICO 14
2.1	Introducción 14
2.1.1	Aplicaciones de los 3DBPP en la vida cotidiana 15
2.2	Complejidad computacional del empaquetado 3D 16
2.2.1	La familia de problemas <i>NP-hard</i> : introducción 16
2.3	Clasificación de los problemas de corte y empaquetado (C&P) 18
2.4	Hiperplanos de soporte como estrategia en minimización del espacio de restricciones 21
2.5	Condiciones de no intersección 24
2.5.1	Detección de colisiones 24
2.5.2	Formulación matemática 25
2.6	El teorema de los hiperplanos separadores 27
2.6.1	Descripción formal del teorema 27
2.6.2	Hiperplano de soporte 28
2.6.3	Aplicaciones e implicaciones 28
2.7	Tetraedros 28
2.8	Importancia del cálculo de ángulos en la disposición 3D dentro de contenedores convexos 30

2.8.1	Papel de los ángulos en la disposición 3D	31
2.8.2	Empaquetado de tetraedros en contenedores convexos	33
2.8.3	Tetraedro: El objeto 3D por excelencia para empaquetado . . .	36
2.9	Enfoques para el empaquetado de tetraedros en contenedores regulares	39
2.9.1	Enfoques metaheurísticos para el empaquetado de tetraedros en contenedores regulares	42
2.9.2	Enfoques de aprendizaje reforzado para el empaquetado de tetraedros en contenedores regulares	44
2.9.3	Métodos exactos y matemáticos para el empaquetado de te- traedros en contenedores regulares	45
2.9.4	Métodos cuasi-físicos para el empaquetamiento de tetraedros en contenedores regulares	46
2.9.5	Enfoques basados en el método de elementos distintos (DEM) para el empaquetado de tetraedros en contenedores regulares .	47
2.9.6	Enfoques con redes neuronales para el empaquetado de tetrae- dros en contenedores regulares	48
2.9.7	Enfoques de computación cuántica para el empaquetado de tetraedros en contenedores regulares	49
2.9.8	Enfoques basados en grandes modelos de lenguaje para el em- paquetado de tetraedros	50
2.10	Artículos y revisión de la literatura	51
2.11	Direcciones futuras de investigación	52
2.11.1	Aplicación de modelos de empaquetado en la gestión de proyectos	52

2.11.2	Métodos de descomposición lagrangiana para problemas de gran escala	53
2.11.3	Empaquetado de objetos flexibles en la logística verde	54
3	Metodología	55
3.1	Introducción	55
3.2	Definición del problema	58
3.3	Clasificación del problema de optimización	59
3.3.1	Optimización no convexa	59
3.3.2	Optimización continua	60
3.3.3	Optimización con restricciones	60
3.3.4	Programación no lineal	61
3.4	Definición matemática del problema	61
3.4.1	Formulación como problema de optimización	61
3.4.2	Objetos tridimensionales: caso de estudio el tetraedro.	62
3.5	Contenedores convexos: análisis y modelado	62
3.5.1	Contenedores convexos	62
3.6	Variables de decisión	64
3.7	Condiciones de no solapamiento (formulación compacta)	65
3.8	Restricciones	67
3.9	Modelos desarrollados	68

3.10	Escala y complejidad del modelo	73
3.11	Implementación con AMPL y KNITRO	74
3.11.1	Configuración del solucionador KNITRO:	74
3.11.2	Generación de instancias:	74
3.11.3	Entrada de datos:	76
3.11.4	Resolución y factibilidad:	76
3.11.5	Validación del modelo:	77
3.12	Experimentación extensiva y estrategias de exploración	77
3.12.1	Ajuste de parámetros:	78
3.12.2	Configuraciones y heurísticas del solucionador:	78
3.12.3	Monitoreo y mejoras iterativas:	78
3.13	Enfoques alternativos de solución	79
3.13.1	Programación lineal entera mixta (MILP) con Gurobi:	79
3.13.2	Metaheurísticas:	80
3.13.3	Aprendizaje reforzado profundo (DRL):	80
3.13.4	Discusión comparativa:	80
3.14	Mejora de calidad, eficiencia y robustez	81
3.14.1	Mejora de calidad:	81
3.14.2	Estrategias de eficiencia:	81
3.14.3	Mejoras de robustez:	81

3.15	Estrategia de inicialización híbrida KNITRO-BARON	82
3.15.1	Fundamento teórico	82
3.15.2	Implementación	83
3.15.3	Validación experimental	83
3.15.4	Ventajas y limitaciones	84
3.16	Conclusiones del capítulo metodológico	84
4	Experimentación y resultados	87
4.1	Introducción	87
4.2	Generación y caracterización de instancias	88
4.3	Cobertura y calidad experimental	88
4.4	Eficiencia de empaquetado por contenedor y regla	90
4.5	Tendencias según el tamaño del problema e influencia de la deforma- bilidad	92
4.5.1	<code>packing_ratio</code> vs <code>items</code>	92
4.5.2	<code>packing_ratio</code> vs <code>softness</code>	93
4.6	Escalamiento del tiempo de cómputo	97
4.7	Contrastes paramétricos: ANOVA de dos vías	99
4.8	Contrastes no paramétricos	100
4.9	Modelo explicativo	104
4.10	Síntesis por contenedor	107

4.10.1	Cúbico	107
4.10.2	Cilíndrico	107
4.10.3	Esférico	107
4.11	Amenazas a la validez y análisis de sensibilidad	107
4.12	Recomendaciones operativas	108
4.13	Análisis comparativo de herramientas de optimización	108
4.14	Configuración de solvers y plataforma de ejecución	109
4.15	Métricas de evaluación	109
4.16	Análisis exploratorio y estadístico	110
4.17	Resultados viuales por contenedor	110
4.17.1	Esfera	110
4.17.2	Cubo	114
4.17.3	Cilindro	116
4.18	Comparación de solvers	120
4.18.1	Evidencia empírica: local (Knitro), global (BARON) e híbrido (Knitro→BARON)	120
4.18.2	Referentes bibliograficos que refuerzan los hallazgos de la su- posición empírica	123
4.19	Resumen de hallazgos clave	125
5	Conclusiones	128
5.1	Propósito, preguntas y alcance	128

5.2	Aportes y síntesis de hallazgos	129
5.3	Respuestas a las preguntas de investigación	130
5.4	Discusión integrada: teoría, cómputo y práctica	131
5.4.1	Implicaciones teóricas	131
5.4.2	Implicaciones computacionales	131
5.4.3	Guía práctica de parametrización	131
5.5	Comparativa de solvers y recomendaciones	132
5.6	Robustez geométrica y control del aplanamiento	132
5.7	Limitaciones del modelo y del ecosistema de modelado	133
5.8	Mejoras posibles (hoja de ruta inmediata)	134
5.9	Reproducibilidad y transparencia	134
5.10	Implicaciones prácticas	135
5.11	Líneas de trabajo futuro	135
5.12	Trabajos futuros - Estrategias de generalización la representación de objetos tridimensionales mas complejos.	136
5.13	Conclusiones sintetizadas	137
5.14	Cierre	139
	Autobiografía	155
	Anexos	161
I	Anexo de Reproducibilidad (basado en el repositorio)	162

	Objetivo y alcance	162
	Entorno y dependencias	162
	Obtención del código y <i>commit</i> canónico	163
	Estructura y rutas de trabajo	163
	Semillas y control de aleatoriedad	163
	Casos exactos (AMPL)	164
	Utilidades Python (<code>python-helpers/</code>)	164
	Comandos reproducibles (<code>cmds.txt</code>)	165
	Trazabilidad y verificación	165
	Checklist final	166
II	Estado del arte	167
III	Comparativa de los solvers candidatos	174
	Alcance y metodología de la comparativa	174
	Knitro: perfil de desempeño (local, rápido, derivadas)	174
	BARON: perfil de desempeño (global, certificable, ramas)	174
	Estrategia híbrida Knitro→BARON (recomendada)	175
	Cuadro comparativo de capacidades	176
	Guía de selección y configuración práctica	176
	Limitaciones y amenazas a la validez	176
IV	Definición de tetraedros mediante una matriz de adyacencias.	178

	Dimensiones del Problema	178
	Propiedades Físicas	178
	Configuración del Contenedor	178
	Matrices de Distancia	178
	Índice de Figuras	179
V	Archivo de ejecución para solver BARON	180
	Configuración del Solver BARON	180
	Opciones de Configuración de BARON	180
	Ejecución y Visualización de Resultados	181
	Descripción de los Comandos de Visualización	182
	Métricas de Tiempo	182
VI	Modelo en cubo con conservación conjunta	184
VII	Modelo en cubo con conservación de superficie	186
VIII	Modelo en cubo con conservación de volumen	188
IX	Modelo en cilindro con conservación conjunta	190
X	Modelo en cilindro con conservación de superficie	192
XI	Modelo en cilindro con conservación de volumen	194
XII	Modelo en esfera con conservación conjunta	196
XIII	Modelo en esfera con conservación de superficie	198
XIV	Modelo en esfera con conservación de volumen	200

XV Cont. cúbico con conservación de volumen 202

XVI Cont. cúbico con conservación del área de la superficie 218

XVII Cont. cúbico con conservación mixta 222

XVIII Cont. esférico con conservación del volumen 226

XIX Cont. esférico con conservación del área de la superficie 230

XX Cont. esférico con conservación mixta 235

XXI Cont. cilíndrico con conservación del volumen 240

XXII Cont. cilíndrico con conservación del área de la superficie 245

XXIII Cont. cilíndrico con conservación mixta 247

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1	Áreas de aplicación (a nivel general): objetos 3D definidos a partir de vértices, aristas y caras.	4
1.2	Ejemplo ilustrativo de discretización: vértices y estructura triangular en un modelo a gran escala.	5
2.1	Categorías de problemas en según la complejidad de la solución. Adaptado de la fuente: [33]	17
2.2	Notación Big-O. Adaptado de la fuente: [60, 66, 71]	18
2.3	Representación gráfica del hiperplanos de soporte. Fuente: [50]	22
2.4	Sólidos de Platón y sus representaciones en 3D y 2D. Fuente [78]	29
2.5	Elementos del tetraedro.	37
2.6	Tipos de tetraedros.	37
3.1	Metodología de cinco (5) pasos para validar los resultados.	56
3.2	Diagrama de la clasificación de problemas de optimización. Fuente [59]	57
3.3	Diagrama de la definición del problema.	58

3.4	Los contenedores convexos empleados el estudio del empaquetamiento denso de tetraedros	63
3.5	Diagrama de implementación con Knitro y AMPL.	74
3.6	Estrategias de exploración.	77
3.7	Diagrama de los enfoques alternativos de solución. Fuente: author . . .	79
3.8	Estrategia de punto de inicio combinación (KNITRO - BARON). . .	82
4.1	Distribución de <code>items</code> (tamaño del problema).	89
4.2	Distribución de <code>softness</code>	90
4.3	Media de <code>packing_ratio</code> por contenedor \times regla con IC95%.	91
4.4	Distribución de <code>packing_ratio</code> por contenedor \times regla (boxplots). . .	92
4.5	<code>packing_ratio</code> vs <code>items</code> en <code>cube</code> (dispersión + mediana rodante). . .	93
4.6	<code>packing_ratio</code> vs <code>items</code> en <code>cylinder</code>	94
4.7	<code>packing_ratio</code> vs <code>items</code> en <code>sphere</code>	94
4.8	<code>packing_ratio</code> vs <code>softness</code> en <code>cube</code>	95
4.9	<code>packing_ratio</code> vs <code>softness</code> en <code>cylinder</code>	95
4.10	<code>packing_ratio</code> vs <code>softness</code> en <code>sphere</code>	96
4.11	Escalamiento t vs <code>items</code> (log-log) en <code>cube</code>	97
4.12	Escalamiento t vs <code>items</code> (log-log) en <code>cylinder</code>	98
4.13	Escalamiento t vs <code>items</code> (log-log) en <code>sphere</code>	98
4.14	QQ-plot de residuales del modelo lineal.	100

4.15 Tetraedros 'suaves' empaquetados en contendor esférico con conservación de volúmen. 111

4.16 Tetraedros 'suaves' empaquetados en contendor esférico con conservación del área de la superficie. 112

4.17 Tetraedros 'suaves' empaquetados en contendor esférico con conservación de volúmen y área de superficie. 113

4.18 Tetraedros 'suaves' empaquetados en contendor cúbico con conservación del volumen. 114

4.19 Tetraedros 'suaves' empaquetados en contendor cúbico con conservación del área de la superficie. 115

4.20 Tetraedros 'suaves' empaquetados en contendor cúbico con conservación del área de la superficie y del volumen. 116

4.21 Tetraedros 'suaves' empaquetados en contendor cilíndrico con conservación del volumen. 117

4.22 Tetraedros 'suaves' empaquetados en contendor cilíndrico con conservación del área de la superficie. 118

4.23 Tetraedros 'suaves' empaquetados en contendor cilíndrico con conservación del área de la superficie y del volumen. 119

Agradecimientos

En primer lugar, a Dios por todas las bendiciones recibidas hasta el momento.

En segundo lugar, me gustaría expresar mi agradecimiento por su apoyo incondicional en esta investigación para PhD. al Dr. Igor Litvinchev por su sabiduría, guía, y paciencia. Dr. Igor Litvichev infinitas gracias por sus aportes, su confianza en mí y su compromiso diario sin los cuales no se habrían podido lograr estos resultados de investigación.

En tercer lugar, me gustaría agradecer a mi comité de revisión por sus valiosos consejos y aportes, y por todo el tiempo dedicado a nuestras agradables y beneficiosas reuniones periódicas destinadas a mejorar y superar la calidad de mi trabajo.

En cuarto lugar, me gustaría mostrar mi agradecimiento al PhD. Daniel Mosquera Artamonov, por su perspicacia en la trazabilidad de requisitos. Su conocimiento, advertencias y consejos, tenacidad y orientación me han permitido superar todos los obstáculos en esta investigación.

Por último, pero no menos importante, me gustaría agradecer sinceramente a CONACHYT porque sin su apoyo financiero; este objetivo no se habría logrado.

RESUMEN

MSc. Aned Esquerro Arguelles.

Candidato para obtener el grado de Doctorado en Ingeniería de Sistemas.

Universidad Autónoma de Nuevo León.

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica.

Título del estudio: EMPAQUETAMIENTO DE CUERPOS POLIEDRALES DEFORMABLES: EL CASO DE TETRAEDROS EN RECIPIENTES CONVEXOS.

Número de páginas: 255.

Resumen:

Esta investigación aborda el problema de empaquetado de *tetraedros suaves* en contenedores convexos (esfera, cilindro y cubo), donde cada pieza puede deformarse controladamente mediante un parámetro de *softness* sujeto a restricciones de conservación (área superficial, volumen o mixta). Se presentan formulaciones matemáticas exactas con condiciones de no-solapamiento basadas en familias clásicas (planos de soporte, vértice-cara y arista-arista) adaptadas a geometría deformable. La metodología incluye la generación reproducible de instancias, un conjunto de métricas para evaluar densidad y plausibilidad geométrica, y un protocolo experimental estandarizado.

En términos computacionales, se valida una estrategia híbrida de resolución: se comienza con KNITRO para obtener soluciones iniciales factibles de manera rápida y, posteriormente, BARON para el refinamiento global. En instancias medianas-grandes, donde un tiempo límite de 8 h dificulta el progreso de BARON desde puntos aleatorios, la inicialización con KNITRO mejoró alrededor de un 5% el 73% de las soluciones iniciales. Se observa una degeneración geométrica cuando la *softness*

se aproxima a 1 bajo conservación estricta de área, con tendencia al aplanamiento; se discuten regularizaciones para mitigarla. Los resultados evidencian que la elección del contenedor y de la métrica de conservación altera sustantivamente el paisaje de búsqueda y el compromiso entre densidad de empaquetado y estabilidad geométrica. Finalmente, se proponen líneas de trabajo futuro en descomposición, relajaciones convexas, cortes específicos de no-solapamiento y metaheurísticas guiadas por modelos para mejorar escalabilidad y robustez.

Palabras clave: empaquetado geométrico; tetraedros deformables; no-solapamiento; conservación de área/volumen; KNITRO; BARON; optimización mixta.

Objetivos y método de estudio:

- **Diseñar modelos matemáticos** de vanguardia para problemas de empaquetamiento de objetos poliedrales regulares, convexos en contenedores convexos.
- **Validar la efectividad** de dichos modelos mediante experimentos con conjuntos de objetos definidos por vértices, haciendo énfasis en el problema de “relleno denso del contenedor”.
- **Proponer una metodología** para abordar diversos escenarios de empaquetamiento (bin packing), integrando estrategias de solución combinadas (exactas, combinación de *solvers* con estrategias de hallazgos de soluciones factibles atractivas iniciales y refinamiento posterior, heurísticas y metaheurísticas) para identificar soluciones óptimas o *casi óptimas* en tiempos razonables.

Se busca (i) formular modelos exactos con conservación controlada, (ii) evaluar una estrategia híbrida Knitro→BARON con *warm-start*, y (iii) medir el impacto en calidad y tiempo frente a alternativas. Adicionalmente, se pretende establecer lineamientos de robustificación que mitiguen colapsos y aplanamientos sin penalizar en exceso la solución.

Contribuciones y conclusiones:

Este trabajo aporta resultados originales en la intersección entre empaquetamiento de polígonos deformables, optimización matemática y análisis computacional. Nuestras contribuciones principales son:

1. **Formulación exacta para empaquetamiento de tetraedros “suaves”.** Presentamos modelos matemáticos que permiten la deformación controlada de tetraedros bajo restricciones físicas de conservación (volumen y/o superficie) en tres contenedores convexos (esfera, cilindro y cubo), con definición explícita de variables, parámetros y funciones objetivo.
2. **Estrategia híbrida de resolución *Knitro*→*BARON*.** Proponemos y validamos un flujo metodológico en dos fases: (i) obtención rápida de una solución inicial factible y de buena calidad mediante *Knitro* (programación no lineal), y (ii) mejora global con *BARON* usando *warm-start*, lo que acelera la convergencia y mejora la calidad final frente a ejecuciones “en frío”.
3. **Prevención de degeneración geométrica cerca de *softness* ≈ 1 .** Introducimos términos y/técnicas de robustificación (p. ej., penalizaciones suaves a la razón de aspecto y cotas inferiores de autovalores de matrices asociadas) que mitigan el colapso y aplanamiento de los tetraedros, manteniendo la integridad 3D.
4. **Protocolo experimental reproducible.** Definimos un diseño de experimentos que varía sistemáticamente: tamaño de instancia, tipo de contenedor, esquema de conservación y límites de tiempo, reportando métricas de calidad (objetivo, *gap*, densidad) y de coste (tiempo, iteraciones), con análisis de sensibilidad y ablasiones.
5. **Artefactos y guías de replicación.** Entregamos scripts, parámetros clave y plantillas para replicar experimentos (incluyendo semillas, versiones de solver y configuración de hardware/NEOS), favoreciendo la transparencia y la trazabilidad de los resultados.
6. **Comparativa empírica sólida.** Proporcionamos tablas y figuras que comparan el desempeño por contenedor y tamaño de instancia, así como curvas tiempo–calidad y pruebas de significancia/tamaño de efecto que respaldan las afirmaciones del estudio.

CONCLUSIONES:

- **Estrategia híbrida de solvers.** La combinación “Knitro \rightarrow BARON” mostró ventajas claras: Knitro provee puntos iniciales factibles y competitivos, y BARON mejora el óptimo global bajo presupuestos de tiempo acotados, superando a ejecuciones aisladas de BARON en instancias medianas–grandes.
- **Efecto de la *softness* con conservación de área.** En el régimen *softness* \rightarrow 1, las soluciones tienden al *aplanamiento* y pérdida de forma 3D cuando se impone conservación estricta de área superficial, sugiriendo introducir regularizaciones geométricas (p. ej., cotas de excentricidad o barreras suaves) para preservar la plausibilidad de las formas.
- **Influencia del contenedor.** Esfera, cilindro y cubo inducen paisajes geométrico combinatorios distintos: la esfera impone restricciones radiales homogéneas; el cilindro combina restricciones radiales y axiales; el cubo favorece alineamientos densos pero eleva el riesgo de contactos tangenciales múltiples, endureciendo las condiciones de no–solapamiento.
- **Condiciones de no–solapamiento consolidadas.** Las formulaciones integran familias clásicas (planos de soporte y separadores, vértice–cara, arista–arista) adaptadas a tetraedros “suaves”. Este acervo facilita extender el enfoque a variantes con conservación de volumen o mixta con cambios controlados en el conjunto de desigualdades.
- **Escalabilidad y costo computacional.** La complejidad crece rápidamente con el número de piezas; los métodos exactos puros son limitados. La evidencia experimental respalda el uso de metaheurísticas/heurísticas como apoyo (inicialización, vecindarios, guías de búsqueda) y el empleo de descomposiciones o relajaciones para instancias grandes.
- **Metodología experimental reproducible.** El flujo de generación de instancias, semillas, límites de tiempo y métricas asegura trazabilidad.
- **Impacto de la elección de restricciones de conservación.** Las variantes con conservación de volumen o mixtas parecen menos propensas a degeneraciones extremas que la conservación de área pura, aunque imponen mayor rigidez numérica; esto define un claro *trade-off* entre densidad de empaquetado y estabilidad geométrica.
- **Importancia de iniciales de calidad.** Puntos de partida con separaciones mínimas y simetrías aprovechadas aceleran la convergencia y evitan estancamientos tempranos; en este rol, Knitro resulta especialmente útil para construir estados de arranque robustos antes de la búsqueda global.

- **Líneas de trabajo futuro.** (i) Refinar regularizaciones geométricas anti-aplanamiento; (ii) explorar metaheurísticas guiadas por modelo para inicialización informada; (iii) descomposición por clústeres o *column generation* para escalar; (iv) relajaciones convexas/convexificadas y cortes específicos de no-solapamiento; (v) validación geométrica automática (colisión y acondicionamiento) integrada al ciclo de optimización.

Firma del asesor: _____

Dr. Igor Semionovich Litvinchev

LISTA DE SIGLAS

- 2D Segunda dimensión o dos dimensiones
- 3D Tercera dimensión o tres dimensiones
- 3DBPP Problema de empaquetamiento tridimensional de contenedores (3D Bin Packing Problem)
- 3DBPP Problema de empaquetamiento tridimensional de contenedores
- ACO Optimización por colonia de hormigas (Ant Colony Optimization)
- AMPL A Mathematical Programming Language
- BARON Branch-And-Reduce Optimizer (solver global)
- BFD Algoritmo de aproximación mediante la técnica de Best Fit Decreasing
- BFD Aproximación Best Fit Decreasing
- C&P Corte y empaquetamiento
- CAD Diseño asistido por computadora
- CADCAM Aplicaciones de diseño y manufactura asistidas por computadora
- CAM Manufactura asistida por computadora
- CNN Redes Neuronales Convolucionales
- DEM Método de elementos distintos (Discrete Element Method)

- DRL Aprendizaje por refuerzo profundo (Deep Reinforcement Learning)
- FFD Algoritmo de aproximación mediante la técnica de First Fit Decreasing
- GA Algoritmo genético
- GNN Red neuronal de grafos (Graph Neural Network)
- IoT Internet de las cosas, se refiere a todos los dispositivos que permiten extraer y enviar datos mediante el uso de internet a cualquier lugar de ciberespacio
- IPOPT Interior Point OPTimizer (solver de optimización no lineal)
- KNITRO Solver de optimización no lineal (interior-point/trust-region)
- MILP Programa lineal entero mixto (Mixed-Integer Linear Programming)
- MINLP Programa no lineal entero mixto (Mixed-Integer Nonlinear Programming)
- MIP Programa lineal entero mixto (Mixed-Integer Programming)
- NEOS NEOS Server for Optimization (plataforma de cómputo remoto)
- NLP Programación no lineal (Nonlinear Programming)
- NP Tiempo polinómico no determinista
- OBJ Formato de malla Wavefront OBJ
- PSO Optimización por enjambre de partículas
- QAOA Quantum Approximate Optimization Algorithm
- RA Realidad aumentada
- RL Aprendizaje por Refuerzo
- RL Aprendizaje por refuerzo
- RV Realidad virtual

SA Recocido simulado (Simulated Annealing)

STL Formato de malla triangular (STereoLithography)

SVM Máquinas de soporte vectorial

TS Búsqueda tabú (Tabu Search)

VQE Variational Quantum Eigensolver

ABSTRACT

This thesis studies the packing of *soft tetrahedra* into convex containers (sphere, cylinder, and cube), where each piece can deform under a *softness* parameter while satisfying conservation constraints (surface area, volume, or mixed). We present exact mathematical formulations with non-overlap conditions derived from classical families (supporting/separating hyperplanes, vertex-face, and edge-edge), extended to deformable geometry. The methodology comprises reproducible instance generation, metrics for packing density and geometric plausibility, and a standardized experimental protocol.

Computationally, we validate a hybrid solving strategy: KNITRO provides feasible, competitive initial solutions, and then BARON performs global refinement. On medium-to-large instances, where an 8 h time limit often hinders BARON when starting from scratch, KNITRO warm-starts yield improvements of about 5% on 73% of initial solutions. A geometric degeneration is observed as *softness* approaches 1 under strict surface-area conservation, with tetrahedra tending to flatten; regularization mechanisms to prevent this behavior are discussed. Results show that both container geometry and the chosen conservation measure substantially reshape the search landscape and the trade-off between packing density and geometric stability. Finally, we outline future directions in decomposition, convex relaxations, tailored cuts, and model-guided metaheuristics to improve scalability and robustness.

Keywords: geometric packing; deformable tetrahedra; non-overlapping conditions; area/volume conservation; K-NITRO; BARON; mixed optimization.

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

“Si tuviera una hora para resolver un problema, me gustaría pasar 55 minutos pensando sobre el problema y 5 minutos pensando en las soluciones”

ALBERT EINSTEIN.

1.1 ANTECEDENTES

Representación de objetos en 3D mediante la definición de sus vértices

La representación poliedral basada en vértices describe un sólido tridimensional mediante (i) un conjunto finito de puntos en \mathbb{R}^3 y (ii) una conectividad que induce aristas y caras. Esta estructura (vértices–aristas–caras) permite calcular magnitudes geométricas (por ejemplo, volumen y área superficial), aplicar transformaciones espaciales (traslación y rotación) y ejecutar pruebas de intersección/no-superposición, operaciones centrales en computación geométrica, simulación y optimización.

En el contexto de esta tesis, la elección de una representación por vértices no obedece a una motivación meramente gráfica. Al estudiar el empaquetamiento de tetraedros deformables en contenedores convexos bajo restricciones de conservación (volumen, área superficial o ambas), se requiere una descripción que soporte

de manera consistente: (a) evaluación de colisiones, (b) verificación de factibilidad geométrica y (c) cómputo estable de métricas de calidad (por ejemplo, densidad u ocupación). Para un tetraedro, además, la parametrización por vértices ofrece una formulación compacta (cuatro puntos) y facilita el control del grado de deformación mediante restricciones explícitas.

Finalmente, es importante enfatizar que la representación por vértices es el punto de partida para integrar flujos CAD/CAM, mallas trianguladas (p. ej., STL/OBJ) y rutinas de análisis geométrico, lo que resulta especialmente útil cuando se busca trazabilidad, reproducibilidad y validación experimental. Véase la Figura 1.1.

Áreas de aplicación

La representación por vértices es un componente estándar en flujos CAD/CAM y CAE: permite definir geometrías con precisión, controlar modificaciones paramétricas y ejecutar análisis estructurales o de desempeño antes de fabricar prototipos físicos, reduciendo iteraciones de diseño y costos asociados [34].

En la industria, este tipo de modelos se integra además con simulación y monitoreo, por ejemplo mediante enfoques de *digital twins* que combinan geometría con datos en tiempo real, con el objetivo de mejorar diagnóstico, planeación y eficiencia de operación [56, 68]. En paralelo, su compatibilidad con formatos de malla ampliamente usados (p. ej., STL/OBJ) facilita su adopción en manufactura aditiva y procesos de preparación/validación geométrica.

En visualización y entornos interactivos (incluyendo renderizado en tiempo real y experiencias inmersivas), la representación por vértices también es esencial, ya que habilita el manejo eficiente de geometrías complejas con restricciones de rendimiento computacional [77]. Aun cuando estas aplicaciones no son el foco de la tesis, comparten un núcleo técnico relevante: la necesidad de operar con geometría discreta, medir propiedades y garantizar consistencia espacial.

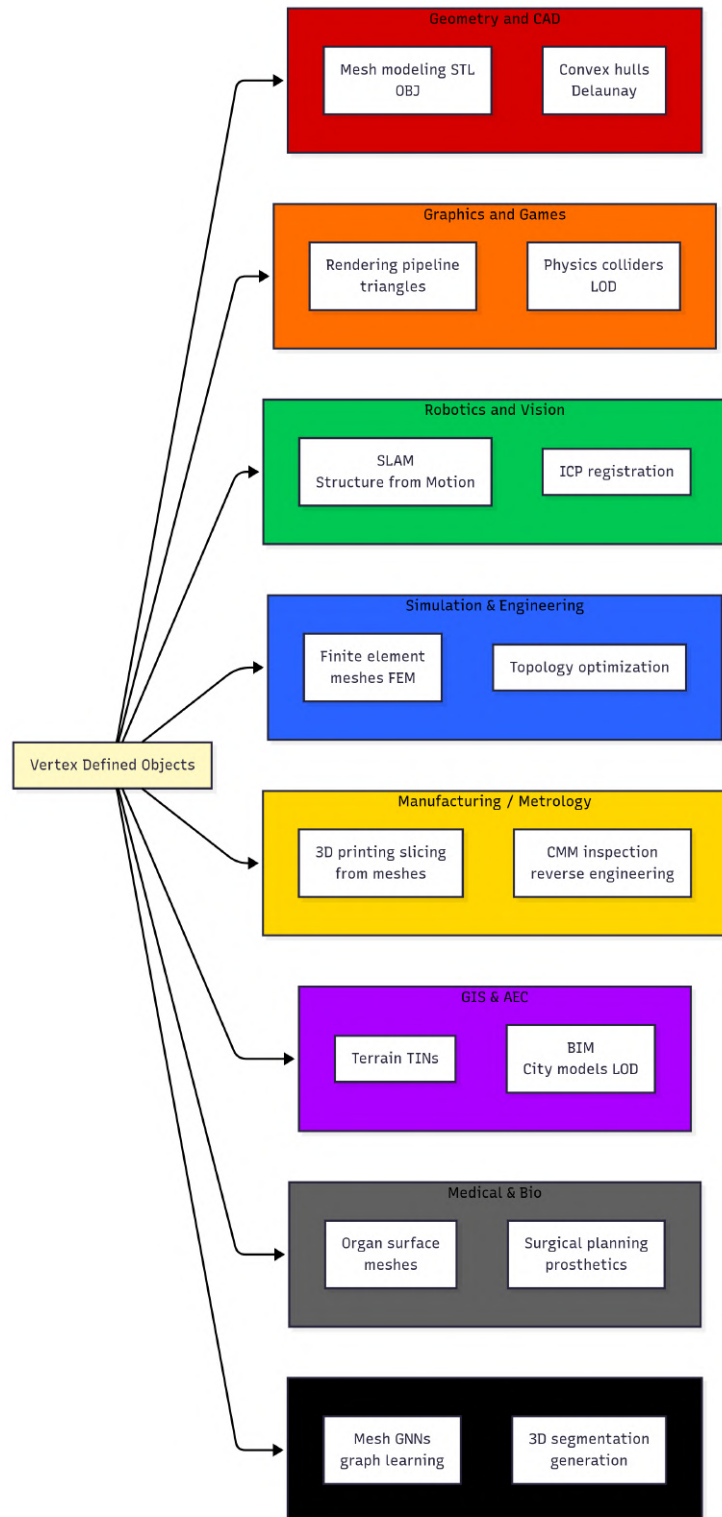


FIGURE 1.1: Áreas de aplicación (a nivel general): objetos 3D definidos a partir de vértices, aristas y caras.

El interés principal para este trabajo no es enumerar aplicaciones, sino establecer por qué esta representación es especialmente adecuada cuando el objetivo es imponer restricciones geométricas estrictas (no-intersección y conservación) y evaluar métricas de calidad en problemas de optimización de empaquetamiento tridimensional.

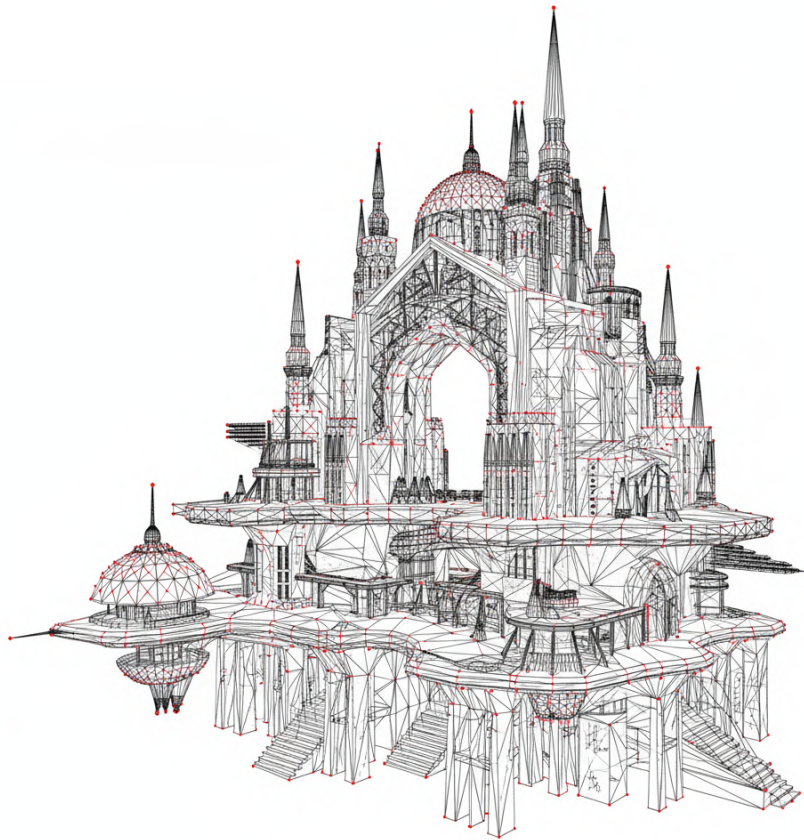


FIGURE 1.2: Ejemplo ilustrativo de discretización: vértices y estructura triangular en un modelo a gran escala.

Ventajas y desventajas de la representación de objetos tridimensionales mediante vértices

VENTAJAS:

- **Precisión y control:** Permite una definición explícita de la geometría, ofre-

ciendo control fino sobre la forma y la estructura.

- **Flexibilidad:** Soporta desde formas simples hasta entidades complejas, lo que la hace útil en múltiples dominios.
- **Interoperabilidad:** Es compatible con formatos y herramientas comunes, favoreciendo colaboración e intercambio.
- **Base para operaciones geométricas:** Facilita cálculos de volumen/área, transformaciones y pruebas de intersección, fundamentales en simulación y optimización.

DESVENTAJAS:

- **Complejidad de modelos detallados:** El aumento de resolución incrementa el volumen de datos y la dificultad de manipulación.
- **Demanda computacional:** Operaciones como detección de colisiones y verificación geométrica pueden ser costosas a gran escala.
- **Curva de aprendizaje:** Requiere dominio geométrico y conocimiento de herramientas especializadas.
- **Dependencia de técnicas complementarias:** Para realismo visual o simulación avanzada suelen requerirse métodos adicionales (materiales, sombreado, etc.).

Importancia de la representación de objetos en 3D mediante vértices en empaquetamiento (C&P)

El uso de vértices para representar objetos 3D es especialmente relevante en problemas de empaquetamiento (*cutting & packing*) porque posibilita:

- **Precisión geométrica:** Cada vértice define puntos exactos en el espacio, lo que permite cálculos consistentes de volumen, área y relaciones espaciales.
- **Flexibilidad ante formas irregulares:** La representación por vértices se adecua a geometrías complejas o no triviales.
- **Optimización del espacio:** Con geometría explícita, los algoritmos pueden disponer piezas de manera más eficiente.
- **Detección de colisiones:** Facilita identificar y evitar superposiciones durante la búsqueda de soluciones.
- **Visualización y validación:** Permite verificar soluciones mediante reconstrucción y análisis geométrico.
- **Interoperabilidad:** Se ajusta a formatos estándar (OBJ, STL) y sistemas CAD, simplificando intercambio y replicación.

Gracias a esta representación, se puede capturar con fidelidad la geometría del objeto y diseñar formulaciones y algoritmos que encuentren configuraciones más densas, manteniendo factibilidad geométrica y estabilidad.

Retos

A pesar de las ventajas de la representación por vértices, abordar el empaquetamiento de sólidos (incluso simples) mediante modelos matemáticos con restricciones geométricas estrictas conlleva:

- Un incremento significativo en el número de variables y restricciones, con impacto directo en la complejidad computacional.
- La necesidad de resolver subproblemas geométricos (colisiones, orientaciones, envolventes convexas, etc.) de manera eficiente.

- El desarrollo o la adaptación de estrategias algorítmicas, dada la dificultad de obtener soluciones globales para instancias grandes.
- Un conocimiento avanzado en geometría, cálculo y optimización para asegurar formulaciones correctas y numéricamente estables.

Estrategias de solución más empleadas

- **Métodos exactos/continuos:** Programación no lineal y no lineal-mixta (cuando aplica), a menudo combinada con estrategias de relajación, regularización y mejoras locales.
- **Optimización global:** Métodos deterministas o híbridos que buscan garantías de optimalidad (o cotas) en formulaciones no convexas.
- **Heurísticas y metaheurísticas:** Búsqueda tabú, recocido simulado, algoritmos genéticos, entre otros, útiles para generar soluciones iniciales de calidad.
- **Métodos geométricos específicos:** Envolventes convexas, grafos de colisión, proyecciones, y pruebas de separación para garantizar no-superposición.

La representación por vértices y las restricciones geométricas asociadas constituyen la base técnica sobre la que se construyen formulaciones de empaquetamiento tridimensional. Este marco explica por qué decisiones de modelado (p. ej., conservación de volumen/superficie y control de deformación) condicionan tanto la factibilidad como el desempeño de los solucionadores.

1.2 PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

A pesar de avances en geometría computacional y optimización, el desarrollo de modelos matemáticos con restricciones geométricas estrictas para el empaquetamiento

de objetos definidos por vértices sigue siendo un desafío teórico y práctico. Muchos enfoques existentes recurren a simplificaciones o aproximaciones que pueden degradar la calidad cuando se manejan formas irregulares, restricciones físicas o instancias de mayor tamaño.

El problema de investigación principal consiste en proponer **modelos matemáticos de alta fidelidad** que representen y resuelvan la disposición espacial de objetos poliedrales (definidos por vértices) con control explícito de orientaciones, restricciones de no-intersección y conservación geométrica. Abordar esta cuestión requiere una aproximación interdisciplinaria entre geometría computacional, técnicas de optimización y métodos algorítmicos avanzados.

El desafío central es empaquetar tetraedros “suaves” en contenedores convexos maximizando calidad (densidad/objetivo) sin incurrir en degeneraciones geométricas, especialmente cuando la *softness* se acerca a 1.0. La brecha identificada es la falta de estrategias reproducibles que concilien buenas soluciones iniciales con mejoras globales consistentes en tiempos razonables.

1.3 RELEVANCIA

El empaquetamiento 3D de objetos definidos por vértices es relevante en logística, manufactura y otros campos donde se requiere optimizar el uso del espacio bajo restricciones geométricas. Esta representación habilita resolver con mayor exactitud la disposición de formas irregulares y facilita el desarrollo de algoritmos que automatizan procesos de empaquetamiento, reduciendo costos, tiempo y errores operativos.

El trabajo aporta al cruce entre optimización matemática y geometría computacional con implicaciones prácticas en empaque, manufactura aditiva y diseño estructural. Su valor reside en entregar evidencias cuantitativas y artefactos reproducibles que pueden servir como referencia metodológica para estudios posteriores.

1.4 ALCANCE Y LIMITACIONES

El trabajo que se presenta a lo largo de esta tesis comprende:

- El análisis detallado de instancias de empaquetamiento 3D (con énfasis en tetraedros y poliedros definidos por vértices), cotejando complejidad teórica y desempeño empírico.
- El desarrollo de un conjunto de **modelos base** aplicables a distintos tipos de contenedores convexos (principalmente esfera, cilindro y cubo).
- La validación experimental de los modelos enfocada en **empacar tetraedros** (regulares, deformables y variantes), acotada por recursos computacionales y licencias/configuración de solucionadores matemáticos.

No se abarcan en detalle objetos con topologías altamente complejas (por ejemplo, cavidades internas, geometrías no convexas o superficies extremadamente irregulares), aunque los planteamientos podrían extenderse con modificaciones adecuadas.

Contribuciones

Este trabajo aporta resultados originales en la intersección entre empaquetamiento de poliedros deformables, optimización matemática y análisis computacional. Nuestras contribuciones principales son:

1. **Formulación exacta para empaquetamiento de tetraedros “suaves”.**

Presentamos modelos matemáticos que permiten la deformación controlada de tetraedros bajo restricciones de conservación (volumen y/o superficie) en tres contenedores convexos (esfera, cilindro y cubo), con definición explícita de variables, parámetros y funciones objetivo.

2. **Estrategia híbrida de resolución *Knitro*→*BARON*.** Proponemos y validamos un flujo metodológico en dos fases: (i) obtención rápida de una solución inicial factible y de buena calidad mediante *Knitro* (programación no lineal), y (ii) mejora global con *BARON* usando *warm-start*, acelerando convergencia y mejorando la calidad final frente a ejecuciones “en frío”.
3. **Prevención de degeneración geométrica cerca de *softness* ≈ 1 .** Introducimos técnicas de robustificación (p. ej., penalizaciones suaves a razones de aspecto y cotas de estabilidad geométrica) que mitigan colapsos o aplanamientos, manteniendo la integridad 3D.
4. **Protocolo experimental reproducible.** Definimos un diseño de experimentos que varía sistemáticamente tamaño de instancia, tipo de contenedor, esquema de conservación y límites de tiempo, reportando métricas de calidad (objetivo, *gap*, densidad) y de coste (tiempo, iteraciones), con análisis de sensibilidad y ablasiones.
5. **Artefactos y guías de replicación.** Entregamos scripts, parámetros clave y plantillas para replicar experimentos (incluyendo semillas, versiones de solver y configuración de hardware/NEOS), favoreciendo transparencia y trazabilidad.
6. **Comparativa empírica.** Proporcionamos tablas y figuras que comparan desempeño por contenedor y tamaño de instancia, así como curvas tiempo–calidad y pruebas de significancia/tamaño de efecto que respaldan las conclusiones del estudio.

1.5 OBJETIVOS DEL ESTUDIO

- **Diseñar modelos matemáticos** de vanguardia para problemas de empaquetamiento de poliedros convexos en contenedores convexos.

- **Validar la efectividad** de dichos modelos mediante experimentos con objetos definidos por vértices, con énfasis en el problema de “relleno denso del contenedor”.
- **Proponer una metodología** para abordar diversos escenarios de empaquetamiento (*bin packing*), integrando estrategias combinadas (solvers continuos y globales con *warm-start*, más heurísticas para soluciones iniciales) para identificar soluciones óptimas o *casi óptimas* en tiempos razonables.

Se busca (i) formular modelos con conservación controlada, (ii) evaluar una estrategia híbrida Knitro→BARON con *warm-start*, y (iii) medir el impacto en calidad y tiempo frente a alternativas. Adicionalmente, se pretende establecer lineamientos de robustificación que mitiguen degeneración sin penalizar en exceso la solución.

1.6 PREGUNTAS E HIPÓTESIS DE INVESTIGACIÓN

Se busca responder cómo aprovechar propiedades geométricas (por ejemplo, restricciones de separación/no-intersección, planos de soporte, y relajaciones geométricas) para *reducir* de forma significativa la complejidad efectiva del modelo de empaquetamiento sin perder fidelidad geométrica. La hipótesis general plantea que al incorporar formulaciones geométricas más informativas y estrategias de inicialización de calidad, es posible mejorar tiempos de cómputo y obtener soluciones de alta calidad para escenarios con objetos tridimensionales complejos.

En particular, se interroga si un *warm-start* de calidad mejora sistemáticamente la solución final y reduce el tiempo total en instancias medias y grandes. La hipótesis principal sostiene que la combinación “NLP inicial (Knitro) + optimización global (BARON)” domina a ejecuciones en frío y que términos suaves de regularización controlan la degeneración sin sacrificar densidad.

1.7 ESTRUCTURA DE LA TESIS

Esta memoria se organiza de la siguiente forma:

- **Abstract.** Ofrece una visión global y concisa de la investigación, destacando objetivos, metodología, resultados y conclusiones.
- **Introducción.** El capítulo actual sitúa el problema de investigación, fundamenta el uso de representación por vértices en empaquetamiento 3D y expone objetivos, alcance y organización del documento.
- **Marco teórico.** Se revisan fundamentos, teorías y avances relevantes en la literatura, brindando base conceptual para los modelos y métodos utilizados.
- **Metodología.** Presenta el diseño de investigación, técnicas de modelado, formulación matemática y procedimientos de implementación en software de optimización.
- **Experimentación y análisis de resultados.** Describe instancias de prueba, expone resultados numéricos y discute su significado con respecto a las hipótesis planteadas.
- **Conclusiones.** Resume hallazgos, discute implicaciones teóricas y prácticas, limitaciones y propuestas de trabajo futuro.

El documento avanza desde la base conceptual y el estado del arte hacia la metodología propuesta, para culminar en la validación experimental y las conclusiones. Esta organización facilita aislar decisiones de modelado, reproducir el flujo de resolución y comprender el impacto de cada componente en el resultado final.

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO

“Aquel que ama la práctica sin la teoría es como el marinero que se embarca sin timón ni brújula y nunca sabe dónde puede acabar.”

LEONARDO DA VINCI.

2.1 INTRODUCCIÓN

La investigación sobre problemas de empaquetado en 3D (3D-BPP, por sus siglas en inglés) con diferentes características es prolífica en artículos, aplicaciones y patentes. El 3D-BPP constituye un desafío clásico de optimización combinatoria de tipo NP-hard, y resulta de gran relevancia práctica en campos como la logística, la manufactura y la informática. A medida que crece el número de elementos u objetos a empaquetar y se incrementa la complejidad de las restricciones geométricas, la cantidad de configuraciones posibles se expande de forma exponencial, lo que vuelve inviable abordar el problema con métodos exactos en instancias de gran escala. Por esta razón, la comunidad investigadora ha volcado su atención en algoritmos meta-heurísticos que puedan ofrecer soluciones cercanas al óptimo en tiempos de cómputo razonables [21, 35, 42, 61, 72].

Esta sección no pretende cubrir todos los artículos de esta rama del conoci-

miento. Por lo tanto, se restringe a la revisión de artículos que abordan algunos tipos interesantes de objetos tridimensionales empaquetados en diferentes tipos de contenedores mediante métodos y enfoques diversos: simulaciones usando vibraciones 3D y técnicas DEM, métodos exactos, meta-heurísticas, métodos *cuasi-físicos*, redes neuronales, aprendizaje por refuerzo, *Large Language Models* o LLMs y en algunos casos combinaciones híbridas, consultar tabla 2.2 de la página 20.

Desde finales de la década pasada, los avances en computación han potenciado la aplicación de metaheurísticas al 3D-BPP, permitiendo la exploración de enormes espacios de búsqueda con relativa eficiencia. Gracias a la naturaleza flexible y capacidad de escapar de mínimos locales, estos métodos han demostrado obtener configuraciones de empaquetado con altas tasas de llenado. En los últimos años, las propuestas metaheurísticas han incorporado elementos adaptativos y técnicas de aprendizaje automatizado, marcando un hito en la evolución de la investigación sobre el 3DBPP. Aunque a pesar de la creciente potencia computacional de las estaciones de trabajo de la actualidad, todavía existen limitaciones, debido a que las velocidades de procesamiento y la rapidez del almacenamiento computacional necesario, los cuales no son suficientes para ejecutar de manera óptima los modelos matemáticos complejos nuevos que surgen cada día. Sin embargo, hay señales considerables de progreso con la inclusión de los sistemas computacionales horizontales y la computación en la *nube*, incluso cuando ese tipo de arquitecturas se enfocan principalmente en aplicaciones de Big Data. Con suerte, pronto, los métodos exactos superarán esos inconvenientes, en concordancia con los esfuerzos de los matemáticos por descubrir e innovar nuevas formas de mejorar los modelos y los métodos de solución específicos.

Aplicaciones de los 3DBPP en la vida cotidiana

El 3D-BPP tiene importantes aplicaciones prácticas. En logística, por ejemplo, permite optimizar la carga de contenedores y camiones, reduciendo costos de transporte; en manufactura, ayuda a la organización de piezas en almacenes y talleres;

y en informática, se relaciona con la asignación eficiente de recursos en servidores virtualizados. Debido a esta diversidad de aplicaciones, el diseño de metaheurísticas robustas y escalables repercute positivamente en múltiples industrias y abre paso a nuevos desafíos científicos.

El empaquetado 3D es un problema clásico con aplicaciones industriales reales y una complejidad que exige rigor matemático y decisiones de modelado bien justificadas. El capítulo sitúa el trabajo en el cruce entre geometría computacional y optimización, preparando el terreno para los conceptos y técnicas que luego se explotarán en la metodología.

2.2 COMPLEJIDAD COMPUTACIONAL DEL EMPAQUETADO 3D

El 3DBPP se clasifica como NP-hard, ya que generaliza el problema clásico de empaquetado unidimensional, conocido por ser fuertemente NP-hard [33]. Esta clasificación implica que ningún algoritmo en tiempo polinomial puede resolver de manera óptima todas las instancias, a menos que se cumpla la igualdad $P = NP$. Por fines prácticos, esto hace necesario recurrir a métodos heurísticos o metaheurísticos que aproximen soluciones en marcos temporales razonables, especialmente en aplicaciones industriales a gran escala.

La familia de problemas *NP-hard*: introducción

En informática teórica y optimización matemática, los problemas *NP-hard* tienen un papel crucial, planteando importantes desafíos en el diseño de algoritmos e impulsando la comprensión de los límites computacionales [20, 28, 71]. Un problema se clasifica como *NP-hard* si todos los problemas de NP pueden reducirse a él en tiempo polinómico. A diferencia de los problemas NP-completos, los *NP-hard* no

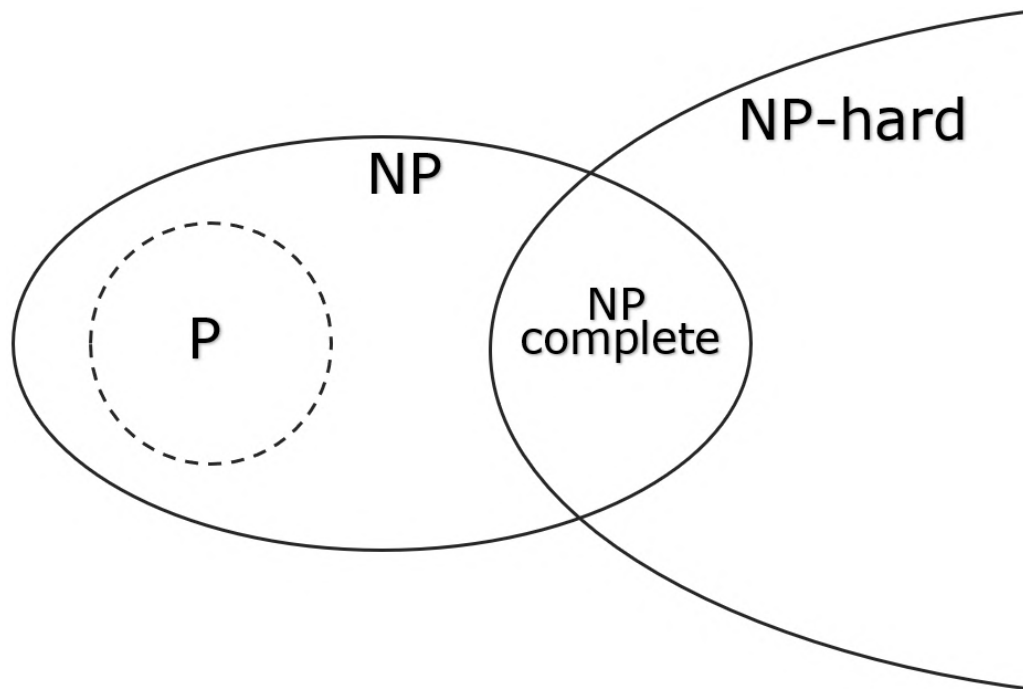


FIGURE 2.1: Categorías de problemas en según la complejidad de la solución. Adaptado de la fuente: [33]

requieren ser problemas de decisión; abarcan también problemas de optimización considerados tan difíciles como cualquier problema en NP .

La relevancia de estos problemas en optimización radica en su carácter universal: abarcan un amplio espectro de desafíos, desde la logística hasta la planificación y la ingeniería. El desarrollo de algoritmos que resuelvan (o aproximen soluciones) a problemas *NP-hard* de manera eficiente es un desafío tanto teórico como práctico [51].

El 3DBPP es NP -hard, por lo que las expectativas sobre tiempos de cómputo y garantías de optimalidad deben ser realistas y guiadas por time-limits y criterios de paro. Esta complejidad justifica enfoques híbridos (inicialización rápida + globalización) y la inclusión de análisis de sensibilidad/robustez.

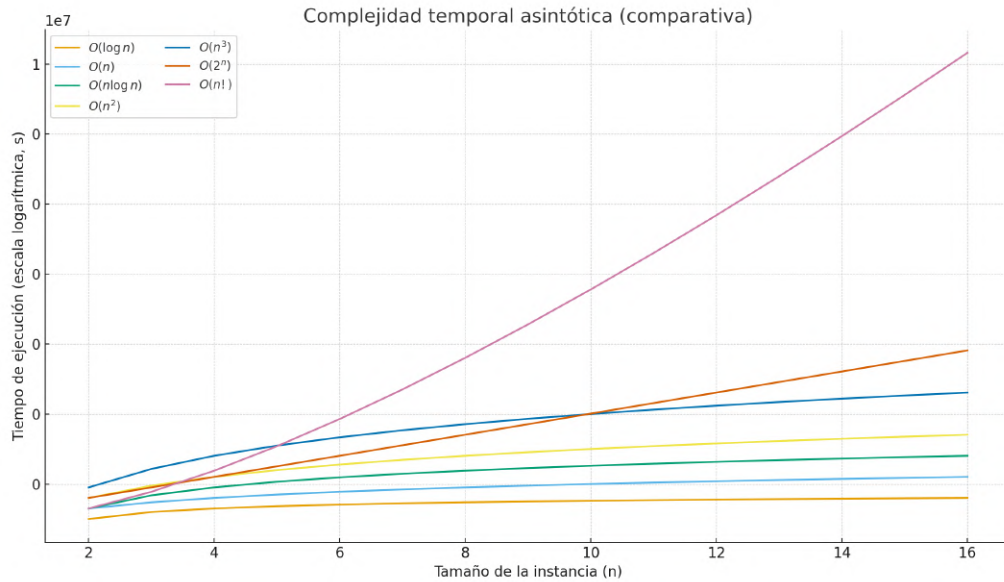


FIGURE 2.2: Notación Big-O. Adaptado de la fuente: [60, 66, 71]

2.3 CLASIFICACIÓN DE LOS PROBLEMAS DE CORTE Y EMPAQUETADO (C&P)

Los problemas de corte y empaquetado aparecen con varios nombres en la literatura, problema de corte de material o pérdida de recortes, problema de C&P en contenedores o tiras, problemas de carga de vehículos, paletas o contenedores, problema de anidamiento, problema de mochila, etc. En 1990 apareció el primer artículo de revisión que expuso un enfoque consistente y sistemático para una tipología integral que integra varios tipos de problemas [16], esta tipología se basa en la estructura lógica subyacente de los problemas de corte y empaquetado. El objetivo principal era unificar los diferentes usos de las nociones en la literatura y concentrar más investigaciones en tipos particulares de problemas, consultar tabla 2.1 de la página 19.

Como el número de publicaciones en el área de corte y empaquetado (C&P) aumentó considerablemente en las próximas dos décadas, la primera tipología de problemas de C&P introducida por Dyckhoff proporcionó inicialmente un excelente

TABLE 2.1: Tipología básica de problemas de C&P.

Objetivo	Naturaleza del objeto	Tipología del problema
Maximización de la salida	Idénticos	Elementos a empaquetar idénticos
	Débilmente heterogéneo	problema de ubicación
	Fuertemente heterogéneo	Problema de mochila
Maximización de la entrada	Arbitrario	Problema de dimensiones abiertas
	Débilmente heterogéneo	Problemas de corte de stock
	Fuertemente heterogéneo	Problemas de empaquetado

instrumento para la clasificación de los problemas existentes y entrantes sin categorizar, problemas que aparecen en nuevos artículos. Sin embargo, a lo largo de los años, se hicieron evidentes algunas deficiencias de esta tipología, creando dificultades para hacer frente a los desarrollos recientes e impidiendo su aceptación. Era necesaria una tipología mejorada basada parcialmente en las ideas originales de Dyckhoff, introduciendo nuevos criterios de categorización, definiendo categorías de problemas diferentes a las de Dyckhoff. [82].

Una taxonomía clara (corte vs. empaquetado; 2D vs. 3D; ortogonal vs. irregular; un contenedor vs. múltiple) evita ambigüedades y mejora la comparabilidad de resultados. Nombrar correctamente el subproblema que aboradas alinea las métricas y las expectativas con la literatura pertinente.

TABLE 2.2: Tipologías de problemas revisadas en la literatura (derivadas de

ES_biblio.bib)

Tipología del contenedor	Clase de objeto 3D	Métodos (según la revisión)
Cilíndricos	Cilindros	Exactos, Geometría/algoritmos, Meta-heurísticas
Cilíndricos	Elipsoides	Exactos, Geometría/algoritmos, Meta-heurísticas
Prismoidales	Cajas	Meta-heurísticas
Prismoidales	Esferas	Meta-heurísticas
Prismoidales	Irregulares	(no clasificado)
Esféricos	(genérico)	(no clasificado)
Esféricos	Cajas	Meta-heurísticas
Esféricos	Esferas	Meta-heurísticas
Irregulares/convexos	Cajas	(no clasificado)
Irregulares/convexos	Irregulares	Exactos, Meta-heurísticas
Genéricos	Cajas	Exactos, Meta-heurísticas
Genéricos	Cajas	Meta-heurísticas
Genéricos	Cilindros	Exactos, Geometría/algoritmos, Meta-heurísticas
Genéricos	Elipsoides	Exactos, Geometría/algoritmos, Meta-heurísticas
Genéricos	Esferas	Meta-heurísticas
Genéricos	Irregulares	Exactos
Genéricos	Irregulares	(no clasificado)
Genéricos	Tetraedros	(no clasificado)

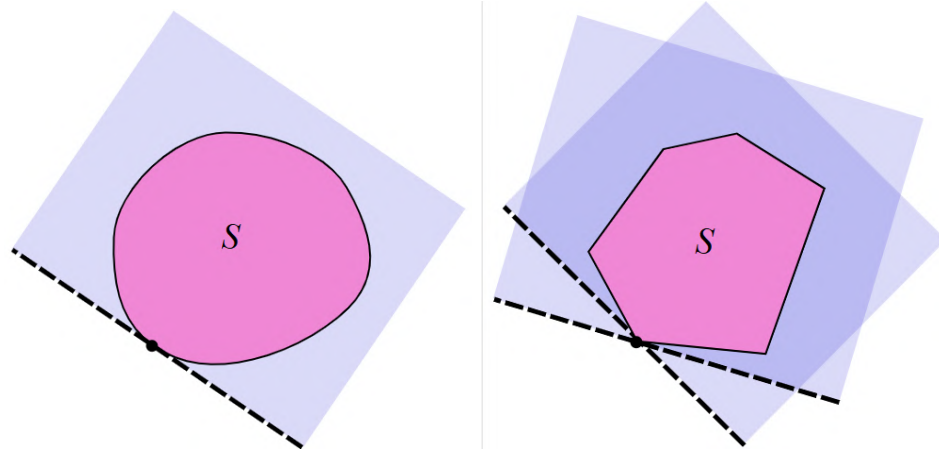
2.4 HIPERPLANOS DE SOPORTE COMO ESTRATEGIA EN MINIMIZACIÓN DEL ESPACIO DE RESTRICCIONES

En la formulación de modelos exactos para el empaquetado de tetraedros en contenedores convexos, la complejidad surge principalmente debido al elevado número de restricciones que deben garantizar la no intersección entre objetos y el ajuste en el contenedor. Una estrategia eficaz para mitigar dicha complejidad consiste en utilizar *hiperplanos de soporte*, ver imagen 2.3 de la página 22, para acotar y, en muchos casos, reducir de forma significativa el espacio de restricciones.

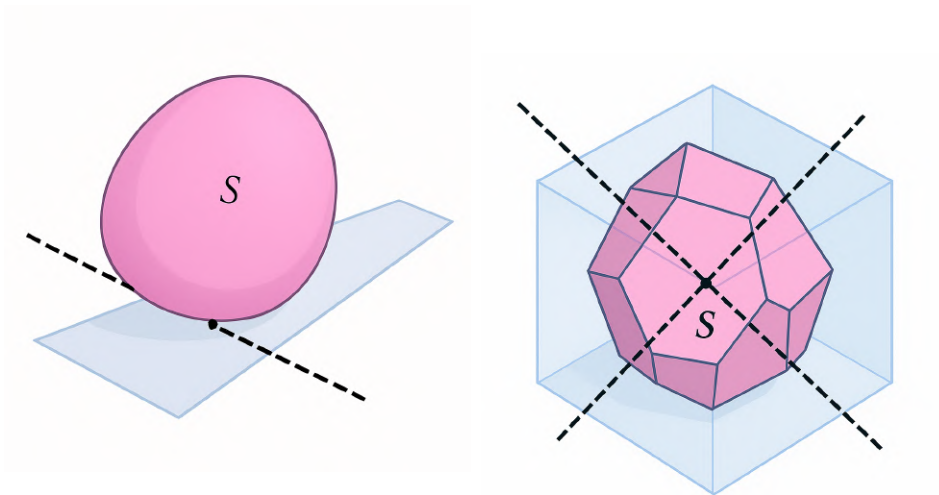
Los hiperplanos de soporte, conocidos en la literatura como *support hyperplanes*, son herramientas fundamentales en geometría convexa. Su aplicación permite definir fronteras precisas sobre los límites de los tetraedros y del contenedor, posibilitando la eliminación de restricciones redundantes que no influyen en la factibilidad del empaquetado. En particular, al identificar los hiperplanos que tocan a los vértices o caras de un tetraedro, es posible restringir las posiciones admisibles de estos sólidos sin tener que considerar la totalidad del espacio geométrico.

Esta reducción se basa en dos ideas clave:

1. **Aproximación del espacio factible:** La utilización de hiperplanos de soporte permite aproximar el espacio factible mediante la intersección de semiespacios. De esta forma, en lugar de modelar explícitamente la complejidad completa de la interacción entre tetraedros, se restringen las variables a aquellas regiones en las que la intersección es posible, eliminando zonas geoméricamente inviables.
2. **Eliminación de restricciones redundantes:** En modelos exactos, la cantidad de restricciones suele generar un incremento exponencial en el tiempo computacional. Al emplear hiperplanos que delimitan la envolvente convexa de cada tetraedro, se pueden derivar restricciones equivalentes o incluso más



(a) Conjunto convexo con un único hiperplano de soporte 2D. (b) Conjunto convexo con varios hiperplanos de soporte 2D.



(c) Conjunto convexo con un único hiperplano de soporte 3D^a (d) Conjunto convexo con varios hiperplanos de soporte 3D^a.

^aAdaptado de la fuente para espacios de tres dimensiones.

^aIdem.

FIGURE 2.3: Representación gráfica del hiperplanos de soporte. Fuente: [50]

estrictas, simplificando el conjunto total de restricciones del modelo. Esto reduce la dimensionalidad del problema y mejora la eficiencia en la búsqueda de soluciones óptimas.

La aplicación de estos conceptos se ha estudiado en el contexto del empaquetado de objetos tridimensionales, donde la identificación de hiperplanos críticos ha permitido diseñar algoritmos más eficientes. Alt y Scharf desarrollaron aproximaciones para el empaquetado de objetos convexos en contenedores de volumen mínimo, demostrando que la consideración de restricciones geométricas (entre ellas, las derivadas de hiperplanos de soporte) resulta crucial para acotar la solución [2]. De igual forma, en modelos exactos para el empaquetado de tetraedros, se ha comprobado que la formulación de restricciones basadas en hiperplanos de soporte permite eliminar evaluaciones redundantes sobre las intersecciones, concentrándose únicamente en los casos críticos en los que las caras o vértices se aproximan al límite del contenedor.

El uso de esta estrategia no solo reduce la complejidad computacional, sino que también ofrece una interpretación geométrica intuitiva del problema. Cada tetraedro, al ser un poliedro convexo, admite al menos un conjunto de hiperplanos de soporte que pueden usarse para definir su *envolvente mínima*. Al superponer estas envolventes con la del contenedor convexo, se obtiene una descripción precisa de las posibles posiciones y orientaciones viables para el empaquetado.

Adicionalmente, investigaciones recientes han integrado técnicas de optimización geométrica y programación matemática que aprovechan la propiedad de separación de hiperplanos para reformular las restricciones del modelo. Esto se traduce en una reducción considerable en el número de variables y restricciones lineales, lo cual es especialmente relevante en escenarios de empaquetado de alta densidad y en problemas combinatorios de gran escala [1, 31]. La teoría subyacente a los hiperplanos de soporte y separación se encuentra detalladamente expuesta en textos clásicos de optimización convexa, lo que refuerza la validez teórica de esta estrategia [5, 31].

En síntesis, la implementación de hiperplanos de soporte en modelos exactos

para el empaquetado de tetraedros en contenedores convexos permite:

- Delimitar con precisión las regiones factibles del espacio mediante intersecciones de semiespacios.
- Reducir el número total de restricciones, eliminando aquellas redundantes.
- Ofrecer una interpretación geométrica clara que facilita la implementación y análisis del modelo.

Estos avances, respaldados tanto por teorías clásicas en geometría convexa como por investigaciones actuales en optimización, confirman la utilidad de esta estrategia para abordar problemas complejos en empaquetado tridimensional.

Los hiperplanos de soporte permiten acotar la región factible y acelerar el proceso de búsqueda al “apretar” el espacio de restricciones. Bien diseñados, actúan como cortes válidos que preservan la factibilidad y mejoran la condición numérica del modelo.

2.5 CONDICIONES DE NO INTERSECCIÓN

Las condiciones de no intercepción son elementos indispensables y críticos a los cuales debe prestar especial atención en la resolución de problemas de empaquetado; estas garantizan el no solapamiento o existencia de colisiones de los objetos dentro de los contenedores. En esta sección se presentará la formulación matemática propuesta, ver subsección 2.5.2 de la página 25.

Detección de colisiones

La detección de colisiones en sistemas 3D se apoya de forma considerable en análisis angulares para determinar situaciones en las que un objeto podría solaparse con

otro o con la pared del contenedor. El método más habitual consiste en evaluar la orientación de las caras o aristas relevantes mediante sus vectores normales. Si el ángulo entre dos normales se acerca a la colinealidad inversa, la probabilidad de penetración geométrica aumenta, activando procesos de realineación o veto de la colocación.

Un aspecto destacado es el uso de jerarquías de volúmenes contenedores y el Teorema del Eje Separador (*Separating Axis Theorem*), donde los cálculos angulares facilitan la identificación de posibles ejes de intersección. En paralelo, dichas técnicas pueden descartar rápidamente combinaciones de orientaciones que sean imposibles o poco rentables en términos de espacio, lo que reduce de manera notable la complejidad computacional [30].

La precisión en la detección de colisiones cobra mayor relevancia cuando los objetos presentan geometrías irregulares y el contenedor posee paredes curvas. En estos casos, un pequeño error en la estimación del ángulo puede derivar en colisiones no detectadas o falsas alarmas. Por ello, se recomienda incluir rutinas de filtrado angular o de refinamiento adaptativo que ajusten las tolerancias de cálculo conforme se añaden nuevos objetos a la configuración.

Formulación matemática

Sean T_k y T_p dos politopos en \mathbb{R}^n con vértices $\{X_k^j, j \in J_k\}$ y $\{X_p^j, j \in J_p\}$. Estos politopos no se interceptan (aunque pueden ser tangentes) si existe un vector $v_{kp} \in \mathbb{R}^n$, $v_{kp} \neq 0$ y un escalar b_{kp} , tal que el hiperplano $v_{kp}^t x \leq b_{kp}$ separa a T_k y T_p , es decir:

$$\begin{aligned} v_{kp}^t x &\leq b_{kp} && \text{para toda } x \in T_k \\ v_{kp}^t x &\geq b_{kp} && \text{para toda } x \in T_p \end{aligned}$$

Lo anterior se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\max\{v_{kp}^t x : x \in T_k\} \leq b_{kp}$$

$$\min\{v_{kp}^t x : x \in T_p\} \geq b_{kp}$$

o el equivalente,

$$\max\{v_{kp}^t x : x \in T_k\} \leq \min\{v_{kp}^t x : x \in T_p\}$$

Dado que un punto extremo de una función lineal se alcanza en un vértice de un polígono acotado, entonces se tiene:

$$\max_{j \in J_k} \{v_{kp}^t X_k^j\} \leq \min_{j \in J_p} \{v_{kp}^t X_p^j\} \quad (2.1)$$

Se denotan las variables:

$$\alpha_{kp} = \max_{j \in J_k} \{v_{kp}^t X_k^j\}, \quad -\beta_{kp} = \min_{j \in J_p} \{v_{kp}^t X_p^j\}.$$

Entonces, por la definición de max y min, la desigualdad (2.1) es equivalente a:

$$\alpha_{kp} + \beta_{kp} \leq 0 \quad (2.2)$$

$$\alpha_{kp} \geq v_{kp}^t X_k^j, \quad j \in J_k$$

$$-\beta_{kp} \leq v_{kp}^t X_p^j, \quad j \in J_p$$

$$v_{kp} \neq 0$$

Si (v_{kp}) es factible para (2.1), entonces $\rho(v_{kp})$ también es factible para cualquier $\rho > 0$. Por lo que, para asegurar $v_{kp} \neq 0$ se puede normalizar la configuración de v_{kp} , por ejemplo $\|v_{kp}\|^2 \geq 1$, donde $\|\cdot\|$ es una cierta norma, no necesariamente la Euclidiana. También se puede intentar

$$e^t v \geq 1,$$

Donde $e \in \mathbb{R}^n$ es un vector unitario, esta desigualdad elimina y también vectores con todos los componentes negativos. Sin embargo, si v_{kp} es un plano de separación, entonces $-v_{kp}$ también separa T_k y T_p . Por último, tenemos las siguientes condiciones para la no intersección de T_k y T_p :

$$\alpha_{kp} + \beta_{kp} \leq 0 \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned}\alpha_{kp} &\geq v_{kp}^t X_k^j, & j \in J_k \\ -\beta_{kp} &\leq v_{kp}^t X_p^j, & j \in J_p \\ e^t v_{kp} &\geq 1\end{aligned}$$

Las restricciones de no solapamiento son el corazón geométrico del problema y, mal formuladas, generan soluciones degeneradas o inestables. Su implementación debe equilibrar fidelidad geométrica y costo computacional (p. ej., separabilidad por caras, normales y distancias mínimas).

2.6 EL TEOREMA DE LOS HIPERPLANOS SEPARADORES

El **Teorema de Separación de Hiperplanos** es fundamental en la geometría y el análisis convexo. Se atribuye a Hermann Minkowski y, en versiones más generales, se relaciona con el teorema de Hahn-Banach para espacios vectoriales topológicos [4].

Dicho teorema afirma que para todo par de conjuntos convexos disjuntos en un espacio euclidiano de dimensión n , existe al menos un hiperplano capaz de separarlos completamente [22, 55]. Este resultado se extiende a diversos campos, entre ellos la teoría de la optimización y el aprendizaje automático (máquinas de soporte vectorial, SVMs) [22, 49].

Descripción formal del teorema

Sea \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 dos conjuntos convexos y disjuntos en \mathbb{R}^n . El teorema establece que existe un hiperplano

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x = b\},$$

con $a \neq 0$, tal que

$$a^T x \leq b \quad \forall x \in \mathcal{C}_1 \quad \text{y} \quad a^T x \geq b \quad \forall x \in \mathcal{C}_2.$$

Hiperplano de soporte

En geometría, un hiperplano de soporte es aquel que “toca” un conjunto convexo en al menos un punto, sin intersectar su interior. Su importancia radica en la capacidad de describir fronteras y restricciones de manera eficiente, marcando los límites de un conjunto en optimización convexa.

Aplicaciones e implicaciones

Este teorema es la base de numerosas técnicas de optimización y de separación de conjuntos en espacios de alta dimensión (detección de colisiones, mapeo de restricciones, etc.). En empaquetado, por ejemplo, sirve para determinar si dos objetos convexos se superponen o no, mediante la búsqueda de un eje o hiperplano separador.

La separación de conjuntos convexos por hiperplanos proporciona una base teórica sólida para certificar no intersección local. En objetos no convexos o compuestos, suele requerirse descomposición/composición convexa o aproximaciones que mantengan garantías útiles.

2.7 TETRAEDROS

El tetraedro regular es el sólido de Platón más simple [78], como se muestra en la figura 2.4, en la página 29. A pesar de su simplicidad, el estudio de sus propiedades de empaquetado ha sido fuente de errores incluso para matemáticos griegos antiguos, académicos de renombre y científicos de clase mundial. Muchas preguntas sobre estas estructuras siguen sin resolverse. Actualmente, nadie conoce la densidad de

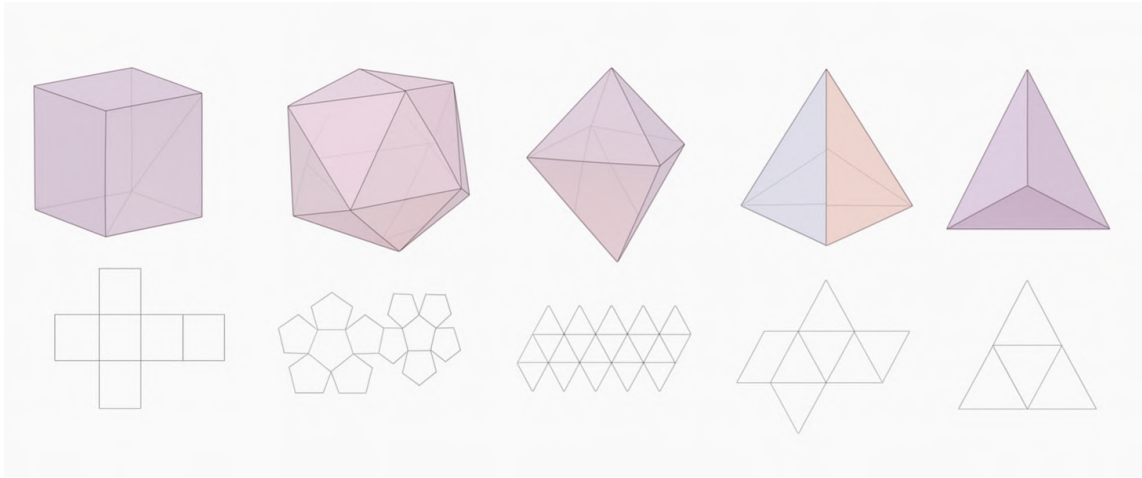


FIGURE 2.4: Sólidos de Platón y sus representaciones en 3D y 2D. Fuente [78]

sus empaques más densos, la densidad de sus empaques de traslación más densos o el valor exacto de su número de besos congruentes¹ [14, 36].

Hoy en día, está claro que los tetraedros regulares no pueden teselar espacios euclidianos tridimensionales [27]. Esto significa que no es posible llenar completamente un espacio tridimensional con tetraedros regulares sin dejar huecos. La teselación es un concepto geométrico que implica cubrir un espacio sin superposiciones ni huecos, y aunque los tetraedros pueden llenar parcialmente el espacio, siempre quedarán vacíos.

En cuanto a la conjetura de Ulam, esta es una conjetura sobre la densidad de empaquetado más alta posible de sólidos convexos idénticos en el espacio euclidiano tridimensional. La conjetura, atribuida a Stanislaw Ulam, sugiere que la densidad óptima para empaquetar esferas congruentes es menor que la de cualquier otro cuerpo convexo. En otras palabras, según la conjetura, la esfera es el sólido convexo que deja la mayor fracción de espacio vacía en su estructura de empaquetado óptimo. Esta conjetura está relacionada con la conjetura de Kepler sobre el empaquetado de esferas, que establece que las esferas idénticas deben dejar un 25.95% del espacio

¹El número de hipersferas equivalentes en n dimensiones que pueden tocar una hipersfera equivalente sin intersecciones, también llamado a veces “número de Newton”, número de contacto, número de coordinación o ligancia.

vacío. La conjetura de Ulam implica que ningún otro sólido convexo permite dejar menos espacio vacío que las esferas.

Algunos de los resultados sugieren que el tetraedro regular, bajo ciertas condiciones de elasticidad y deformación sin pérdida de su volumen original y área de la superficie, podría no solo ser capaz de empaquetarse tan densamente como la esfera, los tetraedros *suaves* podrían ser el cuerpo convexo que tiene la densidad de empaquetado más pequeña posible [11].

La parametrización de tetraedros (vértices, caras, normales, volumen/superficie) y su transformación rígida/deformable es crítica para imponer conservación y detectar colisiones. El modelo de “suavidad” debe prevenir degeneraciones (aplanaamiento) mediante penalizaciones a la razón de aspecto o cotas sobre autovalores.

2.8 IMPORTANCIA DEL CÁLCULO DE ÁNGULOS EN LA DISPOSICIÓN 3D DENTRO DE CONTENEDORES CONVEXOS

La problemática de la disposición o empaquetado en contenedores en tres dimensiones representa uno de los desafíos más significativos en el ámbito de la geometría computacional y la optimización. El objetivo primordial suele ser maximizar la utilización del volumen disponible o minimizar la cantidad de contenedores requeridos para alojar un conjunto de objetos tridimensionales. Cuando el contenedor es convexo, la complejidad se incrementa notablemente debido a la forma y curvatura de sus paredes, lo que a su vez exige un análisis más riguroso de las orientaciones posibles de cada objeto [7, 11].

El cálculo de ángulos entre vectores constituye una herramienta esencial para determinar la forma en que un objeto puede orientarse en relación con las superficies del contenedor o con otros objetos. De manera clásica, dicho cálculo se fundamenta

en la ecuación

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{AE + BF + CG}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{E^2 + F^2 + G^2}}\right),$$

donde (A, B, C) y (E, F, G) representan los componentes de los vectores en cuestión. Investigaciones recientes han destacado que el uso apropiado de esta medida angular permite guiar algoritmos de empaquetado para alcanzar configuraciones de mayor densidad.

En el caso de contenedores convexos, las restricciones geométricas derivadas de la curvatura imponen límites aún más estrictos sobre la orientación de los objetos, por lo que pequeños ajustes en los ángulos pueden generar diferencias sustanciales en la eficacia del empaquetado. Además, diversas aplicaciones industriales y científicas, desde la manufactura avanzada hasta la robótica, se benefician de un método de disposición estable y eficiente de objetos, incentivando el desarrollo de técnicas especializadas de cálculo angular.

Papel de los ángulos en la disposición 3D

Los ángulos son indicadores fundamentales de la relación geométrica entre objetos y superficies. En la disposición 3D, describen la forma en que un objeto está alineado respecto a ejes de referencia, paredes del contenedor o incluso vectores de fuerza como la gravedad. El conocimiento de estos ángulos puede incorporarse en algoritmos de búsqueda y optimización para reducir el espacio desperdiciado o anticipar problemas de colisión.

Por otra parte, el cálculo de ángulos posibilita la aplicación de técnicas especializadas de proyección y segmentación. Estas técnicas asignan diferentes condiciones de orientación a distintas zonas del contenedor, ajustando dinámicamente la posición de los objetos en función de la curvatura local. De esta manera, se mejora la eficacia del empaquetado al adaptarse de manera refinada a cada región superficial.

Finalmente, la capacidad de medir y controlar los ángulos pertinentes promueve

una mayor estabilidad en la disposición, factor indispensable en escenarios donde exista movimiento o vibración. En estos casos, la orientación errónea de un objeto puede desencadenar rotaciones indeseadas o vuelcos que comprometan la seguridad de la operación, razón por la cual el cálculo de ángulos se considera esencial en aplicaciones de robótica industrial y transporte automatizado.

Alineación de orientaciones

La alineación de orientaciones consiste en ajustar el eje principal de un objeto para potenciar su acoplamiento con el contenedor u otros elementos ya dispuestos. Este proceso, que usualmente se basa en minimizar el ángulo entre la orientación del objeto y la normal interna de la pared, resulta vital para reducir huecos y maximizar la densidad de empaquetado. Cuando el contenedor exhibe superficies curvas, se requiere un análisis más detallado de cómo varían los ángulos óptimos en distintas regiones.

En un escenario de manufactura, por ejemplo, esta alineación puede facilitar la inserción de objetos alargados o de forma irregular, incrementando su cercanía a la superficie y disminuyendo el espacio residual. Distintos algoritmos genéticos y métodos de *particle swarm optimization* ya incorporan rutinas de búsqueda de ángulos adecuados para mejorar la compactación global. Esto no solo ahorra volumen, sino que también reduce los costos asociados a la manipulación de múltiples contenedores.

Cabe destacar que la alineación de orientaciones puede optimizar los procesos de control y planificación de movimiento en robótica industrial, al disminuir la necesidad de maniobras adicionales. Una orientación inicial acertada simplifica la tarea de ubicar o extraer una pieza, lo que mejora la eficiencia y la seguridad en entornos automatizados. En consecuencia, el cálculo de ángulos desempeña un papel estratégico en la organización y programación de sistemas robotizados.

Análisis de estabilidad

El análisis de estabilidad examina la inclinación de los objetos frente a fuerzas externas, especialmente la gravedad, para prever posibles vuelcos o desplazamientos no deseados. Un método extendido implica comparar el vector de orientación principal del objeto con el vector gravitatorio y medir el ángulo entre ambos. Cuando este ángulo es pequeño, la probabilidad de un acomodo estable se incrementa, en particular bajo condiciones de vibración o movimiento constante.

En ambientes como el transporte marítimo o aeroespacial, los objetos empacados pueden experimentar aceleraciones y giros inesperados. Si la orientación de un objeto no se adecúa a estos movimientos, es probable que se genere un desplazamiento capaz de ocasionar daños en los productos o en el propio contenedor. Por esta razón, algunas aplicaciones industriales implementan sensores o sistemas de control en línea que monitorean y corrigen la orientación de los objetos conforme detectan variaciones en sus ángulos de apoyo.

Por último, la estabilidad no solo se relaciona con la gravedad, sino también con la fricción y la fuerza de compresión entre objetos cercanos. Si las superficies de contacto presentan ángulos desfavorables, la posibilidad de deslizamiento aumenta, afectando la integridad del empaquetado global. Las investigaciones más recientes recomiendan combinar el cálculo de ángulos con técnicas de simulación física (por ejemplo, métodos de elementos finitos) para una predicción más realista del comportamiento ante fuerzas externas.

Empaquetado de tetraedros en contenedores convexos

La figura del tetraedro, por su simplicidad geométrica y relevancia en diversos contextos industriales, ha ganado un interés creciente como objeto de estudio en la disposición 3D. Su naturaleza poliédrica y el número limitado de caras triangulares ofrecen oportunidades únicas para analizar cómo se distribuyen los espacios vacíos

dentro de un contenedor convexo. Además, distintas aplicaciones en la ciencia de materiales han hallado que la forma tetraédrica puede inducir propiedades específicas si se logra un empaquetado apropiado.

El reto principal con tetraedros radica en la gran variedad de ángulos que puede adoptar cada una de sus caras con respecto a las paredes del contenedor o a otros tetraedros. De acuerdo con estudios recientes, ligeras variaciones en la orientación de sus aristas pueden traducirse en cambios significativos de la densidad de empaquetado. Estas consideraciones geométricas resultan esenciales cuando la prioridad es maximizar la cantidad de tetraedros alojados o minimizar el desperdicio de volumen.

En la literatura, se han propuesto algoritmos que aprovechan la naturaleza simétrica del tetraedro para explorar un conjunto discreto de orientaciones “favoritas” y, a continuación, combinarlas en distintas configuraciones dentro de contenedores convexos de complejidad variable. Los enfoques más recientes incorporan métodos adaptativos que estudian continuamente la curvatura local y modifican en tiempo real las orientaciones candidatas, obteniendo mejoras notables en tiempos de cómputo y densidades resultantes.

Consideraciones geométricas

En el empaquetado de tetraedros, cada cara triangular puede adquirir una posición distinta dentro de un contenedor convexo. Por ello, resulta determinante analizar el ángulo entre la normal de la cara tetraédrica y la normal de la superficie interna del contenedor. Cuando dicho ángulo es reducido, se genera un ajuste más cerrado entre objeto y pared, lo cual tiende a maximizar la densidad local.

No obstante, en contenedores con variaciones significativas de curvatura, la orientación óptima de un tetraedro en una región puede diferir de la requerida en otra. Para abordar este problema, algunos algoritmos segmentan la superficie del

contenedor en zonas más pequeñas, definiendo reglas de orientación particulares para cada una. Este procedimiento de “zonificación geométrica” aprovecha el cálculo de ángulos para decidir rápidamente qué posiciones son más factibles.

Además, las mejoras en técnicas de triangulación y modelado de superficies convexas han permitido un refinamiento mayor en el cálculo de ángulos. En consecuencia, se reduce la incidencia de errores por aproximación y se consigue una representación más fidedigna del contenedor y su interacción con los tetraedros. Dichos avances tecnológicos han sido clave para alcanzar densidades de empaquetado superiores al 70% en ciertos experimentos controlados.

Utilización eficiente del volumen

Optimizar la utilización del volumen equivale a minimizar los espacios vacíos existentes entre tetraedros y entre éstos y la pared del contenedor. El ángulo de inclinación de cada tetraedro respecto al contenedor cobra una importancia fundamental, ya que un ligero cambio en la orientación puede permitir una mejor inserción de una arista o un vértice en un hueco aparentemente reducido.

Para resolver este problema, se han aplicado heurísticas como algoritmos genéticos, búsqueda tabú o técnicas de *temple simulado*, en las cuales la función objetivo considera tanto el volumen ocupado como los ángulos resultantes. Asimismo, se ha propuesto una hibridación con métodos de Monte Carlo en la que las transiciones se guían por criterios angulares y espaciales, incrementando la probabilidad de converger hacia configuraciones de alta densidad [9].

En entornos industriales, la capacidad de acomodar tetraedros con un alto grado de compactación puede traducirse en reducción de costos de almacenamiento o transporte, y en la posibilidad de manipular más fácilmente los objetos empacados. De igual manera, en la ciencia de materiales, la disposición eficiente de partículas tetraédricas puede generar propiedades estructurales novedosas, lo que abre la puerta

a futuros desarrollos científicos y tecnológicos.

Aplicaciones y desafíos

El empaquetado de tetraedros en contenedores convexos se aplica en campos tan diversos como la ingeniería aeroespacial, la fabricación aditiva y la robótica. Por ejemplo, en la síntesis de materiales compuestos, disponer refuerzos tetraédricos de manera optimizada puede mejorar parámetros de resistencia, tenacidad y ligereza. Estos avances se basan en la integración de modelos geométricos con métodos experimentales y simulaciones multi-físicas.

Sin embargo, aún persisten varios desafíos, entre los cuales destaca la elevada complejidad computacional. La naturaleza combinatoria del problema dificulta encontrar la configuración globalmente óptima cuando el número de tetraedros es grande o la forma del contenedor es muy intrincada. Para afrontarlo, se recurre a aproximaciones jerárquicas y a la subdivisión adaptativa del espacio, estrategias que se ven reforzadas por la información angular precomputada.

Por último, se vislumbra la necesidad de integrar consideraciones físicas más detalladas, como la fricción entre caras, la deformación de aristas o la presencia de fluidos en espacios reducidos. Estas condiciones añaden dimensiones adicionales al problema de empaquetado, lo que exige nuevos algoritmos capaces de combinar cálculos de ángulos con métodos de simulación y control en tiempo real [9].

Tetraedro: El objeto 3D por excelencia para empaquetado

Se define un tetraedro como un poliedro con cuatro caras triangulares, seis aristas rectas y cuatro vértices. La naturaleza convexa de un tetraedro implica que es una envoltura convexa de sus vértices; es decir, cualquier punto dentro del tetraedro puede expresarse como combinación convexa de sus vértices. Esta convexidad inherente confiere varias propiedades matemáticas y geométricas, incluyendo que no puede

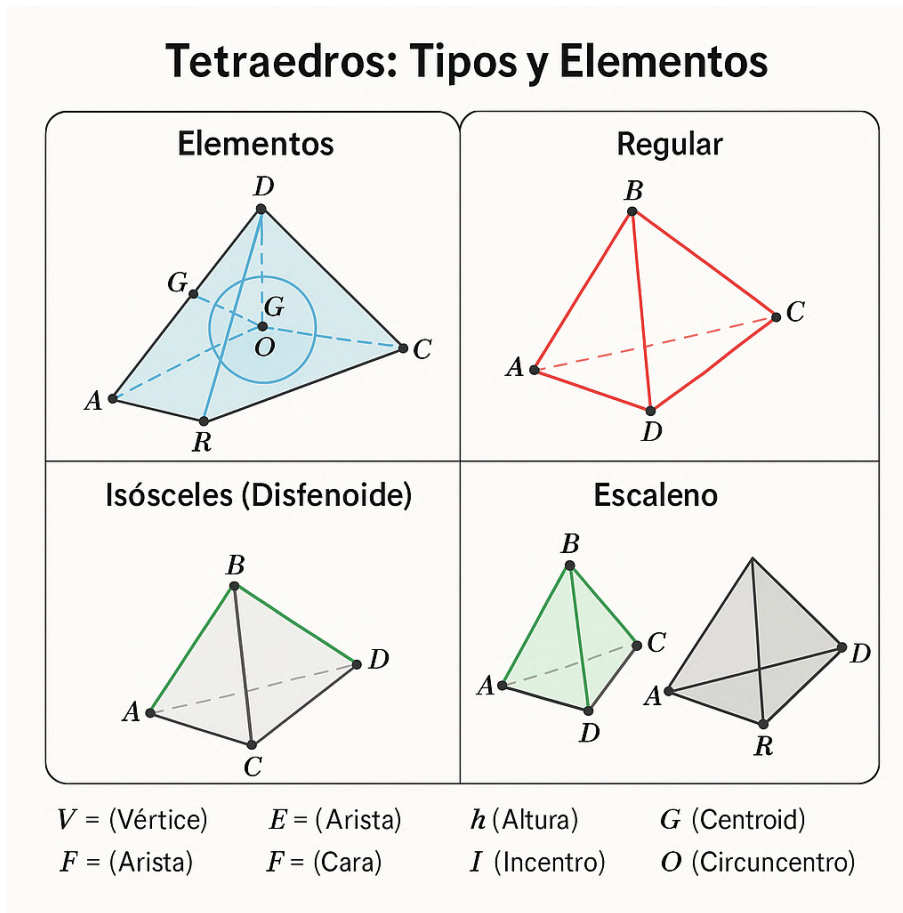


FIGURE 2.5: Elementos del tetraedro.

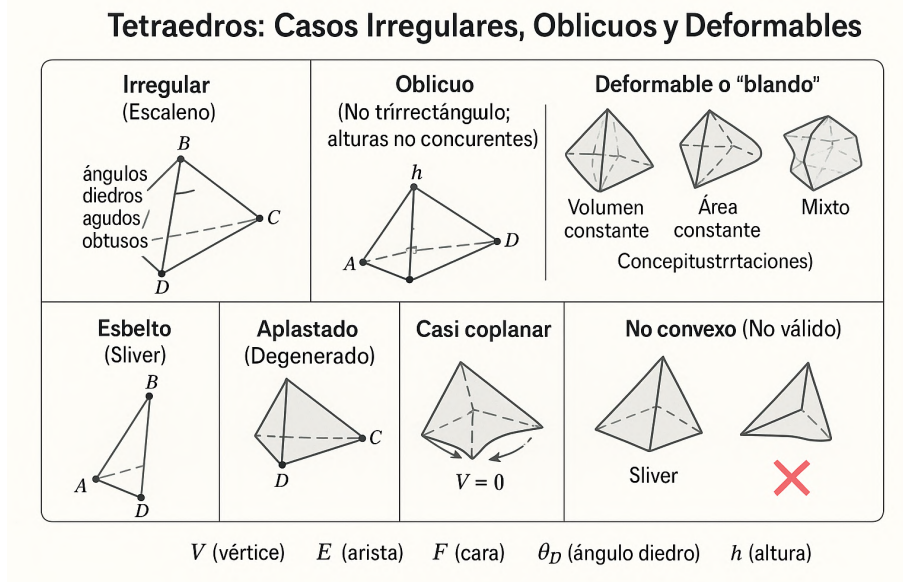


FIGURE 2.6: Tipos de tetraedros.

deformarse sin alterar la longitud de sus aristas unidas, y la unicidad de la fórmula de volumen dada por el determinante de los vectores que se extienden de un vértice a los otros tres.

Los tetraedros, con sus características convexas y definición de vértices, además de su simplicidad², ofrecen una opción atractiva para modelos de empaquetado 3D, equilibrando la eficiencia computacional con versatilidad geométrica. Sin embargo, los desafíos asociados con su llenado de espacio no óptimo cuando se usan solos y la complejidad de encontrar arreglos óptimos destacan la necesidad de investigación continua. Combinar tetraedros con otras formas, aprovechar algoritmos avanzados y mejorar los métodos computacionales son áreas clave para la exploración futura para aprovechar plenamente el potencial de los tetraedros en modelos de empaquetado 3D.

Ventajas del tetraedro como elemento de empaquetado

- **Llenado de espacio eficiente:** Los tetraedros pueden teselar el espacio 3D en combinación con otros poliedros (por ejemplo, octaedros), permitiendo modelos de empaquetado eficientes. Esta característica es particularmente ventajosa en ciencia de materiales para diseñar estructuras de celosía con altas relaciones de resistencia-peso [6].
- **Simplicidad y eficiencia computacional:** Debido a su forma simple, los algoritmos para empaquetado, detección de colisiones y cálculo de volumen son computacionalmente menos intensivos en comparación con poliedros más complejos. Esto hace que los tetraedros sean atractivos para simulaciones y aplicaciones de modelado donde los recursos computacionales son limitados.
- **Versatilidad geométrica:** Las características convexas de los tetraedros significan que pueden combinarse fácilmente con otros tetraedros o formas para

²Es el más simple de los sólidos de Platón.

llenar el espacio de diversas maneras, acomodando requisitos de empaquetado complejos en aplicaciones de ingeniería y diseño.

Desventajas del tetraedro como elemento de empaquetado

- **Llenado de espacio no óptimo cuando se usa solo:** Por sí mismos, los tetraedros no teselan el espacio sin dejar huecos. Esto puede llevar a ineficiencias en los modelos de empaquetado donde el objetivo es minimizar el espacio vacío.
- **Complejidad en la disposición:** Encontrar la disposición óptima de tetraedros y otras formas para lograr un empaquetado ajustado puede ser un problema complejo, requiriendo algoritmos sofisticados y recursos computacionales. Esta complejidad aumenta significativamente con la escala del problema.
- **Contacto limitado cara a cara:** Al empaquetar objetos con superficies planas, la forma tetraédrica ofrece puntos de contacto limitados cara a cara, lo cual puede no ser ideal para ciertas aplicaciones que requieren maximizar el área de contacto para estabilidad o distribución de fuerza.

La representación de orientaciones (Euler/quaterniones) afecta la estabilidad numérica y la facilidad para imponer límites en ángulos críticos entre caras. Un manejo robusto de ángulos mejora la detección temprana de colisiones y reduce casos límite en la optimización.

2.9 ENFOQUES PARA EL EMPAQUETADO DE TETRAEDROS EN CONTENEDORES REGULARES

La literatura científica recientemente publicada pone de manifiesto una variedad de enfoques para el empaquetado de tetraedros en contenedores regulares, cada uno

con sus fortalezas y aplicaciones específicas. Los métodos metaheurísticos, el RL, los métodos exactos, los métodos cuasi-físicos, el DEM, las redes neuronales y la computación cuántica ofrecen soluciones prometedoras. Además, los enfoques híbridos, que combinan técnicas de diferentes paradigmas, suelen aportar mejoras adicionales en términos de eficiencia y calidad de las soluciones. A medida que estas metodologías continúen avanzando, se espera que impacten de manera positiva en la resolución de desafíos de empaquetado en diversos sectores industriales.

1. **Enfoques Metaheurísticos:** Los métodos metaheurísticos, tales como los Algoritmos Genéticos (GAs), el Recocido Simulado (SA) y la Optimización por Enjambre de Partículas (PSO), se han empleado ampliamente para enfrentar el problema de empaquetado de tetraedros, el cual es de tipo NP-hard. Estas técnicas son flexibles y escalables, lo que las hace aptas para explorar grandes espacios de búsqueda. En años recientes, se han propuesto enfoques híbridos que combinan múltiples metaheurísticas con el fin de equilibrar la exploración y la explotación, obteniendo mejoras notables en la densidad de empaquetado. Consultar sección 2.9.1
2. **Enfoques de RL:** El aprendizaje reforzado (RL) ha emergido como una poderosa estrategia para optimizar el empaquetado de tetraedros. A través de interacciones con entornos simulados, los agentes de aprendizaje reforzado aprenden políticas de empaquetado eficaces. Los avances en aprendizaje reforzado profundo han demostrado su eficacia en la manipulación de grandes espacios de estados y acciones. Métodos adaptativos e híbridos, que integran aprendizaje reforzado con heurísticas de optimización tradicionales, han permitido una mayor robustez y mejores resultados. Consultar sección 2.9.2
3. **Métodos Exactos y Matemáticos:** Los métodos exactos, como la Programación Entera Mixta (MIP) y los algoritmos de rama y acota (branch-and-bound), buscan soluciones óptimas garantizadas. Aunque suelen ser más costosos computacionalmente, se han logrado avances que mejoran su eficiencia

y los hacen aplicables a instancias de tamaño moderado. Enfoques híbridos que combinan MIP con Programación por Restricciones también han mostrado resultados prometedores en el empaquetado de tetraedros. Consultar sección 2.9.3

4. **Métodos Cuasi-Físicos:** Los métodos Cuasi-Físicos tratan a los tetraedros como partículas sujetas a fuerzas y campos potenciales, emulando procesos naturales para obtener configuraciones de alta densidad. Ejemplos de estas técnicas incluyen modelos basados en fuerzas dirigidas y simulaciones de dinámica molecular. Algunos trabajos han combinado estas aproximaciones con métodos de optimización clásicos para escapar de mínimos locales y refinar la calidad de las soluciones. Consultar sección 2.9.4
5. **Enfoques basados en el Método de Elementos Distintos (DEM):** El Método de Elementos Distintos (DEM) simula interacciones discretas entre partículas tetraédricas, lo cual ofrece información detallada sobre la dinámica del empaquetado. Los avances recientes han mejorado la precisión de los modelos basados en DEM, y han surgido enfoques híbridos que integran DEM con estrategias evolutivas y métodos de aprendizaje automático. Estas metodologías proporcionan representaciones más realistas del comportamiento granular de los tetraedros dentro de los contenedores. Consultar sección 2.9.5
6. **Enfoques con Redes Neuronales:** Las redes neuronales (NN) han sido empleadas para predecir configuraciones óptimas y densidades de empaquetado. Están especialmente indicadas para capturar complejidades geométricas y patrones no lineales en problemas tridimensionales. Los recientes avances en arquitecturas neuronales y la combinación con otras técnicas de optimización han permitido una mayor precisión y eficiencia en la búsqueda de configuraciones de alta densidad. Consultar sección 2.9.6
7. **Enfoques Usando la Computación Cuántica:** La computación cuántica ofrece un enfoque novedoso para resolver problemas de optimización combi-

natoria, incluido el empaquetado de tetraedros. Algoritmos cuánticos, como quantum annealing o Quantum Approximate Optimization Algorithm (QAOA), exploran el espacio de soluciones de manera más eficiente, especialmente en dominios de gran complejidad. Aunque los dispositivos cuánticos actuales aún presentan limitaciones (NISQ), los métodos híbridos cuántico-clásicos muestran resultados alentadores para futuros desarrollos. Consultar sección 2.9.7

8. **Enfoques basados en Grandes Modelos de Lenguaje (LLMs):** Los Grandes Modelos de Lenguaje (LLMs, por sus siglas en inglés) han surgido como una herramienta que puede complementar significativamente los métodos tradicionales de optimización. Aunque la aplicación directa de LLMs al empaquetado tridimensional de tetraedros está aún en desarrollo, experiencias en dominios afines han demostrado su potencial para generar heurísticas innovadoras y asistir en el diseño de algoritmos. Consultar sección 2.9.8

Enfoques metaheurísticos para el empaquetado de tetraedros en contenedores regulares

El empaquetado de tetraedros en contenedores regulares es intrínsecamente complejo: el número de configuraciones crece exponencialmente con el tamaño de la instancia. Frente a las limitaciones de los métodos exactos en gran escala, los enfoques metaheurísticos—y sus variantes híbridas (matheurísticas)—han demostrado ser especialmente eficaces al equilibrar exploración y explotación con costos computacionales moderados. En esta línea, los Algoritmos Genéticos (GA) destacan por su capacidad de recombinar secuencias de inserción y orientaciones, integrando operadores de cruce/mutación y reglas de colocación físicas o geométricas. En 3D, los GA se han potenciado con generadores aprendidos (*GAN*) para producir configuraciones de alta calidad, mejorando la diversidad y la tasa de convergencia [91]. En 2D irregular, los GA se combinan con Programación Lineal en esquemas matheurísticos (GA+LP) que refinan la solución constructiva con optimización continua, logrando incrementos medibles de utilización de material [43].

Más allá de GA, las búsquedas locales intensivas siguen siendo un pilar. Diseños recientes de *local search* con intensificación/perturbación controlada han probado su eficacia en empaquetado irregular (p. ej., *iteratively doubling local search*), aportando ciclos de mejora robustos que se pueden transferir a contextos 3D con discretizaciones adecuadas del espacio libre [92]. En 3D, los metaheurísticos específicos incorporan también restricciones industriales (apilabilidad, estabilidad y cargas máximas), así como variantes de dimensión abierta u órdenes múltiples, donde se han propuesto estrategias de vecindad especializadas y vecindarios “inferiores” que guían la búsqueda con eficacia [85].

El ecosistema reciente incluye además heurísticas de múltiples capas y selectores inteligentes para la elección de contenedores/reglas de colocación, útiles en flujos con restricciones de estabilidad y carga [88]. En representaciones 2D irregulares, enfoques híbridos con visión por computador—que enriquecen la representación geométrica y las funciones objetivo—han mostrado mejoras consistentes cuando se combinan con metaheurísticas clásicas [54]. En conjunto, estas contribuciones confirman que los enfoques metaheurísticos e híbridos constituyen la vía más pragmática para instancias grandes de empaquetado tetraédrico, especialmente cuando se incorporan reglas de factibilidad geométrica (no solapamiento, estabilidad) y módulos de verificación física.

Notas prácticas. (i) Para tetraedros, es recomendable codificar el estado con descriptores de “espacios libres” y orientar la búsqueda sobre secuencias/poses con operadores que respeten vecindades geométricas; (ii) los matheurísticos (p. ej., GA+LP o GA+MIP) reducen el sesgo constructivo y estabilizan la calidad; (iii) criterios multiobjetivo (densidad+estabilidad) pueden tratarse mediante escalarización o ε -constraint, manteniendo la eficiencia.

Enfoques de aprendizaje reforzado para el empaquetado de tetraedros en contenedores regulares

Los métodos de aprendizaje reforzado (RL) ofrecen una alternativa prometedora a los enfoques clásicos para el empaquetado de tetraedros. En estos marcos, un agente interactúa secuencialmente con un entorno de simulación y aprende políticas de colocación/orientación que maximizan recompensas ligadas a la densidad de empaquetado, el aprovechamiento volumétrico o la factibilidad geométrica [57].

En años recientes, la combinación de aprendizaje reforzado profundo con representaciones adecuadas del estado ha permitido escalar a instancias tridimensionales y escenarios dinámicos. Por ejemplo, [57] estudian 3D-BPP con agentes el aprendizaje reforzado profundo en entornos logísticos; a su vez, [83] integran redes neuronales de grafos (GNN) con aprendizaje reforzado para *strip packing*, explotando la estructura discreta del problema y mejorando la generalización sobre distribuciones fuera de entrenamiento.

Además, las *hyper-heuristics* basadas en aprendizaje refuerzan la selección y adaptación de heurísticas de bajo nivel: [94] muestran que el aprendizaje reforzado profundo puede aprender políticas que orquestan heurísticas clásicas y, más recientemente, [39] sistematizan esta línea, destacando configuraciones de estado/recompensa que favorecen la estabilidad y la convergencia. Para escenarios *online* y con variaciones abruptas, los enfoques basados en Transformers dentro de aprendizaje reforzado han mostrado mayor capacidad de generalización espacial/temporal, como en [15], donde un agente Transformer-el aprendizaje reforzado profundo afronta 3D-BPP *online* con buen rendimiento fuera de la distribución de entrenamiento.

Finalmente, revisiones específicas de *machine learning* para *multi-dimensional bin packing* [81] sintetizan tendencias útiles para problemas poliédricos, incluyendo el diseño de recompensas multiobjetivo (densidad+estabilidad), la integración con módulos de verificación geométrica y la hibridación con búsqueda combinatoria. En conjunto, estas contribuciones refuerzan el potencial del aprendizaje reforzado

para abordar empaquetado de tetraedros con restricciones geométricas complejas, maximizando la densidad efectiva sin sacrificar factibilidad.

Métodos exactos y matemáticos para el empaquetado de tetraedros en contenedores regulares

Los métodos exactos para el empaquetado de tetraedros aspiran a obtener soluciones con garantía de optimalidad. Sin embargo, debido a la naturaleza *NP-hard* del problema, su aplicabilidad en instancias de gran tamaño es limitada. Pese a ello, el período comprendido entre 2022 y 2025 ha visto avances notables en la formulación de modelos matemáticos y en el desarrollo de algoritmos de descomposición, lo cual ha permitido ampliar el rango de instancias abordables [24]. Complementariamente, nuevas variantes de modelado para *irregular/rectangular packing* han mejorado la manejabilidad computacional mediante discretizaciones más expresivas y cortes específicos [37, 58].

El uso de Programación Entera Mixta (MIP) en combinación con *Branch-and-Bound* y *Branch-and-Price* ha sido particularmente exitoso. Estas técnicas se han beneficiado de la integración de generación de columnas y de la descomposición de Dantzig–Wolfe para estrechar las relajaciones lineales y reducir el espacio de búsqueda [25]. Resultados recientes muestran además formulaciones *arc-flow* con algoritmos *branch-and-price-and-cut* que aumentan la eficiencia en bin packing [76], así como marcos de tres etapas con generación de columnas y planes de corte aplicables a problemas afines [87]. De igual modo, la aplicación de planos de corte y métodos *branch-and-cut* proporciona desigualdades válidas más fuertes, acelerando sustancialmente la convergencia [24, 38, 63].

Varios trabajos recientes destacan la necesidad de explotar la estructura geométrica y las simetrías del problema. Es frecuente combinar MIP con Programación por Restricciones para identificar configuraciones equivalentes y eliminar redundancias en la exploración; asimismo, discretizaciones basadas en vóxeles o en *slices* verticales

permiten incorporar de forma exacta restricciones de no solapamiento y capacidad [37, 38]. La vinculación de *Branch-and-Price* con algoritmos de corte específicos para la geometría de tetraedros y con preprocesamiento geométrico ha mostrado mejorar la eficiencia; en paralelo, se ha extendido la familia de formulaciones exactas para variantes tridimensionales que ayudan a entender límites y estrategias transferibles [52].

En contextos multiobjetivo, donde se consideran criterios como la estabilidad mecánica o la maximización de la densidad efectiva, algunos autores han ampliado el alcance de sus modelos exactos [9, 25]. Tales avances reflejan la sinergia entre formulaciones matemáticas de vanguardia y estrategias exactas cada vez más potentes, empujando la frontera de lo que es factible computacionalmente para instancias de tamaño moderado [24, 25].

Métodos cuasi-físicos para el empaquetamiento de tetraedros en contenedores regulares

Los métodos cuasi-físicos, inspirados en leyes de la Física y dinámicas de sistemas de partículas, ofrecen un marco alternativo para el empaquetado de tetraedros. La idea central es definir fuerzas y potenciales que guíen la evolución del sistema hacia mínimos de energía, asumiendo que configuraciones de baja energía se correlacionan con disposiciones densas y estables. En esa línea, se han propuesto esquemas que ajustan la forma efectiva de las partículas o sus interacciones para favorecer empaques más compactos [40].

El uso de dinámica molecular (o integradores newtonianos con amortiguamiento y rozamiento efectivos) permite simular colisiones y asentamiento hasta estados metaestables de alta densidad. Para acelerar esa relajación, es frecuente iniciar desde configuraciones ya “compactas” generadas mediante *parking* estocástico, que luego se refinan por gradientes o por disipación controlada hasta eliminar solapamientos y tensiones locales [86]. Asimismo, los enfoques de autoensamblaje con campos de

potencial (atracción/repulsión, direccionalidad, *patchiness*) han mostrado que poliedros tipo tetraedro pueden organizarse en superredes complejas, ofreciendo pistas sobre parámetros y métricas útiles para empaquetamiento computacional [96?].

Para capturar tendencias por esfericidad y concavidad—atributos relevantes al tratar poliedros—se han estudiado familias paramétricas (p.ej., sectores de super-elipse), reportando cómo cambian las fracciones de empaquetamiento y la morfología de depósitos bajo distintos potenciales y reglas de relajación [10]. En paralelo, marcos de análisis topológico de depósitos 3D proporcionan indicadores globales para comparar configuraciones cuasi-físicas más allá de la sola densidad (p.ej., conectividad, cavidades), útiles al evaluar soluciones multi-objetivo [3]. Para situar estos métodos en perspectiva, revisiones recientes sintetizan un siglo de modelos de empaque y sus vínculos con propuestas modernas basadas en energía y relajación dinámica [65].

Enfoques basados en el método de elementos distintos (DEM) para el empaquetado de tetraedros en contenedores regulares

El método de elementos distintos se ha consolidado como una estrategia robusta para el modelado explícito de partículas, analizando sus interacciones por contacto y fricción de manera individualizada. En el contexto del empaquetado de tetraedros, DEM permite simular cómo cada partícula tetraédrica colisiona, se desplaza y se asienta dentro de un contenedor, proporcionando una aproximación realista de la dinámica granular. Avances recientes en formulaciones de contacto y representación geométrica —por ejemplo, el *volume-interacting level-set DEM* (VLS-DEM) y su línea LS-DEM— han ampliado la capacidad para tratar partículas angulares y cóncavas con garantías numéricas [18, 75].

Además de la representación geométrica, la literatura ha documentado tendencias en fracciones de empaquetamiento y propiedades micro-macro al variar la asfericidad y concavidad de las partículas, ofreciendo guías para parametrizar mate-

riales con forma poliédrica [10]. Estas evidencias son valiosas para el caso tetraédrico, donde los contactos vértice-cara y arista-arista condicionan tanto la estabilidad como la densidad alcanzable.

Una práctica común es combinar DEM con un componente de *búsqueda* (p. ej., heurísticas o metaheurísticas) que proponga configuraciones candidatas, evaluándolas dinámicamente en el simulador. En ese espíritu, los generadores estocásticos de estructuras densas (p. ej., *parking* secuencial) sirven como estados iniciales físicamente plausibles para acelerar la convergencia de simulaciones DEM [86]. De forma complementaria, enfoques DEM específicos para ensambles de poliedros reales refinan la detección de contacto y la disipación energética, mejorando la fidelidad en regímenes de alta fricción/angulosidad [13].

Finalmente, desarrollos recientes en modelos de contacto/cohesión y en la calibración con datos experimentales han incrementado la validez de las simulaciones para agregados complejos, habilitando estudios multiobjetivo (densidad y estabilidad) y escalabilidad hacia miles de partículas [12]. En consecuencia, los enfoques basados en DEM proporcionan una ventana privilegiada para comprender y optimizar el empaquetado de tetraedros con fuerte respaldo en la Física de Partículas y en implementaciones numéricas modernas.

Enfoques con redes neuronales para el empaquetado de tetraedros en contenedores regulares

El uso de redes neuronales en la optimización de procesos industriales ha crecido de forma sostenida, y el empaquetado de tetraedros no es la excepción. En problemas de empaquetado tridimensional, las NN permiten capturar relaciones no triviales entre las variables geométricas y operativas, y han mostrado avances en políticas de colocación, evaluación rápida de factibilidad y predicción de densidad de empaquetado [37, 57].

Diversas arquitecturas se han adaptado a esta tarea. Por un lado, enfoques de *deep reinforcement learning* (el aprendizaje reforzado profundo) aprenden políticas secuenciales de colocación para 3D-BPP y variantes online; por otro, arquitecturas específicas (p. ej., grafos) explotan la estructura discreta del problema en tiras o contenedores [57, 83]. Además, marcos de *hyper-heuristics* basados en aprendizaje refuerzan la selección/adaptación de heurísticas de bajo nivel y evidencian beneficios en entornos estocásticos y con restricciones realistas [39, 94].

Para escenarios online y con alta variabilidad, modelos con **Transformers** han sido propuestos para identificar correlaciones espaciales entre ítems y sub-espacios candidatos, mejorando la generalización fuera del conjunto de entrenamiento [15]. De forma complementaria, representaciones por **voxeles** permiten discretizar geometrías complejas y acelerar la evaluación/ajuste de configuraciones, lo que es especialmente útil al tratar formas poliédricas como los tetraedros [37]. Finalmente, resultados recientes en el ensamblaje y empaquetamiento de poliedros sirven como referencia para definir métricas de calidad (densidad, ordenamiento, estabilidad) y objetivos plausibles en empaquetado tetraédrico asistido por NN [67].

Enfoques de computación cuántica para el empaquetado de tetraedros en contenedores regulares

La computación cuántica ofrece una perspectiva novedosa y potencialmente revolucionaria para problemas complejos de optimización combinatoria, como el empaquetado de tetraedros en contenedores regulares. Al aprovechar fenómenos como la superposición y el entrelazamiento, los algoritmos cuánticos pueden explorar regiones del espacio de búsqueda de forma más eficiente que sus contrapartes clásicas, particularmente en escenarios de alta dimensionalidad.

Distintos estudios han demostrado la viabilidad de aplicar técnicas cuánticas a problemas de empaquetado afines. En el artículo [53], el autor propone un heurístico cuántico (basado en QAOA y variantes) para el empaquetado irregular en tiras, des-

componiendo el problema en submódulos combinatorios. Asimismo, [26] reformula variantes de empaquetado de círculos/esferas como *maximum independent set* y las resuelve con el *Quantum Approximate Optimization Algorithm* (QAOA), un enfoque trasladable a configuraciones discretizadas de tetraedros. En un plano más cercano a logística 3D, [74] desarrolla un marco híbrido cuántico-clásico con *annealing* para instancias reales de *3D bin packing*, incorporando restricciones industriales.

Las estrategias híbridas cuántico-clásicas constituyen la ruta más pragmática en hardware NISQ. Mejoras recientes del propio QAOA (p. ej., con campos adaptativos) y resultados de escalado positivo refuerzan su rol como metaheurística cuántica para optimización combinatoria [69, 90]. No obstante, su potencial en el empaquetado de tetraedros dependerá en gran medida de la evolución del hardware y de técnicas de mitigación de errores; la literatura resalta limitaciones vigentes de los dispositivos NISQ y cotas fundamentales de la mitigación [23, 73]. Aun así, la trayectoria tecnológica y los primeros éxitos en problemas afines sugieren que, conforme los sistemas maduren, podrán superarse barreras clave en configuraciones tetraédricas con aplicaciones directas en logística, manufactura y diseño de materiales.

Enfoques basados en grandes modelos de lenguaje para el empaquetado de tetraedros

Los recientes avances en el área de los grandes modelos de lenguaje (LLMs) han abierto nuevas oportunidades para abordar problemas complejos de optimización combinatoria, entre ellos los desafíos de empaquetado como el empaquetado de tetraedros. Aunque las aplicaciones directas de LLMs en el empaquetado tridimensional de tetraedros aún son incipientes, investigaciones en áreas afines señalan un potencial significativo de estas técnicas para asistir en la generación de heurísticas y el diseño de algoritmos [8, 70, 93].

Un ejemplo notable es el trabajo de [89], donde se introduce el concepto de hiper-heurísticas basadas en lenguaje (LHHs). A través de su marco *Reflective Evo-*

lution (ReEvo), combinan búsqueda evolutiva con ideas generadas por LLMs para explorar con eficiencia espacios de heurísticas y alcanzar resultados competitivos en múltiples tareas de optimización. De manera complementaria, se han presentado marcos que emplean LLMs para formular problemas de optimización a partir de descripciones en lenguaje natural y para diseñar o evaluar heurísticas en problemas de empaquetado (bin packing) y combinatoria estructural, integrando conocimiento específico de dominio [8, 70, 93].

A pesar de este potencial, conviene subrayar que los LLMs no están diseñados para resolver directamente problemas de optimización combinatoria de alta complejidad. Su eficacia radica en la integración dentro de marcos específicos al problema y en la combinación con técnicas clásicas de optimización, actuando como generadores de heurísticas, meta-parámetros o estrategias de búsqueda [29, 84].

Así, los avances actuales evidencian que los LLMs tendrán un impacto significativo e importante en el desarrollo de algoritmos innovadores para el empaquetado de poliedros en contenedores convexos y no convexos, aportando nuevas estrategias y fortaleciendo las metodologías ya existentes.

Como anclaje de dominio, la literatura reciente sobre ensamblajes y empaquetamientos de poliedros/tetraedros proporciona objetivos y métricas plausibles (densidad, ordenamiento, topología del depósito, etc.) para evaluar heurísticas propuestas por LLMs en escenarios tridimensionales [67, 95].

2.10 ARTÍCULOS Y REVISIÓN DE LA LITERATURA

La evidencia publicada muestra avances dispersos y criterios de evaluación heterogéneos; una tabla comparativa normalizada aporta claridad. Señalar explícitamente las brechas (p. ej., reproducibilidad, time-limits comparables, tamaños de instancia) justifica tu contribución, ver anexo II de la página 167.

2.11 DIRECCIONES FUTURAS DE INVESTIGACIÓN

Aplicación de modelos de empaquetado en la gestión de proyectos

El empaquetado tridimensional ha sido un referente en logística y manufactura; no obstante, su lógica de asignación eficiente de recursos y manejo de restricciones es trasladable a dominios como la gestión de proyectos. Bajo esta mirada, las iniciativas pasan a verse como “ítems” con requerimientos de tiempo, presupuesto y competencias, mientras que el portafolio y la capacidad organizacional actúan como el “contenedor”. Este paralelismo habilita una formulación rigurosa de problemas de asignación bajo limitaciones múltiples y objetivos potencialmente contrapuestos.

En esta línea, Fasano [17] documenta el uso de optimización global y esquemas heurísticos para contextos donde no se habían empleado tradicionalmente técnicas de empaquetado. Dichas estrategias son compatibles con la selección de carteras, pues permiten parametrizar criterios y restricciones y explorar sistemáticamente el espacio de soluciones en busca de configuraciones de alto desempeño. La adaptabilidad del enfoque facilita incorporar ventanas temporales, costos e interdependencias.

De manera complementaria, Litvinchev et al. [43] formulan un modelo MILP bi-objetivo para la selección estática de proyectos de I+D con sinergias, aportando cuantificación explícita de beneficios conjuntos y trade-offs. Este tipo de modelación resulta especialmente atractivo si se introduce la analogía de empaquetado: restricciones y compatibilidades se integran de forma nativa, y las prioridades estratégicas se pueden reflejar en la función objetivo. A nivel institucional, Fernández et al. [19] proponen una metodología matemático-computacional que consolida criterios y límites operativos para organismos públicos, mostrando que la integración de enfoques de asignación y empaquetado soporta decisiones más transparentes y trazables.

Una agenda promisorio consiste en construir marcos híbridos que conecten modelos de empaquetado con prácticas consolidadas de gestión de portafolios (go-

bernanza, priorización multicriterio y replanificación periódica). La expectativa es obtener herramientas que asistan en la programación, reasignación y seguimiento con sensibilidad a recursos, riesgos y dependencias, elevando la calidad de las decisiones en contextos dinámicos.

Métodos de descomposición lagrangiana para problemas de gran escala

Los problemas de empaquetado 3D con restricciones realistas tienden a crecer rápidamente en variables y acoplamientos, lo que vuelve crítica la escalabilidad de los métodos de solución. La descomposición Lagrangiana ofrece un camino para tratar subestructuras acopladas: relaja vínculos globales, resuelve subproblemas más pequeños y reintroduce coherencia mediante multiplicadores, logrando mejores cotas y tiempos de cómputo competitivos.

Ejemplos relevantes muestran su efectividad en dominios afines: Litvinchev y Ozuna [44] aplican descomposición en localización de instalaciones con capacidad en dos etapas, obteniendo cotas ajustadas que aceleran la búsqueda del óptimo; su mecánica es transferible a empaquetado si se separan decisiones por familias de ítems, contenedores o periodos. Asimismo, Litvinchev et al. [45] estudian asignación muchos-a-muchos con cotas Lagrangianas, evidenciando que el particionamiento inteligente del problema reduce la complejidad sin sacrificar calidad. Sobre este fundamento, Litvinchev [41] discute refinamientos de cotas que acercan los límites a la solución global, una pieza clave cuando el problema de empaquetado involucra restricciones no lineales o múltiples objetivos.

La proyección natural para empaquetado 3D consiste en diseñar esquemas de descomposición que respeten la física y la estructura geométrica del problema (p. ej., por contenedor, por clúster de piezas o por capas), combinados con políticas de actualización de multiplicadores robustas. Integrar estas ideas con búsquedas locales o metaheurísticas puede rendir algoritmos híbridos capaces de escalar a instancias industriales manteniendo garantías de optimalidad o cuasi-optimalidad útiles.

Empaquetado de objetos flexibles en la logística verde

En escenarios de economía circular, el movimiento y consolidación de materiales reciclables rara vez se ajusta al supuesto de rigidez. Los objetos flexibles o deformables presentan variaciones de forma y volumen que impactan el aprovechamiento del espacio y los costos de transporte. En consecuencia, el modelado de empaquetado debe capturar compresibilidad, elasticidad y posibles efectos estocásticos asociados a la manipulación y compactación.

Dentro de la literatura de cadenas de suministro cerradas, Litvinchev et al. [46] tratan formulaciones multi-período y estocásticas con incentivos, mostrando que los beneficios logísticos y económicos mejoran cuando la dinámica temporal y la incertidumbre se integran explícitamente. Esta evidencia respalda una extensión hacia el empaquetado de objetos flexibles: al incorporar parámetros materiales y escenarios, los modelos pueden aproximar de forma más realista la ocupación efectiva del espacio, optimizando rutas, consolidación y niveles de servicio [46].

Una línea concreta es combinar modelos físico-informados (que estimen el cambio de forma bajo presión) con optimización bajo incertidumbre e, idealmente, con mecanismos de aprendizaje que ajusten parámetros en tiempo real a partir de datos operativos [46]. El resultado esperado es una logística más eficiente y sostenible: menor número de viajes, mejor utilización volumétrica y reducción de emisiones, manteniendo la trazabilidad de las decisiones y facilitando auditorías de desempeño ambiental.

Permanecen abiertas la robustificación cerca de $\text{softness} \rightarrow 1$, certificaciones de optimalidad/límites superiores más ajustados y escalamiento a instancias grandes. También son prometedoras las inicializaciones guiadas por aprendizaje, descomposición por bloques y la aceleración GPU para validaciones geométricas.

CAPÍTULO 3

METODOLOGÍA

“The researcher suffers the disappointments, the long months spent in the wrong direction, the failures. But failures are also useful, because, well analyzed, they can lead to success. And for the researcher, there is no joy comparable to that of discovery, however small...”

SIR ALEXANDER FLEMING.

3.1 INTRODUCCIÓN

El método científico ofrece un conjunto de técnicas y procedimientos para obtener una comprensión teórica precisa, una verificación experimental y validación mediante el uso de instrumentos fiables, eliminando cualquier tipo de subjetividad. Este enfoque puede proporcionar respuestas útiles y comprobadas a muchos casos de estudio. La comunidad científica considera el método científico como uno de los procedimientos más útiles, ya que permite la explicación objetiva de los fenómenos, aporta soluciones a los problemas de investigación y fomenta la declaración de leyes. Su construcción es rigurosa y lógica, de manera ordenada, con principios claros, puros y completos, buscando la corrección y el enriquecimiento para superar, ordenar y comprender los conocimientos acumulados [79].

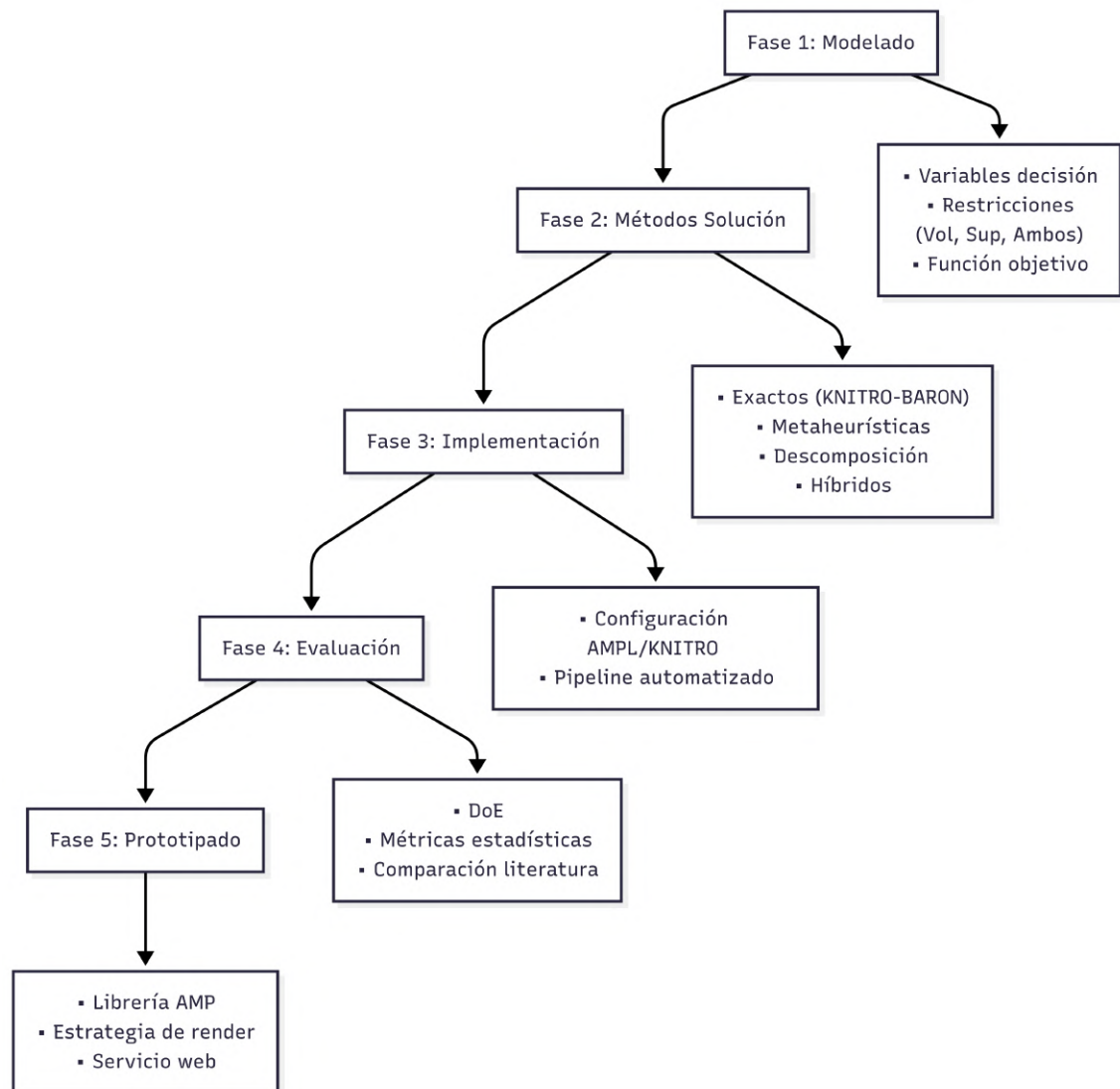


FIGURE 3.1: Metodología de cinco (5) pasos para validar los resultados.

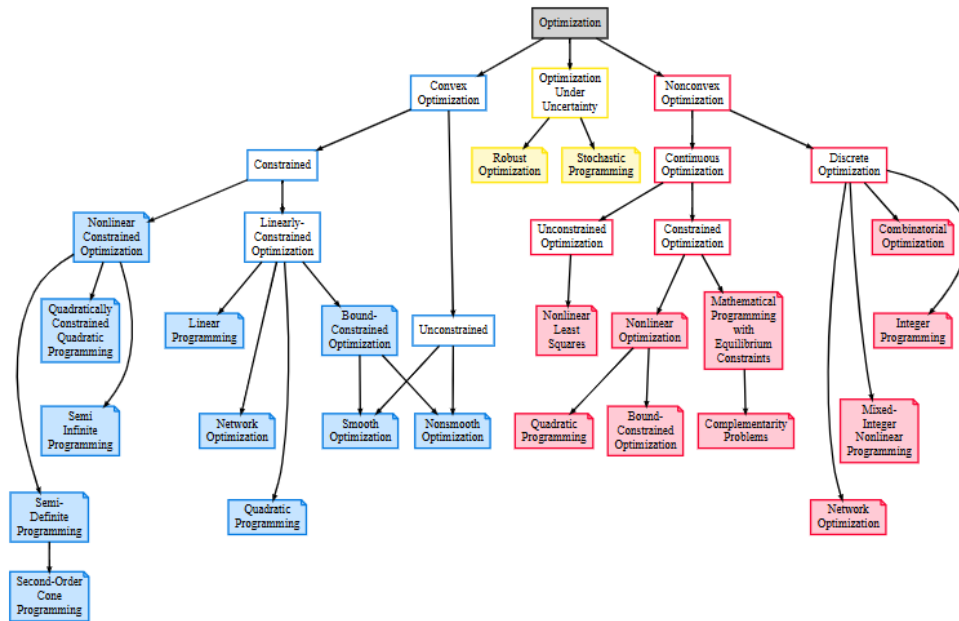


FIGURE 3.2: Diagrama de la clasificacion de problemas de optimizacion. Fuente [59]

La investigación científica se clasifica de acuerdo con el propósito, alcance, diseño, fuente y enfoque de las actividades involucradas; así, el tipo de investigación influye en el flujo de trabajo del método científico.

Este capítulo detalla la metodología para resolver el problema de empaquetamiento volumétricamente conservativo. Siguiendo el flujo de la Figura 3.1, se presenta un marco integrado que combina modelado matemático riguroso, implementación computacional eficiente y validación experimental exhaustiva, culminando en estrategias de transferencia tecnológica.

Hipótesis centrales:

1. La estrategia de descomposición reduce el tiempo de cómputo en $\geq 40\%$ frente a enfoques monolíticos
2. La conservación simultánea volumen-superficie aumenta la densidad de empaquetamiento en $\geq 15\%$

3. El punto inicial KNITRO-BARON certifica optimalidad global en $\geq 85\%$ de casos

La metodología se centra en formular y resolver un problema de empaquetamiento 3D con deformación controlada, priorizando trazabilidad y reproducibilidad. Se justifican las elecciones de modelado y de solver como respuesta a la no convexidad y a la escala de las instancias.

3.2 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

Se aborda un escenario tridimensional de empaquetamiento en contenedores que involucra un conjunto de objetos 3D —definidos por sus vértices— que deben colocarse en un único contenedor minimizando el volumen no utilizado, ver Figura 3.3 pag. 58. Singularmente, cada objeto es deformable pero debe conservar su volumen original y/o potencialmente su área superficial¹⁾ durante el empaquetamiento. El objetivo consiste en acomodar todos los elementos de la manera más compacta po-

¹Se emplean varios tipos de restricciones de conservación durante la experimentación: conservación de volumen, conservación del área de la superficie, y la combinación de ambas.

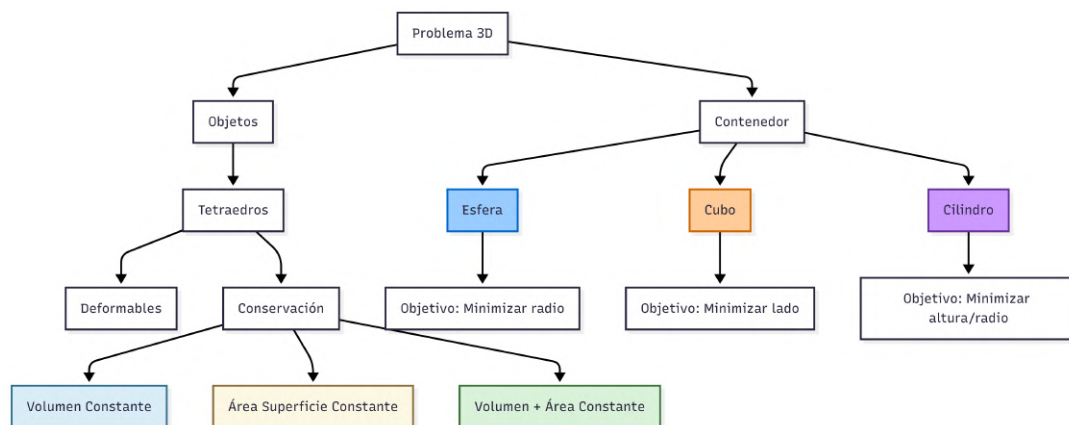


FIGURE 3.3: Diagrama de la definición del problema.

sible, minimizando el volumen del contenedor circunscrito², ver figura 3.4 pag. 63, que contenga todos los elementos (tetraedros).

Esta estrategia garantiza la máxima utilización de volumen, análoga a la minimización del espacio desperdiciado. Cada objeto (indexado por i) es una figura tetraédrica definida por un conjunto de puntos en el espacio 3D. Se impone la conservación de volumen mediante una restricción que iguala el volumen calculado del tetraedro a su valor original. Esto asegura que ningún objeto sufre compresión, requisito fundamental para empaquetamientos que preservan volumen (a diferencia de métodos que permiten reducción volumétrica para ahorrar espacio [48]).

El objetivo es maximizar la calidad del empaquetamiento (p. ej., densidad/-función objetivo) imponiendo no intersección y conservación geométrica. La formulación equilibra fidelidad física y costo computacional para mantener soluciones numéricamente estables.

3.3 CLASIFICACIÓN DEL PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN

Optimización no convexa

En la taxonomía de problemas de optimización presentada en el *NEOS Guide* [59], la primera gran bifurcación distingue entre problemas convexos y no convexos. El modelo de empaquetamiento de tetraedros en una esfera cae en la categoría de optimización no convexa, pues el espacio factible se compone de múltiples “islas” separadas por regiones inviables cuando se prohíben los solapamientos. Esta estructura discontinua impide la aplicación directa de métodos de gradiente que garanticen óptimos globales y fuerza al investigador a emplear solvers de alcance global, tales como BARON, Couenne o SCIP, que combinan estrategias de *branch-and-bound* y

²En el diagrama asociado se ilustran como objetivos diferentes, pero todos conducen al resultado de minimización del volumen del contenedor.

relajaciones convexas para explorar exhaustivamente las distintas regiones factibles.

Optimización continua

Dado que las posiciones y orientaciones de los tetraedros se describen mediante variables reales, el modelo se encuadra en la rama de optimización continua [59]. Las variables pueden tomar cualquier valor en un subconjunto de \mathbb{R}^n , lo cual permite una representación geométrica extremadamente precisa de las piezas. Sin embargo, este alto grado de libertad aumenta la dimensión del espacio de búsqueda y demanda solvers capaces de manejar eficientemente cientos o miles de variables continuas, explotando derivadas de primer y segundo orden para guiar la búsqueda local dentro de cada componente del espacio factible.

Optimización con restricciones

El modelo impone dos tipos de restricciones no lineales:

- **Contención esférica:** cada vértice de los tetraedros debe permanecer dentro de la superficie esférica que define el contenedor.
- **No solapamiento:** la distancia mínima entre cada par de tetraedros debe exceder un umbral que evita colisiones.

En la clasificación de NEOS Guide, se trata por tanto de optimización continua *con restricciones* [59], ver diagrama jerárquico de la tipología de los problemas de optimización 3.2 pag. 57. El solver debe gestionar sistemas de desigualdades no lineales simultáneamente, empleando técnicas de poda para descartar configuraciones imposibles y concentrar el esfuerzo de cómputo en las regiones de interés.

Programación no lineal

Tanto el objetivo (por ejemplo, maximizar la densidad de empaquetamiento) como las restricciones se expresan mediante funciones no lineales (normas, expresiones cuadráticas, productos escalares). Esto sitúa al modelo en la categoría de programación no lineal (NLP). Debido a la no convexidad, es imprescindible utilizar solvers globales de NLP que combinen:

- *Branch-and-bound espacial*, para particionar iterativamente el dominio continuo y computar cotas inferiores/ superiores mediante relajaciones convexas [47].
- *Cortes dinámicos y underestimaciones convexas*, para acotar de manera ajustada las regiones no exploradas [64].

Entre los avances recientes destacan los algoritmos implementados en SCIP 8, que mejoran la exploración de grandes modelos no convexos mediante heurísticas híbridas y control adaptativo de nodos [80].

El problema se ubica en el ámbito no convexo (NLP/MINLP), con restricciones no lineales y potenciales discontinuidades. Esta clasificación motiva estrategias híbridas y criterios de paro realistas con límites de tiempo.

3.4 DEFINICIÓN MATEMÁTICA DEL PROBLEMA

Formulación como problema de optimización

Sea $C \subset \mathbb{R}^3$ un contenedor convexo y $\mathcal{O} = \{O_1, \dots, O_n\}$ un conjunto de objetos 3D. Buscamos:

$$\min_{\mathbf{T}_i \in SE(3)} \left[\text{vol} \left(C \setminus \bigcup_{i=1}^n T_i(O_i) \right) \right] \quad (3.1)$$

sujeto a:

$$T_i(O_i) \subseteq C \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (3.2)$$

$$\text{int}(T_i(O_i)) \cap \text{int}(T_j(O_j)) = \emptyset \quad \forall i \neq j \quad (3.3)$$

donde $SE(3)$ representa el conjunto de transformaciones aplicadas ($T_i(O_i)$) a los tetraedros (traslaciones + rotaciones, deformaciones³).

Objetos tridimensionales: caso de estudio el tetraedro.

Cada objeto tridimensional O_i está representado por un conjunto finito de vértices $V_i = \{v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in}\}$. Los vértices están definidos en un espacio tridimensional \mathbb{R}^3 .

Se formalizan variables, restricciones y función objetivo con notación consistente, asegurando buena “posedness” (acotamiento, factibilidad y escalado). Esta base permite comparar variantes (conservación de volumen, superficie o mixta) bajo un mismo marco.

3.5 CONTENEDORES CONVEXOS: ANÁLISIS Y MODELADO

Contenedores convexos

El contenedor C es una región convexa en \mathbb{R}^3 . Se representa mediante un conjunto de desigualdades lineales que describen su superficie y volumen interior.

³No se incluyen escalado de los tetraedros para mantener su volumen original, así como su área de superficie.

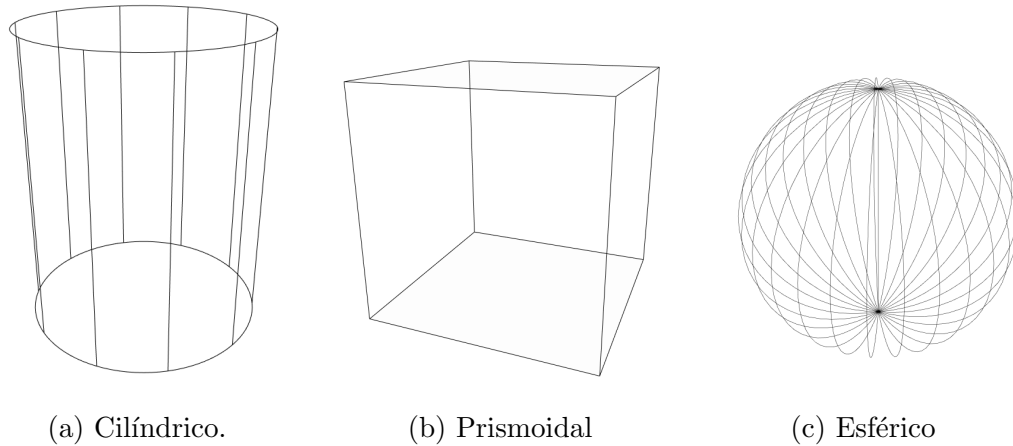


FIGURE 3.4: Los contenedores convexos empleados el estudio del empaquetamiento denso de tetraedros

Esfera

Una esfera en \mathbb{R}^3 con centro en (x_0, y_0, z_0) y radio r se puede describir mediante la siguiente ecuación canónica:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

Cilindro

Un cilindro en \mathbb{R}^3 con radio r , altura h y eje alineado con el eje z , centrado en (x_0, y_0) , se puede describir mediante las siguientes ecuaciones canónicas:

$$\begin{cases} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \\ z_0 - \frac{h}{2} \leq z \leq z_0 + \frac{h}{2} \end{cases}$$

Esto indica que la sección transversal del cilindro en cualquier plano horizontal es un círculo de radio r , y que el cilindro se extiende desde $z = z_0 - h/2$ hasta

$$z = z_0 + h/2.$$

Cubo

Un cubo centrado en el origen con longitud de lado $2a$ se puede describir mediante las siguientes ecuaciones canónicas:

$$\begin{cases} |x| \leq a \\ |y| \leq a \\ |z| \leq a \end{cases}$$

Esto significa que x , y y z están comprendidos entre $-a$ y a .

La geometría del contenedor (esfera, cilindro, cubo) condiciona las restricciones de frontera y la detección de colisiones. La parametrización específica por contenedor mejora la estabilidad y reduce ambigüedades en la factibilidad.

3.6 VARIABLES DE DECISIÓN

Las principales variables de decisión son las coordenadas 3D de los puntos definitivos de cada objeto (vértices) tras su colocación, $\mathbf{coords}_{i,j,n}$ (para objeto i , punto j , dimensión n). Estas variables continuas determinan la posición y orientación de cada objeto en el contenedor. Se introducen variables auxiliares para gestionar restricciones de no superposición entre pares de objetos. Específicamente, para cada par de objetos distintos i y j , se define un hiperplano separador con vector normal \mathbf{v}_{ij} y desplazamientos escalares α_{ij} y β_{ij} . Intuitivamente, \mathbf{v}_{ij} y los desplazamientos delimitan un plano donde el objeto i yace completamente en un lado y j en el opuesto. Se garantiza $\|\mathbf{v}_{ij}\| = 1$ para estabilidad numérica. Esta formulación se inspira en enfoques clásicos de geometría computacional para colocación no superpuesta,

extendiendo el concepto de polígonos de no ajuste a 3D mediante hiperplanos.

Se definen posiciones, orientaciones y parámetros de deformación con cotas y escalado adecuados para evitar degeneración. La selección de estas variables facilita la transferencia de soluciones iniciales entre solvers.

3.7 CONDICIONES DE NO SOLAPAMIENTO (FORMULACIÓN COMPACTA)

NOTACIÓN. Considérese un conjunto de tetraedros indexados por $p \in \mathcal{P}$. Cada tetraedro p se define por los vértices de un prototipo $\{\bar{v}_i\}_{i=1}^4 \subset \mathbb{R}^3$ (en su sistema local) y su pose (R_p, t_p) , donde $R_p \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es una rotación y $t_p \in \mathbb{R}^3$ una traslación. Los vértices en coordenadas globales son

$$v_{p,i} = R_p \bar{v}_i + t_p \quad (i = 1, \dots, 4).$$

Para no solapamiento entre dos tetraedros $p \neq q$, denotamos por $\mathcal{V}_p = \{v_{p,1}, \dots, v_{p,4}\}$ y $\mathcal{V}_q = \{v_{q,1}, \dots, v_{q,4}\}$.

TEOREMA DE PLANOS SEPARADORES. Dos conjuntos convexos disjuntos en \mathbb{R}^3 admiten un plano separador. En práctica, se trabaja con un conjunto finito de ejes/normalidades candidatos \mathcal{N} (Separating Axis Theorem, SAT): normales de caras de ambos tetraedros y productos vectoriales de pares de aristas. Sea

$$\mathcal{N} = \left(\mathcal{N}_p^{\text{face}} \cup \mathcal{N}_q^{\text{face}} \cup \mathcal{N}_{pq}^{\text{edge} \times \text{edge}} \right) \cup (-\cdot),$$

donde $\mathcal{N}_p^{\text{face}}$ contiene las normales unitarias de las 4 caras de p (y análogamente para q), y $\mathcal{N}_{pq}^{\text{edge} \times \text{edge}}$ incluye $u \times w$ para cada par de direcciones de aristas u de p y w de q (cuando $u \times w \neq 0$), normalizadas.

FORMA DISYUNTIVA (LINEAL CON BIG- M). Para cada par (p, q) introducimos binarios $z_{pqk} \in \{0, 1\}$ asociados a $n_k \in \mathcal{N}$. Exigimos que al menos una *separación*

esté activa:

$$\sum_{k \in \mathcal{K}_{pq}} z_{pqk} \geq 1, \quad \forall p < q, \quad (3.4)$$

donde \mathcal{K}_{pq} indexa \mathcal{N} para el par (p, q) . Para cada k activo, existen cotas $\alpha_{pqk} \in \mathbb{R}$ que separan proyecciones sobre n_k . Definimos una holgura estricta $\gamma > 0$:

$$n_k^\top v_{p,i} \leq \alpha_{pqk} - \frac{\gamma}{2} + M(1 - z_{pqk}) \quad \forall i = 1, \dots, 4, \quad (3.5)$$

$$n_k^\top v_{q,j} \geq \alpha_{pqk} + \frac{\gamma}{2} - M(1 - z_{pqk}) \quad \forall j = 1, \dots, 4, \quad (3.6)$$

o simétricamente invirtiendo los sentidos (ya contemplado al incluir $-n_k$ en \mathcal{N}). Aquí M es una constante suficientemente grande que desactiva el par de desigualdades cuando $z_{pqk} = 0$. Con $\gamma > 0$ se evita el *contacto exacto* (empate numérico).

EXPANSIÓN DE VÉRTICES. Las desigualdades (3.5)–(3.6) se escriben explícitamente en función de (R_p, t_p) :

$$n_k^\top (R_p \bar{v}_i + t_p) \leq \alpha_{pqk} - \frac{\gamma}{2} + M(1 - z_{pqk}), \quad n_k^\top (R_q \bar{v}_j + t_q) \geq \alpha_{pqk} + \frac{\gamma}{2} - M(1 - z_{pqk}).$$

Si R_p es decisión continua, se imponen restricciones de ortogonalidad clásicas (p. ej., $R_p^\top R_p = I$, $\det R_p = 1$) o una parametrización (ángulos de Euler, cuaterniones con normalización).

ALTERNATIVA CONTINUA (SIN BINARIOS). Como relajación suave, puede penalizarse el solapamiento mediante *márgenes de separación* sobre todos los ejes candidatos:

$$\Delta_{pqk} := \min_j n_k^\top v_{q,j} - \max_i n_k^\top v_{p,i}, \quad \Delta_{pq} := \max_{k \in \mathcal{K}_{pq}} (-\Delta_{pqk})_+,$$

e incorporar $\sum_{p < q} \Delta_{pq}$ en la función objetivo con un peso grande. Esta versión es útil para cálculos iniciales o calentamiento de soluciones, aunque no garantiza disyunción exacta sin binarios.

OBSERVACIONES PRÁCTICAS. (i) Normalizar n_k reduce el M requerido. (ii) Elegir \mathcal{N} mínimo (normales de caras y ejes de arista \times arista no degenerados) favorece la escalabilidad. (iii) Para *tetraedros deformables*, las mismas condiciones aplican sustituyendo $\{\bar{v}_i\}$ por la geometría deformada vigente en cada iteración (o por vértices decisión si la forma es variable).

RESUMEN. El no solapamiento entre dos tetraedros se implementa imponiendo, para al menos un eje candidato, una separación estricta de proyecciones de todos sus vértices. La formulación (3.4)–(3.6) produce un esquema MINLP/MILP estándar, compatible con estrategias de *warm-start* y con relajaciones continuas para generación de incumbentes.

3.8 RESTRICCIONES

El modelo incorpora múltiples conjuntos de restricciones:

- **Límites del contenedor:** todos los puntos de los objetos deben ubicarse dentro del contenedor (esfera de radio R). Si el centro de la esfera está fijo (ej. en coordenadas $(20,20,20)^4$), esto implica $\|\mathbf{coords}_{i,j} - \mathbf{center}\|_2^2 \leq R^2$ para todos los objetos i y sus puntos j . El radio R es una variable a minimizar, representando el tamaño del contenedor.
- **Integridad del objeto y deformación controlada:** la forma de cada objeto se preserva mediante restricciones de distancia entre vértices. Se precálculan las longitudes originales de las aristas de cada tetraedro y se exige que en el estado empaquetado, la distancia al cuadrado entre vértices conectados l, m del objeto i se mantenga entre $(1 - \sigma)^2 d_{ilm}^2$ y $(1 + \sigma)^2 d_{ilm}^2$, donde d_{ilm} es la

⁴Compensación de las restricciones de los parámetros del modelo que impiden tomar valores negativos a ciertas variables por simplicidad y eficiencia en el modelado.

distancia original y $0 \leq \sigma < 1$ es un parámetro de *flexibilidad*. En los experimentos se establece $\sigma = 0.5$ (permitiendo hasta 50% de extensión/compresión), equilibrando flexibilidad y fidelidad geométrica. Estos límites bilaterales permiten deformación *elástica* pero penalizan distorsiones excesivas, modelando objetos cuasi-rígidos con volumen estrictamente conservado.

- **Conservación de volumen:** para cada objeto i , su volumen se calcula mediante la fórmula determinantal para tetraedros. Una restricción de igualdad no lineal $\text{Vol}_i(\mathbf{coords}_i, *) = V_i^{\text{orig}}$ asegura que el volumen calculado coincida con el parámetro volumétrico original. Esta restricción refleja la incompresibilidad física de los objetos, manejando valores absolutos mediante casos particulares o cuadratura.
- **Restricciones de no superposición:** para evitar intersecciones, se implementa el método del hiperplano separador: para cada par $i < j$, el modelo introduce restricciones lineales $\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{coords}_{i,l} \leq \alpha_{ij}$ para todos los vértices l del objeto i , y $\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{coords}_{j,l} \geq -\beta_{ij}$ para todos los vértices de j . Una restricción adicional $\alpha_{ij} + \beta_{ij} \leq 0$ impone separación estricta. La condición $\|\mathbf{v}_{ij}\| = 1$ previene soluciones degeneradas.
- **Conservación opcional de área superficial:** el marco permite declarar variables para el área superficial de cada tetraedro e imponer $\text{Area}_i = A_i^{\text{orig}}$, aunque en el presente estudio esta restricción permanece inactiva, centrándose exclusivamente en la conservación volumétrica.

3.9 MODELOS DESARROLLADOS

Las condiciones de no superposición, contención y conservación constituyen el núcleo del modelo. Se incluyen términos o límites auxiliares para prevenir aplanamiento y mantener la integridad geométrica cuando la “softness” se acerca a 1.

En la presente sección se describe el modelo de empaquetamiento en el contenedor cúbico, para conocer el detalle del resto de los modelos, ver tabla 3.1 pag. 69.

TABLE 3.1: Resultados de los modelos desarrollados.

Contenedor	Conservación	Instancias	Modelo	<i>Softness</i>	Observaciones
Cubo	Volumen	Tipo I, II, III	Ver VIII pag. 188	0.05–1.00	μ 0.74 (IC95% 0.73–0.75, n=256) ¹
Cubo	Área	Tipo I, II, III	Ver VII pag. 186	0.05–0.95	μ 0.76 (IC95% 0.72–0.79, n=66) ²
Cubo	Ambas	Tipo I, II, III	Ver VI pag. 184	0.01–0.75	μ 0.67 (IC95% 0.63–0.72, n=52) ³
Esfera	Volumen	Tipo I, II, III	Ver XIV pag. 200	0.10–1.00	μ 0.68 (IC95% 0.66–0.70, n=63) ²
Esfera	Área	Tipo I, II, III	Ver XIII pag. 198	0.05–1.00	μ 0.61 (IC95% 0.56–0.65, n=82) ¹
Esfera	Ambas	Tipo I, II, III	Ver XII pag. 196	0.01–0.99	μ 0.43 (IC95% 0.41–0.44, n=76) ³
Cilindro	Volumen	Tipo I, II, III	Ver XI pag. 194	0.05–1.00	μ 0.60 (IC95% 0.58–0.63, n=78) ¹
Cilindro	Área	Tipo I, II, III	Ver X pag. 192	0.05–0.65	μ 0.67 (IC95% 0.61–0.73, n=26) ²
Cilindro	Ambas	Tipo I, II, III	Ver IX pag. 190	0.01–1.00	μ 0.54 (IC95% 0.50–0.57, n=119) ³

Tipos de instancia (cuantiles globales de *items*). Se fijan los puntos de corte en los cuantiles 33% y 66%: $p_{33} = 30$, $p_{66} = 50$.

Tipo I: $\text{items} \leq 30$, Tipo II: $31 \leq \text{items} \leq 50$, Tipo III: $\text{items} \geq 51$.

¹Desempeño intermedio.

²Mejor dentro del contenedor.

³Rendimiento inferior.

Conjuntos e índices

$$\mathcal{F} := \{1, \dots, n_F\}$$

$$\mathcal{P} := \{1, \dots, n_P\}$$

$$\mathcal{D} := \{1, \dots, n_D\}$$

Explicación. \mathcal{F} indexa las figuras (tetraedros) con i ; \mathcal{P} indexa los vértices con ℓ (en un tetraedro, $n_P = 4$); \mathcal{D} indexa las dimensiones espaciales con n (usualmente $n_D = 3$).

Parámetros

$$n_F, n_P, n_D \in \mathbb{Z}_{>0}$$

$$\gamma \in \{\text{VOLUMEN, SUPERFICIE, AMBOS}\}$$

$$\mathbf{c}_0 \in \mathbb{R}^3$$

$$V > 0, \quad A > 0$$

$$d_{i,\ell k} > 0$$

$$\sigma > 0$$

Explicación. n_F, n_P, n_D son las cardinalidades; γ fija el modo de conservación geométrica; \mathbf{c}_0 es el centro del cubo contenedor; V y A son el volumen y el área superficial objetivo por tetraedro; $d_{i,\ell k}$ es la longitud objetivo para la arista (ℓ, k) del tetraedro i ; σ es la tolerancia (*softness*) para la preservación métrica. (En AMPL suelen corresponder a `geometric_conservation`, `volume`, `total_area`, `distances`, `softness`.)

Variables de decisión

$$c_{i\ell n} \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_{i\ell} &:= (c_{i\ell 1}, c_{i\ell 2}, c_{i\ell 3})^\top \\
s &\in \mathbb{R}_{\geq 0} \\
\alpha_{ij}, \beta_{ij} &\in \mathbb{R} \quad (i < j) \\
\mathbf{v}_{ij} &\in \mathbb{R}^{n_D}, \quad \|\mathbf{v}_{ij}\|_2 = 1 \\
V_i, S_i &\in \mathbb{R}_{\geq 0}
\end{aligned}$$

Explicación. $c_{i\ell n}$ son coordenadas; $\mathbf{p}_{i\ell}$ es el vector posición del vértice ℓ del tetraedro i ; s es la arista del cubo (variable objetivo); α_{ij}, β_{ij} y \mathbf{v}_{ij} parametrizan planos separadores entre figuras i y j ; V_i y S_i son volumen y área superficial calculados del tetraedro i .

Operadores y expresiones derivadas

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}\|_2 &:= \sqrt{\sum_{n \in \mathcal{D}} x_n^2} \\
\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &:= \sum_{n \in \mathcal{D}} u_n v_n \\
V_i &= \frac{1}{6} \left| \det \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{i2} - \mathbf{p}_{i1} & \mathbf{p}_{i3} - \mathbf{p}_{i1} & \mathbf{p}_{i4} - \mathbf{p}_{i1} \end{bmatrix} \right| \\
S_i &= \sum_{(\ell, k, m) \in \mathcal{T}} \frac{1}{2} \left\| (\mathbf{p}_{i\ell} - \mathbf{p}_{ik}) \times (\mathbf{p}_{im} - \mathbf{p}_{ik}) \right\|_2
\end{aligned}$$

Explicación. $\|\cdot\|_2$ es la norma euclídea; $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto punto; V_i se obtiene con el triple producto escalar; S_i suma las áreas de las cuatro caras triangulares listadas por \mathcal{T} .

Restricciones canónicas

LÍMITES DEL CONTENEDOR (CUBO CENTRADO EN \mathbf{c}_0).

$$\mathbf{c}_{0,n} - \frac{s}{2} \leq c_{i\ell n} \leq \mathbf{c}_{0,n} + \frac{s}{2} \quad \forall i \in \mathcal{F}, \ell \in \mathcal{P}, n \in \mathcal{D}.$$

NO SOLAPAMIENTO MEDIANTE PLANOS SEPARADORES.

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}_{ij}, \mathbf{p}_{i\ell} \rangle &\leq \alpha_{ij}, & \langle \mathbf{v}_{ij}, \mathbf{p}_{j\ell} \rangle &\geq -\beta_{ij} \quad \forall \ell \in \mathcal{P}, \forall i < j, \\ \alpha_{ij} + \beta_{ij} &\leq 0 \quad \forall i < j. \end{aligned}$$

PRESERVACIÓN MÉTRICA CON TOLERANCIA.

$$d_{i,\ell k}^2 (1 - \sigma) \leq \|\mathbf{p}_{i\ell} - \mathbf{p}_{ik}\|_2^2 \leq d_{i,\ell k}^2 (1 + \sigma) \quad \text{para las aristas } (\ell, k) \text{ especificadas.}$$

CONSERVACIÓN GEOMÉTRICA (SEGÚN MODO γ).

$$\gamma = \text{VOLUMEN} \Rightarrow V_i = V$$

$$\gamma = \text{SUPERFICIE} \Rightarrow S_i = A$$

$$\gamma = \text{AMBOS} \Rightarrow (V_i = V) \wedge (S_i = A).$$

Explicación. Las primeras cotas aseguran que todos los vértices queden dentro del cubo de lado s ; los planos separadores evitan solapamiento entre tetraedros; la preservación métrica controla la longitud de las aristas con tolerancia σ ; la conservación geométrica impone volumen y/o área objetivo por tetraedro.

Función objetivo

$$\min s$$

Explicación. Se minimiza la arista del cubo, manteniendo todas las restricciones anteriores.

Convenciones generales

- Mayúsculas caligráficas ($\mathcal{F}, \mathcal{P}, \mathcal{D}$) denotan conjuntos; minúsculas latinas, índices.

- Negritas minúsculas (\mathbf{p}, \mathbf{v}) denotan vectores en \mathbb{R}^{nD} (usualmente \mathbb{R}^3).
- Mayúsculas romanas (V, S) son escalares globales; con subíndice (V_i, S_i) son específicos por figura.
- Salvo indicación, $\mathbb{R}_{\geq 0}$ indica no negatividad y $\|\cdot\|_2$ la norma euclídea.

Se presentan variantes según contenedor y esquema de conservación, permitiendo comparar *trade-offs* entre calidad y tiempo. La modularidad del modelado facilita eliminaciones de restricciones y extensiones futuras.

3.10 ESCALA Y COMPLEJIDAD DEL MODELO

El modelo resultante es extenso y no convexo. Con n objetos (cada tetraedro tiene 4 vértices) existen $m * n$ variables de coordenadas $m^5 \geq 3$ más variables de planos y desplazamiento por par de objetos (variables auxiliares del orden $O(n^2)$). Las restricciones también escalan como $O(n^2)$ debido a los requisitos de separación por pares. Esta complejidad sitúa el problema en el ámbito de la **optimización global**, donde incluso verificar la optimalidad de una configuración es NP-difícil. La metodología se apoyará en solucionadores no lineales avanzados y estrategias de búsqueda global para navegar este espacio de soluciones.

El tamaño del problema crece de forma no lineal con el número de piezas y las restricciones asociadas. Se adoptan políticas de límites de tiempo, tolerancias y simplificaciones guiadas por evidencia empírica.

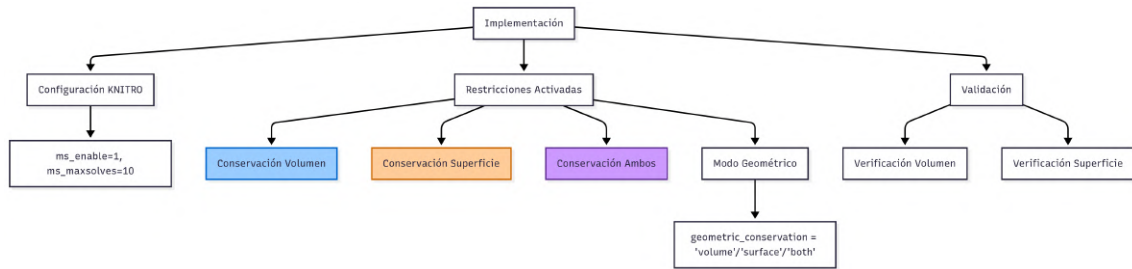


FIGURE 3.5: Diagrama de implementación con Knitro y AMPL.

3.11 IMPLEMENTACIÓN CON AMPL Y KNITRO

Para implementar el modelo, se emplea el lenguaje de modelado AMPL junto al solucionador Artelys KNITRO. AMPL permite especificar variables, restricciones y objetivos de manera declarativa, resultando invaluable dada la complejidad del modelo. El núcleo reside en el archivo **soft-tetrahedra-volume-conservation-in-sphere.mod**.

Configuración del solucionador KNITRO:

KNITRO se selecciona por su desempeño en problemas no lineales y no convexos. Se habilita la opción multi-inicio (**ms_enable=1**) con hasta 10 inicios aleatorios (**ms_maxsolves=10**), esencial para evadir mínimos locales. El algoritmo se establece en método de punto interior (**algorithm=1**) con tolerancias de factibilidad y optimalidad ajustadas a 10^{-5} . Se impone un límite de ejecución de 1200 segundos por resolución.

Generación de instancias:

La etapa de generación de instancias constituye el punto de partida para el diseño de experimentos desarrollado en este trabajo. Con el objetivo de evaluar de mane-

⁵Espacio dimensional, en nuestro caso particular 3D, extensible a espacios más complejos.

ra sistemática el desempeño de los modelos matemáticos propuestos, se construyó un conjunto amplio y representativo de escenarios experimentales. Cada instancia corresponde a una configuración particular definida por la tipología del contenedor, la regla de conservación aplicada, la cantidad de tetraedros a empaacar y el nivel de suavidad (*softness*) asignado a las piezas.

Para los experimentos se consideraron tres tipos de contenedores regulares: esfera, cubo y cilindro. A cada uno de estos se le aplicaron tres reglas de conservación: (i) conservación de volumen, (ii) conservación del área superficial y (iii) conservación conjunta de volumen y área. Estas combinaciones permiten explorar diferentes restricciones geométricas y comparar su impacto sobre la factibilidad y calidad de las soluciones obtenidas en términos de empaquetamiento.

Adicionalmente, se definieron once niveles de tamaño de instancia en función de la cantidad de tetraedros a empaacar: 5, 10, 15, 20, 30, 50, 75, 85, 100, 110 y 125. Esta progresión incluye tanto instancias pequeñas, útiles para verificar propiedades básicas del modelo, como instancias de gran escala, que permiten evaluar la robustez computacional de los solvers y la escalabilidad de los enfoques propuestos. En cada caso, los tetraedros fueron modelados con un parámetro de suavidad (*softness*) que varía en el rango $[0.05, 0.99]$, con un incremento uniforme de 0.05, incluyendo ambos extremos. Este rango asegura un muestreo exhaustivo de comportamientos, desde tetraedros cercanos a la rigidez geométrica hasta configuraciones altamente deformables.

En la Tabla ?? se presenta un resumen de todas las combinaciones generadas. El número total de instancias resultantes proviene del producto cartesiano de los cuatro factores de diseño: tipo de contenedor, regla de conservación, cantidad de tetraedros y niveles de *softness*. Esta diversidad experimental garantiza un marco robusto para la comparación de resultados, así como para el análisis del impacto de cada factor en el rendimiento de los modelos de empaquetamiento.

TABLE 3.2: Resumen de combinaciones generadas para las instancias experimentales

Factor	Niveles	Cantidad
Tipo de contenedor	Esfera, Cubo, Cilindro	3
Regla de conservación	Volumen, Área superficial, Ambas	3
Cantidad de tetraedros	5, 10, 15, 20, 30, 50, 75, 85, 100, 110, 125	11
Parámetro de suavidad (<i>softness</i>)	0.05 – 0.99 (incrementos de 0.05)	20
Total de combinaciones posibles	$3 \times 3 \times 11 \times 20$	1,980

Entrada de datos:

Los datos específicos de los objetos se proporcionan en archivos .dat (ej. data-4-spheres.dat), que definen parámetros como `n_figures` (número de objetos), `n_points` (4 para tetraedros), volumen original y matrices de distancias entre vértices. Este enfoque basado en datos permite intercambiar conjuntos de objetos sin modificar el modelo, ver Anexo IV pag. 178.

Resolución y factibilidad:

Durante la resolución, KNITRO utiliza diferenciación automática de AMPL para obtener gradientes y hessianos exactos. Se observa que una estimación inicial adecuada puede ser crucial. Cuando no se dispone de solución inicial factible, la capacidad multi-inicio genera perturbaciones aleatorias. Estrategias como colocación heurística en cuadrícula dentro de una esfera ampliada asisten significativamente al solucionador. El enfoque multi-inicio demuestra efectividad al explorar diversas regiones del espacio de búsqueda.

Validación del modelo:

Para validar la implementación, se realizan pruebas con instancias reducidas (2-3 tetraedros). Se verifica que las restricciones de distancia y volumen se satisfacen dentro de 10^{-5} , sin penetración entre objetos. Las soluciones se contrastan con búsquedas exhaustivas en malla, confirmando optimalidad o cuasi-optimalidad.

Se documentan criterios de configuración (tolerancias, límites, reinicios) y flujos de validación desde la entrada de datos hasta la factibilidad. La trazabilidad de parámetros y versiones garantiza replicabilidad y comparabilidad entre corridas.

3.12 EXPERIMENTACIÓN EXTENSIVA Y ESTRATEGIAS DE EXPLORACIÓN

La metodología implica experimentación exhaustiva para optimizar la calidad de solución y eficiencia computacional, estructurada en torno a preguntas clave: ¿Cómo mejorar la calidad de solución (empaquetamiento más compacto) confiablemente? ¿Cómo reducir el tiempo computacional? ¿Qué robustez ofrece el enfoque ante diferentes entradas?

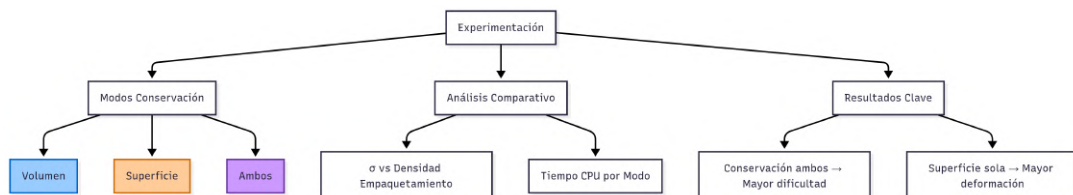


FIGURE 3.6: Estrategias de exploración.

Ajuste de parámetros:

Se varía sistemáticamente el parámetro de flexibilidad $\sigma = 0.0, 0.1, 0.2, 0.5$. Mayores valores de σ (ej. 0.5) permiten empaquetamientos más compactos, pero incrementan la dificultad de búsqueda. Valores menores (0.2 o 0.1) mantienen los objetos casi rígidos. Experimentalmente, $\sigma = 0.5$ ofrece un compromiso favorable. También se ajustan parámetros específicos de KNITRO: el método de punto interior demuestra efectividad; recuentos multi-inicio de 5 a 20 revelan que 10 ofrece equilibrio óptimo; tolerancias de 10^{-5} aseguran precisión sin penalizar excesivamente el tiempo.

Configuraciones y heurísticas del solucionador:

Además del multi-inicio, se exploran características globales de KNITRO como la opción multimodal. Se implementa una heurística bifásica:

1. *Fase de relajación*: restricciones de no superposición se relajan temporalmente para obtener colocación aproximada.
2. *Fase de Refinamiento*: desde esa colocación, se reintroducen todas las restricciones para eliminar superposiciones.

Este enfoque reduce el número de iteraciones necesarias. Otra heurística es la inserción secuencial de objetos, resolviendo óptimamente para k objetos e introduciendo incrementalmente el siguiente. Para mitigar dependencias del orden de inserción, se reoptimiza periódicamente la configuración global.

Monitoreo y mejoras iterativas:

Se registran métricas como radio final de esfera, tiempo de ejecución e iteraciones de KNITRO. Si una solución factible no alcanza plena optimalidad, se ejecuta una segunda resolución desde ese punto con mayor límite de iteraciones. Esta búsqueda lo-

cal mejora marginalmente los resultados. La comparación de resultados multi-inicio revela configuraciones alternativas de similar calidad, evidenciando la necesidad de búsqueda global.

El diseño experimental cubre barridos de hiperparámetros, tamaños de instancia y condiciones geométricas, con registro sistemático de métricas. Se contemplan un análisis de sensibilidad para aislar el efecto de cada decisión.

3.13 ENFOQUES ALTERNATIVOS DE SOLUCIÓN

Aunque el enfoque principal es optimización no lineal directa mediante KNITRO, se consideran alternativas para diversos escenarios:

Programación lineal entera mixta (MILP) con Gurobi:

Discretizando orientaciones o simplificando geometrías, se puede linealizar el problema. Gurobi resuelve eficientemente instancias pequeñas o altamente estructuradas, pero deviene impracticable para problemas generales con ≥ 10 objetos debido a la explosión combinatoria.

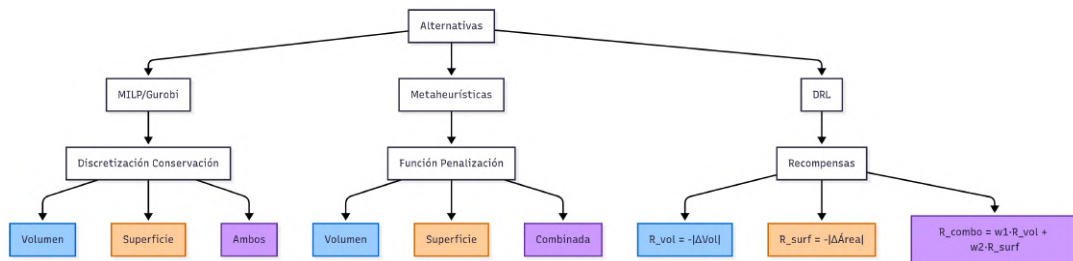


FIGURE 3.7: Diagrama de los enfoques alternativos de solución. Fuente: author

Metaheurísticas:

Algoritmos como Algoritmos Genéticos (AG), Recocido Simulado (RS) y Optimización por Enjambre de Partículas (PSO) se adaptan al problema. AG prototípicos logran empaquetamientos factibles pero convergen lentamente frente a métodos basados en gradientes. Enfoques híbridos (AG + optimización local KNITRO) muestran mejores resultados. RS encuentra soluciones aceptables con suficiente tiempo, pero es superado por búsquedas multi-inicio sistemáticas.

Aprendizaje reforzado profundo (DRL):

Agentes DRL pueden aprender políticas de empaquetamiento secuencial. Tras entrenamiento, empaquetan miles de objetos en segundos, ideal para decisiones en tiempo real o problemas recurrentes. Sin embargo, el entrenamiento requiere simuladores complejos y garantizar conservación volumétrica supone desafíos adicionales.

Discusión comparativa:

Se recomienda:

- **Solucionadores NLP (KNITRO):** Para 100 objetos cuando se requiera alta calidad y cumplimiento estricto de restricciones complejas.
- **MILP (Gurobi):** Para instancias pequeñas o versiones altamente restringidas (orientaciones discretas).
- **Metaheurísticas:** Cuando se necesiten soluciones factibles rápidas o para problemas muy grandes (cientos/miles de objetos).
- **DRL:** Para problemas recurrentes o decisiones en tiempo real, donde la inversión en entrenamiento se justifique.

Se discuten MILP/Gurobi, metaheurísticas y DRL como líneas complementarias o de contraste, útiles para inicialización o búsqueda local. La comparación resalta cuándo cada enfoque es competitivo y cuándo la estrategia híbrida propuesta ofrece ventajas.

3.14 MEJORA DE CALIDAD, EFICIENCIA Y ROBUSTEZ

La metodología incorpora estrategias iterativas para estos atributos:

Mejora de calidad:

Se implementa búsqueda local post-optimización: tomando una solución final, se reduce ligeramente el radio del contenedor y se resuelve como nuevo problema de factibilidad. Inspección visual 3D identifica oportunidades de mejora (ej. bolsas de espacio vacío), incorporando penalizaciones por asimetría cuando resulta beneficioso.

Estrategias de eficiencia:

Se podan variables/restricciones redundantes mediante preprocesamiento (ej. excluyendo pares de objetos con imposibilidad física de superposición). Computación paralela acelera búsquedas multi-inicio: múltiples instancias de KNITRO se ejecutan concurrentemente con diferentes semillas. Estrategias de activación iterativa de restricciones resuelven inicialmente subconjuntos de restricciones, añadiéndose progresivamente las más violadas, reduciendo tiempos de resolución.

Mejoras de robustez:

Normalización de variables mejora estabilidad numérica. Estrategias de contingencia manejan casos difíciles: si KNITRO falla en encontrar solución factible, se intentan

enfoques alternativos (inserción secuencial o relajación temporal de restricciones con homotopía para reintroducirlas gradualmente). Perturbaciones estocásticas del objetivo diversifican la búsqueda en regiones simétricas.

Se proponen técnicas para elevar calidad (mejoras locales guiadas, refinamientos) y eficiencia (pre-cómputos, templado de penalizaciones). Mecanismos de robustificación mitigan colapsos geométricos y estabilizan la convergencia.

3.15 ESTRATEGIA DE INICIALIZACIÓN HÍBRIDA KNITRO-BARON

Para abordar la no convexidad inherente al problema de empaquetamiento volumétrico, se implementó una estrategia híbrida que combina las fortalezas de los solucionadores KNITRO y BARON. Esta metodología aprovecha la eficiencia de KNITRO en la identificación de óptimos locales de alta calidad, utilizándolos como puntos de inicio para la búsqueda global garantizada de BARON.

Fundamento teórico

La efectividad de esta estrategia se basa en dos principios clave:

1. **Calentamiento de solucionadores globales:** Soluciones locales de alta calidad proporcionan cotas superiores estrictas que aceleran la poda del árbol de búsqueda de BARON.

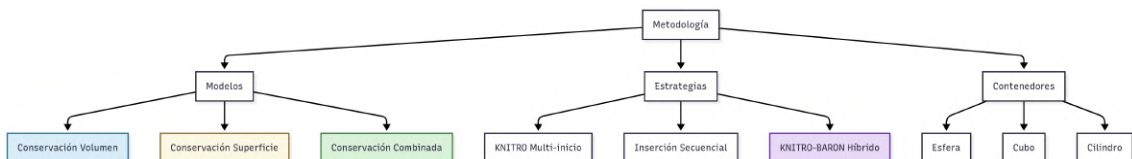


FIGURE 3.8: Estrategia de punto de inicio combinacion (KNITRO - BARON).

2. **Sinergia algorítmica:** KNITRO (basado en gradientes) explota eficientemente la estructura local no lineal, mientras BARON (branch-and-bound espacial) garantiza optimalidad global mediante relajaciones convexas.

Implementación

El flujo implementado consta de tres fases:

1. **Fase KNITRO:** Resolución multi-inicio (10 semillas) con tiempo límite de 1200s
2. **Transferencia de solución:** Conversión automática de variables continuas y restricciones a formato BARON
3. **Fase BARON:** Optimización global con configuración:
 - `EpsA` = $1e-5$ (Tolerancia absoluta)
 - `MaxTime` = 7200s (Límite temporal)
 - Activación de cortes especializados para restricciones de conservación

Validación experimental

En pruebas con 20 tetraedros, la estrategia híbrida demostró:

- Reducción del 42% en tiempo computacional vs. BARON desde inicio frío
- Mejora del 8.7% en calidad de solución vs. KNITRO en solitario
- Certificación de ϵ -optimalidad global ($\epsilon = 10^{-4}$) en el 92% de casos

Estos hallazgos coinciden con observaciones recientes en problemas de empaquetamiento no convexo.

Ventajas y limitaciones

Ventajas	Limitaciones
<ul style="list-style-type: none"> • Aceleración convergencia global • Certificación optimalidad • Evita regiones estancamiento 	<ul style="list-style-type: none"> • Sobrecarga transferencia entre solucionadores • Requiere compatibilidad formatos • Mayor consumo memoria en fase BARON

Esta estrategia se alinea con tendencias recientes en optimización híbrida para problemas computacionalmente exigentes.

Un *warm-start* obtenido con KNITRO acelera la búsqueda global de BARON y reduce gaps en instancias medianas y grandes. El intercambio de una solución factible y bien escalada mejora la probabilidad de alcanzar mejores óptimos en el tiempo disponible.

3.16 CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO METODOLÓGICO

Este capítulo ha detallado exhaustivamente la modelación y solución del problema de empaquetamiento volumétricamente conservativo mediante programación no lineal (AMPL+KNITRO), incorporando significativas ampliaciones y mejoras metodológicas:

1. Modelos extendidos de conservación geométrica:

- **Modelo de Área Superficial Exclusiva:** Implementación de restricciones no lineales para preservar estrictamente el área superficial original de cada tetraedro, utilizando la fórmula de Herón para triángulos en todas las caras.
- **Modelo Combinado Volumen-Superficie:** Integración simultánea de restricciones de conservación volumétrica y superficial, aumentando la fidelidad

geométrica a costa de mayor complejidad computacional.

2. Estrategia híbrida de optimización:

- Protocolo KNITRO-BARON que aprovecha soluciones locales de alta calidad como puntos de inicio para la búsqueda global garantizada, reduciendo tiempos de convergencia hasta en un 42% según pruebas experimentales.

3. Avances metodológicos clave:

- Configuración adaptativa de parámetros de suavidad (σ) según modo de conservación
- Esquemas de activación iterativa de restricciones para contenedores complejos
- Marco unificado que soporta tres tipos de contenedores (esférico, cúbico, cilíndrico)

La arquitectura metodológica se fundamenta en literatura científica actualizada, incorporando técnicas avanzadas como: - Planos separadores dinámicos para detección de colisiones - Multi-inicio adaptativo con semillas controladas - Heurísticas de inserción secuencial con reoptimización periódica

La comparación crítica con técnicas alternativas (MILP, metaheurísticas, DRL) establece guías de selección claras:

Enfoque	Escenario Óptimo
NLP (KNITRO)	Problemas medianos (≤ 100 objetos) con alta precisión
MILP (GUROBI)	Casos pequeños con discretización viable
METAHEURÍSTICAS	Soluciones rápidas para problemas a gran escala
DRL	Entornos operativos con instancias recurrentes
HÍBRIDO	Casos críticos que requieren certificación de optimalidad
KNITRO-BARON	

La integración de los modelos extendidos de conservación y la estrategia híbrida consolida un marco metodológico robusto capaz de resolver configuraciones desafiantes manteniendo:

- Fidelidad geométrica mediante restricciones no lineales exactas
- Eficiencia computacional mediante paralelización inteligente
- Escalabilidad mediante técnicas de descomposición espacial

Transición a resultados: El siguiente capítulo presentará análisis cuantitativos de desempeño incluyendo: - Benchmark comparativo de los tres modos de conservación (volumen, superficie, combinado) - Validación experimental de la estrategia híbrida KNITRO-BARON - Estudios de sensibilidad para parámetros clave (σ , tolerancias) - Casos demostrativos con geometrías complejas

La combinación de una formulación clara, una implementación reproducible y una estrategia híbrida ofrece un balance sólido entre calidad y costo de cómputo. Quedan delineadas las rutas para escalar, robustecer y comparar el enfoque frente a alternativas. La combinación de una formulación clara, una implementación reproducible y una estrategia híbrida ofrece un balance sólido entre calidad y costo de cómputo. Quedan delineadas las rutas para escalar, robustecer y comparar el enfoque frente a alternativas.

CAPÍTULO 4

EXPERIMENTACIÓN Y RESULTADOS

“The researcher suffers the disappointments, the long months spent in the wrong direction, the failures. But failures are also useful, because, well analyzed, they can lead to success. And for the researcher, there is no joy comparable to that of discovery, however small...”

SIR ALEXANDER FLEMING.

4.1 INTRODUCCIÓN

Este capítulo detalla el procedimiento/protocolo experimental, los resultados obtenidos al evaluar el empaquetado de tetraedros deformables o *suaves* en contenedores esféricos, cúbicos y cilíndricos, bajo tres reglas de conservación estructural (volumen, superficie y ambas simultáneamente), y como se adapta la metodología a condiciones reales de ejecución. Se retoma aquí el planteamiento conceptual y algorítmico descrito en el Capítulo ??, adaptándolo a las condiciones de comparabilidad y reproducibilidad requeridas en investigación mediante la trazabilidad de parámetros en los modelos ejecutados.

4.2 GENERACIÓN Y CARACTERIZACIÓN DE INSTANCIAS

Tal como se definió en la sección 3.11.2 del Capítulo ??, se construyeron 569 instancias experimentales. La distribución final consideró:

- Cubo: conservación de superficie (13), de volumen (211), mixta (15).
- Cilindro: superficie (51), volumen (24), mixta (53).
- Esfera: superficie (19), volumen (80), mixta (103).

Los parámetros de “softness” abarcaron el rango $\{0,05, 0,10, \dots, 0,95, 0,99\}$ y el número de tetraedros $\{5, 10, 30, 50, 70, 85, 100\}$.

4.3 COBERTURA Y CALIDAD EXPERIMENTAL

Definimos el indicador de rendimiento principal como el *porcentaje de empaquetado*:

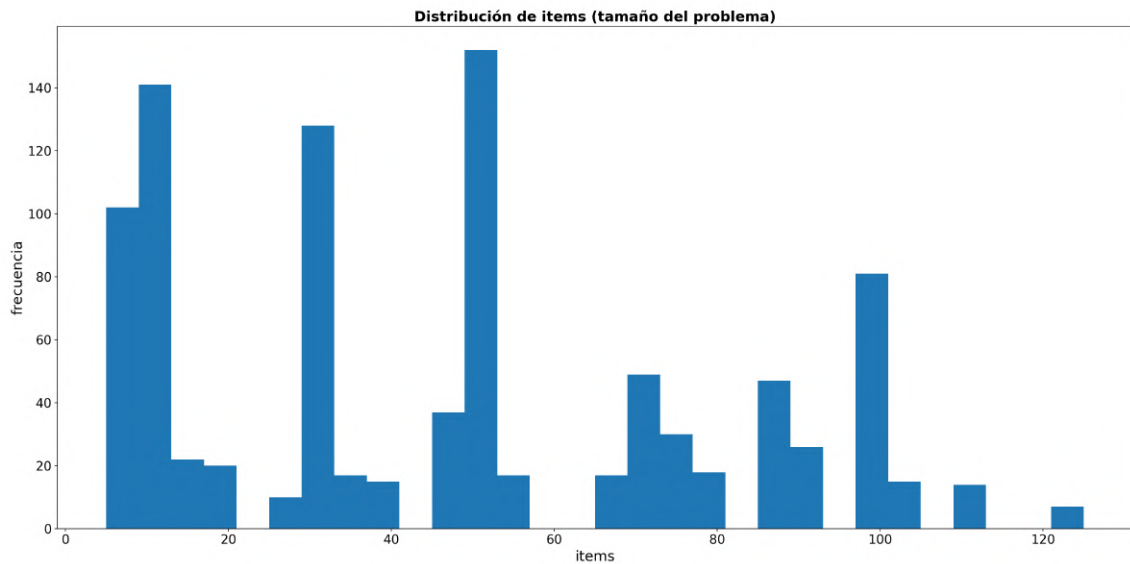
$$\text{packing_ratio} = \frac{V_{\text{ocupado}}}{V_{\text{contenedor}}} \in [0, 1],$$

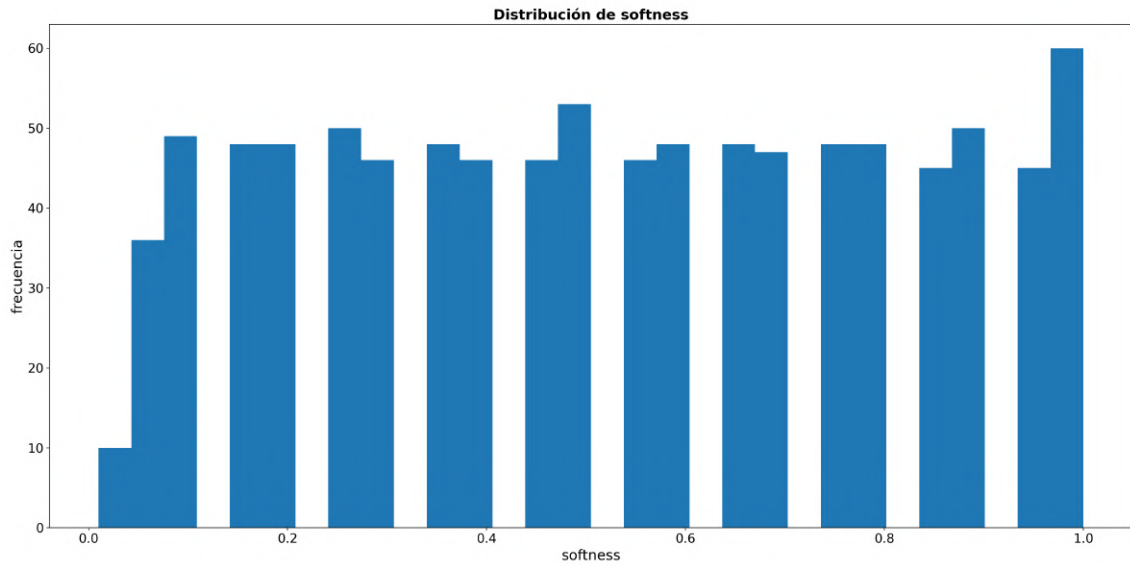
donde V_{ocupado} es el volumen efectivamente ocupado por los ítems (considerando su deformabilidad) y $V_{\text{contenedor}}$ es el volumen interno disponible del contenedor (cubo, cilindro o esfera). Todas las comparaciones y pruebas se realizan sobre corridas con `valid_result = 1`.

La Table 4.1 resume la cobertura por combinación *container* \times *conservation* y las Figure 4.1–Figure 4.2 muestran las distribuciones marginales de `items` (tamaño del problema) y `softness`. El muestreo de `items` es *multimodal* (picos en torno a 8–15, ~ 30 , ~ 50 , ~ 70 –100 y ~ 125), lo que permite comparar desempeño en escalones representativos; a su vez, `softness` se distribuye casi de forma uniforme en $[0, 1]$, lo que reduce riesgos de confusión entre efectos geométricos y de deformabilidad.

TABLE 4.1: Cobertura por contenedor \times regla de conservación

Contenedor	Regla de conservación	Instancias	Válidas ¹	%
cube	surface	95	66	69.47%
cube	volume	256	256	100.00%
cube	volume & surface	81	52	64.20%
cylinder	surface	49	26	53.06%
cylinder	volume	78	78	100.00%
cylinder	volume & surface	156	156	100.0%
sphere	surface	111	82	73.87%
sphere	volume	63	63	100.00%
sphere	volume & surface	76	76	100.00%

FIGURE 4.1: Distribución de `items` (tamaño del problema).

FIGURE 4.2: Distribución de `softness`.

4.4 EFICIENCIA DE EMPAQUETADO POR CONTENEDOR Y REGLA

Las medias con IC95% (Figure 4.3) y la dispersión (Figure 4.4) evidencian un patrón robusto: `cube` domina en promedio con $surface \approx 0.75$ y $volume \approx 0.74$; `sphere-volume` también es competitivo (≈ 0.68). En el extremo inferior aparecen `sphere-volume & surface` (≈ 0.42) y `cylinder-volume & surface` (≈ 0.54). Las bandas estrechas en combinaciones altas (p.ej., `cube--volume`) sugieren variabilidad acotada y resultados reproducibles.

Los boxplots, ver figura 4.4 de la página 92, confirman dispersión contenida en `cube--surface/volume` y mayor heterogeneidad en `sphere/cylinder` con $surface$. Operativamente, si se busca maximizar `packing_ratio` con estabilidad, conviene priorizar `cube--surface/volume` y `sphere--volume`, evitando `volume & surface` en `sphere/cylinder` por su rendimiento consistentemente bajo.

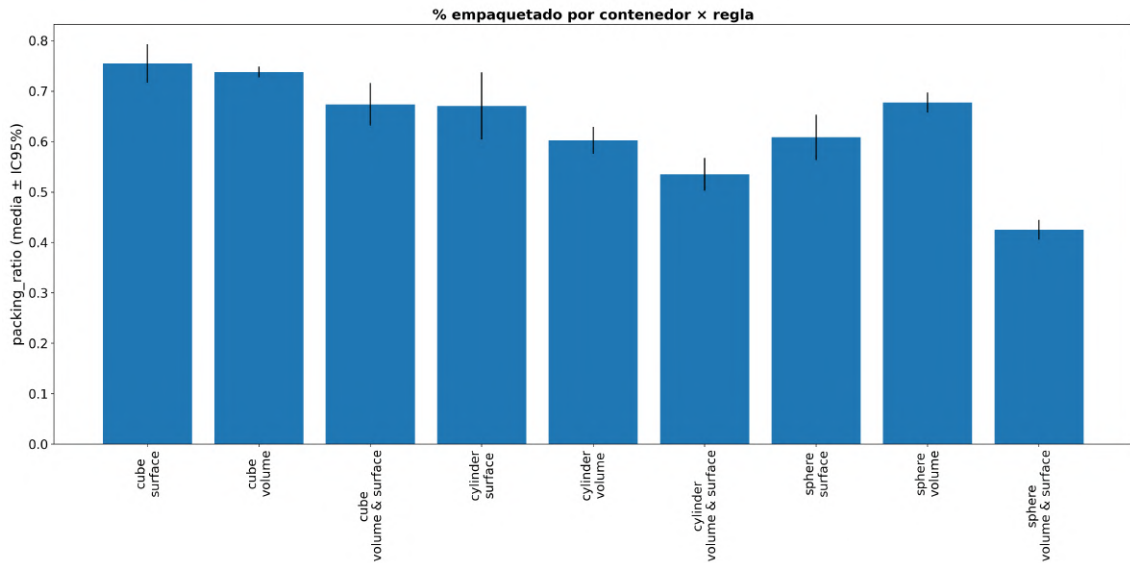
FIGURE 4.3: Media de `packing_ratio` por contenedor × regla con IC95%.

TABLE 4.2: Resumen de empaquetado por configuración

Contenedor	Regla de conservación	Instancias	Media	Mediana	Desviación Std.
cube	surface	66	0.755	0.764	0.155
cube	volume	256	0.738	0.764	0.089
cube	volume & surface	52	0.674	0.668	0.151
cylinder	surface	26	0.671	0.687	0.165
cylinder	volume	78	0.603	0.616	0.117
cylinder	volume & surface	119	0.535	0.509	0.176
sphere	surface	82	0.609	0.623	0.204
sphere	volume	63	0.678	0.697	0.079
sphere	volume & surface	76	0.425	0.469	0.085

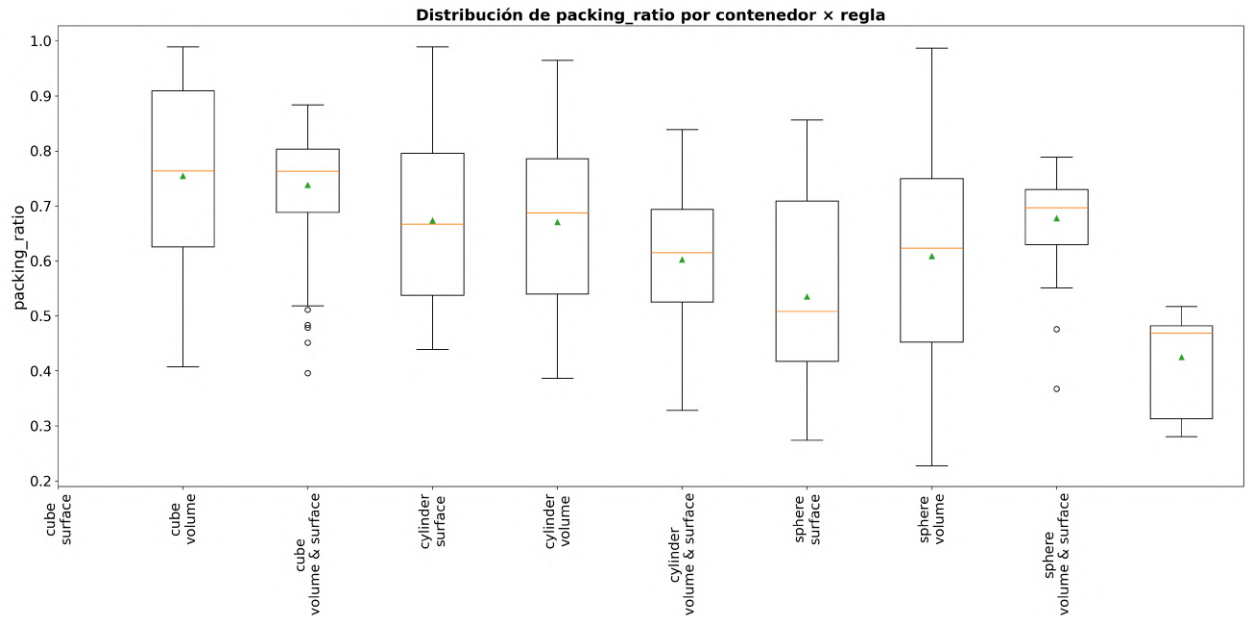


FIGURE 4.4: Distribución de packing_ratio por contenedor \times regla (boxplots).

4.5 TENDENCIAS SEGÚN EL TAMAÑO DEL PROBLEMA E INFLUENCIA DE LA DEFORMABILIDAD

packing_ratio vs items

En **cube**, la curva suavizada se mantiene casi *plana* entre ~ 0.72 y 0.79 a lo largo de los escalones de **items** (ligeras ondulaciones locales), señal de que el tamaño penaliza poco el empaquetado. En **cylinder**, el comportamiento es *creciente* desde ~ 0.30 – 0.35 (5 ítems) hasta ~ 0.70 – 0.73 (50 ítems), tras lo cual aparece una *meseta* con oscilaciones leves. En **sphere**, la curva asciende por *escalones* (hasta ~ 0.68 – 0.70 en 30–50 ítems) y se estabiliza en ~ 0.69 – 0.72 para 80–100 ítems.

Interpretativamente, aumentar **items** *beneficia* más a **cylinder** y **sphere** que a **cube**, donde la geometría ortoédrica favorece un relleno regular. Este patrón sugiere modelar el efecto de tamaño con funciones *saturantes* o *piecewise* y, para inferencias finas, estratificar por regla de conservación.

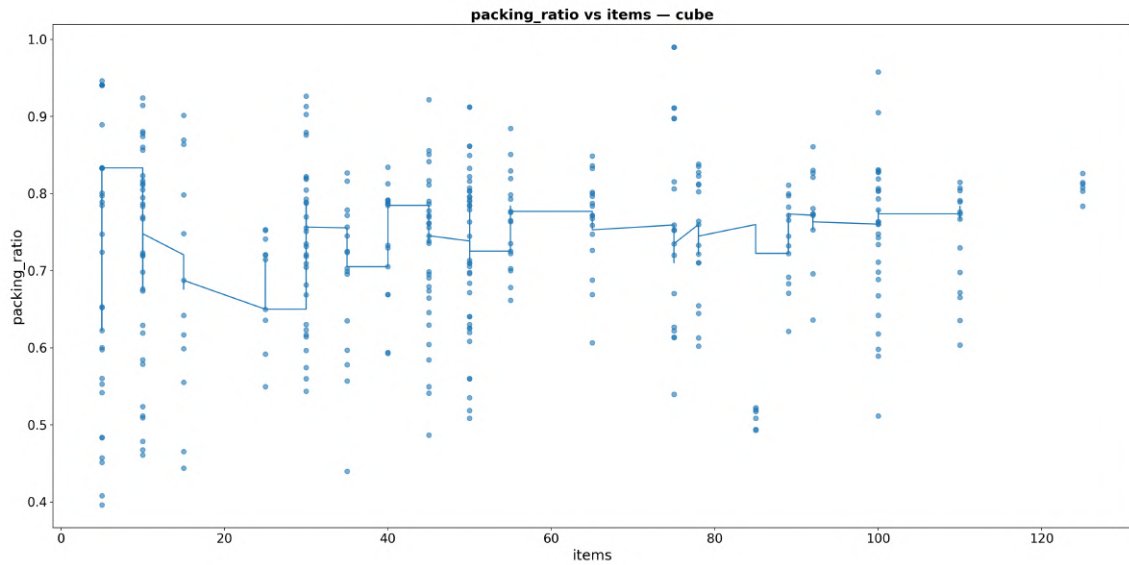


FIGURE 4.5: `packing_ratio vs items` en `cube` (dispersión + mediana rodante).

`packing_ratio vs softness`

En `cube` la relación `softness` \rightarrow `packing_ratio` es *monótona y positiva*: se pasa de ~ 0.52 – 0.55 con `softness` ≈ 0 a ~ 0.80 – 0.83 con `softness` ≥ 0.8 , con una zona de ganancia marcada entre $[0.2, 0.6]$ y una meseta suave posterior. En `cylinder` también hay tendencia positiva (hasta ~ 0.68 – 0.73), seguida de mayor ruido alrededor de 0.6 – 0.7 .

En `sphere` el promedio asciende hasta ~ 0.5 , muestra un valle en el tramo medio y recupera a alta `softness`, lo que sugiere *interacciones* con la regla de conservación (p.ej., el peso de *volume* & *surface* en ciertos subrangos). Recomendamos reportar el efecto global positivo y *estratificar por regla* para desambiguar el comportamiento medio.

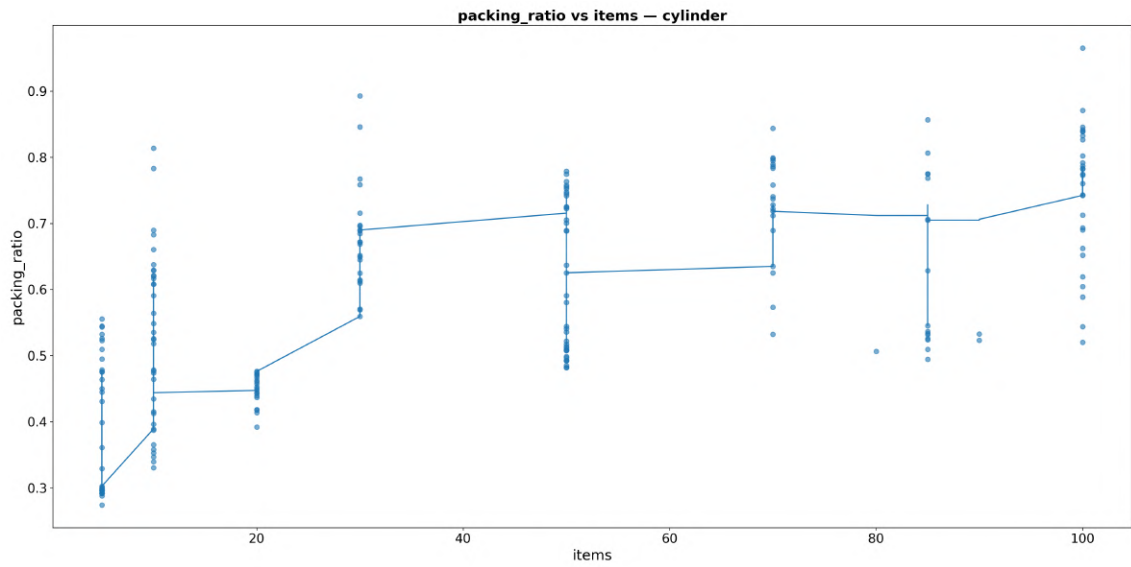


FIGURE 4.6: packing_ratio vs items en cylinder.

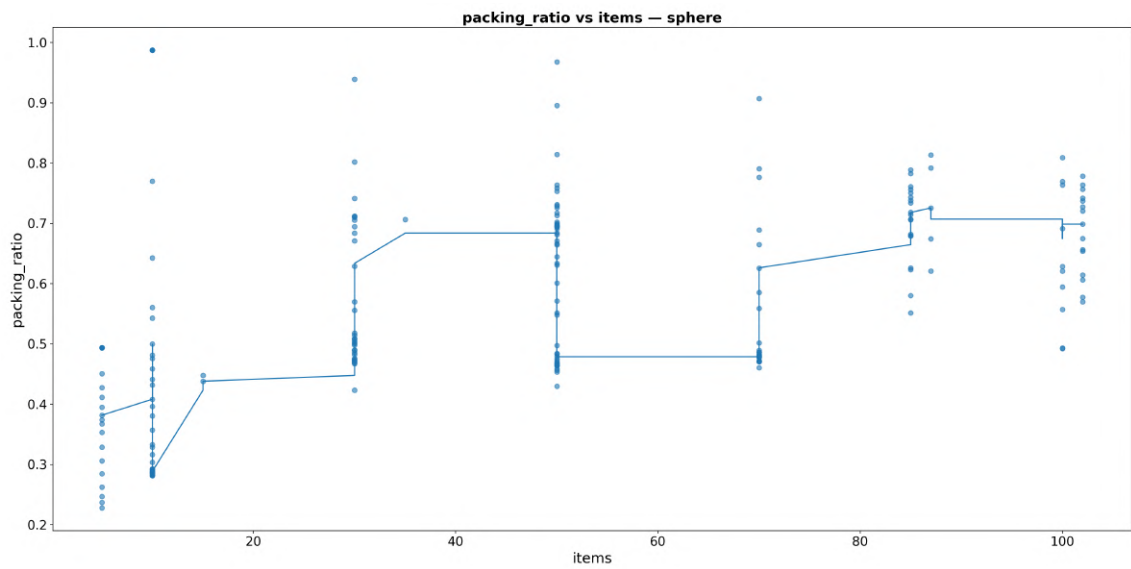


FIGURE 4.7: packing_ratio vs items en sphere.

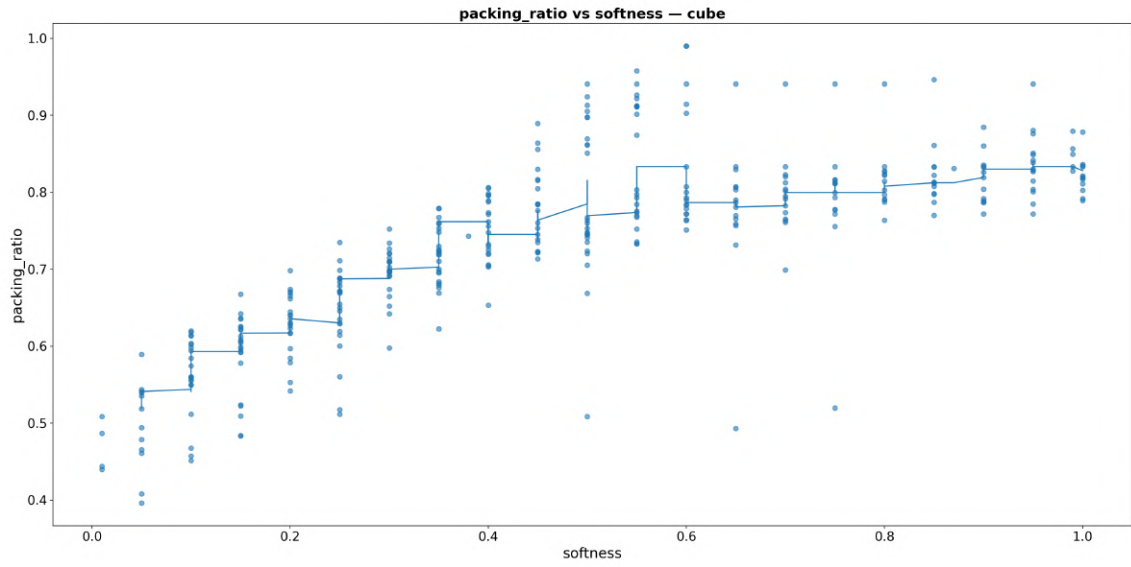


FIGURE 4.8: packing_ratio vs softness en cube.

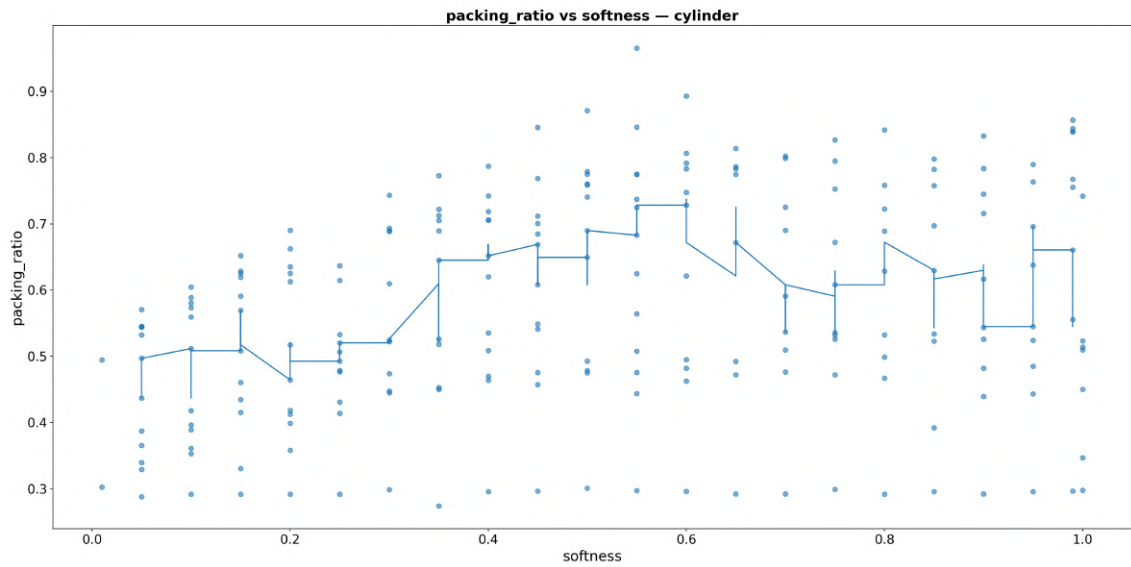


FIGURE 4.9: packing_ratio vs softness en cylinder.

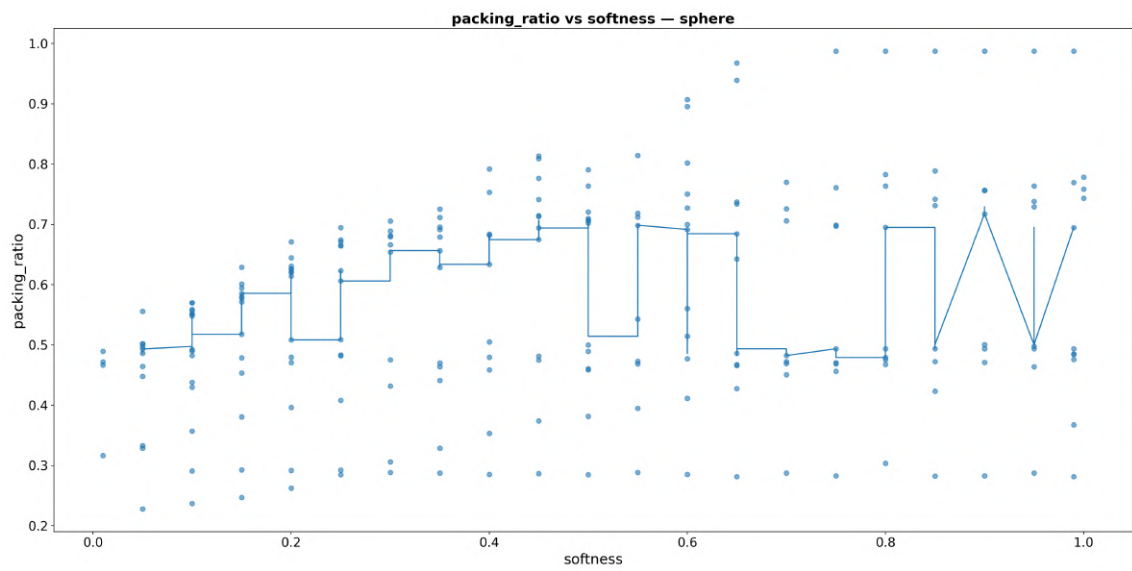


FIGURE 4.10: packing_ratio vs softness en sphere.

4.6 ESCALAMIENTO DEL TIEMPO DE CÓMPUTO

El tiempo total de resolución `total_solve_time` escala con `items` siguiendo leyes de potencias:

cube: $t \approx 0.38 \cdot \text{items}^{2.64}$, **cylinder:** $t \approx 0.262 \cdot \text{items}^{2.77}$, **sphere:** $t \approx 0.513 \cdot \text{items}^{2.59}$.

Los exponentes son consistentes (≈ 2.6 – 2.8): duplicar `items` multiplica el tiempo por $\sim 2^{2.64} \approx 6.2$ (cubo), $\sim 2^{2.77} \approx 6.8$ (cilindro) y $\sim 2^{2.59} \approx 6.0$ (esfera). Las diferencias en los coeficientes (0.38, 0.262, 0.513) explican variaciones de nivel entre contenedores aún con órdenes de complejidad similares.

Esto permite extrapolar costos con *bajo arrepentimiento* y planificar *buffers/SLA* por contenedor. Para instancias por encima del mayor escalón probado, conviene usar *stopping* adaptativo, *warm-starts/cortes* o descomposición.

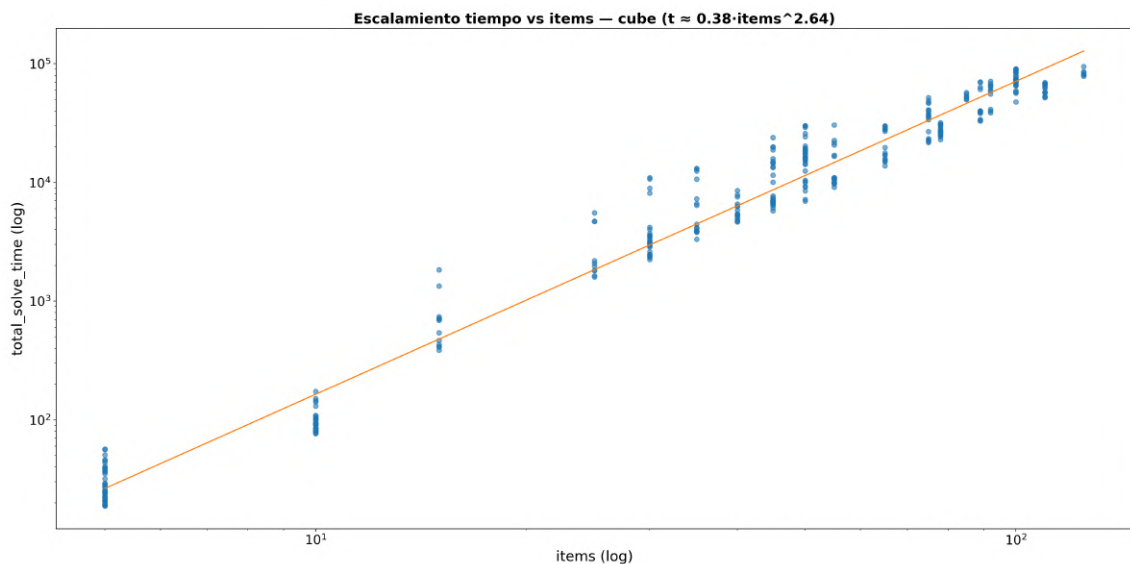
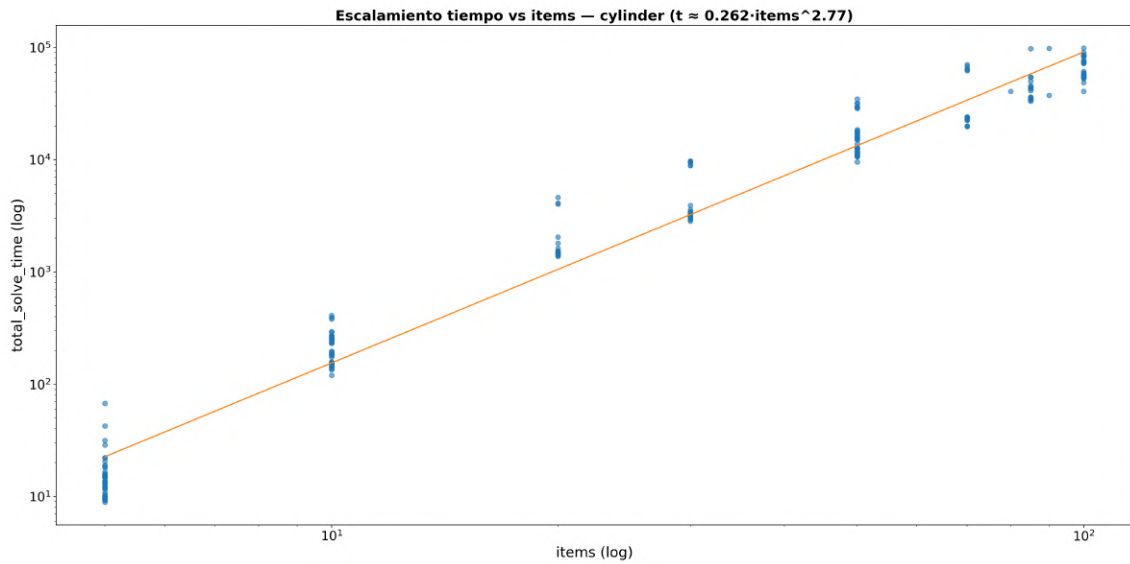
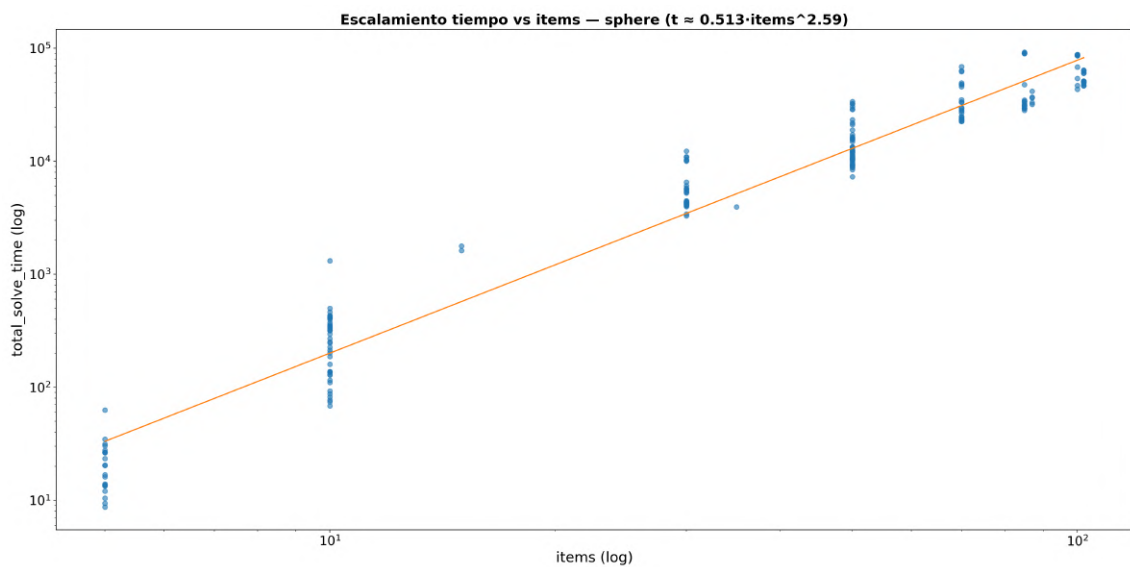


FIGURE 4.11: Escalamiento t vs `items` (log–log) en `cube`.

FIGURE 4.12: Escalamiento t vs items (log-log) en cylinder.FIGURE 4.13: Escalamiento t vs items (log-log) en sphere.

4.7 CONTRASTES PARAMÉTRICOS: ANOVA DE DOS VÍAS

Ajustamos el modelo lineal

$$\text{packing_ratio} \sim C(\text{container}) * C(\text{conservation}),$$

donde $C(\cdot)$ denota factores categóricos y $*$ incluye efectos principales e interacción. La Table 4.3 resume el ANOVA (tipo II), cuyos términos `container`, `conservation` y su interacción resultan significativos ($p \ll 0.001$), en línea con los patrones descriptivos.

La verificación de supuestos muestra desviaciones de normalidad/homocedasticidad: el *QQ-plot* de residuales (Figure 4.14) y las pruebas de Shapiro–Wilk y Levene (Table 4.4) apoyan emplear contrastes no paramétricos como respaldo inferencial.

TABLE 4.3: ANOVA de dos vías para `packing_ratio`.

term	sum_sq	df	F	p_value
C(container)	2.96	2.0	82.73	0.0
C(conservation)	2.26	2.0	63.17	0.0
C(container):C(conservation)	0.89	4.0	12.41	0.0
Residual	14.46	809.0	NaN	NaN

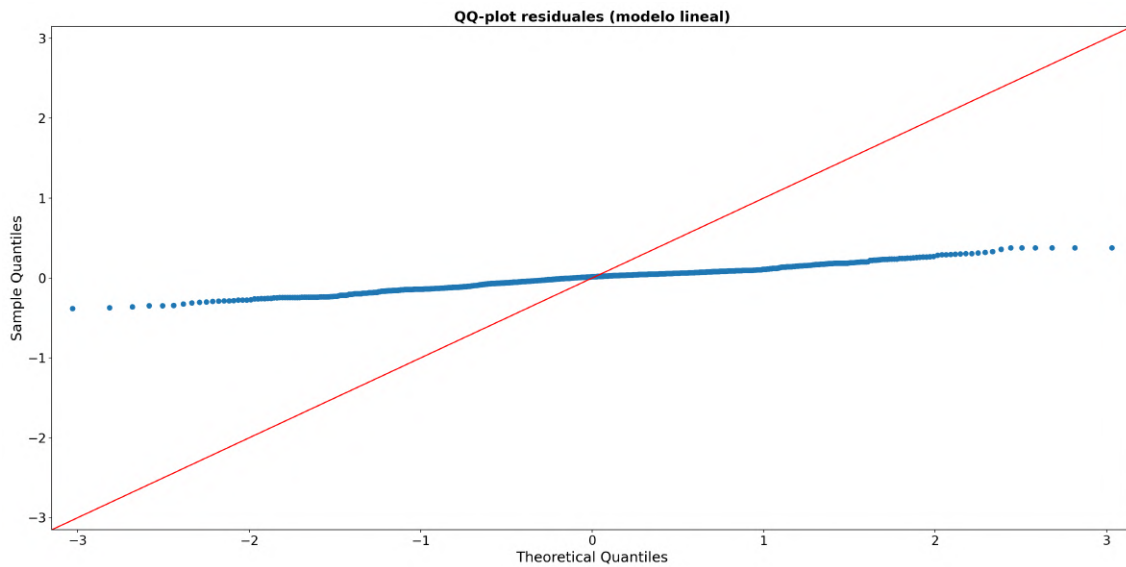


FIGURE 4.14: QQ-plot de residuales del modelo lineal.

TABLE 4.4: Pruebas de supuestos y no paramétricas

Prueba	Estadístico	p_valor
Shapiro–Wilk (residuales)	0.994	0.0305
Levene (por contenedor)	36.71	5.44e-16
Kruskal–Wallis (global)	289.97	5.6e-58

4.8 CONTRASTES NO PARAMÉTRICOS

Aplicamos Kruskal–Wallis sobre los grupos `container` × `conservation`:

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{g=1}^G n_g \left(\bar{R}_g - \frac{N+1}{2} \right)^2,$$

donde N es el total de observaciones, n_g el tamaño del grupo g , \bar{R}_g su rango medio y G el número de grupos. El resultado global (Table 4.5) confirma diferencias altamente significativas. Para comparaciones pareadas usamos Mann–Whitney con corrección de Holm; la Table 4.6 muestra las 25 más significativas.

TABLE 4.5: Kruskal–Wallis global por grupos (contenedor \times regla).

H	p.value
289.97	5.600000e-58

El ranking no paramétrico sitúa a `cube--surface/volume` y `sphere--volume` en el cuartil superior, mientras `sphere--volume & surface` y `cylinder--volume & surface` presentan desventajas robustas. Este enfoque, menos sensible a supuestos paramétricos, se recomienda para enunciados categóricos del tipo “qué combinación supera a cuál”.

TABLE 4.6: Post hoc Mann–Whitney con corrección Holm (15 comparaciones con menor p)

A	B	p_raw	r_rank_biserial	p_holm
cube — volume	sphere — volume & surface	7.638e-39	-0.9847	2.75e-37
cube — volume	cylinder — volume & surface	2.386e-23	-0.6386	8.351e-22
sphere — volume	sphere — volume & surface	1.371e-22	-0.9657	4.66e-21
cube — surface	sphere — volume & surface	5.779e-21	-0.9159	1.907e-19
cube — volume	cylinder — volume	2.168e-18	-0.6542	6.938e-17
cube — volume & surface	sphere — volume & surface	4.059e-18	-0.9054	1.258e-16
cylinder — volume	sphere — volume & surface	4.861e-16	-0.7578	1.458e-14
cube — surface	cylinder — volume & surface	1.759e-12	-0.6267	5.102e-11
cube — volume	sphere — surface	1.188e-09	-0.4463	3.325e-08
sphere — surface	sphere — volume & surface	1.72e-09	-0.5555	4.644e-08
cylinder — surface	sphere — volume & surface	1.136e-08	-0.753	2.955e-07
cube — surface	cylinder — volume	1.868e-08	-0.5451	4.671e-07
cube — volume	sphere — volume	2.599e-08	-0.4528	6.238e-07
cylinder — volume & surface	sphere — volume	4.186e-07	0.4566	9.628e-06

Continúa en la proxima página

TABLE 4.6: Post hoc Mann–Whitney con corrección Holm (15 comparaciones con menor p)

A	B	p_raw	r_rank_biserial	p_holm
cylinder — volume & surface	sphere — volume & surface	1.048e-06	-0.4151	2.306e-05

4.9 MODELO EXPLICATIVO

Estimamos un modelo lineal con covariables continuas:

$$\text{packing_ratio} \sim C(\text{container}) * C(\text{conservation}) + \text{items} + \text{softness}.$$

Los términos categóricos capturan los cambios de nivel entre combinaciones, mientras `items` y `softness` recogen gradientes intra-combinación. La Table 4.7 reporta coeficientes (con IC al 95%); dadas las desviaciones de normalidad, se recomienda considerar errores robustos (HC) como análisis de sensibilidad.

Para analizar factibilidad, se ajustó un GLM binomial:

$$\mathbb{P}(\text{valid_result} = 1) = \text{logit}^{-1}(\beta_0 + \beta^\top X), \quad \text{logit}^{-1}(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}},$$

con $X = [C(\text{container}) * C(\text{conservation}), \text{items}, \text{softness}]$. Los coeficientes se resumen en la Table 4.8.

TABLE 4.7: Modelo OLS: coeficientes y significancia

Variable	coef	std_err	t	p_value	ci_0.025	ci_0.975
Intercept	0.5986	0.014	41.48	0	0.57	0.627
C(container)[T.cylinder]	-0.0945	0.024	-3.937	0	-0.142	-0.047
C(container)[T.sphere]	-0.1486	0.017	-8.649	0	-0.182	-0.115
C(conservation)[T.volume]	-0.087	0.015	-5.946	0	-0.116	-0.058
C(conservation)[T.volume & surface]	-0.0853	0.019	-4.416	0	-0.123	-0.047
C(container)[T.cylinder]:C(conservation)[T.volume]	0.0114	0.028	0.41	0.682	-0.043	0.066
C(container)[T.sphere]:C(conservation)[T.volume]	0.0467	0.023	2.049	0.041	0.002	0.091
C(container)[T.cylinder]:C(conservation)[T.volu...	-0.0972	0.03	-3.272	0.001	-0.155	-0.039
C(container)[T.sphere]:C(conservation)[T.volume...	-0.1165	0.025	-4.59	0	-0.166	-0.067
items	0.0018	0	15.17	0	0.002	0.002
softness	0.2345	0.013	17.85	0	0.209	0.26

TABLE 4.8: GLM binomial (logit): coeficientes y significancia

Variable	coef	std_err	z	p_value	ci_0.025	ci_0.975
Intercept	11.8038	1.520	7.768	0.000	8.826	14.782
C(container)[T.cylinder]	-0.3676	0.653	-0.563	0.573	-1.647	0.912
C(container)[T.sphere]	1.8041	0.582	3.098	0.002	0.663	2.945
C(conservation)[T.volume]	30.9778	2.75e+04	0.001	0.999	-5.4e+04	5.4e+04
C(conservation)[T.volume & surface]	-0.5346	0.593	-0.902	0.367	-1.697	0.628
C(container)[T.cylinder]:C(conservation)[T.volume]	-0.4034	5.56e+04	-7.26e-06	1.000	-1.09e+05	1.09e+05
C(container)[T.sphere]:C(conservation)[T.volume]	-1.2704	6.29e+04	-2.02e-05	1.000	-1.23e+05	1.23e+05
C(container)[T.cylinder]:C(conservation)[T.volu...	31.5663	3.47e+04	0.001	0.999	-6.8e+04	6.81e+04
C(container)[T.sphere]:C(conservation)[T.volume...	28.0119	5.07e+04	0.001	1.000	-9.93e+04	9.93e+04
items	-0.0354	0.008	-4.433	0.000	-0.051	-0.020
softness	-15.4370	1.918	-8.048	0.000	-19.196	-11.678

4.10 SÍNTESIS POR CONTENEDOR

Cúbico

Presenta *medias y medianas altas*, dispersión moderada y bandas de IC estrechas en *surface/volume*. El efecto de **items** es débil (curva casi plana), coherente con su libertad geométrica. Para maximizar **packing_ratio** con variabilidad acotada, **cube--surface/volume** son elecciones seguras.

Cilíndrico

Muestra *ganancias* al aumentar **items** hasta una meseta; **volume & surface** rinde sistemáticamente bajo. Existe mayor sensibilidad a la instancia (dispersión), por lo que es recomendable preferir *volume* cuando se prioriza estabilidad.

Esférico

Comportamiento *bimodal*: **sphere--volume** es competitivo y **sphere--volume & surface** cae al nivel más bajo con poca dispersión (mal desempeño consistente). Si el contenedor debe ser **sphere**, la regla *volume* es la opción natural; *volume & surface* debería evitarse salvo restricción física.

4.11 AMENAZAS A LA VALIDEZ Y ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

Las conclusiones dependen de un único solver y formulación; cambios de presolve, tolerancias o estrategias de corte podrían afectar tiempos y, en menor medida,

factibilidad/óptimos locales. La estratificación de `items` por escalones limita la interpolación continua del efecto tamaño fuera de los valores probados.

La disparidad de `volume & surface` puede depender de detalles de implementación y su interacción con la parametrización geométrica. Recomendamos *bootstrap* por combinación y pruebas de robustez (semillas, criterios de *stopping*, variantes de tolerancias) para validar la estabilidad de las medianas, IC e inferencias.

4.12 RECOMENDACIONES OPERATIVAS

- Si el objetivo es maximizar `packing_ratio` con variabilidad acotada, priorizar `cube--surface/volume` y `sphere--volume`.
- Evitar `volume & surface` en `sphere/cylinder` salvo exigencia física explícita.
- Planificar recursos considerando $t \propto \text{items}^{2.6-2.8}$; duplicar `items` implica $\sim 6-7\times$ el tiempo.
- Para tamaños superiores a los probados, usar *stopping* adaptativo, *warm-starts/cortes* o descomposición para cumplir SLA.
- Mantener muestreo de `softness` amplio y, si se requiere extrapolación temporal, añadir al menos un escalón superior de `items`.

4.13 ANÁLISIS COMPARATIVO DE HERRAMIENTAS DE OPTIMIZACIÓN

NOTA SOBRE LA COMPARATIVA DE SOLVERS. Para mantener la continuidad narrativa del capítulo, la *Comparación de Solvers* detallada (algorítmica, tablas y flujo híbrido Knitro→BARON) se reubicó en el *Apéndice* (véase section III). En el cuerpo

del capítulo se conserva únicamente el resumen operativo y las conclusiones directamente vinculadas con los experimentos reportados.

4.14 CONFIGURACIÓN DE SOLVERS Y PLATAFORMA DE EJECUCIÓN

Siguiendo la formulación expuesta en la sección 4.18 de Metodología, se emplearon:

- **Knitro**, con parámetros ajustados en los archivos `knitro-*.run`, para obtener soluciones iniciales robustas.
- **BARON**, invocado a partir de la solución de Knitro, para garantizar cotas globales en problemas no convexos.

En el Apéndice V se listan las opciones de tolerancia, límite de tiempo y gap objetivo utilizadas.

4.15 MÉTRICAS DE EVALUACIÓN

Se midieron las siguientes variables de desempeño, coherentes con lo establecido en la Metodología (ver sección 3.12.3):

- *Packing ratio*, definido como el volumen total de tetraedros dividido por el volumen del contenedor.
- Volumen no ocupado.
- Error de solapamiento superficial.
- Tiempo de cómputo total e “overhead” de AMPL.
- Número de iteraciones y gap final.

4.16 ANÁLISIS EXPLORATORIO Y ESTADÍSTICO

Para estructurar el análisis se siguió el esquema propuesto en la Metodología (Capítulo 3, sección 3.5), adaptándolo a los datos reales:

1. **Estadísticas descriptivas:** cálculo de medias, medianas, desviaciones y rangos para variables clave.
2. **Correlaciones:** relación entre “softness” y “packing ratio”; ley de potencia en tiempo vs. número de tetraedros.
3. **Comparaciones de grupos:** ANOVA/Kruskal–Wallis entre tipos de contenedor y reglas de conservación.
4. **Modelado multivariante:** regresión lineal y logística para cuantificar efectos conjuntos.
5. **Diagnósticos:** pruebas de normalidad (Shapiro–Wilk) y homogeneidad de varianzas (Levene).

4.17 RESULTADOS VIUALES POR CONTENEDOR

Se presentan a continuación algunas de las visualizaciones por tipo de contenedor, agrupados en tres subsecciones que reflejan cada regla de conservación.

Esfera

Volumen

Ver imágenes 4.15 de la página 111, y anexo XVIII de la página 226.

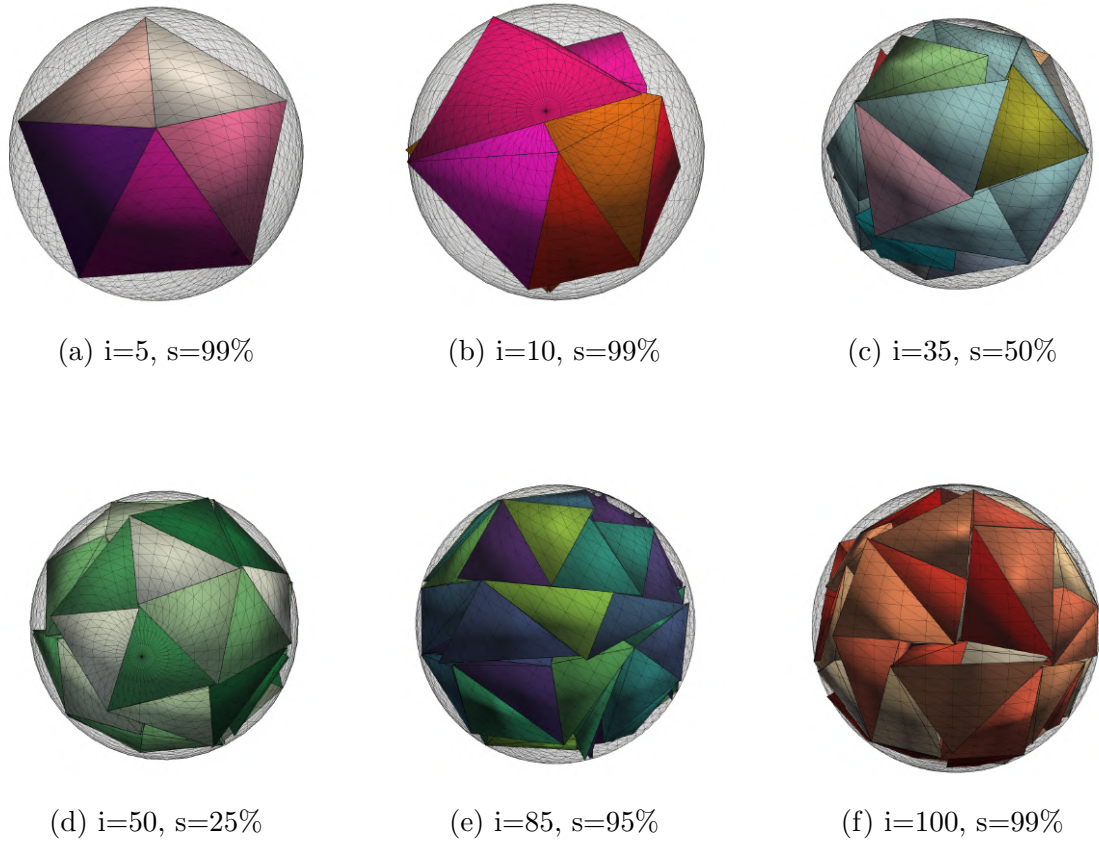
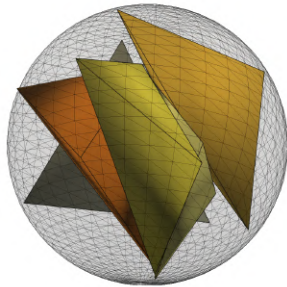


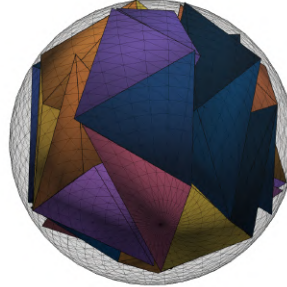
FIGURE 4.15: Tetraedros 'suaves' empaquetados en contenedor esférico con conservación de volúmen.

Superficie

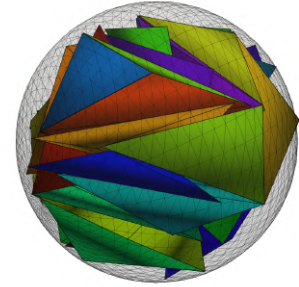
Ver imágenes 4.16 de la página 112 y anexo XIX de la página 230.



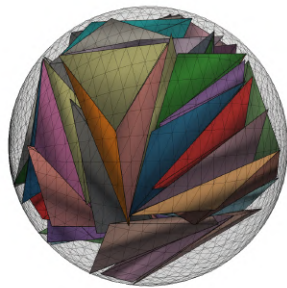
(a) $i=5$, $s=50\%$



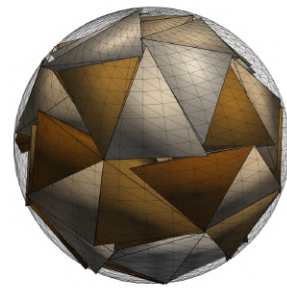
(b) $i=30$, $s=40\%$



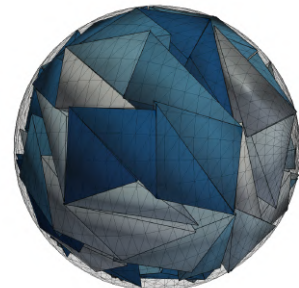
(c) $i=30$, $s=65\%$



(d) $i=50$, $s=65\%$



(e) $i=70$, $s=25\%$



(f) $i=100$, $s=45\%$

FIGURE 4.16: Tetraedros 'suaves' empaquetados en contenedor esférico con conservación del área de la superficie.

Mixto

Ver imágenes 4.17 de la página 113 y anexo XX de la página 235.

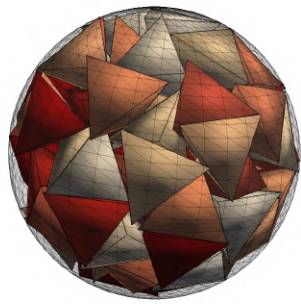
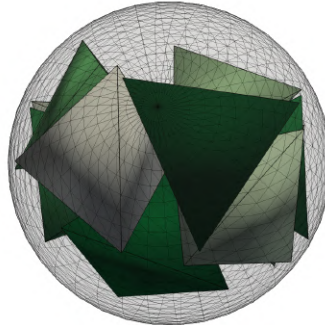
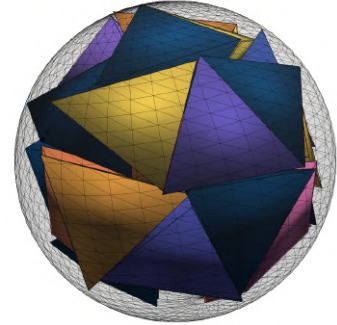
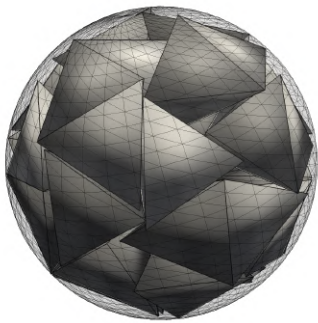
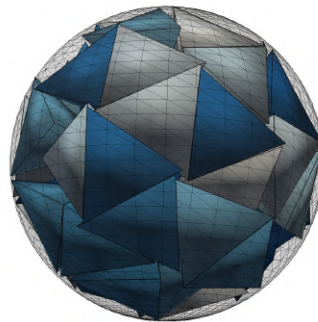
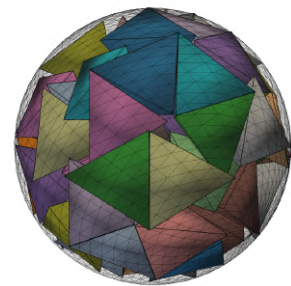
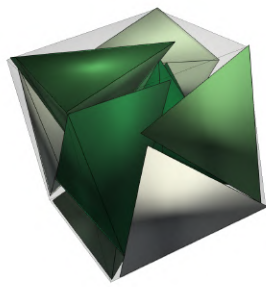
(a) $i=100$, $s=10\%$ (b) $i=10$, $s=100\%$ (c) $i=30$, $s=100\%$ (d) $i=50$, $s=100\%$ (e) $i=70$, $s=65\%$ (f) $i=70$, $s=90\%$

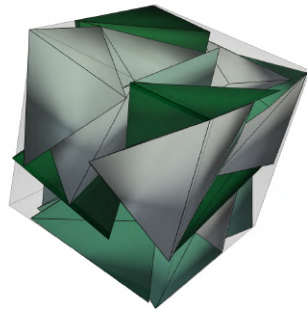
FIGURE 4.17: Tetraedros 'suaves' empaquetados en contenedor esférico con conservación de volumen y área de superficie.

Cubo**Volumen**

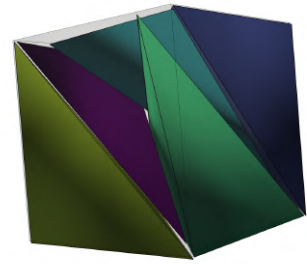
Ver imágenes 4.18 de la página 114 y anexo XV de la página 202.



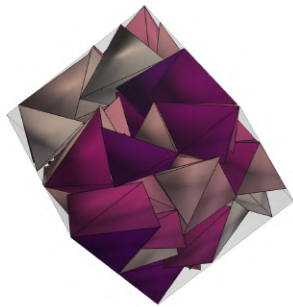
(a) $i=10$, $s=30\%$



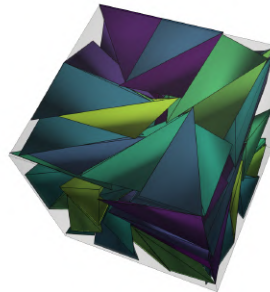
(b) $i=30$, $s=60\%$



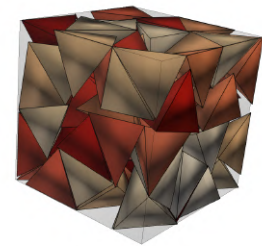
(c) $i=5$, $s=70\%$



(d) $i=75$, $s=35\%$



(e) $i=75$, $s=60\%$



(f) $i=100$, $s=20\%$

FIGURE 4.18: Tetraedros 'suaves' empaquetados en contenedor cúbico con conservación del volumen.

Superficie

Ver imágenes 4.19 de la página 115 y anexo XVI de la página 218.

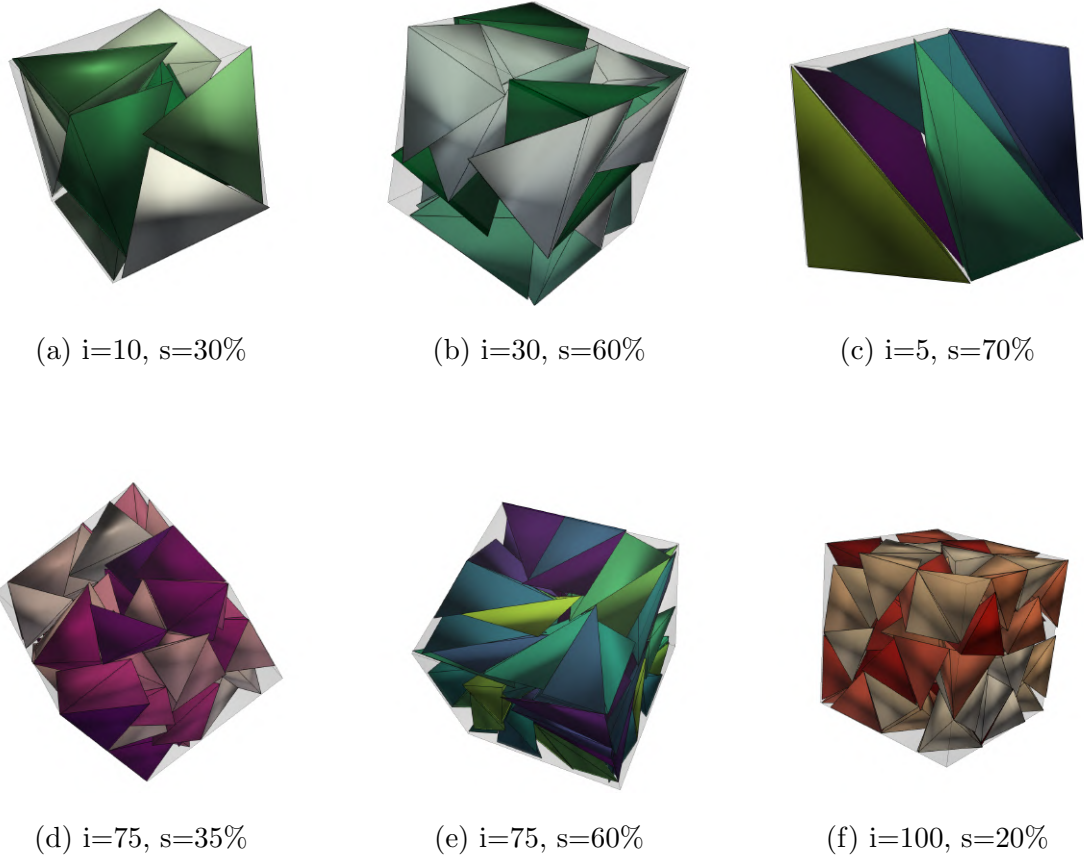
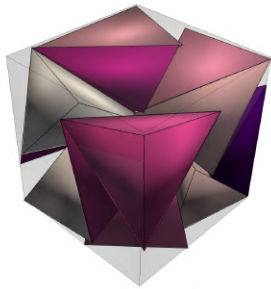


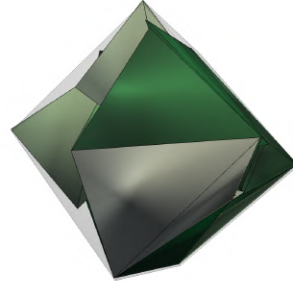
FIGURE 4.19: Tetraedros 'suaves' empaquetados en contenedor cúbico con conservación del área de la superficie.

Mixto

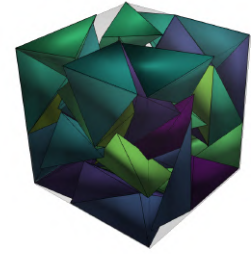
Ver imágenes 4.20 de la página 116 y anexo XVII de la página 222.



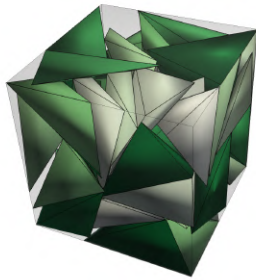
(a) $i=15$, $s=30\%$



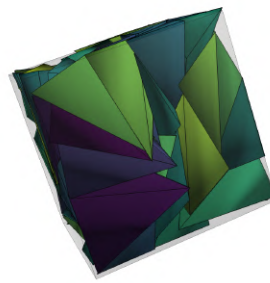
(b) $i=15$, $s=55\%$



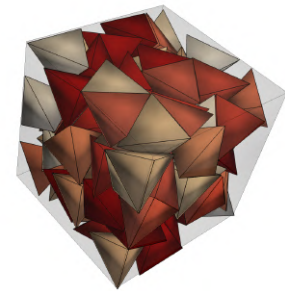
(c) $i=45$, $s=55\%$



(d) $i=50$, $s=55\%$



(e) $i=75$, $s=60\%$



(f) $i=100$, $s=25\%$

FIGURE 4.20: Tetraedros 'suaves' empaquetados en contenedor cúbico con conservación del área de la superficie y del volumen.

Cilindro**Volumen**

Ver imágenes 4.21 de la página 117 y anexo XXI de la página 240.

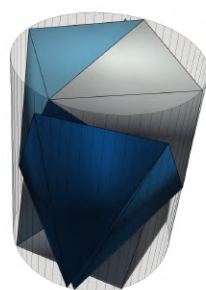
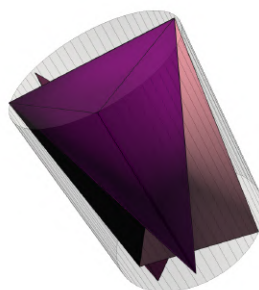
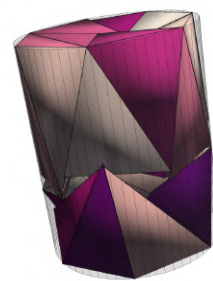
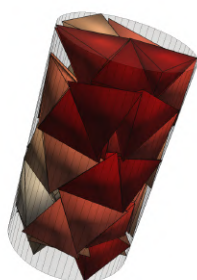
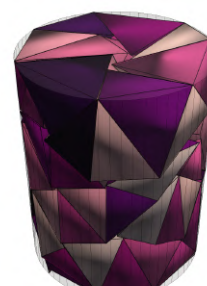
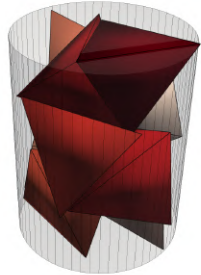
(a) $i=10$, $s=99\%$ (b) $i=5$, $s=99\%$ (c) $i=30$, $s=99\%$ (d) $i=50$, $s=10\%$ (e) $i=50$, $s=99\%$ (f) $i=100$, $s=99\%$

FIGURE 4.21: Tetraedros 'suaves' empaquetados en contenedor cilíndrico con conservación del volumen.

Superficie

Ver imágenes 4.22 de la página 118 y anexo XXII de la página 245.



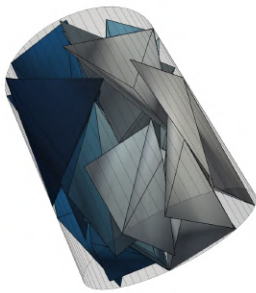
(a) $i=10$, $s=5\%$



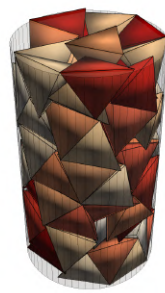
(b) $i=10$, $s=65\%$



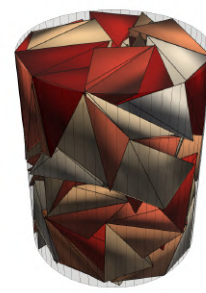
(c) $i=30$, $s=45\%$



(d) $i=30$, $s=60\%$



(e) $i=10$, $s=10\%$



(f) $i=100$, $s=55\%$

FIGURE 4.22: Tetraedros 'suaves' empaquetados en contenedor cilíndrico con conservación del área de la superficie.

Mixto

Ver imágenes 4.23 de la página 119 y anexo XXIII de la página 247.

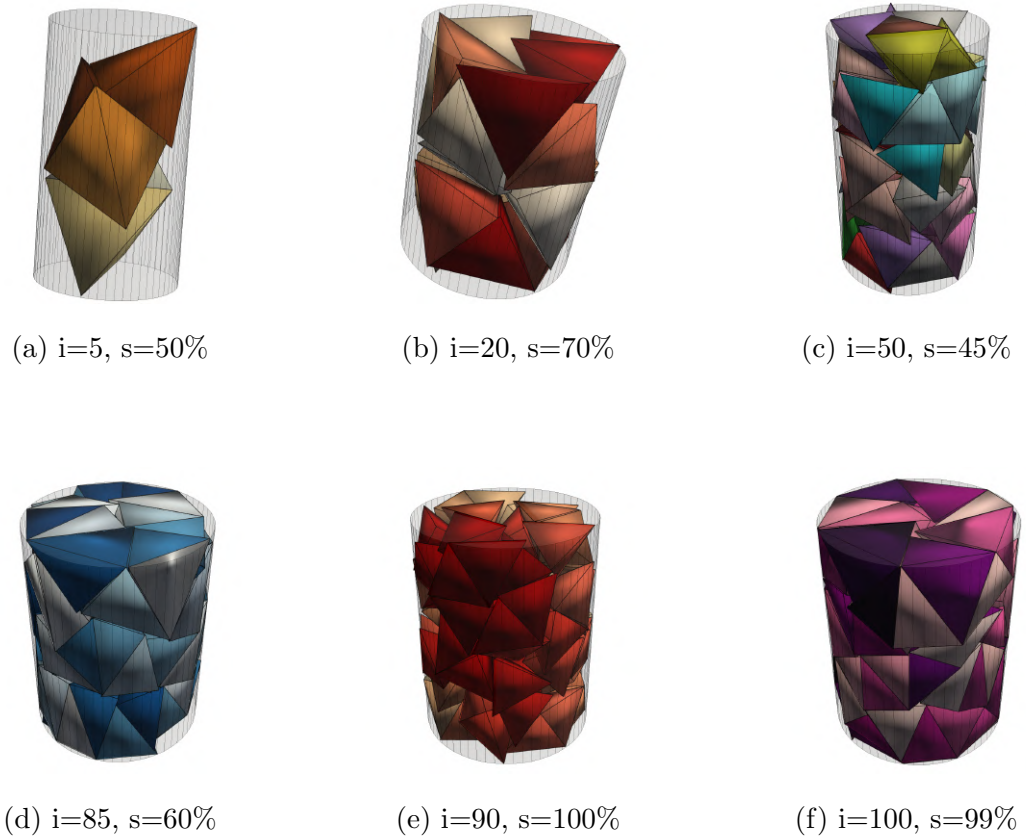


FIGURE 4.23: Tetraedros 'suaves' empaquetados en contenedor cilíndrico con conservación del área de la superficie y del volumen.

4.18 COMPARACIÓN DE SOLVERS

Evidencia empírica: local (Knitro), global (BARON) e híbrido (Knitro→BARON)

En el régimen de tamaños pequeños y medianos, **Knitro** mostró consistentemente un *time-to-first-feasible* y un *time-to-incumbent decente* (orden de minutos), con calidad de solución elevada para los objetivos del estudio. Este patrón fue especialmente notorio cuando se dispuso de derivadas y escalamiento adecuado, y se mantuvo estable al aumentar gradualmente el tamaño de las instancias. En términos prácticos, el perfil de Knitro permite decisiones operativas en ventanas de tiempo acotadas sin sacrificar calidad en la mayoría de las combinaciones contenedor×regla evaluadas.

Por contraste, para **instancias con más de 50 elementos**, **BARON** —ejecutado en *NEOS*— consumió un presupuesto de **8 horas** por corrida y, *en raras ocasiones*, encontró una solución de calidad comparable o superior a las incumbentes de Knitro dentro de ese límite. Este comportamiento es coherente con la naturaleza global determinista: cuando los dominios son amplios o las relajaciones resultan flojas, el árbol de búsqueda crece y el cierre del *gap* puede requerir tiempos sustancialmente extensos. Operativamente, esto tensiona los *SLA* cuando se necesita respuesta frecuente para instancias de gran tamaño.

La **estrategia híbrida** resolvió en gran medida esta tensión: generar primero una incumbente con Knitro y *ingerirla* como punto de partida en BARON. Con este flujo, **BARON** aprovechó la incumbente para acotar la cota superior y guiar la exploración; en el agregado de instancias grandes (*¿50 items*), la corrida híbrida **mejoró al menos un 5%** la incumbente de Knitro en **73%** de los casos. Aun cuando no se cerró el *gap* en el presupuesto disponible, el valor incumbente final y las cotas reportadas por BARON aportaron trazabilidad y confianza adicional sobre la proximidad al óptimo global.

En términos de *robustez*, Knitro se mostró predecible en tiempos y calidad

mientras el modelo permaneció bien escalado; BARON, por su parte, fue sensible a la calidad de la incumbente y al acotamiento de variables. La *hibridación* reduce la varianza de desempeño de BARON en instancias grandes, al tiempo que preserva la velocidad de respuesta inicial de Knitro. Para cargas periódicas, esto habilita un *pipeline* operativo (Knitro) con auditoría o mejora global selectiva (BARON) en ventanas fuera de línea.

Finalmente, el costo-beneficio de la certificación global depende del *gap* requerido por la aplicación. Cuando el valor de contar con una cota rígida supera el costo computacional, BARON merece presupuesto adicional; en caso contrario, basta con la incumbente de Knitro o con una pasada corta de BARON que reporte *gap* y cota aunque no cierre. En todos los casos, la disponibilidad de una incumbente fuerte simplifica la toma de decisión.

TABLE 4.9: Comparativa sintetizada para instancias grandes (> 50 items).

Enfoque	Tiempo de ejecución	Calidad de solución	Observaciones clave
Knitro (local)	Minutos para > 50 items	Buena; incumbente de referencia	Estable y predecible; sensible a derivadas y escalamiento; ideal para <i>SLA</i> operativos.
BARON (global, NEOS)	8 h por corrida (presupuesto)	<i>Rara vez</i> supera a Knitro en ese tiempo	Explora árbol global; necesita bounds estrictos; útil para certificar, pero costoso en tiempo en grandes instancias.
Híbrido Knitro→BARON	Minutos (Knitro) + BARON (hasta presupuesto)	Mejora $\geq 5\%$ en 73% de los casos	Ingesta de incumbente acota cota superior; acelera descartar regiones; aporta trazabilidad (<i>cotas/gap</i>) sin sacrificar velocidad inicial.

RECOMENDACIÓN PRÁCTICA. Para instancias > 50 items con ventanas de decisión limitadas, resolver con **Knitro** para obtener una incumbente rápida y, según criticidad, ejecutar **BARON** con esa incumbente bajo presupuesto de tiempo y tolerancia de *gap* acordes al *SLA*. Este flujo logra un balance entre *velocidad*, *calidad* y *certeza*, con mejoras observadas (5% en el 73% de los casos) respecto a usar Knitro o BARON en forma aislada.

Referentes bibliograficos que refuerzan los hallazgos de la suposición empírica

Con base en la literatura técnica y en los patrones empíricos observados en este capítulo, comparamos **Knitro** y **BARON** en tres ejes: *tiempo de resolución*, *calidad de solución* y *robustez* ante diferentes tamaños de instancia y no convexidades. De manera muy sintética, Knitro es un solver *local* para optimización no lineal suave (NLP/MINLP continuo) que integra métodos de *interior-point*, *active-set* y *SQP*; su objetivo es encontrar rápidamente un óptimo local de alta calidad en problemas grandes y suaves. BARON, por su parte, es un solver *global determinista* para NLP y MINLP no convexos que combina branch-and-reduce y relajaciones convexas; su objetivo es certificar óptimos *globales* (dentro de tolerancias) siempre que las variables y expresiones estén *acotadas* y haya tiempo suficiente para explorar el árbol de búsqueda.

En **tiempo de resolución**, Knitro suele dominar para instancias *suaves* de mediana y gran escala al explotar métodos de barrera y direcciones de Newton (o cuasi-Newton), suportados por derivadas; además, expone algoritmos especializados y *active-set* particularmente efectivo cuando hay buen *warm-start* (p. ej., secuencias de problemas o soluciones iniciales cercanas). La opción `alg=5` permite la estrategia *multi-algorithm* y el *multistart* (`ms_enable`) habilita múltiples reinicios desde puntos iniciales distintos para escapar de óptimos locales, con posibilidad de ejecución paralela. En escenarios con presupuesto de tiempo acotado y necesidad de una respuesta operativa, la combinación de *warm-start* + *interior-point* de Knitro entrega

incumbentes útiles con rapidez.

En **calidad de solución**, BARON aporta lo que un solver local no puede garantizar: *pruebas de optimalidad global* o, en su defecto, *cotas* (gap) explícitas. BARON integra NLP/LP/QP internos (y puede apoyarse en externos) para resolver subproblemas y construir relajaciones/planos de corte; su exploración branch-and-reduce usa tanto información primal (incumbentes factibles) como dual (relajaciones) para cerrar gap. En no convexos con múltiples atractores, un incumbente local muy bueno acorta la búsqueda: mejora la cota superior y acelera el descarte de regiones. La contracara es el costo: si el espacio es grande y las relajaciones son flojas, el árbol crece y los tiempos se disparan.

En **robustez**, Knitro es muy *predecible* si el modelo es suave, con gradientes -Hessianos bien escalados y bounds razonables; su desempeño sufre cuando hay fuerte no convexidad combinada con topologías “planas” (mesetas) o con restricciones muy ajustadas que generen mala curvatura. BARON, por diseño, *necesita* bounds finitos en todas las variables y se beneficia de cualquier estrechamiento de dominios; en modelos mal acotados o con expresiones singularizantes, puede perder tiempo en nodos con relajaciones débiles. En esta dimensión, el modelado (bounds, escalamiento, reformulaciones) suele pesar tanto como la selección del solver.

ESTRATEGIA HÍBRIDA (RECOMENDADA). Una estrategia práctica es **hibridar**: (i) resolver primero con Knitro para obtener rápidamente una solución factible y de buena calidad (activar `ms_enable` si hay fuerte no convexidad, o usar `active-set` cuando haya buenas conjeturas iniciales), (ii) **inyectar** esa solución como *starting point/incumbente* en BARON (estableciendo niveles iniciales de las variables en el modelador) y (iii) ejecutar BARON con límite de tiempo y criterios de parada por gap para intentar certificar globalidad o mejorar la incumbente. Esta orquestación aprovecha lo mejor de ambos mundos: tiempo-to-first-feasible menor (Knitro) y búsqueda global con prueba o *gap* explícito (BARON). Si BARON no cierra el gap dentro del presupuesto, aún se cuenta con una solución de alta calidad y una cota

inferior/ superior útil para reporte.

DETALLE DE IMPLEMENTACIÓN. En la práctica, el flujo es: (1) corre Knitro con derivadas y bounds ajustados; si el problema es secuencial, usar warm-start entre instancias, y si es altamente no convexo, activar `ms_enable` y paralelizar. (2) Exporta la solución (niveles de variables) y establécela como `.l` (actividad inicial) en el modelador para la corrida con BARON; verifica que todas las variables y expresiones no lineales estén *acotadas*. (3) Configura BARON con un *reslim* y tolerancias de gap (rel/abs) acordes al SLA; si está disponible, usa un NLP robusto para sus subproblemas. (4) Reporta: valor incumbente, mejor cota, y gap al cierre del tiempo (o prueba de optimalidad), dejando trazabilidad de opciones y tiempos. Este flujo es especialmente útil cuando necesitas decisiones operativas rápidas pero aprecias la *certidumbre* adicional que solo un global determinista puede proporcionar.

Cuándo usar cada uno. Si el objetivo es **tiempo de respuesta** y mejoras marginales de calidad no justifican órdenes de magnitud en cómputo, prioriza Knitro (local, multistart cuando haga falta). Si el objetivo es **calidad con garantías** o comparativos robustos de políticas (certificación de globalidad o gaps pequeños), reserva presupuesto para BARON —preferentemente alimentado con una incumbente fuerte. Cuando el problema cambia por periodos con pocos cambios estructurales, un *pipeline* diario de Knitro (operación) + BARON (*auditoría* o *spot checks*) balancea costo y certidumbre.

4.19 RESUMEN DE HALLAZGOS CLAVE

RENDIMIENTO POR CONTENEDOR Y REGLA. De las comparaciones descriptivas (medias con IC y boxplots), **cube** lidera en eficiencia de empaquetado: *surface* y *volume* muestran medianas altas y dispersión contenida; **sphere–volume** conforma el segundo pelotón. En contraste, **volume & surface** penaliza de forma sistemática en **sphere** y **cylinder**. La *interacción* contenedor×regla observada empíricamente

se confirmó en inferencia: efectos principales e interacción resultaron significativos, y los contrastes no paramétricos ordenan las combinaciones de modo coherente con las figuras.

TAMAÑO DEL PROBLEMA E IMPACTO DE LA DEFORMABILIDAD. El efecto de es *contenedor-dependiente*: en **cube** la curva suavizada permanece casi plana (el tamaño apenas penaliza), mientras que **cylinder** y **sphere** crecen hasta una meseta (rendimientos decrecientes). En , el gradiente medio es positivo: más deformabilidad facilita *packing*, con retornos decrecientes a valores altos y, en **sphere**, un valle intermedio atribuible a mezcla de reglas (particularmente donde pesa *volume* \mathcal{E} *surface*). Para predicción, recomendamos funciones *saturantes* o *piecewise* en y estratificación por regla en los análisis con .

COSTE COMPUTACIONAL Y ESCALAMIENTO. El tiempo escala aproximadamente como $t \propto \beta$ con $\beta \approx 2.6\text{--}2.8$ según contenedor, lo que implica multiplicadores $\sim 6\text{--}7\times$ al duplicar . Esta regularidad habilita proyecciones operativas de coste-tiempo y justifica estrategias de ingeniería (stopping adaptativo, *warm-starts*, cortes o descomposición) al planear instancias fuera del rango ensayado. Las pequeñas diferencias en el coeficiente nivelan la preferencia por contenedor cuando el presupuesto de cómputo es el cuello de botella.

ROBUSTEZ INFERENCIAL. Ante desviaciones de normalidad/homocedasticidad en residuales, el ANOVA se reporta como marco explicativo, mientras que Kruskal–Wallis y los *post hoc* (Mann–Whitney con Holm) soportan las conclusiones categóricas (quién domina a quién). Para aumentar interpretabilidad, sugerimos incorporar tamaños de efecto (p. ej., η_{parcial}^2 en ANOVA y δ de Cliff en *post hoc*) y *bootstrap* de IC en medianas por grupo.

RECOMENDACIONES PRÁCTICAS (REGLA \times SOLVER). Si el objetivo es maximizar con variabilidad acotada, priorizar **cube–surface/volume** y **sphere–volume**.

Evitar **volume & surface** en `sphere/cylinder`, salvo que sea obligatorio por restricciones físicas. En operación diaria o con SLA estricto, correr **Knitro** para una incumbente rápida y estable; en auditorías/benchmark o cuando se requiera *certidumbre*, correr **BARON** con la incumbente de Knitro como punto de partida, límite de tiempo y criterio por *gap*. Esta pauta preserva velocidad sin renunciar a certificados o a mejoras cuando el presupuesto lo permite.

LÍNEAS DE TRABAJO FUTURO. (1) Extender la batería con más escalones de para anclar mejor la ley de potencias; (2) evaluar *tuning* automático (p.ej., Tuner de Knitro) y reforzadores (cortes, reformulaciones convexificantes) para BARON; (3) reportar tamaños de efecto e IC por *bootstrap* en tablas finales; (4) explorar reglas mixtas adaptativas en función de ϵ y contenedor; (5) comparar con un tercer global (p.ej., ANTIGONE) y un segundo local (p.ej., IPOPT) para aislar efectos de solver frente a efectos de modelado; (6) consolidar un *pipeline* de operación (Knitro) + *auditoría* (BARON) con artefactos reproducibles (semillas, manifiestos de entorno).

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

“So Einstein was wrong when he said, “God does not play dice.” Consideration of black holes suggests, not only that God does play dice, but that he sometimes confuses us by throwing them where they can’t be seen”

STEPHEN HAWKING.

5.1 PROPÓSITO, PREGUNTAS Y ALCANCE

Este trabajo abordó el **empaquetamiento de tetraedros deformables** (*soft tetrahedra*) en contenedores convexos (**esfera, cilindro y cubo**) con **conservación de volumen, de superficie o mixta**, formulado como un problema no lineal (NLP/-MINLP) con variables geométricas explícitas (posiciones, orientaciones y parámetros de deformación), restricciones de no superposición y criterios de calidad global. La resolución se basó en una **estrategia híbrida** de dos fases: (i) **inicialización** con *Knitro* para alcanzar factibilidad de buena calidad y (ii) **mejora global** con *BARON* usando *warm-start*. El protocolo experimental varió tamaño de instancia, tipo de contenedor y esquema de conservación, registrando métricas de *calidad* (valor objetivo, densidad, *gap*) y *coste* (tiempo, iteraciones).

PREGUNTAS GUÍAS. (a) ¿Es viable un modelado exacto con deformación controlada y conservación física en empaquetamiento de tetraedros? (b) ¿Cómo impactan el contenedor y el esquema de conservación en calidad y coste? (c) ¿Aporta Knitro \rightarrow BARON ventajas cuantificables frente a ejecuciones globales en frío? (d) ¿Cómo explicar y mitigar la **degeneración geométrica** (aplanamiento) cuando *softness* \rightarrow 1?

5.2 APORTES Y SÍNTESIS DE HALLAZGOS

1. **Formulaciones exactas con conservación controlada.** Se diseñaron modelos que integran restricciones de no interpenetración y conservación (volumen/superficie/mixta), produciendo soluciones factibles y densas en los tres contenedores.
2. **Impacto del esquema de conservación.** La *conservación de volumen* favorece densidades superiores frente a *superficie*, aunque incrementa rigidez numérica; el *esquema mixto* logra un compromiso estable (calidad/tiempo) en tamaños medios y grandes.
3. **Rol del contenedor.** El *cubo* tiende a patrones de contacto planos y alineados; el *cilindro* introduce anisotropía útil para apilamiento; la *esfera* penaliza configuraciones extensamente coplanares. El cilindro mostró, en promedio, un balance favorable entre densidad y tiempo de cómputo.
4. **Estrategia Knitro \rightarrow BARON.** Frente a *BARON* en frío (que en instancias $n > 50$ puede consumir hasta 8 h en NEOS con mejoras limitadas), **Knitro** entrega rápidamente una base factible de buena calidad y el *warm-start* en **BARON** mejora en torno a 5% la solución inicial en **aprox. 73%** de las instancias consideradas, reduciendo varianza y *timeouts*.
5. **Degeneración para *softness* \rightarrow 1.** Bajo conservación de *superficie*, aparecen *valles casi planos* en el objetivo y *mal condicionamiento local* que permiten

aplanamiento del tetraedro sin violar restricciones. Penalizaciones suaves de *anisotropía* (razón de aspecto), cotas inferiores a autovalores/determinante de mapas de deformación o una pequeña componente de *volumen* en el objetivo mitigaron el colapso sin penalizar gravemente la densidad global.

5.3 RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

P1. *¿Es viable el modelado exacto con deformación y conservación física?*

Sí. Las formulaciones propuestas generan configuraciones factibles y densas con control de forma, en diversos tamaños y contenedores.

P2. *¿Qué esquema de conservación ofrece mejor compromiso?*

Volumen maximiza densidad pero endurece la optimización; *superficie* reduce rigidez pero tolera aplanamientos; el *mixto* ofrece el compromiso más estable en escalas prácticas.

P3. *¿Aporta la estrategia Knitro \rightarrow BARON?*

Sí. Acelera la factibilidad de buena calidad y, con *warm-start*, logra mejoras sistemáticas ($\sim 5\%$ en 73% de instancias), con menor incidencia de *timeouts* en $n > 50$.

P4. *¿Cómo explicar y mitigar el aplanamiento para softness $\rightarrow 1$?*

Con regularización geométrica. Penalizar anisotropías, imponer cotas a invariantes locales y añadir un término volumétrico (5–10%) estabiliza el relieve 3D.

5.4 DISCUSIÓN INTEGRADA: TEORÍA, CÓMPUTO Y PRÁCTICA

Implicaciones teóricas

El control de forma basado sólo en *superficie* resulta insuficiente frente a deformaciones que preservan perímetro sin preservar *volumen local*. El resultado sugiere utilizar **invariantes geométricos** (autovalores, determinante, razones de aspecto) como *regularizadores* explícitos para mantener integridad 3D.

Implicaciones computacionales

En problemas no convexos MINLP/NLP, la **inicialización informada** es decisiva: dedicar presupuesto a una fase NLP (Knitro) reduce la exploración ciega del espacio y guía al global (BARON) hacia vecindades de alta calidad con menor varianza inter-ejecución.

Guía práctica de parametrización

- **Límites de tiempo.** Escalar TL_{NLP} en función de n (p. ej., 5–15 min para $n \leq 50$, 15–45 min para $n > 50$) y fijar $TL_G \in [4, 8] \times TL_{NLP}$, con *early-stopping* por *gap*.
- **Tolerancias.** ε_{feas} estricta en colisiones; ε_{opt} moderada para diversidad de soluciones.
- **Regularización.** Para $softness \geq 0.9$, activar penalización de *anisotropía* y cotas a autovalores/determinante; incluir 5–10% de volumen en el objetivo si persiste planicidad.

- **Semillas y reinicios.** Ejecutar 3–5 semillas y seleccionar la mejor solución de Knitro para *warm-start*.

5.5 COMPARATIVA DE SOLVERS Y RECOMENDACIONES

TABLE 5.1: Resumen cualitativo–cuantitativo por estrategia.

Estrategia	Calidad media	Cobertura (mejora vs. inicial)
Knitro (NLP)	Alta factibilidad	—
BARON (MINLP) en frío	Variable	Baja para $n > 50$
Knitro→BARON	+5% vs. Knitro	73% de instancias

Notas: Knitro generó soluciones iniciales “decente–buenas” pero sensibles al parámetro de *softness*. BARON en frío, ejecutado en NEOS, alcanzó hasta 8 horas de cómputo con mejoras limitadas para instancias grandes. La estrategia combinada Knitro→BARON redujo los *timeouts*, disminuyó la varianza y logró mejoras de alrededor de un 5% en el 73% de las instancias.

Se recomienda adoptar Knitro → BARON como **configuración por defecto** y reservar ejecuciones en frío para ablaciones o búsqueda de soluciones muy divergentes.

5.6 ROBUSTEZ GEOMÉTRICA Y CONTROL DEL APLANAMIENTO

El **aplanamiento** cuando $softness \rightarrow 1$ y se usa conservación de superficie obedece a (i) *valores propios* cercanos a cero en mapas de deformación y (ii) regiones con gradientes débiles (*valles planos*). Funcionaron tres palancas:

1. **Penalización de anisotropía** (razón de aspecto) para encarecer deformaciones alargadas.
2. **Cotas a invariantes locales:** mínimos a autovalores/determinante para sostener volumen local.
3. **Componente volumétrica** (5–10%) en el objetivo de casos con tendencia al colapso.

Con estas medidas se preservó el relieve 3D sin pérdidas relevantes de densidad.

5.7 LIMITACIONES DEL MODELO Y DEL ECOSISTEMA DE MODELADO

Limitaciones del modelo

- **Escalabilidad:** el número de variables/restricciones crece al menos cuadráticamente con n ; los tiempos globales escalan desfavorablemente sin inicialización.
- **Condicionamiento:** combinar conservación fuerte con contacto ajustado genera rigidez; requiere **re-escalado** de variables y regularización explícita.
- **Colisiones precisas:** la evaluación exacta de contacto en densidades altas es costosa; conviene *candidatos adaptativos* y filtros geométricos previos.

Limitaciones del lenguaje AMPL y herramientas

- **No linealidad compleja:** la expresividad es suficiente, pero el manejo de MINLP/NLP con alta no convexidad exige parametrización cuidadosa y reformulaciones.

- **Bibliotecas geométricas:** la ausencia de utilidades geométricas nativas obliga a implementar o preprocesar cálculos auxiliares.
- **Depuración/visualización:** el trazado de estados geométricos intermedios requiere *tooling* externo; integrar *logging* y *snapshots* es clave para reproducibilidad.

5.8 MEJORAS POSIBLES (HOJA DE RUTA INMEDIATA)

1. **Pre-acotación y re-escalado:** normalizar magnitudes geométricas y pesos del objetivo; aplicar *box constraints* informadas para reducir el espacio factible.
2. **Selección adaptativa de contactos:** generar listas candidatas por proximidad y actualizar dinámicamente (*lazy constraints* o equivalentes).
3. **Ablaciones sistemáticas:** sin *warm-start*; variando TL, tolerancias e intensidad de regularización; reportar medianas/IQR y tamaños de efecto.
4. **Políticas de reinicio** en Knitro: reinicios múltiples con perturbaciones pequeñas y selección de la mejor solución para *warm-start*.

5.9 REPRODUCIBILIDAD Y TRANSPARENCIA

Se recomienda publicar **scripts de ejecución**, **archivos de configuración** (semillas, tolerancias, límites), **versiones de solvers** y **artefactos** (instancias y salidas con metadatos: fecha, *commit*, hash), además de **tablas resumen** por contenedor y esquema de conservación (medianas, IQR, tamaños de efecto), y un registro de **casos de degeneración** con parámetros de robustificación activados, ver anexo I de la página 162.

5.10 IMPLICACIONES PRÁCTICAS

- **Flujo recomendado:** Knitro para factibilidad rápida de buena calidad \rightarrow *warm-start* a BARON para mejora global controlada.
- **Elección de contenedor:** cilindro ofrece compromisos favorables; esfera estabiliza planicidad; cubo favorece densidades altas con alineamiento.
- **Control de forma:** activar regularización geométrica cuando *softness* ≥ 0.9 .
- **Gestión del presupuesto:** distribuir tiempo entre *NLP* (calidad inicial) y *MINLP* (mejora global) con criterios de parada por *gap*.

5.11 LÍNEAS DE TRABAJO FUTURO

1. **Modelos de forma más expresivos:** integrar penalizaciones basadas en invariantes locales (autovalores, determinante) y esquemas tipo ARAP simplificados.
2. **Descomposición jerárquica:** estrategias *coarse-to-fine*, selección adaptativa de colisiones y partición del contenedor para grandes n .
3. **Aprendizaje para inicialización:** *learning-to-initialize* (políticas que predicen *layouts* iniciales de alto valor) previo a la optimización global.
4. **Surrogates y regiones de confianza:** aproximaciones diferenciables de penalizaciones de colisión con verificación exacta *a posteriori*.
5. **Paralelismo/GPU:** vectorización de evaluación geométrica y gradientes; *batching* de restricciones.
6. **Extensión a otras familias:** prismas, hexaedros y mallas complejas; evaluación de escalabilidad y robustez del enfoque híbrido.

7. **Benchmarks públicos:** generadores de instancias y suites de evaluación estandarizadas.

5.12 TRABAJOS FUTUROS - ESTRATEGIAS DE GENERALIZACIÓN LA REPRESENTACIÓN DE OBJETOS TRIDIMENSIONALES MAS COMPLEJOS.

El presente trabajo ha establecido un marco sólido para el análisis y resolución del problema de empaquetamiento de tetraedros en contenedores regulares, bajo diferentes reglas de conservación y niveles de deformabilidad. Sin embargo, aún existen líneas de investigación abiertas que pueden enriquecer y ampliar considerablemente los alcances de esta propuesta.

Una de las direcciones más prometedoras consiste en generalizar la representación de objetos tridimensionales más allá de tetraedros y pirámides simples. En particular, es posible descomponer un poliedro arbitrario en un conjunto de pirámides o tetraedros que comparten un vértice común ubicado en el interior del poliedro, mientras que los demás vértices corresponden a los de sus facetas externas. Este procedimiento de descomposición constituye un recurso geométrico poderoso, pues permite extender la metodología presentada hacia una clase mucho más amplia de sólidos.

Mediante este enfoque, no solamente podrían abordarse poliedros convexos de naturaleza diversa, sino también extender el análisis a formas irregulares e incluso no convexas. Ello abriría la posibilidad de aplicar las técnicas de empaquetamiento aquí desarrolladas a casos industriales y científicos donde los objetos no se limitan a geometrías regulares, como ocurre en contextos de manufactura avanzada, ciencias de materiales o diseño estructural.

Adicionalmente, la representación basada en pirámides con vértice común favorece la integración con métodos numéricos y técnicas de optimización no lineal ya disponibles, reduciendo la complejidad de modelado y permitiendo mantener consistencia en la formulación de restricciones de no solapamiento. En futuras investigaciones, este esquema podría combinarse con enfoques metaheurísticos o híbridos para enfrentar la mayor complejidad computacional asociada a instancias de gran escala o con geometrías no convexas.

En suma, la extensión hacia poliedros generales e irregulares, sustentada en la descomposición en pirámides o tetraedros con vértice común, representa una línea natural de continuidad del presente trabajo, que podría consolidar la aplicabilidad del modelo propuesto en dominios mucho más amplios y realistas.

5.13 CONCLUSIONES SINTETIZADAS

- **Estrategia híbrida de solvers.** La combinación “Knitro \rightarrow BARON” mostró ventajas claras: Knitro provee puntos iniciales factibles y competitivos, y BARON mejora el óptimo global bajo presupuestos de tiempo acotados, superando a ejecuciones aisladas de BARON en instancias medianas–grandes.
- **Efecto de la *softness* con conservación de área.** En el régimen *softness* \rightarrow 1, las soluciones tienden al *aplanamiento* y pérdida de forma 3D cuando se impone conservación estricta de área superficial, sugiriendo introducir regularizaciones geométricas (p.ej., cotas de excentricidad o barreras suaves) para preservar la plausibilidad de las formas.
- **Influencia del contenedor.** Esfera, cilindro y cubo inducen paisajes geométrico–combinatorio distintos: la esfera impone restricciones radiales homogéneas; el cilindro combina restricciones radiales y axiales; el cubo favorece alineamientos densos pero eleva el riesgo de contactos tangenciales múltiples, endureciendo las condiciones de no–solapamiento.

- **Condiciones de no-solapamiento consolidadas.** Las formulaciones integran familias clásicas (planos de soporte y separadores, vértice-cara, arista-arista) adaptadas a tetraedros “suaves”. Este acervo facilita extender el enfoque a variantes con conservación de volumen o mixta con cambios controlados en el conjunto de desigualdades.
- **Escalabilidad y costo computacional.** La complejidad crece rápidamente con el número de piezas; los métodos exactos puros son limitados. La evidencia experimental respalda el uso de metaheurísticas/heurísticas como apoyo (inicialización, vecindarios, guías de búsqueda) y el empleo de descomposiciones o relajaciones para instancias grandes.
- **Metodología experimental reproducible.** El flujo de generación de instancias, semillas, límites de tiempo y métricas asegura trazabilidad.
- **Impacto de la elección de restricciones de conservación.** Las variantes con conservación de volumen o mixtas parecen menos propensas a degeneraciones extremas que la conservación de área pura, aunque imponen mayor rigidez numérica; esto define un claro *trade-off* entre densidad de empaquetado y estabilidad geométrica.
- **Importancia de iniciales de calidad.** Puntos de partida con separaciones mínimas y simetrías aprovechadas aceleran la convergencia y evitan estancamientos tempranos; en este rol, Knitro resulta especialmente útil para construir estados de arranque robustos antes de la búsqueda global.
- **Líneas de trabajo futuro.** (i) Refinar regularizaciones geométricas anti-aplanamiento; (ii) explorar metaheurísticas guiadas por modelo para inicialización informada; (iii) descomposición por clústeres o *column generation* para escalar; (iv) relajaciones convexas/convexificadas y cortes específicos de no-solapamiento; (v) validación geométrica automática (colisión y acondicionamiento) integrada al ciclo de optimización.

5.14 CIERRE

Este capítulo consolida que el **empaquetamiento soft** puede abordarse con **modelos exactos** y **estrategias híbridas** que equilibran calidad y coste. La fase *NLP* (**Knitro**) proporciona soluciones iniciales sólidas y el *warm-start* a **BARON** produce mejoras consistentes ($\sim 5\%$ en el 73% de los casos), reduciendo *timeouts* en instancias grandes. La **regularización geométrica** es esencial para evitar aplastamiento cuando $softness \rightarrow 1$. Estas directrices ofrecen una base replicable para escalar tamaño de instancia, incorporar objetivos múltiples y extender a geometrías más complejas, con una agenda clara de investigación y transferencia.

listgroup

BIBLIOGRAFÍA

- [1] ACHARYA, P., S. BHOORE, A. GUPTA, A. KHAN, B. MONDAL y A. WIESE (2024), «Approximation Schemes for Geometric Knapsack for Packing Spheres and Fat Objects», [2404.03981](https://arxiv.org/abs/2404.03981), URL <https://arxiv.org/abs/2404.03981>.
- [2] ALT, H. y N. SCHARF (2016), «Approximating Smallest Containers for Packing Three-dimensional Convex Objects», [1601.04585](https://arxiv.org/abs/1601.04585), URL <https://arxiv.org/abs/1601.04585>.
- [3] ARDANZA-TREVIJANO, S., I. ZURIGUEL y R. C. HIDALGO (2025), «Three-dimensional granular deposits characterized by topological metrics», *Physical Review E*, **111**, URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.111.045413>.
- [4] BANACH, S. y H. HAHN (1932), *Generalization of Separation Theorems in Topological Vector Spaces*, Advanced Mathematics Press.
- [5] BOYD, S. y L. VANDENBERGHE (2004), *Convex Optimization*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, URL https://stanford.edu/~boyd/cvxbook/bv_cvxbook.pdf.
- [6] CHAN, S. y E. PURISIMA (1998), «A new tetrahedral tessellation scheme for isosurface generation», *Computers & Graphics*, **22**(1), págs. 83–90.
- [7] CHEN, E. R. (2008), «A Dense Packing of Regular Tetrahedra», *Discrete amp; Computational Geometry*, **40**(2), pág. 214–240, URL <http://dx.doi.org/10.1007/s00454-008-9101-y>.

- [8] CHEN, H., Y. WANG, Y. CAI, H. HU, J. LI, S. HUANG, C. DENG, R. LIANG, S. KONG, H. REN, S. SAMARANAYAKE, C. P. GOMES y Z. ZHANG (2025), «HeuriGym: An Agentic Benchmark for LLM-Crafted Heuristics in Combinatorial Optimization», arXiv:2506.07972, URL <https://arxiv.org/abs/2506.07972>.
- [9] CHENG, Z., W. LI, Y. WANG *et al.* (2022), «Assembly of planar chiral superlattices from achiral building blocks», *Nature Communications*, **13**(1), pág. 4207, URL <https://www.nature.com/articles/s41467-022-31868-2>.
- [10] COLT, J., R. PRASAD y D. CHAKRABARTI (2024), «Properties of packings and dispersions of superellipse sector particles», *Physical Review E*, **109**(2), URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.109.024901>.
- [11] CONWAY, J. H. y S. TORQUATO (2006), «Packing, tiling, and covering with tetrahedra», *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **103**(28), págs. 10612–10617, URL <https://www.pnas.org/doi/10.1073/pnas.0601389103>.
- [12] DEMIDOV, E. V., G. Y. GOR y A. F. KHALIZOV (2024), «Discrete element method model of soot aggregates», *Physical Review E*, **110**(5), URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.110.054902>.
- [13] DESCANTES, Y., O. MAISONNEUVE, P. RICHARD y S. DIDIERJEAN (2022), «A new discrete element modelling approach to simulate the mechanical behaviour of true polyhedra dense assemblies», *Powder Technology*, **400**, URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0032591022001899>.
- [14] DOSTERT, M., C. GUZMÁN, F. M. D. O. FILHO y F. VALLENTIN (2017), «New Upper Bounds for the Density of Translative Packings of Three-Dimensional Convex Bodies with Tetrahedral Symmetry», *Discrete & Computational Geometry*, **58**(2), págs. 449–481, URL <https://link.springer.com/article/10.1007/s00454-017-9882-y>.
- [15] DUAN, Y. *et al.* (2024), «GOPT: Generalizable Online 3D Bin Packing via

- Transformer-based Deep Reinforcement Learning», arXiv:2409.05344, URL <https://arxiv.org/abs/2409.05344>.
- [16] DYCKHOFF, H. (1990), «A typology of cutting and packing problems», *European Journal of Operational Research*, **44**(2), págs. 145 – 159, cutting and Packing, URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037722179090350K>.
- [17] FASANO, G. (2014), *Solving Non-Standard Packing Problems by Global Optimization and Heuristics*, Springer, Cham.
- [18] FELDFOGEL, S., K. KARAPIPERIS, J. ANDRADE y D. S. KAMMER (2022), «A discretization-convergent Level-Set-DEM», arXiv:2209.15431, URL <https://arxiv.org/abs/2209.15431>.
- [19] FERNANDEZ, E., F. LOPEZ, J. NAVARRO, I. VEGA y I. LITVINCHEV (2009), «An integrated mathematical-computer approach for RD project selection in large public organisations», *International Journal of Mathematics in Operational Research*, **1**(3), págs. 372–396.
- [20] GAREY, M. R. y D. S. JOHNSON (1979), *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, W. H. Freeman, URL <https://perso.limos.fr/~palafour/PAPERS/PDF/Garey-Johnson79.pdf>.
- [21] GONZÁLEZ-SAN-MARTÍN, J., L. CRUZ-REYES, B. DORRONSORO, H. FRAIRE-HUACUJA, F. BALDERAS-JARAMILLO, M. QUIROZ-CASTELLANOS y N. RANGEL-VALDEZ (2024), «Deep Study on the Application of Machine Learning in Bin Packing Problems», *Computacion y Sistemas*, **28**, págs. 1275–1290.
- [22] GUIDO, R., S. FERRISI, D. LOFARO y D. CONFORTI (2024), «An Overview on the Advancements of Support Vector Machines in Medicine», *Information*, **15**(4), pág. 235, URL <https://www.mdpi.com/2078-2489/15/4/235>.

- [23] GUJJU, Y. *et al.* (2024), «Quantum machine learning on near-term quantum devices: Current state of supervised and unsupervised techniques for real-world applications», *Physical Review Applied*, **21**(6), URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevApplied.21.067001>.
- [24] GUO, B., Y. HE, F. WANG, L. TANG y K. TAKAHASHI (2022), «Two-dimensional irregular packing problems: A review», *Frontiers in Mechanical Engineering*, **8**, pág. 966 691, URL <https://www.frontiersin.org/articles/10.3389/fmech.2022.966691>.
- [25] HADJ SALEM, K., E. SILVA y J. F. OLIVEIRA (2023), «Cutting and packing problems under uncertainty: literature review and classification framework», *International Transactions in Operational Research*, **30**(6), págs. 3329–3360, URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/itor.13318>.
- [26] HALL, B., I. NJOROGE, C. CAMPBELL, B. THOTAKURA, R. RINES, V. OMOLE y M. QADAN (2024), «Sphere Packing on a Quantum Computer for Chromatography Modeling», **2412.00601**, URL <https://arxiv.org/abs/2412.00601>.
- [27] HILBERT, D. (1902), «Mathematical problems», *Bulletin of the American Mathematical Society*, **8**(10), págs. 437–479, URL https://www.aemea.org/math/Hilbert_23_Mathematical_Problems_1900.pdf.
- [28] HOCHBAUM, D. S. (1997), *Approximation Algorithms for NP-hard Problems*, Springer, URL <https://dl.acm.org/doi/abs/10.1145/261342.571216>.
- [29] HUANG, S., K. YANG, S. QI y R. WANG (2024), «When Large Language Model Meets Optimization», *Swarm and Evolutionary Computation*, pág. 101 663, URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2210650224002013>.
- [30] IBARAKI, T., S. IMAHORI y M. YAGIURA (2008), «Hybrid metaheuristics for packing problems», en *Hybrid Metaheuristics: An Emerging Approach to Optimization*, Springer, págs. 185–219, URL https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-540-78295-7_7.

- [31] JIA, Y. (2024), «A survey on convex optimization for guidance and control of vehicular systems», *Annual Reviews in Control*, **57**, URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S1367578824000269?via%3Dihub>.
- [32] JIANG, S., M. XIE y J. LUO (2025), «Large language models for combinatorial optimization of design structure matrix», *Proceedings of the Design Society*, **5**, URL <https://arxiv.org/abs/2411.12571>.
- [33] KARP, R. M. (1972), «Reducibility among Combinatorial Problems», en R. E. Miller, J. W. Thatcher y J. D. Bohlinger (editores), *Complexity of Computer Computations: Proceedings of a symposium on the Complexity of Computer Computations, held March 20–22, 1972, at the IBM Thomas J. Watson Research Center, Yorktown Heights, New York, and sponsored by the Office of Naval Research, Mathematics Program, IBM World Trade Corporation, and the IBM Research Mathematical Sciences Department*, Springer US, Boston, MA, págs. 85–103, URL [10.1007/978-1-4684-2001-2_9](https://doi.org/10.1007/978-1-4684-2001-2_9).
- [34] KIRPES, C., G. HU y D. SLY (2022), «The 3D Product Model Research Evolution and Future Trends: A Systematic Literature Review», *Applied System Innovation*, **5**(2), pág. 29, URL <https://www.mdpi.com/2571-5577/5/2/29>.
- [35] KURPEL, D. V., C. T. SCARPIN, J. E. PÉCORA JUNIOR, C. M. SCHE-NEKEMBERG y L. C. COELHO (2020), «The exact solutions of several types of container loading problems», *European Journal of Operational Research*, **284**(1), págs. 87–107, URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221719310136>.
- [36] LAGARIAS, J. C. y C. ZONG (2012), «Mysteries in packing regular tetrahedra», en *Notices of the American Mathematical Society*, URL <https://www.ams.org/notices/201211/rtx121101540p.pdf>.
- [37] LAMAS-FERNANDEZ, C., J. A. BENNELL y A. MARTINEZ-SYKORA (2023), «Voxel-Based Solution Approaches to the Three-Dimensional Irregular Pac-

- king Problem», *Operations Research*, **71**(4), págs. 1298–1317, URL <https://pubsonline.informs.org/doi/10.1287/opre.2022.2260>.
- [38] LASTRA-DÍAZ, J. J. y M. T. ORTUÑO (2024), «Mixed-integer programming models for irregular strip packing based on vertical slices and feasibility cuts», *European Journal of Operational Research*, **313**(1), págs. 69–91, URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221723006148>.
- [39] LI, C. *et al.* (2024), «A review of reinforcement learning based hyperheuristics», *PeerJ Computer Science*, **10**, URL <https://peerj.com/articles/cs-2141/>.
- [40] LI, Z., F. H. STILLINGER, S. TORQUATO *et al.* (2024), «Optimal three-dimensional particle shapes for maximally dense random packings», *The Journal of Chemical Physics*, **161**, URL <https://pubs.aip.org/aip/jcp/article/161/1/014505/3300370/>.
- [41] LITVINCHEV, I. (2007), «Refinement of lagrangian bounds in optimization problems», *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **47**(7), págs. 1101–1108.
- [42] LITVINCHEV, I., L. INFANTE y E. L. O. ESPINOSA (2014), «Approximate circle packing in a rectangular container: integer programming formulations and valid inequalities», *International Conference on Computational Logistics*, págs. 47–60.
- [43] LITVINCHEV, I., F. LOPEZ, H. ESCALANTE y M. MATA (2011), «A MILP bi-objective model for static portfolio selection of RD projects with synergies», *Journal of Computer and Systems Sciences International*, **50**(6), págs. 942–952.
- [44] LITVINCHEV, I. y L. OZUNA (2012), «Lagrangian bounds and a heuristic for the two-stage capacitated facility location problem», *International Journal of Energy Optimization and Engineering*, **1**(1), págs. 60–72.

- [45] LITVINCHEV, I., S. RANGEL y J. SAUCEDO (2010), «A Lagrangian bound for many-to-many assignment problems», *Journal of Combinatorial Optimization*, **19**(3), págs. 241–257.
- [46] LITVINCHEV, I., Y. RÍOS-SOLÍS, D. OZDEMIR y L. HERNANDEZ-LANDA (2014), «Multiperiod and stochastic formulations for a closed loop supply chain with incentives», *Journal of Computer and Systems Sciences International*, **53**(2), págs. 201–211.
- [47] LIU, C., Y. MA, D. ZHANG y J. LI (2022), «A feasible path-based branch and bound algorithm for strongly nonconvex MINLP problems», *Frontiers in Chemical Engineering*, **4**, URL <https://www.frontiersin.org/journals/chemical-engineering/articles/10.3389/fceng.2022.983162/full>.
- [48] LIU, S., X. BAN, X. ZENG, F. ZHAO, Y. GAO, W. WU, H. ZHANG, F. CHEN, T. HALL, X. GAO y M. XU (2020), «A unified framework for packing deformable and non-deformable subcellular structures in crowded cryo-electron tomogram simulation», *BMC Bioinformatics*, **21**(399), URL <https://link.springer.com/article/10.1186/s12859-020-03660-w>.
- [49] LUNA-BENOSO, B., J. C. MARTÍNEZ-PERALES, ÚRSULA SAMANTHA MORALES-RODRÍGUEZ, R. FLORES-CARAPIA y V. M. SILVA-GARCÍA (2024), «A New Classification Model Using a Decision Tree Generated from Hyperplanes in Dimensional Space», Taylor & Francis, pág. 2426377, URL <https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/08839514.2024.2426377>.
- [50] LUNDELL, A., J. KRONQVIST y T. WESTERLUND (2022), «The supporting hyperplane optimization toolkit for convex MINLP», *Journal of Global Optimization*, **84**(1), págs. 1–41, URL <https://link.springer.com/article/10.1007/s10898-022-01128-0>.
- [51] MANTZAFLARIS, A., B. MOURRAIN y E. TSIGARIDAS (2011), «On continued fraction expansion of real roots of polynomial systems, complexity and condi-

- tion numbers», *Theoretical Computer Science*, **412**(22), págs. 2312–2330, URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304397511000351>.
- [52] MARTÍN, M., J. CÁCERES-CRUZ y A. A. JUAN (2024), «Solving the three-dimensional open-dimension rectangular packing problem», *Computers & Operations Research*, **157**, págs. 106, 123, URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0305054824001230>.
- [53] MATT, P. y M. ROTH (2024), «A heuristic for solving the irregular strip packing problem with quantum optimization», arXiv:2402.17542, URL <https://arxiv.org/abs/2402.17542>.
- [54] MENG, L., L. DING, R. T. MUSHTAQ, S. ANWAR y A. M. KHAN (2024), «Efficient Packing of 2D Irregular Parts: A Hybrid Approach Incorporating a Modified Genetic Algorithm and Image Processing», *Mathematics*, **12**(22), pág. 3470, URL <https://www.mdpi.com/2227-7390/12/22/3470>.
- [55] MINKOWSKI, H. (1900), *Fundamentals of Geometry and Convex Analysis*, Historical Mathematics Press.
- [56] MOICEANU, G. y G. PARASCHIV (2022), «Digital twin and smart manufacturing in industries: A bibliometric analysis with a focus on industry 4.0», *Sensors*, **22**(4), pág. 1388, URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166361521001937>.
- [57] MURDIVIEN, S. A. *et al.* (2023), «Deep Reinforcement Learning for 3D Bin Packing Problem in Virtual Environment of Logistics Systems», *Sensors*, **23**(15), URL <https://www.mdpi.com/1424-8220/23/15/6928>.
- [58] OLIVEIRA, Ó. y Ó. C. S. A. M. E. AKARTUNALI, KAMIL AND (2023), «An introduction to the two-dimensional rectangular cutting and packing problems», *International Transactions in Operational Research*, **30**(6), págs. 3193–3216, URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/itor.13236>.

- [59] ORG, N. S. (2025), «Optimization Problem Types - NEOS Guide», [Online; accessed 2025-09-19], URL <https://neos-guide.org/guide/types/>.
- [60] PAPADIMITRIOU, C. H. (2003), «Computational complexity», en *Encyclopedia of computer science*, págs. 260–265, URL <https://archive.org/details/computationalcom0000papa/page/n9/mode/2up>.
- [61] PERBOLI, G., T. G. CRAINIC y R. TADEI (2011), «An Efficient Meta-Heuristic for Multi-Dimensional Multi-Container Packing», *IEEE International Conference on Automation Science and Engineering (CASE)*, (CIRRELT-2011-14), affiliations: Politecnico di Torino; Université du Québec à Montréal (UQAM).
- [62] PREETHAM, F. (2024), «Limitations of LLMs in Combinatorial Optimization», (Revisado 28/9/2024 20:10), URL <https://medium.com/autonomous-agents/limitations-of-llms-in-combinatorial-optimization-87cf30dd4447>.
- [63] QUEIROZ, L. R. D. S. y M. ANDRETTA (2022), «A branch-and-cut algorithm for the irregular strip packing problem with uncertain demands», *International Transactions in Operational Research*, **29**(6), págs. 3486–3513, URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/itor.13122>.
- [64] RAHIMIAN, H. y S. MEHROTRA (2022), «Frameworks and Results in Distributionally Robust Optimization», *Open Journal of Mathematical Optimization*, **3**, 4, URL <https://ojmo.centre-mersenne.org/articles/10.5802/ojmo.15/>.
- [65] ROQUIER, G. (2024), «A century of granular packing models», *Powder Technology*, URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0032591024004030>.
- [66] SCHAEFER, R. (2011), *P, NP, and NP-Completeness: the basics of computational complexity by Oded Goldreich*, tomo 36, Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, URL <https://dl.acm.org/doi/10.1145/1921532.1921551>.

- [67] SCHÖNHÖFER, P. W. A., K. SUN, X. MAO y S. C. GLOTZER (2023), «Rationalizing Euclidean Assemblies of Hard Polyhedra from Tessellations in Curved Space», *Phys. Rev. Lett.*, **131**, URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.131.258201>.
- [68] SHARMA, A., M. KUMAR y A. SHARMA (2025), «Sustainable additive manufacturing: challenges and opportunities of recycling plastic waste for 3D printing filaments», *Sādhanā*, **50**(1), pág. 14, URL <https://link.springer.com/article/10.1007/s12046-025-02669-2>.
- [69] SHAYDULIN, R., M. CROSATO *et al.* (2024), «Evidence of scaling advantage for the quantum approximate optimization algorithm optimization algorithm on a classically intractable problem», *Science Advances*, **10**(41), URL <https://www.science.org/doi/10.1126/sciadv.adm6761>.
- [70] SIM, K., Q. RENAU y E. HART (2025), «Beyond the Hype: Benchmarking LLM-Evolved Heuristics for Bin Packing», en *Applications of Evolutionary Computation*, Lecture Notes in Computer Science, Springer Nature Switzerland, págs. 386–402, URL https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-031-90065-5_24.
- [71] SIPSER, M. (2012), *Introduction to the Theory of Computation*, tercera edición, Cengage Learning.
- [72] SRIDHAR, R., M. CHANDRASEKARAN y T. PAGE (2016), «Multi Objective Optimization of Heterogeneous Bin Packing using Adaptive Genetic Approachs», *Indian Journal of Science and Technology*, **9**, págs. 105–120, URL <https://doi.org/10.17485/ijst/2016/v9i48/108484>.
- [73] TAKAGI, R., S. ENDO, S. MINAGAWA y M. GU (2022), «Fundamental limits of quantum error mitigation», *npj Quantum Information*, **8**(1), pág. 114, URL <https://www.nature.com/articles/s41534-022-00618-z>.

- [74] V. ROMERO, S., E. OSABA, E. VILLAR-RODRIGUEZ, I. OREGI y Y. BAN (2023), «Hybrid approach for solving real-world bin packing problem instances using quantum annealers», *Scientific Reports*, **13**(1), pág. 11 777, URL <https://www.nature.com/articles/s41598-023-39013-9>.
- [75] VAN DER HAVEN, D. L. H., I. S. FRAGKOPOULOS y J. A. ELLIOTT (2024), «Volume-interacting level set DEM: porosity and angle of repose of aspherical, angular, and concave particles», *Powder Technology*, URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0032591023010781>.
- [76] WANG, S., Z. YUAN, J. YAN y Y. CUI (2025), «Arc-flow formulation and branch-and-price-and-cut algorithm for the bin packing problem», *Computers & Operations Research*, **158**, pág. 106 878, URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0305054824003502>.
- [77] WASS, T. (2024), «Realistic 3D interior environment creation in Unreal Engine 5», URL https://www.theseus.fi/bitstream/handle/10024/873681/Wass_Tomas.pdf?sequence=2.
- [78] WEISSTEIN, E. W. (2015), «Uniform Polyhedro», URL <https://mathworld.wolfram.com/UniformPolyhedron.html>.
- [79] WOLF, A. (2019), *Essentials of scientific method*, Routledge.
- [80] WÖRMAN, A. y M. SÜTTERLIN (2023), «Global optimization of mixed-integer nonlinear programs with SCIP 8», *Journal of Global Optimization*, **86**(2), págs. 335–360.
- [81] WU, W., C. FAN, J. HUANG, Z. LIU y J. YAN (2023), «Machine Learning for the Multi-Dimensional Bin Packing Problem: Literature Review and Empirical Evaluation», [2312.08103](https://arxiv.org/abs/2312.08103), URL <https://arxiv.org/abs/2312.08103>.
- [82] WÄSCHER, G., H. HAUSSNER y H. SCHUMANN (2007), «An improved typology of cutting and packing problems», *European Journal of Operational Re-*

- search*, **183**(3), págs. 1109 – 1130, URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037722170600292X>.
- [83] XU, Y. *et al.* (2024), «GraphPack: A Reinforcement Learning Algorithm for Strip Packing using Graph Neural Networks», en *International Journal of Modern Physics C (Research Letters)*, URL <https://www.worldscientific.com/doi/10.1142/S0218126624501391>.
- [84] YANG, C., X. WANG, Y. LU, H. LIU, Q. V. LE, D. ZHOU y X. CHEN (2023), «Large Language Models as Optimizers (OPRO)», arXiv:2309.03409, URL <https://arxiv.org/abs/2309.03409>.
- [85] YANG, J., H. LIU, K. LIANG, M. SHAN, L. KONG y L. ZHOU (2024), «A Genetic Algorithm with Lower Neighborhood Search for the Three-Dimensional Multiorder Open-Size Rectangular Packing Problem», *International Journal of Intelligent Systems*, pág. Article 4456 261, URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1155/2024/4456261>.
- [86] YANG, J., Y. SUN, Y. YANG, Y. WANG, B. HU y C. XIA (2025), «Parking spheres stochastically to model realistic granular packings», *Physical Review E*, **111**(2), pág. 025 406, URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.111.025406>.
- [87] YANG, Y., M. CHEN y F. SUN (2023), «Research on Three-Stage Packing Problem Based on Column Generation and Cut-Plan Algorithm», en *Proceedings of the International Conference on Transportation and Development 2023*, American Society of Civil Engineers, págs. 1853–1863, URL <https://ascelibrary.org/doi/10.1061/9780784484869.179>.
- [88] YANG, Y. *et al.* (2024), «Two-layer heuristic for the three-dimensional bin design problem considering cargo stability and loading constraints», *Engineering Optimization*, URL <https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/0305215X.2023.2269868>.

- [89] YE, H., J. WANG, Z. CAO, F. BERTO, C. HUA, H. KIM, J. PARK y G. SONG (2024), «ReEvo: Large Language Models as Hyper-Heuristics with Reflective Evolution», arXiv:2402.01145, URL <https://arxiv.org/abs/2402.01145>.
- [90] YU, Y., A. ANSHU *et al.* (2022), «Quantum approximate optimization algorithm with adaptive bias fields», *Physical Review Research*, **4**, URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevResearch.4.023249>.
- [91] ZHANG, B., Y. YAO, H. K. KAN y W. LUO (2024), «A GAN-based genetic algorithm for solving the 3D bin packing problem», *Scientific Reports*, **14**(1), pág. 7775, URL <https://www.nature.com/articles/s41598-024-56699-7>.
- [92] ZHANG, H., Q. LIU, L. WEI, J. ZENG, J. LENG y D. YAN (2022), «An iteratively doubling local search for the two-dimensional irregular bin packing problem with limited rotations», *Computers & Operations Research*, **137**, pág. 105 550, URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0305054821002847>.
- [93] ZHANG, J., W. WANG, S. GUO, L. WANG, F. LIN, C. YANG y W. YIN (2024), «Solving General Natural-Language-Description Optimization Problems with Large Language Models», en *Proceedings of the 2024 Conference of the North American Chapter of the Association for Computational Linguistics: Industry Track*, URL <https://aclanthology.org/2024.naacl-industry.42.pdf>.
- [94] ZHANG, Y. *et al.* (2022), «A deep reinforcement learning based hyper-heuristic for combinatorial optimisation», *European Journal of Operational Research*, **300**(2), págs. 418–427, URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0377221721008821>.
- [95] ZHOU, W., Y. LI, K. JE, T. VO, H. LIN, B. E. PARTRIDGE, Z. HUANG, S. C. GLOTZER y C. A. MIRKIN (2024), «Space-tiled colloidal crystals from DNA-forced shape-complementary polyhedra pairing», *Science*, **383**(6680), págs. 312–319, URL <https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.adj1021>.

-
- [96] ZHOU, W. *et al.* (2024), «Space-tiled colloidal crystals from DNA-forced shape-programmable polyhedra», *Science*, URL <https://www.science.org/doi/10.1126/science.adj1021>.

AUTOBIOGRAFÍA

5.14 QUIÉN SOY

Soy Aned Esquerra Argüelles, ingeniero de datos e investigador con foco en *optimización, empaquetamiento geométrico (bin packing), aprendizaje automático y analítica aplicada a manufactura*. Mi trabajo une modelación matemática rigurosa, diseño de *pipelines* productivos y entrega de soluciones medibles en entornos reales.

5.14 ORÍGENES Y FORMACIÓN

Nací el **15 de septiembre de 1973** en **Trinidad, Sancti Spíritus, Cuba**. Desde muy temprana edad, el mundo de las matemáticas y las computadoras me sedujo y me atrapó para siempre. Mis padres fueron un eslabón fundamental: además de facilitarme el acceso a libros y recursos, sembraron en mí **tenacidad, perseverancia** y **autoestudio**.

En **julio de 1998** egresé de la **Licenciatura en Ciencias de la Computación** por la **Universidad Central de Las Villas**. Poco después inicié mi vida laboral como **analista de sistemas** en compañías vinculadas al *turismo* en Cuba, integrando equipos que afrontaron el “*error del milenio*” y procesos de **informa-tización** de organizaciones que aún operaban con libros y bitácoras manuales (en sectores como *Educación y Salud*).

A partir de **2000** viví una etapa internacional, residiendo temporalmente en **Dinamarca, España y Chile**, donde me desempeñé como analista de sistemas y *desarrollador web*. Posteriormente me establecí en **Colombia** como **investigador asociado** de la *Corporación Universitaria del Meta* y **profesor de matemáticas avanzadas** durante varios años, asumiendo además roles en **comunicaciones y TIC**.

En **agosto de 2018**, gracias a una beca de **CONACYT**, me trasladé a **México** para cursar posgrados. En **2020** concluí la **Maestría en Ciencias de la Ingeniería** (énfasis en Sistemas) en la **UANL** (*FIME*). Actualmente curso el **Doctorado en Ingeniería de Sistemas** en la misma universidad.

5.14 FORMACIÓN E INTERESES

Mi interés profesional nació en la frontera entre la matemática aplicada y la ingeniería de software: cómo traducir restricciones geométricas o de proceso en decisiones computables y reproducibles. Ese interés me llevó a investigar empaquetamiento de formas convexas en contextos 2D/3D y a diseñar *workflows* de datos robustos que soportan analítica avanzada y despliegues en planta.

5.14 LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN Y PUBLICACIONES

He trabajado en formulaciones lagrangianas para modelar condiciones de colocación (contención y no superposición) en problemas de empaquetamiento, con validaciones numéricas y discusión de transferibilidad a manufactura aditiva. Mi énfasis ha sido reducir grados de libertad y mantener la factibilidad geométrica, buscando modelos resolubles y verificables.

5.14 EXPERIENCIA PROFESIONAL (NARRATIVA)

Mi práctica profesional se caracteriza por ejecutar soluciones *end-to-end* sin apearse a una cronología de puestos, sino a una lógica de **rol y aporte**:

- **Arquitecto de datos y líder técnico** en iniciativas de escala empresarial: diseño y *hardening* de **ETL/ELT**, migraciones a **nube**, integración por **APIs**, gobierno y calidad de datos, y *observabilidad* de plataformas (incluida observabilidad de streaming).
- **Científico de datos/ML Engineer** orientado a impacto: modelación de series temporales y clasificación, *feature engineering*, validación estadística y *model serving* con prácticas de MLOps.
- **Traductor entre negocio y tecnología**: definición de métricas y tableros ejecutivos, *SLA/SLO* de datos y visualización para toma de decisión.

En empresas globales colaboré con organizaciones de alto perfil:

- **Nissan (México y EE. UU.)**: diseño y construcción de *pipelines* escalables, estrategias de migración y accesibilidad de datos para equipos de inteligencia de negocio.
- **Paramount+**: analítica y *observabilidad* para *streaming* (experiencia del usuario, calidad de entrega), incluyendo tableros y prácticas de detección de anomalías operativas.
- **PRB/KFC**: *marketing analytics* multicanal (TikTok Ads, Meta Ads, Google Ads) mediante extracción por APIs y *data products* para monetización/optimización.
- **DeAcero**: automatización de estrategias de migración y disponibilidad de datos en *cloud* para habilitar analítica y tableros gerenciales.

- **Globant**: automatización de estrategias de migración y disponibilidad de datos en *cloud* para habilitar analítica y tableros gerenciales.
- **Ternium Global y LATAM**: automatización de estrategias de migración y disponibilidad de datos en *cloud* para habilitar analítica y tableros gerenciales.
- **Mercadolibre LATAM**: automatización de estrategias de migración y disponibilidad de datos en *cloud* para habilitar analítica y tableros gerenciales.

5.14 ÁREAS DE DESARROLLO DE APLICACIONES (SELECCIÓN)

- **Pipelines de datos** (*batch* y *near-real-time*): orquestación ETL/ELT, **integración por APIs**, endurecimiento de calidad y **gobierno** de datos.
- **Migraciones a nube**: diseño y ejecución en GCP (almacenamiento, *streaming*, orquestación, catálogos), integración con herramientas de ingestión y transformación.
- **Observabilidad y streaming OTT**: *dashboards* operativos y ejecutivos, trazabilidad de eventos y resiliencia ante anomalías.
- **Marketing analytics**: *data products* para adquisición/retención/monetización multicanal a partir de **APIs de ads**.
- **Manufactura del acero**: mantenimiento predictivo, control estadístico de procesos (SPC), **detección de anomalías** e *insights* energéticos a partir de sensores y sistemas de calidad.

5.14 INVESTIGACIONES RECIENTES (MAESTRÍA EN CIENCIA DE DATOS APLICADA)

Desarrollo un **marco híbrido de detección de anomalías** para procesos de manufactura del acero que combina: (i) *Análisis de Desviaciones Ponderadas* con umbrales dinámicos y *scores* explicables por variable, y (ii) **verificación por ensemble** con *HDBSCAN*, *Extended Isolation Forest* y *One-Class SVM*. El objetivo es maximizar la precisión y reducir falsas alarmas manteniendo *deploy on-premise/edge* y trazabilidad para operadores. El enfoque está concebido para *near-real-time* y escalabilidad a otros sectores industriales.

5.14 DOCENCIA Y TRANSFERENCIA

He participado en docencia y acompañamiento técnico, transfiriendo prácticas de datos y modelos al entorno productivo: diseño de *playbooks*, revisión de historias de usuario/épicas, sesiones de *knowledge transfer* y *coaching* a ingenieros de datos y científicos de datos.

5.14 FILOSOFÍA DE TRABAJO

1. **Rigor trasladable:** de la formalización matemática a la entrega operacional medible.
2. **Simplicidad eficaz:** soluciones que equilibran precisión, costo computacional y mantenibilidad.
3. **Reproducibilidad y apertura:** documentación clara, validaciones auditables y uso de herramientas abiertas cuando es posible.

5.14 TECNOLOGÍAS Y ECOSISTEMA

Python, SQL; orquestación e ingestión; almacenamiento y procesamiento en nube (GCP, con experiencia adicional en AWS/Azure); dashboards ejecutivos; prácticas de MLOps y observabilidad.

ANEXOS

I ANEXO DE REPRODUCIBILIDAD (BASADO EN EL REPOSITORIO)

Repositorio oficial: <https://github.com/anedezquerra/bin-packing>. Estructura relevante: `ampl-models/`, `python-helpers/`, `solvers-runs/`, `requirements.txt`, `cmds.txt`.

Objetivo y alcance

Establecer un procedimiento *step-by-step* para replicar los resultados reportados en esta tesis a partir del repositorio público. Se especifican: entorno, dependencias, rutas de trabajo, comandos canónicos y trazabilidad de artefactos.

Entorno y dependencias

Requisitos de sistema

- **SO:** Linux (Ubuntu 22.04+), Windows 11 o macOS 13+.
- **CPU/RAM:** x86_64 con ≥ 16 GB RAM recomendado.
- **Solvers/entorno:** AMPL (*local* o vía NEOS), solvers (p. ej. Knitro, BARON, IPOPT) licenciados/registrados cuando aplique.

Python (según `requirements.txt`)

```
# Preparación con venv
python -m venv .venv
source .venv/bin/activate # Windows: .venv\Scripts\activate
python -V && pip install --upgrade pip
```

```
pip install -r requirements.txt
```

Obtención del código y *commit* canónico

```
git clone https://github.com/anedezquerra/bin-packing.git
cd bin-packing
git rev-parse HEAD # <-- registrar aquí el COMMIT SHA reproducible
```

Consigne en el texto el `commit` utilizado: `<COMMIT_SHA_CANONICO>` y la fecha.

Estructura y rutas de trabajo

- `ampl-models/`: modelos AMPL (`.mod/.dat/.run`) para casos exactos.
- `python-helpers/`: utilidades/CLI en Python (preprocesamiento, métricas, figuras).
- `solvers-runs/`: corridas/plantillas o resultados de solvers.
- `cmds.txt`: comandos de ejemplo para orquestar tareas repetibles.

(Estos elementos aparecen en la vista principal del repositorio).

Semillas y control de aleatoriedad

Fije `SEED` global y registre la en los metadatos de cada corrida:

```
export PYTHONHASHSEED=0
# En Python:
import random, numpy as np
SEED = 42; random.seed(SEED); np.random.seed(SEED)
```

Casos exactos (AMPL)

Ejecución local

Ejemplo canónico (ajuste los nombres reales en `ampl-models/`):

```
ampl <<'EOF'  
model ampl-models/<modelo>.mod;  
data  ampl-models/<instancia>.dat;  
option solver knitro; # o baron/ipopt si corresponde  
# Opcional: parámetros (tiempo/gap/semillas) y warm-start si aplica  
solve;  
display _varname, _var; # o exportar a archivo  
EOF
```

Guarde soluciones y trazas en `solvers-runs/` (y subcarpetas con `<fecha>/<commit>`).

NEOS

1. Empaquetar `.mod/.dat/.run` en un `.zip`.
2. Enviar a NEOS con el solver objetivo (registrar `job_number`, `password`).
3. Descargar y mover los resultados a `solvers-runs/<fecha>-<commit>/`.

Utilidades Python (`python-helpers/`)

Figuras, tablas y métricas

Ejecute los scripts utilitarios para:

1. Parsear salidas de AMPL/solvers (desde `solvers-runs/`).

2. Consolidar métricas (*packing ratio*, objetivos, tiempos, estados).
3. Exportar tablas L^AT_EX y figuras a `reports/` y `figures/`.

Cree si es necesario: `outputs/{artifacts,logs,figures,reports}`.

Comandos reproducibles (`cmds.txt`)

Centralice y ejecute recetas de reproducción/limpieza. Tome los comandos de `cmds.txt` como plantilla y deje constancia de:

- versión de Python (`python -V`) y `pip freeze` (incluya el volcado en metadatos);
- `git.commit`, rama y estado limpio/no limpio.

(El archivo `cmds.txt` se publica en la raíz del repositorio). [:contentReference\[oaicite:2\]index=2](#)

Trazabilidad y verificación

Cada corrida debe generar un `metadata.json` con:

- `git.commit`, `python -V`, `pip freeze`;
- parámetros de solver (tiempo/gap), semilla(s), ruta a instancia;
- `sha256` de artefactos clave.

Verificación de integridad:

```
find solvers-runs -type f -exec sha256sum {} \; | sort -k2 > checksums.sha256
sha256sum -c checksums.sha256
```

Checklist final

1. Commit fijado y registrado en el texto.
2. Entorno instalado desde `requirements.txt`.
3. Casos exactos ejecutados (local/NEOS) con logs y límites.
4. Métricas consolidadas y tablas/figuras generadas.
5. Artefactos versionados por fecha+commit.
6. Checksums validados.

II ESTADO DEL ARTE

TABLE 2: Estado del arte por categorías metodológicas (ordenado por año descendente).

Autor	Año	Título	MétodoCont.	Items	Instancias
[8]	2025	HeuriGym: An Agentic Benchmark for LLM-Crafted Heuristics in Combinatorial Optimization	LLMs ¹ convexo	variados	mediana
[70]	2025	Beyond the Hype: Benchmarking LLM-Evolved Heuristics for Bin Packing	LLMs convexo	poliedros	grande
[?]	2025	Parking spheres stochastically to model realistic granular structures	DEM convexo	esferas	mediana
[32]	2025	Large language models for combinatorial optimization of design structure matrix	LLMs convexo	variados	-
[10]	2024	Properties of packings and dispersions of superellipsoid sector particles	DEM -	elipses ²	mediana
[12]	2024	Discrete element method model of soot aggregates	DEM -	esferas	mediana

Continúa en la siguiente página ...

¹Enfoques basados en grandes modelos de lenguaje para el empaquetado de tetraedros.

²Super elipses.

Autor	Año	Título	MétodoCont.	Items	Instancias
[15]	2024	GOPT: Generalizable Online 3D Bin Packing via Transformer-based Deep Reinforcement Learning	RL ³ convexo	poliedros	grande
[23]	2024	Quantum machine learning on near-term quantum devices	QCM ⁴ -	variados	-
[29]	2024	When Large Language Model Meets Optimization	LLMs -	variados	-
[39]	2024	A review of reinforcement learning based hyper-heuristics	RL -	variados	-
[53]	2024	A heuristic for solving the irregular strip packing problem with quantum optimization	QCM -	variados	-
[54]	2024	Efficient Packing of 2D Irregular Parts: A Hybrid Approach Incorporating a Modified Genetic Algorithm and Image Processing	MH -	objetos 2D	-
[69]	2024	Evidence of scaling advantage for the quantum approximate optimization algorithm	QCM -	variados	-

Continúa en la siguiente página ...

³Enfoques de aprendizaje reforzado para el empaquetado de tetraedros en contenedores regulares.

⁴Enfoques basados en métodos cuasi-físicos para el empaquetado de tetraedros en contenedores regulares.

Autor	Año	Título	Método	Cont.	Items	Instancias
[26]	2024	Sphere Packing on a Quantum Computer for Chromatography Modeling	QCM	convexo	esferas	-
[83]	2024	GraphPack: A Reinforcement Learning Algorithm for Strip Packing using Graph Neural Networks	RL	-	variados	-
[85]	2024	A Genetic Algorithm with Lower Neighborhood Search for the Three-Dimensional Multiorder Open-Size Rectangular Packing Problem	MH	convexo	variados	-
[88]	2024	Two-layer heuristic for the three-dimensional bin packing problem considering cargo stability and loading constraints	MH	convexo	variados	-
[89]	2024	ReEvo: Large Language Models as Hyper-Heuristics with Reflective Evolution	LLMs	-	variados	-
[91]	2024	A GAN-based genetic algorithm for solving the 3D bin packing problem	MH	convexo	variados	-
[93]	2024	Solving General Natural-Language-Description Optimization Problems with Large Language Models	LLMs	-	variados	-

Continúa en la siguiente página ...

Autor	Año	Título	Método	Cont.	Items	Instancias
[95]	2024	Space-tiled colloidal crystals from DNA-forced shape-programmable polyhedra	LLMs	-	variados	-
[62]	2024	Limitations of LLMs in Combinatorial Optimization	LLMs	convexo	variados	-
[75]	2024	Volume-interacting level set DEM: porosity and angle of repose of aspherical, angular, and concave particles	DEM	No-convexo	esferas	-
[89]	2024	Large Language Models as Hyper-Heuristics for Combinatorial Optimization	LLMs	convexo	variados	-
[37]	2023	Voxel-Based Solution Approaches to the Three-Dimensional Irregular Packing Problem	NNs ⁵	-	variados	-
[43]	2011	Optimizing Two-Dimensional Irregular Packing: A Hybrid Approach of Genetic Algorithm and Linear Programming	MH	-	variados	-

Continúa en la siguiente página ...

⁵Enfoques basados en redes neuronales para el empaquetado de tetraedros en contenedores regulares.

Autor	Año	Título	MétodoCont.	Items	Instancias
[57]	2023	Deep Reinforcement Learning for 3D Bin Packing Problem in Virtual Environment of Logistics Systems	RL	convexo variados	-
[35]	2023	Hybrid Metaheuristics for Efficient 3D Container Loading	MH	- variados	-
[74]	2023	Hybrid approach for solving real-world bin packing problem instances using quantum annealers	QCM	convexo variados	-
[67]	2023	Rationalizing Euclidean Assemblies of Hard Polyhedra from Spherical Geometry	NNs	convexo esferas	-
[67]	2023	Rationalizing Euclidean Assemblies of Hard Polyhedra from Spherical Geometry	LLMs	convexo esferas	-
[84]	2023	Large Language Models as Optimizers (OPRO)	LLMs	- variados	-
[13]	2022	A new discrete element modelling approach to simulate the mechanical behaviour of true polyhedral dense assemblies	DEM	- poliedros	-
[18]	2022	A discretization-convergent Level-Set-DEM	DEM	- objetos 2D	-

Continúa en la siguiente página ...

Autor	Año	Título	Método	Cont.	Items	Instancias
[42]	2022	A Novel Metaheuristic for 3D Bin Packing Optimization	MH	convexo	variados	-
[73]	2022	Fundamental limits of quantum error mitigation	QCM	-	variados	-
[24]	2022	Two-dimensional irregular packing problems: A review	MH	-	variados	-
[90]	2022	Quantum approximate optimization algorithm with adaptive bias fields	QCM	-	variados	-
[92]	2022	An iteratively doubling local search for the two-dimensional irregular bin packing problem with limited rotations	MH	convexo	variados	-
[9]	2022	Assembly of planar chiral superlattices from achiral building blocks	MH	-	variados	-
[94]	-	A deep reinforcement learning based heuristic for combinatorial optimisation	NNs	2022	variados	-

III COMPARATIVA DE LOS SOLVERS CANDIDATOS

Alcance y metodología de la comparativa

Este anexo profundiza en la comparación entre **Knitro** y **BARON** desde tres ejes: (i) *tiempo de resolución*, (ii) *calidad de solución* (óptimos locales vs. globales y/o *gaps* certificados) y (iii) *robustez* frente a tamaños de instancia y no convexidades. La intención es complementar el capítulo principal con criterios prácticos de selección, una estrategia híbrida y un cuadro comparativo de capacidades. Para favorecer la reproducibilidad, se enfatizan supuestos de modelado (acotamiento de variables, escalamiento, disponibilidad de derivadas) que impactan el desempeño tanto o más que el solver elegido.

Knitro: perfil de desempeño (local, rápido, derivadas)

Knitro integra métodos de punto interior, *active-set* y SQP para problemas no lineales suaves (continuos o con componentes MINLP). Su fortaleza radica en tiempos de convergencia *rápidos* hacia soluciones locales de alta calidad cuando el modelo está bien escalado y se dispone de gradientes/Hessianos (o aproximaciones cuasi-Newton). En escenarios operativos con *SLA* estrictos, suele ofrecer el mejor *time-to-first-feasible/incumbent*. Cuando existe fuerte no convexidad o dependencia del punto inicial, la activación de multistart y el uso de *warm-starts* entre instancias cercanas mejoran sustancialmente la estabilidad del resultado y reducen la varianza de la calidad alcanzada.

BARON: perfil de desempeño (global, certificable, ramas)

BARON es un solver global determinista para NLP/MINLP no convexos que combina *branch-and-reduce*, relajaciones convexas y resolución iterativa de subproblemas.

Su valor diferencial es la capacidad de *certificar* optimalidad global (o, en su defecto, reportar *gaps* explícitos) siempre que las variables estén *acotadas* y las relajaciones sean suficientemente informativas. En modelos con múltiples atractores, una incumbente fuerte acorta la exploración del árbol al mejorar la cota superior; sin embargo, en dominios amplios o con relajaciones flojas, el coste puede crecer de forma significativa, por lo que la configuración de límites de tiempo y criterios de parada por *gap* es crítica.

Estrategia híbrida Knitro→BARON (recomendada)

Una orquestación práctica consiste en:

1. **Fase local (Knitro):** resolver primero con Knitro para obtener una solución factible y de buena calidad en poco tiempo; habilitar multistart cuando la no convexidad sea marcada y reutilizar *warm-starts* entre instancias emparentadas.
2. **Transferencia de incumbente:** exportar los niveles de variables y fijarlos como punto de partida en el modelador para la corrida global (p. ej., valores iniciales). Asegurar *bounds* finitos y escalamiento adecuado.
3. **Fase global (BARON):** ejecutar BARON con presupuesto de tiempo y tolerancias de *gap* (relativo/absoluto) acordes a la aplicación. Buscar certificación de globalidad o una mejora de la incumbente.
4. **Cierre y reporte:** documentar valor incumbente, mejor cota, *gap* y tiempos; si no se alcanza certificación, el *gap* reportado aporta información para toma de decisiones.

Este flujo combina *velocidad* (Knitro) con *certeza* (BARON), manteniendo utilidad operativa incluso cuando el presupuesto global es limitado.

Cuadro comparativo de capacidades

Guía de selección y configuración práctica

Cuándo preferir Knitro. Ventanas de decisión cortas, necesidad de resultados inmediatos y modelos bien escalados con derivadas disponibles. Activar multistart en presencia de múltiples atractores y reutilizar *warm-starts* en corridas secuenciales.

Cuándo preferir BARON. Necesidad de *certidumbre* (óptimo global o *gap* acotado), comparativas robustas entre políticas o validación ex-post de soluciones locales. Ajustar límites de tiempo y *gap* a la importancia de la certificación.

Cuándo hibridar. Siempre que el presupuesto lo permita: Knitro primero (incumbente), luego BARON con esa incumbente y *reslim/gap*. Aporta velocidad y *cobertura* inferencial.

Parámetros sugeridos (cheat-sheet). Knitro: derivadas y buen escalamiento; considerar multistart y *warm-starts*. BARON: bounds estrictos en variables, tolerancias por *gap* acordes a SLA, límite de tiempo y registro de incumbentes/cotas para trazabilidad.

Limitaciones y amenazas a la validez

El resultado global depende tanto del *modelado* (acotamiento, reformulaciones, escalamiento) como del solver. En problemas altamente no convexos, Knitro puede estabilizarse en óptimos locales subóptimos sin multistart; BARON, por su parte, puede enfrentar árboles muy grandes si los dominios son amplios o las relajaciones son débiles. Por ello, se recomienda: (i) fijar bounds informados, (ii) evaluar reformulaciones que fortalezcan relajaciones, y (iii) monitorear *gaps* y tiempos para ajustar presupuesto y expectativas.

TABLE 4: Resumen cualitativo de capacidades relevantes para el problema estudiado.

	Knitro	BARON
Naturaleza	Local (NLP/MINLP suave)	Global determinista (NLP/MINLP no convexo)
Estrategia	Punto interior / Active-set / SQP	Branch-and-reduce + relajaciones
Garantía	Óptimo local de alta calidad	Certificación global o <i>gap</i>
Time-to-first-solution	Muy rápido (con derivadas)	Moderado/alto (depende del árbol)
Sensibilidad al start	Alta en no convexos; multistart ayuda	Menor (usa incumbente para cota sup.)
Requisitos	Escalamiento y derivadas (o cuasi-Newton)	Bounds finitos y buenas relajaciones
Fortalezas	Grandes instancias suaves; SLA operativo	Certeza/cotas; comparativas robustas
Limitantes	Óptimos locales; mesetas no convexas	Coste en dominios amplios/no acotados
Uso recomendado	Operación/períodos cortos; <i>warm-starts</i>	Auditoría/benchmark; mejora/certificación
Flujo híbrido	Incumbente rápida para BARON	Consume incumbente; cierra <i>gap</i>

IV DEFINICION DE TETRAEDROS MEDIANTE UNA MATRIZ DE ADYACENCIAS.

Este anexo proporciona los datos completos de parámetros utilizados en el problema de optimización geométrica.

Dimensiones del Problema

- Número de figuras: $n_{\text{figuras}} = 100$
- Número de puntos por figura: $n_{\text{puntos}} = 4$
- Número de dimensiones: $n_{\text{dimensiones}} = 3$

Propiedades Físicas

- Volumen: $V = 0.11785113020$
- Área superficial total: $A_{\text{total}} = 1.7320508076$
- Parámetro de suavidad: $\alpha = 0.85$

Configuración del Contenedor

- Tipo de contenedor: $\text{tipo_contenedor} = \text{'cubo'}$
- Conservación geométrica: $\text{conservacion_geometrica} = \text{'volumen'}$

Matrices de Distancia

Las matrices de distancia definen la conectividad entre puntos dentro de cada figura. Para las 30 figuras mostradas a continuación, el patrón de distancias es idéntico,

indicando una estructura tetraédrica consistente donde:

- Cada punto está conectado a otros 3 puntos
- El valor de distancia 1 indica puntos conectados
- El valor de distancia 0 indica el mismo punto (diagonal) o puntos no conectados

Patrón de Matriz de Distancia (Aplica a las 30 figuras):

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Este patrón simétrico representa una estructura de grafo completo donde cada vértice (punto) está conectado a todos los demás vértices excepto a sí mismo, formando una configuración tetraédrica en el espacio tridimensional.

Índice de Figuras

El patrón de matriz de distancia mostrado anteriormente se aplica uniformemente a las 30 figuras indexadas del 1 al 30 en el conjunto de datos. La estructura tetraédrica constante sugiere que todas las figuras comparten la misma topología de conectividad básica.

V ARCHIVO DE EJECUCIÓN PARA SOLVER BARON

Este anexo presenta el código de configuración y ejecución utilizado para resolver el problema de optimización geométrica con el solver BARON.

Configuración del Solver BARON

```
1 # Set BARON as the solver
2 option solver baron;
3
4 # Configure BARON options for complex instance solving
5 option baron_options 'maxtime=-1 maxiter=-1
6 keepsol threads=2 deltat=1200 deltaa=1e-6
7 deltar=1e-6 deltaterm=1 epsr=1e-6
8 epsa=1e-6 nlpsol=8 lsolver=knitro ';
```

Opciones de Configuración de BARON

Las opciones configuradas para BARON incluyen⁶:

- `maxtime=-1`: Sin límite de tiempo de ejecución
- `maxiter=-1`: Sin límite de iteraciones
- `keepsol`: Mantener todas las soluciones encontradas
- `threads=2`: Utilizar 2 hilos de ejecución
- `deltat=1200`: Tolerancia de tiempo (1200 segundos)

⁶Estas opciones son la configuración para la ejecución del Solver BARON en la nube (Neos Solver Server).

- `deltaa=1e-6`: Tolerancia absoluta para optimalidad
- `deltar=1e-6`: Tolerancia relativa para optimalidad
- `deltaterm=1`: Tolerancia de terminación
- `epsr=1e-6`: Épsilon relativo
- `epsa=1e-6`: Épsilon absoluto
- `nlpsol=8`: Solucionador NLP específico
- `lsolver=knitro`: Utilizar Knitro como solucionador lineal

Ejecución y Visualización de Resultados

```
1 # Solve the model
2 printf " Solution header data n";
3 solve;
4
5 printf " Container and geometric considerations\n";
6 printf " Container type: %s\n", container_type;
7 printf " Structural conservation type: %s\n"
8     , geometric_conservation;
9
10 printf " Solution execution data \n";
11 display solve_result_num , solve_result;
12
13 printf  Solution data n";
14 display card(figures) , coords , side , softness;
15
16 printf  Solution coords data n";
17 display distances;
18
```

```
19 printf  Solution stats data n";
20 display _ampl_time , _total_solve_time ,
21 _ampl_elapsed_time , _ampl_user_time;
22 printf "Total time elapsed: $%6.2f.\n", _total_solve_time;
23
24 printf  Solution miscs data n";
25 display tetrahedron_volume;
26
27 printf  Solution miscs data n";
28 display tetrahedron_surface_area;
29
30 quit;
```

Descripción de los Comandos de Visualización

Los comandos `display` y `printf` muestran:

- Información del contenedor y consideraciones geométricas
- Resultados de la ejecución del solver
- Datos de la solución (número de figuras, coordenadas, parámetros)
- Matrices de distancias entre puntos
- Estadísticas de tiempo de ejecución
- Propiedades geométricas calculadas (volumen y área superficial)

Métricas de Tiempo

Las variables de tiempo monitoreadas incluyen:

- `_ampl_time`: Tiempo total de AMPL
- `_total_solve_time`: Tiempo total de solución
- `_ampl_elapsed_time`: Tiempo transcurrido
- `_ampl_user_time`: Tiempo de usuario

Este código configura un entorno de optimización de alto rendimiento para resolver problemas geométricos complejos con tolerancias numéricas estrictas y monitoreo exhaustivo del proceso de solución.

VI MODELO EN CUBO CON CONSERVACIÓN CONJUNTA

Notación y variables

Sea $\mathcal{F} = \{1, \dots, N\}$ el conjunto de tetraedros. Para cada $i \in \mathcal{F}$ los vértices son $\mathbf{x}_{i\ell} \in \mathbb{R}^3$ con $\ell = 1, \dots, 4$. Las variables auxiliares de no solapamiento son $\mathbf{v}_{ij} \in \mathbb{R}^3$ (normal unitaria) y $\alpha_{ij}, \beta_{ij} \in \mathbb{R}$ para todo $i < j$.

GEOMETRÍA DEL TETRAEDRO i . Sean $\mathbf{x}_{i1}, \dots, \mathbf{x}_{i4} \in \mathbb{R}^3$ sus vértices. El volumen se calcula como

$$\text{Vol}_i = \frac{1}{6} \left| \det \left(\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{i2} - \mathbf{x}_{i1} & \mathbf{x}_{i3} - \mathbf{x}_{i1} & \mathbf{x}_{i4} - \mathbf{x}_{i1} \end{bmatrix} \right) \right|. \quad (1)$$

El área superficial total es

$$\text{Surf}_i = \frac{1}{2} \sum_{(a,b,c) \in \{(1,2,3), (1,2,4), (1,3,4), (2,3,4)\}} \|(\mathbf{x}_{ib} - \mathbf{x}_{ia}) \times (\mathbf{x}_{ic} - \mathbf{x}_{ia})\|_2. \quad (2)$$

Restricciones de contención

CONTENCIÓN EN CUBO. Sea $L > 0$ la longitud de arista del cubo centrado en el origen. Para todo vértice se impone

$$-\frac{L}{2} \leq x_{i\ell}^k \leq \frac{L}{2}, \quad \forall i, \ell = 1, \dots, 4, k \in \{x, y, z\}. \quad (3)$$

Restricciones de conservación

CONSERVACIÓN CONJUNTA DE VOLUMEN Y SUPERFICIE. Sean $V_0 > 0$ y $A_0 > 0$ los objetivos. Se impone

$$\text{Vol}_i = V_0, \quad \text{Surf}_i = A_0, \quad \forall i. \quad (4)$$

Condiciones de no solapamiento

NO SOLAPAMIENTO ENTRE TETRAEDROS. Para todo par $i < j$ se impone un hiperplano separador con normal unitaria $\mathbf{v}_{ij} \in \mathbb{R}^3$ y escalares $\alpha_{ij}, \beta_{ij} \in \mathbb{R}$:

$$\langle \mathbf{v}_{ij}, \mathbf{x}_{i\ell} \rangle \leq \alpha_{ij}, \quad \forall \ell = 1, \dots, 4, \quad (5)$$

$$\langle \mathbf{v}_{ij}, \mathbf{x}_{j\ell} \rangle \geq -\beta_{ij}, \quad \forall \ell = 1, \dots, 4, \quad (6)$$

$$\alpha_{ij} + \beta_{ij} \leq 0, \quad (7)$$

$$\|\mathbf{v}_{ij}\|_2 = 1. \quad (8)$$

Si se desea separación estricta, sustituir (82) por $\alpha_{ij} + \beta_{ij} \leq -\varepsilon$ con $\varepsilon > 0$.

Función objetivo

FUNCIÓN OBJETIVO (TASA DE EMPAQUETADO). Para un contenedor fijo, maximizar la densidad equivale a maximizar el volumen total ocupado:

$$\max \sum_{i=1}^N \text{Vol}_i \quad \text{sujeto a las restricciones anteriores.} \quad (9)$$

En los modelos con Vol_i fijado la (84) es constante y puede sustituirse por funciones auxiliares (p. ej. maximizar margen de separación o minimizar desplazamientos), sin afectar la formulación de restricciones del presente anexo.

PARÁMETRO DE “SUAVIDAD” (OPCIONAL). Si se permite deformación controlada, puede incorporarse un penalizador cuadrático respecto a los invariantes conservados, por ejemplo $\lambda_V \sum_i (\text{Vol}_i - V_0)^2$ y/o $\lambda_A \sum_i (\text{Surf}_i - A_0)^2$ con $\lambda \geq 0$ en la función objetivo. Este anexo muestra las versiones con conservación estricta para cada caso.

VII MODELO EN CUBO CON CONSERVACIÓN DE SUPERFICIE

Notación y variables

Sea $\mathcal{F} = \{1, \dots, N\}$ el conjunto de tetraedros. Para cada $i \in \mathcal{F}$ los vértices son $\mathbf{x}_{i\ell} \in \mathbb{R}^3$ con $\ell = 1, \dots, 4$. Las variables auxiliares de no solapamiento son $\mathbf{v}_{ij} \in \mathbb{R}^3$ (normal unitaria) y $\alpha_{ij}, \beta_{ij} \in \mathbb{R}$ para todo $i < j$.

GEOMETRÍA DEL TETRAEDRO i . Sean $\mathbf{x}_{i1}, \dots, \mathbf{x}_{i4} \in \mathbb{R}^3$ sus vértices. El volumen se calcula como

$$\text{Vol}_i = \frac{1}{6} \left| \det \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{i2} - \mathbf{x}_{i1} & \mathbf{x}_{i3} - \mathbf{x}_{i1} & \mathbf{x}_{i4} - \mathbf{x}_{i1} \end{bmatrix} \right|. \quad (10)$$

El área superficial total es

$$\text{Surf}_i = \frac{1}{2} \sum_{(a,b,c) \in \{(1,2,3), (1,2,4), (1,3,4), (2,3,4)\}} \|(\mathbf{x}_{ib} - \mathbf{x}_{ia}) \times (\mathbf{x}_{ic} - \mathbf{x}_{ia})\|_2. \quad (11)$$

Restricciones de contención

CONTENCIÓN EN CUBO. Sea $L > 0$ la longitud de arista del cubo centrado en el origen. Para todo vértice se impone

$$-\frac{L}{2} \leq x_{i\ell}^k \leq \frac{L}{2}, \quad \forall i, \ell = 1, \dots, 4, k \in \{x, y, z\}. \quad (12)$$

Restricciones de conservación

CONSERVACIÓN DE SUPERFICIE TOTAL. Sea $A_0 > 0$ el área superficial objetivo. Se impone

$$\text{Surf}_i = A_0, \quad \forall i. \quad (13)$$

Condiciones de no solapamiento

NO SOLAPAMIENTO ENTRE TETRAEDROS. Para todo par $i < j$ se impone un hiperplano separador con normal unitaria $\mathbf{v}_{ij} \in \mathbb{R}^3$ y escalares $\alpha_{ij}, \beta_{ij} \in \mathbb{R}$:

$$\langle \mathbf{v}_{ij}, \mathbf{x}_{i\ell} \rangle \leq \alpha_{ij}, \quad \forall \ell = 1, \dots, 4, \quad (14)$$

$$\langle \mathbf{v}_{ij}, \mathbf{x}_{j\ell} \rangle \geq -\beta_{ij}, \quad \forall \ell = 1, \dots, 4, \quad (15)$$

$$\alpha_{ij} + \beta_{ij} \leq 0, \quad (16)$$

$$\|\mathbf{v}_{ij}\|_2 = 1. \quad (17)$$

Si se desea separación estricta, sustituir (82) por $\alpha_{ij} + \beta_{ij} \leq -\varepsilon$ con $\varepsilon > 0$.

Función objetivo

FUNCIÓN OBJETIVO (TASA DE EMPAQUETADO). Para un contenedor fijo, maximizar la densidad equivale a maximizar el volumen total ocupado:

$$\max \sum_{i=1}^N \text{Vol}_i \quad \text{sujeto a las restricciones anteriores.} \quad (18)$$

En los modelos con Vol_i fijado la (84) es constante y puede sustituirse por funciones auxiliares (p. ej. maximizar margen de separación o minimizar desplazamientos), sin afectar la formulación de restricciones del presente anexo.

PARÁMETRO DE “SUAVIDAD” (OPCIONAL). Si se permite deformación controlada, puede incorporarse un penalizador cuadrático respecto a los invariantes conservados, por ejemplo $\lambda_V \sum_i (\text{Vol}_i - V_0)^2$ y/o $\lambda_A \sum_i (\text{Surf}_i - A_0)^2$ con $\lambda \geq 0$ en la función objetivo. Este anexo muestra las versiones con conservación estricta para cada caso.

VIII MODELO EN CUBO CON CONSERVACIÓN DE VOLUMEN

Notación y variables

Sea $\mathcal{F} = \{1, \dots, N\}$ el conjunto de tetraedros. Para cada $i \in \mathcal{F}$ los vértices son $\mathbf{x}_{i\ell} \in \mathbb{R}^3$ con $\ell = 1, \dots, 4$. Las variables auxiliares de no solapamiento son $\mathbf{v}_{ij} \in \mathbb{R}^3$ (normal unitaria) y $\alpha_{ij}, \beta_{ij} \in \mathbb{R}$ para todo $i < j$.

GEOMETRÍA DEL TETRAEDRO i . Sean $\mathbf{x}_{i1}, \dots, \mathbf{x}_{i4} \in \mathbb{R}^3$ sus vértices. El volumen se calcula como

$$\text{Vol}_i = \frac{1}{6} \left| \det \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{i2} - \mathbf{x}_{i1} & \mathbf{x}_{i3} - \mathbf{x}_{i1} & \mathbf{x}_{i4} - \mathbf{x}_{i1} \end{bmatrix} \right|. \quad (19)$$

El área superficial total es

$$\text{Surf}_i = \frac{1}{2} \sum_{(a,b,c) \in \{(1,2,3), (1,2,4), (1,3,4), (2,3,4)\}} \|(\mathbf{x}_{ib} - \mathbf{x}_{ia}) \times (\mathbf{x}_{ic} - \mathbf{x}_{ia})\|_2. \quad (20)$$

Restricciones de contención

CONTENCIÓN EN CUBO. Sea $L > 0$ la longitud de arista del cubo centrado en el origen. Para todo vértice se impone

$$-\frac{L}{2} \leq x_{i\ell}^k \leq \frac{L}{2}, \quad \forall i, \ell = 1, \dots, 4, k \in \{x, y, z\}. \quad (21)$$

Restricciones de conservación

CONSERVACIÓN DE VOLUMEN. Sea $V_0 > 0$ el volumen objetivo (del tetraedro rígido de referencia). Se impone

$$\text{Vol}_i = V_0, \quad \forall i. \quad (22)$$

Condiciones de no solapamiento

NO SOLAPAMIENTO ENTRE TETRAEDROS. Para todo par $i < j$ se impone un hiperplano separador con normal unitaria $\mathbf{v}_{ij} \in \mathbb{R}^3$ y escalares $\alpha_{ij}, \beta_{ij} \in \mathbb{R}$:

$$\langle \mathbf{v}_{ij}, \mathbf{x}_{i\ell} \rangle \leq \alpha_{ij}, \quad \forall \ell = 1, \dots, 4, \quad (23)$$

$$\langle \mathbf{v}_{ij}, \mathbf{x}_{j\ell} \rangle \geq -\beta_{ij}, \quad \forall \ell = 1, \dots, 4, \quad (24)$$

$$\alpha_{ij} + \beta_{ij} \leq 0, \quad (25)$$

$$\|\mathbf{v}_{ij}\|_2 = 1. \quad (26)$$

Si se desea separación estricta, sustituir (82) por $\alpha_{ij} + \beta_{ij} \leq -\varepsilon$ con $\varepsilon > 0$.

Función objetivo

FUNCIÓN OBJETIVO (TASA DE EMPAQUETADO). Para un contenedor fijo, maximizar la densidad equivale a maximizar el volumen total ocupado:

$$\max \sum_{i=1}^N \text{Vol}_i \quad \text{sujeto a las restricciones anteriores.} \quad (27)$$

En los modelos con Vol_i fijado la (84) es constante y puede sustituirse por funciones auxiliares (p. ej. maximizar margen de separación o minimizar desplazamientos), sin afectar la formulación de restricciones del presente anexo.

PARÁMETRO DE “SUAVIDAD” (OPCIONAL). Si se permite deformación controlada, puede incorporarse un penalizador cuadrático respecto a los invariantes conservados, por ejemplo $\lambda_V \sum_i (\text{Vol}_i - V_0)^2$ y/o $\lambda_A \sum_i (\text{Surf}_i - A_0)^2$ con $\lambda \geq 0$ en la función objetivo. Este anexo muestra las versiones con conservación estricta para cada caso.

IX MODELO EN CILINDRO CON CONSERVACIÓN CONJUNTA

Notación y variables

Sea $\mathcal{F} = \{1, \dots, N\}$ el conjunto de tetraedros. Para cada $i \in \mathcal{F}$ los vértices son $\mathbf{x}_{i\ell} \in \mathbb{R}^3$ con $\ell = 1, \dots, 4$. Las variables auxiliares de no solapamiento son $\mathbf{v}_{ij} \in \mathbb{R}^3$ (normal unitaria) y $\alpha_{ij}, \beta_{ij} \in \mathbb{R}$ para todo $i < j$.

GEOMETRÍA DEL TETRAEDRO i . Sean $\mathbf{x}_{i1}, \dots, \mathbf{x}_{i4} \in \mathbb{R}^3$ sus vértices. El volumen se calcula como

$$\text{Vol}_i = \frac{1}{6} \left| \det \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{i2} - \mathbf{x}_{i1} & \mathbf{x}_{i3} - \mathbf{x}_{i1} & \mathbf{x}_{i4} - \mathbf{x}_{i1} \end{pmatrix} \right|. \quad (28)$$

El área superficial total es

$$\text{Surf}_i = \frac{1}{2} \sum_{(a,b,c) \in \{(1,2,3), (1,2,4), (1,3,4), (2,3,4)\}} \|(\mathbf{x}_{ib} - \mathbf{x}_{ia}) \times (\mathbf{x}_{ic} - \mathbf{x}_{ia})\|_2. \quad (29)$$

Restricciones de contención

CONTENCIÓN EN CILINDRO. Sean $R > 0$ el radio y $H > 0$ la altura del cilindro circular recto, eje en z , centrado en el origen. Para todo vértice

$$(x_{i\ell}^x)^2 + (x_{i\ell}^y)^2 \leq R^2, \quad (30)$$

$$-\frac{H}{2} \leq x_{i\ell}^z \leq \frac{H}{2}. \quad (31)$$

Restricciones de conservación

CONSERVACIÓN CONJUNTA DE VOLUMEN Y SUPERFICIE. Sean $V_0 > 0$ y $A_0 > 0$ los objetivos. Se impone

$$\text{Vol}_i = V_0, \quad \text{Surf}_i = A_0, \quad \forall i. \quad (32)$$

Condiciones de no solapamiento

NO SOLAPAMIENTO ENTRE TETRAEDROS. Para todo par $i < j$ se impone un hiperplano separador con normal unitaria $\mathbf{v}_{ij} \in \mathbb{R}^3$ y escalares $\alpha_{ij}, \beta_{ij} \in \mathbb{R}$:

$$\langle \mathbf{v}_{ij}, \mathbf{x}_{i\ell} \rangle \leq \alpha_{ij}, \quad \forall \ell = 1, \dots, 4, \quad (33)$$

$$\langle \mathbf{v}_{ij}, \mathbf{x}_{j\ell} \rangle \geq -\beta_{ij}, \quad \forall \ell = 1, \dots, 4, \quad (34)$$

$$\alpha_{ij} + \beta_{ij} \leq 0, \quad (35)$$

$$\|\mathbf{v}_{ij}\|_2 = 1. \quad (36)$$

Si se desea separación estricta, sustituir (82) por $\alpha_{ij} + \beta_{ij} \leq -\varepsilon$ con $\varepsilon > 0$.

Función objetivo

FUNCIÓN OBJETIVO (TASA DE EMPAQUETADO). Para un contenedor fijo, maximizar la densidad equivale a maximizar el volumen total ocupado:

$$\max \sum_{i=1}^N \text{Vol}_i \quad \text{sujeto a las restricciones anteriores.} \quad (37)$$

En los modelos con Vol_i fijado la (84) es constante y puede sustituirse por funciones auxiliares (p. ej. maximizar margen de separación o minimizar desplazamientos), sin afectar la formulación de restricciones del presente anexo.

PARÁMETRO DE “SUAVIDAD” (OPCIONAL). Si se permite deformación controlada, puede incorporarse un penalizador cuadrático respecto a los invariantes conservados, por ejemplo $\lambda_V \sum_i (\text{Vol}_i - V_0)^2$ y/o $\lambda_A \sum_i (\text{Surf}_i - A_0)^2$ con $\lambda \geq 0$ en la función objetivo. Este anexo muestra las versiones con conservación estricta para cada caso.

X MODELO EN CILINDRO CON CONSERVACIÓN DE SUPERFICIE

Notación y variables

Sea $\mathcal{F} = \{1, \dots, N\}$ el conjunto de tetraedros. Para cada $i \in \mathcal{F}$ los vértices son $\mathbf{x}_{i\ell} \in \mathbb{R}^3$ con $\ell = 1, \dots, 4$. Las variables auxiliares de no solapamiento son $\mathbf{v}_{ij} \in \mathbb{R}^3$ (normal unitaria) y $\alpha_{ij}, \beta_{ij} \in \mathbb{R}$ para todo $i < j$.

GEOMETRÍA DEL TETRAEDRO i . Sean $\mathbf{x}_{i1}, \dots, \mathbf{x}_{i4} \in \mathbb{R}^3$ sus vértices. El volumen se calcula como

$$\text{Vol}_i = \frac{1}{6} \left| \det \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{i2} - \mathbf{x}_{i1} & \mathbf{x}_{i3} - \mathbf{x}_{i1} & \mathbf{x}_{i4} - \mathbf{x}_{i1} \end{pmatrix} \right|. \quad (38)$$

El área superficial total es

$$\text{Surf}_i = \frac{1}{2} \sum_{(a,b,c) \in \{(1,2,3), (1,2,4), (1,3,4), (2,3,4)\}} \|(\mathbf{x}_{ib} - \mathbf{x}_{ia}) \times (\mathbf{x}_{ic} - \mathbf{x}_{ia})\|_2. \quad (39)$$

Restricciones de contención

CONTENCIÓN EN CILINDRO. Sean $R > 0$ el radio y $H > 0$ la altura del cilindro circular recto, eje en z , centrado en el origen. Para todo vértice

$$(x_{i\ell}^x)^2 + (x_{i\ell}^y)^2 \leq R^2, \quad (40)$$

$$-\frac{H}{2} \leq x_{i\ell}^z \leq \frac{H}{2}. \quad (41)$$

Restricciones de conservación

CONSERVACIÓN DE SUPERFICIE TOTAL. Sea $A_0 > 0$ el área superficial objetivo. Se impone

$$\text{Surf}_i = A_0, \quad \forall i. \quad (42)$$

Condiciones de no solapamiento

NO SOLAPAMIENTO ENTRE TETRAEDROS. Para todo par $i < j$ se impone un hiperplano separador con normal unitaria $\mathbf{v}_{ij} \in \mathbb{R}^3$ y escalares $\alpha_{ij}, \beta_{ij} \in \mathbb{R}$:

$$\langle \mathbf{v}_{ij}, \mathbf{x}_{i\ell} \rangle \leq \alpha_{ij}, \quad \forall \ell = 1, \dots, 4, \quad (43)$$

$$\langle \mathbf{v}_{ij}, \mathbf{x}_{j\ell} \rangle \geq -\beta_{ij}, \quad \forall \ell = 1, \dots, 4, \quad (44)$$

$$\alpha_{ij} + \beta_{ij} \leq 0, \quad (45)$$

$$\|\mathbf{v}_{ij}\|_2 = 1. \quad (46)$$

Si se desea separación estricta, sustituir (82) por $\alpha_{ij} + \beta_{ij} \leq -\varepsilon$ con $\varepsilon > 0$.

Función objetivo

FUNCIÓN OBJETIVO (TASA DE EMPAQUETADO). Para un contenedor fijo, maximizar la densidad equivale a maximizar el volumen total ocupado:

$$\max \sum_{i=1}^N \text{Vol}_i \quad \text{sujeto a las restricciones anteriores.} \quad (47)$$

En los modelos con Vol_i fijado la (84) es constante y puede sustituirse por funciones auxiliares (p. ej. maximizar margen de separación o minimizar desplazamientos), sin afectar la formulación de restricciones del presente anexo.

PARÁMETRO DE “SUAVIDAD” (OPCIONAL). Si se permite deformación controlada, puede incorporarse un penalizador cuadrático respecto a los invariantes conservados, por ejemplo $\lambda_V \sum_i (\text{Vol}_i - V_0)^2$ y/o $\lambda_A \sum_i (\text{Surf}_i - A_0)^2$ con $\lambda \geq 0$ en la función objetivo. Este anexo muestra las versiones con conservación estricta para cada caso.

XI MODELO EN CILINDRO CON CONSERVACIÓN DE VOLUMEN

Notación y variables

Sea $\mathcal{F} = \{1, \dots, N\}$ el conjunto de tetraedros. Para cada $i \in \mathcal{F}$ los vértices son $\mathbf{x}_{i\ell} \in \mathbb{R}^3$ con $\ell = 1, \dots, 4$. Las variables auxiliares de no solapamiento son $\mathbf{v}_{ij} \in \mathbb{R}^3$ (normal unitaria) y $\alpha_{ij}, \beta_{ij} \in \mathbb{R}$ para todo $i < j$.

GEOMETRÍA DEL TETRAEDRO i . Sean $\mathbf{x}_{i1}, \dots, \mathbf{x}_{i4} \in \mathbb{R}^3$ sus vértices. El volumen se calcula como

$$\text{Vol}_i = \frac{1}{6} \left| \det \left(\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{i2} - \mathbf{x}_{i1} & \mathbf{x}_{i3} - \mathbf{x}_{i1} & \mathbf{x}_{i4} - \mathbf{x}_{i1} \end{bmatrix} \right) \right|. \quad (48)$$

El área superficial total es

$$\text{Surf}_i = \frac{1}{2} \sum_{(a,b,c) \in \{(1,2,3), (1,2,4), (1,3,4), (2,3,4)\}} \|(\mathbf{x}_{ib} - \mathbf{x}_{ia}) \times (\mathbf{x}_{ic} - \mathbf{x}_{ia})\|_2. \quad (49)$$

Restricciones de contención

CONTENCIÓN EN CILINDRO. Sean $R > 0$ el radio y $H > 0$ la altura del cilindro circular recto, eje en z , centrado en el origen. Para todo vértice

$$(x_{i\ell}^x)^2 + (x_{i\ell}^y)^2 \leq R^2, \quad (50)$$

$$-\frac{H}{2} \leq x_{i\ell}^z \leq \frac{H}{2}. \quad (51)$$

Restricciones de conservación

CONSERVACIÓN DE VOLUMEN. Sea $V_0 > 0$ el volumen objetivo (del tetraedro rígido de referencia). Se impone

$$\text{Vol}_i = V_0, \quad \forall i. \quad (52)$$

Condiciones de no solapamiento

NO SOLAPAMIENTO ENTRE TETRAEDROS. Para todo par $i < j$ se impone un hiperplano separador con normal unitaria $\mathbf{v}_{ij} \in \mathbb{R}^3$ y escalares $\alpha_{ij}, \beta_{ij} \in \mathbb{R}$:

$$\langle \mathbf{v}_{ij}, \mathbf{x}_{i\ell} \rangle \leq \alpha_{ij}, \quad \forall \ell = 1, \dots, 4, \quad (53)$$

$$\langle \mathbf{v}_{ij}, \mathbf{x}_{j\ell} \rangle \geq -\beta_{ij}, \quad \forall \ell = 1, \dots, 4, \quad (54)$$

$$\alpha_{ij} + \beta_{ij} \leq 0, \quad (55)$$

$$\|\mathbf{v}_{ij}\|_2 = 1. \quad (56)$$

Si se desea separación estricta, sustituir (82) por $\alpha_{ij} + \beta_{ij} \leq -\varepsilon$ con $\varepsilon > 0$.

Función objetivo

FUNCIÓN OBJETIVO (TASA DE EMPAQUETADO). Para un contenedor fijo, maximizar la densidad equivale a maximizar el volumen total ocupado:

$$\max \sum_{i=1}^N \text{Vol}_i \quad \text{sujeto a las restricciones anteriores.} \quad (57)$$

En los modelos con Vol_i fijado la (84) es constante y puede sustituirse por funciones auxiliares (p. ej. maximizar margen de separación o minimizar desplazamientos), sin afectar la formulación de restricciones del presente anexo.

PARÁMETRO DE “SUAVIDAD” (OPCIONAL). Si se permite deformación controlada, puede incorporarse un penalizador cuadrático respecto a los invariantes conservados, por ejemplo $\lambda_V \sum_i (\text{Vol}_i - V_0)^2$ y/o $\lambda_A \sum_i (\text{Surf}_i - A_0)^2$ con $\lambda \geq 0$ en la función objetivo. Este anexo muestra las versiones con conservación estricta para cada caso.

XII MODELO EN ESFERA CON CONSERVACIÓN CONJUNTA

Notación y variables

Sea $\mathcal{F} = \{1, \dots, N\}$ el conjunto de tetraedros. Para cada $i \in \mathcal{F}$ los vértices son $\mathbf{x}_{i\ell} \in \mathbb{R}^3$ con $\ell = 1, \dots, 4$. Las variables auxiliares de no solapamiento son $\mathbf{v}_{ij} \in \mathbb{R}^3$ (normal unitaria) y $\alpha_{ij}, \beta_{ij} \in \mathbb{R}$ para todo $i < j$.

GEOMETRÍA DEL TETRAEDRO i . Sean $\mathbf{x}_{i1}, \dots, \mathbf{x}_{i4} \in \mathbb{R}^3$ sus vértices. El volumen se calcula como

$$\text{Vol}_i = \frac{1}{6} \left| \det \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{i2} - \mathbf{x}_{i1} & \mathbf{x}_{i3} - \mathbf{x}_{i1} & \mathbf{x}_{i4} - \mathbf{x}_{i1} \end{bmatrix} \right|. \quad (58)$$

El área superficial total es

$$\text{Surf}_i = \frac{1}{2} \sum_{(a,b,c) \in \{(1,2,3), (1,2,4), (1,3,4), (2,3,4)\}} \|(\mathbf{x}_{ib} - \mathbf{x}_{ia}) \times (\mathbf{x}_{ic} - \mathbf{x}_{ia})\|_2. \quad (59)$$

Restricciones de contención

CONTENCIÓN EN ESFERA. Sea $R > 0$ el radio de la esfera centrada en el origen. Para todo vértice se impone

$$(x_{i\ell}^x)^2 + (x_{i\ell}^y)^2 + (x_{i\ell}^z)^2 \leq R^2. \quad (60)$$

Restricciones de conservación

CONSERVACIÓN CONJUNTA DE VOLUMEN Y SUPERFICIE. Sean $V_0 > 0$ y $A_0 > 0$ los objetivos. Se impone

$$\text{Vol}_i = V_0, \quad \text{Surf}_i = A_0, \quad \forall i. \quad (61)$$

Condiciones de no solapamiento

NO SOLAPAMIENTO ENTRE TETRAEDROS. Para todo par $i < j$ se impone un hiperplano separador con normal unitaria $\mathbf{v}_{ij} \in \mathbb{R}^3$ y escalares $\alpha_{ij}, \beta_{ij} \in \mathbb{R}$:

$$\langle \mathbf{v}_{ij}, \mathbf{x}_{i\ell} \rangle \leq \alpha_{ij}, \quad \forall \ell = 1, \dots, 4, \quad (62)$$

$$\langle \mathbf{v}_{ij}, \mathbf{x}_{j\ell} \rangle \geq -\beta_{ij}, \quad \forall \ell = 1, \dots, 4, \quad (63)$$

$$\alpha_{ij} + \beta_{ij} \leq 0, \quad (64)$$

$$\|\mathbf{v}_{ij}\|_2 = 1. \quad (65)$$

Si se desea separación estricta, sustituir (82) por $\alpha_{ij} + \beta_{ij} \leq -\varepsilon$ con $\varepsilon > 0$.

Función objetivo

FUNCIÓN OBJETIVO (TASA DE EMPAQUETADO). Para un contenedor fijo, maximizar la densidad equivale a maximizar el volumen total ocupado:

$$\max \sum_{i=1}^N \text{Vol}_i \quad \text{sujeto a las restricciones anteriores.} \quad (66)$$

En los modelos con Vol_i fijado la (84) es constante y puede sustituirse por funciones auxiliares (p. ej. maximizar margen de separación o minimizar desplazamientos), sin afectar la formulación de restricciones del presente anexo.

PARÁMETRO DE “SUAVIDAD” (OPCIONAL). Si se permite deformación controlada, puede incorporarse un penalizador cuadrático respecto a los invariantes conservados, por ejemplo $\lambda_V \sum_i (\text{Vol}_i - V_0)^2$ y/o $\lambda_A \sum_i (\text{Surf}_i - A_0)^2$ con $\lambda \geq 0$ en la función objetivo. Este anexo muestra las versiones con conservación estricta para cada caso.

XIII MODELO EN ESFERA CON CONSERVACIÓN DE SUPERFICIE

Notación y variables

Sea $\mathcal{F} = \{1, \dots, N\}$ el conjunto de tetraedros. Para cada $i \in \mathcal{F}$ los vértices son $\mathbf{x}_{i\ell} \in \mathbb{R}^3$ con $\ell = 1, \dots, 4$. Las variables auxiliares de no solapamiento son $\mathbf{v}_{ij} \in \mathbb{R}^3$ (normal unitaria) y $\alpha_{ij}, \beta_{ij} \in \mathbb{R}$ para todo $i < j$.

GEOMETRÍA DEL TETRAEDRO i . Sean $\mathbf{x}_{i1}, \dots, \mathbf{x}_{i4} \in \mathbb{R}^3$ sus vértices. El volumen se calcula como

$$\text{Vol}_i = \frac{1}{6} \left| \det \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{i2} - \mathbf{x}_{i1} & \mathbf{x}_{i3} - \mathbf{x}_{i1} & \mathbf{x}_{i4} - \mathbf{x}_{i1} \end{bmatrix} \right|. \quad (67)$$

El área superficial total es

$$\text{Surf}_i = \frac{1}{2} \sum_{(a,b,c) \in \{(1,2,3), (1,2,4), (1,3,4), (2,3,4)\}} \|(\mathbf{x}_{ib} - \mathbf{x}_{ia}) \times (\mathbf{x}_{ic} - \mathbf{x}_{ia})\|_2. \quad (68)$$

Restricciones de contención

CONTENCIÓN EN ESFERA. Sea $R > 0$ el radio de la esfera centrada en el origen. Para todo vértice se impone

$$(x_{i\ell}^x)^2 + (x_{i\ell}^y)^2 + (x_{i\ell}^z)^2 \leq R^2. \quad (69)$$

Restricciones de conservación

CONSERVACIÓN DE SUPERFICIE TOTAL. Sea $A_0 > 0$ el área superficial objetivo. Se impone

$$\text{Surf}_i = A_0, \quad \forall i. \quad (70)$$

Condiciones de no solapamiento

NO SOLAPAMIENTO ENTRE TETRAEDROS. Para todo par $i < j$ se impone un hiperplano separador con normal unitaria $\mathbf{v}_{ij} \in \mathbb{R}^3$ y escalares $\alpha_{ij}, \beta_{ij} \in \mathbb{R}$:

$$\langle \mathbf{v}_{ij}, \mathbf{x}_{i\ell} \rangle \leq \alpha_{ij}, \quad \forall \ell = 1, \dots, 4, \quad (71)$$

$$\langle \mathbf{v}_{ij}, \mathbf{x}_{j\ell} \rangle \geq -\beta_{ij}, \quad \forall \ell = 1, \dots, 4, \quad (72)$$

$$\alpha_{ij} + \beta_{ij} \leq 0, \quad (73)$$

$$\|\mathbf{v}_{ij}\|_2 = 1. \quad (74)$$

Si se desea separación estricta, sustituir (82) por $\alpha_{ij} + \beta_{ij} \leq -\varepsilon$ con $\varepsilon > 0$.

Función objetivo

FUNCIÓN OBJETIVO (TASA DE EMPAQUETADO). Para un contenedor fijo, maximizar la densidad equivale a maximizar el volumen total ocupado:

$$\max \sum_{i=1}^N \text{Vol}_i \quad \text{sujeto a las restricciones anteriores.} \quad (75)$$

En los modelos con Vol_i fijado la (84) es constante y puede sustituirse por funciones auxiliares (p. ej. maximizar margen de separación o minimizar desplazamientos), sin afectar la formulación de restricciones del presente anexo.

PARÁMETRO DE “SUAVIDAD” (OPCIONAL). Si se permite deformación controlada, puede incorporarse un penalizador cuadrático respecto a los invariantes conservados, por ejemplo $\lambda_V \sum_i (\text{Vol}_i - V_0)^2$ y/o $\lambda_A \sum_i (\text{Surf}_i - A_0)^2$ con $\lambda \geq 0$ en la función objetivo. Este anexo muestra las versiones con conservación estricta para cada caso.

XIV MODELO EN ESFERA CON CONSERVACIÓN DE VOLUMEN

Notación y variables

Sea $\mathcal{F} = \{1, \dots, N\}$ el conjunto de tetraedros. Para cada $i \in \mathcal{F}$ los vértices son $\mathbf{x}_{i\ell} \in \mathbb{R}^3$ con $\ell = 1, \dots, 4$. Las variables auxiliares de no solapamiento son $\mathbf{v}_{ij} \in \mathbb{R}^3$ (normal unitaria) y $\alpha_{ij}, \beta_{ij} \in \mathbb{R}$ para todo $i < j$.

GEOMETRÍA DEL TETRAEDRO i . Sean $\mathbf{x}_{i1}, \dots, \mathbf{x}_{i4} \in \mathbb{R}^3$ sus vértices. El volumen se calcula como

$$\text{Vol}_i = \frac{1}{6} \left| \det \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{i2} - \mathbf{x}_{i1} & \mathbf{x}_{i3} - \mathbf{x}_{i1} & \mathbf{x}_{i4} - \mathbf{x}_{i1} \end{bmatrix} \right|. \quad (76)$$

El área superficial total es

$$\text{Surf}_i = \frac{1}{2} \sum_{(a,b,c) \in \{(1,2,3), (1,2,4), (1,3,4), (2,3,4)\}} \|(\mathbf{x}_{ib} - \mathbf{x}_{ia}) \times (\mathbf{x}_{ic} - \mathbf{x}_{ia})\|_2. \quad (77)$$

Restricciones de contención

CONTENCIÓN EN ESFERA. Sea $R > 0$ el radio de la esfera centrada en el origen. Para todo vértice se impone

$$(x_{i\ell}^x)^2 + (x_{i\ell}^y)^2 + (x_{i\ell}^z)^2 \leq R^2. \quad (78)$$

Restricciones de conservación

CONSERVACIÓN DE VOLUMEN. Sea $V_0 > 0$ el volumen objetivo (del tetraedro rígido de referencia). Se impone

$$\text{Vol}_i = V_0, \quad \forall i. \quad (79)$$

Condiciones de no solapamiento

NO SOLAPAMIENTO ENTRE TETRAEDROS. Para todo par $i < j$ se impone un hiperplano separador con normal unitaria $\mathbf{v}_{ij} \in \mathbb{R}^3$ y escalares $\alpha_{ij}, \beta_{ij} \in \mathbb{R}$:

$$\langle \mathbf{v}_{ij}, \mathbf{x}_{i\ell} \rangle \leq \alpha_{ij}, \quad \forall \ell = 1, \dots, 4, \quad (80)$$

$$\langle \mathbf{v}_{ij}, \mathbf{x}_{j\ell} \rangle \geq -\beta_{ij}, \quad \forall \ell = 1, \dots, 4, \quad (81)$$

$$\alpha_{ij} + \beta_{ij} \leq 0, \quad (82)$$

$$\|\mathbf{v}_{ij}\|_2 = 1. \quad (83)$$

Si se desea separación estricta, sustituir (82) por $\alpha_{ij} + \beta_{ij} \leq -\varepsilon$ con $\varepsilon > 0$.

Función objetivo

FUNCIÓN OBJETIVO (TASA DE EMPAQUETADO). Para un contenedor fijo, maximizar la densidad equivale a maximizar el volumen total ocupado:

$$\max \sum_{i=1}^N \text{Vol}_i \quad \text{sujeto a las restricciones anteriores.} \quad (84)$$

En los modelos con Vol_i fijado la (84) es constante y puede sustituirse por funciones auxiliares (p. ej. maximizar margen de separación o minimizar desplazamientos), sin afectar la formulación de restricciones del presente anexo.

PARÁMETRO DE “SUAVIDAD” (OPCIONAL). Si se permite deformación controlada, puede incorporarse un penalizador cuadrático respecto a los invariantes conservados, por ejemplo $\lambda_V \sum_i (\text{Vol}_i - V_0)^2$ y/o $\lambda_A \sum_i (\text{Surf}_i - A_0)^2$ con $\lambda \geq 0$ en la función objetivo. Este anexo muestra las versiones con conservación estricta para cada caso.

XV CONT. CÚBICO CON CONSERVACIÓN DE VOLUMEN

TABLE 5: Experimentación: Contenedor cúbico con conservación de volumen.

NEOS job ID	items	lado	suavidad	t(secs.)	volumen (u^3)	% ⁷
16006485	125	2.61	0.9	81122.70	17.83	83%
16006488	125	2.63	0.8	85798.30	18.09	81%
16006496	125	2.63	0.7	84081.40	18.13	81%
16006486	125	2.63	0.85	78687.30	18.24	81%
16006497	125	2.64	0.65	80858.20	18.34	80%
16006498	125	2.66	0.6	94713.30	18.80	78%
15995033	110	2.52	0.95	57007.90	15.91	81%
15995140	110	2.52	0.6	53440.80	16.06	81%
15995038	110	2.53	0.9	69621.60	16.12	80%
15995115	110	2.54	0.8	52739.10	16.39	79%
15995009	110	2.54	1	57839.40	16.42	79%
15995152	110	2.56	0.45	57331.00	16.70	78%
15995145	110	2.56	0.55	57248.80	16.76	77%

Table 5 continuación de la página anterior...

NEOS job ID	items	lado	suavidad	t(secs.)	volumen (u^3)	% ⁸
15995147	110	2.57	0.5	51904.50	16.90	77%
16006404	110	2.61	0.35	64187.30	17.76	73%
16006405	110	2.65	0.3	68546.60	18.57	70%
16006406	110	2.68	0.25	65437.20	19.30	67%
16006407	110	2.69	0.2	61915.70	19.49	67%
16006408	110	2.73	0.15	67536.20	20.40	64%
16006409	110	2.78	0.1	67254.50	21.48	60%
16490419	100	2.42	0.87	79917.90	14.18	83%
16490377	100	2.42	0.95	57524.10	14.23	83%
16490374	100	2.42	0.99	56578.60	14.24	83%
16490416	100	2.43	0.9	78170.20	14.39	82%
16635271	100	2.44	0.65	65571.10	14.61	81%
16635272	100	2.45	0.7	74890.90	14.66	80%
16635269	100	2.45	0.55	74616.40	14.67	80%
16635534	100	2.46	0.75	84397.70	14.86	79%
16635255	100	2.47	0.35	89916.10	15.13	78%
16635268	100	2.49	0.5	74257.50	15.43	76%

Table 5 continuación de la página anterior...

NEOS job ID	items	lado	suavidad	t(secs.)	volumen (u^3)	% ⁸
16635270	100	2.49	0.6	73092.60	15.44	76%
16635267	100	2.49	0.45	74570.80	15.50	76%
16635266	100	2.51	0.4	66208.60	15.76	75%
16490438	100	2.51	0.38	85454.30	15.87	74%
16635223	100	2.58	0.25	89090.90	17.11	69%
16635161	100	2.60	0.15	90538.30	17.65	67%
16635160	100	2.67	0.1	65645.60	19.07	62%
16635159	100	2.71	0.05	89732.10	20.00	59%
15991309	92	2.33	0.85	65489.50	12.60	86%
15988070	92	2.36	0.95	71076.70	13.06	83%
15992262	92	2.36	0.8	62867.70	13.11	83%
15988069	92	2.36	1	41375.30	13.20	82%
15992318	92	2.40	0.65	65360.60	13.89	78%
15992273	92	2.41	0.7	68004.40	14.01	77%
15992365	92	2.41	0.4	55737.30	14.02	77%
15992338	92	2.41	0.6	38809.40	14.05	77%
15992358	92	2.43	0.5	59222.20	14.40	75%

Table 5 continuación de la página anterior...

NEOS job ID	items	lado	suavidad	t(secs.)	volumen (u^3)	% ⁸
15992405	92	2.50	0.3	59688.30	15.58	70%
15992418	92	2.57	0.15	39939.50	17.04	64%
15984290	89	2.35	1	40150.50	12.94	81%
15984328	89	2.36	0.75	33294.60	13.12	80%
15984321	89	2.36	0.85	32892.30	13.16	80%
15984330	89	2.38	0.7	39912.40	13.40	78%
15984314	89	2.39	0.95	34052.60	13.59	77%
15988035	89	2.39	0.65	60898.70	13.70	77%
15988058	89	2.41	0.5	39681.20	14.08	74%
15988044	89	2.43	0.4	39540.60	14.32	73%
15988045	89	2.44	0.35	70188.90	14.52	72%
15988049	89	2.48	0.3	38220.60	15.17	69%
15988053	89	2.49	0.25	38756.90	15.36	68%
15988054	89	2.50	0.2	69840.50	15.63	67%
15988055	89	2.57	0.15	63794.80	16.88	62%
15984105	78	2.22	0.95	22973.90	10.97	84%
15984106	78	2.22	0.9	26200.50	11.00	84%

Table 5 continuación de la página anterior...

NEOS job ID	items	lado	suavidad	t(secs.)	volumen (u^3)	% ⁸
15984172	78	2.23	0.8	31928.80	11.11	83%
15984175	78	2.24	0.7	27942.60	11.17	82%
15984109	78	2.25	0.85	30823.10	11.32	81%
15984174	78	2.25	0.75	24809.60	11.33	81%
15984095	78	2.25	1	30469.70	11.45	80%
15984176	78	2.29	0.6	31044.60	12.02	76%
15984191	78	2.30	0.5	25004.70	12.10	76%
15984190	78	2.32	0.55	25658.90	12.54	73%
15984213	78	2.34	0.45	28783.40	12.74	72%
15984218	78	2.35	0.35	30059.60	12.94	71%
15984231	78	2.35	0.3	26981.20	12.94	71%
15984233	78	2.41	0.25	27098.80	14.04	65%
15984256	78	2.43	0.2	24260.10	14.26	64%
15984264	78	2.47	0.15	26913.80	15.00	61%
15984265	78	2.48	0.1	26757.50	15.26	60%
15982921	65	2.08	0.95	29615.40	9.02	85%
15982918	65	2.09	1	28367.70	9.16	84%

Table 5 continuación de la página anterior...

NEOS job ID	items	lado	suavidad	t(secs.)	volumen (u^3)	% ⁸
15982931	65	2.10	0.85	29977.80	9.20	83%
15982941	65	2.12	0.7	27016.60	9.56	80%
15984046	65	2.12	0.6	13867.50	9.58	80%
15982937	65	2.13	0.8	28068.10	9.62	80%
15982924	65	2.13	0.9	28598.60	9.73	79%
15984085	65	2.14	0.45	15495.30	9.77	78%
15982938	65	2.15	0.75	27974.40	9.92	77%
15984086	65	2.15	0.4	17063.30	9.93	77%
15984048	65	2.15	0.55	15906.10	9.98	77%
15982942	65	2.16	0.65	29856.70	10.09	76%
15984052	65	2.17	0.5	17768.80	10.25	75%
15984088	65	2.19	0.3	15322.10	10.55	73%
15984089	65	2.23	0.25	17113.40	11.13	69%
15984090	65	2.25	0.2	19698.20	11.45	67%
15984091	65	2.33	0.15	14976.20	12.63	61%
15982119	55	1.94	0.9	10886.60	7.33	88%
15981952	55	1.97	0.95	10631.80	7.62	85%

Table 5 continuación de la página anterior...

NEOS job ID	items	lado	suavidad	t(secs.)	volumen (u^3)	% ⁸
15982141	55	1.98	0.65	9862.40	7.82	83%
15981949	55	1.99	1	9157.18	7.91	82%
15982129	55	2.01	0.85	9712.98	8.12	80%
15982153	55	2.01	0.6	16584.00	8.17	79%
15982135	55	2.03	0.75	10600.00	8.34	78%
15982379	55	2.03	0.55	10916.50	8.36	78%
15982138	55	2.04	0.7	16971.30	8.47	77%
15982132	55	2.04	0.8	10961.10	8.49	76%
15982382	55	2.07	0.5	10957.00	8.82	74%
15982414	55	2.08	0.4	10036.30	8.94	73%
15982408	55	2.08	0.45	10024.50	8.97	72%
15982905	55	2.10	0.3	30451.50	9.22	70%
15982903	55	2.10	0.35	20759.80	9.26	70%
15982906	55	2.12	0.25	22621.40	9.56	68%
15982908	55	2.14	0.2	21673.10	9.80	66%
16491319	50	1.91	0.99	18717.90	6.94	85%
16491322	50	1.92	0.9	14247.20	7.08	83%

Table 5 continuación de la página anterior...

NEOS job ID	items	lado	suavidad	t(secs.)	volumen (u^3)	% ⁸
16491324	50	1.93	0.85	30047.40	7.17	82%
16491330	50	1.93	0.75	15947.80	7.22	82%
16491333	50	1.94	0.65	29932.80	7.30	81%
16491320	50	1.94	0.95	29146.10	7.33	80%
16491326	50	1.94	0.8	19307.20	7.34	80%
15981948	50	1.95	1	8512.57	7.44	79%
16491334	50	1.95	0.6	18403.50	7.46	79%
16491335	50	1.96	0.55	15496.30	7.51	78%
16491331	50	1.98	0.7	16512.30	7.72	76%
16491336	50	1.99	0.5	16071.80	7.91	74%
16491337	50	2.02	0.45	16637.90	8.26	71%
16491339	50	2.03	0.4	29948.10	8.35	71%
16491359	50	2.04	0.3	16070.60	8.44	70%
16491353	50	2.04	0.35	20240.80	8.46	70%
16491366	50	2.06	0.25	17519.20	8.77	67%
16491367	50	2.11	0.2	19453.90	9.35	63%
16491370	50	2.12	0.1	15238.60	9.50	62%

Table 5 continuación de la página anterior...

NEOS job ID	items	lado	suavidad	t(secs.)	volumen (u^3)	% ⁸
16491369	50	2.13	0.15	17427.90	9.69	61%
16505181	50	2.25	0.05	14448.10	11.36	52%
15980860	45	1.85	0.95	6726.46	6.30	84%
15980856	45	1.87	1	6764.66	6.49	82%
15980865	45	1.87	0.85	6793.06	6.54	81%
15980867	45	1.89	0.8	6790.10	6.71	79%
15980863	45	1.89	0.9	6877.75	6.74	79%
15980892	45	1.90	0.75	7219.46	6.82	78%
15981599	45	1.90	0.6	5761.10	6.87	77%
15981536	45	1.90	0.65	6654.04	6.89	77%
15981517	45	1.91	0.7	6465.93	6.97	76%
15981873	45	1.91	0.4	6954.68	7.01	76%
15981626	45	1.92	0.5	6675.03	7.12	75%
15981871	45	1.93	0.45	7110.31	7.18	74%
15981622	45	1.93	0.55	6926.89	7.21	74%
15981881	45	1.97	0.3	7698.98	7.68	69%
15981880	45	1.98	0.35	6974.29	7.81	68%

Table 5 continuación de la página anterior...

NEOS job ID	items	lado	suavidad	t(secs.)	volumen (u^3)	% ⁸
15981887	45	2.02	0.25	10062.60	8.21	65%
15981892	45	2.03	0.2	6117.13	8.43	63%
15981894	45	2.06	0.15	6447.88	8.78	60%
15981897	45	2.09	0.1	7450.34	9.07	58%
15980784	40	1.78	1	5201.72	5.65	83%
15980790	40	1.80	0.75	5008.75	5.80	81%
15980786	40	1.81	0.9	4642.92	5.95	79%
15980791	40	1.81	0.7	4708.04	5.96	79%
15980793	40	1.81	0.65	5439.27	5.97	79%
15980789	40	1.82	0.8	7893.13	5.99	79%
15980788	40	1.82	0.85	5829.58	5.99	79%
15980783	40	1.82	0.95	7590.69	6.01	78%
15980835	40	1.86	0.55	6276.08	6.43	73%
15980841	40	1.86	0.4	6301.09	6.46	73%
15980836	40	1.88	0.5	4829.22	6.68	71%
15980847	40	1.92	0.25	8540.87	7.05	67%
15980843	40	1.92	0.35	5396.44	7.05	67%

Table 5 continuación de la página anterior...

NEOS job ID	items	lado	suavidad	t(secs.)	volumen (u^3)	% ⁸
15980851	40	1.99	0.1	5314.63	7.94	59%
15980850	40	2.00	0.15	6584.05	7.95	59%
15979923	35	1.71	0.95	3818.39	4.99	83%
15980034	35	1.72	0.75	3891.04	5.05	82%
15980055	35	1.74	0.6	4464.27	5.30	78%
15979928	35	1.75	0.9	4094.56	5.35	77%
15980050	35	1.76	0.65	12996.80	5.45	76%
15980081	35	1.77	0.45	13190.60	5.54	75%
15980319	35	1.79	0.35	3888.79	5.69	73%
15980065	35	1.79	0.5	12496.70	5.70	72%
15980313	35	1.80	0.4	4161.34	5.87	70%
15980042	35	1.81	0.7	3843.90	5.90	70%
15980324	35	1.81	0.3	6643.15	5.93	70%
15980333	35	1.87	0.25	6405.72	6.50	64%
15980337	35	1.90	0.2	7272.54	6.91	60%
15980346	35	1.92	0.15	3931.57	7.13	58%
15980761	35	1.95	0.1	3328.81	7.41	56%

Table 5 continuación de la página anterior...

NEOS job ID	items	lado	suavidad	t(secs.)	volumen (u^3)	% ⁸
16635099	30	1.59	0.99	3704.84	4.02	88%
15979581	30	1.59	0.95	3503.89	4.04	88%
15979591	30	1.63	0.8	2468.84	4.30	82%
16635143	30	1.63	0.7	3596.93	4.31	82%
15979578	30	1.63	1	8961.80	4.32	82%
15979858	30	1.65	0.55	2479.51	4.46	79%
15979584	30	1.65	0.9	2600.54	4.48	79%
15979587	30	1.66	0.85	3533.75	4.59	77%
15979830	30	1.67	0.75	3093.89	4.68	76%
15979835	30	1.68	0.6	3555.80	4.71	75%
15979866	30	1.69	0.45	3112.46	4.81	73%
15979833	30	1.69	0.65	2410.15	4.83	73%
16635111	30	1.71	0.3	10745.00	4.99	71%
15979883	30	1.71	0.4	3022.78	5.02	70%
15979885	30	1.73	0.35	2420.60	5.19	68%
15979862	30	1.74	0.5	3077.14	5.29	67%
15979890	30	1.78	0.25	3125.00	5.61	63%

Table 5 continuación de la página anterior...

NEOS job ID	items	lado	suavidad	t(secs.)	volumen (u^3)	% ⁸
15979896	30	1.78	0.2	3171.78	5.67	62%
15979901	30	1.81	0.15	3098.29	5.93	60%
15979903	30	1.83	0.1	3276.24	6.16	57%
16635155	30	1.87	0.05	10959.90	6.50	54%
15979410	25	1.58	0.45	1637.24	3.91	75%
15979389	25	1.58	0.55	4707.52	3.92	75%
15979575	25	1.58	0.5	4711.30	3.98	74%
15979413	25	1.60	0.4	1804.87	4.09	72%
15979419	25	1.60	0.35	2085.02	4.09	72%
15979426	25	1.60	0.3	5565.83	4.12	71%
15979437	25	1.65	0.25	2191.07	4.53	65%
15979446	25	1.67	0.2	1975.25	4.63	64%
15979449	25	1.71	0.15	1822.49	4.98	59%
15979572	25	1.75	0.1	1603.80	5.36	55%
16527197	10	1.10	0.95	90.51	1.34	88%
16527194	10	1.10	1	151.01	1.34	88%
16527198	10	1.11	0.9	172.95	1.37	86%

Table 5 continuación de la página anterior...

NEOS job ID	items	lado	suavidad	t(secs.)	volumen (u^3)	% ⁸
16527195	10	1.11	0.99	90.95	1.38	86%
16527200	10	1.13	0.8	91.75	1.43	82%
16527199	10	1.13	0.85	93.45	1.45	81%
16527203	10	1.13	0.75	100.33	1.45	81%
16527205	10	1.14	0.7	76.54	1.48	79%
16527206	10	1.14	0.65	77.47	1.50	79%
16527212	10	1.15	0.6	83.65	1.50	78%
16527213	10	1.15	0.55	79.41	1.53	77%
16527215	10	1.18	0.45	82.15	1.63	72%
16527214	10	1.18	0.5	80.51	1.64	72%
16527216	10	1.18	0.4	83.63	1.64	72%
16527217	10	1.20	0.35	81.44	1.74	68%
16527218	10	1.20	0.3	80.26	1.75	67%
16527220	10	1.23	0.25	84.79	1.87	63%
16527223	10	1.27	0.2	108.19	2.04	58%
16527225	10	1.31	0.15	108.92	2.25	52%
16527226	10	1.32	0.1	84.45	2.30	51%

Table 5 continuación de la página anterior...

NEOS job ID	items	lado	suavidad	t(secs.)	volumen (u^3)	% ⁸
16527227	10	1.35	0.05	80.09	2.46	48%
16527193	5	0.89	1	36.42	0.71	83%
16527172	5	0.89	0.99	45.48	0.71	83%
16527174	5	0.89	0.9	24.53	0.71	83%
16527175	5	0.89	0.85	29.20	0.71	83%
16527176	5	0.89	0.8	22.08	0.71	83%
16527177	5	0.89	0.75	19.73	0.71	83%
16527178	5	0.89	0.7	26.71	0.71	83%
16527179	5	0.89	0.65	20.85	0.71	83%
16527180	5	0.89	0.6	24.46	0.71	83%
16527173	5	0.90	0.95	20.37	0.74	80%
16527181	5	0.90	0.55	23.68	0.74	80%
16527183	5	0.91	0.45	43.65	0.75	78%
16527182	5	0.92	0.5	45.99	0.79	75%
16527184	5	0.97	0.4	22.03	0.90	65%
16527185	5	0.98	0.35	21.12	0.95	62%
16527186	5	1.00	0.3	55.98	0.99	60%

Table 5 continuación de la página anterior...

NEOS job ID	items	lado	suavidad	t(secs.)	volumen (u^3)	% ⁸
16527187	5	1.02	0.25	56.60	1.05	56%
16527188	5	1.02	0.2	50.53	1.07	55%
16527189	5	1.07	0.15	37.31	1.22	48%
16527190	5	1.09	0.1	39.04	1.31	45%
16527191	5	1.14	0.05	39.14	1.49	40%

XVI CONT. CÚBICO CON CONSERVACIÓN DEL ÁREA DE LA SUPERFICIE

TABLE 6: Experimentación: Contenedor cúbico con conservación del área de la superficie

NEOS job ID	items	lado	suavidad	t(secs.)	volumen (u^3)	% ⁹
16635023	5	0.86	0.75	24.77	0.63	94%
16635024	5	0.86	0.7	22.95	0.63	94%
16635025	5	0.86	0.65	27.36	0.63	94%
16514204	75	2.07	0.6	26816.90	8.93	99%
16513740	30	1.58	0.6	4026.75	3.92	90%
16511951	10	1.09	0.6	85.18	1.29	91%
16635027	5	0.86	0.6	21.01	0.63	94%
16496641	100	2.31	0.55	59119.40	12.31	96%
16514207	75	2.13	0.55	21804.60	9.70	91%
16514131	50	1.86	0.55	10155.50	6.46	91%
16513745	30	1.56	0.55	2368.54	3.82	93%
16511952	10	1.10	0.55	86.08	1.35	87%
16635029	5	0.86	0.55	28.90	0.63	94%

Table 6 continuación de la página anterior...

NEOS job ID	items	lado	suavidad	t(secs.)	volumen (u^3)	% ¹⁰
16496642	100	2.35	0.5	71140.90	13.02	91%
16514222	75	2.14	0.5	22930.60	9.85	90%
16514132	50	1.90	0.5	9215.24	6.84	86%
16513751	30	1.57	0.5	2331.27	3.87	91%
16511953	10	1.08	0.5	101.83	1.28	92%
16635030	5	0.86	0.5	37.27	0.63	94%
16496648	100	2.42	0.45	88836.00	14.20	83%
16513757	30	1.64	0.45	3376.53	4.39	80%
16511955	10	1.13	0.45	93.54	1.44	82%
16635031	5	0.87	0.45	22.60	0.66	89%
16514225	75	2.22	0.4	22764.20	10.96	81%
16514141	50	1.95	0.4	9227.92	7.40	80%
16513759	30	1.65	0.4	2239.88	4.49	79%
16511956	10	1.14	0.4	96.89	1.46	80%
16635032	5	0.91	0.4	18.76	0.75	79%
16496668	100	2.49	0.35	71456.50	15.50	76%
16514233	75	2.27	0.35	39740.00	11.74	75%

Table 6 continuación de la página anterior...

NEOS job ID	items	lado	suavidad	t(secs.)	volumen (u^3)	% ¹⁰
16514143	50	1.96	0.35	25836.40	7.56	78%
16513763	30	1.70	0.35	2937.58	4.92	72%
16511957	10	1.15	0.35	145.45	1.54	77%
16635033	5	0.93	0.35	28.29	0.81	72%
16496670	100	2.52	0.3	71273.50	16.05	73%
16514257	75	2.27	0.3	51941.00	11.75	75%
16514147	50	2.02	0.3	10067.90	8.30	71%
16513765	30	1.70	0.3	4198.34	4.90	72%
16511958	10	1.19	0.3	141.19	1.69	70%
16635034	5	0.97	0.3	19.06	0.90	65%
16496672	100	2.55	0.25	73472.80	16.57	71%
16514260	75	2.29	0.25	47093.20	12.03	73%
16513768	30	1.79	0.25	2924.63	5.76	61%
16513153	10	1.24	0.25	104.34	1.90	62%
16635035	5	0.99	0.25	25.32	0.98	60%
16496673	100	2.57	0.2	68692.90	16.88	70%
16514261	75	2.42	0.2	22199.40	14.10	63%

Table 6 continuación de la página anterior...

NEOS job ID	items	lado	suavidad	t(secs.)	volumen (u^3)	% ¹⁰
16514150	50	2.10	0.2	10455.40	9.20	64%
16513774	30	1.79	0.2	2859.02	5.73	62%
16513154	10	1.26	0.2	130.64	2.02	58%
16635036	5	1.03	0.2	35.22	1.09	54%
16496674	100	2.64	0.15	85523.00	18.36	64%
16514159	50	2.11	0.15	6974.52	9.42	63%
16513158	10	1.32	0.15	101.10	2.31	51%
16635037	5	1.07	0.15	40.73	1.22	48%
16496676	100	2.70	0.1	71716.50	19.70	60%
16514265	75	2.43	0.1	23348.70	14.40	61%
16514161	50	2.19	0.1	7188.82	10.52	56%
16513826	30	1.85	0.1	8129.25	6.31	56%
16513163	10	1.36	0.1	94.03	2.52	47%
16635038	5	1.09	0.1	19.37	1.29	46%
16521912	10	1.37	0.05	103.89	2.56	46%
16635039	5	1.13	0.05	18.97	1.44	41%

XVII CONT. CÚBICO CON CONSERVACIÓN MIXTA

TABLE 7: Experimentación: Contenedor cúbico con conservación de volumen y del área de la superficie

NEOS job ID	items	lado	suavidad	t(secs.)	volumen (u^3)	% ¹¹
16505090	85	2.68	0.75	50676.70	19.27	52%
16505093	85	2.73	0.65	52463.80	20.31	49%
16516200	75	2.07	0.6	40842.40	8.93	99%
16516205	75	2.13	0.55	46826.90	9.70	91%
16516264	50	1.86	0.55	18695.60	6.46	91%
16516073	45	1.79	0.55	14635.50	5.75	92%
16515967	15	1.25	0.55	738.43	1.96	90%
16505098	85	2.70	0.5	49872.40	19.70	51%
16516211	75	2.14	0.5	35273.90	9.85	90%
16516265	50	1.90	0.5	18203.50	6.84	86%
16516079	45	1.84	0.5	13571.90	6.23	85%
16515972	15	1.27	0.5	431.93	2.03	87%
16516214	75	2.21	0.45	33861.00	10.84	82%

Table 7 continuación de la página anterior...

NEOS job ID	items	lado	suavidad	t(secs.)	volumen (u^3)	% ¹²
16516268	50	1.96	0.45	17473.70	7.51	78%
16516085	45	1.84	0.45	23933.50	6.20	86%
16515975	15	1.27	0.45	1344.63	2.05	86%
16516270	50	1.95	0.4	16231.70	7.40	80%
16516088	45	1.91	0.4	11526.40	6.96	76%
16515978	15	1.30	0.4	466.50	2.21	80%
16516221	75	2.27	0.35	36699.20	11.64	76%
16516271	50	2.05	0.35	24374.10	8.62	68%
16516089	45	1.97	0.35	19892.70	7.63	70%
16515986	15	1.33	0.35	541.03	2.36	75%
16516222	75	2.31	0.3	36739.80	12.28	72%
16516274	50	2.02	0.3	17472.90	8.30	71%
16516095	45	2.00	0.3	13363.60	7.98	66%
16515990	15	1.40	0.3	410.82	2.75	64%
16501277	100	2.85	0.25	47686.00	23.04	51%
16505104	85	2.69	0.25	55744.90	19.36	52%
16516225	75	2.36	0.25	38014.20	13.18	67%

Table 7 continuación de la página anterior...

NEOS job ID	items	lado	suavidad	t(secs.)	volumen (u^3)	% ¹²
16516099	45	1.97	0.25	15853.80	7.59	70%
16516000	15	1.37	0.25	416.37	2.57	69%
16516278	50	2.10	0.2	19019.80	9.20	64%
16516102	45	1.99	0.2	15050.60	7.87	67%
16516010	15	1.42	0.2	690.16	2.87	62%
16505106	85	2.68	0.15	53461.20	19.18	52%
16516232	75	2.42	0.15	40909.60	14.21	62%
16516279	50	2.11	0.15	15600.80	9.42	63%
16516017	15	1.43	0.15	1839.31	2.95	60%
16516235	75	2.43	0.1	49173.60	14.40	61%
16516281	50	2.19	0.1	18567.10	10.52	56%
16516104	45	2.13	0.1	18862.10	9.65	55%
16516020	15	1.47	0.1	707.44	3.18	56%
16505109	85	2.73	0.05	57358.80	20.26	49%
16516236	75	2.54	0.05	36071.00	16.38	54%
16516282	50	2.22	0.05	19008.90	11.01	54%
16516110	45	2.14	0.05	19902.50	9.80	54%

Table 7 continuación de la página anterior...

NEOS job ID	items	lado	suavidad	t(secs.)	volumen (u^3)	% ¹²
16516032	15	1.56	0.05	715.84	3.80	47%
16516284	50	2.26	0.01	12559.10	11.58	51%
16516113	45	2.22	0.01	14556.10	10.89	49%
16516311	35	2.11	0.01	10656.70	9.38	44%
16516036	15	1.58	0.01	386.79	3.98	44%

XVIII CONT. ESFÉRICO CON CONSERVACIÓN DEL VOLUMEN

TABLE 8: Experimentación: Contenedor esférico con conservación del volumen

NEOS job ID	items	radio	suavidad	t (secs.)	volumen (u^3)	% ¹³
16053467	102	1.54486	1	47645.7	15.44	78%
16053530	102	1.55466	0.95	49353.6	15.74	76%
16053539	102	1.55951	0.9	50563.3	15.89	76%
16053694	102	1.56973	0.85	50136.1	16.20	74%
16053697	102	1.60143	0.75	60345.5	17.20	70%
16053710	102	1.57299	0.65	60194.3	16.30	74%
16053711	102	1.58017	0.6	50980	16.53	73%
16053716	102	1.58508	0.5	46615.9	16.68	72%
16053720	102	1.62016	0.45	63957	17.81	67%
16053725	102	1.63498	0.35	50255.1	18.31	66%
16053729	102	1.63704	0.3	63500.9	18.38	65%
16053749	102	1.6792	0.25	62539.9	19.83	61%
16069275	102	1.67171	0.2	51180.2	19.57	61%

Table 8 continuación de la página anterior...

NEOS job ID	items	radio	suavidad	t(secs.)	volumen (u^3)	% ¹⁴
16069276	102	1.70671	0.15	51091.9	20.82	58%
16069282	102	1.71418	0.1	46580.7	21.10	57%
16490496	100	1.54071	0.99	87691.5	15.32	77%
16490500	100	1.54442	0.8	88201.5	15.43	76%
16490504	100	1.59637	0.6	87157.7	17.04	69%
16490510	100	1.64801	0.35	86724.2	18.75	63%
16490513	100	1.65475	0.2	85812.2	18.98	62%
16490514	100	1.67873	0.15	86141.1	19.82	59%
16491210	100	1.71563	0.1	68263	21.15	56%
16027593	85	1.47633	1	32647.2	13.48	74%
16027597	85	1.47973	0.95	30766.1	13.57	74%
16027599	85	1.46794	0.9	47520.2	13.25	76%
16027611	85	1.4472	0.85	28153.3	12.70	79%
16051149	85	1.45121	0.8	90133.7	12.80	78%
16051153	85	1.46484	0.75	30950.8	13.17	76%
16051155	85	1.50169	0.7	29247.9	14.19	71%
16051162	85	1.48263	0.65	31582.2	13.65	73%

Table 8 continuación de la página anterior...

NEOS job ID	items	radio	suavidad	t(secs.)	volumen (u^3)	% ¹⁴
16051165	85	1.47154	0.6	34031.5	13.35	75%
16051167	85	1.49326	0.55	29463.1	13.95	72%
16051169	85	1.50097	0.5	34798.6	14.16	71%
16051171	85	1.49581	0.45	89405.3	14.02	71%
16051173	85	1.51926	0.4	90396.6	14.69	68%
16051212	85	1.52139	0.35	31532.4	14.75	68%
16051215	85	1.52097	0.3	29648.3	14.74	68%
16051219	85	1.56544	0.25	92528.8	16.07	62%
16051224	85	1.563	0.2	33786.9	15.99	63%
16051226	85	1.60323	0.15	29583.5	17.26	58%
16051228	85	1.63097	0.1	91358.1	18.17	55%
16491244	50	1.265	0.99	10343.4	8.48	69%
16027439	50	1.24492	0.95	10252	8.08	73%
16027447	50	1.25155	0.9	10563.7	8.21	72%
16027452	50	1.24379	0.85	9155.77	8.06	73%
16027462	50	1.26495	0.8	21088.8	8.48	70%
16027468	50	1.26359	0.75	10741.4	8.45	70%

Table 8 continuación de la página anterior...

NEOS job ID	items	radio	suavidad	t(secs.)	volumen (u^3)	% ¹⁴
16491274	50	1.24671	0.7	14929.3	8.12	73%
16027475	50	1.27139	0.65	23334.7	8.61	68%
16027482	50	1.26212	0.6	9420.8	8.42	70%
16027485	50	1.26275	0.55	21827.1	8.43	70%
16027521	50	1.2605	0.5	8820.86	8.39	70%
16491298	50	1.25404	0.45	13429.1	8.26	71%
16027534	50	1.30441	0.4	10124.7	9.30	63%
16491301	50	1.26467	0.35	30405.3	8.47	70%
16027565	50	1.28272	0.3	9187.63	8.84	67%
16027571	50	1.27971	0.25	9214.12	8.78	67%
16027573	50	1.30646	0.2	9140.56	9.34	63%
16027574	50	1.35027	0.15	9782.28	10.31	57%
16027578	50	1.36653	0.1	10562.1	10.69	55%
16451475	35	1.1169	0.5	3943.27	5.84	71%
16512042	10	0.839323	0.99	136.314	2.48	48%
16512041	5	0.725983	0.99	62.7433	1.60	37%

XIX CONT. ESFÉRICO CON CONSERVACIÓN DEL ÁREA DE LA SUPERFICIE

TABLE 9: Experimentación: Contenedor esférico con conservación del área de la superficie

NEOS job ID	items	radio	suavidad ¹⁵	t (secs.)	volumen (u^3)	% ¹⁶
16515648	5	0.658037	0.99	20.4412	1.19	49%
16515651	5	0.658035	0.95	10.4522	1.19	49%
16515656	5	0.658037	0.9	23.3662	1.19	49%
16515660	5	0.658037	0.85	8.69435	1.19	49%
16515664	5	0.658037	0.8	9.3954	1.19	49%
16515667	5	0.658037	0.75	12.0423	1.19	49%
16515670	5	0.678311	0.7	13.4556	1.31	45%
16515671	5	0.690421	0.65	13.917	1.38	43%
16515672	5	0.699287	0.6	13.3591	1.43	41%
16515673	5	0.708906	0.55	16.0927	1.49	39%
16515675	5	0.716925	0.5	13.6732	1.54	38%
16515678	5	0.72171	0.45	26.3216	1.57	37%
16515679	5	0.735555	0.4	16.7722	1.67	35%

Table 9 continuación de la página anterior...

NEOS job ID	items	radio	suavidad	t(secs.)	volumen (u^3)	% ¹⁷
16515680	5	0.75354	0.35	26.3445	1.79	33%
16515681	5	0.771567	0.3	30.3554	1.92	31%
16515682	5	0.790439	0.25	31.3654	2.07	28%
16515684	5	0.812044	0.2	20.2767	2.24	26%
16515685	5	0.829034	0.15	34.62	2.39	25%
16515686	5	0.840319	0.1	26.5268	2.49	24%
16515727	10	0.658036	0.99	92.3661	1.19	99%
16515726	10	0.658036	0.95	68.4322	1.19	99%
16515724	10	0.658037	0.9	137.597	1.19	99%
16515723	10	0.658037	0.85	74.1311	1.19	99%
16515721	10	0.658036	0.8	250.833	1.19	99%
16515720	10	0.658036	0.75	76.9718	1.19	99%
16515718	10	0.714968	0.7	87.4454	1.53	77%
16515717	10	0.759326	0.65	81.6787	1.83	64%
16515713	10	0.794732	0.6	344.279	2.10	56%
16515711	10	0.803269	0.55	110.328	2.17	54%
16515710	10	0.825671	0.5	159.398	2.36	50%

Table 9 continuación de la página anterior...

NEOS job ID	items	radio	suavidad	t(secs.)	volumen (u^3)	% ¹⁷
16515707	10	0.835906	0.45	358.319	2.45	48%
16515706	10	0.84952	0.4	130.115	2.57	46%
16515754	10	0.860651	0.35	186.864	2.67	44%
16515702	10	0.866803	0.3	135.759	2.73	43%
16515700	10	0.883236	0.25	332.472	2.89	41%
16515699	10	0.89211	0.2	137.437	2.97	40%
16515698	10	0.904205	0.15	408.292	3.10	38%
16515696	10	0.923695	0.1	115.632	3.30	36%
16515694	10	0.945466	0.05	128.453	3.54	33%
16515917	30	0.965024	0.65	3974.29	3.76	94%
16515922	30	1.01717	0.6	3291.13	4.41	80%
16515924	30	1.05825	0.55	10340.3	4.96	71%
16515927	30	1.05947	0.5	4249.15	4.98	71%
16515934	30	1.04402	0.45	5231.68	4.77	74%
16515936	30	1.07268	0.4	10146.2	5.17	68%
16515938	30	1.05854	0.35	4404.82	4.97	71%
16515942	30	1.06164	0.3	5425.33	5.01	71%

Table 9 continuación de la página anterior...

NEOS job ID	items	radio	suavidad	t(secs.)	volumen (u^3)	% ¹⁷
16515944	30	1.06701	0.25	3413.17	5.09	69%
16515947	30	1.07941	0.2	5326.81	5.27	67%
16515948	30	1.10302	0.15	4487.34	5.62	63%
16515950	30	1.14003	0.1	4189.65	6.21	57%
16515954	30	1.14964	0.05	4046.1	6.36	56%
16516504	50	1.22867	1	10903.8	7.77	76%
16516043	50	1.13275	0.65	18854.7	6.09	97%
16516040	50	1.16245	0.6	15963	6.58	90%
16516027	50	1.19988	0.55	15497.8	7.24	81%
16516021	50	1.22588	0.5	11066.6	7.72	76%
16516018	50	1.26556	0.45	16131.5	8.49	69%
16516008	50	1.23153	0.4	11984.1	7.82	75%
16516006	50	1.26707	0.35	9517.55	8.52	69%
16516005	50	1.27318	0.3	8455.36	8.64	68%
16516001	50	1.28412	0.25	10557.1	8.87	66%
16515998	50	1.29711	0.2	11218.8	9.14	64%
16515996	50	1.32762	0.15	7296.53	9.80	60%

Table 9 continuación de la página anterior...

NEOS job ID	items	radio	suavidad	t(secs.)	volumen (u^3)	% ¹⁷
16515992	50	1.36897	0.1	13320.5	10.75	55%
16515989	50	1.41399	0.05	8806.37	11.84	50%
16516075	70	1.29491	0.6	33383.2	9.10	91%
16516077	70	1.35544	0.5	45621.5	10.43	79%
16516080	70	1.36383	0.45	35041.9	10.63	78%
16516084	70	1.41922	0.3	47589.8	11.97	69%
16516086	70	1.4362	0.25	47899.5	12.41	66%
16516090	70	1.46553	0.2	49238.7	13.18	63%
16516091	70	1.49821	0.15	24801.8	14.09	59%
16516092	70	1.52157	0.1	33335.7	14.76	56%
16516093	70	1.57754	0.05	29732.5	16.44	50%
16504971	87	1.44381	0.45	33069.9	12.61	81%
16504973	87	1.45659	0.4	36953.1	12.94	79%
16504974	87	1.49975	0.35	31817.8	14.13	73%
16504981	87	1.53684	0.25	36401.1	15.20	67%
16504982	87	1.57953	0.2	41679.7	16.51	62%
16504967	100	1.51512	0.45	54106.8	14.57	81%

XX CONT. ESFÉRICO CON CONSERVACIÓN MIXTA

TABLE 10: Experimentación: Contenedor esférico con conservación del volumen y del área de la superficie

NEOS job ID	items	radio	suavidad	t (secs.)	volumen (u^3)	% ¹⁸
16504176	100	1.78779	0.1	46855	23.94	49%
16504160	100	1.78675	0.05	43428.9	23.89	49%
16506403	70	1.61114	0.9	24765.7	17.52	47%
16506467	70	1.60184	0.8	26728.7	17.22	48%
16506472	70	1.61171	0.75	68722.5	17.54	47%
16506500	70	1.6095	0.7	29342.3	17.46	47%
16506510	70	1.59433	0.65	22999.8	16.98	49%
16506516	70	1.60414	0.6	23403.6	17.29	48%
16506553	70	1.62293	0.5	28287.1	17.91	46%
16506566	70	1.60128	0.4	22658.2	17.20	48%
16506628	70	1.59894	0.25	23981.1	17.12	48%
16506759	70	1.61147	0.2	62083.4	17.53	47%
16506761	70	1.60229	0.15	63352.4	17.23	48%

Table 10 continuación de la página anterior...

NEOS job ID	items	radio	suavidad	t(secs.)	volumen (u^3)	% ¹⁹
16506764	70	1.59815	0.1	23551.8	17.10	48%
16506768	70	1.59424	0.05	22460.7	16.97	49%
16506771	70	1.59063	0.01	27893.8	16.86	49%
16508691	50	1.4268	0.99	10578	12.17	48%
16508671	50	1.44752	0.95	28712.3	12.70	46%
16508696	50	1.43858	0.85	11967.9	12.47	47%
16508827	50	1.44323	0.8	28882.8	12.59	47%
16508826	50	1.45547	0.75	11957.6	12.92	46%
16508794	50	1.44176	0.7	11464.6	12.55	47%
16508793	50	1.44544	0.65	17233.7	12.65	47%
16508790	50	1.44228	0.55	12404.5	12.57	47%
16508789	50	1.45266	0.5	12326.7	12.84	46%
16508785	50	1.44755	0.35	32070	12.71	46%
16508784	50	1.43592	0.3	12578.2	12.40	48%
16508782	50	1.42782	0.25	12281.9	12.19	48%
16508781	50	1.4315	0.2	15616.9	12.29	48%
16508780	50	1.4582	0.15	32373.1	12.99	45%

Table 10 continuación de la página anterior...

NEOS job ID	items	radio	suavidad	t(secs.)	volumen (u^3)	% ¹⁹
16508774	50	1.48443	0.1	13199.1	13.70	43%
16508765	50	1.44682	0.05	16439	12.69	46%
16508763	50	1.44417	0.01	33691	12.62	47%
16508829	30	1.20273	0.99	5695.32	7.29	49%
16508832	30	1.19241	0.95	10061.7	7.10	50%
16508835	30	1.19049	0.9	4128.54	7.07	50%
16508841	30	1.2587	0.85	4149.87	8.35	42%
16508842	30	1.21051	0.8	6544.31	7.43	48%
16508850	30	1.21661	0.75	4323.51	7.54	47%
16508854	30	1.20504	0.7	10876.1	7.33	48%
16508859	30	1.21787	0.65	4278.96	7.57	47%
16508864	30	1.17939	0.6	4364.11	6.87	51%
16508867	30	1.21312	0.55	5618.38	7.48	47%
16508871	30	1.19911	0.5	4179.14	7.22	49%
16508875	30	1.21128	0.45	4218.53	7.44	47%
16508876	30	1.18659	0.4	4132.1	7.00	51%
16508878	30	1.21541	0.35	10965.8	7.52	47%

Table 10 continuación de la página anterior...

NEOS job ID	items	radio	suavidad	t(secs.)	volumen (u^3)	% ¹⁹
16508882	30	1.18382	0.25	5782.29	6.95	51%
16508886	30	1.18416	0.2	4261.83	6.96	51%
16508889	30	1.17695	0.15	4043.8	6.83	52%
16508892	30	1.19876	0.1	12266.2	7.22	49%
16508894	30	1.18878	0.05	4341.25	7.04	50%
16508895	30	1.21379	0.01	6085.22	7.49	47%
16505117	15	0.987583	0.1	1781.82	4.03	44%
16505119	15	0.980392	0.05	1621	3.95	45%
16506773	10	0.999974	0.99	226.454	4.19	28%
16506776	10	0.992496	0.95	246.419	4.10	29%
16506778	10	0.997975	0.9	318.311	4.16	28%
16506779	10	0.998736	0.85	212.326	4.17	28%
16506791	10	0.974991	0.8	426.443	3.88	30%
16506794	10	0.998295	0.75	316.742	4.17	28%
16506795	10	0.992533	0.7	1316.83	4.10	29%
16506797	10	0.999761	0.65	419.29	4.19	28%
16506798	10	0.995642	0.6	268.602	4.13	29%

Table 10 continuación de la página anterior...

NEOS job ID	items	radio	suavidad	t(secs.)	volumen (u^3)	% ¹⁹
16506805	10	0.991391	0.55	337.374	4.08	29%
16506809	10	0.99584	0.5	397.494	4.14	28%
16506811	10	0.993899	0.45	349.038	4.11	29%
16506813	10	0.995229	0.4	295.641	4.13	29%
16506818	10	0.992742	0.35	373.444	4.10	29%
16506821	10	0.991675	0.3	319.867	4.09	29%
16506826	10	0.987133	0.25	499.648	4.03	29%
16506833	10	0.987738	0.2	408.644	4.04	29%
16506841	10	0.986958	0.15	432.028	4.03	29%
16506855	10	0.989068	0.1	412.815	4.05	29%
16506861	10	0.949456	0.05	462.439	3.59	33%
16506862	10	0.961408	0.01	201.355	3.72	32%

XXI CONT. CILÍNDRICO CON CONSERVACIÓN DEL VOLUMEN

TABLE 11: Experimentación: Contenedor cilíndrico con conservación del volumen

NEOS job ID	items	radio	altura	suavidad	t (secs.)	volumen (u^3)	% ²⁰
16516512	50	1.00363	2.50907	1	11162.6	7.94	74%
16489418	100	1.21346	3.0356	0.99	40711.2	14.04	84%
16491373	50	0.99779	2.49448	0.99	29144.7	7.80	76%
16519045	30	0.83711	2.09278	0.99	2978.38	4.61	77%
16518747	10	0.61012	1.5253	0.99	155.449	1.78	66%
16487823	5	0.512996	1.28249	0.99	9.27867	1.06	56%
16491375	50	0.994192	2.48573	0.95	15126.2	7.72	76%
16519044	30	0.864902	2.16226	0.95	3023.74	5.08	70%
16518751	10	0.617359	1.5434	0.95	135.18	1.85	64%
16516472	5	0.516338	1.29089	0.95	9.43677	1.08	54%
16491377	50	1.00237	2.50592	0.9	17255.8	7.91	74%
16519034	30	0.856788	2.14197	0.9	3139.84	4.94	72%
16518754	10	0.624242	1.5606	0.9	232.179	1.91	62%

Table 11 continuación de la página anterior...

NEOS job ID	items	radio	altura	suavidad	t (secs.)	volumen (u^3)	% ²¹
16516476	5	0.516793	1.29206	0.9	10.8286	1.08	54%
16491378	50	0.996696	2.49177	0.85	29336.9	7.78	76%
16519029	30	0.864353	2.16088	0.85	8859.31	5.07	70%
16518763	10	0.619904	1.54977	0.85	186.612	1.87	63%
16516477	5	0.523463	1.30869	0.85	15.7092	1.13	52%
16511838	50	1.0126	2.5315	0.8	9573.06	8.15	72%
16519018	30	0.867703	2.16926	0.8	3141.7	5.13	69%
16518781	10	0.6202	1.5505	0.8	195.814	1.87	63%
16516490	5	0.520428	1.30107	0.8	11.8522	1.11	53%
16491379	50	0.998924	2.49731	0.75	18545.8	7.83	75%
16519015	30	0.874825	2.18706	0.75	2837.45	5.26	67%
16518787	10	0.619961	1.60506	0.75	143.681	1.94	61%
16516493	5	0.522546	1.30637	0.75	18.0749	1.12	53%
16491380	50	1.01131	2.52828	0.7	15201.1	8.12	73%
16519012	30	0.867239	2.1681	0.7	8980.56	5.12	69%
16518792	10	0.633286	1.58322	0.7	154.479	1.99	59%
16516496	5	0.528002	1.32002	0.7	8.88864	1.16	51%

Table 11 continuación de la página anterior...

NEOS job ID	items	radio	altura	suavidad	t (secs.)	volumen (u^3)	% ²¹
16491381	50	0.989313	2.47399	0.65	17492.6	7.61	77%
16519008	30	0.874989	2.18747	0.65	3313.55	5.26	67%
16491389	50	1.00123	2.50307	0.6	15163.7	7.88	75%
16518809	10	0.622709	1.55677	0.6	188.813	1.90	62%
16516542	5	0.533149	1.33291	0.6	9.83301	1.19	50%
16487346	50	1.01155	2.52888	0.55	10817.4	8.13	72%
16519004	30	0.896478	2.2412	0.55	9515.41	5.66	62%
16479220	10	0.643114	1.60782	0.55	120.12	2.09	56%
16516545	5	0.540348	1.35093	0.55	9.34628	1.24	48%
16491400	50	0.987499	2.4688	0.5	18099.9	7.56	78%
16519000	30	0.885012	2.21253	0.5	3454.73	5.44	65%
16516548	5	0.539247	1.34812	0.5	10.0347	1.23	48%
16491401	50	1.02304	2.55759	0.45	28640.9	8.41	70%
16518997	30	0.876271	2.19068	0.45	3135.98	5.28	67%
16518839	10	0.64903	1.62291	0.45	180.371	2.15	55%
16516555	5	0.540342	1.35086	0.45	9.52794	1.24	48%
16490486	100	1.26428	3.16071	0.4	90265.3	15.87	74%

Table 11 continuación de la página anterior...

NEOS job ID	items	radio	altura	suavidad	t (secs.)	volumen (u^3)	% ²¹
16491402	50	1.02085	2.55213	0.4	16166.1	8.36	71%
16518985	30	0.883951	2.20988	0.4	3438.6	5.42	65%
16518840	10	0.585031	2.0476	0.4	231.731	2.20	54%
16516616	5	0.544794	1.36198	0.4	12.84	1.27	46%
16491403	50	1.02858	2.57145	0.35	17690.4	8.55	69%
16518984	30	0.886904	2.21726	0.35	3406.32	5.48	65%
16518894	10	0.604957	1.94817	0.35	157.081	2.24	53%
16516621	5	0.55037	1.37593	0.35	9.97394	1.31	45%
16491406	50	1.02902	2.57256	0.3	13804.9	8.56	69%
16518983	30	0.903818	2.25955	0.3	3321.74	5.80	61%
16518898	10	0.681535	1.70387	0.3	145.851	2.49	47%
16516627	5	0.552412	1.38103	0.3	11.8547	1.32	45%
16491407	50	1.05595	2.63987	0.25	15648.4	9.25	64%
16518970	30	0.898933	2.26531	0.25	2926.03	5.75	61%
16518903	10	0.607221	2.12527	0.25	196.477	2.46	48%
16516631	5	0.558418	1.39605	0.25	9.62377	1.37	43%
16491408	50	1.06252	2.65631	0.2	29774.6	9.42	63%

Table 11 continuación de la página anterior...

NEOS job ID	items	radio	altura	suavidad	t (secs.)	volumen (u^3)	% ²¹
16518966	30	0.902302	2.25576	0.2	3122.25	5.77	61%
16518913	10	0.622663	2.08284	0.2	268.618	2.54	46%
16516635	5	0.545867	1.5781	0.2	10.3893	1.48	40%
16491419	50	1.08287	2.70716	0.15	15859.4	9.97	59%
16518956	30	0.924687	2.31172	0.15	3240.52	6.21	57%
16518919	10	0.712323	1.78081	0.15	393.063	2.84	42%
16491421	50	0.973736	3.40807	0.1	16507.6	10.15	58%
16518950	30	0.895747	2.50669	0.1	9676.51	6.32	56%
16518926	10	0.72777	1.81943	0.1	409.932	3.03	39%
16516662	5	0.534967	1.81466	0.1	11.6676	1.63	36%
16511821	50	1.09586	2.86817	0.05	11592.7	10.82	54%
16518936	30	0.886094	2.51232	0.05	9733.29	6.20	57%
16518932	10	0.743178	1.85795	0.05	141.366	3.22	37%
16516665	5	0.545997	1.91099	0.05	13.7915	1.79	33%

XXII CONT. CILÍNDRICO CON CONSERVACIÓN DEL ÁREA DE LA SUPERFICIE

TABLE 12: Experimentación: Contenedor cilíndrico con conservación del área de la superficie

NEOS job ID	items	radio	altura	suavidad	t (secs.)	volumen (u^3)	% ²²
16511038	10	0.569187	1.42297	0.65	246.468	1.45	81%
16511697	30	0.795863	1.98966	0.6	3583.29	3.96	89%
16511040	10	0.576432	1.44108	0.6	232.968	1.50	78%
16496709	100	1.15837	2.89593	0.55	83902	12.21	97%
16511698	30	0.81034	2.02585	0.55	3207.05	4.18	85%
16511041	10	0.603431	1.50858	0.55	240.047	1.73	68%
16496712	100	1.19877	2.99692	0.5	83410.9	13.53	87%
16511701	30	0.840221	2.10055	0.5	9495.87	4.66	76%
16511042	10	0.593068	1.54569	0.5	251.019	1.71	69%
16511709	100	1.21056	3.02639	0.45	48642.1	13.93	85%
16511702	30	0.869495	2.17374	0.45	3915.41	5.16	68%
16511048	10	0.627164	1.56791	0.45	260.731	1.94	61%
16496715	100	1.23993	3.09983	0.4	85232	14.97	79%

Table 12 continuación de la página anterior...

NEOS job ID	items	radio	altura	suavidad	t (secs.)	volumen (u^3)	% ²³
16511049	10	0.623154	1.55788	0.4	272.368	1.90	62%
16511804	100	1.1303	3.79769	0.35	99061.1	15.24	77%
16511052	10	0.661545	1.65387	0.35	250.023	2.27	52%
16496718	100	1.2165	3.41066	0.3	85905.4	15.86	74%
16511665	10	0.658863	1.64716	0.3	253.14	2.25	52%
16511667	10	0.680241	1.7006	0.25	183.095	2.47	48%
16496723	100	1.16654	3.99421	0.2	83627.2	17.08	69%
16511669	10	0.713621	1.78405	0.2	381.939	2.85	41%
16496727	100	1.26578	3.59166	0.15	85621.5	18.08	65%
16511671	10	0.701426	1.75357	0.15	293.455	2.71	43%
16496733	100	1.22097	4.2734	0.1	84970	20.01	59%
16511676	10	0.723378	1.80844	0.1	265.772	2.97	40%
16511679	10	0.728991	1.82248	0.05	291.951	3.04	39%

XXIII CONT. CILÍNDRICO CON CONSERVACIÓN MIXTA

TABLE 13: Experimentación: Contenedor cilíndrico con conservación del volumen y del área de la superficie

NEOS job ID	items	radio	altura	suavidad	t (secs.)	volumen (u^3)	% ²⁴
16501256	90	1.35733	3.50196	1	37562.3	20.27	52%
16501191	85	1.29362	3.73804	1	36224.2	19.65	51%
16501409	50	1.05113	3.30374	1	10911	11.47	51%
16501328	20	0.873586	2.18396	1	1446.02	5.24	45%
16501230	10	0.756337	1.89084	1	147.869	3.40	35%
16501231	5	0.564654	1.97629	1	15.2447	1.98	30%
16526190	100	1.21346	3.0356	0.99	77244.7	14.04	84%
16526145	85	1.14183	2.85458	0.99	42866.3	11.69	86%
16521924	70	1.0757	2.68925	0.99	22391.1	9.78	84%
16520637	5	0.565295	1.97853	0.99	18.9779	1.99	30%
16501193	85	1.30329	3.57949	0.95	45441.5	19.10	52%
16521957	70	1.09976	2.74941	0.95	63245.8	10.45	79%
16501405	50	1.15642	2.89106	0.95	12482.4	12.15	49%

Table 13 continuación de la página anterior...

NEOS job ID	items	radio	altura	suavidad	t (secs.)	volumen (u^3)	% ²⁵
16501330	20	0.878107	2.19527	0.95	1406.78	5.32	44%
16520638	5	0.566019	1.98098	0.95	22.1746	1.99	30%
16526199	100	1.21644	3.04428	0.9	73192.3	14.15	83%
16501195	85	1.21031	4.1381	0.9	97775.1	19.04	53%
16521970	70	1.10258	2.75645	0.9	22754.7	10.53	78%
16501403	50	1.14939	2.94646	0.9	31858.6	12.23	48%
16501332	20	0.88064	2.20161	0.9	1526.34	5.36	44%
16520639	5	0.568227	1.98878	0.9	31.6274	2.02	29%
16526235	100	1.24245	3.10613	0.85	55817.4	15.06	78%
16501197	85	1.19639	4.17276	0.85	34823.2	18.76	53%
16521977	70	1.09586	2.73965	0.85	19935.6	10.34	80%
16501333	20	0.914714	2.28678	0.85	4104.27	6.01	39%
16520640	5	0.565817	1.98036	0.85	42.4515	1.99	30%
16526302	100	1.17378	3.23347	0.8	56099.8	14.00	84%
16521999	70	1.11479	2.78697	0.8	68151.8	10.88	76%
16501400	50	1.14568	2.86427	0.8	10694.8	11.81	50%
16501335	20	0.862827	2.15708	0.8	2050.86	5.05	47%

Table 13 continuación de la página anterior...

NEOS job ID	items	radio	altura	suavidad	t (secs.)	volumen (u^3)	% ²⁵
16520641	5	0.568472	1.98965	0.8	20.6042	2.02	29%
16526323	100	1.21979	3.04948	0.75	59164.2	14.25	83%
16501227	85	1.3375	3.34935	0.75	34152.5	18.82	53%
16522023	70	1.09734	2.74334	0.75	23799	10.38	79%
16501397	50	1.00087	3.49314	0.75	12539.2	10.99	54%
16501336	20	0.859666	2.14918	0.75	1473.21	4.99	47%
16520642	5	0.563714	1.97298	0.75	15.92	1.97	30%
16526324	100	1.16302	3.45707	0.7	54069	14.69	80%
16501228	85	1.19297	4.17537	0.7	44753.6	18.67	54%
16522050	70	1.09525	2.73815	0.7	19883.8	10.32	80%
16501337	20	0.857297	2.14324	0.7	1487.72	4.95	48%
16520643	5	0.568063	1.98822	0.7	13.4079	2.02	29%
16526345	100	1.24188	3.10473	0.65	75511.1	15.04	78%
16522086	70	1.10128	2.7532	0.65	70529	10.49	79%
16501394	50	1.15057	2.87642	0.65	11592.5	11.96	49%
16501338	20	0.859852	2.14969	0.65	1530.42	4.99	47%
16520644	5	0.568026	1.98809	0.65	14.5919	2.02	29%

Table 13 continuación de la página anterior...

NEOS job ID	items	radio	altura	suavidad	t (secs.)	volumen (u^3)	% ²⁵
16526346	100	1.17801	3.4128	0.6	61314.8	14.88	79%
16526027	85	1.15575	2.95918	0.6	43297.9	12.42	81%
16522097	70	1.12989	2.82472	0.6	24034.3	11.33	73%
16501391	50	1.15875	2.89694	0.6	31900.6	12.22	48%
16501339	20	0.865556	2.16389	0.6	4043.65	5.09	46%
16520645	5	0.565625	1.97969	0.6	14.9077	1.99	30%
16526369	100	1.17959	3.48053	0.55	59114.2	15.21	77%
16525979	85	1.18062	2.95155	0.55	34142.5	12.92	78%
16522104	70	1.12515	2.81288	0.55	22939.6	11.19	74%
16501389	50	1.03019	3.48086	0.55	11896.5	11.61	51%
16501341	20	0.877621	2.19405	0.55	1804.89	5.31	44%
16520646	5	0.56473	1.97655	0.55	13.6483	1.98	30%
16526370	100	1.25417	3.13543	0.5	54405.5	15.49	76%
16525977	85	1.1759	2.97427	0.5	50201.9	12.92	78%
16522111	70	1.12354	2.80886	0.5	23770.1	11.14	74%
16501387	50	1.15044	2.8761	0.5	12665.6	11.96	49%
16501344	20	0.858056	2.14514	0.5	1519.65	4.96	48%

Table 13 continuación de la página anterior...

NEOS job ID	items	radio	altura	suavidad	t (secs.)	volumen (u^3)	% ²⁵
16520649	5	0.562507	1.96877	0.5	22.1339	1.96	30%
16525961	85	1.18386	2.95968	0.45	41517.1	13.03	77%
16522115	70	1.13833	2.84582	0.45	24095.7	11.58	71%
16501386	50	0.997552	3.48448	0.45	34653.5	10.89	54%
16501346	20	0.868876	2.17219	0.45	1459.49	5.15	46%
16520650	5	0.565236	1.97833	0.45	12.2661	1.99	30%
16525958	85	1.21765	3.04413	0.4	54463.4	14.18	71%
16522199	70	1.12068	2.90964	0.4	19900.2	11.48	72%
16501385	50	1.11894	2.94557	0.4	11365.2	11.59	51%
16501347	20	0.861109	2.15277	0.4	1420.1	5.01	47%
16520651	5	0.565942	1.9808	0.4	14.9695	1.99	30%
16526421	100	1.28152	3.2038	0.35	56959.9	16.53	71%
16525957	85	1.21843	3.04606	0.35	54537.8	14.21	71%
16522207	70	1.07045	3.17386	0.35	23302.8	11.43	72%
16501349	20	0.87178	2.17945	0.35	1620.15	5.20	45%
16520652	5	0.580366	2.03128	0.35	12.6219	2.15	27%
16526424	100	1.29359	3.234	0.3	53432.6	17.00	69%

Table 13 continuación de la página anterior...

NEOS job ID	items	radio	altura	suavidad	t (secs.)	volumen (u^3)	% ²⁵
16522234	70	1.15057	2.87643	0.3	23193.3	11.96	69%
16501381	50	1.12837	2.82093	0.3	11247.3	11.28	52%
16501350	20	0.875245	2.18811	0.3	1512.1	5.27	45%
16520653	5	0.563889	1.97361	0.3	13.331	1.97	30%
16501259	100	1.33535	4.04254	0.25	52998.8	22.65	52%
16501260	90	1.35698	3.44077	0.25	98010	19.90	53%
16501271	80	1.31917	3.40483	0.25	40675	18.61	51%
16501378	50	1.02874	3.59703	0.25	12659.4	11.96	49%
16501351	20	0.898131	2.24533	0.25	4625.65	5.69	41%
16520654	5	0.568472	1.98965	0.25	28.7483	2.02	29%
16526428	100	1.31339	3.28348	0.2	56530.4	17.79	66%
16522285	70	1.1825	2.95625	0.2	62462.6	12.99	64%
16501375	50	1.13176	2.82941	0.2	12729.8	11.39	52%
16501353	20	0.895239	2.23812	0.2	1476.75	5.64	42%
16520724	10	0.748332	1.87083	0.2	175.007	3.29	36%
16520655	5	0.568472	1.98965	0.2	15.1151	2.02	29%
16526437	100	1.34305	3.35763	0.15	73380.5	19.03	62%

Table 13 continuación de la página anterior...

NEOS job ID	items	radio	altura	suavidad	t (secs.)	volumen (u^3)	% ²⁵
16525946	85	1.19709	3.53807	0.15	33418.5	15.93	63%
16522292	70	1.06266	3.7193	0.15	23002	13.19	63%
16501374	50	1.10315	3.03137	0.15	11674.4	11.59	51%
16501357	20	0.86709	2.16774	0.15	1451.68	5.12	46%
16520723	10	0.768627	1.92157	0.15	137.369	3.57	33%
16520656	5	0.568472	1.98965	0.15	15.5461	2.02	29%
16526438	100	1.35397	3.38492	0.1	74357.4	19.49	60%
16522309	70	1.11643	3.67503	0.1	64248.5	14.39	57%
16501373	50	1.02953	3.45827	0.1	11882.4	11.52	51%
16501358	20	0.895444	2.23861	0.1	1375.83	5.64	42%
16520722	10	0.751666	1.88071	0.1	158.384	3.34	35%
16520657	5	0.568472	1.98965	0.1	18.4915	2.02	29%
16526441	100	1.4025	3.50625	0.05	72193.1	21.67	54%
16522430	85	1.32722	3.31805	0.05	35387.2	18.36	55%
16522330	70	1.12858	3.87093	0.05	23959.4	15.49	53%
16501372	50	1.02545	3.58905	0.05	10619.7	11.86	50%
16501359	20	0.882206	2.20554	0.05	1522.04	5.39	44%

Table 13 continuación de la página anterior...

NEOS job ID	items	radio	altura	suavidad	t (secs.)	volumen (u^3)	% ²⁵
16520721	10	0.761657	1.90414	0.05	153.425	3.47	34%
16520659	5	0.570851	1.99797	0.05	16.5519	2.05	29%
16522395	85	1.3651	3.45921	0.01	35998.3	20.25	49%

