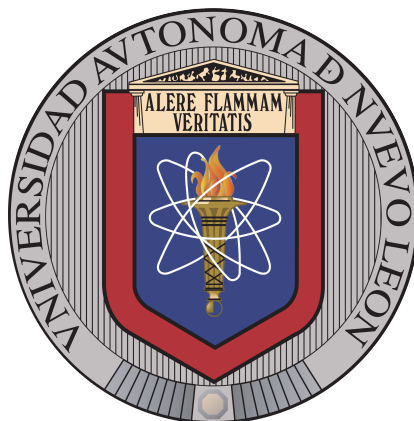


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

POSGRADO EN INGENIERÍA FÍSICA INDUSTRIAL



AUTOENERGÍA DEL ELECTRÓN Y
RENORMALIZACIÓN DE LA MASA EN LA
ELECTRODINÁMICA CUÁNTICA

POR

FELIPE EDUARDO SEGOVIA OJEDA

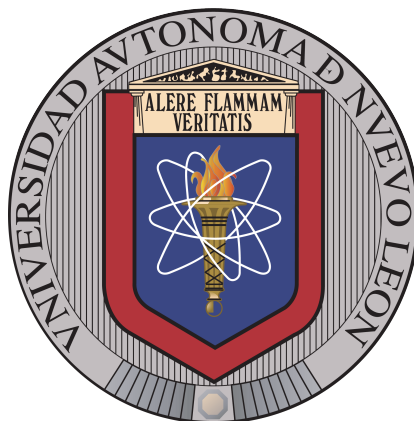
COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRÍA EN INGENIERÍA FÍSICA INDUSTRIAL

JUNIO 2026

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

POSGRADO EN INGENIERÍA FÍSICA INDUSTRIAL



AUTOENERGÍA DEL ELECTRÓN Y
RENORMALIZACIÓN DE LA MASA EN LA
ELECTRODINÁMICA CUÁNTICA

POR

FELIPE EDUARDO SEGOVIA OJEDA

COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRÍA EN INGENIERÍA FÍSICA INDUSTRIAL

JUNIO 2026

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

POSGRADO EN INGENIERÍA FÍSICA INDUSTRIAL



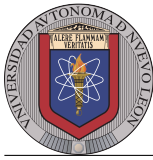
AUTOENERGÍA DEL ELECTRÓN Y
RENORMALIZACIÓN DE LA MASA EN LA
ELECTRODINÁMICA CUÁNTICA

POR

FELIPE EDUARDO SEGOVIA OJEDA

COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRÍA EN INGENIERÍA FÍSICA INDUSTRIAL

JUNIO 2026



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
POSGRADO EN INGENIERÍA FÍSICA INDUSTRIAL

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis «Autoenergía del electrón y renormalización de la masa en la electrodinámica cuántica», realizada por el alumno Felipe Eduardo Segovia Ojeda, con número de matrícula 1877408, sea aceptada para su defensa como requisito parcial para obtener el grado de Maestría en Ingeniería Física Industrial.

El Comité de Tesis

Dr. José Rubén Morones Ibarra
Asesor

Dr. Francisco Vicente Flores Báez
Revisor

Dr. Edgar Martínez Guerra
Revisor

Vo. Bo.

Dr. Álvaro Eduardo Cordero Franco
Subdirector de Estudios de Posgrado

San Nicolás de los Garza, Nuevo León, junio 2026

*A mis padres, Felipe y Norma, por haberme brindado todo el apoyo y motivación
para cumplir cada una de mis metas.*

*A mi novia, Edith, por haberme convencido de estudiar la maestría y brindarme su
amor y apoyo incondicional.*

A Mussa y Jack por regalarme lindos recuerdos.

A mis compañeros de posgrado por sus consejos y asesorías.

ÍNDICE GENERAL

1. Introducción	1
1.1. Planteamiento del problema	1
1.2. Marco Teórico	3
1.2.1. Introducción a los 4-vectores	3
1.2.2. Teoría clásica de campos	7
1.2.3. ¿Qué es un campo clásico?	7
1.2.4. Teorema de Noether	11
1.2.5. Cuantización de campos	13
1.2.6. La ecuación de Dirac	13
1.2.7. Formulación covariante del electromagnetismo	27
1.2.8. Propagador del fotón	32
1.2.9. Unidades Naturales	33
1.2.10. Capa de masa	34
1.2.11. La Matriz $\hat{S}_0$	37
1.2.12. Teorema de Wick	40

1.2.13. Expansión de la matriz $\hat{S}_0$	42
1.2.14. Reglas y Diagramas de Feynman	48
1.2.15. Correcciones radiativas	49
1.2.16. Diagrama de Feynman para la autoenergía del electrón	54
1.3. Antecedentes	57
1.4. Hipótesis	62
1.5. Objetivos	62
1.5.1. General	62
1.5.2. Específicos	63
1.6. Justificación	64
1.7. Delimitación del estudio	64
2. Metodología	66
2.1. Integrales importantes en 4 dimensiones	69
2.2. Esquemas de regularización	72
2.2.1. Regularización por corte (<i>cut-off</i>)	73
2.2.2. Regularización de Pauli-Villars	74
2.2.3. Regularización Dimensional	75
2.3. Regularización Dimensional de $\Sigma(p)$	76
2.4. Renormalización de la masa	79
2.4.1. Esquema OS	80

2.4.2. Esquemas MS y $\overline{MS}$	81
2.5. Renormalización de la masa bajo el esquema <i>On-Shell</i>	82
3. Regularización Dimensional	85
3.1. Integrales importantes en 4 dimensiones	86
3.1.1. Rotación de Wick	86
3.1.2. Transformación a espacio <i>euclidiano</i> en 4 dimensiones	89
3.1.3. Resolución de las integrales	91
3.2. Parametrización de Feynman	95
3.3. Fundamentos de la regularización dimensional	96
3.3.1. Transformación del espacio de $D = 4$ a $D = 4 - \varepsilon$ dimensiones	97
3.3.2. Constante de acoplamiento	99
3.3.3. Expansiones en serie	100
3.4. Regularización Dimensional de $\Sigma(p)$	101
4. Renormalización	107
4.1. El propagador efectivo del electrón $i\tilde{S}_F(p)$	108
4.2. El contratérmino de la masa δ_m^{OS}	111
4.2.1. El polo del propagador efectivo $i\tilde{S}_F(p)$	111
4.2.2. Esquema de renormalización <i>On-Shell</i> (<i>OS</i>)	112
4.3. Renormalización de la masa	114

4.3.1. Validez del resultado $\delta_m^{OS,DR}$	119
4.4. Otros esquemas de renormalización	119
4.4.1. Esquema de renormalización MS	120
4.4.2. Esquema de renormalización $\overline{MS}$	120
4.5. Modificación del operador de densidad lagrangiana	121
5. Conclusiones	125
A. Reglas de Feynman	129
B. Fundamentos de Variable Compleja	132
B.1. Funciones de variable compleja	132
B.2. Polos y residuos	133
B.3. Integración en el plano complejo	135
C. Integración en 4 dimensiones	139
C.1. Coordenadas cartesianas	139
C.2. Coordenadas esféricas	140
C.3. Algunas integrales importantes en 4 dimensiones	142
D. Expansión de funciones en series de Taylor	144
D.1. Series de Taylor	144
D.2. Expansiones en serie útiles	145

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1. Configuración de cargas puntuales. Adaptado de Griffiths, D.J. (1999)	1
1.2. Contornos para la representación en el plano complejo p_0 de las funciones $S_0^\pm(x)$. Reimpreso de Mandl, F.(2010).	25
1.3. Contorno para la representación en el plano complejo p_0 del propagador fermiónico $S_{F,0}(x - x')$. Reimpreso de Mandl, F.(2010).	26
1.4. Gráfica tridimensional de la capa de masa (rojo) y el cono de luz (azul). Reimpreso de Lancaster, T. & Blundell, S. (2014).	36
1.5. Diagramas de Feynman a nivel árbol para la dispersión Compton. Ambos diagramas representan correcciones de orden e_0^2 (u orden α_0). Reimpreso de F. Mandl & Shaw, G. (2010).	50
1.6. Contribuciones de cuarto orden para la dispersión de Compton. Reimpreso de F. Mandl & Shaw, G. (2010).	51
1.7. Correcciones radiativas. (a) Autoenergía del electrón. (b) Autoenergía del fotón. (c) Corrección al vértice. Reimpreso de F. Mandl & Shaw, G. (2010).	52
1.8. Sustituciones de diferentes piezas de los diagramas de Feynman a orden e_0^2 por correcciones radiativas. Reimpreso de F. Mandl & Shaw, G. (2010).	53

1.9. Diagrama de Feynman de la autoenergía del electrón. Reimpreso de Sakurai, J.J. (1967).	54
2.1. Metodología general para el cálculo de $\delta_m^{OS,DR}$ (Parte 1/2).	67
2.1. Metodología general para el cálculo de $\delta_m^{OS,DR}$ (Parte 2/2).	68
2.2. Metodología de la resolución de dos integrales importantes en 4 dimensiones (Parte 1/2).	70
2.2. Metodología de la resolución de dos integrales importantes en 4 dimensiones (Parte 2/2).	71
2.3. Metodología de la regularización dimensional de $\Sigma(p)$ (Parte 1/3). . .	77
2.3. Metodología de la regularización dimensional de $\Sigma(p)$ (Parte 2/3). . .	78
2.3. Metodología de la regularización dimensional de $\Sigma(p)$ (Parte 3/3). . .	79
2.4. Metodología del cálculo de $\delta_m^{OS,DR}$ (Parte 1/2).	83
2.4. Metodología del cálculo de $\delta_m^{OS,DR}$ (Parte 2/2).	84
3.1. Contorno de integración utilizado en la rotación de Wick. Reimpreso de Schwartz, M. (2014)	87
4.1. Diagramas de Feynman de la dispersión de Compton con propagadores modificados por la autoenergía.	109
4.2. Propagador efectivo del electrón	109
4.3. Propagador efectivo del electrón a todos los órdenes perturbativos. Reimpreso de Mandl, F. (2010).	110
4.4. Expresión algebraica del propagador efectivo del electrón	110

B.1. Región anular entre discos $ z = R_1$ y $ z = R_2$ en el plano complejo de z	134
B.2. Gráfica de una función analítica $f(z)$ dentro del contorno C	136
B.3. Contorno de integración utilizado en el <i>Lema de Jordan</i>	137

ÍNDICE DE TABLAS

1.1. Dimensiones en unidades SI y naturales. Adaptado de Mandl, L.(2010).	34
1.2. Cronograma de actividades.	63
3.1. Unidades naturales para espacio-tiempo de $D = 4$ y $D = 4 - \varepsilon$ dimensiones.	99
4.1. Resultados de $\delta_m^{OS,DR}$ en la literatura	119
4.2. Cantidades renormalizadas en la electrodinámica cuántica	121

ÍNDICE DE SÍMBOLOS

Símbolos latinos

Símbolo	Descripción
$\mathbf{A}$	Vector tridimensional de potencial electromagnético
A	Matriz arbitraria
A^μ	Vector de campo electromagnético en D dimensiones
$\hat{A}$	Operador arbitrario
$\hat{A}_0^\mu$	Operador desnudo del campo electromagnético
$\hat{A}_R^\mu$	Operador renormalizado del campo electromagnético
$\mathbf{a}$	Vector tridimensional arbitrario
a, a^μ, a_μ	Vector arbitrario en D dimensiones
a^0, a^1, a^2, a^3	Componentes del vector contravariante a^μ en D dimensiones
a_0, a_1, a_2, a_3	Componentes del vector covariante a_μ en D dimensiones
$\hat{a}$	Operador de aniquilación de fotones (campo electromagnético)
$\hat{a}^\dagger$	Operador de creación de fotones (campo electromagnético)
$\mathbf{B}$	Vector tridimensional del campo magnético
B	Matriz arbitraria
$\hat{B}$	Operador arbitrario
$\mathbf{b}$	Vector tridimensional arbitrario

Símbolos latinos (continuación ...)

Símbolo	Descripción
b, b^μ, b_μ	Vector arbitrario en D dimensiones
b^0, b^1, b^2, b^3	Componentes del vector contravariante b^μ en D dimensiones
b_0, b_1, b_2, b_3	Componentes del vector covariante b_μ en D dimensiones
C^+, C^-	Contornos de integración en variable compleja
c	Velocidad de la luz en el vacío
$\hat{c}_s$	Operador de aniquilación de partículas de Dirac
$\hat{c}_s^\dagger$	Operador de creación de partículas de Dirac
D	Dimensión
$D_0^{\mu\nu}$	Función D
$D_{F,0}^{\mu\nu}$	Propagador libre del fotón
$\tilde{D}_{F,0}^{\mu\nu}$	Transformada de Fourier del propagador libre del fotón
$\hat{d}_s$	Operador de aniquilación de antipartículas de Dirac
$\hat{d}_s^\dagger$	Operador de creación de antipartículas de Dirac
$\mathbf{E}$	Vector tridimensional del campo eléctrico
E	Energía
e	Carga eléctrica del electrón
e_0	Carga eléctrica desnuda del electrón
$\tilde{e}_0$	Constante de acoplamiento modificada
e_R	Carga eléctrica renormalizada
$F^{\mu\nu}$	Tensor de campo electromagnético
$f(x)$	Función arbitraria
$\tilde{f}(x)$	Transformada de Fourier de la función $f(x)$
$ f\rangle$	Ket de estado final
$g^{\mu\nu}, g_{\mu\nu}$	Tensor métrico del espacio de Minkowski
$\mathcal{H}$	Hamiltoniano
$\hat{\mathcal{H}}_{I_0}$	Operador hamiltoniano de interacción evaluado con cantidades desnudas

Símbolos latinos (continuación ...)

Símbolo	Descripción
$\hat{\mathcal{H}}_0$	Operador Hamiltoniano desnudo
$\mathcal{H}$	Densidad hamiltoniana
$\hat{\mathcal{H}}_0$	Operador de densidad hamiltoniana evaluada con cantidades desnudas
$\hat{\mathcal{H}}_{I_0}$	Operador de densidad hamiltoniana de interacción evaluada con cantidades desnudas
$\hbar$	Constante de Planck
$\mathbb{I}$	Matriz identidad de $D \times D$ dimensiones
$ i\rangle$	Ket de estado inicial
J^α	Integral espacial de la corriente conservada j^α
$\mathbf{j}$	Vector tridimensional de corriente eléctrica
$\mathcal{J}^\alpha$	4-vector presente en la corriente conservada j^α
j^α	Corriente conservada en el teorema de Noether
$\mathbf{k}$	Vector tridimensional de momento
k, k_μ, k^μ	Vector de momento en D dimensiones
k^0, k^1, k^2, k^3	Componentes del vector contravariante k^μ en D dimensiones
k_0, k_1, k_2, k_3	Componentes del vector covariante k_μ en D dimensiones
k_E	Vector euclidiano en D dimensiones
$ k_E $	Componente «radial» en coordenadas esféricas en 4 dimensiones
L	Dimensión de longitud
$\mathcal{L}$	Lagrangiano
$\mathcal{L}$	Densidad lagrangiana
$\hat{\mathcal{L}}$	Operador de densidad lagrangiana
$\hat{\mathcal{L}}_0$	Operador de densidad lagrangiana evaluada con cantidades desnudas
$\hat{\mathcal{L}}_{I_0}$	Operador de densidad lagrangiana de interacción evaluada con cantidades desnudas

Símbolos latinos (continuación ...)

Símbolo	Descripción
M	Dimensión de masa
$\mathcal{M}_0$	Amplitud invariante evaluada con cantidades desnudas
m	Masa
m_0	Masa desnuda del electrón
m_P	Masa física
m_R	Masa renormalizada
m_λ	Masa ficticia del fotón
$\hat{N}$	Operador número
$\mathcal{N}[\dots]$	Producto normal de operadores
n	Eigenvalores del operador número
$\mathcal{O}$	Términos adicionales de una expansión en serie
$\mathbf{p}$	Vector tridimensional de momento
p, p_μ, p^μ	Vector de momento en D dimensiones
p^0, p^1, p^2, p^3	Componentes del vector contravariante p^μ en D dimensiones
p_0, p_1, p_2, p_3	Componentes del vector covariante p_μ en D dimensiones
p_x, p_y, p_z	Componentes del vector de momento sobre los ejes espaciales x, y y z respectivamente
Q	Carga eléctrica total
$\hat{Q}$	Operador arbitrario
$\hat{Q}_0$	Operador de carga eléctrica desnuda
q	Carga eléctrica de una partícula
q, q_μ, q^μ	Vector de momento en D dimensiones
q_1, q_2, q_3, q_4	Cargas eléctricas puntuales
$\hat{R}$	Operador arbitrario
r_0	Radio clásico del electrón
S	Marco inercial
$S(\Omega)$	Acción

Símbolos latinos (continuación ...)

Símbolo	Descripción
S_0	Propagador libre del mesón
S_0^+, S_0^-	Componentes del propagador libre del mesón
$S_{F,0}$	Propagador fermiónico libre
$\tilde{S}_{F,0}$	Transformada de Fourier del propagador fermiónico libre
$S_{F,0}^+, S_{F,0}^-$	Componentes del propagador fermiónico libre
$\hat{S}_0$	Operador de matriz S expresado en cantidades desnudas
s	Término en parametrización de Feynman
s^μ	Densidad carga-corriente
T	Dimensión de tiempo
$\mathcal{T}\{\dots\}$	Producto ordenado temporal de operadores
t	Tiempo
$u_{r,s}$	Espinor solución de Dirac
V	Volumen tridimensional
v	Velocidad
$v_{r,s}$	Espinor solución de Dirac
W	Energía electromagnética total
$\hat{W}$	Operador arbitrario
$\mathbf{x}$	Vector tridimensional de posición
x, x_μ, x^μ	Vector de posición en D dimensiones / Coordenada espacial (x)
x^0, x^1, x^2, x^3	Componentes del vector contravariante x^μ en D dimensiones
x_0, x_1, x_2, x_3	Componentes del vector covariante x_μ en D dimensiones
y, y_μ, y^μ	Vector de posición en D dimensiones / Coordenada espacial (y)
Z	Parámetro de Feynman
Z_1, Z_2, Z_3, Z_e, Z_m	Constantes de renormalización
z	Coordenada espacial / Variable compleja

Símbolos griegos

Símbolo	Descripción
α_0	Constante de estructura fina
α_R	Constante de estructura fina con carga renormalizada
β	Velocidad relativa de Lorentz
$\Gamma(n)$	Función gamma
γ	Factor de Lorentz
$\gamma_\alpha, \gamma^\alpha$	Matrices de Dirac de $D \times D$ dimensiones
γ_E	Constante de Euler-Mascheroni
δ_m	Contratérmino de la masa
δ_{rs}	Delta de Kronecker
$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$	Delta de Dirac
$\delta Z_1, \delta Z_2, \delta Z_3, \delta Z_e, \delta Z_m$	Contratérminos en la densidad lagrangiana renormalizada
ϵ	Desplazamiento infinitesimal del polo
ϵ_0	Permitividad del vacío
ϵ_r^μ	4-vector de polarización
ε	Elemento infinitesimal de dimensión
$\theta(t)$	Función escalón
θ_1, θ_2	Ángulos polares
κ_0	Variable rotada de k_0 (Rotación de Wick)
Λ	Parámetro de corte ultravioleta
$\Lambda^\mu{}_\nu, (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu$	Transformaciones de Lorentz
μ	Escala de masa
$\tilde{\mu}$	Escala de masa modificada
π_r	Densidad de momento conjugado
$\hat{\pi}_{0,r}$	Operador de densidad de momento conjugado evaluado con cantidades desnudas

Símbolos griegos (continuación ...)

Símbolo	Descripción
ρ	Densidad de carga eléctrica
$\Sigma(p)$	Autoenergía del electrón
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Matrices de Pauli
τ	Volumen en 3 dimensiones
ϕ	Ángulo azimutal
ϕ_r	r -ésima función de campo arbitraria
$\hat{\phi}_{0,r}$	r -ésimo operador de un campo desnudo arbitrario.
φ	Potencial escalar eléctrico
χ	Variable rotada (rotación de Wick)
ψ	Espinor de Dirac
$\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3$	Componentes del espinor de Dirac
ψ_r	r -ésimo campo de Dirac
ψ^+, ψ^-	Componentes de la expansión de Fourier del espinor de Dirac.
$\hat{\psi}_0$	Campo desnudo de Dirac
$\hat{\psi}_0^+, \hat{\psi}_0^-$	Componentes de la expansión de Fourier del operador de campo desnudo de Dirac
$\hat{\psi}_R$	Campo renormalizado de Dirac
Ω	Ángulo sólido
Ω_4	Ángulo sólido en 4 dimensiones
$\omega_{0,\mathbf{k}}$	Frecuencia de oscilación de un campo desnudo

Abreviaturas

Símbolo	Descripción
ct	Contratérminos
DR	Regularización Dimensional
MS	Sustracción mínima
$\overline{MS}$	Sustracción mínima modificada
OS	<i>On-Shell</i>
QED	Electrodinámica cuántica

Índices

Símbolo	Descripción
i	Índice espacial
j	Índice espacial
q	Índice de campos
r	Índice de campos
s	Índice de campos / Índice de polarización
t	Índice de campos / Índice de polarización
α	Índice espacio-temporal
β	Índice espacio-temporal
λ	Índice espacio-temporal
μ	Índice espacio-temporal
ν	Índice espacio-temporal

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mi asesor, Dr. José Rubén Morones Ibarra por su valioso apoyo y asesoría, la cual fue fundamental en el proceso de escritura de la presente tesis. Asimismo agradezco a mi comité de tesis: Dr. Francisco Vicente Flores Báez y Dr. Edgar Martínez Guerra por su participación en este proceso.

También agradezco a la Dirección de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas y a SECIHTI por el apoyo económico brindado bajo el CVU: 2043591 durante mi estancia en la maestría.

RESUMEN

Felipe Eduardo Segovia Ojeda.

Candidato para obtener el grado de Maestría en Ingeniería Física Industrial.

Universidad Autónoma de Nuevo León.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas.

Título del estudio: AUTOENERGÍA DEL ELECTRÓN Y RENORMALIZACIÓN DE LA MASA EN LA ELECTRODINÁMICA CUÁNTICA.

Número de páginas: 148.

OBJETIVOS Y MÉTODO DE ESTUDIO: Se calculó la relación entre la masa desnuda del electrón m_0 y la masa renormalizada m_R en la electrodinámica cuántica utilizando la técnica de regularización dimensional (DR) bajo el esquema de renormalización *On-Shell*.

CONTRIBUCIONES Y CONCLUSIONES: Se ha analizado paso por paso el cálculo del contratérmino de la masa del electrón δ_m^{OS} . Éste es una parte clave de la renormalización de la electrodinámica cuántica, la cual permite realizar predicciones finitas y con precisión de hasta 10 órdenes de magnitud respecto a resultados experimentales.

Firma del asesor: _____
Dr. José Rubén Morones Ibarra

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La teoría electromagnética nos ha brindado a lo largo de los años una base teórica para explicar los fenómenos eléctricos y magnéticos. Uno de sus muchos cálculos es la energía debida a una configuración de carga [1].

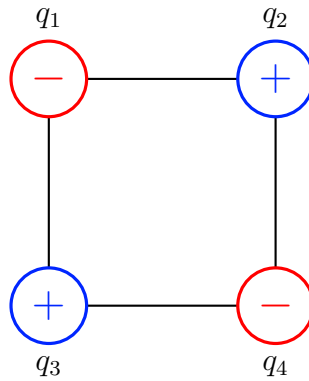


FIGURA 1.1: Configuración de cargas puntuales. Adaptado de Griffiths, D.J. (1999)

Cada carga eléctrica es afectada por las fuerzas eléctricas ejercidas por las demás cargas eléctricas en la configuración. Debido a esto, para construir cualquier configuración se inicia con una carga puntual (q_1) y se trasladan las demás cargas (q_2 , q_3 y q_4) desde el infinito hasta su posición final, lo cual conlleva cierta energía.

La energía electromagnética debida a una distribución continua de cargas se expresa de la siguiente manera:

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint (|\mathbf{E}|^2 + c^2 |\mathbf{B}|^2) d\tau \quad (1.1)$$

Sin embargo, ha surgido la pregunta [2], ¿cómo se calcula la energía debido solamente a una carga eléctrica puntual (en este caso el electrón)?

Es común que la magnitud del campo eléctrico sea mayor que la del campo magnético en muchos procesos. Por lo cual, considerando esto y utilizando las coordenadas esféricas para la integración se obtiene la siguiente expresión:

$$W = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_0} \right) \quad (1.2)$$

Donde r_0 es el radio del electrón. Debido a que el electrón es una partícula puntual, entonces $r_0 = 0$ y el cálculo clásico de la autoenergía del electrón diverge debido a una división entre cero.

Tras el nacimiento de la física cuántica y la teoría de la relatividad surgió la electrodinámica cuántica en la década de 1920. En la electrodinámica cuántica, la autoenergía del electrón tiene un significado un tanto distinto al de la autoenergía del electrón del electromagnetismo clásico [3].

De la teoría de la relatividad es sabido que la masa y la energía tienen una relación de equivalencia. Por lo tanto, en el caso de la electrodinámica cuántica, la autoenergía del electrón es una corrección de la masa del electrón debido a la interacción entre un electrón y la partícula del campo electromagnético: el fotón [4].

La expresión para la autoenergía del electrón en electrodinámica cuántica ($\Sigma(p)$) es la siguiente:

$$i\Sigma(p) = (ie_0)^2 \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma^\beta \frac{i(\not{p} - \not{k} + m_0\mathbb{I})}{(p-k)^2 - m_0^2 + i\epsilon} \gamma^\beta \frac{-i}{k^2 + i\epsilon}. \quad (1.3)$$

Los fundamentos teóricos y la deducción de esta expresión se revisarán a lo largo de este trabajo. De inicio, basta saber que esta expresión toma en cuenta la

existencia de campos cuantizados presentes en el espacio de Minkowski. La evaluación de la integral sobre las cuatro dimensiones del momento del fotón (k) lleva a un resultado divergente, ya que la autoenergía del electrón resulta ser infinita.

Evidentemente, existe una discrepancia entre lo predicho por la electrodinámica cuántica y el resultado experimental. Experimentalmente, un electrón no tiene una masa (o energía) infinita [3].

Es importante conocer la manera en la que la interacción entre un electrón y el campo electromagnético afecta a sus propiedades (masa y carga). La redefinición de estas propiedades permite realizar predicciones finitas en experimentos de dispersión.

1.2 MARCO TEÓRICO

En esta sección se introducirá el fundamento teórico que permite explicar la deducción de la autoenergía del electrón de acuerdo con la electrodinámica cuántica (1.3). Además, se introducirá la técnica de regularización y el concepto de renormalización para redefinir las propiedades físicas de las partículas.

El orden de exposición de los fundamentos necesarios sigue de cerca la notación y el esquema estándar usado en textos de teoría cuántica de campos, como el de Mandl & Shaw [4], Peskin & Schroeder [5], Schwartz, M. [6] y Lancaster & Blundell [7], complementado por otras referencias.

1.2.1 INTRODUCCIÓN A LOS 4-VECTORES

Los 4-vectores son vectores que viven en el espacio de Minkowski, el cual es un espacio vectorial de 4 dimensiones: 3 espaciales y 1 temporal. Los 4-vectores son de uso común y tienen una gran importancia en la teoría de la relatividad [4, 8].

Un punto en el espacio-tiempo es representado por el 4-vector contravariante de posición

$$x^\mu = (ct, \mathbf{x}) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z), \quad (1.4)$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío y por lo tanto $x^0 = ct$ representa la coordenada temporal en dimensiones de longitud. Las coordenadas x^1 , x^2 y x^3 representan a las coordenadas espaciales: x , y y z . Además, $\mathbf{x}$ es el vector de posición en 3 dimensiones.

En relatividad, no solo se utilizan los vectores contravariantes, sino también su vector dual: el vector covariante (x_μ). De esta manera, el vector covariante de posición se expresa de la siguiente manera:

$$x_\mu = \begin{pmatrix} ct \\ -\mathbf{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Tanto los vectores contravariantes como los covariantes tienen índices griegos (μ y ν) los cuales toman valores de 0, 1, 2 o 3 para identificar al componente ubicado en la posición correspondiente.

El tensor métrico ($g^{\mu\nu}$ o $g_{\mu\nu}$) es un tensor de rango 2 que permite transformar un 4-vector contravariante en uno covariante y viceversa. En el espacio de Minkowski, el tensor métrico se expresa de la siguiente manera:

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Es posible convertir vectores covariantes en contravariantes y viceversa de la

siguiente manera:

$$\begin{cases} x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} x^\nu \\ x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu = \sum_{\nu=0}^3 g^{\mu\nu} x_\nu \end{cases}. \quad (1.7)$$

A partir de este punto, se utilizará la convención de índices de Einstein, donde siempre que existan índices repetidos (en este caso ν), esto expresa una sumatoria sobre los valores (0,1, ... , N) que toma este índice.

Los 4-vectores pueden ser representados por su vector contravariante x^μ , por su vector covariante x_μ o simplemente expresado sin índices: x . El hecho de si $x = x^\mu$ o $x = x_\mu$ depende de la posición del 4-vector en la expresión que se desea evaluar.

Una operación importante de los 4-vectores es el producto interno. Sean dos 4-vectores arbitrarios: a y b . Entonces, su producto interno se define de la siguiente manera:

$$ab = a^\mu b_\mu = a_\mu b^\mu = g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = \dots = a^0 b^0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \quad (1.8)$$

donde a^0 y b^0 son los primeros componentes de los 4-vectores a y b , respectivamente. Además, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ es el producto punto de los últimos 3 componentes de los 4-vectores a y b .

En relatividad especial, es especialmente útil el uso de las transformaciones de 4-vectores a otro marco inercial mediante las transformaciones de Lorentz.

Por ejemplo, supongamos que existe un marco inercial S en reposo y otro marco inercial S' con una velocidad constante (v) a lo largo de un solo eje respecto al marco inercial S . La matriz de Lorentz que permite relacionar a ambos marcos inerciales es

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.9)$$

donde $\beta = \frac{v}{c}$ y $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

Por lo tanto, las transformaciones de los 4-vectores de posición entre los marcos inerciales S y S' se expresan de la siguiente forma:

$$\begin{cases} x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \\ x^{\mu} = (\Lambda^{-1})^{\mu}_{\nu} x'^{\nu} \\ x'_{\mu} = [(\Lambda^{-1})^T]_{\mu}^{\nu} x_{\nu} \\ x_{\mu} = (\Lambda^T)_{\mu}^{\nu} x'_{\nu} \end{cases}, \quad (1.10)$$

donde $(\Lambda^{-1})^{\mu}_{\nu}$ y $(\Lambda^{-1})^{\nu}_{\mu}$ son las matrices inversas de Λ^{μ}_{ν} y Λ^{ν}_{μ} respectivamente.

Los 4-vectores tienen una característica particular: su producto interno es invariante ante las transformaciones de Lorentz. Es decir,

$$x'^{\mu} x'_{\mu} = x^{\mu} x_{\mu}. \quad (1.11)$$

Además del 4-vector de posición, es de especial interés el 4-vector de momento (p) en la teoría cuántica de campos:

$$\begin{cases} p^{\mu} = (\frac{E}{c}, \mathbf{p}) = (p^0, p^1, p^2, p^3) = (\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z) \\ p_{\mu} = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ -\mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ -p_x \\ -p_y \\ -p_z \end{pmatrix} \end{cases}. \quad (1.12)$$

En esta ecuación, E es la energía y $\mathbf{p}$ es el vector tridimensional de momento.

Además de la invariancia del producto interno del 4-vector de momento ante transformaciones de Lorentz ($p'^{\mu} p'_{\mu} = p^{\mu} p_{\mu}$), el producto interno de diferentes 4-vectores (por ejemplo, $p'^{\mu} x'_{\mu} = p^{\mu} x_{\mu}$ o $x'^{\mu} p'_{\mu} = x^{\mu} p_{\mu}$) es también invariante ante transformaciones de Lorentz.

Por último, es importante hablar sobre las derivadas de funciones que dependen de 4-vectores [4]. Sea $\phi(x)$ una función del 4-vector de posición $x = x^{\mu}$. Entonces,

su variación se expresa de la siguiente manera:

$$\delta\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} \delta x^\mu = \frac{\partial\phi}{\partial x^0} \delta x^0 + \frac{\partial\phi}{\partial x^1} \delta x^1 + \frac{\partial\phi}{\partial x^2} \delta x^2 + \frac{\partial\phi}{\partial x^3} \delta x^3. \quad (1.13)$$

La derivada de ϕ respecto a x^μ se expresará en cualquiera de las siguientes notaciones a partir de este punto:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu \phi \equiv \phi_{,\mu}. \quad (1.14)$$

La ecuación (1.14) es un 4-vector covariante (nótese el subíndice en ∂). También existe la derivada de ϕ respecto a x_μ el cual es un 4-vector contravariante:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu} \equiv \partial^\mu \phi \equiv \phi^{,\mu}. \quad (1.15)$$

De la misma manera que en el caso de x y p , el producto interno de las ecuaciones (1.14) y (1.15) es invariante ante transformaciones de Lorentz. Este operador es muy común en la teoría cuántica de campos y es conocido como el operador de D'Alembert ($\square$):

$$\partial^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \equiv \square, \quad (1.16)$$

donde $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

1.2.2 TEORÍA CLÁSICA DE CAMPOS

1.2.3 ¿QUÉ ES UN CAMPO CLÁSICO?

Un campo clásico $\phi_r(x)$ es una función que describe cómo una cantidad física es distribuida a lo largo del espacio (o espacio-tiempo). Es decir, a cada punto del espacio (o espacio-tiempo) se le asigna un determinado valor de la función de campo [9].

Existen diversos tipos de campos clásicos, dependiendo de qué magnitud física se desee representar. Los campos clásicos mayormente utilizados en la teoría cuántica de campos son:

- **Campo escalar real:** Utilizado en el campo de Klein-Gordon para describir partículas con spin y carga eléctrica igual a 0 (por ejemplo: bosones escalares neutros).
- **Campo escalar complejo:** Utilizada en el campo de Klein-Gordon para describir partículas con spin 0, pero con carga eléctrica diferente de 0 (por ejemplo: piones con carga eléctrica y sus respectivas antipartículas).
- **Campos vectoriales:** Utilizado en la representación del campo electromagnético. Es útil para describir el comportamiento de fotones.
- **Campos espinoriales:** Utilizado en el campo de Dirac para describir partículas con spin $\frac{1}{2}$ y con carga eléctrica diferente de 0 (por ejemplo electrones (e^-) y positrones (e^+)).

1.2.3.1 FORMALISMO LAGRANGIANO PARA CAMPOS

El formalismo lagrangiano para partículas fue desarrollado por Joseph-Louis Lagrange en 1788 con el fin de modelar el comportamiento dinámico de partículas de manera distinta al formalismo de Newton [10].

De manera análoga al formalismo lagrangiano para las partículas, existe el formalismo lagrangiano para campos [4, 7]. En esta tesis, este último es de particular importancia.

El formalismo lagrangiano de campos parte de la búsqueda de la minimización (o maximización) de la acción S mediante técnicas de cálculo variacional. En este

formalismo, la acción (S) está definida en una región Ω de 4 dimensiones. Ésta se representa de la siguiente manera:

$$S(\Omega) = \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\phi_r, \phi_{r'\alpha}). \quad (1.17)$$

En donde $\mathcal{L}$ no es el lagrangiano, sino una densidad lagrangiana que es función del campo $\phi_r(x)$ y de la derivada del campo respecto de las coordenadas espacio-temporales $\phi_{r'\alpha}(x)$. El lagrangiano del campo ($\mathcal{L}$) está relacionado con la densidad lagrangiana del campo ($\mathcal{L}$) mediante la siguiente ecuación:

$$\mathcal{L}(t) = \int d^3\mathbf{x} \mathcal{L}(\phi_r, \phi_{r'\alpha}). \quad (1.18)$$

Tras realizar la variación de la acción S (ecuación (1.17)) se encuentran las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange para campos (de una manera muy similar a como se obtienen para partículas):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r'\alpha}} \right) = 0, \quad r = 1, \dots, N. \quad (1.19)$$

Una vez conocida la densidad lagrangiana $\mathcal{L}$ que describe la dinámica de N campos, es posible obtener N ecuaciones de movimiento (una ecuación de movimiento por cada campo existente) que describen en conjunto la dinámica de todos los campos.

1.2.3.2 FORMALISMO HAMILTONIANO PARA CAMPOS

En 1835, William Rowan Hamilton estableció un nuevo formalismo para describir sistemas clásicos de partículas [10]. Este formalismo, al igual que el de Euler-Lagrange, tiene una extensión para campos [4, 5, 7].

Las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange para campos (dadas por la ecuación (1.19)) forman un conjunto de N ecuaciones diferenciales de segundo orden

para describir la dinámica de N campos. En cambio, el formalismo Hamiltoniano para campos utiliza $2N$ ecuaciones diferenciales de primer orden para describir la dinámica de N campos. Es decir, para cada campo existen dos ecuaciones de movimiento.

Para establecer esto, se introduce la *densidad de momento conjugado* $\pi_r(x)$ de la siguiente manera:

$$\pi_r(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_r(x)}. \quad (1.20)$$

Para llevar a cabo la transición del formalismo de Lagrange al de Hamilton, es necesario encontrar una manera de cambiar las variables independientes. Es decir, en el formalismo de Lagrange las variables independientes son ϕ_r y $\phi_{r'\alpha}$; mientras que en el formalismo de Hamilton las variables independientes son ϕ_r y π_r . Esta transición se logra al aplicar la *Transformación de Legendre* al formalismo de Lagrange.

De esta manera, se obtiene una expresión análoga a la densidad lagrangiana, la densidad Hamiltoniana $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H}(x) = \pi_r(x) \dot{\phi}_r(x) - \mathcal{L}(\phi_r, \phi_{r'\alpha}). \quad (1.21)$$

La cual está relacionada con el Hamiltoniano del campo $\mathcal{H}$ de la siguiente manera:

$$\mathcal{H}[\phi_r, \pi_r] = \int d^3\mathbf{x} \mathcal{H}(\phi_r, \nabla\phi_r, \pi_r). \quad (1.22)$$

Una vez establecido el *Hamiltoniano total* $\mathcal{H}$, que es un funcional de las funciones $\phi_r(x)$ y $\pi_r(x)$, es posible establecer las $2N$ ecuaciones de movimiento de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \dot{\phi}_r(x) = \frac{\delta \mathcal{H}[\phi_r, \pi_r]}{\delta \pi_r(x)} \\ \dot{\pi}_r(x) = -\frac{\delta \mathcal{H}[\phi_r, \pi_r]}{\delta \phi_r(x)} \end{cases} \quad \text{para } r = 1, \dots, N. \quad (1.23)$$

1.2.4 TEOREMA DE NOETHER

En la teoría de los campos clásicos de Lagrange, tanto los campos como las densidades de momentos conjugados de los campos pueden ser sometidos a transformaciones de la siguiente manera [4]:

$$\phi_r(\mathbf{x}) \rightarrow \phi'_r(\mathbf{x}) = \phi_r(\mathbf{x}) + \delta\phi_r(\mathbf{x}). \quad (1.24)$$

Dichas transformaciones pueden ser de rotación, traslación, de Lorentz, etc.

Una vez conocida la forma matemática de la variación del campo $\delta\phi_r(\mathbf{x})$, es posible calcular cualquier campo transformado $\phi'_r(\mathbf{x})$ y a partir de éste calcular la densidad lagrangiana con sus coordenadas generalizadas transformadas: $\mathcal{L}'(\phi'_r, \phi'_{r,\alpha})$. Entonces, la variación de la densidad lagrangiana debido a la transformación de los campos está dada por la siguiente expresión:

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}'(\phi'_r, \phi'_{r,\alpha}) - \mathcal{L}(\phi_r, \phi_{r,\alpha}). \quad (1.25)$$

Por otro lado, es posible utilizar la regla de la cadena para calcular este mismo término:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_r} \delta\phi_r + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{r,\alpha}} \delta\phi_{r,\alpha}. \quad (1.26)$$

Ahora, se sustituye el término $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_r}$ de la ecuación (1.19) en la ecuación (1.26). Además, se supone que la densidad lagrangiana $\mathcal{L}$ y los campos ϕ_r son funciones bien portadas; por lo que se consideran válidas las siguientes igualdades:

$$\delta(\phi_{r,\alpha}) = \delta(\partial_\alpha\phi_r) = \partial_\alpha(\delta\phi_r). \quad (1.27)$$

Tras el desarrollo del álgebra mencionada, se obtiene la siguiente expresión [5]:

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\alpha \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{r,\alpha}} \delta\phi_r \right) = \partial_\alpha \mathcal{J}^\alpha. \quad (1.28)$$

Existe un caso específico en el que al transformar un campo ϕ_r en el campo ϕ'_r , la diferencia entre la densidad lagrangiana original $\mathcal{L}(\phi_r, \phi_{r,\alpha})$ y la transformada

$\mathcal{L}'(\phi'_r, \phi'_{r'\alpha})$ es igual a cero:

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\alpha \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi'_{r'\alpha}} \delta\phi_r \right) = 0. \quad (1.29)$$

Sin embargo, el caso más general está dado por la ecuación (1.28).

En ambos casos, la acción (dada por la ecuación (1.17)) es conservada bajo la transformación $\phi_r(\mathbf{x}) \rightarrow \phi'_r(\mathbf{x})$.

A partir del caso más general dado por la ecuación (1.28) se obtiene la siguiente expresión:

$$\partial_\alpha \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi'_{r'\alpha}} \delta\phi_r - \mathcal{J}^\alpha \right) = 0, \quad (1.30)$$

donde se define a la corriente conservada j^α de la siguiente manera:

$$j^\alpha = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi'_{r'\alpha}} \delta\phi_r - \mathcal{J}^\alpha. \quad (1.31)$$

Esta corriente (j^α) es integrada respecto a las 3 coordenadas espaciales para obtener una nueva función:

$$J^\alpha(t) = \int d^3\mathbf{x} j^\alpha(\mathbf{x}, t). \quad (1.32)$$

La cantidad conservada es precisamente el componente 0 de este 4-vector:

$$J^0 = \int d^3\mathbf{x} j^0(\mathbf{x}, t). \quad (1.33)$$

El teorema de Noether establece que conociendo el elemento diferencial de una transformación de campos $\delta\phi_r$ es posible conocer la cantidad conservada que le corresponde: J^0 .

Algunos ejemplos de cantidades conservadas bajo transformaciones son el momento lineal, el momento angular y la carga eléctrica.

1.2.5 CUANTIZACIÓN DE CAMPOS

Hasta el momento se ha hablado sobre campos clásicos. La electrodinámica cuántica, así como otras teorías, es una teoría cuántica de campos. Las teorías cuánticas de campos permiten la creación y aniquilación de partículas para describir diferentes procesos. Es necesario entonces dar el salto de una teoría clásica de campos a una teoría cuántica de campos [4, 6].

Para cuantizar la teoría, las funciones de los campos (ϕ_r) deben ser promovidas a operadores ($\hat{\phi}_{0,r}$).

La cuantización se obtiene explícitamente para campos libres al proponer relaciones de conmutación (para bosones) o de anticonmutación (para fermiones). Los campos libres son identificados por un subíndice 0 y reciben este nombre debido a que están «libres» de interacciones con cualquier otro tipo de campo. De aquí en adelante, varios operadores de cantidades libres se escribirán con el correspondiente subíndice 0.

Ahora, cualquier expresión que dependa de un campo cuántico arbitrario $\hat{\phi}_{0,r}$ es también un operador; por ejemplo, la densidad lagrangiana libre ($\hat{\mathcal{L}}_0$) y por lo tanto la densidad de momento conjugado ($\hat{\pi}_{0,r} = \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}_0}{\partial \dot{\hat{\phi}}_0}$) son consideradas ahora operadores.

Las relaciones de conmutación o anticonmutación necesarias para cuantizar los campos se mostrarán en secciones posteriores.

1.2.6 LA ECUACIÓN DE DIRAC

1.2.6.1 CAMPO CLÁSICO DE DIRAC

La ecuación de Dirac es útil para representar a partículas con un spin fraccionario [4, 5]. En este estudio, es de particular interés la aplicación de esta ecuación

para representar al electrón y a su antipartícula: el positrón.

De acuerdo con el principio de exclusión de Pauli, dos fermiones no pueden ocupar un mismo estado cuántico, mientras los bosones sí pueden hacerlo. Debido a esto, Dirac desarrolló una nueva ecuación relativista la cual pudiera describir adecuadamente el comportamiento de partículas con spin fraccionario y además cumplir con el principio de exclusión de Pauli.

Para cada campo de Dirac $\psi_r(x)$, la ecuación de Dirac puede ser representada mediante dos formas equivalentes:

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial \psi_r(x)}{\partial t} = [c\boldsymbol{\alpha} \cdot (-i\hbar \boldsymbol{\nabla}) + \beta mc^2] \psi_r(x) \\ i\hbar \gamma^\mu \frac{\partial \psi_r(x)}{\partial x^\mu} - mc\mathbb{I} \psi_r(x) = 0 \end{cases}, \quad (1.34)$$

donde:

- $\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^j) = (\beta, \beta\alpha^j)$ son las matrices de Dirac,

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

- $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3),$

$$\alpha^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix},$$

- las matrices de Pauli son: $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ y $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

- $\hbar$ es la constante de Planck,

- m es la masa de la partícula,

- $\mathbb{I}$ es una matriz identidad de tamaño 4×4 en el espacio de Dirac,

$$\blacksquare \quad \psi_r(x) = \begin{pmatrix} \psi_{r,0} \\ \psi_{r,1} \\ \psi_{r,2} \\ \psi_{r,3} \end{pmatrix}.$$

En la ecuación del campo clásico de Dirac, los campos $\psi_r(x)$ son espinores, los cuales son utilizados para representar partículas y antipartículas con spin $\frac{1}{2}$. Éstos son representaciones con 4 componentes similares a los 4-vectores.

Los espinores son diferentes a los vectores de cuatro dimensiones debido a que al rotar los componentes de los espinores por 2π radianes, no se obtienen los mismos espinores; es necesario rotar los componentes por 4π radianes para obtener los mismos componentes del espinor.

Los espinores que satisfacen la ecuación de Dirac tienen un espinor adjunto,

$$\bar{\psi}_r(x) = \psi_r^\dagger(x) \gamma^0. \quad (1.35)$$

El cual satisface la ecuación de Dirac adjunta,

$$i\hbar \frac{\partial \bar{\psi}_r(x)}{\partial x^\mu} \gamma^\mu + mc \mathbb{I} \bar{\psi}_r(x) = 0. \quad (1.36)$$

Una manera alternativa de llegar a la ecuación (1.34) es partiendo de una densidad lagrangiana $\mathcal{L}$ dada de la siguiente manera:

$$\mathcal{L} = \sum_r^N \left[c \bar{\psi}_r(x) \left(i\hbar \gamma^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} - m_r c \mathbb{I} \right) \psi_r(x) \right]. \quad (1.37)$$

Al evaluar esta densidad lagrangiana en la ecuación de Euler-Lagrange para campos (1.19) se obtiene una ecuación de Dirac para cada uno de los N campos fermiónicos que se planteen.

De acuerdo con el formalismo lagrangiano para campos, es posible calcular las densidades de momento conjugados para la densidad lagrangiana de Dirac (1.37).

Éstas últimas se expresan de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \pi_r(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_r} = i\hbar \psi_r^\dagger, \\ \bar{\pi}_r(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{\psi}}_r} \equiv 0. \end{cases} \quad (1.38)$$

Con esto, es posible calcular el Hamiltoniano para el campo de Dirac:

$$\mathcal{H} = \int d^3x \mathcal{H} = \int d^3x \sum_r^N \left[\bar{\psi}_r(x) \left(-i\hbar c \gamma^j \frac{\partial}{\partial x^j} + m_r c^2 \mathbb{I} \right) \psi_r(x) \right]. \quad (1.39)$$

Por otro lado, en las ecuaciones de campo de Dirac existen las siguientes transformaciones continuas de simetría:

$$\begin{cases} \delta \psi_r = -\frac{iq}{c\hbar} \psi_r, \\ \delta \psi_r^\dagger = \frac{iq}{c\hbar} \psi_r^\dagger, \end{cases} \quad (1.40)$$

las cuales dejan invariante a la densidad lagrangiana. De acuerdo con el Teorema de Noether, a estas transformaciones continuas de simetría les corresponde una carga conservada que se puede calcular mediante la ecuación (1.33).

Al evaluar la ecuación (1.33) para el caso de los campos fermiónicos $\psi_r(x)$ y los campos fermiónicos conjugados $\psi_r^\dagger(x)$ se obtiene que la «carga conservada» dictada por el Teorema de Noether es la carga eléctrica de las partículas fermiónicas correspondientes a cada campo:

$$Q = q \int d^3\mathbf{x} \sum_r^N [\psi_r^\dagger(x) \psi_r(x)]. \quad (1.41)$$

Dicho esto, ahora es importante analizar cuál es la forma de los campos espinoriales $\psi_r(x)$ y $\psi_r^\dagger(x)$ que satisfacen las ecuaciones de Dirac (1.34) y (1.36).

Para obtener esto, es necesario primeramente establecer un volumen de frontera con condiciones periódicas para finalmente hacer tender el volumen hacia el infinito con el fin de abarcar todo el espacio existente. Existen 4 *espinores solución* de la ecuación de Dirac:

$$u_{r,s}(\mathbf{p}) \frac{e^{-ipx/\hbar}}{\sqrt{V}}, \quad v_{r,s}(\mathbf{p}) \frac{e^{ipx/\hbar}}{\sqrt{V}}, \quad s = 1, 2. \quad (1.42)$$

En la ecuación anterior aparecen los términos $u_{r,s}(\mathbf{p})$ y $v_{r,s}(\mathbf{p})$, los cuales son espinores columna constantes con 4 componentes que satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} (\not{p} - m_r c \mathbb{I}) u_{r,s}(\mathbf{p}) = 0, \\ (\not{p} + m_r c \mathbb{I}) v_{r,s}(\mathbf{p}) = 0, \end{cases} \quad s = 1, 2.$$

A partir de este punto, se introduce la notación con *slash*, la cual representa la multiplicación matricial de la matriz γ^μ y un 4-vector arbitrario A_μ . Esto da como resultado una matriz de tamaño 4×4 en el espacio de Dirac:

$$\not{A} = \gamma^\mu A_\mu. \quad (1.43)$$

El espinor $u_{r,s}(\mathbf{p})$ es considerado el espinor que representa a partículas, y el espinor $v_{r,s}(\mathbf{p})$ es el espinor que representa a las antipartículas. Para cada uno de los N espinores, existen dos soluciones correspondientes a $s = 1$ y $s = 2$. Estas dos soluciones para cada espinor $u_{r,s}(\mathbf{p})$ y $v_{r,s}(\mathbf{p})$ corresponden a su orientación respecto al vector de momento $\mathbf{p}$.

De esta manera, existen soluciones que representan a partículas con spin paralelo y antiparalelo al momento $\mathbf{p}$; existen también soluciones que representan a antipartículas con spin paralelo y antiparalelo al momento $\mathbf{p}$.

Los cuatro espinores solución $u_{r,1}(\mathbf{p})$, $u_{r,2}(\mathbf{p})$, $v_{r,1}(\mathbf{p})$ y $v_{r,2}(\mathbf{p})$ satisfacen las siguientes relaciones de ortonormalidad:

$$\begin{cases} u_{q,s}^\dagger(\mathbf{p}) u_{r,t}(\mathbf{p}) = v_{q,s}^\dagger(\mathbf{p}) v_{r,t}(\mathbf{p}) = \frac{E_{q,\mathbf{p}}}{m_q c^2} \delta_{st} \delta_{qr}, \\ u_{q,s}^\dagger(\mathbf{p}) v_{r,t}(-\mathbf{p}) = 0, \end{cases} \quad (1.44)$$

donde:

$$E_{q,\mathbf{p}} = \sqrt{m_q^2 c^4 + c^2 \mathbf{p}^2}.$$

En este estudio se considerará únicamente el caso donde existe un solo campo fermiónico ψ junto con su respectivo campo conjugado $\psi^\dagger$, los cuales en conjunto representan al electrón y al positrón.

Entonces, la solución de la ecuación de Dirac puede expandirse con términos lineales a los espinores solución:

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \psi^+(x) + \psi^-(x) \\ &= \sum_{\mathbf{p},s} \left(\frac{mc^2}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} \left[c_s(\mathbf{p}) u_s(\mathbf{p}) e^{-ipx/\hbar} + d_s^\dagger(\mathbf{p}) v_s(\mathbf{p}) e^{ipx/\hbar} \right],\end{aligned}\tag{1.45}$$

en donde el término $\left(\frac{mc^2}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2}$ proviene de las condiciones de ortonormalidad.

De la misma manera, para el campo conjugado de Dirac $\bar{\psi}$ se tiene una expansión en términos lineales de los espinores solución:

$$\begin{aligned}\bar{\psi}(x) &= \bar{\psi}^+(x) + \bar{\psi}^-(x) \\ &= \sum_{\mathbf{p},s} \left(\frac{mc^2}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} \left[d_s(\mathbf{p}) \bar{v}_s(\mathbf{p}) e^{-ipx/\hbar} + c_s^\dagger(\mathbf{p}) \bar{u}_s(\mathbf{p}) e^{ipx/\hbar} \right],\end{aligned}\tag{1.46}$$

donde:

$$\begin{cases} \bar{u}_s = u_s^\dagger \gamma^0 \\ \bar{v}_s = v_s^\dagger \gamma^0 \end{cases}.\tag{1.47}$$

1.2.6.2 CUANTIZACIÓN DEL CAMPO DE DIRAC

Ya que se conocen las soluciones «clásicas» del campo de Dirac dadas por las ecuaciones (1.45) y (1.46), es necesario estudiar la cuantización de estos campos [4]. Al cuantizar los campos, se promueven las constantes c_s , $d_s^\dagger$, d_s y $c_s^\dagger$ a operadores de creación y aniquilación de electrones y positrones: $\hat{c}_s$, $\hat{d}_s^\dagger$, $\hat{d}_s$ y $\hat{c}_s^\dagger$.

En este momento, las funciones de campo de Dirac se han convertido en ope-

radores de campo libre de Dirac $\hat{\psi}_0$ y $\hat{\psi}_0^\dagger$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\psi}_0(x) = \hat{\psi}_0^{(+)}(x) + \hat{\psi}_0^{(-)}(x) \\ \quad = \sum_{\mathbf{p},s} \left(\frac{m_0 c^2}{V E_{0,\mathbf{p}}} \right)^{1/2} \left[\hat{c}_s(\mathbf{p}) u_{0,s}(\mathbf{p}) e^{-ipx/\hbar} + \hat{d}_s^\dagger(\mathbf{p}) v_{0,s}(\mathbf{p}) e^{ipx/\hbar} \right], \\ \hat{\bar{\psi}}_0 = \hat{\bar{\psi}}_0^{(+)}(x) + \hat{\bar{\psi}}_0^{(-)}(x) \\ \quad = \sum_{\mathbf{p},s} \left(\frac{m_0 c^2}{V E_{0,\mathbf{p}}} \right)^{1/2} \left[\hat{d}_s(\mathbf{p}) \bar{v}_{0,s}(\mathbf{p}) e^{-ipx/\hbar} + \hat{c}_s^\dagger(\mathbf{p}) \bar{u}_{0,s}(\mathbf{p}) e^{ipx/\hbar} \right], \end{array} \right. \quad (1.48)$$

donde los operadores de campo libre $\hat{\psi}_0$ y $\hat{\psi}_0^\dagger$ describen a partículas con «masa desnuda» m_0 . Además, los espinores solución de la ecuación de Dirac son ahora considerados espinores solución «desnudos»: $u_{0,s}$, $v_{0,s}$, $\bar{v}_{0,s}$ y $\bar{u}_{0,s}$.

Un aspecto importante a considerar en la cuantización de los campos fermiónicos es que tras este proceso se respete el principio de exclusión de Pauli. El uso de las relaciones de conmutación utilizada con bosones violarían este principio. En su lugar se deben usar relaciones de *anticonmutación* para los operadores de creación y aniquilación de electrones y positrones. Estas relaciones sí son compatibles con el principio de exclusión de Pauli:

$$[\hat{A}, \hat{B}]_+ = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}. \quad (1.49)$$

El uso de los anticonmutadores $[\cdots, \cdots]_+$ permite establecer relaciones de anticonmutación a tiempos iguales para los componentes de los operadores de campos espinoriales $\hat{\psi}_{0,\alpha}(\mathbf{x}, t)$ y $\hat{\psi}_{0,\beta}^\dagger(\mathbf{y}, t)$. Estas relaciones de anticonmutación se expresan de la siguiente manera [5]:

$$\left\{ \begin{array}{l} [\hat{\psi}_{0,\alpha}(\mathbf{x}, t), \hat{\psi}_{0,\beta}^\dagger(\mathbf{y}, t)]_+ = \delta_{\alpha\beta} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ [\hat{\psi}_{0,\alpha}(\mathbf{x}, t), \hat{\psi}_{0,\beta}(\mathbf{y}, t)]_+ = 0, \\ [\hat{\psi}_{0,\alpha}^\dagger(\mathbf{x}, t), \hat{\psi}_{0,\beta}(\mathbf{y}, t)]_+ = 0. \end{array} \right. \quad (1.50)$$

Sustituyendo las expansiones de la ecuación (1.48) para cada componente del operador de campo espinorial en las relaciones de anticonmutación a tiempos iguales

dadas por la ecuación (1.50), es posible obtener las relaciones de anticonmutación para los operadores de creación $\hat{c}^\dagger$ y aniquilación $\hat{c}$ de fermiones [4]:

$$\begin{cases} [\hat{c}_s(\mathbf{p}), \hat{c}_t^\dagger(\mathbf{p}')]_+ = [\hat{d}_s(\mathbf{p}), \hat{d}_t^\dagger(\mathbf{p}')]_+ = \delta_{st}\delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}, \\ [\hat{c}_s, \hat{c}_t]_+ = [\hat{c}_s^\dagger, \hat{c}_t^\dagger]_+ = [\hat{d}_s, \hat{d}_t]_+ = [\hat{d}_s^\dagger, \hat{d}_t^\dagger]_+ = 0, \\ [\hat{c}_s, \hat{d}_t]_+ = [\hat{c}_s, \hat{d}_t^\dagger]_+ = [\hat{c}_s^\dagger, \hat{d}_t]_+ = [\hat{c}_s^\dagger, \hat{d}_t^\dagger]_+ = 0. \end{cases} \quad (1.51)$$

Además de estas relaciones de anticonmutación, las siguientes propiedades de los operadores de creación y aniquilación de electrones y positrones son de gran importancia al momento de analizar el principio de exclusión de Pauli:

$$\begin{cases} (\hat{c}_s)^2 = (\hat{c}_s^\dagger)^2 = 0, \\ (\hat{d}_s)^2 = (\hat{d}_s^\dagger)^2 = 0. \end{cases} \quad (1.52)$$

Con el uso de los operadores de creación y aniquilación de partículas, se pueden establecer operadores número expresados de la siguiente forma:

$$\hat{N}_s(\mathbf{p}) = \hat{c}_s^\dagger(\mathbf{p})\hat{c}_s(\mathbf{p}), \quad \hat{N}_s(\mathbf{p}) = \hat{d}_s^\dagger(\mathbf{p})\hat{d}_s(\mathbf{p}), \quad (1.53)$$

los cuales admiten solamente los eigenvalores 0 y 1.

De esta manera, la creación de un electrón con polarización s a partir del vacío $|0\rangle$ se plantea de la siguiente manera:

$$|1_s\rangle = \hat{c}_s^\dagger |0\rangle. \quad (1.54)$$

Para estados de dos electrones existen únicamente dos opciones:

- Ambos electrones tienen polarizaciones diferentes (se encuentran en estados cuánticos diferentes).
- Ambos electrones tienen polarizaciones iguales (se encuentran en el mismo estado cuántico).

Esto se representa mediante las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} |1_s 1_t\rangle = \hat{c}_s^\dagger \hat{c}_t^\dagger |0\rangle = -\hat{c}_t^\dagger \hat{c}_s^\dagger |0\rangle = -|1_t 1_s\rangle, & (t \neq s); \\ |2_s\rangle = (\hat{c}_s^\dagger)^2 |0\rangle = 0. \end{cases} \quad (1.55)$$

La primera de estas ecuaciones muestra que es posible tener dos electrones a partir del vacío, siempre y cuando los operadores de creación $\hat{c}_s^\dagger$ y $\hat{c}_t^\dagger$ no tengan la misma polarización de spin ($s \neq t$). De esta manera, ambos electrones se encuentran en estados cuánticos diferentes. Además, esta ecuación plantea que el estado es antisimétrico ante un intercambio de las etiquetas de las partículas ($\hat{c}_s^\dagger \hat{c}_t^\dagger = -\hat{c}_t^\dagger \hat{c}_s^\dagger$).

La última ecuación plantea que cuando se aplican dos operadores de creación con la misma polarización s al ket de estado del vacío $|0\rangle$, el resultado es cero. Esto garantiza que dos electrones no pueden compartir exactamente el mismo estado cuántico, cumpliendo con el principio de exclusión de Pauli.

Estos mismos principios que se deducen a partir de las ecuaciones (1.55) se cumplen también cuando se utilizan los operadores de creación de positrones $\hat{d}_s^\dagger$.

A partir de los campos cuánticos de Dirac dados por la ecuación (1.48), es posible obtener las expresiones de otros operadores como el Hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}_0$ o el operador de carga eléctrica $\hat{Q}_0$ utilizando las ecuaciones (1.39) y (1.41), respectivamente.

Al aplicar los operadores $\hat{\mathcal{H}}_0$ y $\hat{Q}_0$ calculados de esta forma al ket de estado del vacío $|0\rangle$, es posible calcular los eigenvalores de energía y de carga eléctrica de cualquier estado. Sin embargo, al evaluar esto el resultado es infinito. Para poder obtener resultados finitos en este tipo de cálculos es necesario introducir el *producto normal de operadores* $\mathcal{N}[\dots]$.

En el producto normal de operadores, todos los operadores de aniquilación de partículas $\hat{c}_s$ o $\hat{d}_s$ son colocados a la derecha de los operadores de creación de partículas $\hat{c}_s^\dagger$ o $\hat{d}_s^\dagger$.

Por ejemplo, en el caso del producto normal de campos de Dirac, se obtiene el siguiente resultado:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}[\hat{\psi}_{0,\alpha}\hat{\psi}_{0,\beta}] &= \mathcal{N}\left[(\hat{\psi}_{0,\alpha}^+ + \hat{\psi}_{0,\alpha}^-)(\hat{\psi}_{0,\beta}^+ + \hat{\psi}_{0,\beta}^-)\right] \\ &= \hat{\psi}_{0,\alpha}^+\hat{\psi}_{0,\beta}^+ - \hat{\psi}_{0,\beta}^-\hat{\psi}_{0,\alpha}^+ + \hat{\psi}_{0,\alpha}^-\hat{\psi}_{0,\beta}^+ + \hat{\psi}_{0,\alpha}^-\hat{\psi}_{0,\beta}^-.\end{aligned}\tag{1.56}$$

En este caso, los subíndices α y β etiquetan a cualquiera de los 4 componentes de un solo campo fermiónico $\hat{\psi}_0$ evaluado en las siguientes coordenadas espacio-temporales $\hat{\psi}_{0,\alpha}(x)$ y $\hat{\psi}_{0,\beta}(y)$, donde $x = y$ o $x \neq y$.

Además, vale la pena recordar que los componentes $\hat{\psi}_0^+$ (ecuación (1.48)) son proporcionales a operadores de aniquilación de electrones $\hat{c}_s$ y los componentes $\hat{\psi}_0^-$ (ecuación (1.48)) son proporcionales a operadores de creación de positrones $\hat{d}_s^\dagger$. Por esto, al aplicar el producto normal se busca que $\hat{\psi}_0^+$ esté colocado a la derecha de $\hat{\psi}_0^-$.

El signo negativo en el término $-\hat{\psi}_{0,\beta}^-\hat{\psi}_{0,\alpha}^+$ proviene de la siguiente igualdad:

$$\hat{\psi}_{0,\alpha}^+\hat{\psi}_{0,\beta}^- = -\hat{\psi}_{0,\beta}^-\hat{\psi}_{0,\alpha}^+,$$

la cual se deduce a partir de las reglas de anticonmutación (1.51).

Utilizando el producto normal de operadores es posible obtener nuevamente los operadores Hamiltoniano y de carga eléctrica en función de los operadores número para los campos de Dirac ($\hat{N}_s$, $\hat{\bar{N}}_s$). De esta manera, el cálculo de los eigenvalores de estos operadores ya es finito:

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \sum_{\mathbf{p},s} E_{0,\mathbf{p}} \left[\hat{N}_s(\mathbf{p}) + \hat{\bar{N}}_s(\mathbf{p}) \right], \quad \hat{Q}_0 = -e_0 \sum_{\mathbf{p},s} \left[\hat{N}_s(\mathbf{p}) - \hat{\bar{N}}_s(\mathbf{p}) \right]. \tag{1.57}$$

Aquí, $\hat{N}_s$ es el operador número para los electrones y $\hat{\bar{N}}_s$ es el operador número para los positrones.

1.2.6.3 RELACIONES DE ANTICONMUTACIÓN COVARIANTES

Hasta el momento, se han utilizado relaciones de anticonmutación entre campos evaluados en dos puntos distintos del espacio, pero ambos siendo evaluados en un mismo tiempo $t = t'$. En esta sección se analizará el caso en donde el operador de campo de Dirac $\hat{\psi}_0$ está evaluado en tiempos distintos $t \neq t'$ [4], esto se representa evaluando a $\hat{\psi}_0$ en dos coordenadas espacio-temporales distintas: x y y .

$$\begin{cases} \hat{\psi}_0(x) = \hat{\psi}_0^+(x) + \hat{\psi}_0^-(x), \\ \hat{\psi}_0(y) = \hat{\psi}_0^+(y) + \hat{\psi}_0^-(y). \end{cases} \quad (1.58)$$

Las relaciones de anticonmutación para estos campos se expresan de la siguiente manera:

$$\begin{cases} [\hat{\psi}_0(x), \hat{\psi}_0(y)]_+ = [\hat{\bar{\psi}}_0(x), \hat{\bar{\psi}}_0(y)]_+ = 0, \\ [\hat{\psi}_0(x), \hat{\bar{\psi}}_0(y)]_+ = i \left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{m_0 c}{\hbar} \mathbb{I} \right) \left[\frac{-\hbar c}{(2\pi\hbar)^3} \right] \int \frac{d^3\mathbf{p}}{E_{0,\mathbf{p}}} \sin \left[\frac{p(x-y)}{\hbar} \right] \\ = iS_0(x-y), \end{cases} \quad (1.59)$$

donde $[\hat{\psi}_0(x), \hat{\bar{\psi}}_0(y)]_+$ se obtuvo al expandir los operadores de campos $\hat{\psi}_0$ y $\hat{\bar{\psi}}_0$ de acuerdo con la ecuación (1.58) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} [\hat{\psi}_0(x), \hat{\bar{\psi}}_0(y)]_+ &= [\hat{\psi}_0^+(x), \hat{\bar{\psi}}_0^+(y)]_+ + [\hat{\psi}_0^+(x), \hat{\bar{\psi}}_0^-(y)]_+ \\ &\quad + [\hat{\psi}_0^-(x), \hat{\bar{\psi}}_0^+(y)]_+ + [\hat{\psi}_0^-(x), \hat{\bar{\psi}}_0^-(y)]_+. \end{aligned} \quad (1.60)$$

Al calcular cada uno de estos cuatro anticonmutadores se obtiene:

$$\begin{cases} [\hat{\psi}_0^+(x), \hat{\bar{\psi}}_0^+(y)]_+ = [\hat{\psi}_0^-(x), \hat{\bar{\psi}}_0^-(y)]_+ = 0, \\ [\hat{\psi}_0^+(x), \hat{\bar{\psi}}_0^-(y)]_+ = i \left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{m_0 c}{\hbar} \mathbb{I} \right) \left[\frac{-i\hbar c}{(2\pi\hbar)^3} \right] \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2E_{0,\mathbf{p}}} e^{-i\frac{p(x-y)}{\hbar}} = iS_0^+(x-y), \\ [\hat{\psi}_0^-(x), \hat{\bar{\psi}}_0^+(y)]_+ = i \left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{m_0 c}{\hbar} \mathbb{I} \right) \left[\frac{i\hbar c}{(2\pi\hbar)^3} \right] \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2E_{0,\mathbf{p}}} e^{i\frac{p(x-y)}{\hbar}} = iS_0^-(x-y), \end{cases} \quad (1.61)$$

en donde se definen las funciones matriciales $S_0^\pm(x)$ de la siguiente manera:

$$S_0^\pm(x) \equiv \left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{m_0 c}{\hbar} \mathbb{I} \right) \left[\mp \frac{i\hbar c}{(2\pi\hbar)^3} \right] \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2E_{0,\mathbf{p}}} e^{\mp i\frac{px}{\hbar}}. \quad (1.62)$$

De acuerdo con las ecuaciones (1.60) y (1.61), el anticonmutador $[\hat{\psi}_0(x), \hat{\bar{\psi}}_0(y)]_+$ puede expresarse de la siguiente manera:

$$[\hat{\psi}_0(x), \hat{\bar{\psi}}_0(y)]_+ = i [S_0^+(x-y) + S_0^-(x-y)]. \quad (1.63)$$

Ahora, es posible definir a la función $S_0(x)$ de la siguiente manera:

$$S_0(x) = S_0^+(x) + S_0^-(x). \quad (1.64)$$

Con esto, se obtiene la forma final del anticonmutador $[\hat{\psi}_0(x), \hat{\bar{\psi}}_0(y)]_+$:

$$[\hat{\psi}_0(x), \hat{\bar{\psi}}_0(y)]_+ = i \left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{m_0 c}{\hbar} \mathbb{I} \right) \left[\frac{-\hbar c}{(2\pi\hbar)^3} \right] \int \frac{d^3\mathbf{p}}{E_{0,\mathbf{p}}} \sin \left[\frac{p(x-y)}{\hbar} \right] = iS_0(x-y). \quad (1.65)$$

Los componentes de la función matricial S_0 tienen una representación equivalente en el plano complejo de p_0 , dada de la siguiente manera:

$$S_0^\pm(x) \equiv -\frac{\hbar}{(2\pi\hbar)^4} \int_{C^\pm} d^4p e^{-\frac{ipx}{\hbar}} \frac{\not{p} + m_0 c \mathbb{I}}{p^2 - m_0^2 c^2}, \quad (1.66)$$

donde se utilizan los contornos de integración mostrados en la figura 1.2.

1.2.6.4 PROPAGADOR DE DIRAC

En la teoría cuántica de campos, se presenta la creación y la aniquilación de partículas a diferentes tiempos. Para describir este proceso en el espacio-tiempo, es de gran utilidad el *producto ordenado temporal* $\mathcal{T}\{\dots\}$ [4, 7].

El producto temporal entre un campo de Dirac $\hat{\psi}_0(x)$ y su adjunto $\hat{\bar{\psi}}_0(x')$ evaluados en coordenadas espacio-temporales diferentes ($x \neq x'$) se expresa de la siguiente manera:

$$T [\hat{\psi}_0(x) \hat{\bar{\psi}}_0(x')] = \begin{cases} \hat{\psi}_0(x) \hat{\bar{\psi}}_0(x'), & \text{si } t > t'; \\ -\hat{\bar{\psi}}_0(x') \hat{\psi}_0(x), & \text{si } t' > t. \end{cases} \quad (1.67)$$

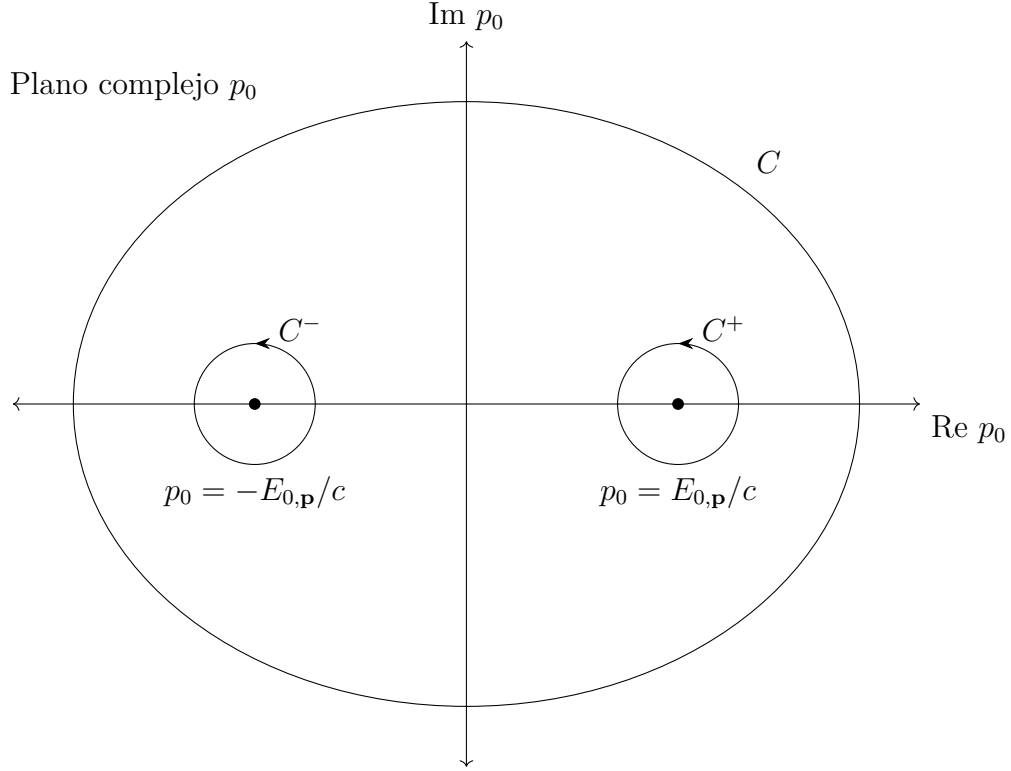


FIGURA 1.2: Contornos para la representación en el plano complejo p_0 de las funciones $S_0^\pm(x)$. Reimpreso de Mandl, F.(2010).

Este producto de operadores permite que los operadores sean escritos cronológicamente de derecha a izquierda. Se puede definir de manera alternativa utilizando la *función escalón* $\theta(t)$:

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t > 0, \\ 0, & \text{si } t < 0. \end{cases} \quad (1.68)$$

Con lo cual $T \left[\hat{\psi}_0(x) \hat{\bar{\psi}}_0(x') \right]$ puede expresarse de la siguiente manera:

$$T \left[\hat{\psi}_0(x) \hat{\bar{\psi}}_0(x') \right] = \theta(t - t') \hat{\psi}_0(x) \hat{\bar{\psi}}_0(x') - \theta(t' - t) \hat{\bar{\psi}}_0(x') \hat{\psi}_0(x). \quad (1.69)$$

Utilizando este producto temporal, es posible definir una función importante en la electrodinámica cuántica conocida como *el propagador fermiónico libre*:

$$iS_{F,0}(x - x') = \left\langle 0 \left| \mathcal{T} \left[\hat{\psi}_0(x) \hat{\bar{\psi}}_0(x') \right] \right| 0 \right\rangle. \quad (1.70)$$

El propagador libre del electrón $S_{F,0}(x)$ puede definirse en términos de las funciones $S_0^+(x)$ y $S_0^-(x)$ de la siguiente manera:

$$S_{F,0}(x) = \theta(t)S_0^+(x) - \theta(-t)S_0^-(x). \quad (1.71)$$

El propagador libre del electrón $S_{F,0}(x - x')$ tiene el siguiente significado: un electrón es creado en un punto del espacio-tiempo x y viaja a través del espacio-tiempo hasta un punto x' en donde el electrón es aniquilado. De igual manera, puede ser representado de modo que el electrón se haya creado en x' y sea aniquilado en x . El propagador contiene la información del comportamiento de un electrón virtual desde su creación hasta su aniquilación.

La función matricial $S_{F,0}(x)$ tiene también una representación en el plano complejo de p_0 dada de la siguiente manera:

$$S_{F,0}(x) = \frac{\hbar}{(2\pi\hbar)^4} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int d^4p e^{-ipx/\hbar} \frac{\not{p} + m_0c\mathbb{I}}{p^2 - m_0^2c^2 + i\epsilon}, \quad (1.72)$$

en donde $i\epsilon$ se agrega en el denominador para poder evaluar los polos más fácilmente al resolver la integral. En el resultado final se hace tender este término a cero.

Para evaluar la ecuación (1.72) se utiliza el contorno de integración establecido en la figura 1.3.

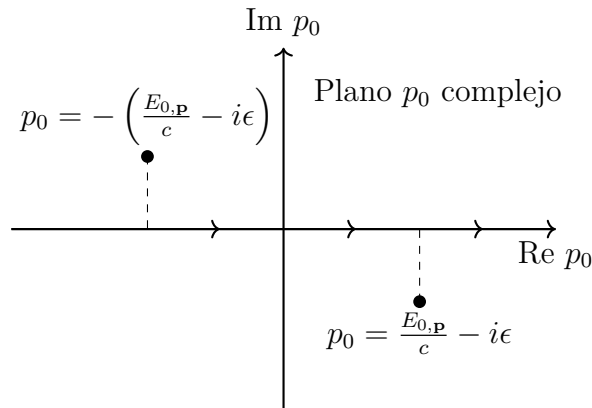


FIGURA 1.3: Contorno para la representación en el plano complejo p_0 del propagador fermiónico $S_{F,0}(x - x')$. Reimpreso de Mandl, F.(2010).

El propagador del electrón en la ecuación (1.72) está expresado como función del vector de posición x . Sin embargo, en muchos cálculos es útil su representación en función del 4-vector de momento p . Esto se logra al considerar las transformadas de Fourier en 4 dimensiones:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^4} \int \tilde{f}(p) e^{-ipx/\hbar} d^4p, \\ \tilde{f}(p) = \int f(x) e^{ipx/\hbar} d^4x. \end{cases} \quad (1.73)$$

Comparando las ecuaciones (1.72) y (1.73), se observa muy fácilmente que el propagador del electrón en términos del 4-momento p se expresa de la siguiente manera:

$$\tilde{S}_{F,0}(p) = \hbar \frac{\not{p} + m_0 c \mathbb{I}}{p^2 - m_0^2 c^2 + i\epsilon}. \quad (1.74)$$

1.2.7 FORMULACIÓN COVARIANTE DEL ELECTROMAGNETISMO

En la formulación del campo electromagnético se utilizan 4-vectores covariantes. El 4-vector de potencial electromagnético se expresa de la siguiente manera [4]:

$$A^\mu = (\varphi, \mathbf{A}), \quad (1.75)$$

en donde φ es el potencial eléctrico, y $\mathbf{A}$ es el potencial magnético.

Además, también es útil la definición del tensor de campo antisimétrico $F^{\mu\nu}$ en términos de los componentes E_i y B_i del campo eléctrico y magnético:

$$F^{\mu\nu}(x) = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.76)$$

Por último, también es útil la densidad carga-corriente $s^\mu(x)$ dada de la siguiente manera:

$$s^\mu(x) = [c\rho(x), \mathbf{j}(x)], \quad (1.77)$$

donde:

- $\rho(x)$ es la carga encerrada por unidad de volumen espacial,
- $\mathbf{j}(x)$ es el vector de la densidad de corriente por unidad de área transversal.

Teniendo todo esto en cuenta, es posible escribir las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo en su forma tensorial:

$$\partial_\nu F^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{c} s^\mu(x), \quad (1.78)$$

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu}(x) + \partial^\mu F^{\nu\lambda}(x) + \partial^\nu F^{\lambda\mu}(x) = 0. \quad (1.79)$$

El tensor de campo antisimétrico $F^{\mu\nu}$ puede ser expresado en términos del 4-vector de potencial electromagnético A^μ :

$$F^{\mu\nu}(x) = \partial^\nu A^\mu(x) - \partial^\mu A^\nu(x). \quad (1.80)$$

Evaluando la ecuación (1.80) en la ecuación (1.78) se obtiene la ecuación del campo electromagnético en función del 4-vector A^μ :

$$\partial^\nu \partial_\nu [A^\mu(x)] - \partial^\mu [\partial_\nu A^\nu(x)] = \frac{1}{c} s^\mu(x). \quad (1.81)$$

La densidad lagrangiana propuesta por Fermi para describir el campo electromagnético se expresa de la siguiente manera:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (\partial_\nu A_\mu(x)) (\partial^\nu A^\mu(x)) - \frac{1}{c} s_\mu(x) A^\mu(x). \quad (1.82)$$

Tras evaluar esta densidad lagrangiana en las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange para campos se obtiene la ecuación del campo electromagnético:

$$\partial^\nu \partial_\nu [A^\mu(x)] = \frac{1}{c} s^\mu(x). \quad (1.83)$$

Para que esta ecuación de campo electromagnético sea concordante con las ecuaciones de Maxwell (1.81), es necesario que se cumpla con la condición $\partial_\nu A^\nu(x) = 0$, o con una expresión equivalente.

Utilizando la densidad lagrangiana para el campo electromagnético propuesta por Fermi, es posible calcular la densidad de momento conjugado:

$$\pi^\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = -\frac{1}{c^2} \dot{A}^\mu(x). \quad (1.84)$$

Es necesario calcular el campo electromagnético libre, sin ninguna carga fuente ni corrientes. Esta condición se expresa de la siguiente manera: $s^\mu(x) = 0$. Entonces, a partir de la ecuación (1.83) se obtiene la ecuación del campo electromagnético libre:

$$\partial^\nu \partial_\nu [A^\mu(x)] = 0. \quad (1.85)$$

Tras imponer condiciones de frontera periódicas, es posible obtener una solución general a esta última ecuación diferencial. La solución general se expresa de la siguiente forma:

$$\begin{cases} A^\mu(x) = A^{\mu(+)}(x) + A^{\mu(-)}(x), \\ A^{\mu(+)}(x) = \sum_{\mathbf{k},s} \left(\frac{\hbar c^2}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \epsilon_s^\mu(\mathbf{k}) a_s(\mathbf{k}) e^{-ikx}, \\ A^{\mu(-)}(x) = \sum_{\mathbf{k},s} \left(\frac{\hbar c^2}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \epsilon_s^\mu(\mathbf{k}) a_s^\dagger(\mathbf{k}) e^{ikx}, \end{cases} \quad (1.86)$$

donde:

- V es el volumen delimitado por las fronteras,
- $\mathbf{k}$ es el vector de onda establecido por las condiciones de frontera,
- $\omega_{\mathbf{k}} = +c|\mathbf{k}|$,
- $k^0 = \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{c} = |\mathbf{k}|$.
- $k = \frac{p}{\hbar}$ es el 4-vector de onda.
- x es el 4-vector de posición.
- a_s y $a_s^\dagger$ son constantes que dependen del momento $\mathbf{k}$.

El término $\epsilon_s^\mu(\mathbf{k})$ merece especial atención ya que tiene varias particularidades. Este vector recibe el nombre de 4-vector de polarización. Este vector indica que para cada vector solución A^μ evaluado en un vector de onda específico $\mathbf{k}$, existen cuatro estados de polarización identificados por el índice $s = 0, 1, 2, 3$.

$$\begin{cases} \epsilon_{s\mu}(\mathbf{k}) \epsilon_t^\mu(\mathbf{k}) = -\zeta_s \delta_{st}, & s, t = 0, 1, 2, 3; \\ \sum_s \zeta_s \epsilon_s^\mu(\mathbf{k}) \epsilon_s^\nu(\mathbf{k}) = -g^{\mu\nu}, \end{cases} \quad (1.87)$$

,en donde $\zeta_0 = -1$ y $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = 1$.

El 4-vector de polarización $\epsilon_s^\mu(\mathbf{k})$ es definido de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \epsilon_0^\mu(\mathbf{k}) = n^\mu \equiv (1, 0, 0, 0), \\ \epsilon_s^\mu(\mathbf{k}) = (0, \boldsymbol{\epsilon}_s(\mathbf{k})), & s = 1, 2, 3, \end{cases} \quad (1.88)$$

en donde el tercer vector de polarización tridimensional $\epsilon_3(\mathbf{k})$ es el vector unitario de $\mathbf{k}$; es decir, $\epsilon_3(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$. Todos los vectores $\epsilon_s(\mathbf{k})$ son perpendiculares entre sí:

$$\begin{cases} \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_s(\mathbf{k}) = 0, & s = 1, 2; \\ \boldsymbol{\epsilon}_s(\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\epsilon}_t(\mathbf{k}) = \delta_{st}, & s, t = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (1.89)$$

Con esto, se tiene que los 4-vectores ϵ_1^μ y ϵ_2^μ son vectores de polarización transversal, ϵ_3^μ es el vector de polarización longitudinal y ϵ_0^μ es el vector de polarización escalar.

Con el desarrollo obtenido hasta el momento, se cuentan con las herramientas necesarias para cuantizar el campo electromagnético. Primeramente, se promueven las constantes a_s y $a_s^\dagger$ a operadores de aniquilación y creación de partículas $\hat{a}_s$ y $\hat{a}_s^\dagger$. Con esto, los campos vectoriales A^μ se convierten en operadores de campo libre $\hat{A}_0^\mu$:

$$\begin{cases} \hat{A}_0^\mu(x) = \hat{A}_0^{\mu(+)}(x) + \hat{A}_0^{\mu(-)}(x), \\ \hat{A}_0^{\mu(+)}(x) = \sum_{\mathbf{k}, s} \left(\frac{\hbar c^2}{2V\omega_{0,\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \epsilon_s^\mu(\mathbf{k}) \hat{a}_s(\mathbf{k}) e^{-ikx}, \\ \hat{A}_0^{\mu(-)}(x) = \sum_{\mathbf{k}, s} \left(\frac{\hbar c^2}{2V\omega_{0,\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \epsilon_s^\mu(\mathbf{k}) \hat{a}_s^\dagger(\mathbf{k}) e^{ikx}. \end{cases} \quad (1.90)$$

Los fotones pertenecen a la familia de bosones, los cuales siguen la estadística de Bose-Einstein. Al cuantizar los campos que cumplen con esta estadística se utilizan relaciones de conmutación entre los operadores de un campo arbitrario $\hat{\phi}_{0,r}$ y sus operadores de densidad conjugada $\hat{\pi}_{0,s}$. Estas relaciones de conmutación son conocidas como las «relaciones de conmutación canónica»:

$$\begin{cases} [\hat{\phi}_{0,r}(\mathbf{x}, t), \hat{\pi}_{0,s}(\mathbf{x}', t)] = i\hbar\delta_{rs}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \\ [\hat{\phi}_{0,r}(\mathbf{x}, t), \hat{\phi}_{0,s}(\mathbf{x}', t)] = [\hat{\pi}_{0,r}(\mathbf{x}, t), \hat{\pi}_{0,s}(\mathbf{x}', t)] = 0. \end{cases} \quad (1.91)$$

Aplicando estas relaciones de conmutación utilizando los operadores de campo electromagnético dados por la ecuación (1.90) y promoviendo la densidad de momento conjugada dada por la ecuación (1.84) a operador, se obtienen las relaciones de conmutación para el campo electromagnético:

$$\begin{cases} [\hat{A}_0^\mu(\mathbf{x}, t), \hat{A}_0^\nu(\mathbf{x}', t)] = [\hat{\dot{A}}_0^\mu(\mathbf{x}, t), \hat{\dot{A}}_0^\nu(\mathbf{x}', t)] = 0, \\ [\hat{A}_0^\mu(\mathbf{x}, t), \hat{\dot{A}}_0^\nu(\mathbf{x}', t)] = -i\hbar c^2 g^{\mu\nu} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \end{cases} \quad (1.92)$$

Al sustituir las expansiones del vector $\hat{A}_0^\mu$ dadas por la ecuación (1.86) en estas relaciones de conmutación, se obtienen relaciones de conmutación de los operadores de aniquilación y creación de fotones ($\hat{a}_s$ y $\hat{a}_s^\dagger$):

$$\begin{cases} [\hat{a}_s(\mathbf{k}), \hat{a}_t^\dagger(\mathbf{k}')] = \zeta_s \delta_{st} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \\ [\hat{a}_s(\mathbf{k}), \hat{a}_t(\mathbf{k}')] = [\hat{a}_s^\dagger(\mathbf{k}), \hat{a}_t^\dagger(\mathbf{k}')] = 0. \end{cases} \quad (1.93)$$

Las relaciones de conmutación son idénticas a las de los bosones en la ecuación de Klein-Gordon para $s = 1, 2, 3$, ya que para estos valores de s , $\zeta_s = 1$. Sin embargo, para $s = 0$, $\zeta_s = -1$, lo cual aparentemente hace que los operadores de aniquilación se conviertan en operadores de creación y viceversa. Gupta y Bleuler resolvieron este problema al establecer que $\hat{a}_s(\mathbf{k})$ son operadores de aniquilación y $\hat{a}_s^\dagger(\mathbf{k})$ son operadores de creación de fotones para todos los valores de s .

El estado del vacío para el campo electromagnético se representa mediante el *ket de estado del vacío* $|0\rangle$. Así, al utilizar el operador de aniquilación $\hat{a}_s(\mathbf{k})$ sobre

el estado $|0\rangle$ se obtiene cero.

$$\hat{a}_s(\mathbf{k})|0\rangle = 0, \quad \forall \mathbf{k}, \quad s = 0, \dots, 3. \quad (1.94)$$

De igual manera, un operador de creación $\hat{a}_s^\dagger$ actuando sobre el *ket de estado del vacío* $|0\rangle$ genera un estado con un fotón con polarización s y momento $\mathbf{k}$:

$$|1_{\mathbf{k}s}\rangle = \hat{a}_s^\dagger(\mathbf{k}) |0\rangle. \quad (1.95)$$

El operador número en término de los operadores de aniquilación y creación de fotones está dado de la siguiente manera:

$$\hat{N}_s(\mathbf{k}) = \zeta_s \hat{a}_s^\dagger(\mathbf{k}) \hat{a}_s(\mathbf{k}). \quad (1.96)$$

Para el caso de las variables observables como el caso del Hamiltoniano (energía total), solamente los fotones transversales contribuyen al valor medido. Las contribuciones de los fotones longitudinales y escalares ($s = 0$ y $s = 3$) a las variables medibles se cancelan entre sí, sumando 0. Entonces, la sumatoria en s solamente toma los valores de 1 y 2:

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \sum_{\mathbf{k}, s} \hbar \omega_{0, \mathbf{k}} \zeta_s \hat{a}_s^\dagger(\mathbf{k}) \hat{a}_s(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{s=1}^2 \hbar \omega_{0, \mathbf{k}} \hat{a}_s^\dagger(\mathbf{k}) \hat{a}_s(\mathbf{k}). \quad (1.97)$$

Los vectores que describen al campo electromagnético contienen componentes reales. Por lo tanto, el operador de carga es igual a cero para la partícula del campo electromagnético: el fotón.

1.2.8 PROPAGADOR DEL FOTÓN

Es posible establecer relaciones de conmutación a tiempos distintos para el campo electromagnético [4]. Éstas se expresan de la siguiente forma:

$$[\hat{A}_0^\mu(x), \hat{A}_0^\nu(x')] = i\hbar c D_0^{\mu\nu}(x - x'), \quad (1.98)$$

en donde $D_0^{\mu\nu}(x) = \lim_{m \rightarrow 0} [-g^{\mu\nu} \Delta(x)]$.

El propagador libre del fotón está definido por el producto temporal de operadores de campo electromagnético evaluado a tiempos distintos:

$$\langle 0 | \mathcal{T} [\hat{A}_0^\mu(x) \hat{A}_0^\nu(x')] | 0 \rangle = i\hbar c D_{F,0}^{\mu\nu}(x - x'). \quad (1.99)$$

Tras evaluar el producto temporal, se obtiene la siguiente expresión para el propagador libre del fotón:

$$D_{F,0}^{\mu\nu}(x) = \frac{-g^{\mu\nu}}{(2\pi)^4} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{d^4k e^{-ikx}}{k^2 + i\epsilon}. \quad (1.100)$$

El propagador libre del fotón en término de los vectores de momento k se obtiene al comparar la ecuación (1.100) con las transformadas de Fourier dadas por la ecuación (1.73) y utilizando la igualdad $p = \hbar k$. Al hacer todo esto, se identifica la ecuación del propagador del fotón en el espacio de momentos:

$$\tilde{D}_{F,0}^{\mu\nu}(k) = \frac{-g^{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}. \quad (1.101)$$

1.2.9 UNIDADES NATURALES

En la teoría cuántica de campos, se utilizan unidades distintas al SI o al sistema c.g.s. El uso de unidades naturales en la teoría cuántica de campos simplifica los cálculos hechos a mano [4, 11, 12].

En las unidades naturales, se establece que la constante de Planck $\hbar$ y la velocidad de la luz en el vacío c ambas tienen un valor de 1 ($\hbar = c = 1$). De esta manera, en las unidades naturales no aparecen estas dos constantes.

Como consecuencia, las cantidades físicas son expresadas en potencias de la masa, la cual es expresada en términos de energía (keV, MeV, GeV, etc.).

En las unidades convencionales, ya sea en el SI (Sistema Internacional de Medidas) o en c.g.s, se asigna una dimensión a la masa M , a la longitud L y al tiempo

TABLA 1.1: Dimensiones en unidades SI y naturales. Adaptado de Mandl, L.(2010).

Cantidad física	SI			u.n.
	p	q	r	n
Masa	1	0	0	1
Longitud	0	1	0	-1
Tiempo	0	0	1	-1
Densidades Lagrangianas o Hamiltonianas	1	-1	-2	4
Carga eléctrica	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	-1	0
Campo electromagnético $A^\mu(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	1
Campos de Dirac $\psi(x)$ y $\bar{\psi}(x)$	0	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$

T . Así, las unidades de cualquier otra cantidad física como el momento, energía, momento angular, etc. son expresados de la siguiente manera: $M^p L^q T^r$. Pero en unidades naturales, las unidades de las cantidades físicas son expresadas solo como potencia de la masa, es decir:

$$M^n = M^{p-q-r}. \quad (1.102)$$

Así, las unidades naturales de las cantidades físicas están identificadas por el exponencial n . En la tabla 1.1 se muestran las unidades naturales de diferentes cantidades físicas.

1.2.10 CAPA DE MASA

Habiendo ya introducido las unidades naturales, es necesario expresar los propagadores libres del fotón y del electrón en dichas unidades ya que serán utilizadas

al definir la autoenergía del electrón. La única diferencia entre las expresiones ya conocidas de los propagadores libres radica en que en unidades naturales se establece que $\hbar = c = 1$. Los propagadores libres del electrón y del fotón que se utilizarán de este punto en adelante [4] se expresan en la ecuación (1.103) .

$$\begin{cases} \tilde{S}_{F,0}(p) = \frac{\not{p} + m_0 \mathbb{I}}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} = \frac{1}{\not{p} - m_0 \mathbb{I} + i\epsilon \mathbb{I}}, \\ \tilde{D}_{F,0}^{\mu\nu}(k) = \frac{-g^{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}. \end{cases} \quad (1.103)$$

Los propagadores describen la creación y aniquilación de una partícula y de su respectiva antipartícula en diferentes puntos del espacio-tiempo. Las partículas (o antipartículas) descritas por el propagador son partículas virtuales.

Las partículas virtuales son aquellas que se encuentran fuera de la *capa de masa*. La capa de masa consiste en un hiperboloide de 4 dimensiones que describe el comportamiento de una partícula con masa m [7].

Pensemos en una partícula arbitraria con masa m y momento $\mathbf{p}$. De acuerdo con la relatividad general, su energía (en unidades naturales) está dada por:

$$E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}.$$

Con esto, se puede establecer un 4-vector de momento que describe a esta partícula:

$$p^\mu = (E, \mathbf{p}).$$

Se cumple con la siguiente relación de dispersión:

$$p^2 = p^\mu p_\mu = E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2. \quad (1.104)$$

Entonces, la capa de masa describe a las partículas que respeta la relación entre energía y masa dadas por la relatividad general: $p^2 = m^2$.

Esto suele representarse gráficamente con una figura tridimensional donde en el eje z se grafican los valores del componente p^0 del 4-vector p^μ mientras que se

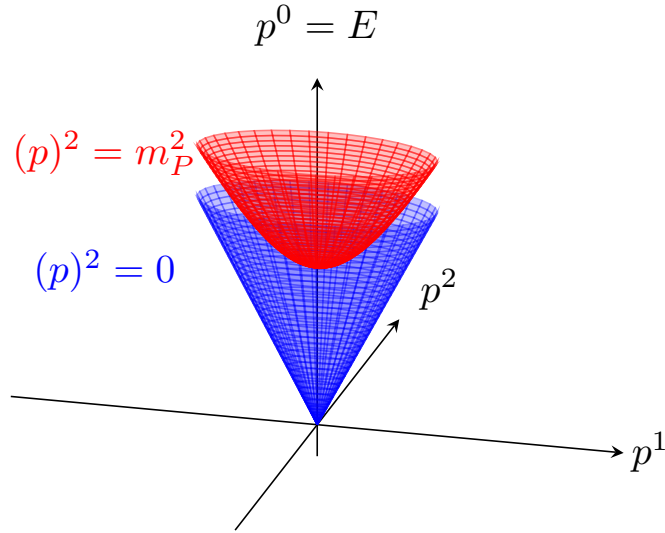


FIGURA 1.4: Gráfica tridimensional de la capa de masa (rojo) y el cono de luz (azul). Reimpreso de Lancaster, T. & Blundell, S. (2014).

grafican dos de los tres componentes espaciales de p^μ (por ejemplo p^1 y p^2) en los ejes x y y . La capa de masa es graficada en la figura 1.4 como el hiperboloide rojo. Por su parte, las partículas sin masa (como los fotones) viajan a la velocidad de la luz y son descritas por el cono de luz (el cono azul de la figura 1.4).

Es necesario analizar con mayor detalle la estructura algebraica de los propagadores [6] dados por la ecuación (1.103). En el caso del propagador fermiónico, puede observarse que éste tiene un polo en $p^2 = m_0^2$. Esto quiere decir que este propagador describe a un fermión (o antifermión) con una masa m_0 pero que se «mueve» fuera de la capa de masa.

Análogamente, puede observarse que el propagador del fotón tiene un polo en $k^2 = 0$. Por definición, un fotón tiene una masa igual a 0. Por lo tanto, puede decirse que el propagador del electrón tiene también un polo evaluado en la masa de su partícula. El propagador del fotón describe a un fotón que se «mueve» fuera del cono de luz.

Las partículas que se mueven fuera de su respectiva capa de masa son llamadas

partículas virtuales. Ahora vale la pena preguntarse [7], ¿cómo es que las partículas virtuales pueden «moverse» fuera de la capa de masa?

Esto se explica mediante el concepto de la incertidumbre de tiempo-energía de Heisenberg de la física cuántica:

$$\Delta E \Delta t \sim \hbar.$$

De acuerdo con esto, es posible que existan desviaciones de la energía de la partícula E respecto a $\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ siempre y cuando esto no suceda durante un tiempo mayor a:

$$\Delta t \lesssim \frac{\hbar}{\Delta E}.$$

Después de esta discusión, se obtienen dos conclusiones importantes:

- Las partículas virtuales existen durante un tiempo muy corto, ya que se mueven fuera de la capa de masa.
- Los propagadores tienen un polo evaluado en la masa de la partícula $p^2 = m^2$.

1.2.11 LA MATRIZ $\hat{S}_0$

Hasta el momento, se han expresado las densidades lagrangianas del campo de Dirac y el campo electromagnético libres; es decir, sin considerar la interacción entre ellos.

En el caso de la interacción entre un electrón y un fotón, ocurre una interacción [4, 5, 7] entre los campos fermiónicos libres $\hat{\psi}_0(x)$, $\hat{\psi}_0^\dagger(x)$ y el campo electromagnético $\hat{A}_0^\mu(x)$. Estas interacciones son descritas por una densidad lagrangiana de interacción $\hat{\mathcal{L}}_{I_0}$.

La densidad lagrangiana que describe al sistema del campo electromagnético y del electrón está dado por la suma de la densidad lagrangiana libre $\hat{\mathcal{L}}_0$ del campo

fermiónico y electromagnético, así como la ya mencionada densidad lagrangiana de interacción $\hat{\mathcal{L}}_{I_0}$:

$$\hat{\mathcal{L}} = \hat{\mathcal{L}}_0 + \hat{\mathcal{L}}_{I_0}, \quad (1.105)$$

donde:

$$\begin{cases} \hat{\mathcal{L}}_0 = \mathcal{N} \left[\hat{\psi}_0(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_0 \mathbb{I}) \hat{\psi}_0(x) - \frac{1}{2} \left(\partial_\nu \hat{A}_{0,\mu}(x) \right) \left(\partial^\nu \hat{A}_0^\mu(x) \right) \right], \\ \hat{\mathcal{L}}_{I_0} = \mathcal{N} \left[e_0 \hat{\psi}_0(x) \hat{A}_0(x) \hat{\psi}_0(x) \right]. \end{cases} \quad (1.106)$$

Estas densidades lagrangianas están expresadas en unidades naturales.

De manera análoga a la densidad lagrangiana, la densidad hamiltoniana también puede ser dividida en una densidad hamiltoniana libre $\hat{\mathcal{H}}_0$ y una densidad hamiltoniana de interacción $\hat{\mathcal{H}}_{I_0}$ de la siguiente manera:

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{\mathcal{H}}_{I_0}, \quad (1.107)$$

en donde $\hat{\mathcal{H}}_{I_0}$ es de gran utilidad en la definición de la matriz $\hat{S}_0$. Esta densidad Hamiltoniana se expresa de la siguiente manera:

$$\hat{\mathcal{H}}_{I_0}(x) = -\hat{\mathcal{L}}_{I_0}(x) = -e_0 \mathcal{N} \left[\hat{\psi}_0(x) \hat{A}_0(x) \hat{\psi}_0(x) \right]. \quad (1.108)$$

La definición de la matriz $\hat{S}_0$ proviene del uso de la teoría de perturbaciones para calcular un estado final $|f\rangle$ a partir de un estado inicial $|i\rangle$. Para lograr esto, es necesario definir la ecuación de movimiento de vectores de estado en la representación de interacción:

$$i \frac{d}{dt} |\Phi(t)\rangle = \hat{\mathcal{H}}_{I_0}(t) |\Phi(t)\rangle, \quad (1.109)$$

en donde el Hamiltoniano de interacción está dado por $\hat{\mathcal{H}}_{I_0} = \int d^3x \hat{\mathcal{H}}_{I_0}$. Esta ecuación describe la evolución temporal de los *kets de estado*.

Es posible definir un vector ket de estado inicial $|i\rangle$, el cual representa al estado de un sistema evaluado en un tiempo muy lejano en el pasado ($t_i = -\infty$):

$$|i\rangle = |\Phi(t_i = -\infty)\rangle. \quad (1.110)$$

De igual manera, se puede definir un vector *ket de estado* final, el cual representa al estado de un sistema evaluado en un tiempo muy lejano de la interacción en el futuro ($t = \infty$):

$$|f\rangle = |\Phi(t_f = \infty)\rangle. \quad (1.111)$$

La ecuación (1.109) puede ser resuelta mediante la teoría de perturbaciones. La expresión que describe un estado en un tiempo t se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} |\Phi(t)\rangle &= |i\rangle + (-i) \int_{-\infty}^t dt_1 \hat{\mathcal{H}}_{I_0}(t_1) |i\rangle \\ &+ (-i)^2 \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \hat{\mathcal{H}}_{I_0}(t_1) \hat{\mathcal{H}}_{I_0}(t_2) |\Phi(t_2)\rangle. \end{aligned} \quad (1.112)$$

Para calcular el estado final dado por (1.111), es necesario calcular el límite cuando $t \rightarrow \infty$ de la ecuación (1.112):

$$\begin{aligned} |f\rangle &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n \hat{\mathcal{H}}_{I_0}(t_1) \hat{\mathcal{H}}_{I_0}(t_2) \dots \hat{\mathcal{H}}_{I_0}(t_n) \right] |i\rangle \\ &= \hat{S}_0 |i\rangle. \end{aligned} \quad (1.113)$$

En donde la matriz $\hat{S}_0$ transforma un ket de estado inicial $|i\rangle$ en uno final $|f\rangle$. La matriz $\hat{S}_0$ puede ser representada también como suma de integrales de productos ordenados temporales de la siguiente manera:

$$\hat{S}_0 = \left\{ \begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n \hat{\mathcal{H}}_{I_0}(t_1) \hat{\mathcal{H}}_{I_0}(t_2) \dots \hat{\mathcal{H}}_{I_0}(t_n), \\ &\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n \mathcal{T} \{ \hat{\mathcal{H}}_{I_0}(t_1) \hat{\mathcal{H}}_{I_0}(t_2) \dots \hat{\mathcal{H}}_{I_0}(t_n) \}. \end{aligned} \right. \quad (1.114)$$

La matriz $\hat{S}_0$ también puede ser expresada en términos de las densidades Hamiltonianas de interacción:

$$\hat{S}_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int \dots \int d^4x_1 d^4x_2 \dots d^4x_n \mathcal{T} \{ \hat{\mathcal{H}}_{I_0}(x_1) \hat{\mathcal{H}}_{I_0}(x_2) \dots \hat{\mathcal{H}}_{I_0}(x_n) \}. \quad (1.115)$$

1.2.12 TEOREMA DE WICK

Al observar la ecuación (1.115) se observa que los integrandos están conformados por productos temporales ($\mathcal{T}\{\dots\}$) de densidades Hamiltonianas de interacción ($\hat{\mathcal{H}}_{I_0}$), dadas por la ecuación (1.108). Las densidades Hamiltonianas de interacción en la electrodinámica cuántica son productos normales $\mathcal{N}\{\dots\}$ de los campos fermiónicos libres ($\hat{\psi}_0$ y $\hat{\psi}_0^\dagger$) y el campo electromagnético libre ($\hat{A}_0 = \gamma^\mu \hat{A}_{0,\mu}$).

Así, para la electrodinámica cuántica, la matriz $\hat{S}_0$ se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \hat{S}_0 &= \sum_{n=0}^{\infty} \hat{S}_0^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ie_0)^n}{n!} \int \dots \int d^4x_1 d^4x_2 \dots d^4x_n \\ &\quad \mathcal{T}\left\{ \mathcal{N}\left[\hat{\psi}_0(x_1)\hat{A}_0(x_1)\hat{\psi}_0(x_1)\right] \mathcal{N}\left[\hat{\psi}_0(x_2)\hat{A}_0(x_2)\hat{\psi}_0(x_2)\right] \dots \mathcal{N}\left[\hat{\psi}_0(x_n)\hat{A}_0(x_n)\hat{\psi}_0(x_n)\right] \right\}. \end{aligned} \quad (1.116)$$

El teorema de Wick se desarrolló para evaluar productos temporales de productos normales de operadores $\mathcal{T}\left\{ \mathcal{N}[\hat{A}\hat{B}]_{x_1} \dots \mathcal{N}[\hat{A}\hat{B}]_{x_n} \right\}$ y expresarlos de manera simplificada en términos de los componentes de creación y aniquilación de los campos fermiónicos y electromagnético libres $\hat{\psi}_0^+(x)$, $\hat{\psi}_0^-(x)$, $\hat{A}_0^+(x)$ y $\hat{A}_0^-(x)$ [4, 5, 7].

Para explicar en qué consiste el teorema de Wick, es necesario generalizar el producto normal:

$$\mathcal{N}[\hat{Q}\hat{R}\dots\hat{W}] = (-1)^P (\hat{Q}'\hat{R}'\dots\hat{W}'). \quad (1.117)$$

Donde P es el número de posiciones que se intercambiaron los operadores *fermiónicos* para que todos los operadores de creación estén colocados a la derecha y todos los de aniquilación estén a la izquierda.

Si se consideran dos operadores arbitrarios (aniquilación o creación de partículas) $\hat{A}$ y $\hat{B}$, entonces se obtiene la siguiente ecuación al evaluar su producto y restarle

su producto normal:

$$\hat{A}\hat{B} - \mathcal{N}(\hat{A}\hat{B}) = \begin{cases} [\hat{A}^+, \hat{B}^-]_+, & \text{para dos campos fermiónicos;} \\ [\hat{A}^+, \hat{B}^-], & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases} \quad (1.118)$$

Es posible calcular el valor de expectación del vacío de la ecuación (1.118) para ambos casos: fermiones y fotones. El producto de expectación del vacío del término $\mathcal{N}(\hat{A}\hat{B})$ es igual a cero, por lo que resulta:

$$\langle 0 | \hat{A}\hat{B} | 0 \rangle = \begin{cases} [\hat{A}^+, \hat{B}^-]_+, & \text{para dos campos fermiónicos;} \\ [\hat{A}^+, \hat{B}^-], & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases} \quad (1.119)$$

Con esto, la ecuación (1.118) toma la siguiente forma:

$$\hat{A}\hat{B} = \mathcal{N}(\hat{A}\hat{B}) + \langle 0 | \hat{A}\hat{B} | 0 \rangle. \quad (1.120)$$

Ahora, es posible calcular el producto temporal de esta ecuación:

$$\mathcal{T}\{\hat{A}(x_1)\hat{B}(x_2)\} = N\{\hat{A}(x_1)\hat{B}(x_2)\} + \langle 0 | \mathcal{T}\{\hat{A}(x_1)\hat{B}(x_2)\} | 0 \rangle, \quad (1.121)$$

donde el segundo término a la derecha de (1.121) se define como la contracción del producto de operadores $\hat{A}\hat{B}$:

$$\overline{\hat{A}(x_1)\hat{B}(x_2)} \equiv \langle 0 | \mathcal{T}\{\hat{A}(x_1)\hat{B}(x_2)\} | 0 \rangle. \quad (1.122)$$

La contracción de dos operadores es distinta a cero únicamente cuando estos operadores describen la creación y posterior desaparición de un mismo tipo de partícula en tiempos distintos. Esto es justamente la definición de los propagadores que se han mencionado hasta el momento:

$$\begin{cases} \overline{\hat{\psi}_{0,\alpha}(x_1)\hat{\psi}_{0,\beta}(x_2)} = -\overline{\hat{\psi}_{0,\beta}(x_2)\hat{\psi}_{0,\alpha}(x_1)} = iS_{F,0\alpha\beta}(x_1 - x_2) & \text{Dirac,} \\ \overline{\hat{A}_0^\mu(x_1)\hat{A}_0^\nu(x_2)} = iD_{F,0}^{\mu\nu}(x_1 - x_2) & \text{Electromagnético.} \end{cases} \quad (1.123)$$

Ahora, es necesario observar el caso del producto normal con contracciones:

$$\mathcal{N}[\overbrace{\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}\hat{E}\hat{F}} \dots \hat{J}\hat{K}\hat{L}\hat{M} \dots] = (-1)^P \overbrace{\hat{A}\hat{K}} \overbrace{\hat{B}\hat{C}} \overbrace{\hat{E}\hat{L}} \dots \mathcal{N}[\hat{D}\hat{F} \dots \hat{J}\hat{M} \dots], \quad (1.124)$$

donde P es de igual manera número de posiciones que se intercambiaron los operadores *fermiónicos* para acomodar a los operadores contraídos del lado izquierdo.

Este producto normal con contracciones es útil para la generalización del producto temporal de más de dos operadores, el cual se presenta en el integrando de la ecuación (1.115) y se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D} \dots \hat{W}\hat{X}\hat{Y}\hat{Z}) &= \mathcal{N}(\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D} \dots \hat{W}\hat{X}\hat{Y}\hat{Z}) \\ &+ \mathcal{N}(\overbrace{\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}} \dots \hat{W}\hat{X}\hat{Y}\hat{Z}) + \mathcal{N}(\overbrace{\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}} \dots \hat{W}\hat{X}\hat{Y}\hat{Z}) + \dots + \mathcal{N}(\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D} \dots \hat{W}\hat{X}\hat{Y}\hat{Z}) \\ &+ \mathcal{N}(\overbrace{\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}} \overbrace{\hat{W}\hat{X}\hat{Y}\hat{Z}}) + \dots + \mathcal{N}(\overbrace{\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}} \overbrace{\hat{W}\hat{X}\hat{Y}\hat{Z}}) + \dots, \end{aligned} \quad (1.125)$$

donde la primera línea del lado derecho evalúa al producto normal de los operadores $\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D} \dots \hat{W}\hat{X}\hat{Y}\hat{Z}$ sin ninguna contracción. Posteriormente suma cada una de las posibilidades de arreglos de productos normales una sola contracción. Después se lleva a cabo la misma acción pero sumando todos los arreglos de productos normales con 2 contracciones, y así sucesivamente hasta abarcar el mayor número posible de contracciones.

1.2.13 EXPANSIÓN DE LA MATRIZ $\hat{S}_0$

La expresión de la matriz $\hat{S}_0$ dada por la ecuación (1.115) no es en sí un resultado exacto, sino una aproximación basada en la teoría de perturbaciones. Así, la matriz $\hat{S}_0$ se representa como una sumatoria de términos infinitos, cada uno agregando una mayor precisión al valor real de $\hat{S}_0$ [4, 5, 7].

En la electrodinámica cuántica, se estudian las interacciones de fermiones con fotones. Esto se expresa matemáticamente al utilizar la densidad Hamiltoniana de interacción brindada por la ecuación (1.108) en (1.115).

Al expandir la matriz $\hat{S}_0$ se empieza con el término que corresponde a $n = 0$; es decir: $\hat{S}_0^{(0)}$. Al momento de calcular este término utilizando la ecuación (1.116) se observa que es igual al operador identidad $\hat{1}$.

Al momento de evaluar $\langle f | \hat{S}_0^{(0)} | i \rangle$, se obtiene el siguiente resultado:

$$\langle f | \hat{S}_0^{(0)} | i \rangle = \langle f | \hat{1} | i \rangle = \delta_{fi}.$$

Esto significa que cuando los estados inicial $|i\rangle$ y final $|f\rangle$ son iguales (es decir cuando no hubo ningún evento de dispersión) se obtiene que $\langle f | \hat{S}_0^{(0)} | i \rangle = 1$, mientras que si $|i\rangle \neq |f\rangle$ (hubo un evento de dispersión) se obtiene que $\langle f | \hat{S}_0^{(0)} | i \rangle = 0$.

Ahora, se continuará con el término $\hat{S}_0^{(1)}$, donde $n = 1$. La densidad hamiltoniana de interacción para la electrodinámica cuántica está dada por la ecuación (1.108). En ésta se cuenta con una expansión en series de Fourier del campo electromagnético $\hat{A}_0^\mu$ donde existen operadores de creación $\hat{a}_s^\dagger$ y aniquilación $\hat{a}_s$ de fotones.

Para procesos donde cualquiera de los estados $|i\rangle$ y $|f\rangle$ (o ambos al mismo tiempo) no contienen ningún fotón, el operador $\hat{a}_s^\dagger$ o el operador $\hat{a}_s$ se encargará de aniquilar al vacío y hacer que $\langle f | \hat{S}_0^{(1)} | i \rangle = 0$. En el caso en donde $|i\rangle$ y $|f\rangle$ contienen ambos a un fotón, al calcular $\langle f | \hat{S}_0^{(1)} | i \rangle$ se obtienen estados iniciales y finales con distintos números de fotones (por ejemplo; un estado $|i\rangle$ con 2 fotones y un estado final $|f\rangle$ con 0 fotones o viceversa), los cuales son ortogonales entre sí. Por lo tanto, en este caso también se obtiene que: $\langle f | \hat{S}_0^{(1)} | i \rangle = 0$.

Se concluye que en cualquier proceso de la electrodinámica cuántica, el término $\hat{S}_0^{(1)}$ de la matriz $\hat{S}_0$ genera una amplitud de probabilidad igual a:

$$\langle f | \hat{S}_0^{(1)} | i \rangle = 0. \quad (1.126)$$

Es necesario entonces continuar con el siguiente término ($n = 2$) en la teoría de perturbaciones:

$$\hat{S}_0^{(2)} = \hat{S}_{0,A}^{(2)} + \hat{S}_{0,A}^{(2)} + \hat{S}_{0,C}^{(2)} + \hat{S}_{0,D}^{(2)} + \hat{S}_{0,E}^{(2)} + \hat{S}_{0,F}^{(2)}, \quad (1.127)$$

donde se utilizó la contracción de Wick para expandir el producto temporal de la ecuación (1.115):

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{S}_{0,A}^{(2)} = -\frac{e_0^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 \mathcal{N}[(\hat{\psi}_0 \hat{A}_0 \hat{\psi}_0)_{x_1} (\hat{\psi}_0 \hat{A}_0 \hat{\psi}_0)_{x_2}], \\ \hat{S}_{0,B}^{(2)} = -\frac{e_0^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 \left\{ \mathcal{N}[(\hat{\psi}_0 \hat{A}_0 \hat{\psi}_0)_{x_1} \overbrace{(\hat{\psi}_0 \hat{A}_0 \hat{\psi}_0)_{x_2}}] \right. \\ \quad \left. + \mathcal{N}[\overbrace{(\hat{\psi}_0 \hat{A}_0 \hat{\psi}_0)_{x_1}}] (\hat{\psi}_0 \hat{A}_0 \hat{\psi}_0)_{x_2} \right\}, \\ \hat{S}_{0,C}^{(2)} = -\frac{e_0^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 \mathcal{N}[(\hat{\psi}_0 \gamma^\alpha \hat{A}_{0,\alpha} \hat{\psi}_0)_{x_1} \overbrace{(\hat{\psi}_0 \gamma^\beta \hat{A}_{0,\beta} \hat{\psi}_0)_{x_2}}], \\ \hat{S}_{0,D}^{(2)} = -\frac{e_0^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 \left\{ \mathcal{N}[(\hat{\psi}_0 \gamma^\alpha \hat{A}_{0,\alpha} \hat{\psi}_0)_{x_1} \overbrace{(\hat{\psi}_0 \gamma^\beta \hat{A}_{0,\beta} \hat{\psi}_0)_{x_2}}] \right. \\ \quad \left. + \mathcal{N}[\overbrace{(\hat{\psi}_0 \gamma^\alpha \hat{A}_{0,\alpha} \hat{\psi}_0)_{x_1}}] (\hat{\psi}_0 \gamma^\beta \hat{A}_{0,\beta} \hat{\psi}_0)_{x_2} \right\}, \\ \hat{S}_{0,E}^{(2)} = -\frac{e_0^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 \mathcal{N}[(\hat{\psi}_0 \hat{A}_0 \hat{\psi}_0)_{x_1} \overbrace{(\hat{\psi}_0 \hat{A}_0 \hat{\psi}_0)_{x_2}}], \\ \hat{S}_{0,F}^{(2)} = -\frac{e_0^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 \mathcal{N}[(\hat{\psi}_0 \gamma^\alpha \hat{A}_{0,\alpha} \hat{\psi}_0)_{x_1} \overbrace{(\hat{\psi}_0 \gamma^\beta \hat{A}_{0,\beta} \hat{\psi}_0)_{x_2}}]. \end{array} \right. \quad (1.128)$$

Aquí, es importante observar que todos los términos de la ecuación (1.128) son directamente proporcionales a e_0^2 . Se dice entonces que el término $\hat{S}_0^{(2)}$ genera a todas las contribuciones de la matriz $\hat{S}_0$ de orden e_0^2 . Esto se generaliza para términos superiores $\hat{S}_0^{(n)}$ que son directamente proporcionales a e_0^n .

Ahora, es importante introducir a la *constante de estructura fina* α_0 :

$$\alpha_0 = \frac{e_0^2}{4\pi}. \quad (1.129)$$

Al observar que $\alpha_0 \propto e_0^2$ y que $\hat{S}_0^{(2)} \propto e_0^2$, puede decirse que $\hat{S}_0^{(2)}$ representa a las contribuciones de orden α_0 a la matriz $\hat{S}_0$. De esta manera, los elementos $\hat{S}_0^{(4)}$ son correcciones de orden α_0^2 , los elementos $\hat{S}_0^{(6)}$ son correcciones de orden α_0^3 y así sucesivamente.

Para que la Matriz $\hat{S}_0$ sea de utilidad en los cálculos de la electrodinámica cuántica, es necesario establecer estados iniciales $|i\rangle$ y finales $|f\rangle$.

Los estados iniciales y finales contienen la información acerca de qué partículas contiene cada estado y cuál es su polarización.

Ejemplo 1.1 (Expansión a orden $n = 2$ para la dispersión de Compton).

Supóngase un evento denominado dispersión de Compton:

$$\gamma + e^- \longrightarrow \gamma + e^-. \quad (1.130)$$

En este evento, es fácil identificar los estados iniciales $|i\rangle = |e^-(p, s); \gamma(k, t)\rangle$ y finales $|f\rangle = |e^-(p', s'); \gamma(k', t')\rangle$. En estos estados, queda implícito que el número de partículas distintas al electrón y al fotón es cero. Con la matriz $\hat{S}_0$, se busca calcular la amplitud de probabilidad para que dado el estado inicial $|i\rangle$ se obtenga un estado final $|f\rangle$ con exactamente las partículas, momentos y polarización indicados:

$$\langle e^-(p', s'); \gamma(k', t') | \hat{S}_0 | e^-(p, s); \gamma(k, t) \rangle. \quad (1.131)$$

Ahora, sustituyendo la matriz $\hat{S}_0$ dada por la ecuación (1.116) en la ecuación (1.131), queda por desarrollar la serie de la matriz $\hat{S}_0$ en términos infinitos de su sumatoria de la siguiente manera: $\hat{S}_0 = \sum_0^\infty \hat{S}_0^{(n)}$. Para efectos prácticos, es posible truncar la sumatoria a $n = 2$ con resultados razonables.

Anteriormente se discutió que en la expansión de la matriz $\hat{S}_0$ de la electrodinámica cuántica, los términos $\hat{S}_0^{(0)}$ y $\hat{S}_0^{(1)}$ generan amplitudes de probabilidad igual a 0 para eventos de dispersión. Por lo tanto, se prosigue al evaluar el valor de expectación de $\hat{S}_0^{(2)}$:

$$\langle e^-(p', s'); \gamma(k', t') | \hat{S}_0^{(2)} | e^-(p, s); \gamma(k, t) \rangle, \quad (1.132)$$

donde $\hat{S}_0^{(2)}$ se expresa en las ecuaciones (1.127) y (1.128).

Es importante en este punto recordar que tanto los espinores $\hat{\psi}_0$ y $\hat{\bar{\psi}}_0$ como los 4-vectores del campo electromagnético $\hat{A}_0$ se descomponen en términos lineales

a operadores de creación y aniquilación de partículas (Véase las ecuaciones (1.45), (1.46) y (1.86)).

Cada uno de estos términos de creación y aniquilación de partículas actúan sobre el ket de estado inicial $|i\rangle = |e^-(p, s); \gamma(k, t)\rangle$. De esta manera, todos los términos de $\hat{S}_0^{(2)}$ que contengan operadores de aniquilación de partículas distintas al electrón y al fotón tendrán un valor de expectación de cero. Por el contrario, los términos de $\hat{S}_0^{(2)}$ que contengan simultáneamente a los operadores de aniquilación del fotón y del electrón presentes en el estado inicial serán distintos de cero.

Una vez que actuaron los operadores de aniquilación adecuados sobre $|i\rangle$, se obtiene que $|i\rangle = |0\rangle$. En este punto, los términos de creación de partículas tomarán acción y solamente serán distintos de cero aquellos términos que logren crear el estado $|f\rangle = |e^-(p', s'); \gamma(k', t')\rangle$ a partir del vacío $|0\rangle$.

Para este proceso, en el término $\hat{S}_0^{(2)}$ existen 2 términos distintos que logran aniquilar todas las partículas iniciales y crear todas las partículas finales:

$$\langle e^-(p', s'); \gamma(k', t') | (\hat{S}_{0,a} + \hat{S}_{0,b}) | e^-(p, s); \gamma(k, t) \rangle, \quad (1.133)$$

donde:

$$\begin{cases} \hat{S}_{0,a} = -e_0^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \hat{\psi}_0^-(x_1) \gamma^\alpha iS_{F,0}(x_1 - x_2) \gamma^\beta \hat{A}_{0,\alpha}^-(x_1) \hat{A}_{0,\beta}^+(x_2) \hat{\psi}_0^+(x_2), \\ \hat{S}_{0,b} = -e_0^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \hat{\psi}_0^-(x_1) \gamma^\alpha iS_{F,0}(x_1 - x_2) \gamma^\beta \hat{A}_{0,\beta}^-(x_2) \hat{A}_{0,\alpha}^+(x_1) \hat{\psi}_0^+(x_2). \end{cases} \quad (1.134)$$

Expresando $\hat{\psi}_0^-(x_1)$, $\hat{A}_{0,\alpha}^-(x_1)$, $\hat{A}_{0,\beta}^+(x_2)$, $\hat{A}_{0,\beta}^-(x_2)$ y $\hat{A}_{0,\alpha}^+(x_1)$ en su serie de Fourier y tras el manejo del álgebra correspondiente se obtienen expresiones de la siguiente manera:

$$\int d^4x e^{ix(p' + k' - p - k)}, \quad (1.135)$$

donde se puede usar la transformada de Fourier expresada por la ecuación (1.73) para definir la delta de Dirac en 4 dimensiones:

$$\int d^4x e^{ix(\sum_f p'_f - \sum_i p_i)} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum_f p'_f - \sum_i p_i). \quad (1.136)$$

Una vez que actuaron los operadores de aniquilación y creación para generar el estado final, se obtiene un producto interno entre el *bra* y el *ket* del estado final, el cual se reduce a una multiplicación de términos delta de Kronecker que contraen todas las sumatorias de las series de Fourier de los operadores de campo $\hat{\psi}_0^-(x_1)$, $\hat{A}_{0,\alpha}^-(x_1)$, $\hat{A}_{0,\beta}^+(x_2)$, $\hat{A}_{0,\beta}^-(x_2)$ y $\hat{A}_{0,\alpha}^+(x_1)$:

$$\langle e^-(p', s'); \gamma(k', t') | e^-(p'', s''); \gamma(k'', t'') \rangle = \delta_{\mathbf{p}', \mathbf{p}''} \delta_{s', s''} \delta_{\mathbf{k}', \mathbf{k}''} \delta_{t', t''}. \quad (1.137)$$

Utilizando las herramientas vistas hasta el momento junto con la ecuación (1.103) y desarrollando el álgebra necesaria se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \langle f | \hat{S}_0^{(2)} | i \rangle &= \langle f | (\hat{S}_{0,a} + \hat{S}_{0,b}) | i \rangle = \left[(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' + k' - p - k) \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{m}{VE_p} \right)^{1/2} \left(\frac{m}{VE_{p'}} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{2V\omega_k} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{2V\omega_{k'}} \right)^{1/2} \right] (\mathcal{M}_{0,a} + \mathcal{M}_{0,b}), \end{aligned} \quad (1.138)$$

donde $\mathcal{M}_{0,a}$ y $\mathcal{M}_{0,b}$ son denominadas *amplitudes invariantes*. Estos términos consideran que en los propagadores de las partículas se encuentra el desplazamiento de los polos $+i\epsilon$ y el límite $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+}$ es evaluado en este término:

$$\begin{cases} \mathcal{M}_{0,a} = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} e_0^2 \bar{u}_0(p') \not{\epsilon}(k') i \tilde{S}_{F,0}(q = p + k) \not{\epsilon}(k) u_0(p), \\ \mathcal{M}_{0,b} = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} e_0^2 \bar{u}_0(p') \not{\epsilon}(k) i \tilde{S}_{F,0}(q = p - k) \not{\epsilon}(k') u_0(p). \end{cases} \quad (1.139)$$

Estas amplitudes invariantes son las únicas contribuciones de orden e_0^2 (u orden α_0) de la matriz $\hat{S}_0$ a la dispersión de Compton. $\diamond$

Ya que se revisó el procedimiento para obtener la expresión de la amplitud de probabilidad para pasar de un estado inicial $|i\rangle$ a uno final $|f\rangle$ para la dispersión de Compton, es necesario mostrar la expresión general para cualquier tipo de proceso:

$$\begin{aligned} \langle f | \hat{S}_0 | i \rangle &= \delta_{fi} + (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum_f p'_f - \sum_i p_i \right) \prod_i \left(\frac{1}{2VE_{0,i}} \right)^{1/2} \\ &\quad \prod_f \left(\frac{1}{2VE'_{0,f}} \right)^{1/2} \prod_\ell (2m_{0,\ell})^{1/2} \mathcal{M}_0. \end{aligned} \quad (1.140)$$

Los subíndices i y f hacen referencia a los estados iniciales y finales, respectivamente. Similarmente, la comilla en $E'_{0,f}$ y p'_f hace referencia a estados finales.

Es importante mencionar que la delta de Kronecker δ_{fi} es igual a 1 si el estado inicial es igual al final (no hubo ninguna transición) y es igual a 0 en el caso contrario.

Los términos $\prod_i \left(\frac{1}{2V E_{0,i}} \right)^{1/2}$ y $\prod_f \left(\frac{1}{2V E'_{0,f}} \right)^{1/2}$ surgen de la normalización de los campos fermiónicos y electromagnético.

Por otro lado, el término $\prod_\ell (2m_{0,\ell})^{1/2}$ surge de la generalización de procesos con cualquier leptón (no solamente considerando al par electrón-positrón).

La expresión de la *amplitud invariante* $\mathcal{M}_0$ depende de las partículas iniciales y finales del proceso en particular así como de sus momentos y polarizaciones. Esta expresión representa a las contribuciones de las correcciones a todos los órdenes perturbativos de e_o .

1.2.14 REGLAS Y DIAGRAMAS DE FEYNMAN

Richard Feynman estableció una manera de asociar a la expresión algebraica de una *amplitud invariante* $\mathcal{M}_0$ con una representación pictórica conocida como *Diagramas de Feynman* [4].

Los diagramas de Feynman son representaciones pictóricas que describen a las partículas iniciales y finales de un proceso cualquiera de la electrodinámica cuántica, así como posibles caminos intermedios (por medio de partículas virtuales).

Las *Reglas de Feynman* permiten conectar las piezas que ya conocemos como los propagadores ($\tilde{D}_{F,0}$ y $\tilde{S}_{F,0}$), espinores solución ($u_{0,s}(\mathbf{p})$, $\bar{u}_{0,s}(\mathbf{p})$, $\bar{v}_{0,s}(\mathbf{p})$ y $u_{0,s}(\mathbf{p})$), los vectores de polarización $\epsilon_{s\alpha}$, matrices gamma γ^α y la carga eléctrica desnuda e_0 de las partículas para poder escribir la expresión algebraica de la amplitud invariante $\mathcal{M}_0$ a partir de un diagrama de Feynman específico.

En el apéndice A se encuentra una explicación de todas las reglas de Feynman.

1.2.15 CORRECCIONES RADIATIVAS

La ecuación diferencial que describe la evolución temporal de un estado $|\Phi(t)\rangle$ (ecuación (1.109)) no tiene una solución exacta. Es por esto por lo que se utiliza la teoría de perturbaciones para resolver esta ecuación diferencial [4, 5]. Es en este momento donde surge la matriz $\hat{S}_0$.

La matriz $\hat{S}_0$ es útil para calcular predicciones experimentales como la *cross section*. En la electrodinámica cuántica, la expansión de la matriz $\hat{S}_0$ es una expansión perturbativa respecto a e_0 que busca aproximar de mayor manera la solución a la ecuación (1.109).

En cuanto mayor sea el orden perturbativo en el que se analice la matriz $\hat{S}_0$, más certeras serán las predicciones respecto a las cantidades experimentales. Esto hace que la electrodinámica cuántica sea la rama de la física que predice resultados con mayor exactitud.

Al expandir la matriz $\hat{S}_0$ a órdenes $n \geq 2$ empiezan a surgir tres expresiones particulares que divergen al evaluarlas. Estas expresiones son llamadas *correcciones radiativas* y son las únicas responsables de cualquier divergencia que pueda presentarse en la electrodinámica cuántica.

Ejemplo 1.2 (Expansión a orden $n=4$ para la dispersión de Compton).

Para visualizar de mejor manera la aparición de las 3 correcciones radiativas, es necesario analizar la expansión a órdenes altos de la matriz $\hat{S}_0$ para un proceso particular. En este caso, se retoma el proceso de la dispersión de Compton y se expandirá la matriz $\hat{S}_0$ hasta el orden $n = 4$.

En el ejemplo 1.1 se analizó la amplitud de probabilidad de la dispersión de

Compton a orden $n = 2$:

$$\langle e^-(p', s'); \gamma(k', t') | \hat{S}_0^{(2)} | e^-(p, s); \gamma(k, t) \rangle .$$

Estas cantidades están dadas por las ecuaciones (1.138) y (1.139).

Al aplicar las reglas de Feynman explicadas en el apéndice A a las amplitudes invariantes dadas por la ecuación (1.139) se obtienen los dos diagramas de Feynman a nivel árbol para la dispersión de Compton.

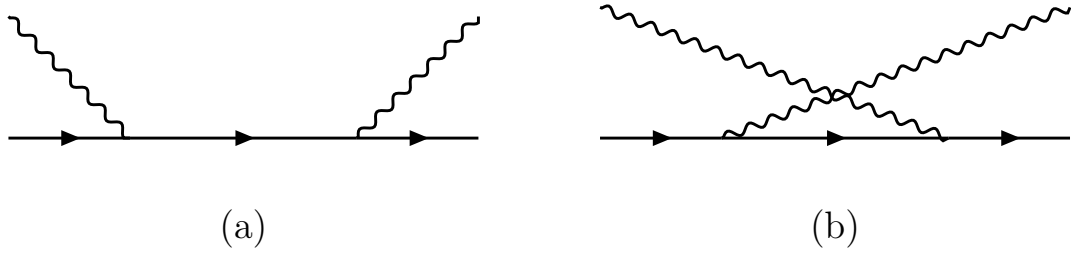


FIGURA 1.5: Diagramas de Feynman a nivel árbol para la dispersión Compton. Ambos diagramas representan correcciones de orden e_0^2 (u orden α_0). Reimpreso de F. Mandl & Shaw, G. (2010).

Ahora, se continúa con el término $\hat{S}_0^{(3)}$. Al calcularse la amplitud de probabilidad de este término para el proceso de la dispersión de Compton, se obtiene que:

$$\langle e^-(p', s'); \gamma(k', t') | \hat{S}_0^{(3)} | e^-(p, s); \gamma(k, t) \rangle = 0 .$$

Por lo tanto, el término $\hat{S}_0^{(3)}$ no genera diagramas de Feynman de orden e_0^3 para la dispersión de Compton.

Se concluye calculando la amplitud de probabilidad generada por el término $\hat{S}_0^{(4)}$ de la matriz $\hat{S}_0$:

$$\langle e^-(p', s'); \gamma(k', t') | \hat{S}_0^{(4)} | e^-(p, s); \gamma(k, t) \rangle .$$

De este término se obtienen 14 diagramas de Feynman. En la figura 1.6, se ilustran ocho de estos diagramas de Feynman.

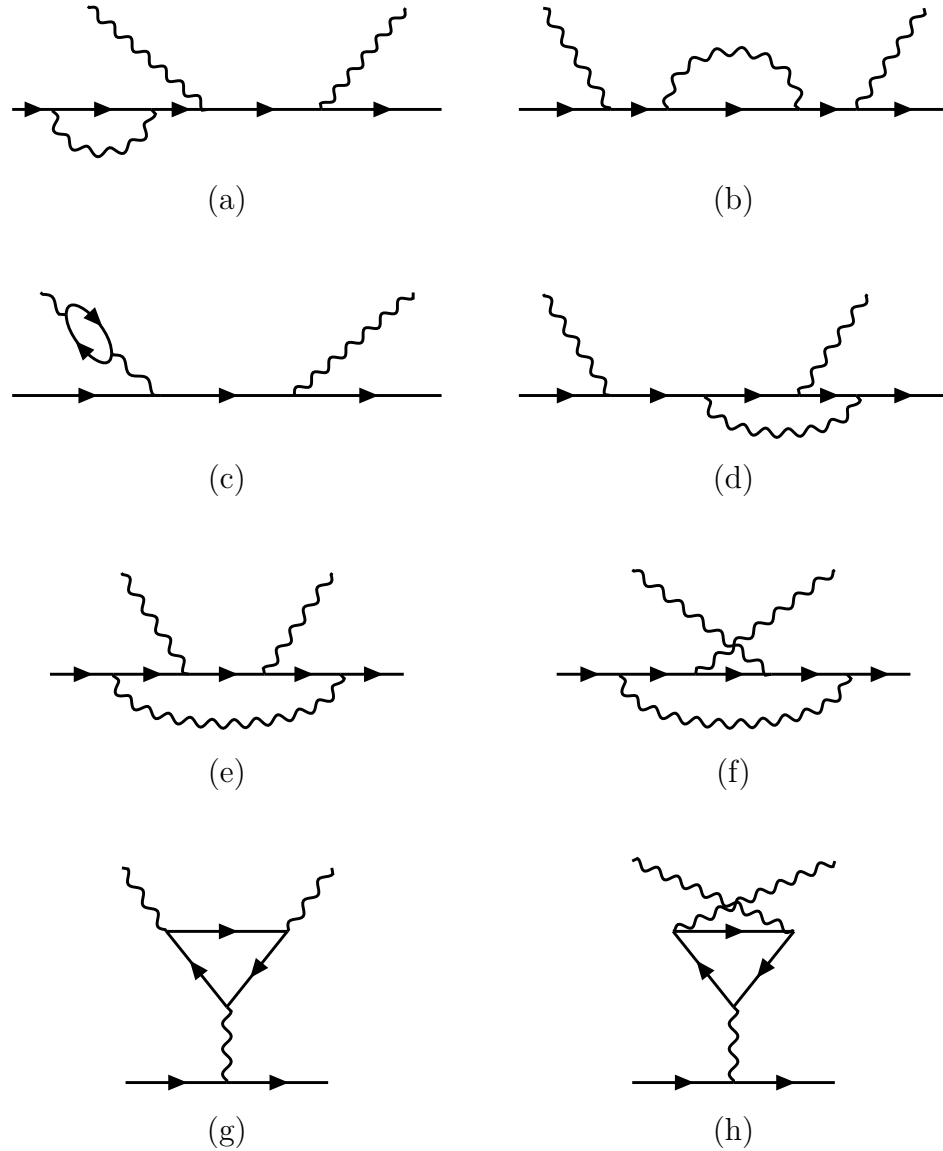


FIGURA 1.6: Contribuciones de cuarto orden para la dispersión de Compton. Reimpreso de F. Mandl & Shaw, G. (2010).

A partir de estos diagramas de Feynman, se pueden obtener sus respectivas amplitudes invariantes al aplicar las reglas de Feynman. Al hacer esto, resulta que las amplitudes invariantes que corresponden a los diagramas (a) – (d) de la figura 1.6 son divergentes. De hecho, dentro de estos 4 diagramas de Feynman se encuentran las tres correcciones radiativas.

Las amplitudes invariantes correspondientes a los diagramas de Feynman (e) –

(*h*) de la figura 1.6 son finitas y no contienen a ninguna corrección radiativa.

Para calcular la amplitud invariante $\mathcal{M}_0$ a orden e_0^4 (o α_0^2), es necesario sumar las amplitudes invariantes de orden e_0^2 (o α_0) dadas por la ecuación (1.139) más las 14 amplitudes invariantes correspondientes a cada diagrama de Feynman que se presentan a orden e_0^4 (o α_0^2).

Al momento de hacer esta sumatoria, las amplitudes invariantes de los diagramas de Feynman (*g*) y (*h*) se restan entre sí, dando como resultado 0.

Esto no solo ocurre en este proceso, si no que ocurre cuando existen diagramas de Feynman con *loops* fermiónicos que contienen un número impar de líneas fermiónicas de acuerdo con el *Teorema de Furry*. $\diamond$

Ahora, vale la pena identificar a las partes que generan las divergencias en cualquier proceso de la electrodinámica cuántica: las *correcciones radiativas*.

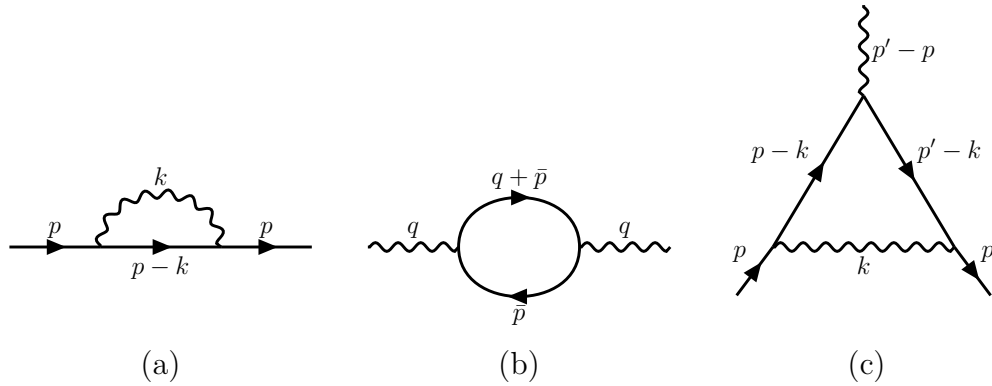


FIGURA 1.7: Correcciones radiativas. (a) Autoenergía del electrón. (b) Autoenergía del fotón. (c) Corrección al vértice. Reimpreso de F. Mandl & Shaw, G. (2010).

Cada una de las amplitudes de probabilidad de los diagramas de Feynman ilustrados en la figura 1.7 es divergente. Estas divergencias se deben a que se al calcular las amplitudes de probabilidad se utilizaron cantidades desnudas (m_0 , e_0 , $\hat{\psi}_0$, etc.). Estas propiedades que describen a las partículas o a los campos deben de ser redefinidas o *renormalizadas* para que las tres correcciones radiativas sean finitas a cualquier orden (α) de la teoría de perturbaciones.

Al observar con detalle la figura 1.5 y compararla con los incisos (a) – (d) de la figura 1.6, se observa que a partir de los diagramas de Feynman del proceso de dispersión de Compton a orden e_0^2 (u orden α_0) se pueden obtener algunos de los diagramas de órdenes perturbativos mayores (e_0^4 o mayor) realizando las sustituciones ilustradas en la figura 1.8.

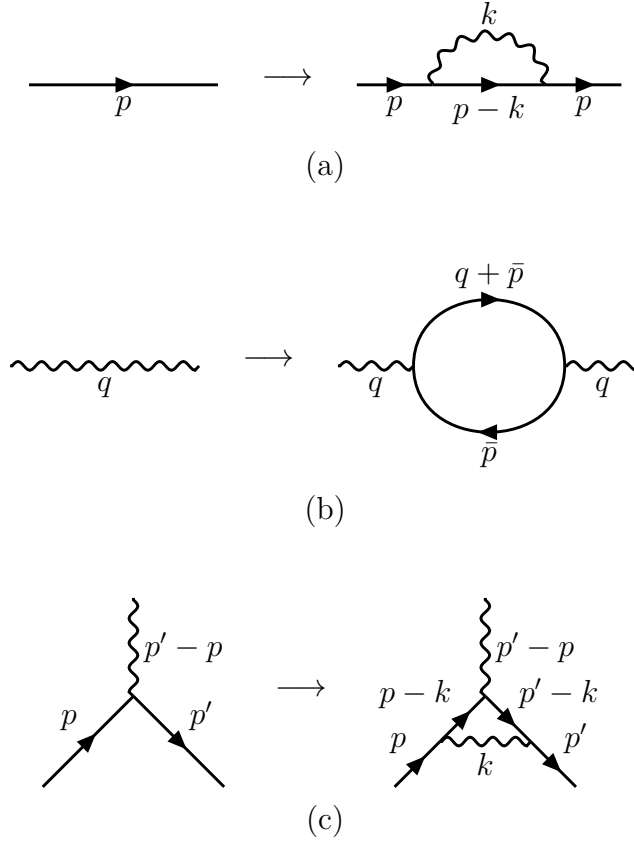


FIGURA 1.8: Sustituciones de diferentes piezas de los diagramas de Feynman a orden e_0^2 por correcciones radiativas. Reimpreso de F. Mandl & Shaw, G. (2010).

Por ejemplo, a partir del diagrama de Feynman (a) de la figura 1.5 puede obtenerse el diagrama de Feynman (a) de la figura 1.6 al realizar la sustitución (a) de la figura 1.8 en la línea del electrón entrante.

Con esto, es evidente la importancia de las tres *correcciones radiativas*, ya que aparecen en los diagramas de Feynman de expansiones perturbativas de órdenes altos.

La teoría de perturbaciones busca aproximar con cada vez mayor precisión las mediciones experimentales mediante los cálculos a órdenes perturbativos altos. Al observar que los cálculos de la matriz $\hat{S}_0$ a órdenes altos conlleva a la aparición de las *correcciones radiativas* (las cuales son divergentes), se observa un problema claro: no se pueden hacer predicciones teóricas si las aproximaciones divergen.

La solución a este problema es la *renormalización*, donde las propiedades de las partículas y de los campos son redefinidas con el objetivo de eliminar las divergencias que ocurren en las correcciones radiativas. Una vez aplicada correctamente la *renormalización* de la electrodinámica cuántica, las predicciones teóricas de cualquier orden de la teoría de perturbaciones son siempre finitas y muy cercanas a los resultados experimentales.

1.2.16 DIAGRAMA DE FEYNMAN PARA LA AUTOENERGÍA DEL ELECTRÓN

En la sección anterior se analizó la aparición de las tres correcciones radiativas. Una de ellas es el objeto de estudio de esta tesis: la *autoenergía del electrón* [9]. En la figura 1.9 se muestra el diagrama de Feynman este proceso.

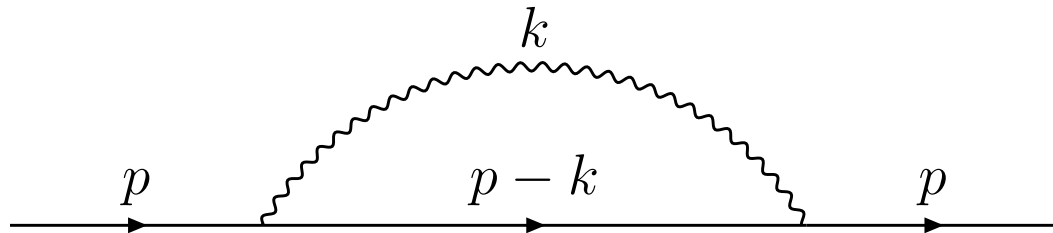


FIGURA 1.9: Diagrama de Feynman de la autoenergía del electrón. Reimpreso de Sakurai, J.J. (1967).

Dada la figura (1.9), es posible calcular su amplitud de probabilidad corres-

pondiente [4]:

$$\langle e^-(p, s) | \hat{S}_0 | e^-(p, s') \rangle = \delta_{fi} + \left[(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - p') \left(\frac{m}{VE_{0,\mathbf{p}}} \right) \right] \mathcal{M}_0. \quad (1.141)$$

En este proceso, se considera que un electrón con un 4-momento p se divide en un determinado punto del espacio-tiempo en dos partículas: un fotón virtual con momento k y un electrón virtual con momento $p - k$. Debido a la conservación energía-momento, el 4-vector del electrón saliente es también igual a p .

La amplitud invariante de la *autoenergía del electrón* se expresa de la siguiente manera:

$$\mathcal{M}_0 = - \frac{e_0^2}{(2\pi)^4} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int d^4k \left[i\tilde{D}_{F,0\alpha\beta}(k) \right] \bar{u}_0(\mathbf{p}) \gamma^\alpha \left[i\tilde{S}_{F,0}(p - k) \right] \gamma^\beta u_0(\mathbf{p}). \quad (1.142)$$

Vale la pena analizar a detalle la estructura matemática de la ecuación (1.142). En esta ecuación se encuentran términos con índices de Lorentz:

- $i\tilde{D}_{F,0\alpha\beta}$,
- γ^α ,
- γ^β .

Se observa que los subíndices α y β del propagador del fotón se contraen con los superíndices α y β de las matrices gamma. Por lo tanto, en lo que al espacio de Lorentz respecta, la amplitud invariante $\mathcal{M}_0$ dada por la ecuación (1.142) es un escalar.

Por otra parte, en el espacio de Dirac aparecen los siguientes objetos:

- $\bar{u}_0(\mathbf{p})$ es un vector de tamaño 1×4 ,
- γ^α es una matriz de tamaño 4×4 ,
- $[i\tilde{S}_{F,0}(p - k)]$ es una matriz de tamaño 4×4 ,

- γ^β es una matriz de tamaño 4×4 ,
- $u_0(\mathbf{p})$ es un vector de tamaño 4×1 .

La multiplicación sucesiva de estos objetos corresponde a una contracción completa de los índices de Dirac, dando lugar a un objeto de tamaño 1×1 ; es decir, un escalar. Por lo tanto, en cuanto al espacio de Dirac respecta, $\mathcal{M}_0$ es también un escalar.

Entonces, $\mathcal{M}_0$ es un objeto escalar y puede escribirse en términos de la *autoenergía del electrón* ($\Sigma(p)$):

$$\mathcal{M}_0 = \bar{u}_{0,s}(\mathbf{p}) [i\Sigma(p)] u_{0,s}(\mathbf{p}). \quad (1.143)$$

Ahora, es necesario analizar la forma de la ecuación (1.143). Hasta el momento se sabe que $\mathcal{M}_0$ es un término escalar, $\bar{u}_{0,s}(\mathbf{p})$ es un vector fila de tamaño 1×4 en el espacio de Dirac y $u_{0,s}(\mathbf{p})$ es un vector columna de tamaño 4×1 (también en el espacio de Dirac).

Para que la expresión anterior sea consistente con la estructura matricial en el espacio de Dirac, el objeto $i\Sigma(p)$ debe ser una matriz de tamaño 4×4 .

Tras realizar las sustituciones necesarias, se obtiene la expresión matemática de la autoenergía del electrón $\Sigma(p)$:

$$i\Sigma(p) = (ie_0)^2 \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma^\beta \frac{i(\not{p} - \not{k} + m_0\mathbb{I})}{(p-k)^2 - m_0^2 + i\epsilon} \gamma_\beta \frac{-i}{k^2 + i\epsilon}. \quad (1.144)$$

En donde la integración sobre el vector de onda k del fotón indica que en la autoenergía del electrón se consideran todos los momentos posibles que pueda obtener el fotón virtual desde que es creado hasta que es aniquilado. Al integrar sobre todos los valores posibles de k no solo se toman en cuenta todos los valores posibles de energía-momento del fotón virtual, sino que también se consideran todos los valores posibles de energía-momento del electrón virtual presente en el propagador fermiónico con 4-momento $p - k$.

La *autoenergía del electrón* $\Sigma(p)$ es una función únicamente del 4-vector de momento del electrón p . Es decir, una vez conocidos los componentes de p , es posible obtener una expresión única para $\Sigma(p)$. Esta expresión es independiente del 4-vector k , ya que la integral siempre se evalúa sobre todos los valores posibles de k y ésta actúa como una variable «muda».

Al evaluar el término $\Sigma(p)$, se observa que éste contiene dos tipos de divergencias:

- *Divergencia ultravioleta*: Se presenta cuando se evalúan momentos k que tienden a ∞ (altamente energéticos),
- *Divergencia infrarroja*: Se presenta cuando se evalúan momentos k que tienden a 0.

Las divergencias infrarrojas son eliminadas en cualquier proceso de la electrodinámica cuántica al calcular cantidades experimentales (como la *cross section*) y considerar diagramas de Feynman adicionales donde se emite un fotón con energía muy baja (proceso conocido como *Soft Bremsstrahlung*).

En cambio, las divergencias ultravioletas son eliminadas tras el proceso de *renormalización*.

El estudio de la *renormalización* aplicada a la *autoenergía del electrón* conlleva a la *renormalización* de la masa desnuda del electrón m_0 .

1.3 ANTECEDENTES

El primer intento de calcular la autoenergía del electrón se realizó utilizando el electromagnetismo clásico [3].

De acuerdo con el electromagnetismo clásico, el campo eléctrico de un electrón

es [1]:

$$\mathbf{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (1.145)$$

donde:

- $\mathbf{E}$ es el campo eléctrico,
- ϵ_0 es la constante de permitividad del vacío,
- e es la carga del electrón,
- r es la distancia desde el electrón hasta un punto arbitrario donde se mide del campo eléctrico.

Mientras que la energía producida por un electrón, según la teoría electromagnética clásica [2], está dada por:

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint (|\mathbf{E}|^2 + c^2|\mathbf{B}|^2) d\tau, \quad (1.146)$$

donde:

- $\mathbf{B}$ es el campo magnético,
- $d\tau$ es el elemento diferencial de volumen.

El caso más simple es el de un electrón que se encuentra en reposo. En esta situación, el campo magnético $\mathbf{B}$ es inexistente, y la ecuación (1.146) se simplifica a la siguiente expresión:

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint E^2 d\tau = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left(\frac{e}{r^2} \right)^2 d\tau, \quad (1.147)$$

donde se establece que W es la autoenergía de un electrón que permanece en reposo, cuya única contribución es su campo eléctrico. A continuación, utilizando coordenadas esféricas para evaluar la integral, el resultado es:

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{e^2}{(4\pi\epsilon_0)^2} \int_0^{2\pi} d\Phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_{r_0}^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_0} \right). \quad (1.148)$$

En este desarrollo se considera que el electrón tiene un tamaño definido, el cual es conocido como el “radio clásico del electrón” con un valor aproximado de $r_0 \approx 2.8 \times 10^{-13}$ cm [13]. Sin embargo, el postulado de que el electrón tiene un tamaño fijo no concuerda con las teorías modernas de la física que describen adecuadamente el comportamiento de los fenómenos a escalas atómicas. De acuerdo con la mecánica cuántica, el electrón es una partícula puntual, con $r_0 = 0$. Al evaluar la ecuación (1.148) considerando esto, se obtiene la siguiente expresión [2]:

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{e^2}{(4\pi\epsilon_0)^2} \int_0^{2\pi} d\Phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \right]_\infty^0 = \infty. \quad (1.149)$$

En esta expresión se encuentra el problema comentado anteriormente: el cálculo de la autoenergía del electrón es divergente. Por esta razón, se buscaron alternativas para calcular esta cantidad utilizando la ecuación de Dirac.

En la primera década de 1900 se empezaba a formar una revolución en la comprensión de la física. Todo surgió cuando Planck publicó su investigación en 1901 acerca de la distribución de la energía en la radiación de cuerpo negro. Fue en 1905 cuando Albert Einstein analizó los resultados de Planck y les dio una nueva interpretación: la emisión y absorción de radiación ocurría en paquetes discretos, llamados fotones [13]. Esto sentaría el inicio de la física cuántica.

En 1925, Erwin Schrödinger publicó su investigación donde planteó la ecuación que describiría los procesos cuánticos: la ecuación de Schrödinger [13]. Es común que la ecuación de Schrödinger no tenga soluciones exactas para sistemas específicos. Para solucionar esto, se desarrolló una técnica llamada *teoría de perturbaciones* donde se obtiene una serie de términos convergentes. Mientras más términos algebraicos se consideren, más cercana será la aproximación del cálculo con valores experimentales [14].

Por otro lado, en 1905 Albert Einstein realizó otra contribución que revolucionaría la física: el descubrimiento de la relatividad especial [13].

Desde que surgió la ecuación de Schrödinger, los físicos buscaron unificar a la

mecánica cuántica con la física, ya que la ecuación de Schrödinger no es invariante ante transformaciones de Lorentz [3]. En 1925 surgió la ecuación de Klein-Gordon, la cual marcó el inicio de la unificación entre la relatividad especial y la mecánica cuántica. La ecuación de Klein-Gordon modela partículas con spin 0 [5].

En 1928, Dirac publicó una nueva ecuación que complementaba a la ecuación de Klein-Gordon para sentar las bases de la mecánica cuántica relativista. Esta ecuación diferencial modela partículas con spin $\frac{1}{2}$ tal como el electrón [3].

En 1930, Waller analizó un desarrollo donde se utilizaba la ecuación de Dirac con el enfoque de la mecánica cuántica relativista para calcular la autoenergía del electrón [3]. En la mecánica cuántica relativista, se considera a partículas que viajan a velocidades relativistas, pero no contemplan la acción de los campos para la creación o aniquilación de partículas [4]. En este desarrollo se utilizó la teoría de perturbaciones de la mecánica cuántica para realizar este cálculo. Se obtuvo como resultado la siguiente expresión [3, 15]:

$$\Delta W = \sum_n \frac{|\langle n | \hat{\mathcal{H}}_I | 0 \rangle|^2}{E_0 - E_n} \quad (1.150)$$

Esta expresión es proporcional a $\Delta W \sim \int \frac{k dk}{m}$. Al integrar sobre el momento del fotón k , se obtiene una divergencia cuadrática al evaluar la integral en infinito. Por lo tanto, este enfoque falla al momento de buscar un valor finito para la autoenergía del electrón.

En la publicación de Waller [15] se utilizó la ecuación de Dirac; sin embargo, no se contempló la teoría del mar de electrones que en ese momento buscaba explicar las soluciones con energías negativas a la ecuación de Dirac [3]. En 1934, Victor Weisskopf llevó a cabo el cálculo de la autoenergía del electrón tomando esto en cuenta, obteniendo la siguiente expresión [16]:

$$W = -\frac{11}{6} \frac{e^2}{E_p} p^2 \int_0^\infty \frac{dk}{k} - e^2 \frac{m^2}{p E_p} \ln\left(\frac{E_p + p}{E_p - p}\right) \int_0^\infty dk - \frac{2e^2}{E_p} \int_0^\infty k dk, \quad (1.151)$$

donde se observan integrales sobre el momento del fotón k que son logarítmica, lineal

y cuadráticamente divergentes.

Durante este periodo surgieron más problemas de divergencias en los cálculos de la electrodinámica cuántica. Con el comienzo de la segunda guerra mundial se suspendieron los intentos por obtener resultados finitos en cálculos de la electrodinámica cuántica [3].

Fue hasta terminada la segunda guerra mundial que entre 1947 y 1949 Tomonaga, Schwinger y Feynman construyeron una herramienta matemática capaz de eliminar infinitos: la renormalización [3]. En esta técnica, las propiedades físicas como la masa y la carga se redefinen como la masa física y la carga física de la partícula. Para esto, se utilizan términos divergentes llamados *contratérminos* para relacionar a las propiedades físicas (medibles) con las propiedades desnudas (m_0, q_0) que se han considerado hasta el momento [6].

La expresión algebraica de los contratérminos depende del esquema de *regularización* que se utilice. Los tres esquemas de regularización más comunes son [6]:

- Regularización por corte
- Regularización de Pauli-Villars
- Regularización Dimensional

La regularización es una técnica que busca expresar una integral divergente en términos de una suma de términos divergentes y términos divergentes. Al identificar el término divergente, se identifica que éste es la única causa de la divergencia de la integral. Todos los contratérminos en la electrodinámica cuántica son divergentes, y pueden obtenerse a partir de cualquier esquema de *regularización*.

En el primer año de la construcción de esta teoría [17], Hans Bethe utilizó la técnica de renormalización para aplicarlo al fenómeno del desplazamiento de Lamb del átomo de hidrógeno. Este problema buscaba explicar por qué existe una diferencia experimental entre la energía de los niveles cuánticos $2S_{1/2}$ y $2P_{1/2}$ en el

átomo de hidrógeno. La deducción de esta expresión era divergente, y mediante la técnica de renormalización se obtuvieron resultados finitos y concordantes con la experimentación.

En 1948, Schwinger realizó el cálculo del momento magnético anómalo del electrón utilizando la técnica de renormalización con resultados positivos [18].

Hasta el momento, se han reportado que otras correcciones radiativas tales como la autoenergía del electrón, la autoenergía del fotón y la corrección al vértice han sido resueltas satisfactoriamente utilizando la técnica de renormalización [4, 5, 6, 7].

1.4 HIPÓTESIS

El uso de la técnica de *regularización dimensional* en el cálculo de la *autoenergía del electrón* es suficiente para derivar una expresión analítica del *contratérmino de la masa* ($\delta_m^{OS,DR}$) que satisface las condiciones de renormalización en el esquema de la capa de masa (*On-Shell*), permitiendo la transición de la masa «desnuda» del electrón m_0 a su masa física m_P .

1.5 OBJETIVOS

1.5.1 GENERAL

Determinar la expresión analítica de $\delta_m^{OS,DR}$ a *1-loop* mediante el cálculo de la *autoenergía del electrón*, empleando la técnica de *regularización dimensional* y aplicando las condiciones de renormalización de la capa de masa (*On-Shell*).

1.5.2 ESPECÍFICOS

1. Revisar los fundamentos teóricos de la electrodinámica cuántica
2. Deducir la expresión de $\Sigma(p)$ a *1-loop* utilizando las Reglas de Feynman, expresada en términos de las propiedades desnudas.
3. Aplicar la técnica de *regularización dimensional* a la *autoenergía del electrón*.
4. Utilizar el esquema la capa de masa (*On-Shell*) para encontrar la relación entre m_R^{OS} , m_0 , $\delta_m^{OS,DR}$ y $\Sigma^{DR}(p)$.
5. Calcular el *contratérmino de la masa* $\delta_m^{OS,DR}$.
6. Obtener la expresión modificada del operador de la densidad lagrangiana $\hat{\mathcal{L}}$ de la electrodinámica cuántica debido a la *renormalización* completa.

A continuación, se presenta la organización temporal del cumplimiento de los presentes objetivos:

TABLA 1.2: Cronograma de actividades.

[illegible]

1.6 JUSTIFICACIÓN

La electrodinámica cuántica es una teoría desarrollada que ha demostrado tener predicciones con un nivel muy alto de precisión respecto a resultados experimentales. Los inicios de esta teoría fueron algo complicados, debido a la presencia de divergencias en algunos cálculos, como las correcciones radiativas [3].

Evidentemente, la presencia de una divergencia en un modelo matemático que busca reproducir un fenómeno que físicamente es finito es un problema importante. En el caso de la autoenergía del electrón ésta no es la excepción [2].

La autoenergía del electrón, junto con las otras correcciones radiativas (autoenergía del fotón y corrección al vértice), permite calcular con mayor precisión fenómenos experimentales importantes como el desplazamiento de Lamb y el momento magnético anómalo del electrón [5].

Por otro lado, la técnica de la renormalización ha demostrado ser una herramienta muy útil para obtener cantidades finitas en cálculos de correcciones radiativas [6].

Este estudio busca aplicar conjuntamente la *renormalización* bajo el esquema *On-Shell* y la *regularización dimensional* para encontrar la expresión analítica que relaciona a la masa desnuda del electrón m_0 con su masa renormalizada m_R^{OS} mediante el contratérmino de la masa $\delta_m^{OS,DR}$. El uso de la masa física renormalizada del electrón m_R en la expansión perturbativa de la electrodinámica cuántica permite realizar predicciones teóricas finitas y muy cercanas a resultados experimentales.

1.7 DELIMITACIÓN DEL ESTUDIO

La presente investigación se centra en el cálculo del contratérmino de la masa δ_m a *1-loop* utilizando la regularización dimensional.

Es necesario en este punto aclarar las delimitaciones de este estudio:

- **Metodológicas:** El análisis se restringe exclusivamente al esquema de regularización dimensional. No se abordarán esquemas alternativos de regularización.
- **Temáticas:** El estudio se enfoca únicamente en el análisis de la autoenergía del electrón para calcular el contratérmino de la masa δ_m . Por lo tanto, quedan fuera del alcance el análisis de las correcciones radiativas asociadas a la autoenergía del fotón y la corrección al vértice así como el cálculo de los contratérminos que les corresponden a estos procesos.
- **Teóricas:** La investigación no pretende realizar una descripción exhaustiva de la teoría completa de la renormalización de la electrodinámica cuántica. Por lo tanto, no se hará uso de la identidad de Ward para relacionar las constantes de renormalización Z_1 y Z_2 .

CAPÍTULO 2

METODOLOGÍA

En este capítulo se describirán de manera resumida los pasos necesarios para lograr el objetivo general de esta tesis: obtener la expresión analítica de $\delta_m^{OS,DR}$.

El contratérmino de la masa está escrito en función de la autoenergía del electrón $\Sigma(p)$, dada por la ecuación (1.144). Sin embargo, existe más de una expresión válida para el contratérmino de la masa δ_m [6]. Esto se debe a:

- La elección del esquema de *regularización*.
- La elección del esquema de *renormalización*.

La regularización es una técnica matemática que permite «aislar» los infinitos. Mientras que la renormalización redefine a los términos divergentes de la electrodinámica cuántica para relacionarlos con cantidades finitas llamadas cantidades «renormalizadas» mediante la introducción de cantidades divergentes conocidas como *contratérminos*.

En esta tesis se utilizará el esquema de renormalización *On-Shell* en conjunto con el esquema de regularización dimensional para obtener el resultado deseado: $\delta_m^{OS,DR}$.

De manera simplificada, la metodología para calcular $\delta_m^{OS,DR}$ se resume en la

figura 2.1.

En las siguientes secciones se presentará una metodología más detallada de los pasos intermedios necesarios para obtener el resultado final, así como los motivos que llevaron a la elección del esquema de renormalización *On-Shell* en conjunto con el uso del esquema de regularización dimensional en esta tesis.

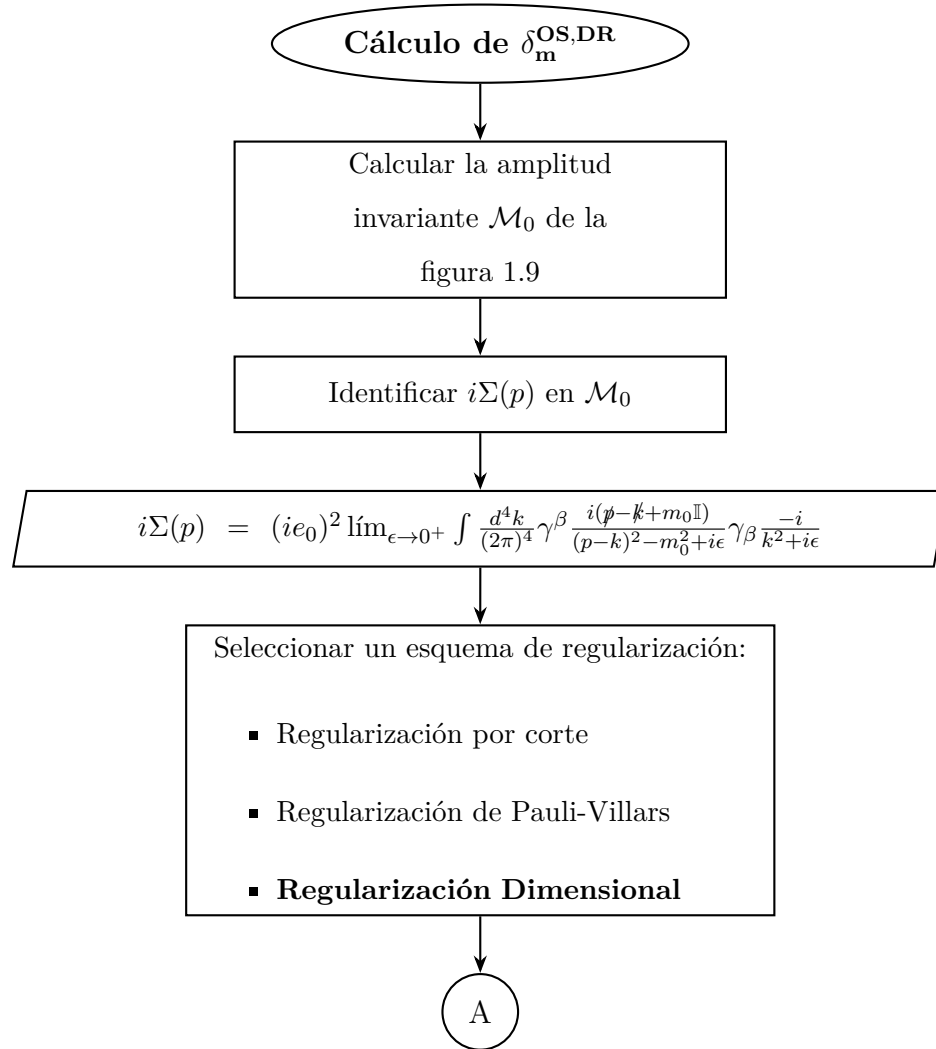
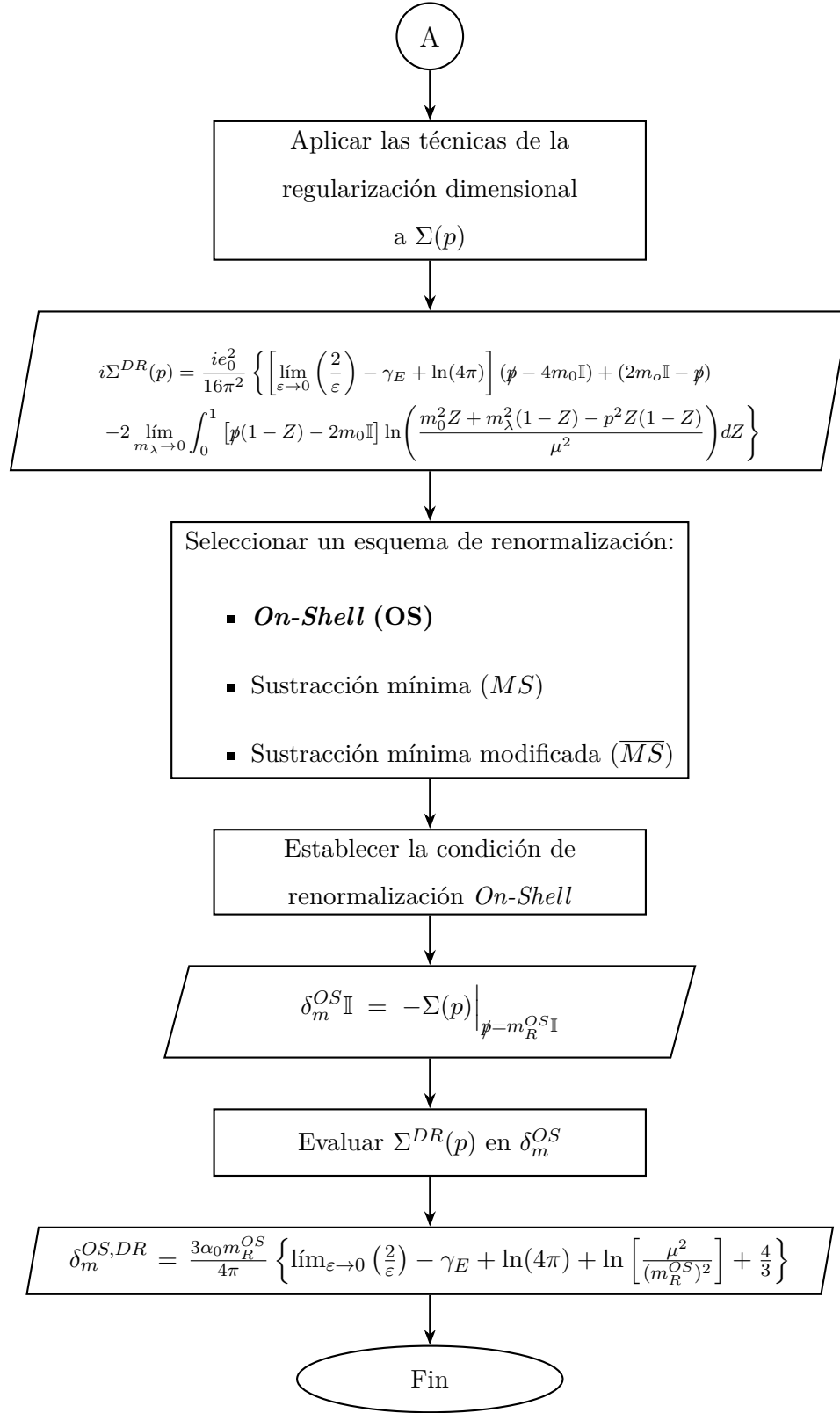


FIGURA 2.1: Metodología general para el cálculo de $\delta_m^{OS,DR}$ (Parte 1/2).

FIGURA 2.1: Metodología general para el cálculo de $\delta_m^{OS,DR}$ (Parte 2/2).

2.1 INTEGRALES IMPORTANTES EN 4 DIMENSIONES

Antes de comenzar con la regularización dimensional, es necesario analizar con detalle un conjunto de 6 integrales evaluadas en $D = 4$ dimensiones que aparecen frecuentemente en cualquier esquema de regularización [4].

En la regularización dimensional de $\Sigma(p)$ solamente se utilizan dos de estas seis integrales (revisar apéndice C.3). Estas integrales aparecen en los cálculos de regularización después de haber aplicado la *parametrización de Feynman* a una *corrección radiativa*:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{d^4 k}{(k^2 - s + i\epsilon)^n}, \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int d^4 k \frac{k^\mu}{(k^2 - s + i\epsilon)^n}. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Para resolver las integrales, es necesario plantear un elemento diferencial en $D = 4$ dimensiones en el espacio-tiempo de Minkowski.

El espacio-tiempo de $D = 4$ dimensiones de Minkowski sigue la métrica de Minkowski, la cual trata a la componente temporal con un signo contrario a las tres componentes espaciales.

Para poder llevar a cabo la integración analítica de manera más sencilla, se utiliza una herramienta conocida como la «rotación de Wick», la cual cambia la métrica del espacio-tiempo [5, 6]. Tras aplicar esta técnica, las integrales ya no son evaluadas dentro del espacio-tiempo de Minkowski de 4 dimensiones, sino que son evaluadas ahora en un espacio *euclidiano* de 4 dimensiones.

Una vez que se hayan «trasladado» las integrales a un espacio-tiempo *euclidiano* de 4 dimensiones, es posible continuar con su resolución eligiendo un sistema coordenado para definir su elemento diferencial y los límites de integración [6].

Los tres sistemas coordenados más utilizados en el cálculo son [19]:

- Sistema coordenado cartesiano
- Sistema coordenado polar
- Sistema coordenado esférico

La elección del sistema coordenado esférico en $D = 4$ dimensiones simplifica el cálculo de estas integrales. Por esta razón, se utiliza este sistema coordenado para su evaluación [20].

Habiendo realizado las elecciones mencionadas hasta el momento, es posible proceder directamente a evaluar ambas integrales utilizando las técnicas convencionales del cálculo integral.

Para obtener la forma final de las dos integrales, es necesario utilizar la siguiente propiedad de las funciones gamma $\Gamma(n)$ [4]:

$$\Gamma(n) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-2). \quad (2.2)$$

En la figura 2.2 se ilustran los pasos generales para resolver ambas integrales.

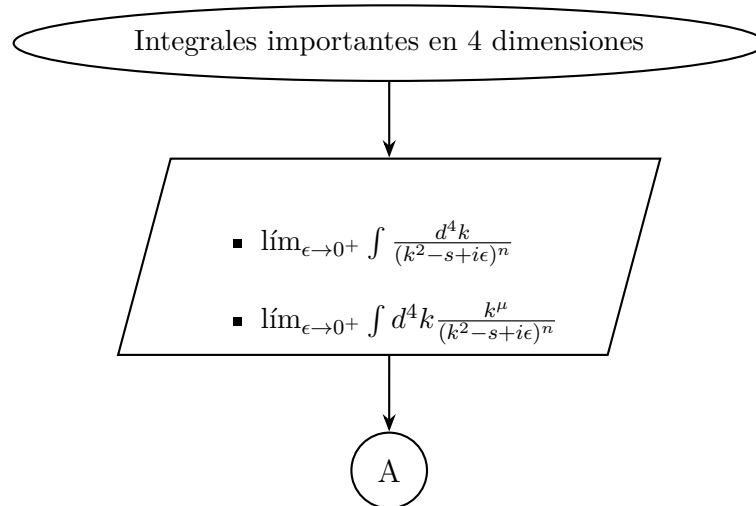


FIGURA 2.2: Metodología de la resolución de dos integrales importantes en 4 dimensiones (Parte 1/2).

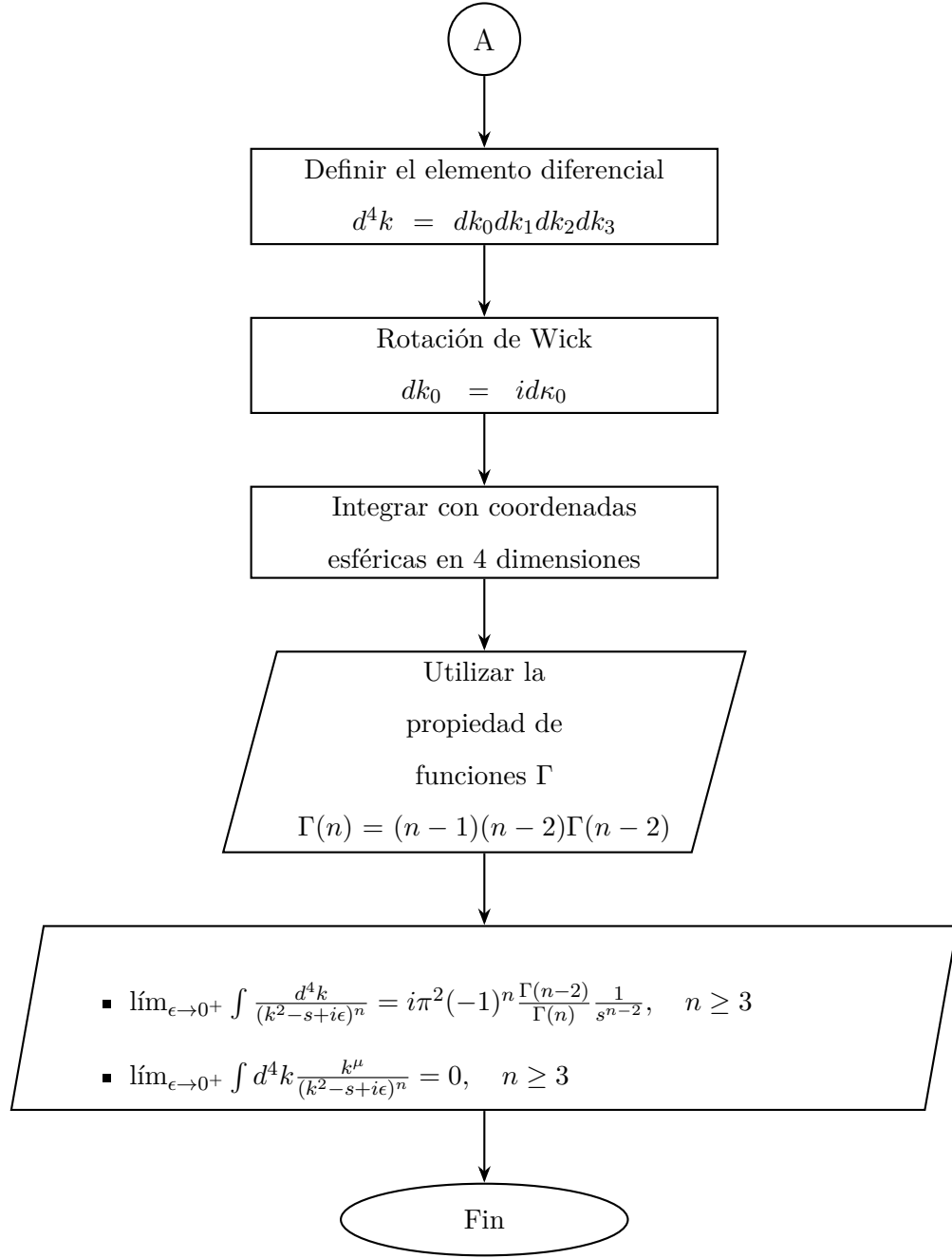


FIGURA 2.2: Metodología de la resolución de dos integrales importantes en 4 dimensiones (Parte 2/2).

Estas integrales pueden ser generalizadas a un número $D = 4 - \varepsilon$ de dimensiones. Cuando se encuentran en esta forma son ampliamente utilizadas en la regularización dimensional [4, 6].

2.2 ESQUEMAS DE REGULARIZACIÓN

La regularización es una técnica matemática que en un principio «deforma» la teoría de la electrodinámica cuántica [4, 5, 6]. Al «deformar» la teoría, la aplicación de una técnica de regularización hace que las integrales divergentes de la teoría sean convergentes de manera momentánea. Existen diversos esquemas de regularización, donde cada uno de ellos tiene sus propias reglas para «deformar» la teoría.

Al finalizar el cálculo de regularización, deben de revertirse las «deformaciones» realizadas para representar adecuadamente a la teoría de la electrodinámica cuántica. Tras evaluarse estos límites, las integrales que antes eran divergentes, otra vez vuelven a serlo.

El objetivo de la regularización no es hacer que las integrales divergentes sean convergentes. En su lugar, el objetivo principal es representar a las integrales divergentes de la siguiente manera:

$$\text{Integral divergente} = \text{Términos divergentes} + \text{Términos finitos.}$$

Tras la regularización, las cantidades divergentes siguen siendo divergentes, pero estas divergencias han sido «aisladas». Es decir, se muestra de manera explícita qué términos son los únicos responsables de la divergencia.

La regularización esta diseñada para mostrar ambos tipos de divergencias: ultravioletas e infrarrojas. Por ejemplo, la autoenergía del electrón $\Sigma(p)$ contiene ambos tipos de divergencias.

Las divergencias infrarrojas son eliminadas al calcular observables y considerar procesos donde se emite un fotón suave (conocido como *Soft Bremsstrahlung*). La eliminación de las divergencias infrarrojas está fuera del alcance de este estudio. Sin embargo, es útil que tras la regularización, se puedan identificar a ambos tipos de divergencias.

Algunos de los esquemas de regularización más comunes son:

- Regularización por corte (*cut-off*).
- Regularización de Pauli-Villars.
- Regularización Dimensional.

A continuación, se presentan las características, ventajas y desventajas de cada esquema de regularización.

2.2.1 REGULARIZACIÓN POR CORTE (*CUT-OFF*)

La regularización por corte (*cut-off*) fue el primer esquema de regularización propuesto y es el que físicamente es más sencillo de explicar [4].

Este esquema de regularización busca hacer finitas las integrales que surgen de los *loops* al modificar sus límites de integración. Se propone que la integración sobre la coordenada «radial» sea desde 0 hasta un valor finito Λ , denominado «parámetro de corte». De esta manera, se tienen límites finitos y las integrales no tienen (momentáneamente) divergencias ultravioleta.

En este punto, la teoría de la electrodinámica cuántica ha sido modificada. Las integrales ya no son evaluadas sobre todo el espacio 4-dimensional, si no que son integradas hasta cierto límite. Esta «deformación» de la teoría es temporal y debe de ser revertida al finalizar el cálculo. Para que sea revertida, debe de evaluarse el límite cuando $\Lambda \rightarrow \infty$. En este momento, las integrales vuelven a ser divergentes. Sin embargo, se observa que la divergencia se debe únicamente a la evaluación del límite de los términos que contienen al «parámetro de corte» Λ cuando éste tiende a infinito.

Este esquema de regularización tiene la ventaja de que es físicamente intuitivo. Sin embargo, tiene un par de desventajas:

- Rompe la invariancia de Lorentz
- Rompe la invariancia de gauge

2.2.2 REGULARIZACIÓN DE PAULI-VILLARS

Esta técnica consiste en agregar una partícula «fantasma» a la teoría por cada partícula existente [5, 6].

Considerando a una partícula perteneciente a la teoría de la electrodinámica cuántica con masa m , la regularización de Pauli-Villars agrega a una partícula «fantasma» con masa Λ con la estadística contraria (de Fermi o de Bose-Einstein) a la partícula original.

Es necesario aclarar que el parámetro Λ en la regularización de Pauli-Villars no está relacionado con el parámetro Λ en el esquema de regularización por corte.

La teoría de la electrodinámica cuántica es modificada agregando estas nuevas partículas. De esta manera, el operador de densidad lagrangiana $\hat{\mathcal{L}}$ es modificado agregándole términos con los campos relacionados con estas partículas.

Una vez habiendo modificado el operador de densidad Lagrangiana, es necesario analizar la expansión de las amplitudes invariantes $\mathcal{M}_0$. En estas amplitudes invariantes, se presenta un propagador «mixto» que está formado por la resta de los propagadores de las partículas originales y las partículas «fantasma» de la siguiente forma:

$$\frac{1}{k^2 - m_0^2} - \frac{1}{k^2 - \Lambda^2} = \frac{m_0^2 - \Lambda^2}{(k^2 - m_0^2)(k^2 - \Lambda^2)} = \int_{m_0^2}^{\Lambda^2} \frac{-1}{(k^2 - \Xi)^2} d\Xi.$$

Después de haber establecido los propagadores «mixtos» necesarios, debe de aplicarse la rotación de Wick y la integración sobre coordenadas esféricas en 4-dimensiones. Las integrales a *1-loop* suelen ser convergentes utilizando la regularización de Pauli-Villars, ya que el propagador «mixto» tiene la siguiente forma: $\frac{1}{k^4}$.

Por el momento, la teoría de la electrodinámica cuántica ha sido modificada. Al finalizar el cálculo, es necesario revertir la modificación. En el caso de la regularización de Pauli-Villars esto se logra al evaluar el límite cuando las masas Λ de las partículas «fantasma» tienden a infinito.

La regularización de Pauli-Villars ha sido ampliamente utilizada en la regularización de la electrodinámica cuántica a *1 loop* ya que es invariante local de gauge y de Lorentz.

Sin embargo, esta técnica presenta una dificultad importante al realizar cálculos a más de *1 loop*: mientras más *loops* se consideren es necesario agregar partículas «fantasma» adicionales, lo cual hace que estos cálculos sean más largos y complejos.

2.2.3 REGULARIZACIÓN DIMENSIONAL

La regularización dimensional es una técnica que consiste en modificar las dimensiones del espacio de momentos en $D = 4$ dimensiones. Las integrales divergentes en la electrodinámica cuántica «habitan» en el espacio de $D = 4$ dimensiones de Minkowski [4, 5, 6].

Si se modifican las dimensiones del espacio D a un valor ≥ 4 , estas integrales siguen siendo divergentes. Sin embargo, si se considera una dimensión $D < 4$ estas integrales se vuelven finitas.

Es por esto por lo que se modifican las dimensiones de las integrales de la siguiente manera:

$$D = 4 \longrightarrow D = 4 - \varepsilon,$$

donde ε es un parámetro positivo arbitrariamente pequeño.

Esta «deformación» de la teoría es revertida al evaluar el límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Si bien la técnica de regularización dimensional no es físicamente intuitiva, es el esquema de regularización mayormente utilizado en la teoría cuántica de campos.

Esto se debe a que la regularización dimensional es invariante de gauge, de Lorentz y además es más fácilmente aplicable en cálculos de más de 1 *loop* que la técnica de renormalización de Pauli-Villars. Por estas razones, se ha elegido seguir la metodología de este esquema de regularización y aplicarlo a $\Sigma(p)$ para calcular el contratérmino de la masa $\delta_m^{OS,DR}$.

2.3 REGULARIZACIÓN DIMENSIONAL DE $\Sigma(p)$

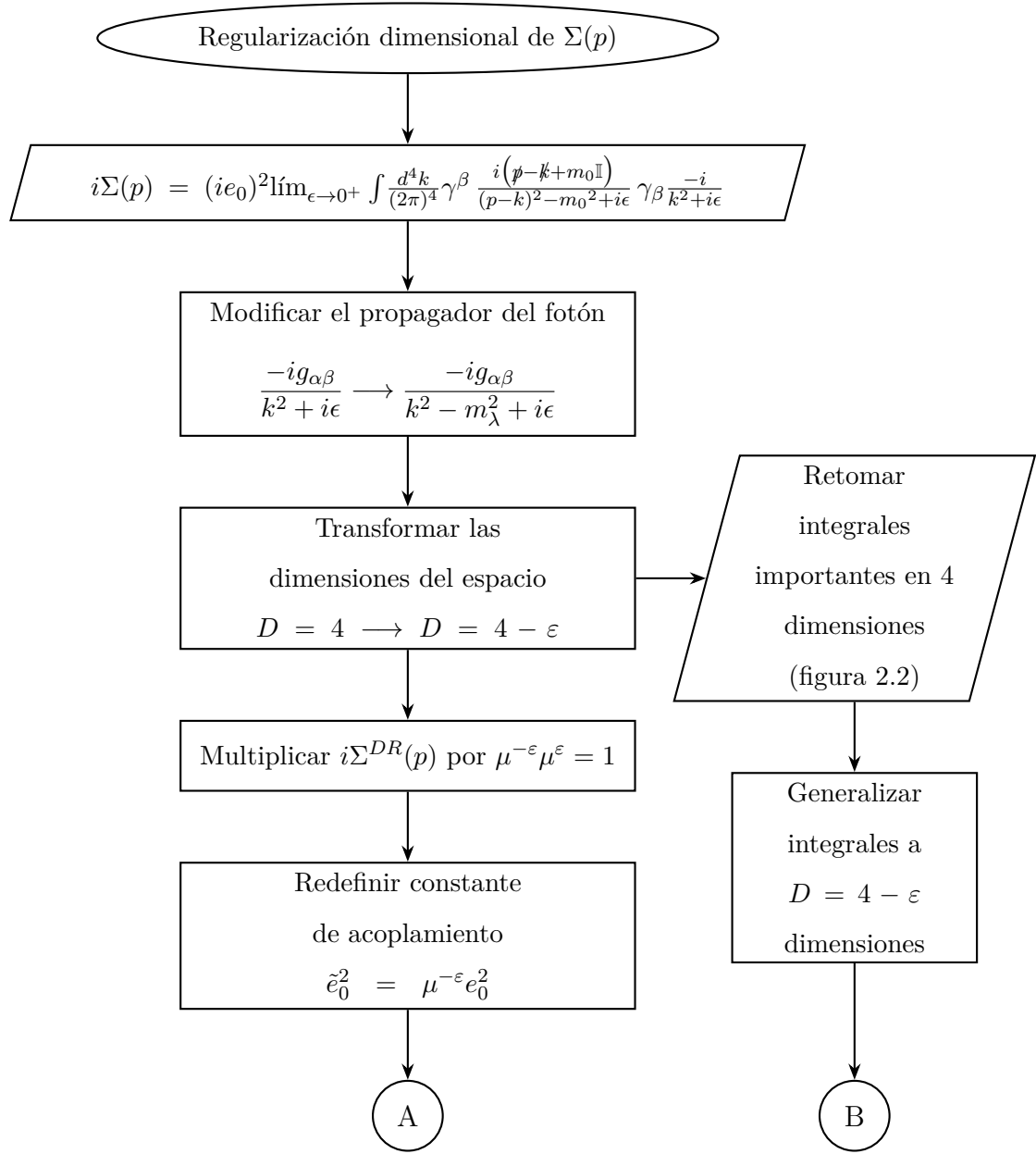
Ahora que se ha hecho la elección de aplicar la *regularización dimensional* a $\Sigma(p)$, es necesario establecer la metodología para calcular $\Sigma^{DR}(p)$.

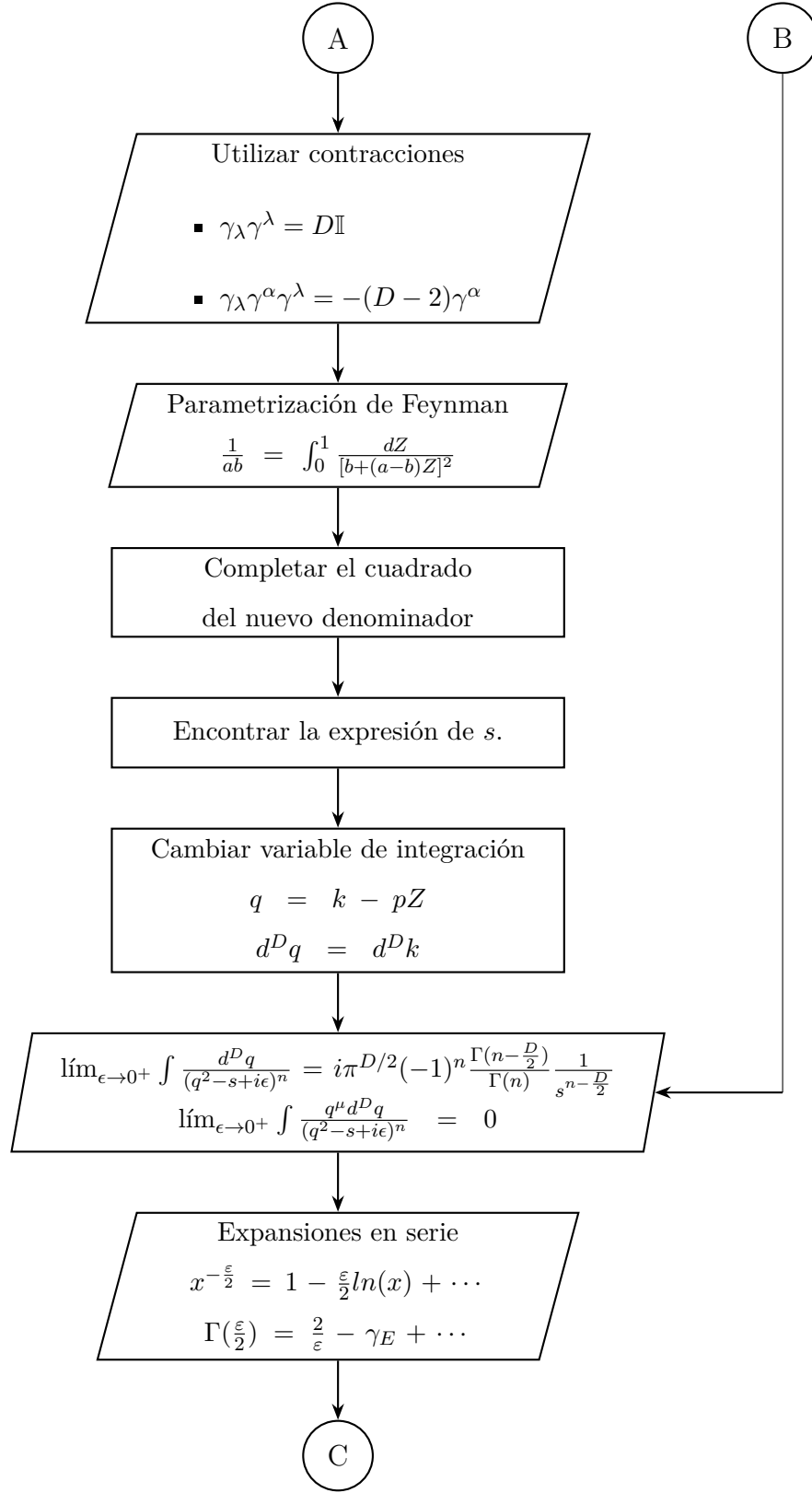
Una vez conocida la ecuación de $\Sigma(p)$ a partir de las reglas de Feynman, dada por la ecuación (1.144), es necesario introducir una masa «ficticia» del fotón m_λ ubicada en el polo de su propagador [4].

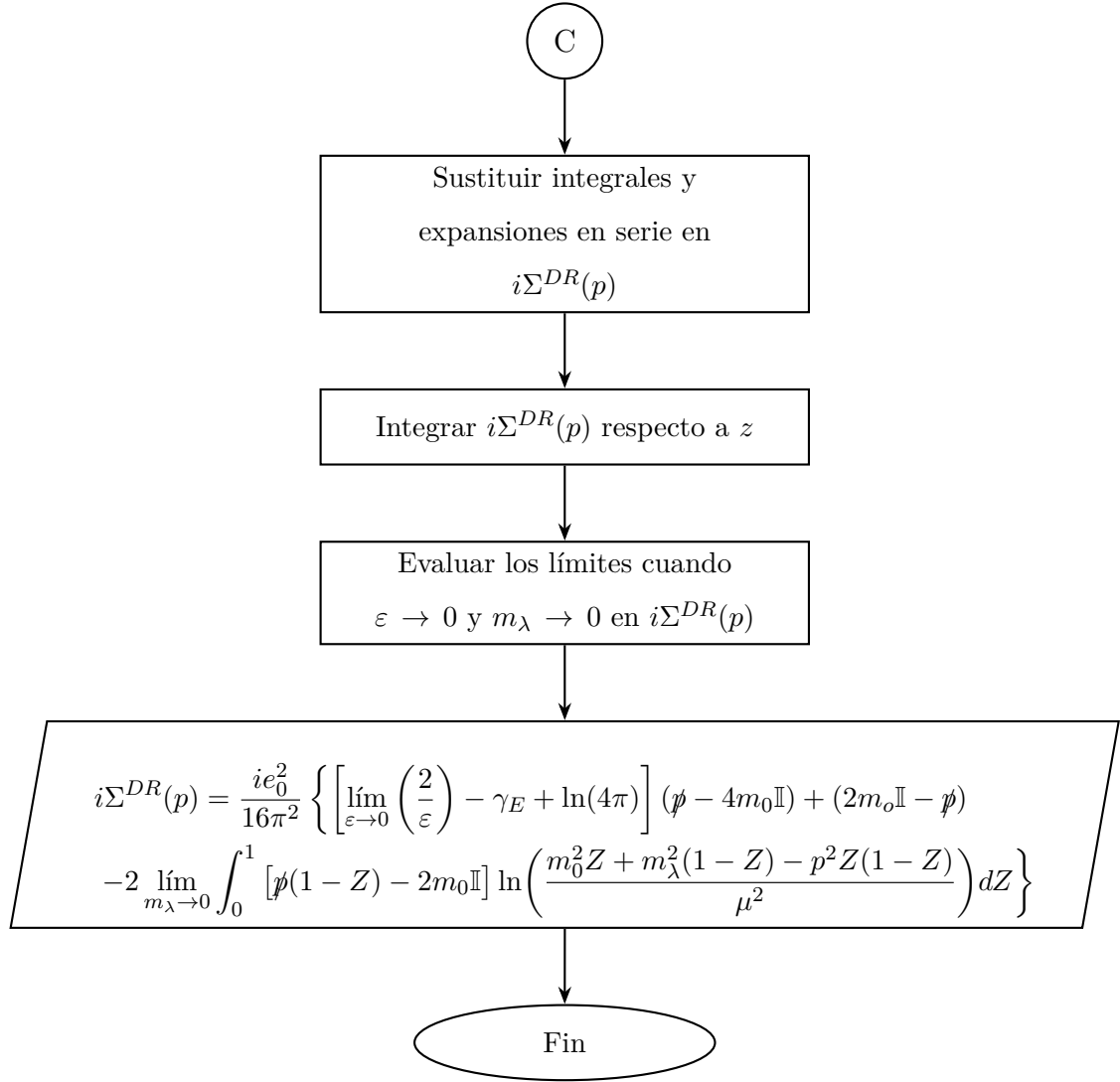
Posteriormente, es necesario transformar las dimensiones del espacio-tiempo de $D = 4$ a $D = 4 - \varepsilon$ junto con las modificaciones matemáticas que esto conlleva [6].

Después de esto se aplica la ya mencionada *parametrización de Feynman* la cual permite expresar a $\Sigma(p)$ en términos de las ya conocidas integrales en $D = 4 - \varepsilon$ dimensiones mostradas en el resultado de la figura 2.2 [4].

Habiendo hecho esto, se puede obtener la expresión regularizada $\Sigma^{DR}(p)$ tras llevar a cabo el desarrollo matemático resumido en la figura 2.3. Los pasos detallados de este procedimiento se muestran en la sección 3.4.

FIGURA 2.3: Metodología de la regularización dimensional de $\Sigma(p)$ (Parte 1/3).

FIGURA 2.3: Metodología de la regularización dimensional de $\Sigma(p)$ (Parte 2/3).

FIGURA 2.3: Metodología de la regularización dimensional de $\Sigma(p)$ (Parte 3/3).

La expresión $i\Sigma^{DR}(p)$ es posteriormente utilizada al momento de calcular el contratérmino $\delta_m^{OS,DR}$.

2.4 RENORMALIZACIÓN DE LA MASA

La técnica de renormalización consiste en redefinir los operadores de campo desnudos $\hat{\psi}_0$, $\hat{A}_{0,\mu}$ junto con sus cantidades desnudas m_0 y q_0 . Estos 4 objetos son

divergentes, y son redefinidos en cantidades renormalizadas $\hat{\psi}_R$, $\hat{A}_{R,\mu}$, m_R y q_R a través de «contratérminos» [6].

Las cantidades desnudas y sus respectivos contratérminos son divergentes. Sin embargo, ambos se combinan de tal manera que sus divergencias se cancelan entre sí y dan como resultado una cantidad finita, la cual se dice está «renormalizada».

En esta tesis, se analiza únicamente la renormalización de la masa. La masa renormalizada m_R es una cantidad finita que se define de la siguiente manera:

$$m_R = m_0 + \delta_m. \quad (2.3)$$

No existe una única expresión para definir a la masa «renormalizada», ya que su expresión algebraica depende de la elección del *esquema de renormalización*. Cada esquema de renormalización da instrucciones precisas sobre cómo se definen los contratérminos y cómo calcularlos. Existen tres principales esquemas de renormalización:

- *On-Shell* (OS).
- Sustracción mínima (MS).
- Sustracción mínima modificada ($\overline{MS}$).

2.4.1 ESQUEMA OS

En el esquema *On-Shell* se establece que la masa renormalizada m_R^{OS} es igual a la masa física del electrón m_P [4, 5, 6, 9].

La expresión algebraica del contratérmino de la masa bajo el esquema *On-Shell* (δ_m^{OS}) se deduce al calcular el polo de un propagador fermiónico *efectivo*, que por definición es igual a la masa física m_P del electrón. El propagador «efectivo»

del electrón se obtiene al considerar una serie infinita de propagadores fermiónicos «libres» corregidos por la autoenergía del electrón $\Sigma(p)$.

Bajo el esquema *On-Shell*, el contratérmino de la masa δ_m^{OS} está relacionado con la autoenergía del electrón $\Sigma(p)$ de la siguiente manera:

$$\delta_m^{OS\mathbb{I}} = -\Sigma(p) \Big|_{\not{p}=m_R^{OS\mathbb{I}}}. \quad (2.4)$$

2.4.2 ESQUEMAS MS Y $\overline{MS}$

En la teoría cuántica de campos es frecuente el uso de los esquemas de renormalización MS y $\overline{MS}$ debido a que su uso permite una mayor facilidad computacional al calcular correcciones a órdenes perturbativos más altos [6].

2.4.2.1 ESQUEMA MS

En el esquema de renormalización MS se establece que el contratérmino de la masa δ_m^{MS} está definido únicamente por un término divergente [6].

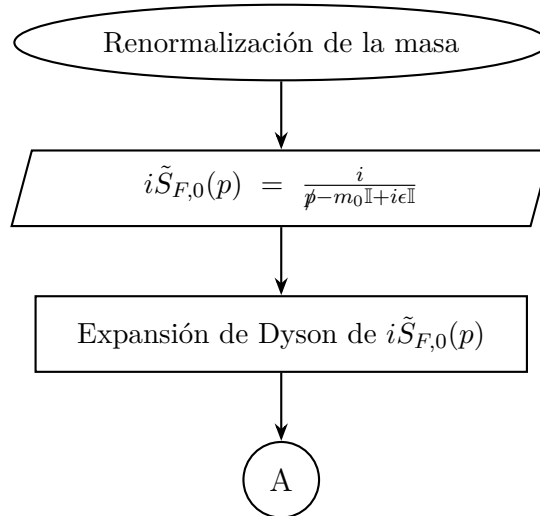
2.4.2.2 ESQUEMA $\overline{MS}$

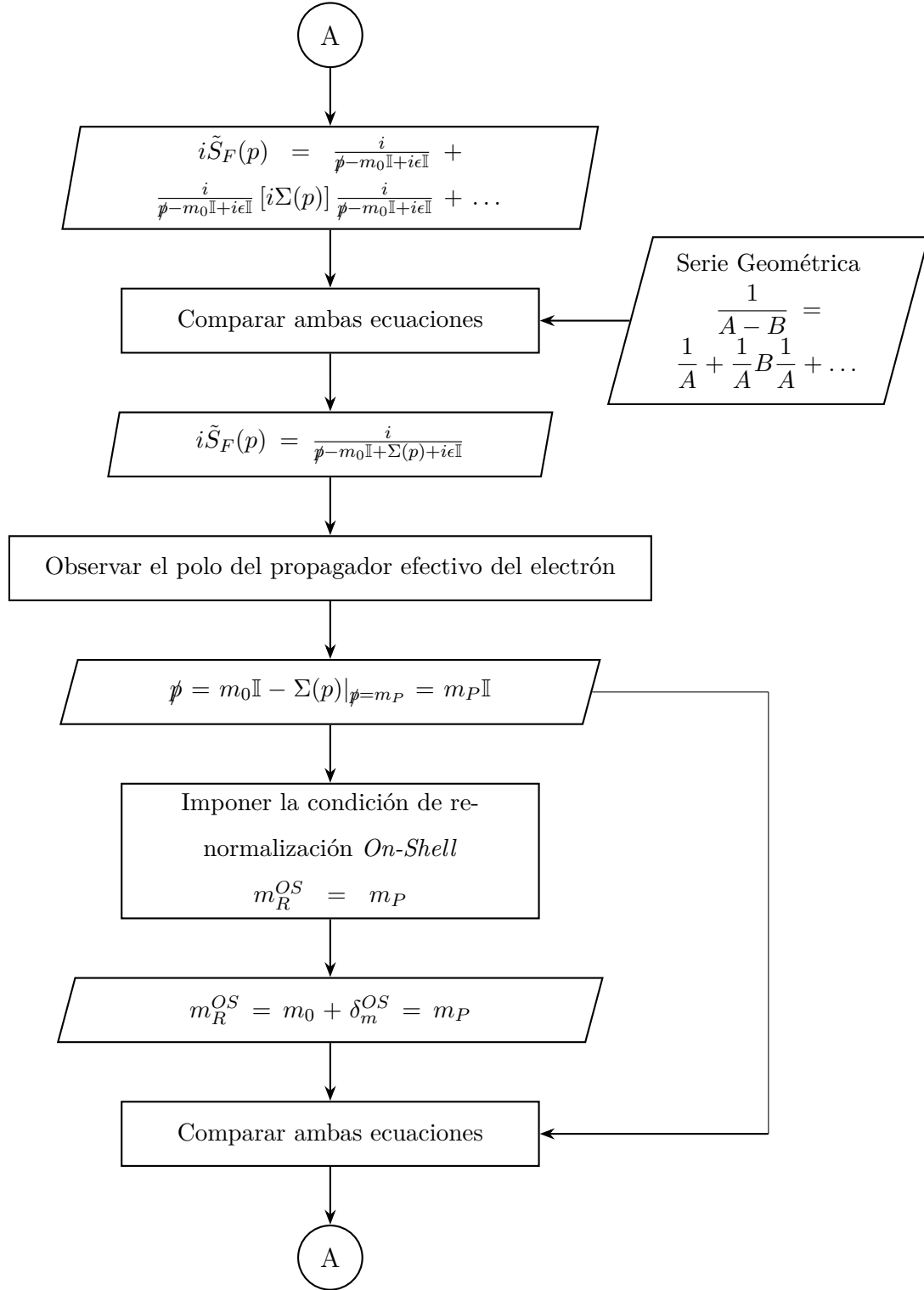
En el esquema de renormalización $\overline{MS}$, el contratérmino de la masa $\delta_m^{\overline{MS}}$ incluye, además del término divergente, a los términos constantes γ_E y $\ln(4\pi)$ [6].

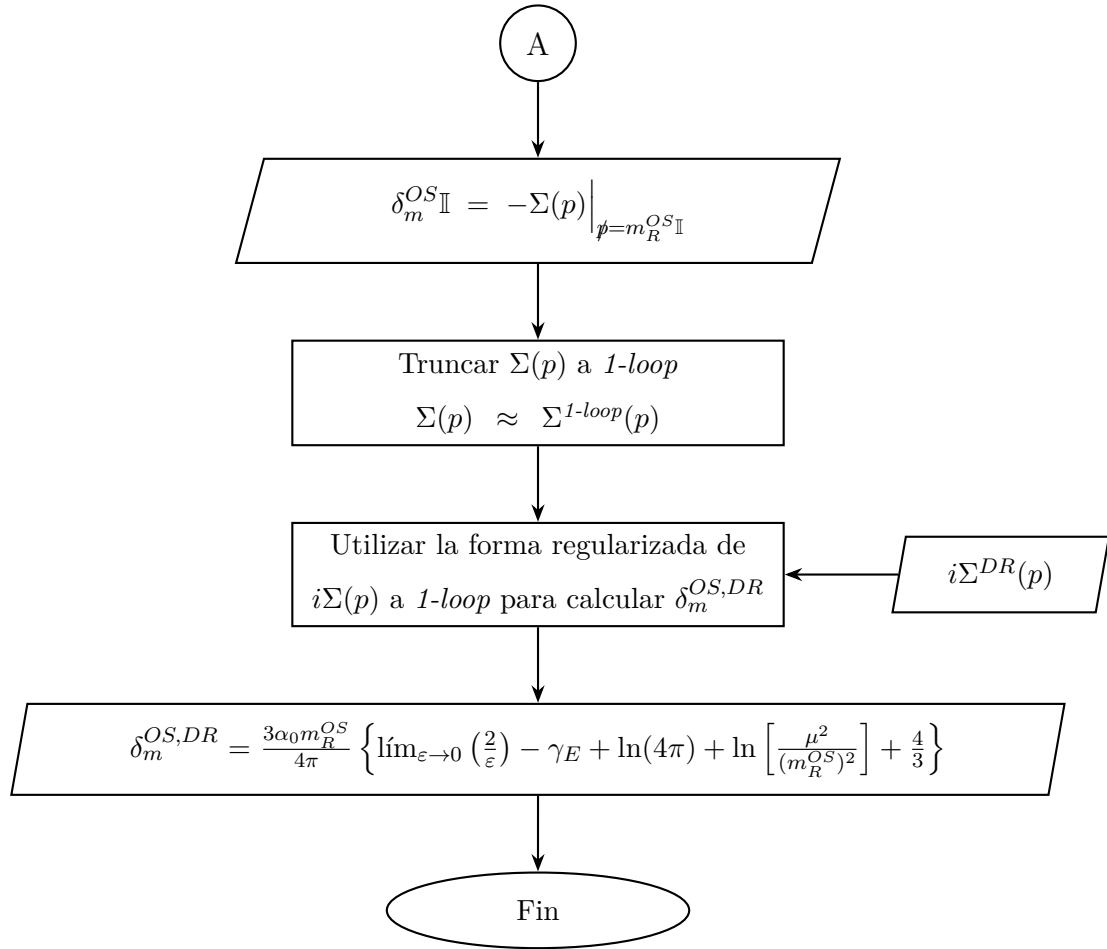
2.5 RENORMALIZACIÓN DE LA MASA BAJO EL ESQUEMA *ON-SHELL*

Debido a la evidente relación entre el esquema de renormalización *On-Shell* y una cantidad física (m_P), el desarrollo de la renormalización de la masa bajo este esquema es físicamente más intuitivo que la renormalización de la masa bajo los esquemas MS y $\overline{MS}$ [4, 5, 6, 9]. Por esta razón, en este estudio se analiza la renormalización de la masa únicamente bajo el esquema *On-Shell*.

El objetivo principal de esta tesis consiste en calcular el contratérmino de la masa de acuerdo con la ecuación (2.4). En este punto, se puede utilizar la expresión de $\Sigma(p)$ bajo cualquier esquema de *regularización*. Por motivos mencionados anteriormente, el esquema de *regularización* utilizado en esta tesis es la regularización dimensional (DR). Al evaluar la autoenergía del electrón regularizada dimensionalmente $\Sigma^{DR}(p)$ en la ecuación (2.4) es posible obtener el resultado final de este estudio: $\delta_m^{OS,DR}$. La figura 2.4 resume el procedimiento para calcular esta cantidad y el desarrollo matemático se realiza en el capítulo 4.



FIGURA 2.4: Metodología del cálculo de $\delta_m^{OS,DR}$ (Parte 1/2).

FIGURA 2.4: Metodología del cálculo de $\delta_m^{OS,DR}$ (Parte 2/2).

CAPÍTULO 3

REGULARIZACIÓN DIMENSIONAL

En este capítulo se dará primeramente una introducción a las herramientas matemáticas necesarias para calcular $\Sigma^{DR}(p)$, para posteriormente desarrollar este cálculo paso por paso [4, 6].

Primeramente, en la sección 3.1 se estudia paso por paso la resolución de las integrales (2.1) en $D = 4$ dimensiones utilizando la *rotación de Wick* y la integración en coordenadas esféricas en $D = 4$ dimensiones.

Posteriormente, en la sección 3.2 se establecen los fundamentos de la *parametrización de Feynman*, la cual es fundamental para expresar $\Sigma(p)$ en términos de las integrales (2.1).

En la sección 3.3 se introducen los fundamentos de la *regularización dimensional* junto con aspectos importantes que surgen al cambiar de un espacio-tiempo de $D = 4$ dimensiones a un espacio-tiempo de $D = 4 - \varepsilon$ dimensiones.

Finalmente, en la sección 3.4 se aplican todas estas herramientas para calcular $\Sigma^{DR}(p)$.

3.1 INTEGRALES IMPORTANTES EN 4 DIMENSIONES

En esta sección se analizarán por separado las soluciones de las integrales [4] dadas por la ecuación (2.1).

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{d^4 k}{(k^2 - s + i\epsilon)^n}, \quad (3.1a)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int d^4 k \frac{k^\mu}{(k^2 - s + i\epsilon)^n}. \quad (3.1b)$$

En estas integrales, la variable de integración es un 4-momento que está dentro del espacio de 4 dimensiones de Minkowski. Su elemento diferencial está dado de la siguiente manera:

$$d^4 k = dk_0 d^3 \mathbf{k} = dk_0 dk_1 dk_2 dk_3. \quad (3.2)$$

Como se mencionó anteriormente, es conveniente transformar este elemento diferencial que «habita» en el espacio-tiempo de Minkowski a un espacio *euclidiano* de $D = 4$ dimensiones.

Para lograr esto, se utilizará la técnica de la *rotación de Wick* [5, 6]. Esto permite simplificar significativamente la evaluación de las integrales al aprovechar la simetría rotacional del espacio *euclidiano*.

3.1.1 ROTACIÓN DE WICK

En el análisis complejo, la variable compleja z se define de la siguiente manera [21]:

$$z = x + iy. \quad (3.3)$$

Es necesario encontrar una manera de relacionar integrales de $f(z)$ evaluadas sobre el eje real con integrales de la misma función evaluadas sobre el eje imaginario

[6].

Las funciones complejas $f(z)$ de que son de interés en esta tesis tienen dos *polos*, cada uno desplazado por una cantidad infinitesimal $i\epsilon$. Para demostrar la validez de la *rotación de Wick* es necesario considerar un contorno C que evite encerrar dichos polos [6], el cual está dado por la figura 3.1.

Considerando este contorno de integración, y de acuerdo con el *teorema de Cauchy* (revisar el apéndice B), la integral cíclica se expresa de la siguiente manera [21]:

$$\oint_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_{R,2}} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + \int_{C_{R,1}} f(z)dz = 0. \quad (3.4)$$

En la teoría cuántica de campos, la integración sobre la coordenada temporal real se lleva a cabo sobre un intervalo desde $-\infty$ a ∞ . Es por esto por lo que debe de evaluarse el límite de la ecuación 3.4 cuando el radio del arco circular en el contorno (R) tiende a ∞ [6].

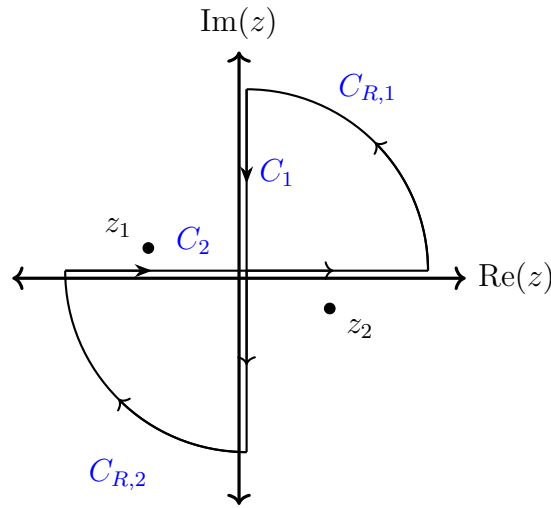


FIGURA 3.1: Contorno de integración utilizado en la rotación de Wick. Reimpreso de Schwartz, M. (2014)

Las funciones $f(z)$ de interés en esta tesis decrecen de forma rápida cuando

$|z| \rightarrow \infty$. Tomando esto en cuenta esto, aplicando el límite cuando $R \rightarrow \infty$ y aplicando el *Lema de Jordan* (revisar el apéndice B) se obtiene [21]:

$$\int_{C_{R,1}} f(z)dz = \int_{C_{R,2}} f(z)dz = 0. \quad (3.5)$$

Sustituyendo la ecuación 3.5 en la ecuación 3.4, y teniendo en cuenta la evaluación del límite cuando $R \rightarrow \infty$, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_2} f(z)dz = - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_1} f(z)dz. \quad (3.6)$$

El camino C_2 en la figura 3.1 es paralelo al eje $Re(z)$. Por lo tanto, en la integral sobre este camino puede considerarse que la variable compleja z es igual a su parte real x . Entonces, el integrando es función de una variable real $f(x)$:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_2} f(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx. \quad (3.7)$$

Sucede algo análogo con la integral sobre el camino C_1 . Este camino es paralelo al eje $Im(z)$. Se considera que en la integral sobre este camino la variable compleja z es igual a su parte imaginaria iy . Aquí, el integrando es función de una variable compleja $f(iy)$:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_1} f(z)dz = i \int_{\infty}^{-\infty} f(iy)dy = -i \int_{-\infty}^{\infty} f(iy)dy. \quad (3.8)$$

Sustituyendo las ecuaciones 3.7 y 3.8 en la ecuación 3.6 se obtiene la siguiente ecuación:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = i \int_{-\infty}^{\infty} f(iy)dy. \quad (3.9)$$

Esto es equivalente a establecer un cambio de variable de la siguiente manera:

$$\chi = iy. \quad (3.10)$$

Su elemento diferencial es:

$$d\chi = idy. \quad (3.11)$$

Tomando en cuenta las ecuaciones 3.10 y 3.11, la ecuación 3.9 se escribe de como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(\chi)d\chi. \quad (3.12)$$

La ecuación 3.12 representa a la rotación de Wick y es ampliamente utilizada en la teoría cuántica de campos para transformar las integrales evaluadas en el espacio de 4 dimensiones de Minkowski a un espacio *euclidiano* de 4 dimensiones [5, 6].

3.1.2 TRANSFORMACIÓN A ESPACIO *EUCLIDIANO* EN 4 DIMENSIONES

En la teoría cuántica de campos, suele preferirse el uso de integrales en el espacio de momentos en 4 dimensiones [4].

Los 4-vectores de momento habitan en el espacio-tiempo de Minkowski y suelen escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{cases} k^\mu = (k^0, k^1, k^2, k^3), \\ k_\mu = (k_0, k_1, k_2, k_3). \end{cases} \quad (3.13)$$

Frecuentemente aparece la siguiente expresión:

$$k^2 = k^\mu k_\mu = k_0^2 - |\mathbf{k}|^2. \quad (3.14)$$

Se observa que la coordenada temporal k_0 no es tratada de la misma manera que las coordenadas espaciales k_1 , k_2 y k_3 [6].

Esto cambia si se aplica la *rotación de Wick* sobre el componente temporal k_0 . Se define entonces un componente imaginario de k_0 de manera análoga a la ecuación 3.10:

$$k_0 = i\kappa_0. \quad (3.15)$$

Utilizando esta sustitución, el 4-vector de momento *euclidiano* k_E es definido de la siguiente manera:

$$\begin{cases} k_E^\mu = (i\kappa_0, k^1, k^2, k^3), \\ k_{E,\mu} = (i\kappa_0, k_1, k_2, k_3). \end{cases} \quad (3.16)$$

El producto k^2 de la ecuación 3.14 se escribe ahora como:

$$k^2 = -\kappa_0^2 - |\mathbf{k}|^2 = -(\kappa_0^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) = -k_E^2. \quad (3.17)$$

Es evidente que ahora la nueva componente temporal κ_0 es tratada matemáticamente igual a las 3 componentes espaciales.

Ya que se conoce a un 4-vector *euclidiano* de momento k_E , es necesario utilizarlo para evaluar las integrales sobre el espacio de momentos.

Para esto, es necesario definir el elemento diferencial:

$$d^4 k_E = d\kappa_0 d^3 \mathbf{k}. \quad (3.18)$$

Este elemento diferencial $d^4 k_E$ se relaciona con el elemento diferencial del espacio-tiempo de Minkowski $d^4 k$ al sustituir la ecuación 3.15 en la ecuación 3.2 de la siguiente manera:

$$d^4 k = id\kappa_0 d^3 \mathbf{k} = id^4 k_E. \quad (3.19)$$

El uso conjunto de las ecuaciones 3.16, 3.17 y 3.19 permite transformar integrales en el espacio-tiempo de Minkowski a integrales en un espacio-tiempo *euclidiano* de 4 dimensiones.

Las integrales sobre el espacio-tiempo *euclidiano* serán evaluadas utilizando coordenadas esféricas en $D = 4$ dimensiones por simplicidad computacional [20].

3.1.3 RESOLUCIÓN DE LAS INTEGRALES

Con las herramientas vistas hasta el momento, es posible resolver las integrales 2.1.

Ejemplo 3.1 (Integral 3.1a). Primeramente, se aplica la *rotación de Wick* a la ecuación 3.1a [4]. Esto se logra al realizar las sustituciones dadas por las ecuaciones 3.17 y 3.19:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{d^4 k}{(k^2 - s + i\epsilon)^n} = i(-1)^n \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{d^4 k_E}{(k_E^2 + s - i\epsilon)^n}.$$

Después de haber transformado esta integral a un espacio *euclidiano* de momentos en 4 dimensiones, es necesario observar que la cantidad $k_E^2 + s$ siempre es mayor a 0. Entonces, no existe ninguna singularidad en este nuevo integrando.

Debido a que no hay singularidades, es posible evaluar el límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$ dentro del integrando. Es decir,

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{d^4 k}{(k^2 - s + i\epsilon)^n} &= i(-1)^n \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{d^4 k_E}{(k_E^2 + s - i\epsilon)^n} \\ &= i(-1)^n \int \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{d^4 k_E}{(k_E^2 + s - i\epsilon)^n}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{d^4 k}{(k^2 - s + i\epsilon)^n} = i(-1)^n \int \frac{d^4 k_E}{(k_E^2 + s)^n}.$$

Ahora es el momento de introducir el cambio de coordenadas cartesianas a esféricas en 4 dimensiones. En el apéndice C [20] se encuentra información importante sobre la integración sobre coordenadas esféricas en 4 dimensiones.

El elemento diferencial $d^4 k_E$ está dado de la siguiente manera:

$$d^4 k_E = |k_E|^3 \sin^2 \theta_1 \sin \theta_2 d|k_E| d\theta_1 d\theta_2 d\phi = |k_E|^3 d|k_E| d\Omega_4. \quad (3.20)$$

Con fines de notación, se introdujo al elemento diferencial del ángulo sólido en 4 dimensiones $d\Omega_4$:

$$d\Omega_4 = \sin^2 \theta_1 \sin \theta_2 d\theta_1 d\theta_2 d\phi. \quad (3.21)$$

En la última ecuación, $|k_E|$ es un «radio» de 4 dimensiones en el espacio *euclidiano* de momentos definido de la siguiente manera:

$$|k_E| = \sqrt{\kappa_0^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}. \quad (3.22)$$

Comparando las ecuaciones 3.22 y 3.17 se obtiene la siguiente igualdad:

$$k_E^2 = |k_E|^2. \quad (3.23)$$

Utilizando las ecuaciones 3.20 y 3.23 e integrando sobre todo el espacio se obtiene:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{d^4 k}{(k^2 - s + i\epsilon)^n} = i(-1)^n \int d\Omega_4 \int_0^\infty \frac{|k_E|^3}{(|k_E|^2 + s)^n} d|k_E|,$$

en donde ángulo sólido total Ω_4 es igual a:

$$\Omega_4 = \int d\Omega_4 = 2\pi^2. \quad (3.24)$$

Por lo que se obtiene:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{d^4 k}{(k^2 - s + i\epsilon)^n} = i(-1)^n (2\pi^2) \int_0^\infty \frac{|k_E|^3}{(|k_E|^2 + s)^n} d|k_E|.$$

La integral respecto a $|k_E|$ puede ser evaluada utilizando las técnicas convencionales del cálculo integral.

Tras realizar todas las integraciones, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{d^4 k}{(k^2 - s + i\epsilon)^n} = i(-1)^n \pi^2 \frac{1}{(n-2)(n-1)} s^{-n+2}.$$

Ahora, es posible utilizar la propiedad de las funciones Γ dada por la ecuación (2.2):

$$\Gamma(n) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-2). \quad (3.25)$$

De esta manera, se obtiene el resultado final de la integral 3.1a:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{d^4 k}{(k^2 - s + i\epsilon)^n} = i(-1)^n \pi^2 \frac{\Gamma(n-2)}{\Gamma(n)} s^{-n+2}. \quad (3.26)$$

En las integrales de la teoría cuántica de campos, el exponente del denominador n suele ser un número entero.

Es importante analizar a la función Γ . Para algún número entero η , la función $\Gamma(\eta)$ converge para cualquier $\eta > 0$. Entonces, observando la ecuación 3.26 se concluye que ésta converge para los valores $n \geq 3$.

Ejemplo 3.2 (Integral 3.1b). De igual manera que en el ejemplo anterior, se comienza aplicando la *rotación de Wick* a la integral [4]. Entonces, la integral 3.1b queda expresada de la siguiente manera:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{k^\mu}{(k^2 - s + i\epsilon)^n} d^4 k = i(-1)^n \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{(i\kappa_0, k^1, k^2, k^3)}{(k_E^2 + s - i\epsilon)^n} d^4 k_E.$$

Ya que esta integral está evaluada sobre un espacio *euclidiano* de 4 dimensiones, se observa que $k_E^2 + s$ siempre es mayor a 0. En este caso, no existe singularidad en este integrando. Esto permite que sea posible evaluar el límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$ dentro del integrando:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{(i\kappa_0, k^1, k^2, k^3)}{(k_E^2 + s - i\epsilon)^n} d^4 k_E = \int \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{(i\kappa_0, k^1, k^2, k^3)}{(k_E^2 + s - i\epsilon)^n} d^4 k_E = \int \frac{(i\kappa_0, k^1, k^2, k^3)}{(k_E^2 + s)^n} d^4 k_E.$$

Entonces, la integral se puede expresar de la siguiente manera:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{k^\mu}{(k^2 - s + i\epsilon)^n} d^4 k = i(-1)^n \int \frac{(i\kappa_0, k^1, k^2, k^3)}{(k_E^2 + s)^n} d^4 k_E.$$

Esta integral puede resolverse al utilizar coordenadas esféricas en 4 dimensiones. Para esto, se utiliza el elemento diferencial expresado por la ecuación 3.20, la definición de la coordenada radial $|k_E|$ dada por la ecuación 3.22 y la transformación de coordenadas cartesianas a esféricas dada por la ecuación 3.27 (revisar apéndice C) [20].

$$\kappa_0 = |k_E| \cos \theta_1, \quad (3.27a)$$

$$k^1 = |k_E| \sin \theta_1 \cos \theta_2, \quad (3.27b)$$

$$k^2 = |k_E| \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \phi, \quad (3.27c)$$

$$k^3 = |k_E| \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \phi. \quad (3.27d)$$

Considerando esto, e integrando sobre todo el espacio-tiempo *euclidiano*, la integral se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{k^\mu}{(k^2 - s + i\epsilon)^n} d^4k = \\ & i(-1)^n \int \frac{(i|k_E| \cos \theta_1, |k_E| \sin \theta_1 \cos \theta_2, |k_E| \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \phi, |k_E| \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \phi)}{(|k_E|^2 + s)^n} \\ & \quad \times |k_E|^3 d|k_E| d\Omega_4. \end{aligned}$$

La integración de cada uno de los componentes resulta en:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{k^\mu}{(k^2 - s + i\epsilon)^n} d^4k = (0, 0, 0, 0).$$

Lo cual puede expresarse finalmente como:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{k^\mu}{(k^2 - s + i\epsilon)^n} d^4k = 0. \quad (3.28)$$

Al llevar a cabo la integración, aparece la misma integral radial que en el ejemplo anterior:

$$\int_0^\infty \frac{|k_E|^3}{(|k_E|^2 + s)^n} d|k_E| = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(n-2)}{\Gamma(n)} s^{-n+2}.$$

Basándonos en el hecho de que el dominio de la función $\Gamma(\eta)$ es $\eta > 0$ para cualquier η entero, entonces se deduce que la ecuación 3.28 es válida también cuando $n \geq 3$.

Entonces, se han deducido las soluciones de dos integrales en $D = 4$ dimensiones que serán particularmente útiles en la regularización dimensional de $\Sigma(p)$:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{d^4k}{(k^2 - s + i\epsilon)^n} = i(-1)^n \pi^2 \frac{\Gamma(n-2)}{\Gamma(n)} s^{-n+2}, \quad n \geq 3; \quad (3.29a)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{k^\mu}{(k^2 - s + i\epsilon)^n} d^4k = 0, \quad n \geq 3. \quad (3.29b)$$

3.2 PARAMETRIZACIÓN DE FEYNMAN

El objetivo de la parametrización de Feynman es manipular matemáticamente a las integrales presentes en la teoría cuántica de campos para darles la forma de las integrales presentes en el apéndice C.3 [4].

En esta tesis, se aplicará la parametrización de Feynman con el objetivo de que en la regularización de $\Sigma(p)$ se obtengan las ecuaciones 3.29, cuyas soluciones son ya conocidas.

Para lograr esto, se reexpresan las fracciones mediante una integral. Por ejemplo:

$$\frac{1}{ab} = \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{dt}{t^2}. \quad (3.30)$$

Ahora, se introduce el «Parámetro de Feynman» Z mediante el siguiente cambio de variable:

$$t = b + (a-b)Z, \quad (3.31)$$

donde el elemento diferencial está dado por:

$$dt = (a-b)dZ. \quad (3.32)$$

Realizando la integración respecto a Z con los límites de integración adecuados, la ecuación 3.30 se convierte en:

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dZ}{[b + (a-b)Z]^2}. \quad (3.33)$$

Mediante las técnicas convencionales de cálculo es sencillo demostrar la validez de esta ecuación.

Esta técnica puede aplicarse a multiplicaciones de más de 2 términos en el denominador. Para el caso de n términos en el denominador, se utiliza la siguiente

ecuación:

$$\frac{1}{a_0 a_1 a_2 \cdots a_n} = \Gamma(n+1) \int_0^1 dZ_1 \int_0^{Z_1} dZ_2 \cdots \int_0^{Z_{n-1}} dZ_n \quad (3.34)$$

$$\times \frac{1}{[a_0 + (a_1 - a_0)Z_1 + \cdots (a_n - a_{n-1})Z_n]^{n+1}}.$$

Es posible expresar igualdades de fracciones donde un término del denominador tiene una potencia mayor a 1 al derivar ambos lados de la ecuación respecto a ese término. Por ejemplo, al derivar ambos lados de la ecuación 3.33 respecto a a , se obtiene lo siguiente:

$$\frac{1}{a^2 b} = 2 \int_0^1 dZ \frac{Z}{[b + (a - b)Z]^3}. \quad (3.35)$$

Este tipo de igualdades son ampliamente usadas en la teoría cuántica de campos al aplicar cualquier técnica de regularización.

3.3 FUNDAMENTOS DE LA REGULARIZACIÓN DIMENSIONAL

Las integrales presentes en la teoría cuántica de campos están evaluadas sobre el espacio de momentos en 4 dimensiones [4, 6]. Tal es el caso de las integrales divergentes en la electrodinámica cuántica, las cuales se encuentran en cualquiera de las 3 correcciones radiativas.

Estas integrales son divergentes cuando se integran sobre un espacio de 4 dimensiones o mayor. Sin embargo, son convergentes para un número de dimensiones $D \leq 4$. Entonces, la regularización dimensional cambia las dimensiones del espacio tiempo de $D = 4$ a $D = 4 - \varepsilon$. Donde ε es un elemento infinitesimal mayor a 0.

Algunos libros o artículos utilizan una convención alternativa al transformar

las dimensiones del espacio-tiempo:

$$D = 4 \longrightarrow D = 4 - 2\varepsilon.$$

En este estudio se utilizará únicamente la convención con dimensión $D = 4 - \varepsilon$.

Al finalizar el cálculo, debe de evaluarse el límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, lo cual regresa las divergencias. Si bien en este punto las integrales siguen siendo divergentes, es fácil identificar exactamente qué término (o términos) es el causante (o los causantes) de la divergencia.

3.3.1 TRANSFORMACIÓN DEL ESPACIO DE $D = 4$ A $D = 4 - \varepsilon$ DIMENSIONES

El primer paso de la regularización dimensional consiste en disminuir las dimensiones del espacio-tiempo de $D = 4$ a $D = 4 - \varepsilon$ dimensiones [4, 6]. La modificación de las dimensiones del espacio-tiempo redefine a diversos términos como el tensor métrico $g^{\mu\nu}$, 4-vectores k^μ , elementos diferenciales d^4k , etc.

En un espacio-tiempo arbitrario de dimensión D , el tensor métrico está definido de la siguiente manera:

$$\begin{cases} g^{00} = -g^{ii} = 1, & i = 1, 2, \dots, D-1. \\ g^{\mu\nu} = 0, & \mu \neq \nu. \end{cases} \quad (3.36)$$

El producto entre tensores métricos se expresa de la siguiente manera:

$$g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = D. \quad (3.37)$$

Las matrices γ utilizadas en 4 dimensiones tienen ciertas particularidades cuando se generalizan a una dimensión D .

En un espacio de D dimensiones existen $D - 1$ matrices γ :

$$\gamma^0, \gamma^1, \dots, \gamma^{D-1}. \quad (3.38)$$

Estas matrices satisfacen las siguientes relaciones de anti-conmutación:

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu]_+ = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}. \quad (3.39)$$

A partir de la ecuación 3.39 se deducen las siguientes identidades importantes de las matrices γ :

$$\gamma_\lambda \gamma^\lambda = D\mathbb{I}, \quad (3.40a)$$

$$\gamma_\lambda \gamma^\alpha \gamma^\lambda = -(D - 2)\gamma^\alpha, \quad (3.40b)$$

$$\gamma_\lambda \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\lambda = (D - 4)\gamma^\alpha \gamma^\beta + 4g^{\alpha\beta}. \quad (3.40c)$$

Si bien el significado y la existencia de matrices γ con un número no entero de dimensiones no está claro, es de particular interés el límite donde $D \rightarrow 4$ a partir del cual se recuperan las relaciones de matrices γ en 4 dimensiones.

Un vector k^μ en D dimensiones es expresado como:

$$k^\mu \equiv (k^0, k^1, \dots, k^{D-1}). \quad (3.41)$$

Por lo tanto, la expresión k^2 es igual a:

$$k^2 = k_\mu k^\mu = (k^0)^2 - \sum_{i=1}^{D-1} (k^i)^2. \quad (3.42)$$

El elemento diferencial evaluado en D dimensiones se expresa de la siguiente manera:

$$d^D k = dk^0 dk^1 \dots dk^{D-1}. \quad (3.43)$$

Las integrales evaluadas en D dimensiones tienen la siguiente solución general:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{k^{2a} d^D k}{(k^2 - s + i\epsilon)^b} = i\pi^{D/2} (-1)^{a-b} \frac{1}{s^{b-a-\frac{D}{2}}} \frac{\Gamma(a + \frac{D}{2}) \Gamma(b - a - \frac{D}{2})}{\Gamma(b) \Gamma(\frac{D}{2})}. \quad (3.44)$$

Con la ayuda de la ecuación 3.44 y aprovechando la simetría de los integrandos impares, las ecuaciones 3.29 se transforman a D dimensiones de la siguiente manera:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int d^D k \frac{k^\mu}{(k^2 - s + i\epsilon)^n} = 0, \quad n > \frac{D}{2}; \quad (3.45a)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{d^D k}{(k^2 - s + i\epsilon)^n} = i\pi^{D/2} (-1)^n \frac{\Gamma(n - D/2)}{\Gamma(n)} \frac{1}{s^{n-D/2}}, \quad n > \frac{D}{2}. \quad (3.45b)$$

Estas dos ecuaciones se utilizan directamente en la regularización dimensional de la autoenergía del electrón y son válidas para valores de $n > \frac{D}{2}$.

3.3.2 CONSTANTE DE ACOPLAMIENTO

Al modificar las dimensiones del espacio-tiempo de $D = 4$ a $D = 4 - \epsilon$ no solo se redefinen los objetos vistos en la sección anterior, también lo hacen las unidades de diversas cantidades [4, 6]. En la tabla 3.1 se muestra una comparación entre las unidades naturales n de diversas cantidades en un espacio-tiempo de $D = 4$ y $D = 4 - \epsilon$ dimensiones.

TABLA 3.1: Unidades naturales para espacio-tiempo de $D = 4$ y $D = 4 - \epsilon$ dimensiones.

Cantidad física	Unidades Naturales (n)	
	$D = 4$	$D = 4 - \epsilon$
Lagrangiano o Hamiltoniano	1	1
Densidades Lagrangianas o Hamiltonianas	4	$4 - \epsilon$
Carga eléctrica	0	$\frac{\epsilon}{2}$
Campo de Klein-Gordon $\phi(x)$	1	$1 - \frac{\epsilon}{2}$
Campo electromagnético $A^\mu(x)$	1	$1 - \frac{\epsilon}{2}$
Campos de Dirac $\psi(x)$ y $\bar{\psi}(x)$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3-\epsilon}{2}$

La capacidad de una teoría para que ésta pueda ser *renormalizada* ha sido ampliamente estudiada. Se ha concluido que es requisito que la constante de acoplamiento de la teoría tenga unidades naturales $n = 0$ para que ésta pueda ser *renormalizable*.

En el caso de la electrodinámica cuántica, la constante de acoplamiento (sobre la que se hace la expansión perturbativa) es e_0 . En un espacio tiempo de $D = 4$ dimensiones, la unidad natural de la carga eléctrica es de $n = 0$. Sin embargo, al cambiar las dimensiones del espacio tiempo a $D = 4 - \varepsilon$, la carga eléctrica tiene unidades de $n = \frac{\varepsilon}{2}$.

Es importante el poder garantizar que, al aplicar la regularización dimensional a la electrodinámica cuántica, la constante de acoplamiento sí tenga unidades $n = 0$. Para lograr esto, se realiza la siguiente sustitución donde aparezca el término e_0 :

$$e_0 = \mu^{\varepsilon/2} \tilde{e}_0, \quad (3.46)$$

donde $\tilde{e}_0 = \mu^{-\varepsilon/2} e_0$ es la nueva constante de acoplamiento y tiene unidades $n = 0$.

Se introdujo una constante de escala μ , la cual tiene unidades de $n = 1$ y se le puede asignar una magnitud arbitraria siempre y cuando sea diferente a los límites $\mu \rightarrow 0$ o $\mu \rightarrow \infty$.

3.3.3 EXPANSIONES EN SERIE

Antes de proceder con la regularización dimensional de $\Sigma(p)$, es importante mostrar dos expansiones en series de Taylor [4] que serán útiles en esta tesis. En el apéndice D se presenta información importante sobre las series de Taylor.

Para un término x sin dimensiones en unidades naturales ($n = 0$), la expansión en series de Taylor de la expresión $x^{-\varepsilon/2}$ se expresa de la siguiente manera:

$$x^{-\varepsilon/2} = 1 - \frac{\varepsilon}{2} \ln(x) + \dots. \quad (3.47)$$

Por otra parte, la expansión en series de Taylor de la función $\Gamma(\varepsilon/2)$ es particularmente útil ya que permite identificar al término responsable de las divergencias ultravioletas:

$$\Gamma(\varepsilon/2) = \frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \cdots, \quad (3.48)$$

donde γ_E es la constante de *Euler-Mascheroni*, la cual es aproximadamente igual a:

$$\gamma_E \approx 0.5772 \dots$$

Con estas herramientas es posible comenzar a aplicar la regularización dimensional a la autoenergía del electrón.

3.4 REGULARIZACIÓN DIMENSIONAL DE $\Sigma(p)$

Para aplicar la regularización dimensional a $\Sigma(p)$ es necesario retomar su expresión a partir del diagrama de Feynman de la autoenergía del electrón, la cual está dada por la ecuación 1.144. Después de realizar manipulaciones algebraicas sobre esta ecuación, se obtiene la siguiente ecuación [4]:

$$i\Sigma(p) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} -\frac{e_0^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{\gamma^\alpha (\not{p} - \not{k} + m_0 \mathbb{I}) \gamma^\beta}{(p-k)^2 - m_0^2 + i\epsilon} \frac{g_{\alpha\beta}}{k^2 + i\epsilon}.$$

Con el objetivo de mostrar explícitamente las divergencias ultravioletas e infra-rojas presentes en $\Sigma(p)$, se introdujo una masa «ficticia» del fotón m_λ . Al finalizar el cálculo se evaluará el límite cuando $m_\lambda \rightarrow 0$. Para incluir la masa m_λ en la ecuación 1.144, es necesario realizar la siguiente sustitución del propagador del fotón:

$$\frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\epsilon} \longrightarrow \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 - m_\lambda^2 + i\epsilon}.$$

De esta manera, $\Sigma(p)$ se expresa como:

$$i\Sigma(p) = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0^+ \\ m_\lambda \rightarrow 0}} -\frac{e_0^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{\gamma^\alpha (\not{p} - \not{k} + m_0 \mathbb{I}) \gamma^\beta}{(p-k)^2 - m_0^2 + i\epsilon} \frac{g_{\alpha\beta}}{k^2 - m_\lambda^2 + i\epsilon}.$$

En este punto, es necesario realizar el cambio de dimensión del espacio-tiempo de $D = 4$ a $D = 4 - \varepsilon$. Para realizar este cambio de dimensiones, es necesario considerar las ecuaciones 3.36, 3.38, 3.41, 3.43 y 3.46. Tomando todo esto en cuenta, se obtiene la siguiente expresión:

$$i\Sigma^{DR}(p) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0^+ \\ m_\lambda \rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} -\mu^\varepsilon \tilde{e}_0^2 \int \frac{d^{4-\varepsilon}k}{(2\pi)^{4-\varepsilon}} \frac{\gamma^\alpha (\not{p} - \not{k} + m_0 \mathbb{I}) \gamma^\beta}{(p-k)^2 - m_0^2 + i\epsilon} \frac{g_{\alpha\beta}}{k^2 - m_\lambda^2 + i\epsilon},$$

donde el superíndice DR en $\Sigma^{DR}(p)$ indica que está por aplicarse la técnica de *regularización dimensional* a $\Sigma(p)$.

El factor $\frac{d^{4-\varepsilon}k}{(2\pi)^{4-\varepsilon}}$ proviene de la transformada de Fourier al espacio de momentos en $D = 4 - \varepsilon$ dimensiones.

Recordando la definición de un vector con *slash* dada por la ecuación 1.43 y después de contraer el producto $g_{\alpha\beta}\gamma^\alpha$ se obtiene entonces la siguiente expresión:

$$i\Sigma^{DR}(p) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0^+ \\ m_\lambda \rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} -\frac{\mu^\varepsilon \tilde{e}_0^2}{(2\pi)^{4-\varepsilon}} \int d^{4-\varepsilon}k \frac{p_\nu \gamma_\beta \gamma^\nu \gamma^\beta - k_\nu \gamma_\beta \gamma^\nu \gamma^\beta + m_0 \mathbb{I} \gamma_\beta \gamma^\beta}{[(p-k)^2 - m_0^2 + i\epsilon](k^2 - m_\lambda^2 + i\epsilon)}.$$

Ahora pueden utilizarse las identidades de las matrices γ dadas por la ecuación 3.40. Simplificando, se obtiene:

$$i\Sigma^{DR}(p) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0^+ \\ m_\lambda \rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} -\frac{\mu^\varepsilon \tilde{e}_0^2}{(2\pi)^{4-\varepsilon}} \int d^{4-\varepsilon}k \frac{m_0(4-\varepsilon)\mathbb{I} - (2-\varepsilon)(\not{p} - \not{k})}{[(p-k)^2 - m_0^2 + i\epsilon](k^2 - m_\lambda^2 + i\epsilon)}.$$

Ahora, es necesario aplicar la parametrización de Feynman (basándonos en la ecuación 3.33) para expresar al integrando de la siguiente manera:

$$\frac{m_0(4-\varepsilon)\mathbb{I} - (2-\varepsilon)(\not{p} - \not{k})}{[(p-k)^2 - m_0^2 + i\epsilon](k^2 - m_\lambda^2 + i\epsilon)} = \int_0^1 dZ \frac{m_0(4-\varepsilon)\mathbb{I} - (2-\varepsilon)(\not{p} - \not{k})}{\left\{ (k^2 - m_\lambda^2 + i\epsilon) + \{[(p-k)^2 - m_0^2 + i\epsilon] - (k^2 - m_\lambda^2 + i\epsilon)\}Z \right\}^2}.$$

Simplificando esta ecuación se obtiene:

$$\frac{m_0(4-\varepsilon)\mathbb{I} - (2-\varepsilon)(\not{p} - \not{k})}{[(p-k)^2 - m_0^2 + i\epsilon](k^2 - m_\lambda^2 + i\epsilon)} = \int_0^1 dZ \frac{m_0(4-\varepsilon)\mathbb{I} - (2-\varepsilon)(\not{p} - \not{k})}{\{k^2 - m_\lambda^2 + p^2 Z - 2pkZ - m_0^2 Z + m_\lambda^2 Z + i\epsilon\}^2}.$$

Esta expresión se puede simplificar si se suma y se resta un término $p^2 Z^2$ con el objetivo de completar el cuadrado:

$$\frac{m_0(4-\varepsilon)\mathbb{I} - (2-\varepsilon)(\not{p} - \not{k})}{[(p-k)^2 - m_0^2 + i\epsilon](k^2 - m_\lambda^2 + i\epsilon)} =$$

$$\int_0^1 dZ \frac{m_0(4-\varepsilon)\mathbb{I} - (2-\varepsilon)(\not{p} - \not{k})}{\{k^2 - m_\lambda^2 + p^2 Z - 2pkZ - m_0^2 Z + m_\lambda^2 Z + p^2 Z^2 - p^2 Z^2 + i\epsilon\}^2}.$$

Tras un poco de desarrollo algebraico se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{m_0(4-\varepsilon)\mathbb{I} - (2-\varepsilon)(\not{p} - \not{k})}{[(p-k)^2 - m_0^2 + i\epsilon](k^2 - m_\lambda^2 + i\epsilon)} =$$

$$\int_0^1 dZ \frac{m_0(4-\varepsilon)\mathbb{I} - (2-\varepsilon)(\not{p} - \not{k})}{\{(k-pZ)^2 - m_0^2 Z - m_\lambda^2(1-Z) + p^2 Z(1-Z) + i\epsilon\}^2}.$$

Sustituyendo esta versión del integrando, la expresión de $i\Sigma^{DR}(p)$ resulta en:

$$i\Sigma^{DR}(p) = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0^+ \\ m_\lambda \rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} -\frac{\mu^\varepsilon \tilde{e}_0^2}{(2\pi)^{4-\varepsilon}} \int_0^1 dZ$$

$$\times \int d^{4-\varepsilon} k \frac{m_0(4-\varepsilon)\mathbb{I} - (2-\varepsilon)(\not{p} - \not{k})}{\{(k-pZ)^2 - m_0^2 Z - m_\lambda^2(1-Z) + p^2 Z(1-Z) + i\epsilon\}^2}.$$

Para llevar a cabo la integración sobre el vector k , es más práctico realizar un cambio de variable:

$$\begin{cases} q = k - pZ, \\ d^{4-\varepsilon} q = d^{4-\varepsilon} k. \end{cases} \quad (3.49)$$

La integral sobre todo el momento k está evaluada sobre todo el espacio tiempo de Minkowski con dimensión $D = 4-\varepsilon$. Es decir, cada una de las $4-\varepsilon$ componentes de este vector son integradas desde $-\infty$ a ∞ . Por lo tanto, tras el cambio de variable a q , las componentes de este vector son evaluadas igualmente desde $-\infty$ a ∞ . Realizando este cambio de variable, la expresión de $i\Sigma^{DR}(p)$ se expresa como:

$$i\Sigma^{DR}(p) = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0^+ \\ m_\lambda \rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} -\frac{\mu^\varepsilon \tilde{e}_0^2}{(2\pi)^{4-\varepsilon}} \int_0^1 dZ$$

$$\times \int d^{4-\varepsilon} q \frac{m_0(4-\varepsilon)\mathbb{I} - (2-\varepsilon)(\not{p} - \not{q} - \not{p}Z)}{(q^2 - s + i\epsilon)^2},$$

donde se estableció que:

$$s = m_0^2 Z + m_\lambda^2 (1 - Z) - p^2 Z (1 - Z). \quad (3.50)$$

Es posible separar la integral sobre q en dos integrales de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} i\Sigma^{DR}(p) = & \lim_{\substack{m_\lambda \rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} -\frac{\mu^\varepsilon \tilde{e}_0^2}{(2\pi)^{4-\varepsilon}} \\ & \times \int_0^1 \left\{ [m_0(4-\varepsilon)\mathbb{I} - (2-\varepsilon)\not{p} + (2-\varepsilon)\not{p}Z] \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{d^{4-\varepsilon}q}{(q^2 - s + i\epsilon)^2} \right. \\ & \left. + (2-\varepsilon)\gamma_\mu \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{q^\mu d^{4-\varepsilon}q}{(q^2 - s + i\epsilon)^2} \right\} dZ. \end{aligned}$$

Se puede observar que las integrales que aparecen en este punto están dadas por la ecuación 3.45 cuando $n = 2$ y $D = 4 - \varepsilon$. Sustituyendo estas ecuaciones se obtiene:

$$\begin{aligned} i\Sigma^{DR}(p) = & \lim_{\substack{m_\lambda \rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} -\frac{\mu^\varepsilon \tilde{e}_0^2}{(2\pi)^{4-\varepsilon}} \int_0^1 \left\{ [m_0(4-\varepsilon)\mathbb{I} - (2-\varepsilon)\not{p} + (2-\varepsilon)\not{p}Z] \right. \\ & \left. \times \left[i\pi^{\frac{4-\varepsilon}{2}} (-1)^2 \frac{\Gamma(\frac{\varepsilon}{2})}{\Gamma(2)} \frac{1}{s^{\frac{\varepsilon}{2}}} \right] \right\} dZ. \end{aligned}$$

Tras manipular esta ecuación algebraicamente se obtiene la siguiente ecuación:

$$i\Sigma^{DR}(p) = \lim_{\substack{m_\lambda \rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} -\frac{i\tilde{e}_0^2}{16\pi^2} \frac{\Gamma(\frac{\varepsilon}{2})}{\Gamma(2)} \int_0^1 dZ [m_0(4-\varepsilon)\mathbb{I} - (2-\varepsilon)\not{p}(1-Z)] \left(\frac{s}{4\pi\mu^2} \right)^{-\frac{\varepsilon}{2}}.$$

El término $\frac{s}{4\pi\mu^2}$ es adimensional, ya que tanto s como μ^2 tienen unidades de masa al cuadrado. Por lo tanto, este término puede expandirse en series de la siguiente manera siguiendo la ecuación 3.47:

$$\left(\frac{s}{4\pi\mu^2} \right)^{-\frac{\varepsilon}{2}} = 1 - \frac{\varepsilon}{2} \ln \left(\frac{s}{4\pi\mu^2} \right) + \dots$$

Por otro lado, considerando las propiedades de las funciones gamma, $\Gamma(2) = 1$ y tomando en cuenta la expansión de la función gamma expresada en la ecuación 3.48,

se sustituyen ambas expresiones en serie truncadas a dos términos en la expresión de $i\Sigma^{DR}(p)$:

$$i\Sigma^{DR}(p) = \lim_{\substack{m_\lambda \rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} -\frac{i\tilde{e}_0^2}{16\pi^2} \int_0^1 [m_0(4-\varepsilon)\mathbb{I} - (2-\varepsilon)\not{p}(1-Z)] \\ \times \left[1 - \frac{\varepsilon}{2} \ln\left(\frac{s}{4\pi\mu^2}\right) + \dots \right] \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \dots \right) dZ.$$

Al realizar el producto entre las dos expansiones en series, es válido truncarlo a los primeros tres términos. Aplicando además la propiedad de los logaritmos para descomponer $\ln\left(\frac{s}{4\pi\mu^2}\right)$, se obtiene la siguiente ecuación:

$$i\Sigma^{DR}(p) = \lim_{\substack{m_\lambda \rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} -\frac{i\tilde{e}_0^2}{16\pi^2} \int_0^1 [m_0(4-\varepsilon)\mathbb{I} - (2-\varepsilon)\not{p}(1-Z)] \\ \times \left[\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln(4\pi) - \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) \right] dZ.$$

Realizando el producto del integrando, la integral se divide en 4 integrales de la siguiente manera:

$$i\Sigma^{DR}(p) = \lim_{\substack{m_\lambda \rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \frac{i\tilde{e}_0^2}{16\pi^2} \left\{ (2-\varepsilon)\not{p} \left[\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln(4\pi) \right] \int_0^1 (1-Z)dZ \right. \\ \left. - (2-\varepsilon)\not{p} \int_0^1 (1-Z) \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) - m_0(4-\varepsilon)\mathbb{I} \left[\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln(4\pi) \right] \int_0^1 dZ \right. \\ \left. + m_0(4-\varepsilon)\mathbb{I} \int_0^1 \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) dZ \right\}.$$

Resolviendo las integrales $\int_0^1 (1-Z)dZ$ y $\int_0^1 dZ$, además de simplificar la expresión de $i\tilde{e}_0^2\Sigma^{DR}(p)$ se obtiene la siguiente ecuación:

$$i\Sigma^{DR}(p) = \lim_{\substack{m_\lambda \rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \frac{i\tilde{e}_0^2}{16\pi^2} \left\{ \left[\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln(4\pi) \right] \left[\frac{(2-\varepsilon)\not{p}}{2} - m_0(4-\varepsilon)\mathbb{I} \right] \right. \\ \left. + \int_0^1 [m_0(4-\varepsilon)\mathbb{I} - (2-\varepsilon)\not{p}(1-Z)] \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) dZ \right\}.$$

Simplificando esta ecuación se obtiene:

$$i\Sigma^{DR}(p) = \lim_{\substack{m_\lambda \rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \frac{i\tilde{e}_0^2}{16\pi^2} \left\{ \left[\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln(4\pi) \right] (\not{p} - 4m_0\mathbb{I}) \right.$$

$$\begin{aligned}
& + [2 - \varepsilon\gamma_E + \varepsilon \ln(4\pi)] (m_0\mathbb{I} - \frac{\not{p}}{2}) + \int_0^1 [4m_0\mathbb{I} - 2\not{p}(1-Z)] \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) dZ \\
& - \varepsilon \int_0^1 [\not{p}(1-Z) - m_0\mathbb{I}] \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) dZ \Big\}.
\end{aligned}$$

Ahora es necesario evaluar los límites cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ y $m_\lambda \rightarrow 0$ en donde sea posible para simplificar esta ecuación. Además, es momento de retomar la expresión de s dada por la ecuación 3.50 para obtener finalmente la expresión de la autoenergía del electrón regularizada bajo el esquema de la regularización dimensional:

$$\begin{aligned}
i\Sigma^{DR}(p) &= \frac{ie_0^2}{16\pi^2} \left\{ \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\varepsilon} \right) - \gamma_E + \ln(4\pi) \right] (\not{p} - 4m_0\mathbb{I}) + (2m_0\mathbb{I} - \not{p}) \right. \\
&\quad \left. - 2 \lim_{m_\lambda \rightarrow 0} \int_0^1 [\not{p}(1-Z) - 2m_0\mathbb{I}] \ln\left(\frac{m_0^2 Z + m_\lambda^2(1-Z) - p^2 Z(1-Z)}{\mu^2}\right) dZ \right\}.
\end{aligned} \tag{3.51}$$

CAPÍTULO 4

RENORMALIZACIÓN

En este capítulo se llevará a cabo el cálculo del contratérmino de la masa bajo el esquema *On-Shell* y utilizando regularización dimensional, $\delta_m^{OS,DR}$ [4, 5, 6, 9].

En la sección 4.1 se analizan las correcciones perturbativas al propagador fermiónico libre realizadas por la autoenergía del electrón $\Sigma(p)$. Esto permite definir a un propagador «efectivo» que engloba estas correcciones a todos los órdenes perturbativos.

En la sección 4.2 se utiliza el hecho de que el polo del propagador fermiónico «efectivo» está evaluado en la masa física m_P del electrón para obtener la relación entre el contratérmino de la masa en el esquema *On-Shell* δ_m^{OS} y la autoenergía del electrón $\Sigma(p)$.

En la sección 4.3 se evalúa el contratérmino de la masa utilizando la autoenergía del electrón regularizada dimensionalmente $\Sigma^{DR}(p)$, obteniendo así el resultado final de esta tesis: $\delta_m^{OS,DR}$.

Por otro lado, en la sección 4.4 se discute sobre la forma que toma el contratérmino de la masa bajo los esquemas de renormalización MS y $\overline{MS}$.

Por último, en la sección 4.5 se discute sobre el rol del contratérmino de la masa sobre la renormalización completa de la electrodinámica, la cual está descrita

por el operador de densidad lagrangiana renormalizado.

4.1 EL PROPAGADOR EFECTIVO DEL ELECTRÓN $i\tilde{S}_F(p)$

Al momento de expandir la matriz $\hat{S}_0$ para un proceso donde existan propagadores fermiónicos (como la *dispersión de Compton* mostrada en la figura 1.5), se obtiene el siguiente propagador en el espacio de momentos a nivel árbol [4, 5, 9]:

$$i\tilde{S}_{F,0}(p) = \frac{i}{\not{p} - m_0\mathbb{I} + i\epsilon\mathbb{I}} = \alpha \longrightarrow \beta .$$

Al continuar la expansión de la matriz $\hat{S}_0$ con el siguiente orden perturbativo, se obtiene un propagador modificado por la *autoenergía del electrón*. Esto puede observarse en el ejemplo de la *Dispersión de Compton*, específicamente en la figura 1.6 (b). Se dice que el propagador fermiónico en este orden de expansión contiene *1-loop* de autoenergía:

$$\frac{i}{\not{p} - m_0\mathbb{I} + i\epsilon\mathbb{I}} [i\Sigma(p)] \frac{i}{\not{p} - m_0\mathbb{I} + i\epsilon\mathbb{I}} = \alpha \longrightarrow \text{diagrama} \longrightarrow \beta .$$

A un orden mayor de la expansión de la matriz $\hat{S}_0$ se obtiene un diagrama de Feynman con un propagador fermiónico que contiene *2-loops* de la autoenergía del electrón:

$$\frac{i}{\not{p} - m_0\mathbb{I} + i\epsilon\mathbb{I}} [i\Sigma(p)] \frac{i}{\not{p} - m_0\mathbb{I} + i\epsilon\mathbb{I}} [i\Sigma(p)] \frac{i}{\not{p} - m_0\mathbb{I} + i\epsilon\mathbb{I}} = \alpha \longrightarrow \text{diagrama} \longrightarrow \beta .$$

Y así sucesivamente. Este proceso se repite de manera infinita, agregando *1-loop* adicional de autoenergía al considerar un orden perturbativo mayor.

Al momento de calcular la amplitud de probabilidad $\langle f | \hat{S}_0 | i \rangle$ de un determinado proceso aparece su amplitud invariante $\mathcal{M}_0$ (véase la ecuación 1.140). Esta cantidad

se puede calcular al sumar las amplitudes de todos los diagramas de Feynman que surgen de la expansión.

En realidad, existe una cantidad infinita de diagramas de Feynman al expandir la matriz $\hat{S}_0$. Sin embargo, en este estudio vale la pena enfocarse únicamente en la sumatoria de los diagramas de Feynman que tienen propagadores fermiónicos. En el caso de la *Dispersión de Compton* esto se expresa de la siguiente manera:

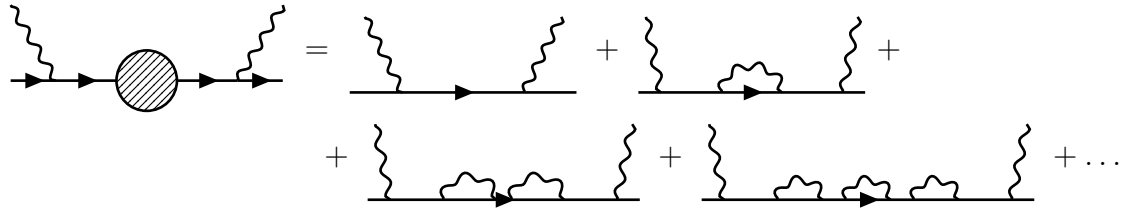


FIGURA 4.1: Diagramas de Feynman de la dispersión de Compton con propagadores modificados por la autoenergía.

En cualquier proceso de la electrodinámica cuántica que contenga a un propagador fermiónico se presenta una suma de diagramas de Feynman de este tipo.

Entonces, es válido establecer que la figura 4.2 representa a un propagador «efectivo» que considera a las correcciones de la autoenergía dentro del propagador a todos los órdenes perturbativos.

$$i\tilde{S}_F(p) = \text{Diagrama de un electrón con un bucle de autoenergía}$$

FIGURA 4.2: Propagador efectivo del electrón

Esquemáticamente, este propagador se ilustra de la siguiente manera:

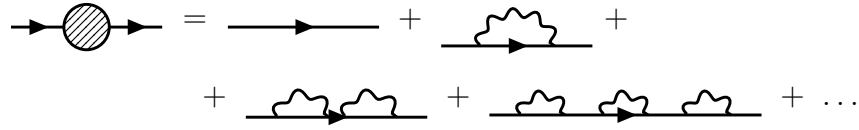


FIGURA 4.3: Propagador efectivo del electrón a todos los órdenes perturbativos. Reimpreso de Mandl, F. (2010).

Aplicando las reglas de Feynman a la figura 4.3, se obtiene que el propagador «efectivo» $\tilde{S}_F(p)$ se expresa algebraicamente de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 i\tilde{S}_F(p) &= \frac{i}{\not{p} - m_0\mathbb{I} + i\epsilon\mathbb{I}} + \frac{i}{\not{p} - m_0\mathbb{I} + i\epsilon\mathbb{I}} [i\Sigma(p)] \frac{i}{\not{p} - m_0\mathbb{I} + i\epsilon\mathbb{I}} \\
 &+ \frac{i}{\not{p} - m_0\mathbb{I} + i\epsilon\mathbb{I}} [i\Sigma(p)] \frac{i}{\not{p} - m_0\mathbb{I} + i\epsilon\mathbb{I}} [i\Sigma(p)] \frac{i}{\not{p} - m_0\mathbb{I} + i\epsilon\mathbb{I}} \\
 &+ \dots
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Ahora, es posible calcular el término $\tilde{S}_F(p)$ al comparar la ecuación 4.1 con la *serie de Neumann* dada por la ecuación 4.2:

$$\frac{1}{A - B} = \frac{1}{A} + \frac{1}{A} B \frac{1}{A} + \frac{1}{A} B \frac{1}{A} B \frac{1}{A} + \frac{1}{A} B \frac{1}{A} B \frac{1}{A} B \frac{1}{A} + \dots \tag{4.2}$$

Factorizando una unidad imaginaria común i en ambos lados de la ecuación 4.1 y estableciendo las siguientes igualdades:

$$\begin{cases} A = \not{p} - m_0\mathbb{I} + i\epsilon\mathbb{I}, \\ B = -\Sigma(p). \end{cases}$$

Es posible demostrar que el propagador «efectivo» $i\tilde{S}_F(p)$ que considera las contribuciones de la autoenergía del electrón a todos los órdenes perturbativos tiene la siguiente expresión algebraica.

$$i\tilde{S}_F(p) = \frac{i}{\not{p} - m_0\mathbb{I} + \Sigma(p) + i\epsilon\mathbb{I}} = \text{Diagrama de un electrón (línea recta con una flecha) que pasa por un círculo sombreado (representando la autoenergía total).}$$

FIGURA 4.4: Expresión algebraica del propagador efectivo del electrón

4.2 EL CONTRATÉRMINO DE LA MASA δ_m^{OS}

4.2.1 EL POLO DEL PROPAGADOR EFECTIVO $i\tilde{S}_F(p)$

El propagador efectivo del electrón ya no tiene un polo en m_0 como lo tiene el del nivel árbol [4, 6, 7].

Al considerar las contribuciones de la autoenergía del electrón al propagador fermiónico, se obtiene que el polo del propagador efectivo es desplazado por una cantidad adicional $-\Sigma(p)|_{\not{p}=m_P\mathbb{I}}$. El polo de este propagador está dado por:

$$\not{p} = m_0\mathbb{I} - \Sigma(p)|_{\not{p}=m_P\mathbb{I}},$$

donde el término $i\epsilon$ está dentro de $\Sigma(p)$, ya que la autoenergía de una partícula es un número complejo con una parte real y una imaginaria.

En general, la autoenergía $\Sigma(p)$ de las partículas tiene una parte imaginaria diferente a cero si la partícula es inestable y decae después de un cierto tiempo. Esta parte imaginaria está relacionada con la vida media de la partícula.

Experimentalmente, no se ha detectado que el electrón sea una partícula que decaiga espontáneamente. Por lo tanto, se considera que toda la parte imaginaria de $\Sigma(p)$ se anula debido a la estabilidad cinemática del electrón. Entonces, el polo de la partícula se encuentra ubicado sobre el eje real.

De acuerdo con la teoría cuántica de campos, la masa física m_P de una partícula está definida por ser la parte real del polo del propagador de dicha partícula.

Considerando esto, el polo del propagador efectivo del electrón se encuentra en:

$$\not{p} = m_0\mathbb{I} - \Sigma(p)|_{\not{p}=m_P\mathbb{I}} = m_P\mathbb{I}. \quad (4.3)$$

4.2.2 ESQUEMA DE RENORMALIZACIÓN *ON-SHELL* (*OS*)

Algunos esquemas de renormalización comunes son *On-Shell* (*OS*), sustracción mínima (*MS*) y sustracción mínima modificada ($\overline{MS}$) [6].

Para entender qué es un esquema de renormalización, es necesario diferenciar entre la masa renormalizada de una partícula m_R y la masa física de la partícula m_P .

La masa renormalizada es un constructo teórico en donde la masa desnuda m_0 es modificada por una cantidad δ_m llamada el «contratérmino de la masa». La masa renormalizada se expresa (bajo cualquier esquema de renormalización) de la siguiente manera:

$$m_R = m_0 + \delta_m. \quad (4.4)$$

La masa física m_P es aquella que se ubica en el polo del propagador efectivo (ecuación 4.3) y coincide con las mediciones experimentales de la masa de las partículas.

Cuando se utiliza la renormalización bajo esquema *On-Shell*, se define que la masa renormalizada es igual a la masa física de la partícula:

$$m_R^{OS} = m_P. \quad (4.5)$$

En otros esquemas de renormalización, la masa renormalizada m_R es diferente a la masa física de la partícula m_P . En esta tesis se calculará la masa renormalizada m_R^{OS} y se discutirá brevemente la masa renormalizada bajo los otros esquemas m_R^{MS} y $m_R^{\overline{MS}}$.

Bajo el esquema de renormalización *On-Shell*, la masa renormalizada se expresa de la siguiente manera:

$$m_R^{OS} = m_0 + \delta_m^{OS} = m_P. \quad (4.6)$$

Al comparar las ecuaciones 4.3 y 4.6 es fácil ver que el contratérmino de la masa δ_m se calcula de la siguiente manera:

$$\delta_m^{OS}\mathbb{I} = -\Sigma(p)|_{\not{p}=m_R^{OS}\mathbb{I}}. \quad (4.7)$$

La ecuación 4.7 relaciona al contratérmino de la masa con un término que ya ha sido estudiado en esta tesis, la autoenergía del electrón $\Sigma(p)$.

Para poder calcular el contratérmino de la masa δ_m^{OS} bajo el esquema *On-Shell* se utiliza la función $\Sigma(p)$ evaluada en un valor particular de p , el cual hace posible que $\not{p} = m_P\mathbb{I} = m_R^{OS}\mathbb{I}$ se cumpla. La evaluación de $\Sigma(p)$ en este valor específico de p define a esta función de manera única.

Ahora, es válido preguntarse: ¿Por qué al calcular δ_m^{OS} , la *autoenergía del electrón* debe de estar evaluada precisamente en este punto y no en otro? La razón de esto es que cuando $\Sigma(p)$ está evaluada en este punto específico, el denominador del propagador «efectivo» se anula, generando una divergencia en el propagador «efectivo». En otras palabras, el término $\Sigma(p)|_{\not{p}=m_P\mathbb{I}=m_R^{OS}\mathbb{I}}$ junto con la masa desnuda m_0 conforman el polo del propagador (revisar la ecuación (4.3)). Entonces, la definición de δ_m^{OS} bajo el esquema *On-Shell* proviene precisamente de relacionar el polo del propagador «efectivo» del electrón con la definición de la masa renormalizada dada por la ecuación (4.6). La evaluación de $\Sigma(p)$ en cualquier otro valor de p representaría a un electrón que se mueve fuera de la «capa de masa», lo cual significaría que ya no se está utilizando el esquema de renormalización *On-Shell*.

En la ecuación 4.7, el término $\Sigma(p)$ representa a la sumatoria de los diagramas de Feynman de autoenergía a todos los órdenes perturbativos. Conforme aumentan los órdenes perturbativos, aumentan los *loops* en los diagramas de Feynman. Entonces, $\Sigma(p)$ en la ecuación 4.7 está dada en realidad de la siguiente manera:

$$\Sigma(p) = \Sigma^{1-loop}(p) + \Sigma^{2-loops}(p) + \dots. \quad (4.8)$$

En la presente tesis se calcula el contratérmino $\delta_m^{OS,DR}$ a *1-loop* (de orden e_0^2).

Por lo tanto, se trunca $\Sigma(p)$ de la siguiente manera:

$$\Sigma(p) \approx \Sigma^{1-loop}(p). \quad (4.9)$$

A partir de este punto, la autoenergía a *1-loop* (de orden e_0^2) puede calcularse utilizando cualquier esquema de regularización. En esta tesis se emplea exclusivamente regularización dimensional.

La autoenergía del electrón bajo el esquema de la regularización dimensional $\Sigma^{DR}(p)$ está dada por la ecuación 3.51. Basta entonces con utilizar esta ecuación evaluada en $\not{p} = m_R^{OS}\mathbb{I}$ para obtener el resultado final de esta tesis: $\delta_m^{OS,DR}$.

4.3 RENORMALIZACIÓN DE LA MASA

El contratérmino de la masa bajo el esquema de renormalización *On-Shell* y utilizando la técnica de regularización dimensional se calcula de la siguiente manera [5, 6]:

$$\delta_m^{OS,DR}\mathbb{I} = -\Sigma^{DR}(p)|_{\not{p}=m_R^{OS}\mathbb{I}}. \quad (4.10)$$

Sustituyendo $\Sigma^{DR}(p)$ dado por la ecuación 3.51, el contratérmino 4.10 se expresa como:

$$\begin{aligned} \delta_m^{OS,DR}\mathbb{I} = & -\frac{e_0^2}{16\pi^2} \left\{ \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\varepsilon} \right) - \gamma_E + \ln(4\pi) \right] (\not{p} - 4m_0\mathbb{I}) + (2m_0\mathbb{I} - \not{p}) \right. \\ & \left. - 2 \lim_{m_\lambda \rightarrow 0} \int_0^1 [\not{p}(1-Z) - 2m_0\mathbb{I}] \ln \left(\frac{m_0^2 Z + m_\lambda^2 (1-Z) - p^2 Z(1-Z)}{\mu^2} \right) dZ \right\} \Big|_{\not{p}=m_R^{OS}\mathbb{I}}. \end{aligned}$$

Además de realizar la evaluación $\not{p} = m_R^{OS}\mathbb{I}$, es necesario realizar la siguiente sustitución de acuerdo con la ecuación 4.6:

$$m_0 = m_R^{OS} - \delta_m^{OS,DR}.$$

Tras sustituir y realizar simplificación algebraica se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \delta_m^{OS,DR} \mathbb{I} = & -\frac{e_0^2}{16\pi^2} \left\{ (-3m_R^{OS}) \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\varepsilon} \right) - \gamma_E + \ln(4\pi) \right] \mathbb{I} + m_R^{OS} \mathbb{I} \right. \\ & \left. + 2m_R^{OS} \lim_{m_\lambda \rightarrow 0} \int_0^1 dZ (Z + 1) \right. \\ & \times \ln \left[\frac{(m_R^{OS})^2 - p^2 Z(1 - Z) + m_\lambda^2(1 - Z) - 2m_R^{OS} \delta_m^{OS,DR} Z + (\delta_m^{OS,DR})^2 Z}{\mu^2} \right] \mathbb{I} \\ & + 4\delta_m^{OS,DR} \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\varepsilon} \right) - \gamma_E + \ln(4\pi) \right] \mathbb{I} - 2\delta_m^{OS,DR} \mathbb{I} - 4\delta_m^{OS,DR} \lim_{m_\lambda \rightarrow 0} \int_0^1 dZ \\ & \left. \times \ln \left[\frac{(m_R^{OS})^2 - p^2 Z(1 - Z) + m_\lambda^2(1 - Z) - 2m_R^{OS} \delta_m^{OS,DR} Z + (\delta_m^{OS,DR})^2 Z}{\mu^2} \right] \mathbb{I} \right\}. \end{aligned}$$

También es necesario considerar que $p^2 = m_P^2 = (m_R^{OS})^2$ de acuerdo con las ecuaciones 1.104 y 4.6. Teniendo esto en cuenta, el cálculo se simplifica de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \delta_m^{OS,DR} \mathbb{I} = & -\frac{e_0^2}{16\pi^2} \left\{ (-3m_R^{OS}) \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\varepsilon} \right) - \gamma_E + \ln(4\pi) \right] + m_R^{OS} \right. \\ & \left. + 2m_R^{OS} \lim_{m_\lambda \rightarrow 0} \int_0^1 dZ (Z + 1) \right. \\ & \times \ln \left[\frac{(m_R^{OS})^2 Z^2 + m_\lambda^2(1 - Z) - 2m_R^{OS} \delta_m^{OS,DR} Z + (\delta_m^{OS,DR})^2 Z}{\mu^2} \right] \\ & + 4\delta_m^{OS,DR} \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\varepsilon} \right) - \gamma_E + \ln(4\pi) \right] - 2\delta_m^{OS,DR} - 4\delta_m^{OS,DR} \lim_{m_\lambda \rightarrow 0} \int_0^1 dZ \\ & \left. \times \ln \left[\frac{(m_R^{OS})^2 Z^2 + m_\lambda^2(1 - Z) - 2m_R^{OS} \delta_m^{OS,DR} Z + (\delta_m^{OS,DR})^2 Z}{\mu^2} \right] \right\} \mathbb{I}. \end{aligned}$$

Hasta el momento, parece haber un problema al calcular $\delta_m^{OS,DR}$, ya que la ecuación que permite calcularlo es trascendente.

Esto se soluciona al analizar la expansión en serie del término logarítmico. A continuación se analizará únicamente este término y al finalizar se continuará con el cálculo de $\delta_m^{OS,DR}$.

Mediante una manipulación algebraica se obtiene la siguiente igualdad:

$$\ln \left[\frac{(m_R^{OS})^2 Z^2 + m_\lambda^2(1 - Z) - 2m_R^{OS} \delta_m^{OS,DR} Z + (\delta_m^{OS,DR})^2 Z}{\mu^2} \right] = \quad (4.11)$$

$$\ln \left[\frac{(m_R^{OS})^2 Z^2 + m_\lambda^2 (1 - Z)}{\mu^2} \right] + \ln \left[1 + \frac{-2m_R^{OS} \delta_m^{OS,DR} Z + (\delta_m^{OS,DR})^2 Z}{(m_R^{OS})^2 Z^2 + m_\lambda^2 (1 - Z)} \right].$$

Ahora si se establece que

$$x = \frac{-2m_R^{OS} \delta_m^{OS,DR} Z + (\delta_m^{OS,DR})^2 Z}{(m_R^{OS})^2 Z^2 + m_\lambda^2 (1 - Z)} = \left[\frac{-2m_R^{OS} + \delta_m^{OS,DR}}{(m_R^{OS})^2 Z^2 + m_\lambda^2 (1 - Z)} \right] \delta_m^{OS,DR} Z.$$

Entonces el último término de la ecuación 4.11 toma la forma de la siguiente expansión en series [22]:

$$\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots \quad (4.12)$$

La ecuación 4.11 toma entonces la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & \ln \left[\frac{(m_R^{OS})^2 Z^2 + m_\lambda^2 (1 - Z) - 2m_R^{OS} \delta_m^{OS,DR} Z + (\delta_m^{OS,DR})^2 Z}{\mu^2} \right] = \\ & \ln \left[\frac{(m_R^{OS})^2 Z^2 + m_\lambda^2 (1 - Z)}{\mu^2} \right] + \left[\frac{-2m_R^{OS} + \delta_m^{OS,DR}}{(m_R^{OS})^2 Z^2 + m_\lambda^2 (1 - Z)} \right] \delta_m^{OS,DR} Z \\ & - \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{-2m_R^{OS} + \delta_m^{OS,DR}}{(m_R^{OS})^2 Z^2 + m_\lambda^2 (1 - Z)} \right] \delta_m^{OS,DR} Z \right\}^2 + \dots \end{aligned}$$

Esta expansión en serie está expresada respecto a e_0^2 , ya que $\delta_m^{OS,DR} \propto e_0^2$. Entonces, el término logarítmico se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & \ln \left[\frac{(m_R^{OS})^2 Z^2 + m_\lambda^2 (1 - Z) - 2m_R^{OS} \delta_m^{OS,DR} Z + (\delta_m^{OS,DR})^2 Z}{\mu^2} \right] = \\ & \ln \left[\frac{(m_R^{OS})^2 Z^2 + m_\lambda^2 (1 - Z)}{\mu^2} \right] + \mathcal{O}(e_0^2). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Sustituyendo la ecuación 4.13 en el cálculo de $\delta_m^{OS,DR}$ se obtiene la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \delta_m^{OS,DR} \mathbb{I} = & -\frac{e_0^2}{16\pi^2} \left\{ (-3m_R^{OS}) \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\varepsilon} \right) - \gamma_E + \ln(4\pi) \right] + m_R^{OS} \right. \\ & + 2m_R^{OS} \lim_{m_\lambda \rightarrow 0} \int_0^1 (Z + 1) \left[\ln \left(\frac{(m_R^{OS})^2 Z^2 + m_\lambda^2 (1 - Z)}{\mu^2} \right) + \mathcal{O}_1(e_0^2) \right] dZ \\ & \left. + 4\delta_m^{OS,DR} \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\varepsilon} \right) - \gamma_E + \ln(4\pi) \right] - 2\delta_m^{OS,DR} \right\} \end{aligned}$$

$$-4\delta_m^{OS,DR} \lim_{m_\lambda \rightarrow 0} \int_0^1 \left[\ln \left(\frac{(m_R^{OS})^2 Z^2 + m_\lambda^2 (1-Z)}{\mu^2} \right) + \mathcal{O}_2(e_0^2) \right] dZ \Big\} \mathbb{I}.$$

Simplificando, se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \delta_m^{OS,DR} \mathbb{I} = & -\frac{e_0^2}{16\pi^2} \left\{ (-3m_R^{OS}) \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\varepsilon} \right) - \gamma_E + \ln(4\pi) \right] + m_R^{OS} \right. \\ & \left. + 2m_R^{OS} \lim_{m_\lambda \rightarrow 0} \int_0^1 (Z+1) \ln \left[\frac{(m_R^{OS})^2 Z^2 + m_\lambda^2 (1-Z)}{\mu^2} \right] dZ \right\} \mathbb{I} + \mathcal{O}(e_0^4) \mathbb{I}. \end{aligned}$$

Debido a que $\delta_m^{OS,DR}$ es un cálculo perturbativo de orden e_0^2 , los términos de orden perturbativo mayor como $\mathcal{O}(e_0^4)$ no contribuyen a esta expresión. Entonces, el contratérmino de la masa adopta la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \delta_m^{OS,DR} \mathbb{I} = & -\frac{e_0^2}{16\pi^2} \left\{ (-3m_R^{OS}) \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\varepsilon} \right) - \gamma_E + \ln(4\pi) \right] + m_R^{OS} \right. \\ & \left. + 2m_R^{OS} \lim_{m_\lambda \rightarrow 0} \int_0^1 (Z+1) \ln \left[\frac{(m_R^{OS})^2 Z^2 + m_\lambda^2 (1-Z)}{\mu^2} \right] dZ \right\} \mathbb{I}. \end{aligned}$$

La integral puede resolverse mediante las técnicas convencionales del cálculo integral. El resultado de esta integral es:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (Z+1) \ln \left[\frac{(m_R^{OS})^2 Z^2 + m_\lambda^2 (1-Z)}{\mu^2} \right] dZ = & 3 \ln \left(\frac{m_R^{OS}}{\mu} \right) - \frac{5}{2} - \frac{m_\lambda^2}{2(m_R^{OS})^2} \quad (4.14) \\ & + \frac{m_\lambda^4}{2(m_R^{OS})^4} \ln \left(\frac{m_\lambda}{m_R^{OS}} \right) - \frac{m_\lambda}{m_R^{OS,DR}} \left[\frac{(m_\lambda)^2}{(m_R^{OS})^2} + 2 \right] \sqrt{1 - \frac{m_\lambda^2}{4(m_R^{OS})^2}} \\ & \times \left[\arctan \left(\frac{-m_\lambda}{2m_R^{OS,DR} \sqrt{1 - \frac{m_\lambda^2}{4(m_R^{OS})^2}}} \right) - \arctan \left(\frac{\left(\frac{m_R^{OS,DR}}{m_\lambda} - \frac{m_\lambda}{2m_R^{OS,DR}} \right)}{\sqrt{1 - \frac{m_\lambda^2}{4(m_R^{OS})^2}}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Evaluando el límite de esta integral cuando $m_\lambda \rightarrow 0$, se obtiene:

$$\lim_{m_\lambda \rightarrow 0} \int_0^1 (Z+1) \ln \left[\frac{(m_R^{OS})^2 Z^2 + m_\lambda^2 (1-Z)}{\mu^2} \right] dZ = 3 \ln \left(\frac{m_R^{OS}}{\mu} \right) - \frac{5}{2}. \quad (4.15)$$

Sustituyendo la ecuación 4.15 en la ecuación de $\delta_m^{OS,DR}$ y realizando simplificaciones algebraicas, se obtiene el resultado del contratérmino de la masa.

$$\delta_m^{OS,DR} \mathbb{I} = \frac{3e_0^2 m_R^{OS}}{16\pi^2} \left\{ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\varepsilon} \right) - \gamma_E + \ln(4\pi) + \ln \left[\frac{\mu^2}{(m_R^{OS})^2} \right] + \frac{4}{3} \right\} \mathbb{I}. \quad (4.16)$$

En la teoría completamente renormalizada de la electrodinámica cuántica, se realizar una expansión perturbativa expresada en potencias de la carga renormalizada e_R^{OS} , no respecto a la carga desnuda e_0 como se ha llevado a cabo hasta el momento.

Con el fin de reportar el resultado del contratérmino de la masa tal como aparece en la literatura estándar, el contratérmino de la masa se expresa de la siguiente manera:

$$\delta_m^{OS,DR} = \frac{3(e_R^{OS})^2 m_R^{OS}}{16\pi^2} \left\{ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\varepsilon} \right) - \gamma_E + \ln(4\pi) + \ln \left[\frac{\mu^2}{(m_R^{OS})^2} \right] + \frac{4}{3} \right\}. \quad (4.17)$$

Es común que los contratérminos se expresen en términos de la constante de estructura fina α_R^{OS} , no de la carga renormalizada $(e_R^{OS})^2$. Utilizando la ecuación 1.129 en la ecuación 4.17 se obtiene el siguiente resultado:

$$\delta_m^{OS,DR} = \frac{3\alpha_R^{OS} m_R^{OS}}{4\pi} \left\{ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\varepsilon} \right) - \gamma_E + \ln(4\pi) + \ln \left[\frac{\mu^2}{(m_R^{OS})^2} \right] + \frac{4}{3} \right\}. \quad (4.18)$$

En la electrodinámica cuántica suele definirse una constante de escala $\tilde{\mu}$ modificada:

$$\tilde{\mu}^2 = 4\pi e^{-\gamma_E} \mu^2. \quad (4.19)$$

Utilizando la ecuación 4.19 en la ecuación 4.18, se obtiene la siguiente expresión de $\delta_m^{OS,DR}$:

$$\delta_m^{OS,DR} = \frac{3\alpha_R^{OS} m_R^{OS}}{4\pi} \left\{ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\varepsilon} \right) + \ln \left[\frac{\tilde{\mu}^2}{(m_R^{OS})^2} \right] + \frac{4}{3} \right\}. \quad (4.20)$$

Utilizando las ecuaciones 4.6 y 4.20 se obtiene el resultado final de esta tesis: la masa renormalizada bajo el esquema *On-Shell*.

$$\boxed{m_R^{OS} = m_0 + \frac{3\alpha_R^{OS} m_R^{OS}}{4\pi} \left\{ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\varepsilon} \right) + \ln \left[\frac{\tilde{\mu}^2}{(m_R^{OS})^2} \right] + \frac{4}{3} \right\}} \quad (4.21)$$

4.3.1 VALIDEZ DEL RESULTADO $\delta_m^{OS,DR}$

Vale la pena confirmar que el resultado de esta tesis sea consistente con lo que se ha reportado en la literatura.

Los resultados equivalentes de $\delta_m^{OS,DR}$ dados por las ecuaciones 4.17, 4.18 y 4.20 han sido ya calculados y reportados. La tabla 4.1 muestra los resultados de $\delta_m^{OS,DR}$ encontrados en la literatura.

TABLA 4.1: Resultados de $\delta_m^{OS,DR}$ en la literatura

Referencia	Convención de D	Resultado
Michael I. Eides (2023) [23]	$D = 4 - \varepsilon$	$\delta_m^{OS,DR} = \frac{3\alpha_R^{OS} m_R^{OS}}{4\pi} \left\{ \frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln(4\pi) + \ln \left[\frac{\mu^2}{(m_R^{OS})^2} \right] + \frac{4}{3} \right\}$
Howard E. Haber (2010) [24]	$D = 4 - 2\varepsilon$	$\delta Z_m^{OS} = -\frac{\delta_m^{OS,DR}}{m_R^{OS}} = -\frac{3\alpha_R^{OS}}{4\pi} \left\{ (4\pi)^\varepsilon \Gamma(\varepsilon) + \frac{4}{3} + \ln \left[\frac{\mu^2}{(m_R^{OS})^2} \right] \right\}$
Stephen G. Naculich (2017) [25]	$D = 4 - 2\varepsilon$	$\delta_m^{OS,DR} = \frac{3m_R^{OS} (e_R^{OS})^2}{(4\pi)^2} \left[\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{(m_R^{OS})^2} \right) + \frac{4}{3} \right]$
Jorge Crispim Romão (2024) [26]	$D = 4 - \varepsilon$	$\delta_m^{OS,DR} = \frac{3\alpha_R^{OS} m_R^{OS}}{4\pi} \left\{ \frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln(4\pi) - \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \int_0^1 dx (1+x) \ln \left(\frac{(m_R^{OS})^2 x^2}{\mu^2} \right) \right\}$
Matthew D. Schwartz (2014) [6, 27]	$D = 4 - \varepsilon$	$\delta Z_m^{OS} = -\frac{\delta_m^{OS,DR}}{m_R^{OS}} = \frac{\alpha_R^{OS}}{2\pi} \left\{ -\frac{3}{\varepsilon} - \frac{3}{2} \ln \left(\frac{\mu^2}{(m_R^{OS})^2} \right) - 2 \right\}$

Todos los resultados mostrados en la tabla 4.1 coinciden con el calculado en esta tesis.

4.4 OTROS ESQUEMAS DE RENORMALIZACIÓN

El resultado de la ecuación 4.18 fue obtenido al imponer las condiciones dadas por el esquema de renormalización *On-Shell*.

En los cálculos, es frecuente el uso de otros dos esquemas: de sustracción mínima *MS* y de sustracción mínima modificada $\overline{MS}$ [6].

4.4.1 ESQUEMA DE RENORMALIZACIÓN MS

En este esquema de renormalización, el contratérmino de la masa consiste en únicamente el término divergente en la ecuación 4.18 [6]. Es decir,

$$\delta_m^{MS,DR} = \frac{3\alpha_R^{MS} m_R^{MS}}{4\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\varepsilon} \right). \quad (4.22)$$

La masa renormalizada bajo este esquema está dada de la siguiente manera:

$$m_R^{MS} = m_0 + \frac{3\alpha_R^{MS} m_R^{MS}}{4\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\varepsilon} \right). \quad (4.23)$$

Esta masa renormalizada es evidentemente diferente a la masa física m_P dada por la ecuación 4.21.

4.4.2 ESQUEMA DE RENORMALIZACIÓN $\overline{MS}$

En este esquema de renormalización, se considera tanto el término divergente en la ecuación 4.18 como también los términos finitos γ_E y $\ln(4\pi)$ [6]. El contratérmino de la masa bajo este esquema es representado de la siguiente manera:

$$\delta_m^{\overline{MS},DR} = \frac{3\alpha_R^{\overline{MS}} m_R^{\overline{MS}}}{4\pi} \left\{ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\varepsilon} \right) - \gamma_E + \ln(4\pi) \right\}. \quad (4.24)$$

Y la masa renormalizada bajo este esquema se expresa de la siguiente forma:

$$m_R^{\overline{MS}} = m_0 + \frac{3\alpha_R^{\overline{MS}} m_R^{\overline{MS}}}{4\pi} \left\{ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\varepsilon} \right) - \gamma_E + \ln(4\pi) \right\}. \quad (4.25)$$

Evidentemente, la masa renormalizada bajo este esquema $m_R^{\overline{MS}}$ es también diferente a la masa física del electrón m_P dada por la ecuación 4.21.

4.5 MODIFICACIÓN DEL OPERADOR DE DENSIDAD LAGRANGIANA

En la electrodinámica cuántica, el operador de la densidad lagrangiana $\hat{\mathcal{L}}$ (ecuación 1.105) está en principio expresado por cantidades desnudas [4]:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}} = \mathcal{N} \Big\{ & \hat{\psi}_0(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_0 \mathbb{I}) \hat{\psi}_0(x) - \frac{1}{2} \left[\partial_\nu \hat{A}_{0,\mu}(x) \right] \left[\partial^\nu \hat{A}_0^\mu(x) \right] \\ & + e_0 \hat{\psi}_0(x) \hat{A}_0(x) \hat{\psi}_0(x) \Big\}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

En la renormalización, las cantidades desnudas son redefinidas o «renormalizadas». En la tabla 4.2 se muestran las cantidades renormalizadas en el operador de densidad lagrangiana de la electrodinámica cuántica [6].

TABLA 4.2: Cantidades renormalizadas en la electrodinámica cuántica

Cantidad desnuda	Cantidad renormalizada
$\hat{\psi}_0(x)$	$\hat{\psi}_0(x) = \sqrt{Z_2} \hat{\psi}_R(x)$
$\hat{A}_{0,\mu}(x)$	$\hat{A}_{0,\mu}(x) = \sqrt{Z_3} \hat{A}_{R,\mu}(x)$
m_0	$m_0 = Z_m m_R$
e_0	$e_0 = Z_e e_R$

En la tabla 4.2, los coeficientes Z_2 , Z_3 , Z_m y Z_e son los encargados de renormalizar a las cantidades de la electrodinámica cuántica a todos los ordenes perturbativos respecto a e_R .

Realizando las sustituciones dadas por la tabla 4.2 en el operador de densidad lagrangiana de la electrodinámica cuántica (ecuación 4.26), se obtiene la siguiente expresión [4, 5, 6]:

$$\hat{\mathcal{L}} = \mathcal{N} \left\{ Z_2 \hat{\bar{\psi}}_R(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - Z_m m_R \mathbb{I}) \hat{\psi}_R(x) - \frac{1}{2} Z_3 \left[\partial_\nu \hat{A}_{R,\mu}(x) \right] \left[\partial^\nu \hat{A}_R^\mu(x) \right] \right\} \quad (4.27)$$

$$+Z_1 e_R \hat{\bar{\psi}}_R(x) \hat{A}_R(x) \hat{\psi}_R(x) \Big\},$$

donde se definió:

$$Z_1 = Z_e Z_2 \sqrt{Z_3}. \quad (4.28)$$

A nivel árbol, las cantidades desnudas son iguales a las renormalizadas. Conforme se consideran expansiones a ordenes altos de e_R empiezan a surgir las desviaciones de las cantidades desnudas. Los coeficientes de renormalización Z_1 , Z_2 , Z_3 , Z_e y Z_m pueden ser expresados como una expansión en series de la siguiente manera:

$$Z_1 = 1 + \delta Z_1, \quad (4.29a)$$

$$Z_2 = 1 + \delta Z_2, \quad (4.29b)$$

$$Z_3 = 1 + \delta Z_3, \quad (4.29c)$$

$$Z_e = 1 + \delta Z_e, \quad (4.29d)$$

$$Z_m = 1 + \delta Z_m. \quad (4.29e)$$

Los «contratérminos» $\delta Z_1, \delta Z_2, \delta Z_3$, δZ_e y δZ_m son expansiones en serie que empiezan en el orden perturbativo e_R^2 .

En la ecuación 4.28, cada coeficiente puede expandirse en series. Apoyándose en las ecuaciones 4.29 y en la ecuación D.6 se obtiene el siguiente resultado para δZ_e :

$$\delta Z_e = \delta Z_1 - \delta Z_2 - \frac{1}{2} \delta Z_3 + \mathcal{O}(e_R^4). \quad (4.30)$$

En este estudio, se analizan las correcciones hasta el orden perturbativo de 1 *loop*. Por lo tanto, de aquí en adelante se trunca a cada uno de los contratérminos $\delta Z_1, \delta Z_2, \delta Z_3$, δZ_e y δZ_m para que sean estrictamente de orden e_R^2 .

Sustituyendo las expansiones dadas por las ecuaciones 4.29 en el operador de densidad lagrangiana dado por la ecuación 4.27, se obtiene la siguiente ecuación de

la densidad lagrangiana truncada a *1-loop* (se omiten los términos de orden e_R^4 o mayor):

$$\hat{\mathcal{L}}^{1-loop} = \hat{\mathcal{L}}_{QED,R} + \hat{\mathcal{L}}_{ct}^{1-loop}, \quad (4.31)$$

donde:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}}_{QED,R} = \mathcal{N} \left\{ \hat{\psi}_R(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_R \mathbb{I}) \hat{\psi}_R(x) - \frac{1}{2} \left[\partial_\nu \hat{A}_{R,\mu}(x) \right] \left[\partial^\nu \hat{A}_R^\mu(x) \right] \right. \\ \left. + e_R \hat{\psi}_R(x) \hat{A}_R(x) \hat{\psi}_R(x) \right\}, \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}}_{ct}^{1-loop} = \mathcal{N} \left\{ -\frac{1}{2} \delta Z_3 \left[\partial_\nu \hat{A}_{R,\mu}(x) \right] \left[\partial^\nu \hat{A}_R^\mu(x) \right] + i \delta Z_2 \hat{\bar{\psi}}_R(x) \gamma^\mu \partial_\mu \hat{\psi}_R(x) \right. \\ \left. - (\delta Z_m + \delta Z_2) m_R \hat{\bar{\psi}}_R(x) \mathbb{I} \hat{\psi}_R(x) + e_R \delta Z_1 \hat{\bar{\psi}}_R(x) \hat{A}_R(x) \hat{\psi}_R(x) \right\}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Se observa que el término $\hat{\mathcal{L}}_{QED,R}$ es casi igual a la ecuación 4.26 con la única diferencia de que éste está expresado en término de las cantidades renormalizadas.

Por otra parte, el término $\hat{\mathcal{L}}_{ct}^{1-loop}$ contiene a todos los contratérminos de la electrodinámica cuántica. Cada uno de estos contratérminos es divergente. Estos términos se encargan de cancelar las divergencias que surgen de las correcciones radiativas al expandir la matriz $\hat{S}$ con la nueva densidad hamiltoniana de interacción:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_{I,R} = \mathcal{N} \left\{ -e_R \hat{\bar{\psi}}_R(x) \hat{A}_R(x) \hat{\psi}_R(x) + \frac{1}{2} \delta Z_3 \left[\partial_\nu \hat{A}_{R,\mu}(x) \right] \left[\partial^\nu \hat{A}_R^\mu(x) \right] \right. \\ \left. - i \delta Z_2 \hat{\bar{\psi}}_R(x) \gamma^\mu \partial_\mu \hat{\psi}_R(x) + (\delta Z_m + \delta Z_2) m_R \hat{\bar{\psi}}_R(x) \mathbb{I} \hat{\psi}_R(x) - e_R \delta Z_1 \hat{\bar{\psi}}_R(x) \hat{A}_R(x) \hat{\psi}_R(x) \right\}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

En la electrodinámica cuántica existe una identidad llamada «Identidad de Ward» que relaciona a los coeficientes de renormalización Z_1 y Z_2 :

$$Z_1 = Z_2. \quad (4.35)$$

Esta ecuación es válida a todos los órdenes perturbativos. Esta identidad lleva a la siguiente igualdad de contratérminos:

$$\delta Z_1 = \delta Z_2. \quad (4.36)$$

Habiendo establecido todos los contratérminos de la electrodinámica cuántica, vale la pena analizar la renormalización de la masa bajo estas definiciones.

La masa desnuda se renormaliza de la siguiente manera:

$$m_0 = Z_m m_R. \quad (4.37)$$

Retomando la ecuación 4.29e, se obtiene la siguiente relación entre la masa desnuda y la renormalizada:

$$m_0 = m_R + m_R \delta Z_m. \quad (4.38)$$

Comparando la ecuación 4.38 con la ecuación 4.4, se obtiene que:

$$\delta Z_m = -\frac{\delta_m}{m_R}. \quad (4.39)$$

En una amplia variedad de literatura de la electrodinámica cuántica se utiliza el contratérmino de la masa δZ_m en lugar del calculado en esta tesis δ_m .

Tanto la ecuación 4.37 como la ecuación 4.39 es válida para cualquier esquema de renormalización (*On-Shell*, *MS* y $\overline{MS}$).

La renormalización de la masa consistió entonces en la modificación de la masa desnuda del electrón m_0 a través de un contratérmino de la masa. Naturalmente, tanto la masa desnuda m_0 como el contratérmino de la masa (δ_m o δZ_m) son divergentes. Sin embargo, se combinan de tal manera que los términos que causan las divergencias en cada uno de ellos se cancelan entre sí; logrando que la masa renormalizada m_R sea finita, y que en el caso del uso del esquema *On-Shell* sea también igual a la masa física del electrón m_P .

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

En los capítulos anteriores, se han demostrado tanto los fundamentos teóricos de la electrodinámica cuántica como el desarrollo paso a paso para poder calcular el contratérmino de la masa bajo el esquema *On-Shell* y utilizando la técnica de regularización dimensional: $\delta_m^{OS,DR}$.

La necesidad de realizar este cálculo radica en que el uso de las cantidades desnudas en los cálculos perturbativos de la electrodinámica cuántica lleva a divergencias. Estas divergencias fueron la principal causa de que los inicios de la electrodinámica cuántica fueran tan complicados. Es evidente que una teoría que produce predicciones infinitas de mediciones experimentales tiene un grave problema.

La solución de estas divergencias en la electrodinámica cuántica es la renormalización. La renormalización estableció que para obtener resultados finitos, es necesario redefinir a los operadores de campos libres $\hat{A}_0$ y $\hat{\psi}_0$ junto con sus cantidades desnudas: m_0 y q_0 .

Todas estas cantidades son redefinidas a través de «contratérminos», los cuales son correcciones divergentes a las cantidades desnudas. Las cantidades desnudas m_0 y q_0 son también divergentes.

Las cantidades desnudas y los contratérminos cancelan sus divergencias entre

sí y dan como resultado una cantidad finita que se considera está ahora «renormalizada». Al realizar cálculos con cantidades «renormalizadas» se obtienen resultados finitos. Las cantidades desnudas m_0 y q_0 de las partículas están asociadas con sus campos libres, los cuales se encuentran «aislados» y no tienen ninguna interacción entre sí. Al momento de juntar dos o más campos libres es posible la existencia de interacciones entre campos, los cuales son descritos por la densidad lagrangiana de interacción $\hat{\mathcal{L}}_{I_0}$. Es mediante estas interacciones que ha sido posible calcular cantidades observables en experimentos como las *cross sections* o los anchos de decaimiento.

De acuerdo con la renormalización, cuando un campo interactúa con otros, las propiedades de sus partículas cambian. Es decir, las partículas ya no tienen una masa m_0 o carga eléctrica q_0 , sino que ahora tienen una masa m_R y carga eléctrica e_R , las cuales son ambas finitas. La transición de una partícula con cantidades «desnudas» a una partícula «renormalizada» es establecida por las interacciones entre el campo electromagnético y los campos fermiónicos.

La teoría de la renormalización completa de la electrodinámica cuántica contiene a 4 contratérminos distintos. En esta tesis se ha analizado a detalle únicamente el contratérmino de la masa δ_m truncado a 1 *loop*. Si bien es posible el cálculo de δ_m a órdenes perturbativos mayores, se le ha dado preferencia a una explicación didáctica del cálculo sobre la complejidad computacional que ofrecen cálculos a más de 1 *loop*.

Al momento de calcular la expresión algebraica de δ_m nos encontramos que no existe una única forma de calcularlo, ya que deben de hacerse dos elecciones para poder calcular su forma algebraica: la elección del esquema de *regularización* y la elección del esquema de *renormalización*.

En esta tesis se escogió a la regularización dimensional (*DR*) como esquema de regularización debido a que su aplicación da como resultado cantidades que son invariantes de gauge y de Lorentz, además de ser el esquema que ofrece mayor facilidad computacional a órdenes perturbativos altos.

Además, se eligió el uso del esquema de regularización *On-Shell*. Si bien otros esquemas de renormalización como el MS o $\overline{MS}$ permiten una mayor facilidad computacional al realizar cálculos a órdenes perturbativos altos, en esta tesis se le ha dado preferencia a obtener las condiciones de renormalización de manera más intuitiva físicamente, lo cual es posible únicamente bajo el esquema *On-Shell*.

En el esquema *On-Shell* se ha aprovechado el hecho de que el polo del propagador efectivo del electrón es la masa física del electrón m_P para poder calcular el contratérmino de la masa $\delta_m^{OS,DR}$. Por definición, se establece que la masa renormalizada bajo este esquema m_R^{OS} es igual a la masa física del electrón m_P .

En este esquema se observó cómo al hacer la expansión perturbativa de procesos de la electrodinámica cuántica, la autoenergía del electrón $\Sigma(p)$ corrige al propagador fermiónico libre. Al calcularse el propagador fermiónico «efectivo» es evidente un corrimiento del polo respecto al del propagador fermiónico libre. Este corrimiento del polo es divergente y quiere decir que la masa del propagador fermiónico «efectivo» m_P ya no es más la masa del propagador fermiónico libre m_0 , sino que se encuentra desplazada por una cantidad $\Sigma(p)|_{\not{p}=m_P\mathbb{I}}$.

Físicamente, esto se ve como un electrón, el cual al tener la capacidad de interactuar con el campo electromagnético, es rodeado por una «nube» de fotones virtuales, descritos matemáticamente por el *loop* fotónico en $\Sigma(p)$. Las interacciones entre el electrón y esta nube de fotones virtuales cambian ambas propiedades del electrón: su masa y su carga eléctrica.

El resultado principal de esta tesis fue obtener ese corrimiento divergente de la masa desnuda del electrón simbolizado por $\delta_m^{OS,DR}$. Este resultado está dado por la ecuación (4.20) y coincide exactamente con resultados reportados en la literatura estándar de la electrodinámica cuántica y artículos científicos reportados en la tabla 4.1.

Si bien este resultado ha sido ampliamente estudiado y validado a lo largo de los

años, los principios bajo los que se ha calculado $\delta_m^{OS,DR}$ (regularización dimensional y condiciones de renormalización *On-Shell*) siguen siendo ampliamente utilizados bajo dos enfoques distintos:

- Calcular el contratérmino δ_m^{OS} en electrodinámica cuántica a ordenes perturbativos mayores (2 o más loops), lo cual permite obtener resultados cada vez más precisos. Por ejemplo en los estudios hechos por Adkins, G. et.al (2001) [28] y Duhr, C. et. al (2024) [29] se calculan los contratérminos en la electrodinámica cuántica a 2 y 3 *loops*, respectivamente.
- Calcular el contratérmino de la masa δ_m^{OS} para otras partículas y bajo teorías diferentes. Por ejemplo: teorías no Abelianas como la cromodinámica cuántica o teorías más allá del modelo estándar. Por ejemplo en el libro escrito por Strickland, M. (2026) [30] se estudia la renormalización completa de la cromodinámica cuántica y en el estudio realizado por Pelissetto, A. y Vicari, E. (2015) [31] se analiza la renormalización de la teoría ϕ^4 en 2 y 3 dimensiones.

Históricamente, la cancelación de cantidades divergentes mediante la renormalización ha sido motivo de debate entre matemáticos y físicos. Por una parte, a nivel algebraico la cancelación de infinitos puede llegar a ser considerablemente dudosa. Por otra parte, los cálculos perturbativos en la electrodinámica cuántica renormalizada han logrado tener la cercanía más grande entre predicciones teóricas y experimentos jamás antes vista en una teoría de la física.

El extraordinario acuerdo entre las predicciones de la electrodinámica cuántica renormalizada y los resultados experimentales ha consolidado a la renormalización no solo como una herramienta matemática para eliminar divergencias, sino como un principio físico fundamental en teorías cuánticas de campos.

APÉNDICE A

REGLAS DE FEYNMAN

A continuación, se muestran las reglas de Feynman [4], las cuales son útiles para relacionar a un diagrama de Feynman con su correspondiente amplitud invariante $\mathcal{M}_0$.

1. **Vértice de interacción.** En cada vértice del diagrama, escribir el término: $ie_0\gamma^\alpha$. Cada vértice debe de tener un superíndice griego diferente.
2. **Línea interna de fotón** Para cada línea de un fotón interno identificado por su momento $\mathbf{k}$,

$$\alpha \sim \underset{\mathbf{k}}{\text{~~~~~}} \beta$$

Se utiliza la expresión:

$$i\tilde{D}_{F,0\alpha\beta}(k) = -i \frac{g_{\alpha\beta}}{k^2 + i\epsilon}.$$

3. **Línea interna de fermión.** Para cada línea interna de fermiones identificados por su momento $\mathbf{p}$,

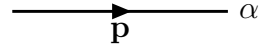
$$\alpha \longrightarrow \underset{\mathbf{p}}{\text{~~~~~}} \beta$$

Se utiliza la expresión:

$$i\tilde{S}_{F,0}(p) = i \frac{1}{\not{p} - m_0\mathbb{I} + i\epsilon\mathbb{I}} = i \frac{\not{p} + m_0\mathbb{I}}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon}$$

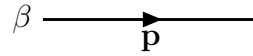
4. Líneas externas

- **Electrón entrante.** Para cada electrón entrante con momento $\mathbf{p}$,



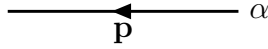
Se utiliza el término: $u_{0,s}(\mathbf{p})$.

- **Electrón saliente.** Para cada electrón saliente con momento $\mathbf{p}$,



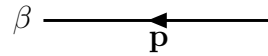
Se utiliza el término: $\bar{u}_{0,s}(\mathbf{p})$.

- **Positrón entrante.** Para cada positrón entrante con momento $\mathbf{p}$,



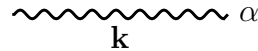
Se utiliza el término: $\bar{v}_{0,s}(\mathbf{p})$.

- **Positrón saliente.** Para cada positrón saliente con momento $\mathbf{p}$,



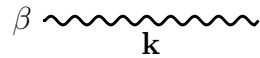
Se utiliza el término: $v_{0,s}(\mathbf{p})$.

- **Fotón entrante.** Para cada fotón entrante con momento $\mathbf{k}$,



Se utiliza el término: $\epsilon_{s\alpha}(\mathbf{k})$.

- **Fotón saliente.** Para cada fotón saliente con momento $\mathbf{k}$,



Se utiliza el término: $\epsilon_{s\alpha}(\mathbf{k})$.

Aquí, s representa a la polarización del fotón.

- Las matrices gamma γ , los espinores $(u_{0,s}, \bar{u}_{0,s}, v_{0,s}, \bar{v}_{0,s})$ y el propagador fermiónico $S_{F,0}$ deben de seguir un orden particular.

Debe de empezarse desde el lado derecho del diagrama. Se empieza a recorrer las líneas fermiónicas en la dirección de sus flechas. Estos términos se escriben en el orden de aparición de acuerdo con estas flechas.

6. Para cada *loop* conformado con fermiones, es necesario calcular la traza del *loop* y multiplicarlo por (-1) .
7. En los vértices de los diagramas de Feynman se conserva la suma de los 4-vectores de momento de ambos lados del vértice, y esta conservación de momento se representa mediante la delta de Dirac: $\delta^{(4)}\left(\sum_f p'_f - \sum_i p_i\right)$. En el caso de los *loops*, no hay una delta de Dirac que fije la conservación de energía-momento, por lo que por cada loop debe de agregarse el término $\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}$, donde q se calcula por la conservación de energía-momento en cualquiera de los vértices que conectan al *loop*.
8. Es necesario multiplicar la expresión por 1 o por -1 si se ocupa un numero par o impar de permutaciones en el orden de operadores fermiónicos para obtener el orden normal (operadores de creación a la izquierda y operadores de aniquilación a la derecha).

APÉNDICE B

FUNDAMENTOS DE VARIABLE COMPLEJA

En esta tesis se utiliza el análisis complejo en la resolución de integrales de 4 dimensiones. Por lo tanto, es importante analizar de manera resumida las bases de la variable compleja [21].

B.1 FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

Una variable compleja tiene la siguiente forma general:

$$z = x + iy, \tag{B.1}$$

donde $x, y \in \mathbb{R}$.

En la teoría cuántica de campos, suele definirse que el componente temporal de un 4-vector (x^0, p^0) sea considerado una variable compleja. De esta manera, en la teoría cuántica de campos suelen aparecer funciones de una variable compleja $f(z)$. Este tipo de funciones suelen escribirse de la siguiente manera:

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y), \tag{B.2}$$

donde $u(x, y), v(x, y) \in \mathbb{R}$.

Es posible calcular la derivada de una función compleja de la siguiente manera:

$$f'(z) = \frac{df}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta x + i\Delta y}. \quad (\text{B.3})$$

En el estudio de la variable compleja son de particular importancia las *funciones analíticas*.

Se dice que una función de variable compleja es *analítica* dentro de una región del plano complejo si su derivada $f'(z)$ es única en cada punto dentro de esta región.

Una función compleja $f(z)$ «es analítica en un punto $z = a$ » si existe un número $r > 0$ tal que la función $f(z)$ sea derivable para todos los puntos dentro del disco abierto $|z - a| < r$.

Considerando que la función compleja tiene la forma de la ecuación B.2.

Se puede saber si la función es analítica si se cumplen las *condiciones de Cauchy-Riemann*.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

B.2 POLOS Y RESIDUOS

Supongamos que una función compleja $f(z)$ es analítica en la región anular [21] dada por la figura B.1.

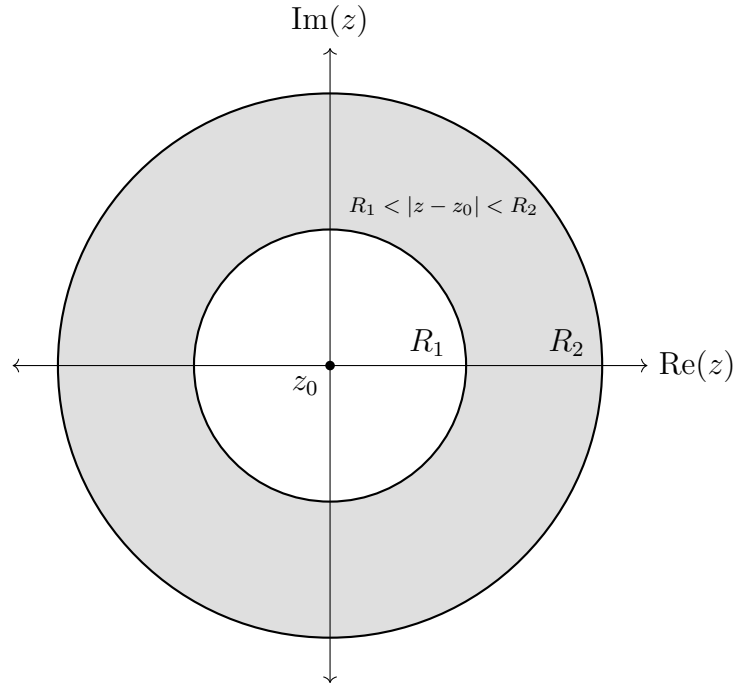


FIGURA B.1: Región anular entre discos $|z| = R_1$ y $|z| = R_2$ en el plano complejo de z .

En esta región anular del plano complejo, la función $f(z)$ puede expandirse en *series de Laurent* alrededor de z_0 de la siguiente manera:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}, \quad (\text{B.5})$$

donde:

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}, & (n = 0, 1, 2, \dots), \\ b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) (z - z_0)^{n-1} dz, & (n = 0, 1, 2, \dots). \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

La sumatoria con los coeficientes b_n en la ecuación B.5 es llamada la *parte principal* de la serie.

Si todos los coeficientes b_n son iguales a 0, entonces la singularidad en $z = z_0$ es removible.

Si existe un entero $r \geq 1$ tal que $b_r \neq 0$ y $b_n = 0$ para todo $n > r$, se dice

que la función $f(z)$ tiene un *polo de orden* r en $z = z_0$. En el caso $r = 1$, el polo es llamado *polo simple*.

El coeficiente b_1 ubicado en la parte principal de la *serie de Laurent* es llamado el *residuo* de la función $f(z)$ en $z = z_0$.

Existen formas alternativas de encontrar el residuo b_1 de una función compleja. En el caso de los *polos simples* la ecuación B.7 suele ser de utilidad:

$$b_1 = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z). \quad (\text{B.7})$$

B.3 INTEGRACIÓN EN EL PLANO COMPLEJO

Con las herramientas vistas hasta el momento es posible calcular integrales en el plano complejo una vez que se haya establecido un *contorno de integración* [21].

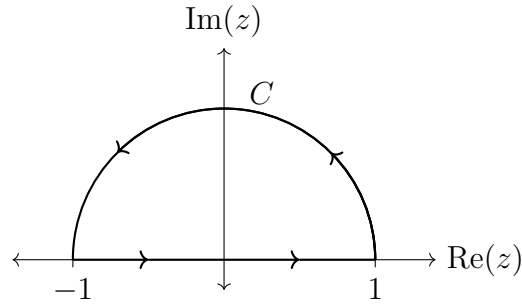
Un contorno de integración C es un camino cerrado en el plano complejo con un número finito de esquinas y además que no se cruza consigo mismo.

Para realizar integrales de funciones complejas sobre un contorno de integración es necesario tomar en cuenta los siguientes teoremas:

Teorema B.1 (Teorema de Cauchy).

Si una función $f(z)$ de una variable compleja z es analítica en una región simplemente conexa que contiene al contorno cerrado C , entonces la integral cíclica alrededor de este contorno es igual a 0:

$$\oint_C f(z)dz = 0. \quad (\text{B.8})$$

FIGURA B.2: Gráfica de una función analítica $f(z)$ dentro del contorno C

En la figura B.2 se muestra un contorno C que no encierra singularidades de $f(z)$. Dado que $f(z)$ es analítica en toda la región considerada, se cumple el teorema de Cauchy y la integral cíclica es nula.

Ahora se analizará un segundo teorema importante en el análisis complejo.

Teorema B.2 (Fórmula Integral de Cauchy).

Si una función $f(z)$ es analítica en una región simplemente conexa que contiene al contorno cerrado C y existe un punto a dentro del contorno C , el valor de $f(a)$ está dado de la siguiente manera:

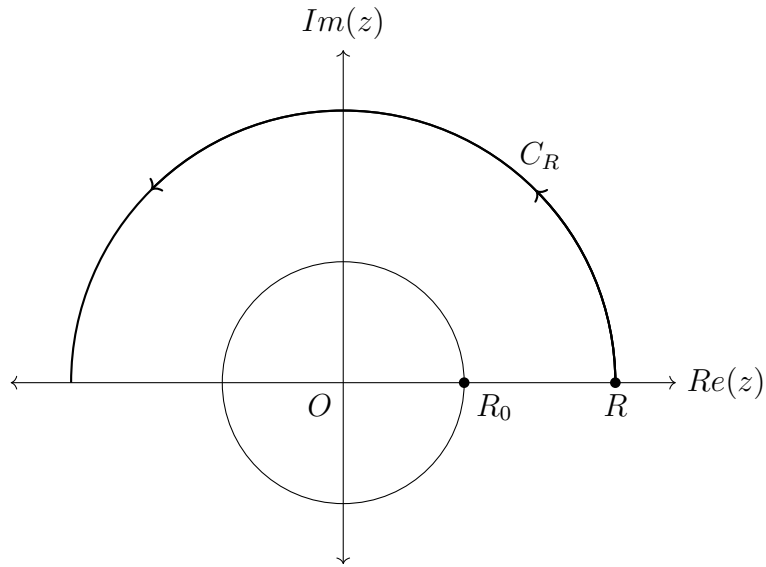
$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz \frac{f(z)}{z - a}. \quad (\text{B.9})$$

Ahora, se verá un lema importante en la evaluación de integrales de variable compleja:

Lema B.3 (Lema de Jordan).

Supongamos que:

- i) Una función $f(z)$ es analítica en todos los puntos $\text{Im}(z) \geq 0$ del plano complejo que están fuera de un círculo $|z| = R_0$.
- ii) Existe un semicírculo C_R de radio R expresado matemáticamente como $z = Re^{i\theta}$ donde $0 \leq \theta \leq \pi$. Además, se establece que $R > R_0$ (ver figura B.3).


 FIGURA B.3: Contorno de integración utilizado en el *Lema de Jordan*.

- III) Para todos los puntos z sobre C_R , existe una constante positiva M_R llamada *cota* tal que $|f(z)| \leq M_R$. La cota cumple, además, con la siguiente condición:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} M_R = 0.$$

Entonces, para una constante $\lambda > 0$ se cumple que:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) e^{i\lambda z} dz = 0. \quad (\text{B.10})$$

Es necesario considerar la integración de funciones cuando el contorno de integración C encierra a n *polos*. A cada *polo* le corresponde un *residuo* por definición. Esto es aprovechado para calcular este tipo de integrales de acuerdo con el *teorema del residuo*.

Teorema B.4 (Teorema del residuo).

Si una función compleja $f(z)$ es analítica en y sobre un contorno cerrado C , excepto por n *polos* identificados por los puntos z_j (donde $j = 1, \dots, n$), entonces se cumple la siguiente ecuación:

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n (b_1)_j, \quad (\text{B.11})$$

donde $(b_1)_j$ es el *residuo* correspondiente al j -ésimo *polo* z_j .

Además, es importante recalcar que la integral alrededor del contorno C es evaluada en el sentido contrario a las manecillas del reloj. Si se desea evaluar la integral en sentido contrario, debe de cambiarse el signo de la integral.

APÉNDICE C

INTEGRACIÓN EN 4 DIMENSIONES

En este apéndice se analizará la evaluación de las integrales en 4 dimensiones utilizando coordenadas esféricas en 4 dimensiones en un espacio *euclidiano*.

C.1 COORDENADAS CARTESIANAS

Primeramente, es necesario analizar con detalle las transformaciones de las coordenadas cartesianas en 4 dimensiones a las coordenadas esféricas en 4 dimensiones [20].

Las coordenadas cartesianas en 4 dimensiones pueden ser escritas como x_0 , x_1 , x_2 y x_3 . Cada coordenada representa a valores asignados a ejes que son ortonormales entre sí.

En teoría cuántica de campos, suelen evaluarse integrales sobre todo el espacio de 4 dimensiones. Es decir, se integra sobre los siguientes valores de las coordenadas

cartesianas:

$$\begin{cases} -\infty < x_0 < \infty, \\ -\infty < x_1 < \infty, \\ -\infty < x_2 < \infty, \\ -\infty < x_3 < \infty. \end{cases}$$

El elemento diferencial en el sistema coordenado cartesiano en 4 dimensiones está dado por la ecuación C.1

$$d^4x = dx_0 dx_1 dx_2 dx_3. \quad (\text{C.1})$$

C.2 COORDENADAS ESFÉRICAS

Al momento de utilizar coordenadas esféricas, se cambian las variables sobre las que se realiza la integración. En este caso en lugar de integrar sobre las variables x_0, x_1, x_2 y x_3 , se integra ahora sobre las nuevas coordenadas $|x|, \theta_1, \theta_2$ y ϕ [20].

En las coordenadas esféricas en 4 dimensiones, $|x|$ es el radio 4-dimensional, θ_1 y θ_2 son ángulos polares y ϕ es el ángulo azimutal.

Cuando se integra sobre todo el espacio 4-dimensional, como es usual en la teoría cuántica de campos, se integran las nuevas variables sobre los siguientes rangos:

$$\begin{cases} 0 \leq |x| < \infty, \\ 0 \leq \theta_1 \leq \pi, \\ 0 \leq \theta_2 \leq \pi, \\ 0 \leq \phi < \pi. \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

El radio $|x|$ está relacionado con las 4 coordenadas cartesianas de la siguiente manera:

$$|x| = \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \quad (\text{C.3})$$

A continuación, se muestran las transformaciones de las coordenadas cartesianas en 4 dimensiones a coordenadas esféricas en 4 dimensiones:

$$x_0 = |x| \cos \theta_1, \quad (\text{C.4a})$$

$$x_1 = |x| \sin \theta_1 \cos \theta_2, \quad (\text{C.4b})$$

$$x_2 = |x| \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \phi, \quad (\text{C.4c})$$

$$x_3 = |x| \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \phi. \quad (\text{C.4d})$$

La ecuación C.3 se satisface automáticamente al sustituir las ecuaciones C.4.

Ya que se conocen las ecuaciones de transformación entre un sistema coordenado cartesiano a uno esférico en 4 dimensiones, es necesario ahora analizar cómo se transforma el elemento diferencial d^4x .

De acuerdo con el cálculo, el elemento diferencial en coordenadas esféricas está definido de la siguiente manera:

$$d^4x = |\det(J)| d|x| d\theta_1 d\theta_2 d\phi, \quad (\text{C.5})$$

donde $|\det(J)|$ es el valor absoluto del determinante del *Jacobiano*.

El *Jacobiano* es una matriz que relaciona al cambio de un sistema coordenado a otro. En el caso de la transformación de un sistema coordenado cartesiano a uno esférico en 4 dimensiones, éste está dado por la siguiente ecuación:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_0}{\partial |x|} & \frac{\partial x_0}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_0}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x_0}{\partial \phi} \\ \frac{\partial x_1}{\partial |x|} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \phi} \\ \frac{\partial x_2}{\partial |x|} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \phi} \\ \frac{\partial x_3}{\partial |x|} & \frac{\partial x_3}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \phi} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.6})$$

Al realizar las correspondientes derivadas, el *Jacobiano* obtiene la siguiente forma:

$$J = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -|x| \sin \theta_1 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 \cos \theta_2 & |x| \cos \theta_1 \cos \theta_2 & -|x| \sin \theta_1 \sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \phi & |x| \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \phi & |x| \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cos \phi & -|x| \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \phi \\ \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \phi & |x| \cos \theta_1 \sin \theta_2 \sin \phi & |x| \sin \theta_1 \cos \theta_2 \sin \phi & |x| \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \phi \end{pmatrix}. \quad (\text{C.7})$$

El determinante de esta matriz es igual a:

$$\det(J) = |x|^3 \sin^2 \theta_1 \sin \theta_2. \quad (\text{C.8})$$

Sustituyendo la ecuación C.8 en la ecuación C.5 se obtiene finalmente el elemento diferencial d^4x en coordenadas esféricas:

$$d^4x = |x|^3 \sin^2 \theta_1 \sin \theta_2 d|x| d\theta_1 d\theta_2 d\phi = |x|^3 d|x| d\Omega_4, \quad (\text{C.9})$$

donde se definió al elemento diferencial del ángulo sólido como:

$$d\Omega_4 = \sin^2 \theta_1 \sin \theta_2 d\theta_1 d\theta_2 d\phi. \quad (\text{C.10})$$

Ahora, es posible resolver integrales en 4 dimensiones utilizando coordenadas esféricas si se toma en cuenta el elemento diferencial de la ecuación C.9, la ecuación C.3 y los rangos de integración sobre todo el espacio-tiempo dados por la ecuación C.2.

C.3 ALGUNAS INTEGRALES IMPORTANTES EN 4 DIMENSIONES

Se presentan seis integrales importantes evaluadas en 4 dimensiones que aparecen frecuentemente en la regularización de expresiones presentes en la teoría cuántica de campos [4].

$$\int \frac{d^4k}{(k^2 - s + i\epsilon)^n} = i\pi^2 (-1)^n \frac{\Gamma(n-2)}{\Gamma(n)} \frac{1}{s^{n-2}}, \quad n \geq 3 \quad (\text{C.11a})$$

$$\int d^4k \frac{k^\mu}{(k^2 - s + i\epsilon)^n} = 0, \quad n \geq 3 \quad (\text{C.11b})$$

$$\int d^4k \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 - s + i\epsilon)^n} = i\pi^2 (-1)^{n+1} \frac{\Gamma(n-3)}{2\Gamma(n)} \frac{g^{\mu\nu}}{s^{n-3}}, \quad n \geq 4 \quad (\text{C.11c})$$

$$\int \frac{d^4p}{(p^2 + 2pq + t + i\epsilon)^n} = i\pi^2 \frac{\Gamma(n-2)}{\Gamma(n)} \frac{1}{(t - q^2)^{n-2}}, \quad n \geq 3 \quad (\text{C.11d})$$

$$\int d^4p \frac{p^\mu}{(p^2 + 2pq + t + i\epsilon)^n} = -i\pi^2 \frac{\Gamma(n-2)}{\Gamma(n)} \frac{q^\mu}{(t - q^2)^{n-2}}, \quad n \geq 3 \quad (\text{C.11e})$$

$$\int d^4p \frac{p^\mu p^\nu}{(p^2 + 2pq + t + i\epsilon)^n} = i\pi^2 \frac{\Gamma(n-3)}{2\Gamma(n)} \frac{[2(n-3)q^\mu q^\nu + (t - q^2)g^{\mu\nu}]}{(t - q^2)^{n-2}}, \quad n \geq 4 \quad (\text{C.11f})$$

APÉNDICE D

EXPANSIÓN DE FUNCIONES EN SERIES DE TAYLOR

En ocasiones resulta beneficioso utilizar una aproximación de una función $f(x)$ en lugar de utilizar la función directamente.

D.1 SERIES DE TAYLOR

Una técnica común para realizar dichas aproximaciones es mediante la *expansión en series de Taylor* [22].

Teorema D.1 (Expansión en series de Taylor). Sea $f(x)$ una función continua e infinitamente diferenciable (pertenece a C^∞) sobre un intervalo I . Además, existe un punto $x = a$ perteneciente a I .

Entonces, para cualquier x perteneciente al intervalo I , la función $f(x)$ puede expresarse de la siguiente manera:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n. \quad (\text{D.1})$$

D.2 EXPANSIONES EN SERIE ÚTILES

A continuación, se muestran algunas expansiones en serie que resultan útiles para este estudio [4, 22]:

$$x^{-\varepsilon/2} = 1 - \frac{\varepsilon}{2} \ln(x) + \cdots, \quad (\text{D.2})$$

$$\Gamma(\varepsilon/2) = \frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \cdots, \quad (\text{D.3})$$

$$\frac{1}{A-B} = \frac{1}{A} + \frac{1}{A}B\frac{1}{A} + \frac{1}{A}B\frac{1}{A}B\frac{1}{A} + \frac{1}{A}B\frac{1}{A}B\frac{1}{A}B\frac{1}{A} + \cdots, \quad (\text{D.4})$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots, \quad (\text{D.5})$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} x^k = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \cdots. \quad (\text{D.6})$$

BIBLIOGRAFÍA

- [1] D. J. Griffiths, Introduction to Electrodynamics, 1st ed. Prentice Hall, 1999.
- [2] H. R. D. Assis and B. F. Rizzuti, “A comment on the classical electron self-energy,” Tech. Rep., 2023.
- [3] J. Bovy, “The self-energy of the electron: a quintessential problem in the development of qed,” Tech. Rep., 2006.
- [4] F. Mandl and G. Shaw, Quantum Field Theory, 2nd ed. Wiley, 2010.
- [5] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, An Introduction to Quantum Field Theory, 1st ed. Addison-Wesley Publishing Company, 1995.
- [6] M. D. Schwartz, Quantum Field Theory and the Standard Model, 1st ed. Cambridge University Press, 2014.
- [7] T. Lancaster and S. J. Blundell, Quantum Field Theory for the Gifted Amateur. Oxford University Press, 2014.
- [8] S. Ramos-Sánchez, Relatividad para futuros físicos, 1st ed. UNAM, 2018.
- [9] J. Sakurai, Advanced Quantum Mechanics. Pearson Education, 1967.
- [10] H. Goldstein, Classical Mechanics, 2nd ed. Addison-Wesley Publishing Company, 1980.
- [11] M. Srednicki, Quantum Field Theory, 1st ed. Universidad de California, Santa Bárbara, 2006.

-
- [12] S. Coleman, D. Derbes, and R. B. Sohn, Lectures of Sidney Coleman on Quantum Field Theory. Singapore: World Scientific, 2018.
- [13] J. W. Rohlf and P. J. Collings, Modern Physics from a to Z0. John Wiley and Sons, 1994, vol. 12.
- [14] L. de la Peña, Introducción a la Mecánica Cuántica, 1st ed. Fondo de cultura económica, 2014.
- [15] I. Waller, “Bemerkungen über die rolle der eigenenergie des elektrons in der quantentheorie der strahlung,” Z. Physik, vol. 62, pp. 1–4, 6 1930.
- [16] V. Weißkopf, “Über die selbstenergie des elektrons,” Z. Physik, vol. 89, pp. 27–39, 1934.
- [17] F. Dyson, “Hans bethe and quantum electrodynamics,” Physics Today, vol. 58, pp. 48–50, 2005.
- [18] J. S. Schwinger, “Renormalization theory of quantum electrodynamics: An individual view,” in The Birth of Particle Physics, L. M. Brown and L. Hoddeson, Eds. Cambridge: Cambridge University Press, 1983, pp. 329–353, contribution to the 1st International Symposium on the History of Particle Physics, Fermilab, May 1980. [Online]. Available: <https://www.fuw.edu.pl/~kostecki/scans/schwinger1983.pdf>
- [19] L. Leithold, El Cálculo, 7th ed. Oxford University Press, 1987.
- [20] C. Pita Ruiz, Cálculo vectorial. México, D. F: Prentice-Hall Hispanoamericana, 1995.
- [21] R. B. J.W. & Churchill, Complex Variable and Applications, 7th ed. Mc-Graw Hill, 2009.
- [22] M. Boas, Mathematical Methods in the Physical Sciences, 3rd ed. John Wiley & Sons, 2006.

-
- [23] M. I. Eides, “One-loop electron mass and qed trace anomaly,” The European Physical Journal C, vol. 83, no. 5, May 2023. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-023-11535-6>
- [24] H. E. Haber, “Electron wave function and mass renormalization in qed,” May 2020, lecture notes.
- [25] S. G. Naculich, “Renormalization of qed,” Lecture Notes, march 2017, department of Physics, Bowdoin College.
- [26] J. C. Romão and J. P. Silva, “Quantum field theory,” Lecture Notes, 2024, departamento de Física, Instituto Superior Técnico, Universidade de Lisboa. [Online]. Available: <https://porthos.tecnico.ulisboa.pt/Public/textos/qft.pdf>
- [27] M. D. Schwartz, “Corrections to the second edition of quantum field theory and the standard model,” <https://schwartzqft.fas.harvard.edu/second-edition-corrections>, 2014, accessed: 2024-05-22.
- [28] G. S. Adkins, R. N. Fell, and J. Sapirstein, “Two-loop renormalization of feynman gauge qed,” Phys. Rev. D, vol. 63, p. 125009, May 2001. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.63.125009>
- [29] C. Duhr, F. Gasparotto, C. Nega, L. Tancredi, and S. Weinzierl, “On the electron self-energy to three loops in qed,” Journal of High Energy Physics, vol. 2024, no. 11, p. 020, 2024.
- [30] M. Strickland, Renormalization of QCD. Cham: Springer Nature Switzerland, 2026, pp. 275–290. [Online]. Available: https://doi.org/10.1007/978-3-032-14357-0_12
- [31] A. Pelissetto and E. Vicari, “Critical mass renormalization in renormalized theories in two and three dimensions,” Physics Letters B, vol. 751, pp. 532–534, 2015. [Online]. Available: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:56140929>

RESUMEN AUTOBIOGRÁFICO

Felipe Eduardo Segovia Ojeda

Candidato para obtener el grado de
Maestría en Ingeniería Física Industrial

Universidad Autónoma de Nuevo León
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Tesis:

AUTOENERGÍA DEL ELECTRÓN Y RENORMALIZACIÓN DE LA MASA
EN LA ELECTRODINÁMICA CUÁNTICA

Nací en Monterrey, Nuevo León el día 26 de noviembre del 2000. Mis padres son Felipe Alfonso Segovia López y Norma Irene Ojeda González.

Estudié la preparatoria entre los años 2016 y 2018 en el Centro de Investigación y Desarrollo de la Educación Bilingüe (CIDEB) de la UANL.

En agosto del año 2018 ingresé a la Facultad de Ciencias Químicas de la UANL, donde estudié la licenciatura en Ingeniería Química hasta junio del año 2023.

Después de terminar mis estudios de licenciatura ejercí profesionalmente hasta junio del 2024.

Desde agosto del 2024 hasta la actualidad me encuentro cursando la Maestría

en Ingeniería Física Industrial, donde he tenido la oportunidad de enfocarme en el estudio de la electrodinámica cuántica.