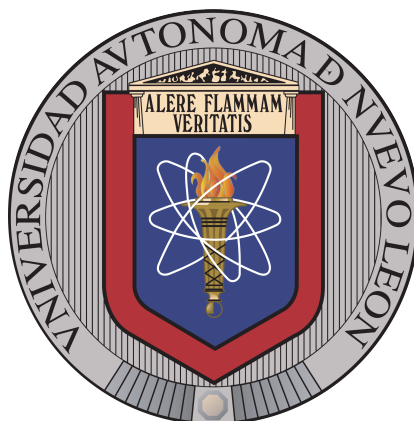


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS

POSGRADO EN INGENIERÍA FÍSICA INDUSTRIAL



AJUSTE Y COMPARACIÓN DE
CONTROLADORES PID Y OPTIMO RS
CON FILTRADO KALMAN BUCY Y RS
APLICADOS AL PÉNDULO SIMPLE
ACTUADO

POR

HÉCTOR ATLETL ROMERO PANDO

COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRÍA EN INGENIERÍA FÍSICA INDUSTRIAL

JUNIO 2026

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS

POSGRADO EN INGENIERÍA FÍSICA INDUSTRIAL



AJUSTE Y COMPARACIÓN DE
CONTROLADORES PID Y OPTIMO RS
CON FILTRADO KALMAN BUCY Y RS
APLICADOS AL PÉNDULO SIMPLE
ACTUADO

POR

HÉCTOR ATLETL ROMERO PANDO

COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRÍA EN INGENIERÍA FÍSICA INDUSTRIAL

JUNIO 2026



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS
POSGRADO EN INGENIERÍA FÍSICA INDUSTRIAL

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis «AJUSTE Y COMPARACIÓN DE CONTROLADORES PID Y OPTIMO RS CON FILTRADO KALMAN BUCY Y RS APLICADOS AL PÉNDULO SIMPLE ACTUADO», realizada por el ingeniero Héctor Atletl Romero Pando, con número de matrícula 2269022, sea aceptada para su defensa como requisito parcial para obtener el grado de Maestría en Ingeniería Física Industrial .

El Comité de Tesis

Dra. María Aracelia Alcorta García
Asesor

Dr. José Armando Sáenz Esqueda
Revisor

Dr. Joel Pérez Padrón
Revisor

Vo. Bo.

Dr. Álvaro Eduardo Cordero Franco
Subdirector de Estudios de Posgrado

San Nicolás de los Garza, Nuevo León, junio 2026

A mis padres y a mis hermanos por su apoyo incondicional

A toda mi familia que me ha apoyado en este trayecto

A mis amigos cercanos por su motivación y palabras de aliento

*Y a todos aquellas personas que a través de sus actos
siempre me ayudaron a seguir adelante y sentirme motivado*

ÍNDICE GENERAL

Agradecimientos	xx
Resumen	xxi
1. Planteamiento del problema	1
1.1. Justificación o motivación	3
1.2. Hipótesis	4
1.3. Objetivos	4
1.3.1. Generales	4
1.3.2. Específicos	5
2. Marco Teórico	6
2.1. Representación matemática del sistema	6
2.1.1. Representación en espacio de estados	6
2.1.2. Representación de sistemas lineales variantes e invariantes en el tiempo	8
2.2. Representación en bloques	10

2.3. Restricciones del sistema	12
2.4. Control <i>PID</i>	13
2.4.1. Control Proporcional	14
2.4.2. Control Proporcional Integral	15
2.4.3. Control Proporcional Integral Derivativo	15
2.4.4. Método de Ziegler-Nichols para sintonización de ganancias. . .	16
2.5. Control Óptimo	16
2.5.1. Principio de Optimalidad y Función Costo	17
2.5.2. Ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman	18
2.5.3. Control Risk-Sensitive	19
2.6. Mecánica Lagrangiana	20
2.6.1. Principio de Mínima Acción	21
2.6.2. Obtención de la Ecuación de Euler-Lagrange	22
2.6.3. La Ecuación de Euler-Lagrange en Presencia de Fuerzas No Conservativas	22
2.6.4. Particularidades de la Mecánica Lagrangiana	23
2.7. El Péndulo Simple	24
2.7.1. Modelo Linealizado del Péndulo Simple	25
2.7.2. Modelo No Lineal del Péndulo	26
2.7.3. Aplicaciones del Péndulo Simple	29
2.8. Filtrado	29

2.8.1. Interpretación geométrica del filtrado	29
2.8.2. El caso normal	32
2.8.3. Filtro de Kalman	34
2.8.4. Filtro RS	36
3. Metodología	39
3.1. Dinámica del sistema	39
3.2. Espacio de estados y función costo	40
3.3. Convención de los modelos del control	42
3.4. Método de control PID	42
3.5. Método de control RS	43
3.6. Filtro Kalman	44
3.7. Filtro RS	45
3.8. Controladores	45
3.8.1. Controlador $PID KB$	45
3.8.2. Controlador $PID RS$	46
3.8.3. Controlador $RS KB$	46
3.8.4. Controlador $RS RS$	46
3.9. Equipamiento y parámetros	47
3.10. Simulación	47
3.10.1. Sistemas con control	48

3.10.2. Sistemas con Filtro	56
3.11. Propuesta para filtros no lineales	63
3.12. Sistema con Controladores	68
3.12.1. Controlador $PID KB$	69
3.12.2. Controlador $PID RS$	70
3.12.3. Controlador $RS KB$	72
3.12.4. Controlador $RS RS$	75
3.12.5. Simulación de Controladores en sus versiones finales	77
4. Resultados	79
4.1. Comportamiento de los Controladores No Lineales	79
4.1.1. Controlador $PID KB$	79
4.1.2. Controlador $PID RS$	85
4.1.3. Controlador $RS KB$	91
4.1.4. Controlador $RS RS$	97
4.2. Comparación de desempeño de los controladores	104
4.3. Discusión	107
5. Conclusiones	109
5.1. Perspectiva a futuro	109
A. Resultados complementarios	111

B. Artículo Publicado	113
------------------------------	------------

ÍNDICE DE FIGURAS

2.1.	Diagrama de bloques de un proceso con un control con retroalimentación	10
2.2.	Representación en diagrama de bloques de una suma de señales . . .	11
2.3.	Representación en diagrama de bloques de una división de señal. . . .	11
2.4.	Representación en diagrama de bloques de un bloque de proceso. . . .	11
2.5.	Posibles trayectorias desde el punto “a” al punto “b”	17
2.6.	Subespacios del espacio de control óptimo	18
2.7.	Diagrama de cuerpo libre del péndulo simple.	25
3.1.	Diagrama del sistema asociado al péndulo con motor	39
3.2.	Diagrama de bloques del control <i>PID</i> aplicado al sistema.	42
3.3.	Diagrama de bloques del control RS aplicado al sistema.	44
3.4.	Comportamiento de los estados del sistema bajo el control <i>PID</i> con la sintonización Ziegler-Nichols sin modificar.	48
3.5.	Comportamiento de a) los estados y b) los errores del sistema para el control <i>PID</i> con la sintonización Ziegler-Nichols mejorada, $\varepsilon = 1$. . .	49
3.6.	Comportamiento de la señal de control <i>PID</i> con la sintonización Ziegler-Nichols mejorada, $\varepsilon = 1$	50

3.7. comportamiento de la matriz de ganancias $P(t)$	51
3.8. Comportamiento de la matriz de ganancias P_a	52
3.9. Comportamiento de a) los estados y b) los errores del sistema para el control RS con $P_a(t), \varepsilon = 1$	53
3.10. Comportamiento de la señal de control PID con la sintonización Ziegler-Nichols mejorada, $\varepsilon = 1$	53
3.11. Comportamiento de la señal de control RS con $P_a(t), \varepsilon = 1$	53
3.12. Comparación señales de control PID y RS, $\varepsilon = 100$	54
3.13. Señales real vs estimado de velocidad angular y posición angular para el filtro de Kalman.	57
3.14. Comportamiento de a) la matriz de ganancias de covarianza $P(t)$ y b) los errores del filtro de Kalman.	57
3.15. Señales real vs estimado de posición angular y velocidad angular para el filtro Kalman al modelo no lineal.	58
3.16. Comportamiento de a) la matriz de ganancias $P(t)$ y b) los errores del filtro Kalman en el modelo no lineal.	58
3.17. Señales real vs estimado de posición angular y velocidad angular para el filtro RS.	60
3.18. Comportamiento de las ganancias de a) la matriz $Q(t)$ y b) la matriz $Q(t)^{-1}$ del filtro RS.	60
3.19. Comportamiento de los errores de los estimados del filtro RS.	61
3.20. Señales real vs estimado de posición angular y velocidad angular para el filtro RS en el modelo no lineal.	61

3.21. Comportamiento de las ganancias de a) la matriz $Q(t)$ y b) la matriz $Q(t)^{-1}$ del filtro RS para el modelo no lineal.	62
3.22. Comportamiento de los errores de los estimados del filtro RS para el modelo no lineal.	62
3.23. Comportamiento del estado filtrado vs estado real del sistema, con el filtro KB modificado.	64
3.24. Comportamiento del error del filtro para ambos estados del sistema, con el filtro KB modificado.	65
3.25. comportamiento de la matriz de ganancias $P(t)$ del filtro KB modificado.	65
3.26. Comportamiento del estado filtrado vs estado real del sistema, con el filtro RS modificado.	66
3.27. Comportamiento del error del filtro, con el filtro RS modificado. . . .	67
3.28. Comportamiento de las matrices de ganancias a) $Q(t)$ y b) $Q(t)^{-1}$ del filtro RS modificado.	67
3.29. Comportamiento del estado filtrado vs estado real del sistema, controlador $PID KB$	69
3.30. Comportamiento del error del filtro, controlador $PID KB$	69
3.31. Comportamiento del estado filtrado vs estado real del sistema, controlador $PID KB$ modificado.	70
3.32. Comportamiento del error del filtro, controlador $PID KB$ modificado.	71
3.33. Comportamiento del estado filtrado vs estado real del sistema, controlador $PID RS$	71
3.34. Comportamiento del error del filtro, controlador $PID RS$	72

3.35. Comportamiento del estado filtrado vs estado real del sistema, controlador $PID RS$ modificado.	72
3.36. Comportamiento del error del filtro, controlador $PID RS$ modificado.	73
3.37. Comportamiento del estado filtrado vs estado real del sistema, controlador $RS KB$	73
3.38. Comportamiento del error del filtro, controlador $RS KB$	74
3.39. Comportamiento del estado filtrado vs estado real del sistema, controlador $RS KB$ modificado.	74
3.40. Comportamiento del error del filtro, controlador $RS KB$ modificado.	75
3.41. Comportamiento del estado filtrado vs estado real del sistema, controlador $RS RS$	75
3.42. Comportamiento del error del filtro, controlador $RS RS$	76
3.43. Comportamiento del estado filtrado vs estado real del sistema, controlador $RS RS$ modificado.	76
3.44. Comportamiento del error del filtro, controlador $RS RS$ modificado.	77
4.1. Función de costo J del controlador $PID KB$ modificado.	79
4.2. Acercamientos a la función de costo J del controlador $PID KB$ modificado.	80
4.3. Señal de control $u_{PID KB}$ para el controlador $PID KB$ modificado.	80
4.4. Acercamientos a la señal de control $u_{PID KB}$ para el controlador $PID KB$ modificado.	81
4.5. Error estado x_1 para el controlador $PID KB$ modificado.	81

4.6. Acercamientos al error del estado x_1 para el controlador $PID KB$ modificado.	82
4.7. Error estado x_2 para el controlador $PID KB$ modificado.	82
4.8. Acercamientos al error estado x_2 para el controlador $PID KB$ modificado.	82
4.9. Estado filtrado m_1 para el controlador $PID KB$ modificado.	83
4.10. Acercamientos al estado filtrado m_1 para el controlador $PID KB$ modificado.	83
4.11. Estado filtrado m_2 para el controlador $PID KB$ modificado.	83
4.12. Acercamientos al estado filtrado m_2 para el controlador $PID KB$ modificado.	84
4.13. Estado x_1 para el controlador $PID KB$ modificado	84
4.14. Acercamientos al estado x_1 para el controlador $PID KB$ modificado.	84
4.15. Estado x_2 para el controlador $PID KB$ modificado	85
4.16. Acercamientos al estado x_2 para el controlador $PID KB$ modificado.	85
4.17. Función de costo J del controlador $PID RS$ modificado.	86
4.18. Acercamientos a la función de costo J del controlador $PID RS$ modificado.	86
4.19. Señal de control $u_{PID RS}$ para el controlador $PID RS$ modificado.	86
4.20. Acercamientos a la función de costo J del controlador $PID RS$ modificado.	87
4.21. Error estado x_1 para el controlador $PID RS$ modificado.	87

4.22. Acercamientos al error estado x_1 para el controlador $PID RS$ modificado.	87
4.23. Error estado x_2 para el controlador $PID RS$ modificado.	88
4.24. Acercamientos al error estado x_2 para el controlador $PID RS$ modificado.	88
4.25. Estado filtrado m_1 para el controlador $PID RS$ modificado.	88
4.26. Acercamientos al estado filtrado m_1 para el controlador $PID RS$ modificado.	89
4.27. Estado filtrado m_2 para el controlador $PID RS$ modificado.	89
4.28. Acercamientos al estado filtrado m_1 para el controlador $PID RS$ modificado.	89
4.29. Estado x_1 para el controlador $PID RS$ modificado.	90
4.30. Acercamientos al estado x_1 para el controlador $PID RS$ modificado.	90
4.31. Estado x_1 para el controlador $PID RS$ modificado.	90
4.32. Acercamientos al estado x_2 para el controlador $PID RS$ modificado.	91
4.33. Función de costo J del controlador $RS KB$ modificado.	91
4.34. Acercamientos a la función de costo J del controlador $RS KB$ modificado.	92
4.35. Señal de control $u_{RS KB}$ para el controlador $RS KB$ modificado.	92
4.36. Acercamientos a la señal de control $u_{RS KB}$ para el controlador $RS KB$ modificado.	92
4.37. Error estado x_1 para el controlador $RS KB$ modificado.	93

4.38. Acercamientos al error estado x_1 para el controlador $RS KB$ modificado.	93
4.39. Error estado x_2 para el controlador $RS KB$ modificado.	93
4.40. Acercamientos al error estado x_2 para el controlador $RS KB$ modificado.	94
4.41. Estado filtrado m_1 para el controlador $RS KB$ modificado.	94
4.42. Acercamientos al estado filtrado m_1 para el controlador $RS KB$ modificado. Se muestran sus acercamientos b) zoom 1, c) zoom 2 y d) zoom 3.	95
4.43. Estado filtrado m_2 para el controlador $RS KB$ modificado.	95
4.44. Acercamientos al estado filtrado m_2 para el controlador $RS KB$ modificado.	96
4.45. Estado filtrado x_1 para el controlador $RS KB$ modificado.	96
4.46. Acercamientos al estado filtrado x_1 para el controlador $RS KB$ modificado.	96
4.47. Estado filtrado x_2 para el controlador $RS KB$ modificado.	97
4.48. Acercamientos al estado filtrado x_2 para el controlador $RS KB$ modificado.	97
4.49. Función de costo J del controlador $RS RS$ modificado.	98
4.50. Acercamientos a la función de costo J del controlador $RS RS$ modificado.	98
4.51. Señal de control $u_{RS RS}$ para el controlador $RS RS$ modificado.	99
4.52. Acercamientos a la señal de control $u_{RS RS}$ para el controlador $RS RS$ modificado.	99

4.53. Error estado x_1 para el controlador $RS RS$ modificado.	99
4.54. Acercamientos al error estado x_1 para el controlador $RS RS$ modificado.	100
4.55. Error estado x_2 para el controlador $RS RS$ modificado.	100
4.56. Acercamientos al error estado x_2 para el controlador $RS RS$ modificado.	100
4.57. Estado filtrado m_1 para el controlador $RS RS$ modificado.	101
4.58. Acercamientos al estado filtrado m_1 para el controlador $RS RS$ modificado.	101
4.59. Estado filtrado m_2 para el controlador $RS RS$ modificado.	101
4.60. Acercamientos al estado filtrado m_2 para el controlador $RS RS$ modificado.	102
4.61. Estado filtrado x_1 para el controlador $RS RS$ modificado.	102
4.62. Acercamientos al estado filtrado x_1 para el controlador $RS RS$ modificado.	102
4.63. Estado filtrado x_2 para el controlador $RS RS$ modificado.	103
4.64. Acercamientos al estado filtrado x_2 para el controlador $RS RS$ modificado.	103
4.65. Comparación de las señales de control promedio de los controladores para a) $\varepsilon = 0.0001$, b) $\varepsilon = 1$ y c) $\varepsilon = 10000$	104
A.1. Comparación del estado $x_1(t)$ vs $m_1(t)$ para el controlador $PID KB$	111
A.2. Comportamiento de la matriz de ganancias $Q(t)^{-1}$ del controlador $PID RS$	112
A.3. Comportamiento de la señal de control $u_{RS KB}$ del controlador $RS KB$	112

A.4. Comportamiento del error de los estados filtrados para el controlador

$RS RS$	112
-------------------	-----

ÍNDICE DE TABLAS

2.1. Reglas de sintonización Ziegler-Nichols basadas en el valor de última ganancia y periodo último de oscilación	16
2.2. Comparación de valores de θ con el seno de θ y su desviación porcentual respectiva	27
3.1. Errores en tiempo final y $u(T)$ para diferentes ε , para control PID . .	55
3.2. Errores en tiempo final y $u(T)$ para diferentes ε , para control RS . . .	55
4.1. Resultados generales en tiempo final para el controlador $PID KB$ modificado para diferentes ε	105
4.2. Resultados generales en tiempo final para el controlador $PID RS$ modificado para diferentes ε	105
4.3. Resultados generales en tiempo final para el controlador $RS KB$ modificado para diferentes ε	106
4.4. Resultados generales en tiempo final para el controlador $RS RS$ modificado para diferentes ε	106

AGRADECIMIENTOS

Quisiera expresar mis agradecimientos a todos quienes han hecho esto posible.

A mi asesora, la Dra. María Aracelia Alcorta García, que por su guía y experiencia me instruyó en el área de una manera más profunda, formal y especializada, permitiéndome tener las herramientas para afrontar los desafíos que se presentaron durante todo el desarrollo de este proyecto. También por su paciencia, comprensión y empatía en cada momento durante todo este proceso.

A mis compañeros del posgrado, por brindarme apoyo siempre que fue necesario y aportando con su conocimiento y ejemplo a mi formación académica.

A la Universidad Autónoma de Nuevo León y a la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas por la oportunidad de crecimiento y superación profesional.

Al SECIHTI, por brindarme a través de sus programas los medios para poder hacer este proyecto un proyecto de tiempo completo y con ello aportar crecimiento a mi desarrollo profesional y personal.

Al Dr. José Armando Sáenz Esqueda, que por su guía facilitó, complementó y enriqueció el proyecto en cada etapa del mismo.

RESUMEN

En este trabajo se presenta la comparación del desempeño de dos métodos de control: el control clásico PID y el control óptimo Risk Sensitive (RS). Trabajando en conjunto con dos modelos de filtrado: el filtro de Kalman Bucy (KB) y el filtro Risk Sensitive (RS), se aplican en el modelo del péndulo simple actuado. Al realizarse las diversas combinaciones posibles de control y filtro, se obtuvieron cuatro controladores diferentes: $PID|KB$, $PID|RS$, $RS|KB$ y $RS|RS$. La obtención de su espacio de estados se realiza mediante cambio de variable en el modelo original de la ecuación diferencial de segundo orden asociada al péndulo (primera linealización). La ley de control RS utilizada fue obtenida mediante una segunda linealización, al aplicarse el Jacobiano alrededor de los puntos de equilibrio, con la intención de verificar qué tan viable es esa ley de control sobre el modelo no lineal, mediante su comparación con la ley de control PID clásica aplicada al mismo modelo.

Los métodos de filtrado utilizados corresponden al método Kalman Bucy, cuyo uso está más extendido y el filtro RS, cuyo desarrollo es análogo a los mismos principios de optimización de la función costo J usados para el control RS. El desarrollo consta de obtener las sintonizaciones de ganancias, tanto para los controles como para los filtros. Esto con el objetivo de obtener, para cada controlador, gráficas de comportamiento del sistema y recopilar los resultados en tiempo final referentes al error del estado, error del filtro, señal de control y la función del costo. Estos resultados son los que nos permitirán relizar la comparación de los controladores al final de este trabajo.

CAPÍTULO 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La teoría de control tiene una historia relativamente reciente, dado que sus aplicaciones inmediatas comenzaron recién surgió la necesidad de controlar las máquinas y mecanismos en los procesos cada vez más complicados derivados de la revolución industrial. Sin embargo, el deseo de controlar y automatizar se remonta inclusive desde la antigüedad, época en la cual la gente se valía de su ingenio y los medios que tenían a su disposición para cumplir sus labores o cubrir sus necesidades. Los relojes solares para conocer la hora durante el día, y las velas con incrustaciones que caían aproximadamente cada hora durante la noche, son ejemplos de cómo se buscaba tener dispositivos que cumplieran funciones por ellos mismos una vez los humanos los hubieran instalado y puesto en marcha.

La necesidad humana de marcar objetivos y alcanzarlos es en si el fundamento del control, plantear un determinado estado y alcanzarlo mediante los métodos que se tengan a disposición en el proceso, correspondiéndose con las limitaciones físicas o imponiendo restricciones acordes a las necesidades detectadas para lograr un objetivo en conjunto. Llevar un objeto de una posición a otra, mantener una velocidad constante, hacer un mínimo gasto de energía, inclusive considerar la resistencia al esfuerzo de un material, que el mismo debe conservar temperatura o forma son diversos escenarios desde donde se puede abordar un proceso o un sistema. Estos procesos requieren para su solución no solo determinar si existe un camino posible,

si no también considerar el camino cumpla con los requerimientos necesarios.

Aunado a esto, no solo se busca que el sistema llegue al objetivo establecido y cumpla con las limitaciones impuestas, si no también que mantenga dicho estado. Un ejemplo cotidiano sería cuando se necesita subir una cubeta a un segundo piso, no basta con que la cubeta llegue al segundo piso, sino que esta debe mantenerse ahí el tiempo suficiente para que sea descargado su contenido antes de volver a bajar, o en todo caso si su objetivo es subir y quedarse ahí, debe mantenerse en esa misma posición. De otro modo, al alcanzar el estado deseado volvería a bajar, o por el contrario seguiría subiendo indeterminadamente ya que su objetivo era subir pero ninguna restricción le impedía detenerse al alcanzar ese estado. Todo esto nos deriva en que el valor objetivo debe mantenerse acorde a las necesidades de cada problema.

Con todo esto damos paso a la actualidad, en donde las aplicaciones del control están más en contacto con nosotros en el día a día. Termorreguladores, vehículos autónomos, sensores de luz por proximidad, luminarias que se encienden en ausencia de iluminación natural, son claros ejemplos actuales de sistemas que requieren automatización y control en cierta medida. Se incluye además el caso de los robots, los cuales son el mejor exponente de lo que el control cumple hoy en día.

Los robots forman ya parte de la estructura productiva e inclusive cotidiana del estilo de vida actual y su estudio es un tópico que está vigente hoy en día. Si bien los robots suelen armar sistemas complejos, se pueden analizar como un conjunto de eslabones y actuadores que, mediante su acción conjunta forman ese sistema emergente. Así mismo, cada uno de esos eslabones puede analizarse como un péndulo simple que se mueve en el espacio y cuyo objetivo es alcanzar y mantener un punto o valor objetivo. Aquí es donde nace la necesidad del estudio de los péndulos simples y su control, puesto que entre mejor sea el entendimiento de estos, mejores y más confiables máquinas se podrán crear.

Es de esta situación de donde surge el interés en el estudio del péndulo, pues es a través del análisis de su comportamiento y el control que puede aplicarse al mismo,

en que se puede contribuir a la optimización y mejora de sistemas que contengan eslabones; entre mejor se tenga entendido el comportamiento de este sistema sencillo, mejor se puede controlar el comportamiento de sistemas más complejos de dos o más eslabones (como lo pueden ser los robots), lo cual también deja abierta un área de oportunidad tras obtener los resultados de este trabajo.

1.1 JUSTIFICACIÓN O MOTIVACIÓN

El estudio de los sistemas de control, en especial los más básicos, es importante ya que nos abren la puerta al control de sistemas más complejos, particularmente si consideramos que podemos dividir un sistema complejo en varios procesos sencillos. Podemos considerar que estos procesos actúan en secuencia o en conjunto, pero de manera independiente. Por lo tanto, si logramos entender y controlar adecuadamente el caso más sencillo, entonces seremos capaces de dar paso a sistemas más complejos, de ahí la importancia de estudiar y caracterizar los sistemas sencillos de manera adecuada. Como sistema simple, nos enfocaremos en el análisis del péndulo controlado por un servomotor, para el cual se diseñará el modelo matemático y las ecuaciones de control. Sistemas como brazos robóticos, grúas, maquinaria industrial, etcétera, constan de conjuntos de varios de estos sistemas simples. Pese a considerarse como un sistema sencillo, el péndulo se utiliza en física para verificar comportamientos, propiedades, y características de sistemas reales.

1.2 HIPÓTESIS

Se espera que los controladores con control óptimo Risk-Sensitive brindarán resultados superiores en desempeño en contraste a los controladores con el método de control clásico PID, en lo que respecta al costo y errores. Se espera que los controladores PID, pese a su antigüedad, se mantendrán vigentes dada su relativa sencillez y adaptabilidad, al aplicarse al sistema del péndulo simple. Finalmente se espera que los resultados nos puedan dar respaldo firme para dar paso a una implementación física.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 GENERALES

Caracterizar los controladores $PID|KB$, $PID|RS$, $RS|KB$ y $RS|RS$ aplicados al modelo no lineal del péndulo simple actuado, usando los modelos linealizados sobre el modelo no lineal y modificarlos con el fin de volverlos funcionales en el modelo no lineal, para identificar sus desempeños en base al error y al valor de la función costo en tiempo final.

1.3.2 ESPECÍFICOS

- Realizar las sintonizaciones de los filtros PID y RS a fin de obtener el mejor comportamiento posible de cada uno.
- Efectuar las simulaciones computacionales para verificar el comportamiento de los controladores.
- Validar la funcionalidad de los controles y los filtros sobre el modelo.
- Contrastar el comportamiento de las señales de control.
- Comparar el costo de los controladores.
- Compilar los resultados que permitan hacer un contraste sencillo y directo de los controladores y su desempeño.

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO

2.1 REPRESENTACIÓN MATEMÁTICA DEL SISTEMA

2.1.1 REPRESENTACIÓN EN ESPACIO DE ESTADOS

El primer problema que surge al abordar un problema de control es el crear un modelo matemático que describa adecuadamente el proceso. La aproximación matemática que se utilice del sistema y qué tan confiable es para describir los sistemas juega un papel fundamental en el control y posterior desempeño del sistema. Entre más preciso sea el modelado matemático utilizado, más será acorde a la realidad y por ende más fiables serán los controles encontrados para el mismo.

Con este fin es que se presenta la descripción de un sistema en lo que denominamos espacio de estados, el cual nos permite hacer una representación de sistemas que pueden ser representados por ecuaciones diferenciales ordinarias [1]. Sea pues el espacio de estado representado por las variables dependientes del tiempo

$$x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$$

y las variables de control dependientes del tiempo

$$u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)$$

entonces el sistema puede ser descrito por las “ n ” ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= a_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t) \\ \dot{x}_2(t) &= a_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= a_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t)\end{aligned}$$

en donde cada variable

$$\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dots, \dot{x}_n(t)$$

representa la primera derivada temporal de cada una de las variables del sistema [2].

Ahora pues, como podemos darnos cuenta, estas ecuaciones conforman un sistema que se encuentra relacionado entre si a través de las “ n ” ecuaciones diferenciales, por lo que nos es conveniente representar el espacio de estados en forma de matrices vector traspuesto, tal que definimos

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t) \end{bmatrix}^T$$

como el vector de estados del sistema, y definimos también

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t) \end{bmatrix}^T$$

como el vector de entradas de control del sistema. Análogamente definimos

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dots, \dot{x}_n(t) \end{bmatrix}^T$$

como el vector del espacio de estados, pudiendo resumir entonces esto en la expresión

$$\dot{x}(t) = a(x(t), u(t), t)$$

la cual definimos como la forma general de la representación de un sistema en espacio de estados como una función “ a ” que depende tanto de las entradas, como del control y del tiempo, como se puede ver en [1], [3].

Esta representación nos es extremadamente conveniente, ya que nos permite realizar el análisis de sistemas con múltiples entradas y salidas; sistemas que pueden

ser complejos de manera individual, pero nos permite describirlos como un todo que engloba cada variable del proceso, ya sea que se desee o no controlar dichas variables o únicamente una de ellas.

Por el momento solo nos concierne que este modelo nos da una herramienta para establecer el control sobre un sistema, pero no nos garantiza poder controlar todas las entradas.

2.1.2 REPRESENTACIÓN DE SISTEMAS LINEALES VARIANTES E INVARIANTES EN EL TIEMPO

Una vez establecida la representación en espacio de estados, podemos pasar a una representación que nos va a ser más útil al analizar los sistemas que deseemos estudiar, para esto vamos a dividir su estudio en dos grandes categorías, los sistemas variantes en el tiempo y los invariantes en el tiempo.

Partiendo de la representación anterior del espacio de estados, podemos notar que el vector del espacio de estados consta de “ n ” ecuaciones diferenciales, que representan la primera derivada respecto al tiempo de las variables del sistema. Pudiendo entonces, por simplicidad y en forma muy general, expresar la solución como una función de las variables del estado y el control [1].

Si además nuestro sistema está agrupado, podemos representarlo de la forma

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t)$$

donde “ a ” y “ b ” son coeficientes que acompañan a las variables de estado y las entradas del control. Del mismo modo que con el espacio de estados, se puede representar de manera general la expresión del espacio de estados en forma vectorial tal que

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

sea la representación en espacio de estados de un sistema con coeficientes invariantes en el tiempo, donde A, B representan matrices de coeficientes constantes y

$\dot{x}(t), x(t), u(t)$ representan los vectores del espacio de estados, variables de estado y entradas de control respectivamente [4].

Del mismo modo, podemos hacer la representación del sistema tal que

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

es la representación en espacio de estados de un sistema, pero ahora con coeficientes variantes en el tiempo, donde $A(t), B(t)$ representan matrices con al menos un elemento dependiente del tiempo y donde nuevamente $\dot{x}(t), x(t), u(t)$ representan los vectores del espacio de estado, variables de estado y entradas de control respectivamente [3].

Ahora bien, un sistema consta no únicamente de entradas, sino también de salidas, que son quienes nos dan los valores del sistema después de haberse aplicado el control. Representamos entonces las salidas del sistema tal que:

$$y(t) = \left[y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t) \right]^T$$

representa el vector de salidas del sistema, y puede expresarse de la forma

$$y(t) = b(x(t), u(t), t) \quad (10)$$

siendo entonces su representación en variables de estado

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

la representación en espacio de estados de las salidas del sistema, en donde C, D son matrices de coeficientes constantes y $y(t), x(t), u(t)$ son los vectores de salida, variables de estado y entradas de control respectivamente [3].

Análogamente para un sistema variante en el tiempo tendríamos la expresión

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t).$$

Pudiendo finalmente expresar los dos casos en su forma de matriz en bloques tal que se representan de la forma

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix}$$

para el espacio de estados de un sistema con múltiples entradas, múltiples salidas invariante en el tiempo. Y siendo entonces para el caso variante en el tiempo de la forma

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & B(t) \\ C(t) & D(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix}$$

para un sistema múltiples entradas, múltiples salidas en su forma de matriz en bloques [5].

2.2 REPRESENTACIÓN EN BLOQUES

Para simplificar el estudio de los sistemas, se creó una representación de estos que nos permite visualizar sus diversas entradas y salidas. La representación más común es la representación en bloques, siendo esta particularmente útil ya que facilita una herramienta visual para representar desde sistemas sencillos, hasta sistemas más complejos. Una de las representaciones más simples de un sistema es tal como se muestra en la figura 2.1.

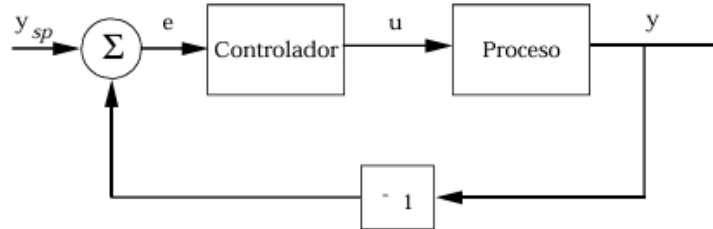


FIGURA 2.1: Diagrama de bloques de un proceso con un control con realimentación [6].

Definimos pues las siguientes representaciones en diagramas de bloques tal que la figura 2.2 representa una suma de dos entradas que dan como resultado una señal de salida. También puede representarse con divisiones en donde se indique el signo de la operación, es decir si en lugar de sumar la señal sumará su inverso aditivo. Inclusive se puede extender a la forma de bloque rectangular con múltiples entradas cada una con su respectivo signo y su respectiva salida [5].

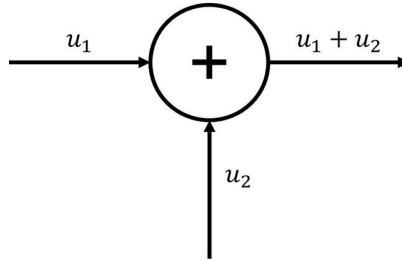


FIGURA 2.2: Representación en diagrama de bloques de una suma de señales.

Del mismo modo, definimos la estructura mostrada en la figura 2.3 representa la división de una señal, en donde simplemente la señal se divide en dos, pero sigue siendo la misma señal.

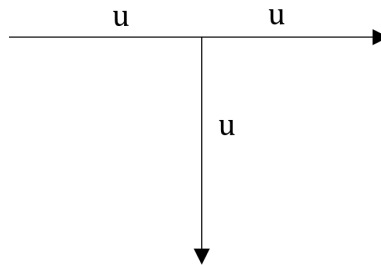


FIGURA 2.3: Representación en diagrama de bloques de una división de señal.

Finalmente, se establece el bloque mostrado en la figura 2.4 como un bloque de procesos [7], el cual representa la entrada de una señal a un proceso y dando como resultado una señal de salida, matemáticamente representando un producto tal que

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

en donde $Y(s)$, $G(s)$, $U(s)$ representan funciones en el dominio de la frecuencia y están relacionadas con la transformada de Laplace de la salida, la entrada de control y la función de transferencia.



FIGURA 2.4: Representación en diagrama de bloques de un bloque de proceso.

Dados estos elementos, podemos desarrollar una representación de los sistemas que nos facilita representar, entender y sobre todo visualizar un sistema de manera sencilla, lo que permite visualizar ciertas configuraciones o partes de un proceso que son complicadas de ver en la parte puramente matemática [8].

2.3 RESTRICCIONES DEL SISTEMA

El siguiente paso para considerar al momento de realizar el control de un sistema es tomar en consideración las restricciones, ya sean físicas, de operación, computacionales, etc. Las más comunes son las restricciones físicas, ya que por lo general son sistemas físicos a los que se les intenta dar una solución teórica que sea aplicable a un proceso real.

Sea cual sea el tipo de restricción que se presente, debemos de ser capaces de representarlas también de manera matemática. Esto es establecer igualdades, desigualdades o cualquier tipo de relación que pueda expresarse en lenguaje matemático y que describa, igual que en el caso de representación del espacio de estados, lo más precisamente posible dichas restricciones. De esta manera podemos garantizar que el control resultante cumple con las características deseadas [3].

El primer tipo de condiciones que podemos proponer son las que surgen de evaluar al inicio y al final del intervalo de tiempo en que se deja operar el proceso. A estas condiciones se les conocen como condiciones en tiempo inicial y en tiempo final respectivamente, denotadas por:

$$x_n(t_0) = x_0$$

para la condición en tiempo inicial, y análogamente

$$x_n(t_f) = x_f$$

para la condición en tiempo final. Esto también se puede aplicar a condiciones del control.

También existen condiciones en forma de intervalos, del tipo:

$$x_0 \leq x_n(t) \leq x_f$$

$$u_0 \leq u_n(t) \leq u_f$$

Estas expresiones nos permiten restringir los valores de las variables y el control a través del tiempo mientras nos definen un espacio en donde el control será válido [1]. Cabe resaltar que estos valores suceden a su vez en el intervalo de tiempo

$$t_0 \leq t \leq t_f, \quad \text{con } t_0, t > 0$$

dado que estaremos trabajando con sistemas físicos que varían en el tiempo y que todos los sistemas físicos presentan causalidad, es decir, el valor de las entradas en el pasado y el presente afectan el estado del sistema, pero jamás se podrá ver afectado por los valores futuros del sistema.

Derivado de esto, es importante destacar la restricción de $t > 0$, pues se asume que todo control sin importar el tiempo en que se aplique al sistema comienza al menos en un tiempo t_0 , el cual representaría el momento en que comenzamos a aplicar el control, es decir, el momento a partir del cual somos capaces de afectar el proceso en adelante. Nada nos limita a comenzar a correr el control en un tiempo inicial $t_0 > 0$ a partir de haber dejado correr el sistema previamente, pero entonces nos condicionamos a analizar el sistema a partir de ese instante, por lo que quedaremos restringidos a $t > t_0$ [3].

Ahora bien, dado que el tiempo representa solo una magnitud que se utiliza para distanciar dos variables en instantes diferentes, podemos sin problema asumir que $t_0 = 0$ si comenzamos a cronometrar a partir del momento de iniciar el control.

2.4 CONTROL *PID*

Uno de los métodos más famosos y probablemente el más utilizado sea el control Proporcional-Integral-Derivativo (*PID* por su acrónimo). Dada su relativa facilidad

y su capacidad de funcionar cerca de las regiones de estabilidad de los sistemas, su uso es casi universal en aplicaciones industriales desde el siglo pasado e incluso al día de hoy [9]. El control *PID* debe su nombre a los elementos que lo componen: la parte proporcional, también conocida simplemente como *P*; la integral, conocido como *I*; y la derivativa, conocida como *D*. La representación matemática de cada uno, que se presenta a continuación, nos ayudará a darles sentido a su función dentro del proceso de control.

2.4.1 CONTROL PROPORCIONAL

En este tipo de control la señal que envía es proporcional al error, y se consigue al multiplicar el error por una constante de proporcionalidad “*K*”, la cual llamaremos ganancia. Este sistema puede representarse tal que

$$u(t) = k(y_d - y) = ke$$

donde “*y_d*” es el valor deseado (también llamado valor objetivo) y “*y*” el valor medido a la salida.

Este recibe su nombre debido a que la señal de control es proporcional al error del sistema. La desventaja de un control proporcional simple radica principalmente en que pueden presentar respuestas que alejen el valor deseado del valor medido, propiciando una acción compensatoria que lo aleje con magnitud igual pero opuesta, y así sucesivamente. Por otro lado puede darse el caso que una vez alcanzado el valor deseado se cese la señal, ocasionando que haya nuevamente error, entrando de nuevo el control en acción hasta alcanzarse el valor deseado, repitiendo el ciclo. En ambos casos se presentan comportamientos oscilatorios, que aunque queden atenuados siguen presentes [6], [10].

2.4.2 CONTROL PROPORCIONAL INTEGRAL

Para este modelo de control se añade un componente integral a la señal, la cual nos permite incorporar información sobre el estado anterior del sistema respecto al estado actual. Tal que un control proporcional integral (*PI*) es descrito por:

$$u(t) = ke(t) + k_i \int_0^t e(\tau) d\tau, \quad \text{con } k_i = \text{ganancia integral}$$

Este nos permite tener mayor estabilidad al momento de alcanzar el valor deseado, ya que no solo permite saber si ya se llegó al valor objetivo, sino que también le permite saber al control qué tanto de ese recorrido ya se realizó. La desventaja de este tipo de control es que aún es susceptible a sobreimpulsos [6], [10].

2.4.3 CONTROL PROPORCIONAL INTEGRAL DERIVATIVO

Para agregar estabilidad y suavizar la respuesta se agrega el término derivativo, este realiza una labor predictiva basada en el comportamiento del error conforme avanza el tiempo. Permite anticipar la respuesta y por ende brindar una señal de salida más suave. Este sistema se representa de la forma

$$u(t) = k \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right),$$

$$k_i = \frac{k}{T_i}, \quad k_d = kT_d.$$

la cual es la estructura matemática general para el control *PID*. Por conveniencia para esta expresión, algunos autores factorizan un término común “*k*” a modo que se definan los valores T_i y T_d , tales que permitan establecer una variación directamente proporcional a “*k*” de todo el sistema [6], [10].

Se puede decir de manera general que el control *PID* consta de tres partes: el control Proporcional, el cual aporta información del presente del sistema; el control Integral, el cual provee información sobre el pasado del sistema; y el control Derivativo, el cual provee información sobre el futuro del sistema.

2.4.4 MÉTODO DE ZIEGLER-NICHOLS PARA SINTONIZACIÓN DE GANANCIAS.

Resumidamente, el método de sintonización Ziegler-Nichols, presentado por John G. Ziegler y Nathaniel B. Nichols en 1942 [11], y que presenta una manera de relacionar las ganancias del control PID con el comportamiento del sistema. Si bien las ganancias no se ajustan a la perfección, proporcionan ajustes de ganancia con buenos desempeños, pudiendo incluso dar una respuesta bastante suavizada dependiendo del sistema al que se aplique.

El método de control Ziegler Nichols nos permite extraer información del sistema bajo control P puro, permitiéndonos obtener los valores de última ganancia k_u y el período de oscilación último P_u , obtenidos aumentando el valor de k_u hasta obtener comportamiento oscilatorio. Los cuales podemos relacionar al control PID mediante la tabla 2.1, extraída de [2].

TABLA 2.1: Reglas de sintonización Ziegler-Nichols basadas en el valor de última ganancia y periodo último de oscilación

Tipo de Control	k_p	T_i	T_d
P	$0.5k_u$	n/a	n/a
PI	$0.45k_u$	$P_u/1.2$	n/a
PID	$0.6k_u$	$0.5P_u$	$0.125P_u$

2.5 CONTROL ÓPTIMO

Se dice que un control es óptimo cuando el control es tal que minimiza o maximiza la medida de desempeño seleccionada mediante la función costo a optimizar. Una ley de control óptimo tiene la estructura

$$u^*(t) = f(x(t), t)$$

para un sistema con retroalimentación o a lazo abierto. Esta función es llamada la ley de control óptimo, está relacionada al tiempo t y el valor del estado en dicho tiempo siendo obtenida siguiendo el principio de optimalidad [1].

2.5.1 PRINCIPIO DE OPTIMALIDAD Y FUNCIÓN COSTO

El principio de optimalidad establece que la trayectoria óptima entre dos puntos (vease la figura 2.5) es aquella tal que minimiza o maximiza la función costo, la cual será abordada más adelante en esta misma sección. Cabe aclarar que la trayectoria óptima no es necesariamente la más corta o la más directa, si no la que optimiza la función costo, por lo que su obtención no siempre es intuitiva.

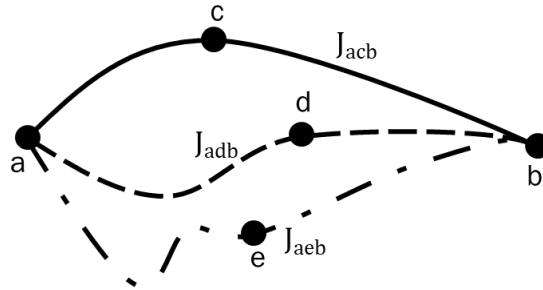


FIGURA 2.5: Posibles trayectorias desde el punto “a” al punto “b”

La función de costo es aquella que cuantifica la energía necesaria por parte del estado y del control, basados en la medida de desempeño seleccionada para el mismo y tiene la forma

$$J(x(t), u(t), t) = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau$$

Donde t_0 y t_f son el tiempo inicial y final respectivamente, h y g son funciones escalares relacionadas con el estado en tiempo final y la medida de desempeño respectivamente.

Esto abre la puerta a toda una familia de soluciones que optimizan el sistema dentro del espacio de control S_1 , el subespacio de controles admisibles S_2 y los subespacios correspondientes a los controles que satisfacen el principio de optimalidad S_3

y que generan trayectorias admisibles S_4 , por lo que la solución al control óptimo vivirá en la región comprendida por $S_2 \cap S_3 \cap S_4$ que viven en S_1 [1], ver figura 2.6.

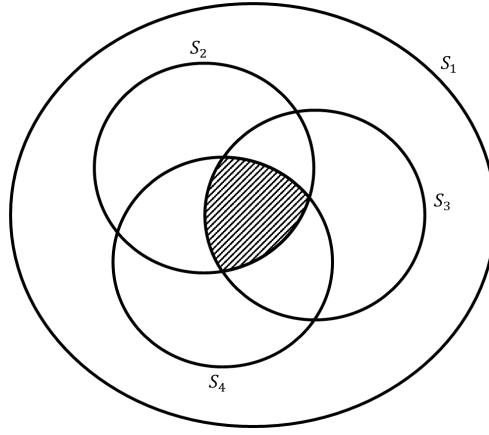


FIGURA 2.6: Subespacios del espacio de control óptimo

2.5.2 ECUACIÓN DE HAMILTON-JACOBI-BELLMAN

Siguiendo el principio de optimalidad, las trayectorias óptimas que viven en nuestro espacio de soluciones al control óptimo son, por definición, trayectorias óptimas que se corresponden a los valores óptimos de la función de costo [1]. Para la minimización de la función costo, se tiene entonces

$$J^*(x(t), t) = \min_{u(\tau), t \leq \tau \leq t_f} \left\{ \int_t^{t_f} g(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + h(x(t_f), t_f) \right\}$$

expresión la cual, tras desarrollarse nos da el resultado

$$0 = J_t^*(x(t), t) + \min_{u(t)} \{ g(x(t), u(t), t) + J_x^{*T}(x(t), t) [a(x(t), u(t), t)] \}$$

Ahora, definimos el Hamiltoniano tal que:

$$H(x(t), u(t), J_x^*, t) \triangleq g(x(t), u(t), t) + J_x^{*T}(x(t), t) [a(x(t), u(t), t)]$$

con el Hamiltoniano para el contro óptimo tal que

$$H(x(t), u^*(x(t), J_x^*, t), J_x^*, t) = \min_{u(t)} \{ H(x(t), u(t), J_x^*, t) \}$$

se define la Ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman:

$$0 = J_t^*(x(t), t) + H(x(t), u^*(x(t), J_x^*, t), J_x^*, t)$$

2.5.3 CONTROL RISK-SENSITIVE

El control Risk-Sensitive (RS) es un método de control óptimo estocástico que se deriva del método LQG (Linear Quadratic Gaussian), el cual se enfoca en realizar la minimización de un funcional de costo cuadrático, pero añadiendo el peso del riesgo a la expresión matemática del costo, realizando ahora la optimización de este nuevo funcional. Esto genera trayectorias acordes al impacto del riesgo, que es de donde deriva su nombre “Risk-Sensitive”, sensible al riesgo en español. Acorde al valor que se asigne al riesgo, el sistema seguirá trayectorias con mayor o menor riesgo según se establezca por quien diseña el sistema a controlar [12], [13], [14].

El modelo matemático del control Risk Sensitive parte el problema de control RS Estocástico y su estructura base está dada por

$$dx(t) = f(x(t), u(t), t) dt + \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\gamma^2}} dW(t)$$

$$x(0) = x_0$$

que se rige bajo la función costo exponencial cuadrático de la forma:

$$J = \frac{1}{\varepsilon} \log \mathbb{E} \left[\exp \left(\varepsilon \left(\int_0^T L(x(t), u(t), t) dt + G(x(t_0)) \right) \right) \right]$$

y que al minimizarse o maximizarse a través de la ecuación de Hamilton Jacobi Belman, nos permite obtener la estructura de una ley de control óptimo acorde al sistema y al criterio que se desee minimizar [15], [16], [17].

Este método surge a finales del siglo XX como una alternativa que permite no solo optimizar el desempeño de un sistema, sino también la sensibilidad de trayectorias consideradas extremas, peligrosas o riesgosas, penalizando o premiando las trayectorias con mayor riesgo según se requiera en el diseño [18], [19]. La estructura que presenta la función costo para RS nos permite ponderar tanto los efectos de las trayectorias del sistema, como los efectos del estado del sistema en tiempo final, pero ahora bajo la influencia del factor de riesgo “ ε ” [12].

El desafío que presenta este método es que para su resolución requiere herramientas matemáticas mediante métodos numéricos, dada la necesidad de resolución de ecuaciones diferenciales de Ricatti y el desafío de incluir la parte del valor esperado derivado de la naturaleza estocástica, como la implementación del método Monte-carlo, para poder obtener un resultado de la parte estocástica del valor esperado en el costo [20], [21], [22], [17].

Aunque el método de control RS presentado está planteado para sistemas lineales, el enfoque RS puede ser adaptado para su aplicación a sistemas no lineales. Dependiendo de la naturaleza del sistema y si admite técnicas para su solución directa como sistema no lineal, se puede recurrir a la linealización del sistema para obtención de ganancias y parámetros; siendo el RS un método ideal para esto dado su característica de sensibilidad al riesgo, pudiendo disminuir los efectos negativos de las no linealidades [23], [24], [25], [26], [27].

Cabe también mencionar que, al obtener la matriz de ganancias de control del sistema, esta requerirá ser definida positiva. Esto es: sea A una matriz cuadrada simétrica de dimensiones $n \times n$, será definida positiva si para cualquier vector no nulo “ x ” se cumple que

$$x^T A x > 0$$

lo que podemos verificar valiéndonos del criterio de Sylvester [28], el cual establece que la matriz A será definida positiva si y solo si todas sus menores principales y su determinante son positivos. Dependiendo del caso, puede bastar con que sean no negativos, lo cual nos dejaría una matriz semidefinida positiva.

2.6 MECÁNICA LAGRANGIANA

La mecánica lagrangiana surge como una nueva perspectiva para abordar la mecánica clásica a partir del principio de mínima acción. Fue desarrollada por Joseph-Louis Lagrange durante el siglo XVIII, partiendo del anteriormente mencio-

nado principio de mínima acción y permite formular las ecuaciones del movimiento a partir de la energía cinética y potencial de un sistema [29], [30].

El estudio de sistemas desde este punto de vista llega proporcionando una potente herramienta para la resolución de problemas complejos en las áreas de la física y la ingeniería. Una de las principales bondades de la mecánica Lagrangiana es la capacidad que tiene de tratar sistemas con restricciones, involucrarlas en el proceso y proporcionar modelos matemáticos certeros de sistemas que pueden llegar a ser bastante complejos de analizar desde la mecánica Newtoniana [31], [32].

2.6.1 PRINCIPIO DE MÍNIMA ACCIÓN

El principio de mínima acción, también conocido como principio de Hamilton es el tema en el que se sustenta la mecánica Lagrangiana. Este establece que el movimiento de un sistema entre dos puntos es tal que minimiza una magnitud llamada acción, normalmente denotado por la letra S [33], [34]. Esta se encuentra definida de la forma

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$$

en donde L es el Lagrangiano, el cual es

$$L = T - V$$

en dónde T es la energía cinética del sistema y V es la energía potencial del sistema. Mediante la minimización de esta expresión es que se consigue obtener la trayectoria que sigue el sistema, ya que gasta la mínima cantidad de energía a lo largo del tiempo [35], [36].

2.6.2 OBTENCIÓN DE LA ECUACIÓN DE EULER-LAGRANGE

La ecuación fundamental de la mecánica Lagrangiana es la ecuación de Euler-Lagrange [37], [38], su obtención se deriva de la propia ecuación de la acción S , bajo el supuesto de que la acción debe minimizarse, por lo que se implica que la trayectoria que debe seguirse es tal que la variación de esta debe ser cero, por lo que para conseguir esto se utilizan herramientas del cálculo variacional [39], [40], dando como resultado que, para el Lagrangiano, se debe cumplir que:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

En donde q_i representa las coordenadas generalizadas del Sistema y $\dot{q}_i$ las primeras derivadas temporales de dichas coordenadas generalizadas. La ecuación de Euler-Lagrange nos brinda una descripción de las dinámicas del sistema a partir de su Lagrangiano, dada su misma estructura, nos permite obtener la descripción de sistemas complejos, considerando sus restricciones inclusive en sistemas en coordenadas no cartesianas [37], [41].

2.6.3 LA ECUACIÓN DE EULER-LAGRANGE EN PRESENCIA DE FUERZAS NO CONSERVATIVAS

Cabe mencionar que la ecuación de Euler-Lagrange en su estructura anterior nos permite describir los sistemas bajo la acción de las fuerzas que se derivan de un potencial, es decir, las fuerzas que derivan de simetrías y propiedades conservativas de los componentes del sistema en si, sin tomar en cuenta algún factor externo. Sin embargo, dado que hay sistemas que se encuentran sometidos a fuerzas que no derivan de un potencial, se requiere también la ecuación de Euler-Lagrange en presencia de fuerzas que no derivan de un potencial, siendo de la forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i$$

en donde ahora, el término Q_i representa las fuerzas generalizadas no conservativas que participan en el sistema [30], [31], [32].

Es gracias a este nuevo término que podemos incluir efectos de fuerzas como la fricción, el arrastre, resistencia al viento, o cualquier otra fuerza no procedente de un potencial, permitiéndonos extender sus áreas de aplicación a un rango mucho más amplio de sistemas.

2.6.4 PARTICULARIDADES DE LA MECÁNICA LAGRANGIANA

Podemos pues resumir las bondades de la mecánica Lagrangiana en:

- **Permitir manejar sus sistemas desde sus coordenadas generalizadas:** Permitiendo analizar el sistema desde las variables que participan directamente en la dinámica del mismo, permitiendo simplificar los modelos obtenidos, como es el caso del péndulo.
- **Incorporar las restricciones del sistema:** Nos permite del mismo modo incorporar las restricciones a las que está sometido el sistema, jugando un papel fundamental en la propia simplificación del sistema en sus coordenadas generalizadas incluso en geometrías no cartesianas rectangulares.
- **Análizar de sistemas no conservativos:** Dada su capacidad de permitirnos analizar sistemas con presencia de fuerzas no conservativas, permiten desde incorporar efectos de pérdidas energéticas, hasta efectos sobre el sistema de elementos externos como motores o actuadores.
- **Relacionar con el principio de mínima acción y conservación de la energía:** Nos muestra también a través de su estudio que, dado que deriva de seguir el principio de mínima acción, lo que, a grandes rasgos y de manera muy general, podemos relacionar directo a la energía del sistema (y en vista de que este es precisamente un método de variación de energía), al optimizar la

acción, propiedades relacionadas a la conservación de la energía y a la presencia de simetría emergen directamente como consecuencia.

La mecánica Lagrangiana se presenta también como una herramienta en el área de control. El Lagrangiano es esencial para el diseño y análisis de modelos dinámicos de los manipuladores y actuadores, en las que sus modelos matemáticos pueden ser obtenidos mediante los métodos de variación de energía.

Aunado a esto, la mecánica Lagrangiana no se aplica únicamente en el diseño de los sistemas de control, si no también en el desempeño de las restricciones y trayectorias que los robots pueden desempeñar para realizar una tarea, optimizando el rendimiento de los sistemas en términos de energía, tiempo, consumo de recursos o seguimiento específicos de trayectorias para el cumplimiento de una labor específica [38], [42].

2.7 EL PÉNDULO SIMPLE

El péndulo simple es uno de los sistemas más estudiados en la mecánica clásica, el ejemplo de oscilador más común. Pese a tratarse de un sistema aparentemente sencillo, su estudio ha sido fundamental en el desarrollo de teoría de sistemas dinámicos, control y modelado matemático. El estudio del comportamiento del péndulo puede abordarse tanto desde sus descripciones en su modelo linealizado, que facilita el análisis en condiciones de pequeñas oscilaciones; como en su modelo no lineal, que describe su comportamiento en amplitudes más amplias, pero a cambio añade un desafío mayor al estudio del sistema [43].

La descripción de lo que es un péndulo es relativamente simple, este consiste en un objeto de masa “ m ” suspendido, acoplado a un punto fijo mediante una cuerda, varilla o eslabón rígido (que no puede alargarse ni deformarse) de longitud “ l ”. El movimiento se desempeña en el plano vertical, impulsado por la fuerza gravitacional,

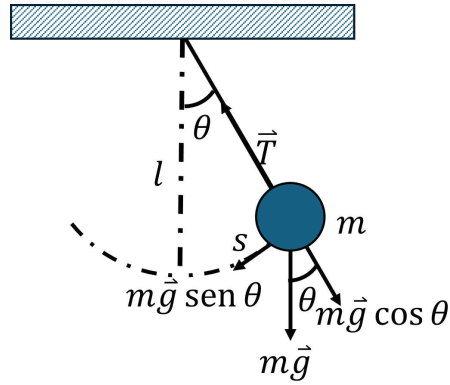


FIGURA 2.7: Diagrama de cuerpo libre del péndulo simple.

realizando en consecuencia oscilaciones periódicas [43]. Un esquema del modelo se presenta en la figura 2.7.

Uno de los referentes más antiguos del estudio de este sistema se remonta al siglo XVII, cuando Galileo Galilei lo utilizó para estudiar el movimiento oscilatorio, posteriormente, en 1687 Isaac Newton formuló las leyes del movimiento, que dieron paso a una mejor comprensión de la dinámica de sistemas mecánicos, entre ellos el péndulo [44]. El péndulo simple ha desempeñado un papel crucial para el desarrollo de la física y la ingeniería, siendo fundamental para el estudio de sistemas que desempeñan un movimiento armónico simple, o en general sistemas que presenten vibraciones u oscilaciones.

2.7.1 MODELO LINEALIZADO DEL PÉNDULO SIMPLE

Para un primer acercamiento al estudio del péndulo y con objetivo de facilitar el estudio de sus propiedades más fundamentales, se realiza la linealización del modelo del péndulo. Esto resulta de la simplificación del modelo no linealizado del péndulo:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0$$

donde “ g ” es la gravedad y “ l ” es la longitud de la varilla o eslabón. Llevando este modelo a su versión linealizada utilizando la aproximación

$$\sin(\theta) \approx \theta, \quad \text{para } \theta \text{ pequeños}$$

obteniendo el modelo linealizado de la forma [45]:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

Algunos modelos utilizan la siguiente notación

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0,$$

en donde ω representa la frecuencia de oscilación del sistema para oscilaciones pequeñas.

La justificación del modelo linealizado del péndulo no solo viene por comodidad matemática, esta tiene una justificación numérica, fundamentada mediante la comparación de los valores del ángulo contrastados contra el valor del seno del ángulo expuesta por Serway y Jewett en [46], mostrada en la tabla 2.2.

Como se puede observar, hasta 30° apenas hay una desviación de aproximadamente el 5 % del seno del ángulo respecto al valor del ángulo. Cabe mencionarse que, si se compara el valor en grados del ángulo vs el seno, las desviaciones parecerían ser excesivas inclusive desde 1. Sin embargo, es importante destacar que en matemáticas los valores angulares que se utilizan en las funciones trigonométricas siempre se manejan en radianes, ya que es la relación natural entre la función trigonométrica y cualquier circunferencia en relación a su radio. El análisis del sistema linealizado del péndulo suele ser suficiente y bastante eficiente para el desempeño de sistemas, como muestran los trabajos mostrados en [47], [48].

2.7.2 MODELO NO LINEAL DEL PÉNDULO

En cuanto al modelo no lineal, este es más preciso ya que no realiza ninguna aproximación sobre el seno del ángulo. La ecuación de movimiento que lo describe

TABLA 2.2: Comparación de valores de θ con el seno de θ y su desviación porcentual respectiva

Ángulos y senos de ángulos			
Ángulo en grados	Ángulo en radianes	Seno del ángulo	Porcentaje de diferencia
0°	0.0000	0.0000	0.0 %
1°	0.0175	0.0175	0.0 %
2°	0.0349	0.0349	0.0 %
3°	0.0524	0.0523	0.0 %
4°	0.0873	0.0872	0.1 %
5°	0.1745	0.1736	0.5 %
10°	0.2618	0.2588	1.2 %
15°	0.3491	0.3420	2.1 %
30°	0.5236	0.5000	4.7 %

puede obtenerse de varias maneras, una de ellas es usar métodos de variación de energía como los mostrados previamente en la sección de mecánica Lagrangiana. El modelo resulta de la aplicación del Lagrangiano del modelo del péndulo, descrito por

$$L = T - V$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

$$V = mgl \cos(\theta)$$

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl \cos(\theta)$$

que al ser aplicado a la ecuación de Euler-Lagrange, da como resultado el modelo:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0.$$

Este modelo es no lineal ya que el comportamiento del seno del ángulo es una función no lineal, implicando que el comportamiento entre la variable y su efecto en el sistema no es directamente proporcional. Además, en este modelo, conforme

las oscilaciones tienden a valores angulares mayores, las aproximaciones lineales se vuelven menos precisas y el comportamiento del sistema se torna más complejo [45], [49].

El desafío de este modelado del sistema radica en los medios utilizados para abordar la no linealidad, ya que además de ser un sistema no lineal, no presenta características polinómicas directas que permitan su análisis inmediato. Pudiendo requerir del uso de métodos numéricos o expansión en series de Taylor para aproximar términos, cortando el número de elementos de la serie utilizados acorde al nivel de precisión que se busque. Alternativamente se pueden utilizar simulaciones computacionales usando variación de parámetros para obtener datos y valores de su comportamiento. Estos métodos darían resultados similares para el sistema linealizado en ángulos pequeños, pero serían diferentes para valores angulares más grandes.

Un buen ejemplo de las diferencias entre el péndulo en su modelo linealizado y su modelo no linealizado es en la obtención de su frecuencia, ya que mientras en el modelo linealizado es una relación sencilla, para el modelo no lineal adquiere una estructura más complicada. Sabiendo pues que la frecuencia se define como

$$f = \frac{1}{T}$$

donde T es el periodo, la obtención del periodo en el modelo no lineal tiene la estructura

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\theta_f} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_f)}}$$

por lo que para obtener la frecuencia, primero se debe obtener el valor numérico de la integral y posteriormente se debe elevar a la menos uno [49]. Esta estructura es peculiar ya que la integral que se presenta es una integral no elemental, es decir, no tiene una estructura que pueda ser definida en términos de las funciones conocidas, por lo que se debe resolver utilizando otros métodos, como los métodos numéricos.

La expresión matemática obtenida nos revela más sobre el comportamiento del péndulo en su modelo no lineal; en este caso la frecuencia del péndulo depende de

su amplitud, es decir a medida que la amplitud aumenta, el período se incrementa, y por lo tanto, la frecuencia disminuye. Este comportamiento no es capturado por el modelo linealizado, ya que para oscilaciones pequeñas la desviación entre la frecuencia real y la del modelo no se desvían significativamente, sin embargo para el modelo no lineal esto puede presentar efectos significativos en la medida en que el ángulo varía. La frecuencia no lineal se ha discutido en diversas investigaciones, donde se ha utilizado para modelar sistemas más complejos [50], [51], [52], [53].

2.7.3 APLICACIONES DEL PÉNDULO SIMPLE

Las aplicaciones del péndulo a lo largo de la historia han ido desde el uso para el estudio de principios fundamentales de la dinámica y del oscilador armónico, la resonancia y fenómenos relacionados a la vibración, llegando hasta las aplicaciones actuales en el área de control. Tal es el caso de los brazos robóticos, en los que la presencia de perturbaciones y estabilización alrededor de un punto de equilibrio, requieren la aplicación de un sistema de control robusto y/o de control óptimo para asegurar que el sistema se mantenga estable en diversas condiciones operativas [54], [55], [56], [57], [58].

2.8 FILTRADO

2.8.1 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL FILTRADO

Para introducir el concepto de filtrado es necesario introducir el concepto de variable aleatoria. En términos muy generales, en lo que respecta al tema abordado en este escrito, una variable aleatoria W es una función que toma un valor de un

espacio muestral Ω y le asigna un valor numérico real, es decir

$$W : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

puede extenderse esta definición a un vector “ X ” de n variables aleatorias, tal que se define como:

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Se puede entonces definir en términos generales a una variable aleatoria como todo resultado en un espacio muestral al que se le asigna un valor numérico por medio de una función [59], [60]. Para comenzar a abordar el tema del filtrado tenemos que, dado un vector X de variables aleatorias de dimensión “ n ”, para un caso de dimensiones finitas, el cual puede ser generalizado posteriormente, supongamos que se tiene $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ son variables aleatorias con valor esperado cero y varianza finita, es decir

$$\mathbb{E}[Y_i] = 0, \quad \text{Var}(Y_i) < \infty$$

dejando que X sea otro vector de variables aleatorias, de valor esperado cero y varianza finita, un estimador lineal de X dado $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$, es cualquier combinación lineal:

$$\hat{X} = \sum_i \alpha_i Y_i$$

y el error de media cuadrática

$$\mathbb{E} \left[(X - \hat{X})^2 \right]$$

tal que las α_i minimizan este error, para lo cual se hace la derivada parcial respecto a α_i , siendo que estos valores que minimizan la expresión suceden cuando

$$\alpha_i = \frac{\mathbb{E}[Y_i X]}{\mathbb{E}[Y_i^2]}$$

Ahora, reinterpretando en términos geométricos, proponemos el siguiente espacio

$$H = \left\{ \sum_{i=1}^n \beta_i Y_i + \beta_{n+1} Y_n \mid \beta \in \mathbb{R}^{n+1} \right\}$$

para U y $V \in H$ definimos el producto interno tal que

$$(U, V) = \mathbb{E}[UV]$$

y la norma

$$\|U\| = \sqrt{(U, U)}$$

en donde $U \perp V$ si $(U, V) = 0$. Y donde para cada $U_1, \dots, U_k \in H$, el subespacio generado por $U_1, \dots, U_k$ es:

$$L(U_1, \dots, U_k) = \left\{ \sum_{i=1}^k \beta_i U_i \mid \beta \in \mathbb{R}^k \right\}$$

Decimos que $V \perp L(U_1, \dots, U_k)$ si $V \perp U \forall U \in L(U_1, \dots, U_k)$. Ahora, decimos que $\hat{X}$ es el estimador lineal de mínimos cuadrados, caracterizado por estar en el espacio generado por las Y_i y que $X - \hat{X}$ es perpendicular al espacio generado por las Y_i , esto es:

$$\hat{X} \in L(Y_1, \dots, Y_n)$$

$$X - \hat{X} \perp L(Y_1, \dots, Y_n)$$

Entonces, supongamos que $Z \in L(Y_1, \dots, Y_n)$, entonces:

$$Z = \sum_{i=1}^n \beta_i Y_i$$

para alguna $\beta \in \mathbb{R}^n$, entonces $X - Z \perp L(Y_1, \dots, Y_n)$ si y solo si $X - Z \perp Y_i \forall i$, esto es

$$(X, Y_i) = (Z, Y_i) = \beta_i (Y_i, Y_i)$$

por tanto, $\beta_i = \alpha_i$ es un caso válido, demostrando entonces que

$$Z = \hat{X}$$

Con esto se demuestra que $\hat{X}$ es la proyección ortogonal de X en $L(Y_1, \dots, Y_n)$. En esta demostración no se implica directamente que cada Y_i sea mutuamente ortogonal; sin embargo, se puede construir una base ortogonal u ortonormal, según se requiera, siguiendo el procedimiento de “Gram–Schmidt” [59].

2.8.2 EL CASO NORMAL

Un vector aleatorio W de dimensión “ n ” tiene una distribución normal $N(m, Q)$ si su función característica tiene la forma:

$$\phi_W(t) = \mathbb{E} \left[e^{it^T W} \right]$$

Para mostrar esto usamos la definición de la función característica y obtenemos

$$\begin{aligned} \phi_W(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{it^T w} f_W(w) dw \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{it^T w} \frac{1}{\sqrt{2\pi Q}} e^{-\frac{(w-m)^T Q^{-1} (w-m)}{2}} dw \\ \phi_W(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi Q}} e^{-\frac{(w-m)^T Q^{-1} (w-m)}{2} + it^T w} dw \end{aligned}$$

para lo cual, mediante manipulación algebraica, le damos la estructura necesaria para poder aplicar integral de Gauss, obteniendo la forma

$$\begin{aligned} \phi_W(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi Q}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(w-(m+iQt))^T Q^{-1} (w-(m+iQt))}{2} + im^T t - \frac{1}{2} t^T Q t} dw \\ \phi_W(t) &= \frac{e^{im^T t - \frac{1}{2} t^T Q t}}{\sqrt{2\pi Q}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(w-(m+iQt))^T Q^{-1} (w-(m+iQt))}{2}} dw \\ \phi_W(t) &= \frac{e^{im^T t - \frac{1}{2} t^T Q t}}{\sqrt{2\pi Q}} \sqrt{2\pi Q} \\ \phi_W(t) &= e^{im^T t - \frac{1}{2} t^T Q t} \end{aligned}$$

donde $m \in \mathbb{R}^n$ y Q es una matriz no negativa definida (semidefinida positiva). Y por tanto, efectivamente podemos decir que:

$$\mathbb{E}[W] = m, \quad \text{Cov}(W) = Q$$

De aquí podemos extraer que:

Definición 2.1. *La combinación lineal de variables aleatorias normales es normal.*

Definición 2.2. *Cada matriz Q no negativa definida es una matriz de covarianza de un vector normal aleatorio.*

Ahora, proponemos la siguiente expresión:

$$\tilde{X} = X - \hat{X}$$

Entonces $\hat{X}$ y $\tilde{X}$ son ortogonales, y normales por la definición (2.1), mencionado anteriormente; por tanto, son independientes. Con esto, pasamos a obtener la función característica de X dado Y :

$$\begin{aligned}\phi_{X|Y}(t; Y) &= \mathbb{E} [e^{itX} | Y] = \mathbb{E} [e^{it(\tilde{X} + \hat{X})} | Y] \\ \phi_{X|Y}(t; Y) &= e^{it\hat{X}} \mathbb{E} [e^{it\tilde{X}} | Y] = e^{it\hat{X}} \mathbb{E} [e^{it\tilde{X}}]\end{aligned}$$

dado que $\hat{X} \in L(Y)$ y $\tilde{X}$ es independiente de Y [59].

Ahora, dado que se busca minimizar $\tilde{X}$ y sabiendo que es normal, entonces $\tilde{X} \sim N(0, \sigma^2)$, siendo $\sigma^2 = \text{Var}(\tilde{X})$, y con base en la función característica demostrada al inicio de esta sección, podemos expresar la función característica condicional tal que:

$$\phi_{X|Y}(t; Y) = e^{it\hat{X} + \frac{1}{2}t^2\sigma^2}$$

y con esto podemos ver claramente que esto tiene un comportamiento del tipo $N(\hat{X}, \sigma^2)$ y, por tanto, podemos definir el valor esperado condicional tal que:

$$\hat{X} = \mathbb{E}[X|Y]$$

Ahora, para $\tilde{X}$, minimizamos el valor esperado tal que:

$$\mathbb{E} [(X - \mathbb{E}[X])^2] = \min_{\alpha \in \mathbb{R}} \{ \mathbb{E} [(X - \alpha)^2] \}$$

Para lo cual ahora, considerando el mínimo cuadrado no lineal, podemos encontrar una función $f(Y)$ tal que $\mathbb{E}[(X - f(Y))^2]$ se minimice. Entonces, introduciendo la densidad condicional $g_{X|Y}(x; y)$ y la función de densidad marginal $g_Y(y)$, entonces:

$$\mathbb{E} [(X - f(Y))^2] = \int_{\mathbb{R}^n} g_Y(y) \left(\int_{\mathbb{R}} (x - f(y))^2 g_{X|Y}(x; y) dx \right) dy$$

Pero como $g_Y(y) > 0$ para todo “ y ”, esta expresión se minimiza minimizando la expresión integral para cada “ y ”; sin embargo, sabemos que esta es mínima cuando

se cumple que:

$$f(y) = \mathbb{E}[X | Y = y] = \int_{\mathbb{R}} x g_{X|Y}(x; y) dx = \hat{X}$$

Entonces, $\hat{X}$ es el mejor estimador lineal, pero además es el mejor de todos los estimadores, lineales o no, ya que es el valor esperado condicional.

Podemos concluir entonces que, dada la covarianza de (X, Y) , podemos calcular el mejor estimador lineal $\hat{X}$ mediante proyección. Ahora bien, cabe aclarar que esto no implica que $\hat{X}$ sea el mejor estimador para sistemas no lineales, ya que este corresponde al valor esperado condicional $\mathbb{E}[X|Y]$; sin embargo, nos indica que siempre que (X, Y) sean normales, entonces $\mathbb{E}[X|Y]$ y $\hat{X}$ coinciden.

Esto muestra entonces que, dadas todas las posibles distribuciones de (X, Y) y dada una matriz de covarianza, la distribución normal maximiza el mínimo error de estimación, esto es:

$$\mathbb{E} \left[(X - \mathbb{E}[X | Y])^2 \right] \leq \mathbb{E} \left[(X - \hat{X})^2 \right]$$

siendo la igualdad el caso de la distribución normal [59].

2.8.3 FILTRO DE KALMAN

El filtro de Kalman es un esquema recursivo que nos permite estimar el estado de un sistema estocástico dado un proceso de observación, esto es, dado un sistema representado por la ecuación diferencial:

$$dx = A(t)x dt + C(t) dw_t, \quad x_0 = x$$

y el proceso de observación:

$$dy = H(t)x dt + G(t) dv_t, \quad y_0 = 0$$

en donde w_t y v_t son procesos con incrementos ortogonales, que generan subespacios ortogonales, y a su vez la variable aleatoria “ x ” es ortogonal a las variables w_t y v_t .

Pudiendo entonces representar la parte de las observaciones del modo:

$$\dot{y}_t = H(t)x_t + G(t)dW_t$$

La cual sería la forma de “ruido blanco” del sistema, siendo el ruido blanco un caso particular del movimiento browniano, definido de manera general como un proceso de media cero, covarianza cero y varianza σ^2 .

Y ahora, bajo el supuesto de que las matrices A , C , H y G son continuas a trozos y además el producto GG^T es definido positivo. El error de filtrado queda definido tal que:

$$\tilde{x}_t = x_t - \hat{x}_t$$

y su proceso de innovación correspondiente:

$$dw_t = dy_t - H\hat{x}_t dt = H\tilde{x}_t dt + G dv_t$$

Podemos definir el filtro de Kalman (en su versión continua), dado por la ecuación diferencial estocástica:

$$d\hat{x}_t = (A - PH^T(GG^T)^{-1}H)\hat{x}_t dt + PH^T(GG^T)^{-1}dy_t, \quad \hat{x}_0 = \mathbb{E}[x] = m_0$$

o en su estructura alternativa:

$$d\hat{x}_t = A\hat{x}_t dt + H^T(GG^T)^{-1}dw_t \quad (2.1)$$

en donde $P = P(t) = \mathbb{E}[\tilde{x}_t\tilde{x}_t^T]$ es la matriz de covarianza del error, y satisface la ecuación diferencial de Riccati:

$$\dot{P} = CC^T - PH^T(GG^T)^{-1}HP + AP + PA^T, \quad P(0) = \text{cov}(x) = P_0 \quad (2.2)$$

Con esto mostramos que el filtro de Kalman sigue las mismas dinámicas que las ecuaciones de estado, pero ahora basado en las proyecciones de la estimación $\hat{x}_t$, y el término $H^T(GG^T)^{-1}$, el cual corresponde a un sistema con incrementos ortogonales y sustituye al término C de la expresión original [59], [61].

A veces es conveniente usar directamente la observación “ y ”, en lugar de “ $\dot{y}$ ”, ya que la dinámica del modelo lo permite. Partiendo del sistema:

$$dx = A(t)x dt + C(t) dw_t$$

y el proceso de observación:

$$y = H(t)x dt + G(t) dV_t.$$

Se obtiene la ecuación del filtro, redefiniendo por comodidad $\hat{x} = m$:

$$\dot{m} = Am + K(t)(y - Hm)$$

en donde

$$K(t) = P(t)H^T R^{-1}$$

y a su vez

$$\dot{P}(t) = AP(t) + P(t)A^T + CC^T - PH^T(GG^T)^{-1}HP$$

por lo que es fácil verificar, analizando elemento a elemento, que es un sistema equivalente del sistema original conformado por las ecuaciones (2.1) y (2.2) [59], [61].

En su modelo cuando hay presencia de una señal de control, introducimos esta misma señal al modelo del filtro [62], permitiendo al filtro conocer que hay presencia de una señal de control, del modo:

$$\dot{m} = Am + Bu + K(t)(y - Hm)$$

2.8.4 FILTRO RS

Para el caso del filtro RS, es igualmente un esquema que nos permite estimar el estado de un sistema estocástico dado un proceso de observación, pero introduciendo un factor de sensibilidad al riesgo. El sistema parte del modelo estocástico

$$dx_t = f(x_t) + \sqrt{\frac{\epsilon}{2\gamma^2}} dW_t$$

en donde $f(x_t)$ representa la dinámica del sistema y W un movimiento browniano, siendo para el caso del modelo en espacio de estados

$$dx = A(t)x dt + C(t) dw_t, \quad x_0 = x$$

y el proceso de observación

$$dy = H(t)x dt + G(t) dv_t$$

pudiendo entonces representar la parte de las observaciones del modo

$$\dot{y}_t = H(t)x_t + G(t)dW_t$$

siendo igualmente esta la forma de “ruido blanco” del sistema.

Bajo el criterio de costo exponencial cuadrático medio a minimizar

$$J = \epsilon \log \mathbb{E} \left[\frac{1}{\epsilon} \int_0^T H(x_t, m_t, t) dt \mid Y_t \right]$$

$$H(x_t, m_t, t) = e^T h e, \quad e = (x_t - m_t)$$

en donde ahora se parte no de la ecuación HJB, como en el caso del control RS, sino ahora de la densidad condicionada no normalizada de x_t , dadas las observaciones Y_t , denotada por la expresión $q(t, x)$ para el intervalo $0 \leq t \leq T$. Esta satisface la ecuación diferencial de Zakai, tal como se realiza en [16].

Obteniendo la estructura

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A\hat{x} + Q^{-1}(t)(y - H\hat{x})$$

en donde $Q = Q(t)$ satisface la ecuación diferencial de Riccati:

$$\dot{Q}(t) = -(A^T Q + Q A) + Q^T Q - H^T H$$

Redefiniendo por comodidad con la sustitución $x = \hat{m}$, y obtenemos:

$$\dot{m} = A m + Q^{-1}(t)(y - H m)$$

Un elemento a resaltar es que, en este caso, se utiliza Q^{-1} en lugar de usarse Q directamente, por lo que es importante exista la matriz inversa al resolver la ecuación diferencial de las ganancias antes de aplicarse al filtro. [15].

De igual manera que en el filtro de Kalman, cuando hay presencia de una señal de control, introducimos esta señal al modelo [62], permitiendo al filtro conocer la presencia de una señal de control, obteniendo el modelo:

$$\dot{m} = Am + Bu + Q^{-1}(t)(y - Hm)$$

CAPÍTULO 3

METODOLOGÍA

3.1 DINÁMICA DEL SISTEMA

Para dar paso a la simulación se comenzará por establecer la representación en espacio de estados del sistema del péndulo. Para esto, se hará uso de la mecánica Lagrangiana, comenzamos con describir el sistema asociado al péndulo con motor mostrado a continuación en la figura 3.1:

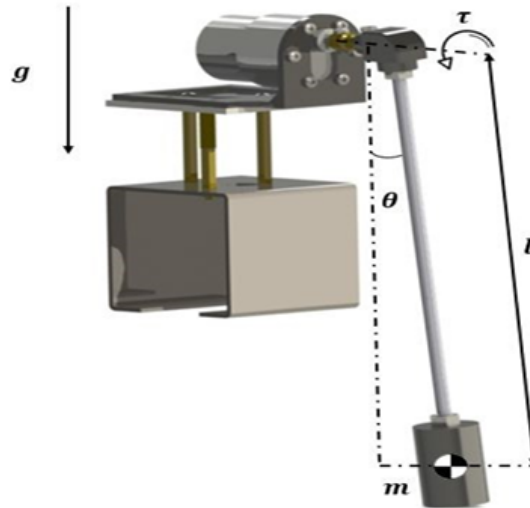


FIGURA 3.1: Diagrama del sistema asociado al péndulo con motor [58].

Con referencia en el punto de anclaje del péndulo al soporte, y tomando “ x ” y “ y ” positivos, el sistema quedaría descrito por:

$$\begin{aligned}x &= l \sin(\theta) & y &= l \cos(\theta) \\ \dot{x} &= l \cos(\theta) & \dot{y} &= -l \sin(\theta)\end{aligned}$$

entonces:

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \\ V &= mgl \cos(\theta)\end{aligned}$$

obteniendo:

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl \cos(\theta)$$

Resolviendo primero la parte de la ecuación de Euler Lagrange aplicada al péndulo

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}(t)_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial Q(t)_i}$$

obtenemos

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl \sin(\theta)$$

dado que en nuestro sistema de control hay presencia de una fuerza no derivada de un potencial, usamos entonces

$$Q(t)_i = u - \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\gamma^2}} dW$$

obteniendo el sistema

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl \sin(\theta) + \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\gamma^2}} dW = u \quad (3.1)$$

3.2 ESPACIO DE ESTADOS Y FUNCIÓN COSTO

Definimos ahora pues los estados correspondientes al sistema, ya que la ecuación es de segundo orden, se descompondrá en un sistema de dos ecuaciones de primer orden. Definimos el primer estado como la variable independiente tal que

$$x_1 = \theta$$

obtenemos su primera derivada temporal

$$\dot{x}_1 = \dot{\theta} = x_2$$

lo cual nos permite obtener la primera ecuación de estado, procedemos ahora a obtener la primera derivada temporal de x_2

$$\dot{x}_2 = \ddot{x}_1 = \ddot{\theta}$$

pudiendo ahora despejar directamente θ de la ecuación diferencial (3.1) del péndulo bajo efectos de ruido y del control, lo cual nos permite construir el espacio de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -\frac{g}{l} \sin(x_1(t)) + \frac{1}{ml^2} u(t) - \frac{1}{ml^2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\gamma^2}} dW \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Ahora, para la función de costo, usaremos el criterio de costo exponencial cuadrático:

$$J(x, u, t) = \varepsilon \log \mathbb{E} \left[\exp \left(\frac{1}{\varepsilon} \left(\int_0^T L(x, u, t) dt + G(T) \right) \right) \right], \quad t \geq 0$$

$$L(x, u, t) = (x(t) - C)^T Q (x(t) - C) + u^T(t) R u(t)$$

$$G(T) = (x(T) - C)^T H (x(T) - C)$$

$$R = I, \quad H = Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.1ml \end{pmatrix}$$

La selección de la forma de las funciones $L(x, u, t)$ y $G(T)$ se hace tal que se va a optimizar el error del sistema, que es precisamente la variable que podemos medir en nuestro sistema físico. Se opta por un enfoque de costo exponencial cuadrático, ya que nos permite obtener el equivalente al cuadrado del error ajustando con sus respectivas matrices de peso Q , H y R según correspondan, permitiéndonos pues olvidarnos del signo de los errores ya que estos quedarán al cuadrado dentro de cada elemento matricial.

Cabe mencionarse que Q y H pueden ser semidefinidas positivas, sin embargo R debe ser estrictamente definida positiva, ya que, de no ser definida positiva, se estaría perdiendo el efecto del control, el cual es precisamente el corazón del trabajo.

Esta elección nos da una justificación para requerir que la matriz de ganancias sea definida positiva, detalle el cual será de gran relevancia más adelante en el trabajo al momento de la obtención de las ganancias.

3.3 CONVENCION DE LOS MODELOS DEL CONTROL

Para el caso de esta tesis, se estará manejando el error de manera contraria a lo convencional, siendo la estructura en que definimos los errores como:

$$\text{error} = \text{valor medido} - \text{valor deseado}$$

Por lo tanto, se realizará la sintonización del control *PID* con ganancias negativas.

3.4 MÉTODO DE CONTROL *PID*

Procedemos a aplicar la estructura del control *PID* correspondiente al diagrama en bloques de la figura 3.2:

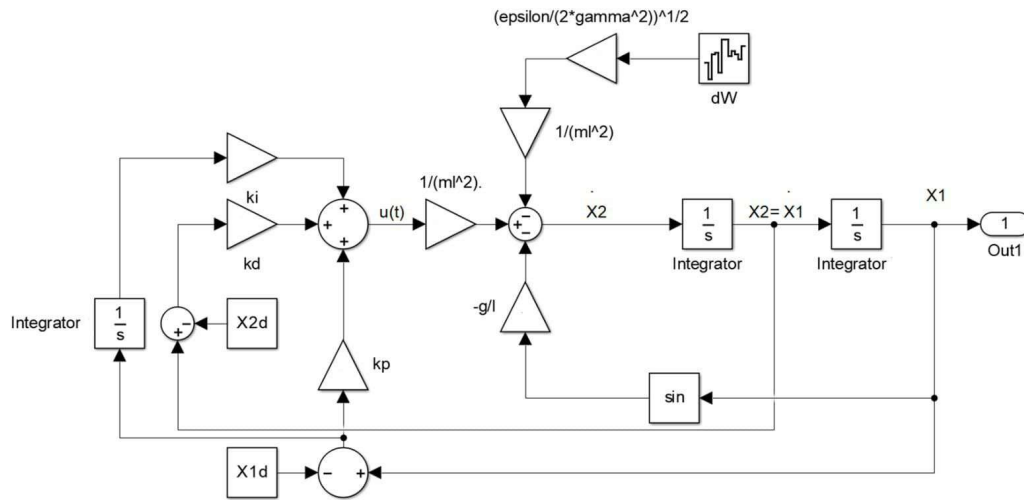


FIGURA 3.2: Diagrama de bloques del control *PID* aplicado al sistema.

Para sintonizar las ganancias, se deberán realizar simulaciones hasta obtener el comportamiento deseado. Para tener un punto de partida sólido, la sintonización

de ganancias del sistema se estará realizando basada en el método de Ziegler-Nichols presentado previamente, mediante el uso de un programa en Python que nos optimizará la obtención de las ganancias para el control *PID*.

3.5 MÉTODO DE CONTROL RS

Dado el espacio de estados descrito en la ec. (3.2) anteriormente mencionada, y basado en la estructura del control RS para el modelo lineal de la forma

$$\dot{x}(t) = A_0 + A_1 x(t) + Bu(t) + \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\gamma^2}} dW$$

para nuestro caso:

$$A_0 = 0$$

Tras linealizar el espacio de estados del péndulo y obtener la ley de control al aplicarse en la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman como se muestra en [16], y añadiendo la compensación de gravedad como en [10], se obtiene:

$$u_c(t) = -\frac{1}{2}B^T P(t)(x(t) - C(t)) + \begin{bmatrix} 0 \\ mgl \sin(\theta_d) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

desarrollamos:

$$u_c(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{p_{21}(t)}{ml^2} (x_1(t) - c_1) + \frac{p_{22}(t)}{ml^2} (x_2 - c_2) \right) + mgl \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Y en donde los elementos de la matriz de ganancias $P(t)$ se obtienen de la ecuación diferencial de Ricatti asociada a las ganancias:

$$\dot{P}(t) = P^T(t) \left(\frac{BB^T}{4} - \frac{I}{\gamma^2} \right) P(t) - A_1^T P(t) - P(t)A_1 - 2M \quad (3.5)$$

Al resolver obtenemos las siguientes ecuaciones correspondientes a los elementos de la matriz de ganancia, obteniendo las expresiones:

$$\dot{p}_{11}(t) = \frac{2g}{l} p_{21}(t) - \left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{4m^2 l^4} \right) p_{21}(t)^2 - \frac{1}{\gamma^2} p_{11}(t)^2 - 2$$

$$\dot{p}_{21}(t) = \frac{g}{l}p_{22}(t) - p_{11}(t) - \frac{1}{\gamma^2}p_{11}(t)p_{21}(t) - \left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{4m^2l^4}\right)p_{21}(t)p_{22}(t)$$

$$\dot{p}_{22}(t) = -2p_{21}(t) - \frac{1}{\gamma^2}p_{21}(t)^2 - \left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{4m^2l^4}\right)p_{22}(t)^2 - 0.2ml$$

Pudiendo ahora estructurar el diagrama de bloques para el control RS como se muestra en la figura 3.3

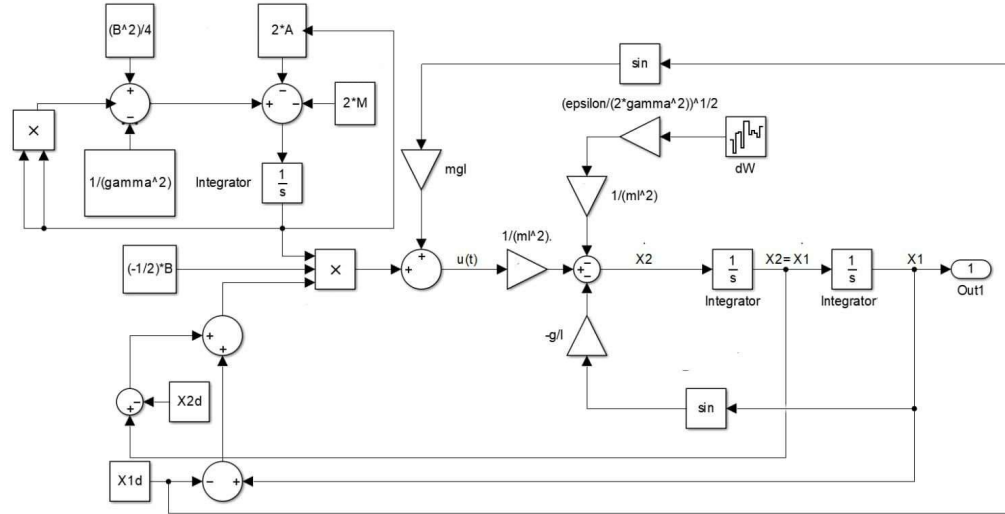


FIGURA 3.3: Diagrama de bloques del control RS aplicado al sistema.

3.6 FILTRO KALMAN

Para la parte del filtrado con filtro Kalman partimos del modelo presentado en la sección de metodología previamente:

$$\dot{m} = Am + K(t)(y - Hm); \quad K(t) = P(t)H^T R^{-1}$$

En donde

$$\dot{P}(t) = AP(t) + P(t)A^T + CC^T - PH^T (GG^T)^{-1} HP$$

Para nuestro caso, se comenzará a trabajar con el modelo del péndulo simple en su modelo linealizado como un primer acercamiento. Esto permitirá comparar el

comportamiento de un oscilador armónico no lineal con el desempeño del filtro, para posteriormente comparar el desempeño del filtro con ambos modelos.

3.7 FILTRO RS

Ahora, para la parte del filtrado con filtro RS partimos del modelo del filtro RS previamente mencionado en la sección de metodología:

$$\dot{m} = Am + Q(t)(y - Hm)$$

En donde

$$\dot{Q}(t) = -(A^T Q(t) + Q(t)A) + Q(t)^T Q(t) - H^T H$$

3.8 CONTROLADORES

En este trabajo entenderemos por controladores al conjunto de un control operando en conjunto con un filtro. La notación que usaremos para simplificar la escritura es la siguiente: $[CONTROL|FILTRO]$.

3.8.1 CONTROLADOR $PID|KB$

Posteriormente, procederemos a usarr el modelo del filtro de Kalman pero en presencia de una señal de control:

$$\dot{m} = Am + Bu_{PID} + K(t)(y - Hm); \quad K(t) = P(t)H^T R^{-1}$$

Para este caso se pretende realizar pruebas tanto en el modelo linealizado y en el modelo no lineal, para poder abordar las dificultades que requiere hacer funcional estos métodos combinados a nuestro modelo del péndulo.

3.8.2 CONTROLADOR $PID|RS$

Ahora, usando el modelo del filtro RS también en presencia de una señal de control:

$$\dot{m} = Am + Bu_{PID} + Q(t)(y - Hm)$$

Para este caso se pretende realizar pruebas tanto en el modelo linealizado y en el modelo no lineal. Siendo que el filtro RS está mejor diseñado para sistemas que no son únicamente linealizados, se prevé un mejor desempeño al momento de realizar simulaciones computacionales, abordando los retos y dificultades que requiere hacer funcional estos métodos combinados.

3.8.3 CONTROLADOR $RS|KB$

En este caso, se estará usando el modelo del filtro de Kalman en presencia de una señal de control RS:

$$\dot{m} = Am + Bu_{RS} + K(t)(y - Hm); \quad K(t) = P(t)H^T R^{-1}$$

Del mismo modo que en los casos anteriores, se realizarán pruebas tanto en el modelo linealizado y en el modelo no lineal, con las dificultades y retos que esto implica a nivel programación y ajuste de las ecuaciones que se requiere para hacer funcional estos métodos combinados a nuestro modelo del péndulo.

3.8.4 CONTROLADOR $RS|RS$

Finalmente, se va a ajustar el modelo del filtro RS en presencia de una señal de control RS, presentando el controlador RS completo:

$$\dot{m} = Am + Bu_{RS} + Q(t)(y - Hm)$$

Efectuando pruebas en los modelo linealizado y no linealizado. Poniendo a prueba el filtro RS en conjunto con el control RS actuando sobre sistemas linealizados y no linealizados, realizando el trabajo y ajustes necesarios a nivel programación y simulación que se requieran para hacer funcional estos métodos combinados.

3.9 EQUIPAMIENTO Y PARÁMETROS

Una vez establecido esto, ya podemos dar paso a la parte de la simulación, la cual se estará realizando en Python 3.13.5, en una computadora ASUS FX506H, con 8 GB de memoria RAM y un procesador Intel Core i5 10210u. Se procede a la parte de la programación y simulación, esta se dividirá en tres etapas, las cuales serán la programación de los sistemas funcionando bajo el control únicamente, funcionando bajo el filtro únicamente, y funcionando con el controlador completo (filtro + control). Se estará abordando la simulación en el caso de tiempo continuo para probar el desempeño de los métodos

3.10 SIMULACIÓN

Se comienza con la programación del sistema dinámico, así como las ecuaciones correspondientes al control y las ganancias, se estará utilizando el método RK45 para hacer el solver con paso variable. Todos los resultados se estarán mostrando para x_1 y m_1 en radianes [rad] y para x_2 y m_2 en radianes por segundo [rad/s].

Para la simulación de los sistemas únicamente bajo las leyes de control, se dividirá en dos partes, una enfocada a la simulación *PID* y la otra enfocada a la simulación del control RS.

Una vez realizada esta programación, se procede a ejecutar la simulación con las condiciones presentadas a continuación:

Parámetros: $l = 0.30$ longitud del péndulo en m $\gamma = 90$ valor gamma de parte estocástica $m = 1.5$ masa del péndulo en kg $g = 9.81$ valor de la gravedad en $\frac{m}{s^2}$ $\varepsilon =$ valor variable entre simulaciones

tiempo de simulación = 10 segundos.

Condiciones iniciales: $x_1(0) = 0^\circ rad = 0^\circ$ $x_2(0) = 0 \frac{rad}{s} = 0^\circ \frac{s}{s}$ **Valores objetivo:** $x_1(T) = \frac{\pi}{2} rad = 90^\circ$ $x_2(T) = 0 \frac{rad}{s} = 0^\circ \frac{s}{s}$

3.10.1 SISTEMAS CON CONTROL

3.10.1.1 CONTROL *PID*

Para el control *PID*, al ser un método clásico, su ley de control ya se encuentra definida y procedemos directamente a la obtención de las ganancias mediante la implementación del método Ziegler-Nichols, obteniendo la primera configuración de ganancias $k_p = -5.438, k_d = -0.489; k_i = -15.106$, las cuales muestran el comportamiento presentado en la figura 3.4 y que ajustamos posteriormente de manera manual ajustando las curvas del estado al comportamiento deseado.

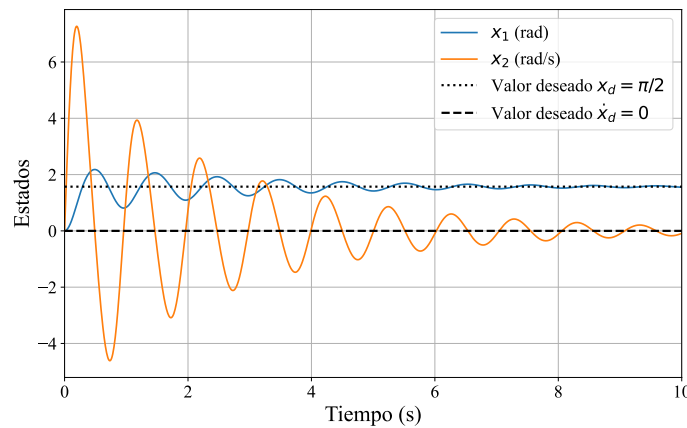


FIGURA 3.4: Comportamiento de los estados del sistema bajo el control *PID* con la sintonización Ziegler-Nichols sin modificar.

Este ajuste manual se realizó manteniendo la ganancia proporcional, ya que se alcanzaba consistentemente el valor objetivo, la ganancia derivativa fue aumentada levemente para suavizar las oscilaciones en el estado y la ganancia integral reducida para disminuir el efecto del rebote en el sistema, obteniendo una respuesta más directa y estable. Finalmente, se terminó por usar la configuración de ganancias $k_p = -5.438, k_d = -1.489; k_i = -10.106$. Bajo esta configuración se obtuvo el comportamiento mostrado en las figuras 3.10 y 3.10, mostrando que efectivamente esa configuración de ganancias lleva el estado al valor deseado de manera eficiente dentro del tiempo de simulación, con una señal de control ligeramente superior al valor máximo tolerado por el motor, tal como se muestra en la figura 3.6.

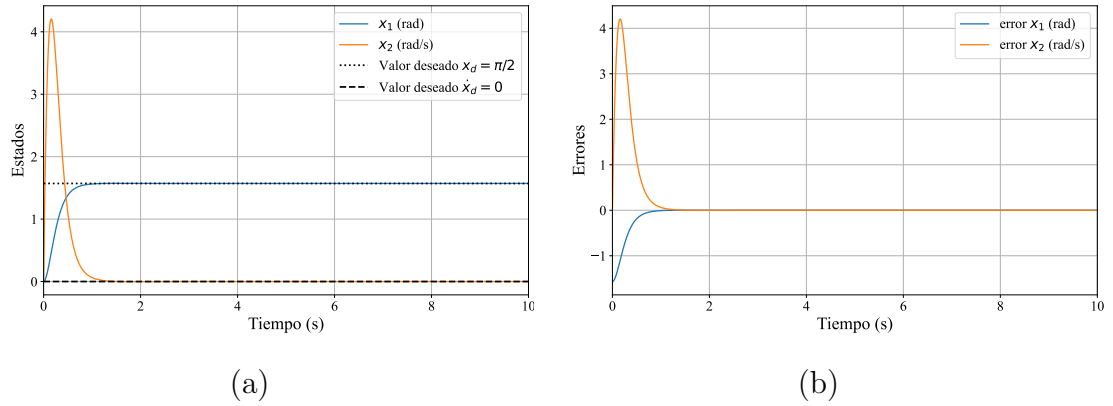


FIGURA 3.5: Comportamiento de a) los estados y b) los errores del sistema para el control PID con la sintonización Ziegler-Nichols mejorada, $\varepsilon = 1$

Se repiten las simulaciones para varias configuraciones de ganancias y se encuentra que el valor del control en tiempo final al estabilizar el sistema es un valor asintótico que ronda los $4.4Nm$. Por lo tanto, nos damos cuenta que la limitación aquí al parecer está no en la ley de control, si no en las características físicas del sistema respecto a las limitaciones del motor. Por este motivo se plantea la idea de disminuir el valor de la masa en función de los resultados que muestre el control RS, con el fin de hacer una comparación objetiva. Esto se explicará mejor en un resumen de resultados para este paso mostrado más adelante.

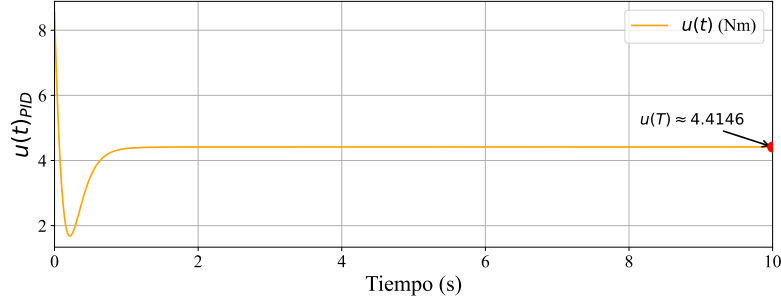


FIGURA 3.6: Comportamiento de la señal de control PID con la sintonización Ziegler-Nichols mejorada, $\varepsilon = 1$.

3.10.1.2 CONTROL RS

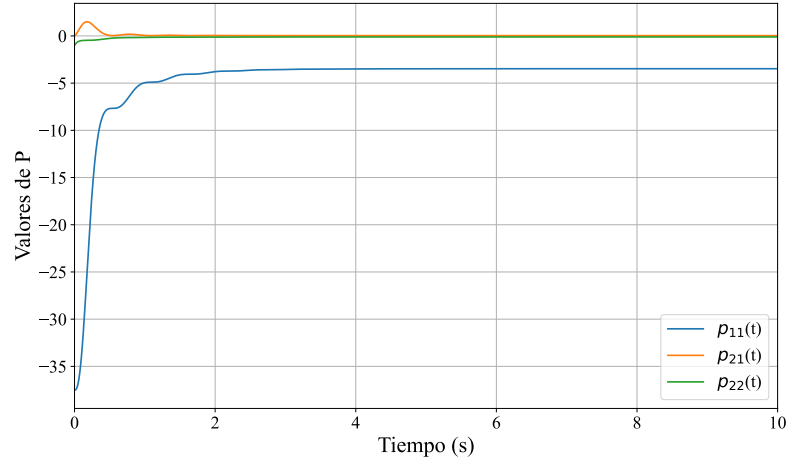
Comenzando caso del control RS se nos presentó un desafío interesante, ya que la matriz de ganancias $P(t)$ debe ser definida positiva. Para comenzar el proceso de sintonización se resuelve la ecuación diferencial de Ricatti asociada a las ganancias del control RS, igualando la ecuación diferencial a cero para obtener así los puntos de equilibrio (asíntotas). Se obtuvieron los valores asíntóticos para los elementos $p_{11}(t) = \pm 3.4725$, $p_{12}(t) = p_{21}(t) = \pm 0.0304$, $p_{22}(t) = \pm 0.1049$. Cabe resaltarse que la matriz de ganancias $P(t)$ es simétrica, es decir que $p_{12}(t) = p_{21}(t)$, por lo que se resolverá solo uno de estos dos elementos para que se represente el comportamiento de todas las ganancias del sistema. Tras realizar las primeras simulaciones se obtiene comportamiento de los elementos de la matriz de ganancias

$$P(t) = \begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) \end{bmatrix}$$

observando que presenta una convergencia hacia las asíntotas negativas del sistema, tal como se muestra en la figura 3.7, es decir se da que

$$p_{11}(t) < 0 \quad \text{y} \quad p_{22}(t) < 0, \quad \forall t \in [0, t_f]$$

esto no cumple el criterio de Sylvester, y por tanto el modelo de control diverge.

FIGURA 3.7: comportamiento de la matriz de ganancias $P(t)$.

Con el fin de solucionar este problema, se propuso la transformación dada por

$$P_a = - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

la cual nos permitió reflejar los valores de la diagonal principal de la matriz, pasando de converger a sus valores asintóticos negativos a los valores asintóticos positivos, dejándonos con la matriz de ganancias alternativa

$$P_a = \begin{bmatrix} -p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{21}(t) & -p_{22}(t) \end{bmatrix}$$

la cual ahora debe cumplir el criterio de Sylvester, por lo que, al ser una matriz de tamaño 2x2, debe cumplir que el determinante de la matriz y su menor principal sean mayores a cero, es decir cumplir que

$$\det(P_a) = (-p_{11}(t))(-p_{22}(t)) - p_{12}(t)p_{21}(t) > 0$$

$$\det(P_a) = p_{11}(t)p_{22}(t) - p_{12}(t)p_{21}(t) > 0$$

$$\det(P_a) = p_{11}(t)p_{22}(t) - p_{12}(t)^2$$

condición que se cumple para todo $p_{11}(t)p_{22}(t) > p_{12}(t)p_{21}(t)$ en el intervalo y para el valor asintótico con $p_{11}(t)p_{22}(t) = (3.4725)(0.1049) = 0.36426525$ y $p_{12}(t)p_{21}(t) = p_{12}(t)^2 = (0.0304)^2 = 0.00092416$, dando un valor estable de $\det(P_a(t)) \approx 0.36334109$

alrededor de los valores asintóticos de las ganancias. Para su menor principal, se tiene únicamente el elemento $-p_{11}(t)$, por lo que debe de cumplirse que $-p_{11}(t) > 0$, lo cual es verdadero, ya que recordemos que originalmente $p_{11}(t) < 0 \forall t$ en $[0, T]$, por lo que al multiplicarse por -1, el elemento va a ser siempre mayor a cero, cumpliendo así el criterio de Sylvester.

Verificamos el comportamiento de los elementos de la matriz de ganancias $P(t)$ del control en la figura 3.8.

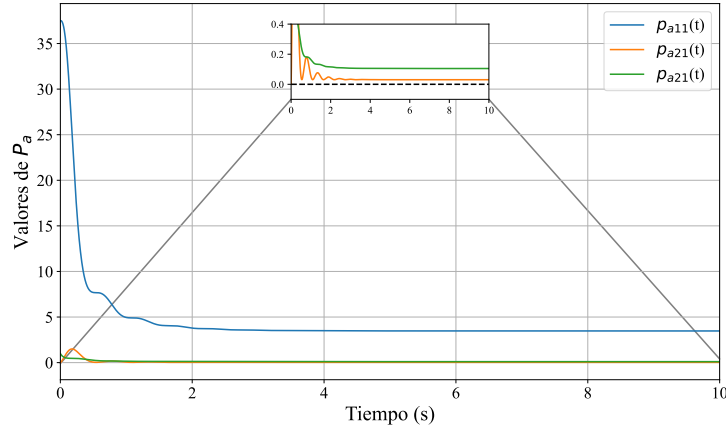


FIGURA 3.8: Comportamiento de la matriz de ganancias P_a

Una vez resuelto este problema, se procede a simular el sistema bajo el control RS, con la siguiente configuración de condiciones iniciales para las ganancias de $p_{11}(0)=-37.5$, $p_{12}(0)=0.0$, $p_{22}(0)=-1$, obteniendo un desempeño bastante estable y rápidamente convergente, como se puede apreciar en las figuras 3.9, 3.11.

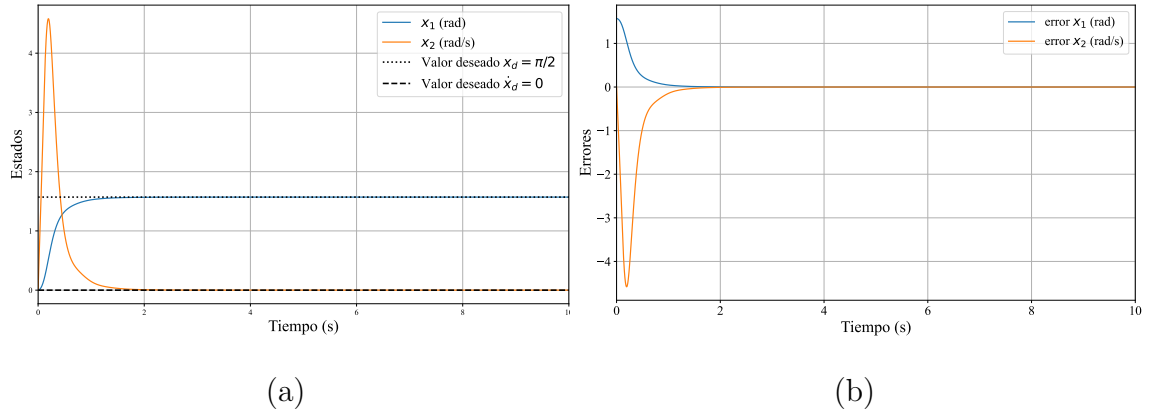


FIGURA 3.9: Comportamiento de a) los estados y b) los errores del sistema para el control RS con $P_a(t)$, $\varepsilon = 1$.

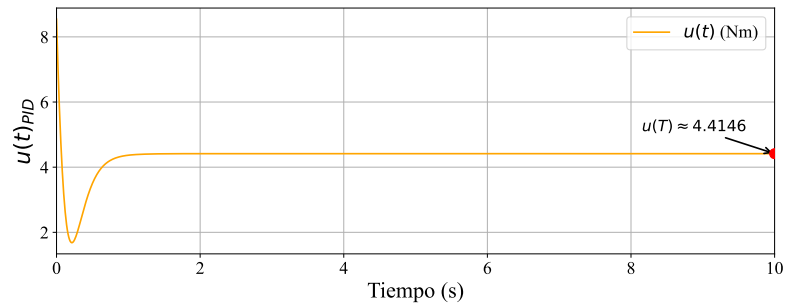


FIGURA 3.10: Comportamiento de la señal de control PID con la sintonización Ziegler-Nichols mejorada, $\varepsilon = 1$.

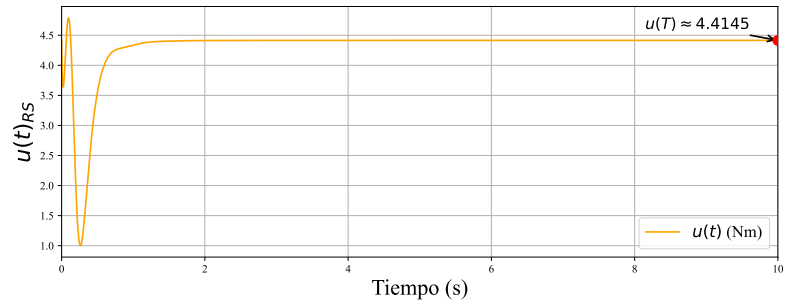


FIGURA 3.11: Comportamiento de la señal de control RS con $P_a(t)$, $\varepsilon = 1$.

Contrastamos de nuevo con simulaciones para otros valores de ε y notamos que igualmente tienen un valor asintótico alrededor de $4.4Nm$. Esto se explicará mejor en un resumen de resultados para este paso mostrado más adelante.

3.10.1.3 DESEMPEÑO DE CONTROLES APLICADOS AL SISTEMA

Dado que ambas señales de control, tanto para el control PID como RS, tienen su mayor diferencia al inicio, pero coinciden y se mantienen estables en un valor asintótico alrededor de $4.4Nm$ en la región final, se concluye que la asíntota de la señal de control se relaciona más con el torque máximo a vencer en el sistema. Con el fin de disminuir este parámetro y cumplir con las limitaciones impuestas para el motor, se tomará en consideración el reducir el tamaño de la masa para las futuras pruebas a realizarse con el controlador completo.

Para respaldar este comportamiento presentamos una muestra de la forma de las señales del control, comparando la señal de control PID con la señal de control RS, mostrándose en la figura 3.12.

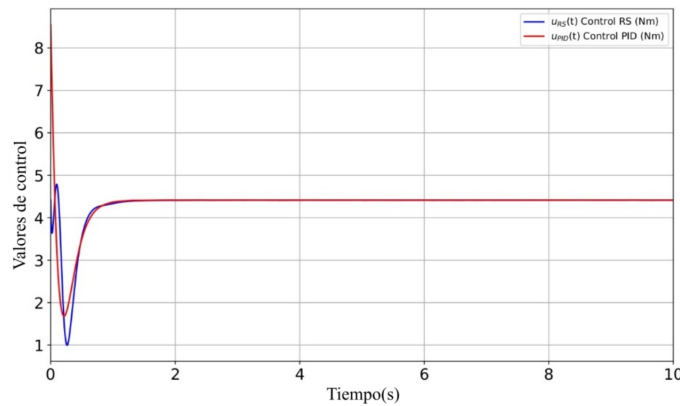


FIGURA 3.12: Comparación señales de control PID y RS, $\varepsilon = 100$.

Finalmente, se muestran las comparaciones de los valores en tiempo final de la función costo para cada control PID y RS, lo que nos proveerá de un soporte sólido y no únicamente visual para apoyarnos en nuestra interpretación de los datos. Estos resultados se muestran en las tablas 3.1 y 3.2.

Dados los resultados obtenidos, se tomará la decisión de cambiar el valor de la masa del péndulo, a modo de proteger el motor de exceder su torque máximo. Se estará usando entonces una masa de 0.85 kg.

TABLA 3.1: Errores en tiempo final y $u(T)$ para diferentes ε , para control PID

ε	error $x_1(T)$	error $x_2(T)$	$u_{PID}(T)$
10000	-0.00051484	-0.017974772	4.435208299
1000	-0.001455492	-0.006353224	4.429953953
100	0.000198152	-0.000350407	4.41402884
10	4.50E-06	-0.000830111	4.415367911
1	-9.71E-06	-0.000194804	4.414855205
0.1	-5.17E-06	-6.38E-05	4.414605181
0.01	5.97E-07	-1.18E-05	4.414506843
0.001	-1.28E-06	-2.60E-06	4.414508915
0.0001	-8.77E-07	-2.83E-06	4.414512512

TABLA 3.2: Errores en tiempo final y $u(T)$ para diferentes ε , para control RS

ε	error $x_1(T)$	error $x_2(T)$	$u_{RS}(T)$
10000	-0.002638779	0.002035963	4.414006522
1000	-0.000243276	0.000737809	4.414240866
100	-0.000118749	0.000446178	4.414340098
10	0.00027944	0.000141733	4.414413484
1	1.04E-05	-3.56E-05	4.414512651
0.1	-6.23E-05	3.56E-05	4.414493201
0.01	-8.36E-06	1.17E-05	4.414496433
0.001	-1.80E-05	-2.21E-06	4.414502911
0.0001	-1.95E-05	7.34E-06	4.414499396

3.10.2 SISTEMAS CON FILTRO

Para la parte de los filtros, procedemos a realizar pruebas de los mismos para verificar que siguen la forma del oscilador armónico, en su versión linealizada y no lineal. Para fines de tener una visión más directa y familiar de estos sistemas. Se programan de manera matricial, pero se extraerán los datos de cada arreglo de datos matricial para mostrar los resultados elemento a elemento.

3.10.2.1 FILTRO KALMAN-BUCY

Comenzamos con el ajuste para el filtro Kalman Bucy (KB). Para comenzar el proceso de sintonización se resuelve la ecuación diferencial de Ricatti asociada a las ganancias del filtro KB, igualando la ecuación diferencial a cero para obtener así los puntos de equilibrio (asíntotas). Obteniéndose los valores asíntóticos para los elementos de la matriz de ganancias tal que: $p_{11}(t) = 2.26100520E^{-4}$, $p_{12}(t) = p_{21}(t) = -4.24919022E^{-5}$, $p_{22}(t) = 7.96483995^{-3}$. Cabe resaltarse que la matriz de ganancias $P(t)$ es simétrica, es decir que $p_{12}(t) = p_{21}(t)$, por lo que se resolverá solo uno de estos dos elementos para que se represente el comportamiento de todas las ganancias del sistema.

Conociendo los valores asíntóticos, y bajo las condiciones iniciales: $p_{11}(0) = 0.024$, $p_{12}(0) = p_{21}(0) = -0.006$, $p_{22}(0) = 0.006$; $x_1(0) = \pi/2$, $x_2(0) = 0$; $m_1(0) = 0$, $m_2(0) = -2\pi$; el filtro KB presenta el desempeño mostrado en la figura 3.13. Con el comportamiento de los elementos de la matriz ganancias mostrado en la figura 3.14 a) y el comportamiento del error de estados filtrados mostrado en la figura 3.14 b).

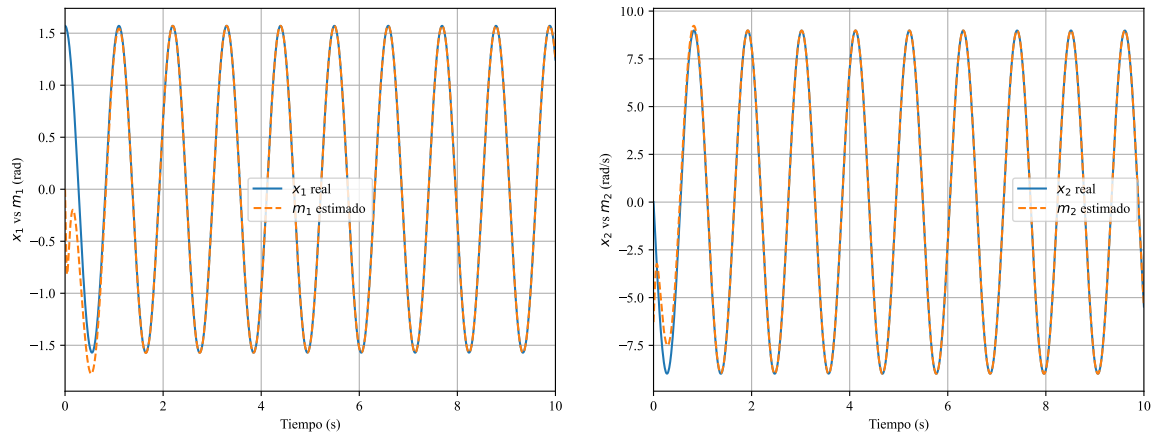


FIGURA 3.13: Señales real vs estimado de velocidad angular y posición angular para el filtro de Kalman.

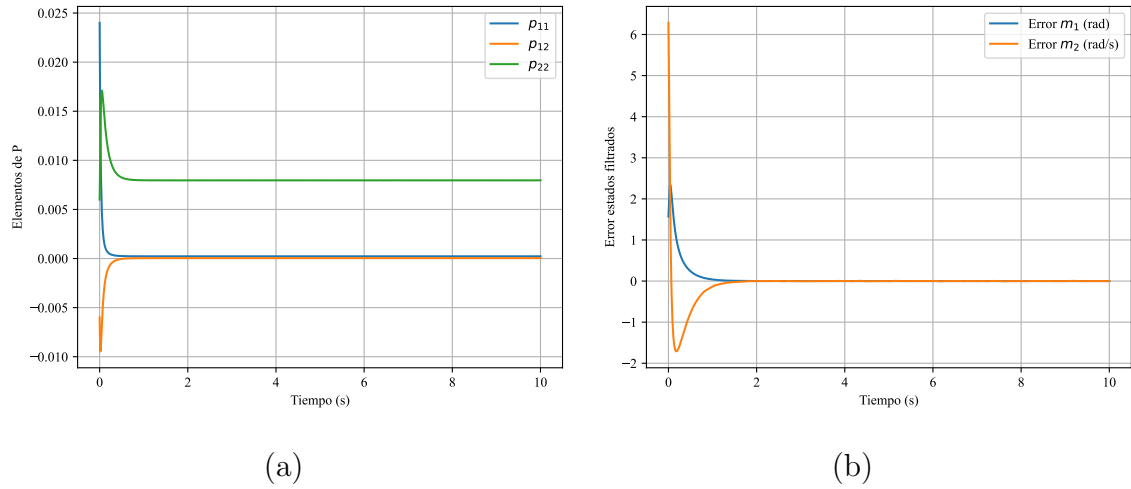


FIGURA 3.14: Comportamiento de a) la matriz de ganancias de covarianza $P(t)$ y b) los errores del filtro de Kalman.

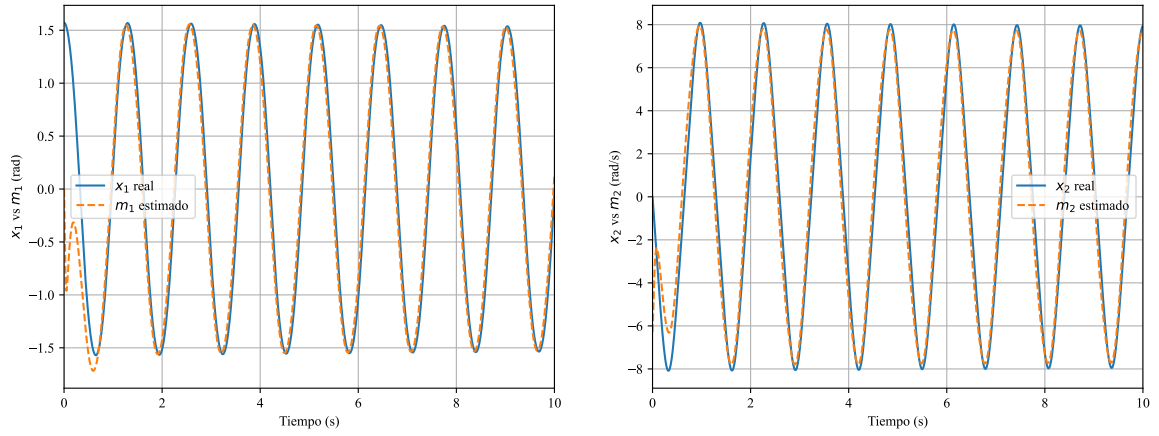


FIGURA 3.15: Señales real vs estimado de posición angular y velocidad angular para el filtro Kalman al modelo no lineal.

Para el modelo no lineal, bajo la misma configuración de condiciones iniciales de las ganancias del filtro, se presenta el comportamiento mostrado en la figura 3.15. Con el comportamiento de las ganancias mostrado en la figura 3.16 a) y el comportamiento del error del estimado mostrado en la figura 3.16 b).

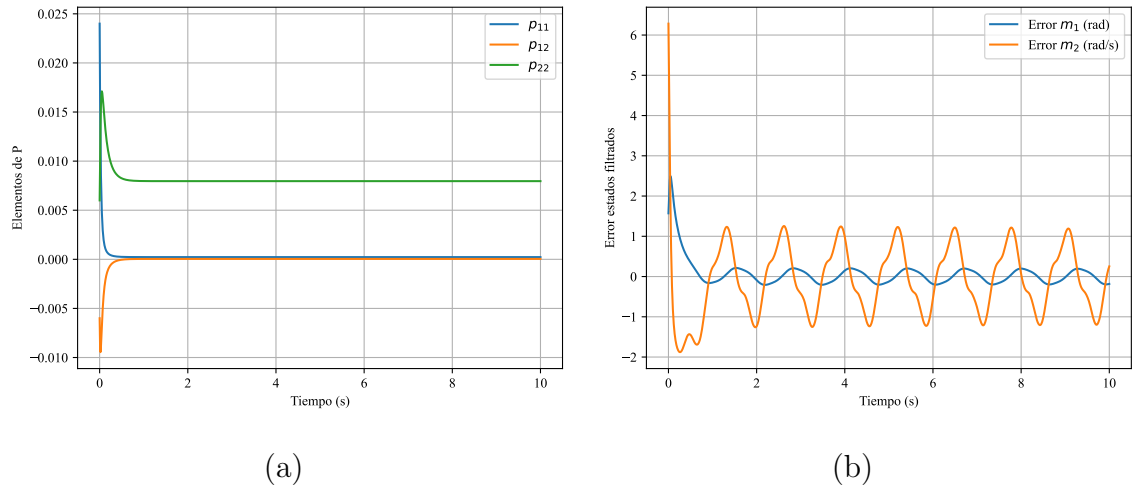


FIGURA 3.16: Comportamiento de a) la matriz de ganancias $P(t)$ y b) los errores del filtro Kalman en el modelo no lineal.

Como se puede ver, el filtro se ajusta bastante bien al modelo linealizado, pero al momento de trabajar el modelo no lineal presenta dificultades, ya que, sin importar la configuración de las ganancias, los errores no tienden a cero y en su lugar quedan acotados, oscilando en un intervalo definido. Es debido a esto por lo que se continuará con las simulaciones para el filtro RS y así poder observar su comportamiento, permitiendo determinar si es cuestión del modelo o va más relacionado a la dinámica del sistema y sus ganancias.

3.10.2.2 FILTRO RS

Procedemos ahora a trabajar con el filtro RS. Para comenzar el proceso de sintonización se resuelve la ecuación diferencial de Ricatti asociada a las ganancias del filtro RS, igualando la ecuación diferencial a cero para obtener así los puntos de equilibrio (asíntotas). Obteniéndose los valores asíntóticos para los elementos de la matriz de ganancias tal que: $q_{11}(t) = \pm 5.17382759$, $q_{12}(t) = p_{21}(t) = -0.39641648$, $q_{22}(t) = \pm 0.22365377$. Cabe resaltar que la matriz de ganancias $Q(t)$ es simétrica, es decir que $q_{12}(t) = q_{21}(t)$, por lo que se resolverá solo uno de estos dos elementos para que se represente el comportamiento de todas las ganancias del sistema.

Simulando entonces el sistema bajo las condiciones iniciales:

$q_{11}(0) = -20.17382759$, $q_{12}(0) = -0.439641648$, $q_{22}(0) = -3.22365377$; $x_1(0) = \pi/2$, $x_2(0) = 0$; $m_1(0) = 0$, $m_2(0) = -2\pi$; se presenta el desempeño mostrado en la figura 3.17.

Con el comportamiento de la matriz de ganancias mostrado en las figuras 3.18 a) y 3.18 b) Y el comportamiento del error del estimado mostrado en la figura 3.19

Para el modelo no lineal, y bajo la misma configuración de condiciones iniciales de las ganancias aplicadas previamente al filtro, se tiene el comportamiento mostrado en la figura 3.20.

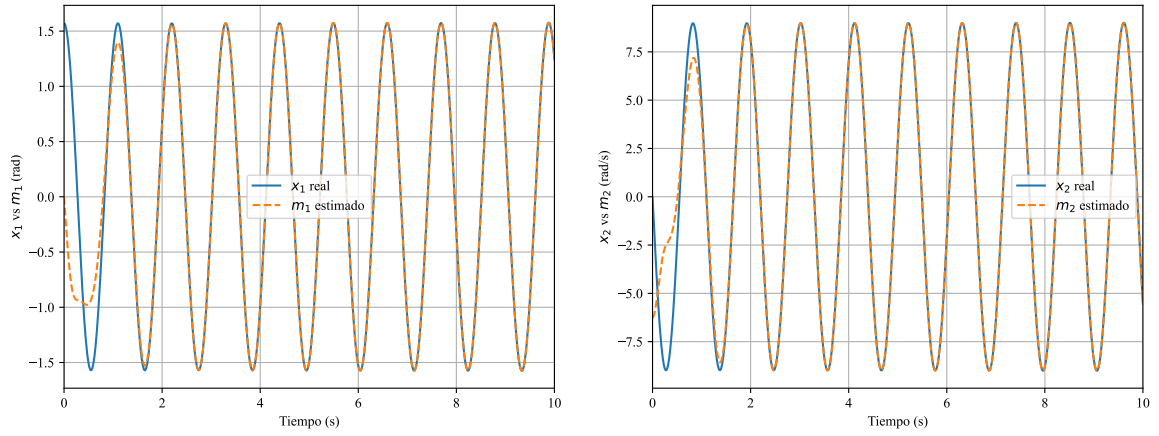


FIGURA 3.17: Señales real vs estimado de posición angular y velocidad angular para el filtro RS.

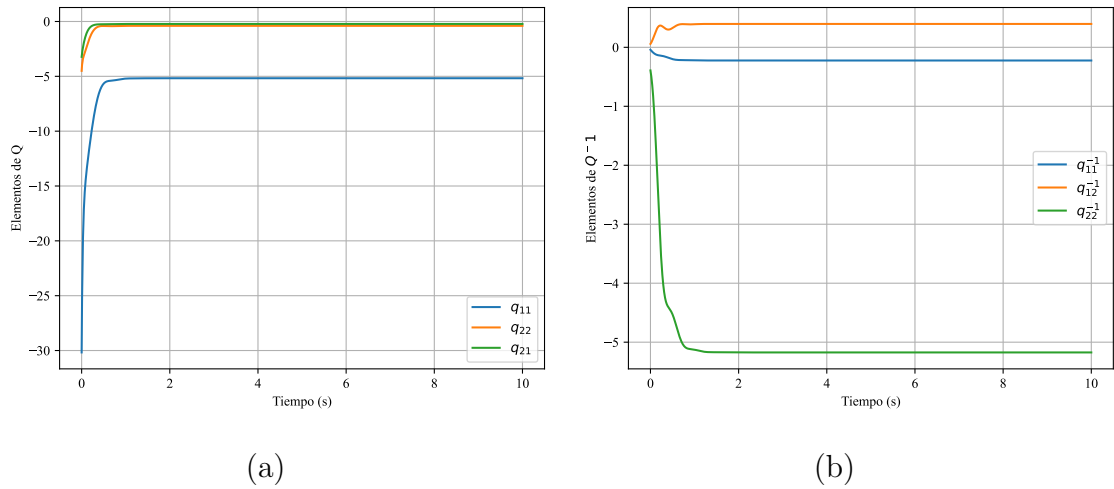


FIGURA 3.18: Comportamiento de las ganancias de a) la matriz $Q(t)$ y b) la matriz $Q(t)^{-1}$ del filtro RS.

Con el comportamiento de los elementos de la matriz de ganancias mostrado en las figuras 3.21 a) y 3.21 b). Y el comportamiento del error del estado filtrado mostrado en la figura 3.22

Pudiéndose observar que, igual que en el caso del filtro de Kalman, el filtro RS se ajusta bastante bien al modelo linealizado, pero tiene problemas para ajustarse al modelo no lineal.

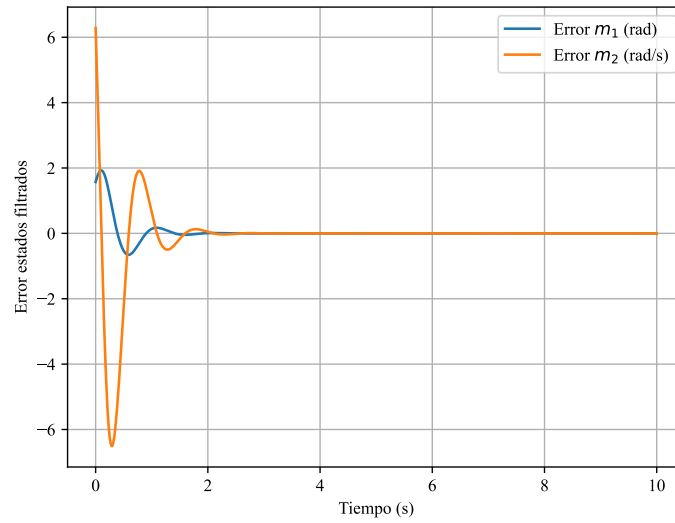


FIGURA 3.19: Comportamiento de los errores de los estimados del filtro RS.

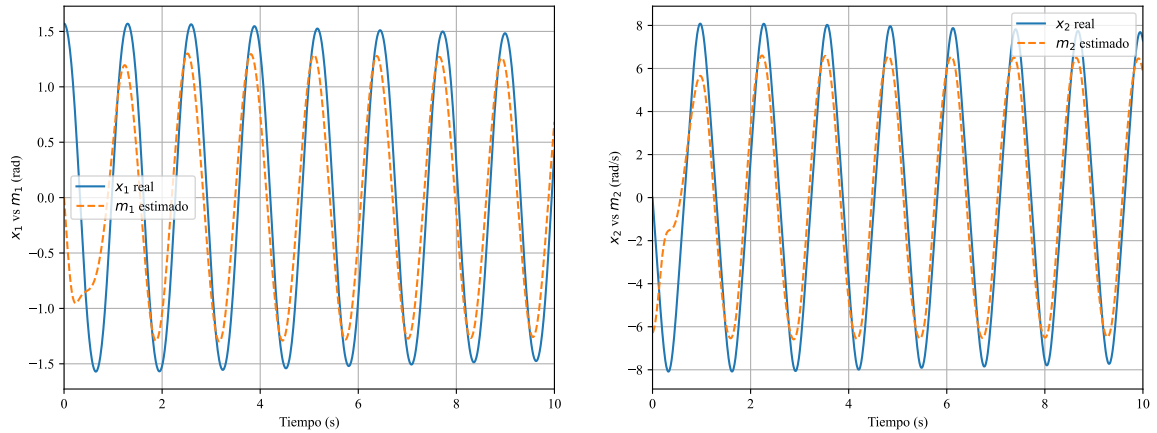


FIGURA 3.20: Señales real vs estimado de posición angular y velocidad angular para el filtro RS en el modelo no lineal.

Nuevamente, el modelo actual del filtro sigue sin conseguir que el estado filtrado siga adecuadamente al estado real. Debido a esto se deberá buscar una propuesta para conseguir que el filtro consiga seguir adecuadamente la dinámica de los estados del sistema, la propuesta seleccionada se presentará en la siguiente sección.

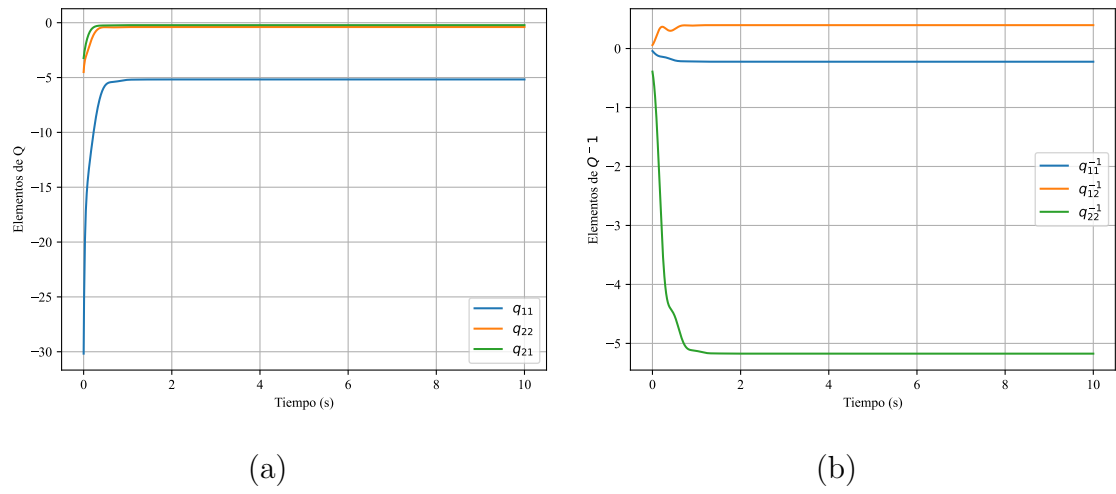


FIGURA 3.21: Comportamiento de las ganancias de a) la matriz $Q(t)$ y b) la matriz $Q(t)^{-1}$ del filtro RS para el modelo no lineal.

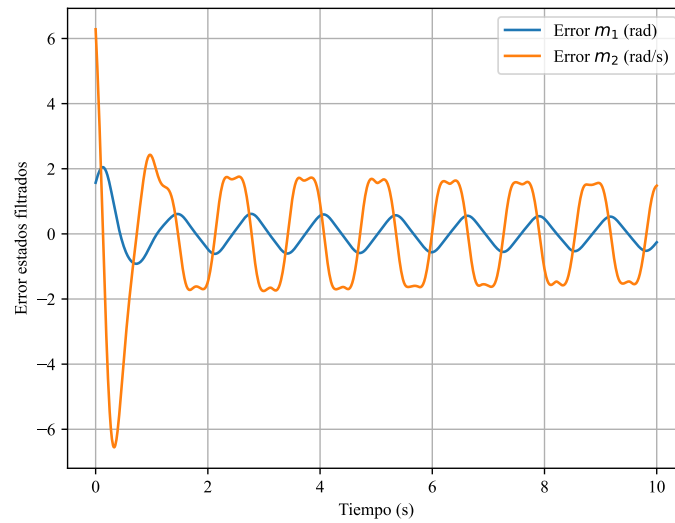


FIGURA 3.22: Comportamiento de los errores de los estimados del filtro RS para el modelo no lineal.

3.11 PROPUESTA PARA FILTROS NO LINEALES

Dado el desempeño presentado por los filtros al aplicarse al sistema no lineal, se hace evidente la necesidad de hacer ajustes para que el filtro se desempeñe adecuadamente, esto derivado de la necesidad de hacerle saber al filtro que se está enfrentando a un sistema no lineal, y más en específico, a qué tipo de sistema no lineal, ya que no es un sistema polinómico, si no un sistema que tiene involucrada una función senoidal.

Derivado de esta necesidad, se consideraron varias opciones, sin embargo se optó por la propuesta de redefinir la matriz de los estados filtrados para que el filtro pudiera conocer la naturaleza de los estados filtrados. Modificando la matriz “ m ” de los estados filtrados, pasando de la forma estándar

$$m(t) = \begin{bmatrix} m_1(t) \\ m_2(t) \end{bmatrix}$$

a la matriz de estados filtrados alternativa de la forma

$$m_{alt}(t) = \begin{bmatrix} \sin(m_1(t)) \\ m_2(t) \end{bmatrix}$$

permitiéndole así al filtro saber que se encuentra filtrando $\sin(m_1(t))$ y no directamente $m_1(t)$. En lo que respecta al proceso de innovación, se deja de la misma forma en que estaba definido inicialmente

$$y(t) - Hm(t)$$

ya que su función es retroalimentar los errores de los estados filtrados, y no tienen que ver directamente con la dinámica del sistema, si no más bien en hacerle saber al filtro, dado mi valor actual, qué tanto error hay entre la salida y el valor filtrado. Procedemos pues a poner a prueba los filtros bajo esta nueva estructura y verificar si son capaces de dar un buen resultado.

3.11.0.1 FILTRO KALMAN-BUCY MODELO NO LINEAL PROPUESTO

Para las pruebas del sistema no lineal en el modelo modificado, como la ecuación de ganancias se mantiene igual no es necesario resolver de nuevo la ecuaciones diferenciales de Ricatti, por lo que se puede proceder directo a la simulación, bajo las condiciones iniciales: $p_{11}(0) = 0.024$, $p_{12}(0) = p_{21}(0) = -0.006$, $p_{22}(0) = 0.006$; $x_1(0) = \pi/2$, $x_2(0) = 0$; $m_1(0) = \pi/2$, $m_2(0) = 0.0$; evaluando en el filtro de Kalman-Bucy modificado

$$\dot{m} = Am_{alt} + P(t)(y - m)$$

simulamos y obtenemos los resultados de las figuras 3.23 y 3.24. Como se puede

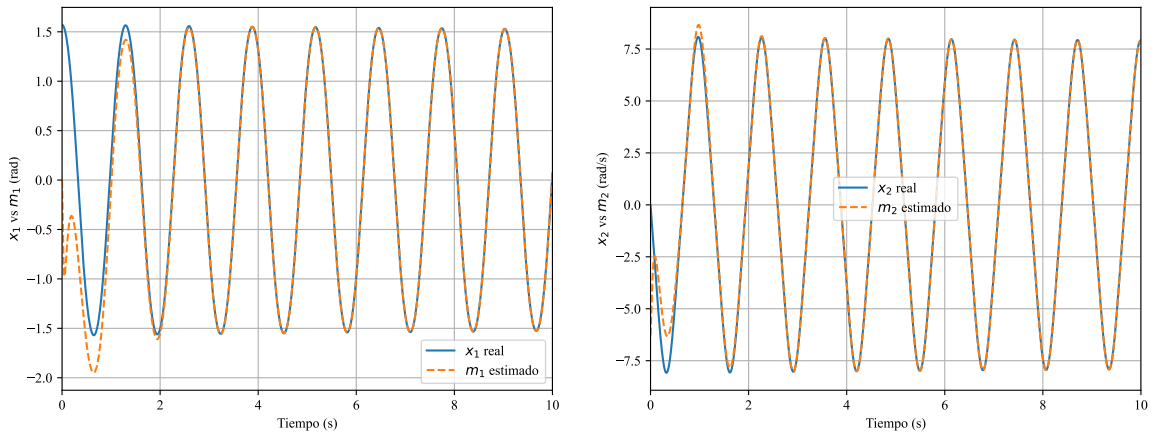


FIGURA 3.23: Comportamiento del estado filtrado vs estado real del sistema, con el filtro KB modificado.

observar, bajo la nueva estructura propuesta el filtro sigue al estado en su modelo no lineal sin mayor problema, tanto para el estado x_1 como para el estado x_2 , comenzando alejados, pero alcanzándose y manteniendo ese seguimiento durante todo el resto de la simulación.

La matriz de ganancias del filtro KB se relaciona con una matriz de covarianza, por lo que también debe cumplir el criterio de Sylvester. Como podemos observar en la figura 3.25, sus elementos se comportan adecuadamente, cumpliendo entonces el criterio de Sylvester.

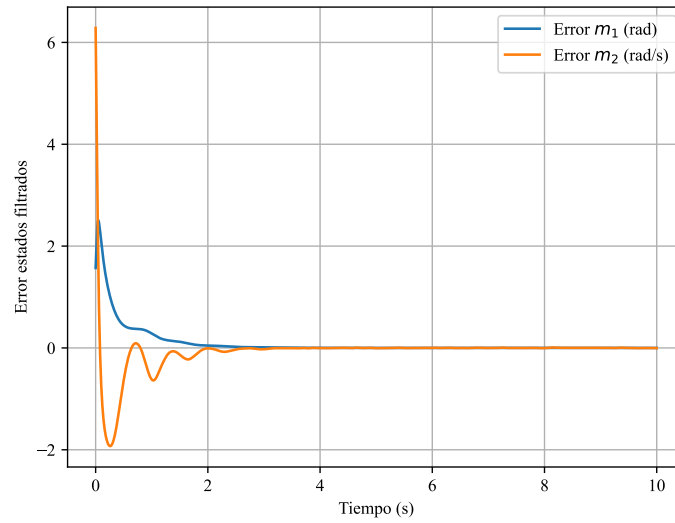


FIGURA 3.24: Comportamiento del error del filtro para ambos estados del sistema, con el filtro KB modificado.

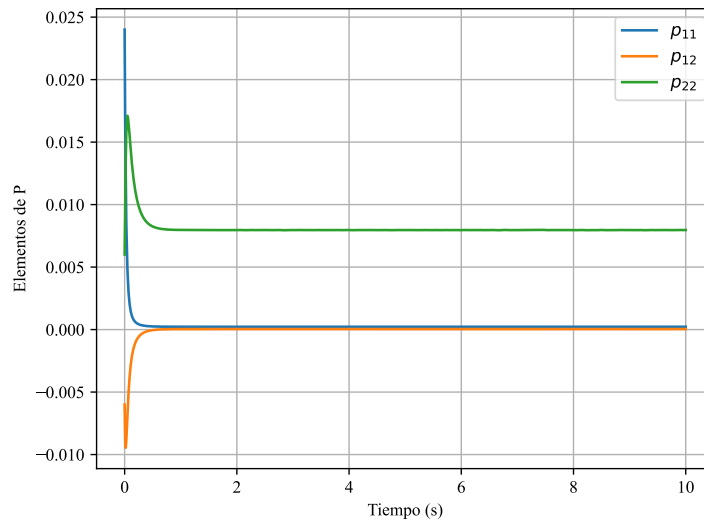


FIGURA 3.25: comportamiento de la matriz de ganancias $P(t)$ del filtro KB modificado.

Dados estos resultados, podemos decir que nuestra estructura propuesta funciona en el sistema no lineal, al menos hasta ahora, bajo los parámetros que tenemos definidos en el sistema. Restará ver cómo se comporta en presencia de una ley de

control, lo cual se abordará en la sección del sistema con controladores.

3.11.0.2 FILTRO RS MODELO NO LINEAL PROPUESTO

Del mismo modo la ecuación de ganancias para el filtro RS se mantienen igual, por lo que tampoco es necesario resolver de nuevo la ecuación diferencial de Ricatti asociada, comenzando con las pruebas bajo las condiciones de ganancias:

$q_{11}(0) = -20.17382759$, $q_{12}(0) = -0.439641648$, $q_{22}(0) = -3.22365377$; $x_1(0) = \pi/2$, $x_2(0) = 0$; $m_1(0) = \pi/2$, $m_2(0) = 0.0$; en el filtro RS modificado.

$$\dot{m} = Am_{att} + Q(t)^{-1}(y - m)$$

Simulamos y obtenemos los resultados mostrados en las figuras 3.26 y 3.27

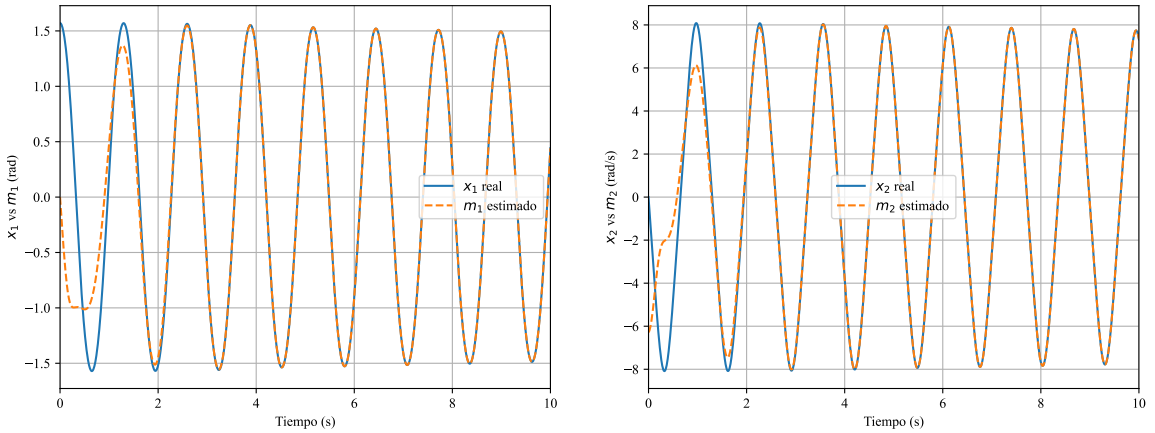


FIGURA 3.26: Comportamiento del estado filtrado vs estado real del sistema, con el filtro RS modificado.

Podemos notar que bajo la nueva estructura propuesta, el filtro RS sigue al estado en su modelo no lineal sin problema, tanto para el estado x_1 , como para el estado x_2 .

Cabe destacarse que la matriz de ganancias del filtro RS se relaciona con la distribución de los estados no necesariamente normalizados, siendo no necesariamente relacionada a una matriz de covarianza y por tanto no requiriendo cumplir el criterio de Sylvester. Sin embargo podemos notar en las figuras 3.28 a) y 3.28 b) que su

comportamiento converge y es estable, por lo que podemos decir que se desempeña adecuadamente.

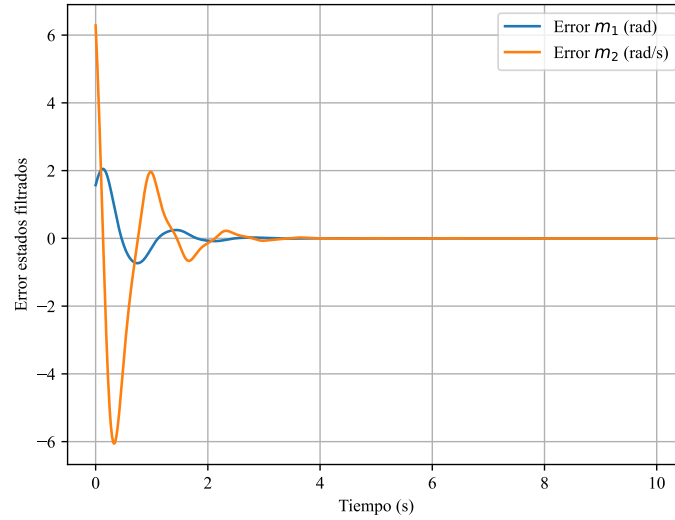


FIGURA 3.27: Comportamiento del error del filtro, con el filtro RS modificado.

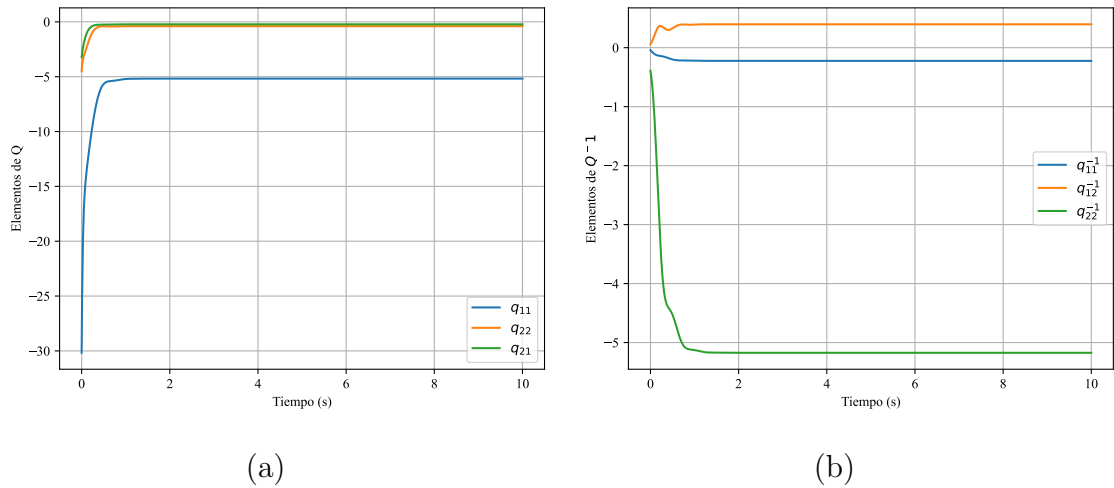


FIGURA 3.28: Comportamiento de las matrices de ganancias a) $Q(t)$ y b) $Q(t)^{-1}$ del filtro RS modificado.

Dado estos resultados, podemos decir que nuestra estructura propuesta funciona también al aplicarse al modelo no lineal con nuestra estructura propuesta para

el filtro RS, al menos hasta ahora bajo los parámetros que tenemos definidos en el sistema. Restará ver cómo se comporta en presencia de una ley de control.

3.12 SISTEMA CON CONTROLADORES

Basados en el buen desempeño de los filtros bajo la modificación propuesta en la sección anterior, procedemos a hacer pruebas para la combinación de cada filtro con cada ley de control, obteniendo cuatro controladores diferentes: $PID|KB$, $PID|RS$, $RS|KB$, $RS|RS$.

Para poder descartar que el controlador funcione adecuadamente en su versión original únicamente al añadir la presencia de una ley de control se estarán realizando pruebas con el filtro original en conjunto de la respectiva ley de control para cada controlador. Con la finalidad de maximizar el desempeño de los controladores, el estado y el filtro tendrán las mismas condiciones iniciales para que puedan seguirse adecuadamente, partiendo del reposo, es decir se usará $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$; $m_1(0) = 0$, $m_2(0) = 0.0$.

Introducimos una homogenización de la notación con el objetivo de evitar la ambigüedad en la sección de controladores. Por eso a partir de este punto se establece que las matrices $Q(t)$ corresponden a las matrices de los filtros, y que la matriz $P(t)$ y $P_a(t)$ corresponden a las ganancias del control RS, el control PID , al ser un control clásico no cuenta con una matriz de ganancias asociada, así que no se requiere mayor aclaración sobre el mismo. Del mismo modo, las señales de control estarán denotadas con la siguiente estructura “ $u_{control|filtro}$ ”

3.12.1 CONTROLADOR $PID|KB$

Comenzamos realizando la simulación del controlador, aplicando la ley de control PID en conjunto con el modelo del filtro KB original, obteniendo los resultados mostrado en las figuras 3.29 y 3.30.

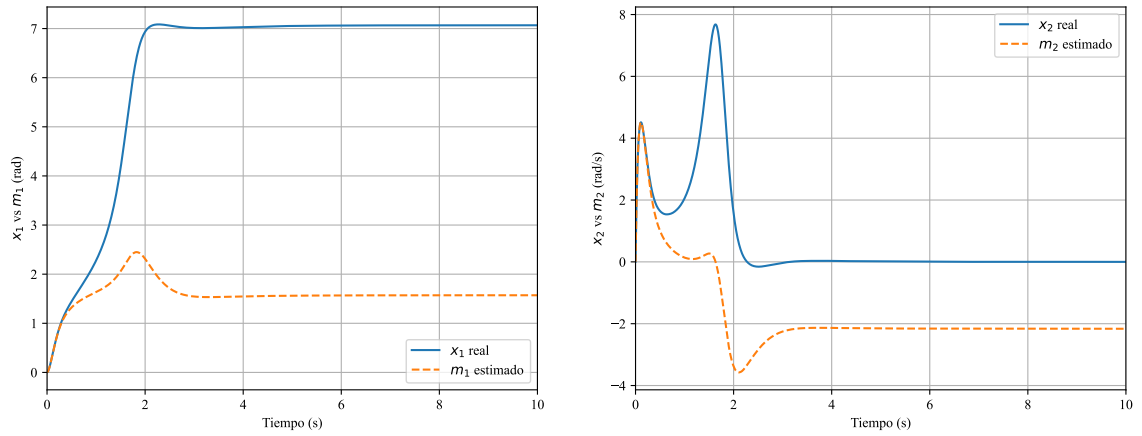


FIGURA 3.29: Comportamiento del estado filtrado vs estado real del sistema, controlador $PID|KB$.

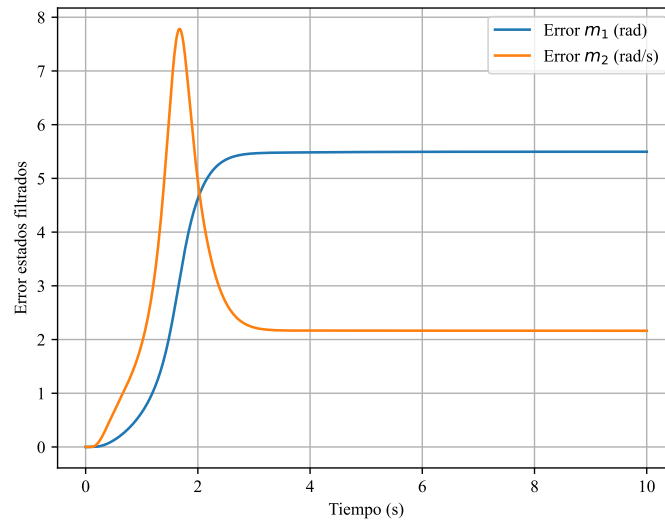


FIGURA 3.30: Comportamiento del error del filtro, controlador $PID|KB$.

Como podemos ver, el estado y el estado filtrado van bastante cercanos al inicio, pero rápidamente se alejan y terminan estabilizándose en valores extremadamente diferentes, causando que el controlador falle.

Procedemos ahora a repetir la simulación pero ahora con el modelo del filtro modificado que propusimos anteriormente, obteniendo los resultados mostrados en las figuras 3.31 y 3.32.

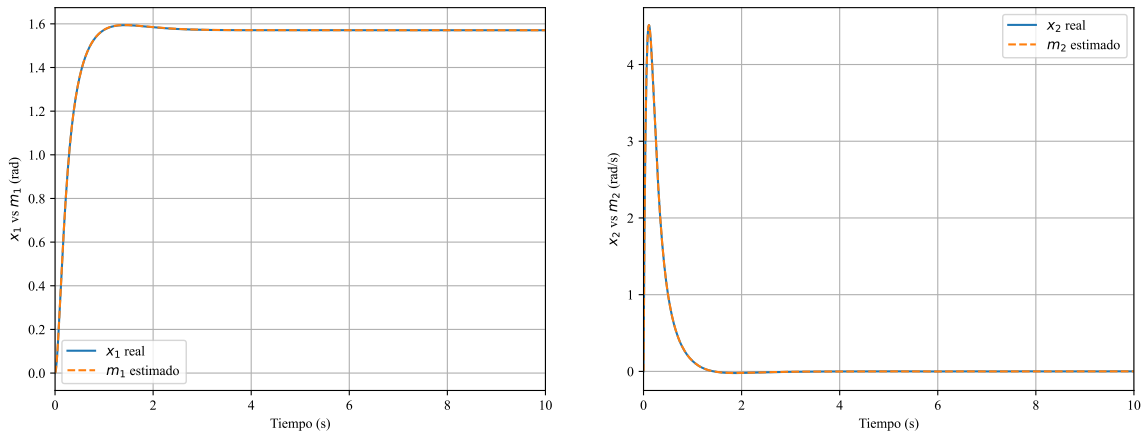


FIGURA 3.31: Comportamiento del estado filtrado vs estado real del sistema, controlador $PID|KB$ modificado.

Pude observarse que, al aplicarse la nueva estructura del filtro, el controlador permite controlar el sistema exitosamente y mantener estable el valor objetivo.

3.12.2 CONTROLADOR $PID|RS$

Continuamos ahora realizando la simulación del siguiente controlador, aplicando la ley de control PID en conjunto con el modelo del filtro RS original, obteniendo los resultados mostrados en las figuras 3.33 y 3.34.

Tal y como se esperaba, el estado y el estado filtrado comienzan próximos al inicio, pero se alejan rápidamente causando que falle el controlador.

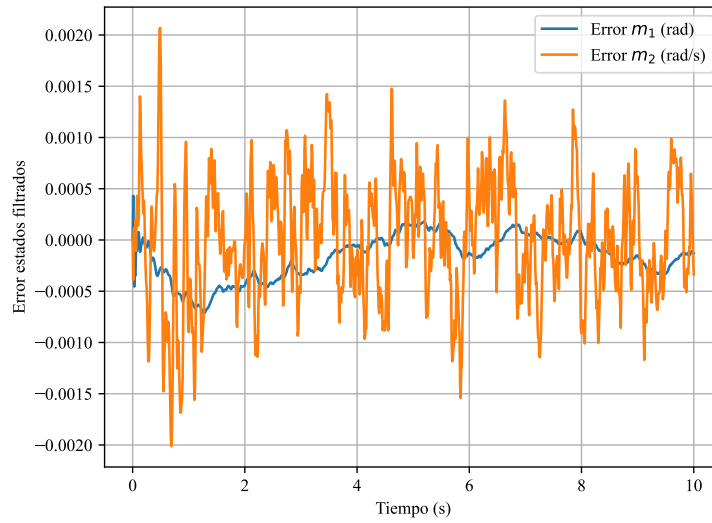


FIGURA 3.32: Comportamiento del error del filtro, controlador $PID|KB$ modificado.

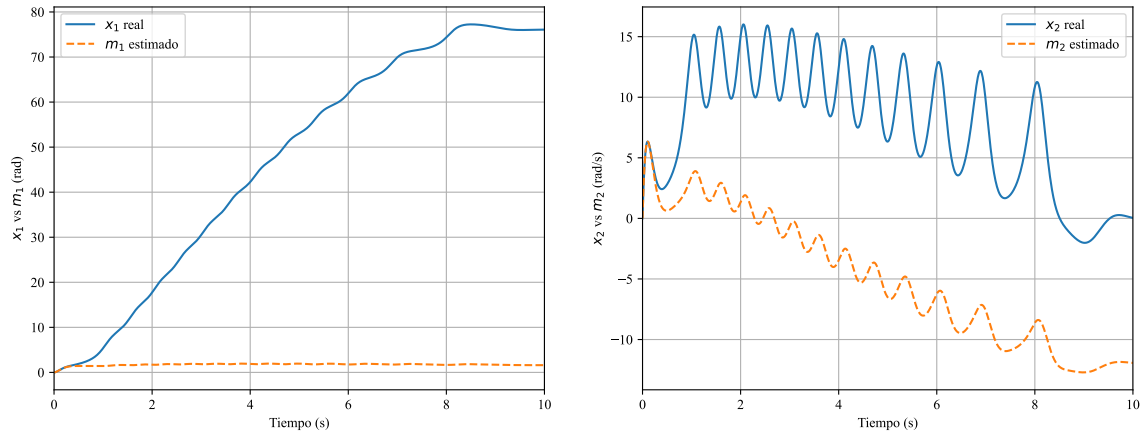


FIGURA 3.33: Comportamiento del estado filtrado vs estado real del sistema, controlador $PID|RS$.

Procedemos ahora a repetir la simulación pero ahora con el modelo del filtro modificado propuesto anteriormente, obteniendo los resultados en las figuras 3.35 y 3.36.

Observamos que en presencia de la nueva estructura del filtro RS el controlador funciona exitosamente.

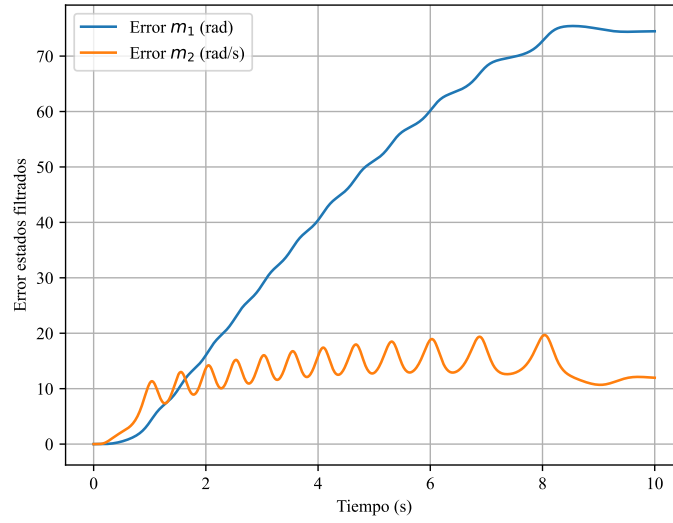


FIGURA 3.34: Comportamiento del error del filtro, controlador $PID|RS$.

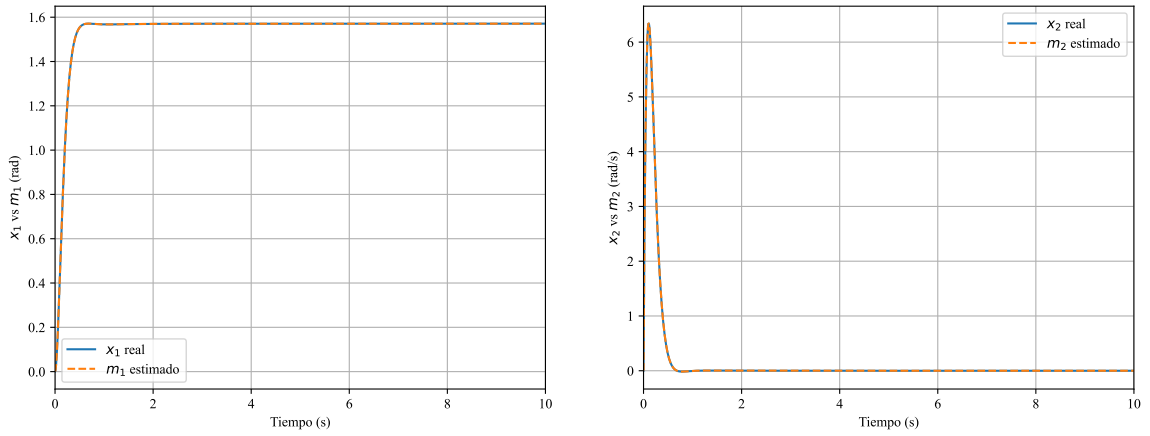


FIGURA 3.35: Comportamiento del estado filtrado vs estado real del sistema, controlador $PID|RS$ modificado.

3.12.3 CONTROLADOR $RS|KB$

Para la simulación del controlador aplicando la ley de control RS en conjunto con el modelo del filtro KB original se obtienen los resultados mostrados en las figuras 3.37 y 3.38.

Tal cual se esperaba, el estado y el estado filtrado se mantienen próximos al

inicio, alejándose rápidamente y terminando en valores extremadamente diferentes, causando que el controlador falle.

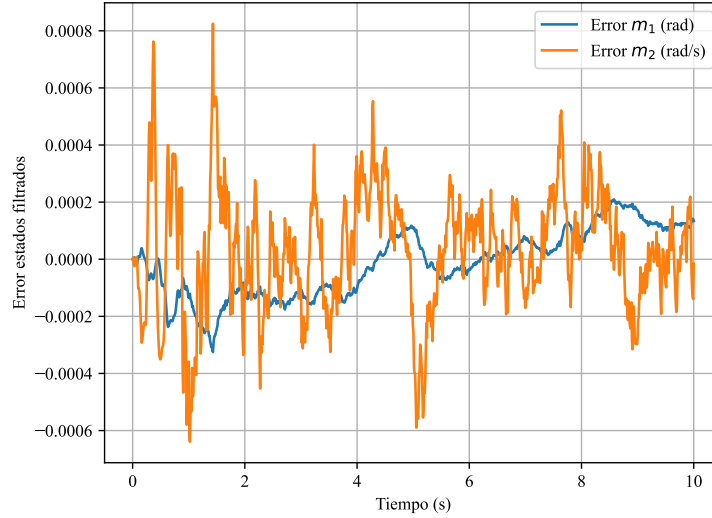


FIGURA 3.36: Comportamiento del error del filtro, controlador $PID|RS$ modificado.

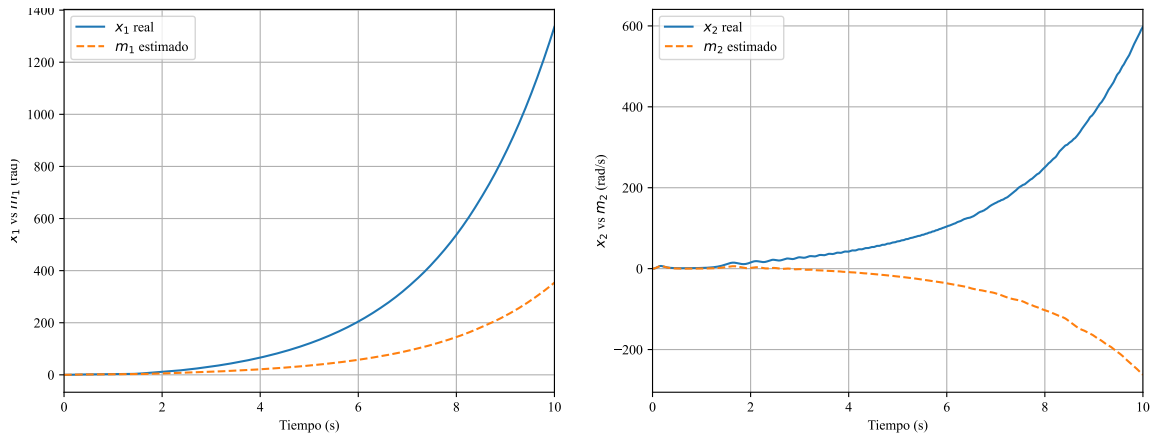
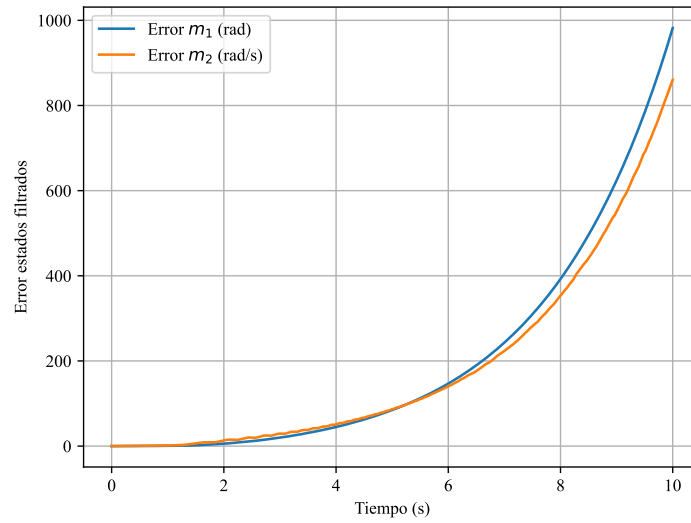
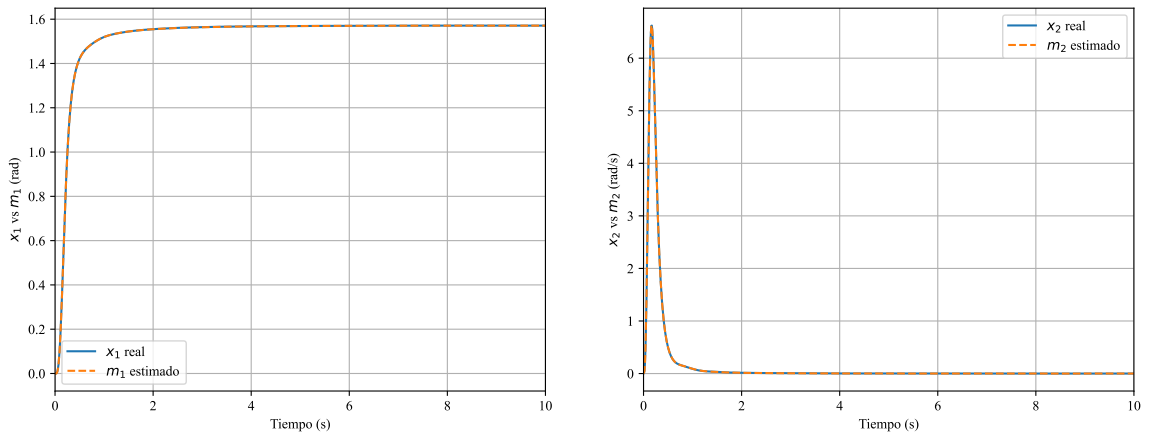


FIGURA 3.37: Comportamiento del estado filtrado vs estado real del sistema, controlador $RS|KB$.

Procedemos ahora a repetir la simulación pero ahora con el modelo del filtro modificado que propuesto anteriormente, obteniendo los resultados en las figuras 3.39 y 3.40.

FIGURA 3.38: Comportamiento del error del filtro, controlador $RS|KB$.FIGURA 3.39: Comportamiento del estado filtrado vs estado real del sistema, controlador $RS|KB$ modificado.

De nueva cuenta, y como ya podíamos esperar, el controlador filtra y mantiene estable el valor objetivo exitosamente.

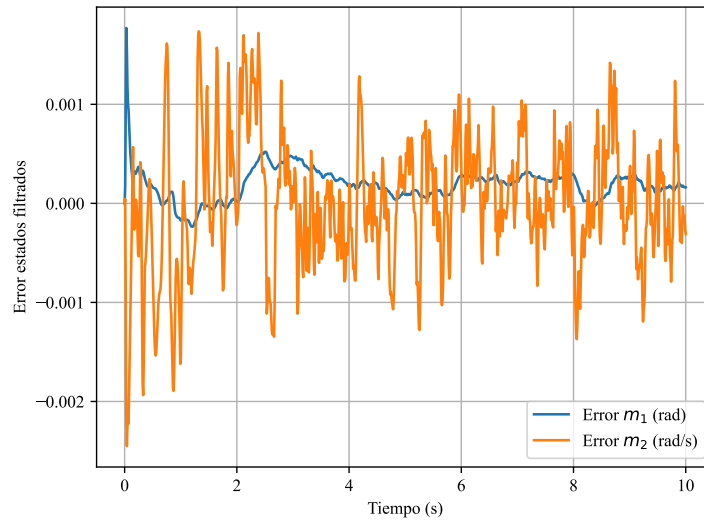


FIGURA 3.40: Comportamiento del error del filtro, controlador $RS|KB$ modificado.

3.12.4 CONTROLADOR $RS|RS$

Finalmente, se realiza la simulación del controlador aplicando la ley de control RS en conjunto con el modelo del filtro RS original, obteniendo los resultados mostrados en las figuras 3.41 y 3.42. Tal y como con los controladores anteriores, el

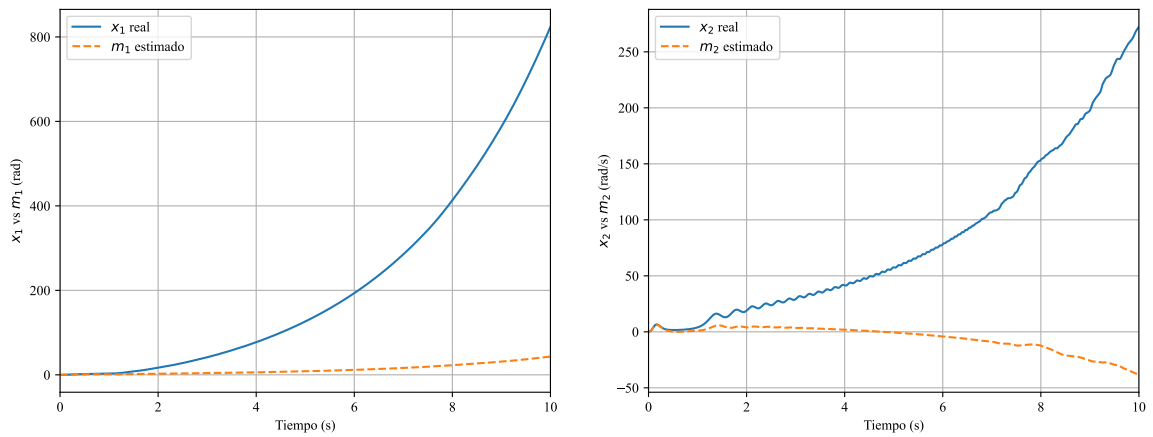


FIGURA 3.41: Comportamiento del estado filtrado vs estado real del sistema, controlador $RS|RS$

estado y el estado filtrado comienzan cercanos pero se alejan y terminan en valores extremadamente diferentes, fallando el controlador en este escenario.

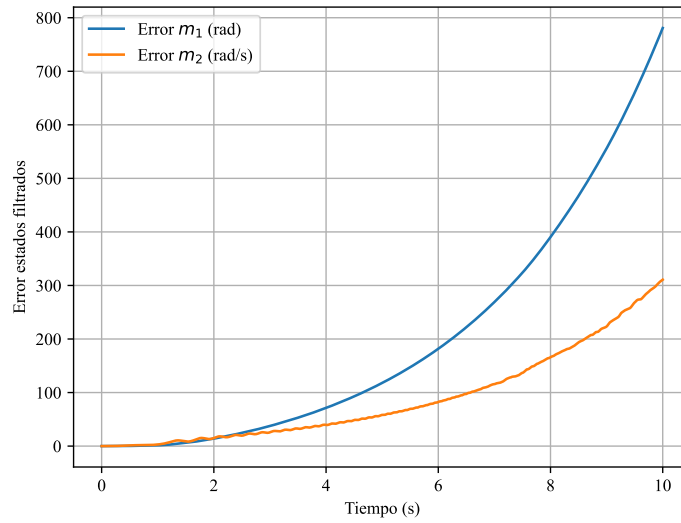


FIGURA 3.42: Comportamiento del error del filtro, controlador $RS|RS$.

Procedemos ahora a repetir la simulación pero ahora con el modelo del filtro modificado que propuesto anteriormente, obteniendo los resultados en las figuras 3.43 y 3.44.

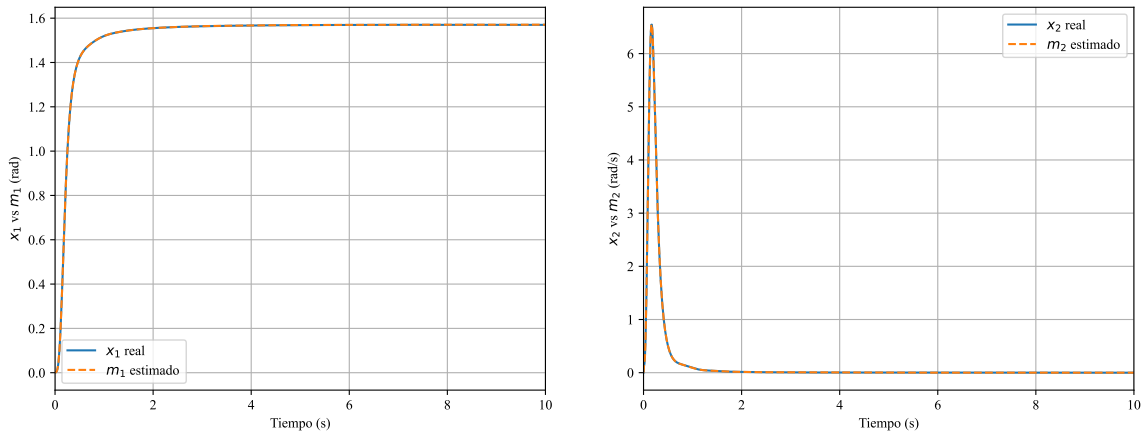


FIGURA 3.43: Comportamiento del estado filtrado vs estado real del sistema, controlador $RS|RS$ modificado.

Se hace evidente que, para este caso, y bajo la nueva estructura del filtro, el controlador mantiene el sistema estable, por lo que podemos decir que el controlador funciona exitosamente.

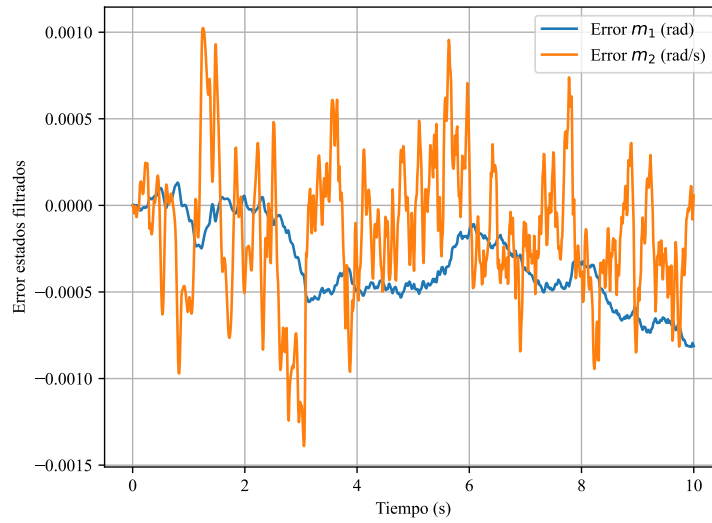


FIGURA 3.44: Comportamiento del error del filtro, controlador $RS|RS$ modificado.

3.12.5 SIMULACIÓN DE CONTROLADORES EN SUS VERSIONES

FINALES

Para finalizar se procederá a realizar la simulación de cada controlador varias veces bajo diversos valores de ε , a modo de que se pueda calcular la función costo y poder entonces usarlo como valor para complementar la comparación de los diferentes controladores.

Dado que este sistema no es un sistema con una distribución definida, para calcular el valor esperado que se usa en la función de costo, se usará el método Montecarlo para calcular un valor numérico del valor esperado y poder graficar la función de costo J para cada controlador.

Estas nuevas simulaciones se realizarán tomando en cuenta todos los cambios y consideraciones en los parámetros que definimos anteriormente, para hacer una comparación bajo las mismas condiciones a cada controlador. Se utilizará pues la siguientes condiciones para las simulaciones finales:

Parámetros: $l = 0.30$ longitud del péndulo en m $\gamma = 90$ valor gamma de parte estocástica $m = 0.85$ masa del péndulo en kg $g = 9.81$ valor de la gravedad en $\frac{m}{s^2}$ $\varepsilon =$ valor variable entre simulaciones

tiempo de simulación = 10 segundos.

Condiciones iniciales: $x_1(0) = 0 \text{ rad}$ $x_2(0) = 0 \frac{\text{rad}}{s}$ $m_1(0) = 0 \text{ rad}$ $m_2(0) = 0 \frac{\text{rad}}{s}$ **Valores objetivo:** $x_1(T) = \frac{\pi}{2} \text{ rad} = 90^\circ$ $x_2(T) = 0 \frac{\text{rad}}{s} = 0^\circ \frac{s}{s}$ **Ganancias filtro KB modificado** $q_{11 \text{ KB}}(0) = 0.024 \quad q_{12 \text{ KB}}(0) = 0.006$ $q_{12 \text{ KB}}(0) = 0.006$ **Ganancias Control PID** $k_p = -7.338 \quad k_d = -8.865$ $k_i = -1.489$ **Ganancias filtro RS** $q_{11 \text{ RS}}(0) = -20.17382759$ $q_{12 \text{ RS}}(0) = -4.39641648$ $q_{22 \text{ RS}}(0) = -3.22365377$ **Ganancias control RS** $p_{11 \text{ RS}}(0) = -37.17382759$ $p_{12 \text{ RS}}(0) = 0.001$ $p_{22 \text{ RS}}(0) = -4.22365377$

Los resultados obtenidos de esta simulación se presentarán en la sección de resultados.

CAPÍTULO 4

RESULTADOS

4.1 COMPORTAMIENTO DE LOS CONTROLADORES NO LINEALES

4.1.1 CONTROLADOR $PID|KB$

Para el controlador aplicando la ley de control PID con el filtro KB modificado ($PID|KB$) se obtuvo la función de costo con el comportamiento mostrado en las figuras 4.1 y 4.2.

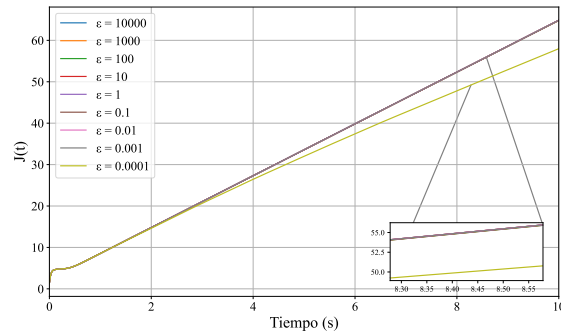
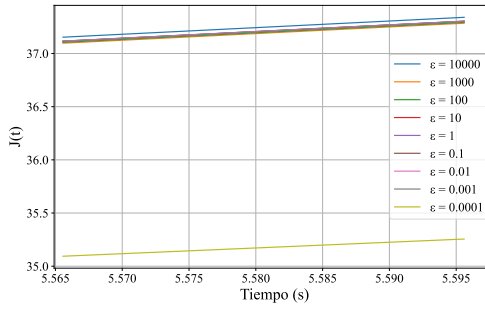
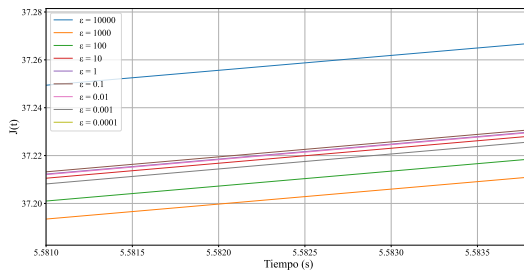


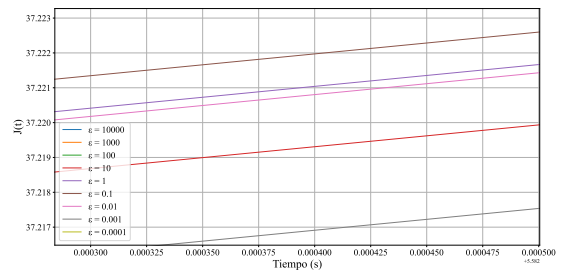
FIGURA 4.1: Función de costo J del controlador $PID|KB$ modificado.



(a)



(b)



(c)

FIGURA 4.2: Acercamientos a la función de costo J del controlador $PID|KB$ modificado.

Con el comportamiento promedio de la señal de control mostrado en las figuras 4.3 y 4.4.

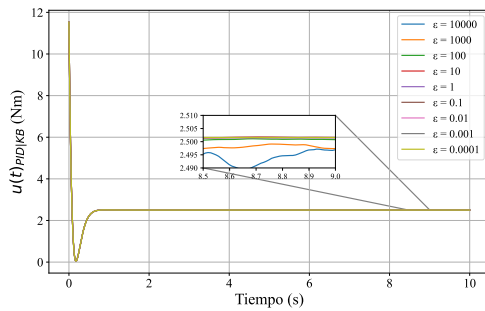


FIGURA 4.3: Señal de control $u_{PID|KB}$ para el controlador $PID|KB$ modificado.

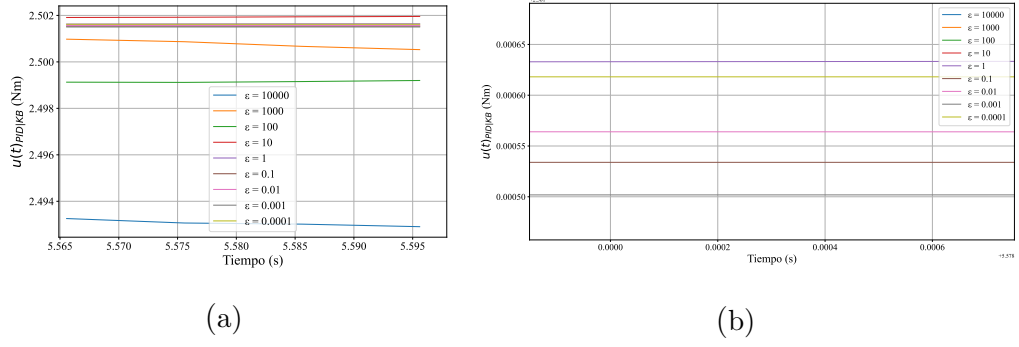


FIGURA 4.4: Acercamientos a la señal de control $u_{PID|KB}$ para el controlador $PID|KB$ modificado.

Con el comportamiento promedio de los errores de los estados del sistema mostrado en las figuras 4.5, 4.6, 4.7 y 4.8.

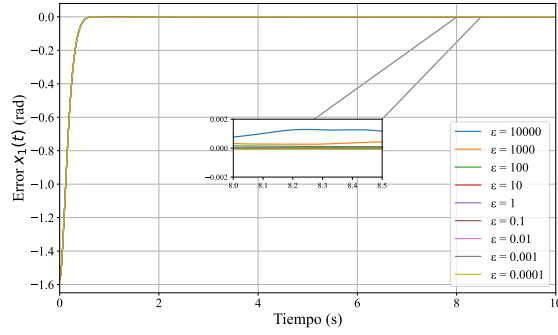


FIGURA 4.5: Error estado x_1 para el controlador $PID|KB$ modificado.

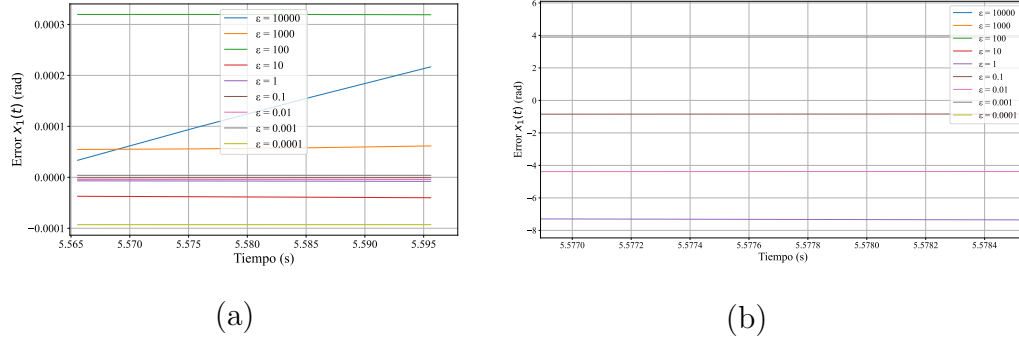


FIGURA 4.6: Acercamientos al error del estado x_1 para el controlador $PID|KB$ modificado.

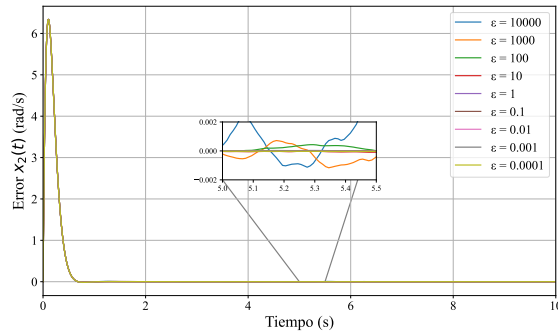


FIGURA 4.7: Error estado x_2 para el controlador $PID|KB$ modificado.

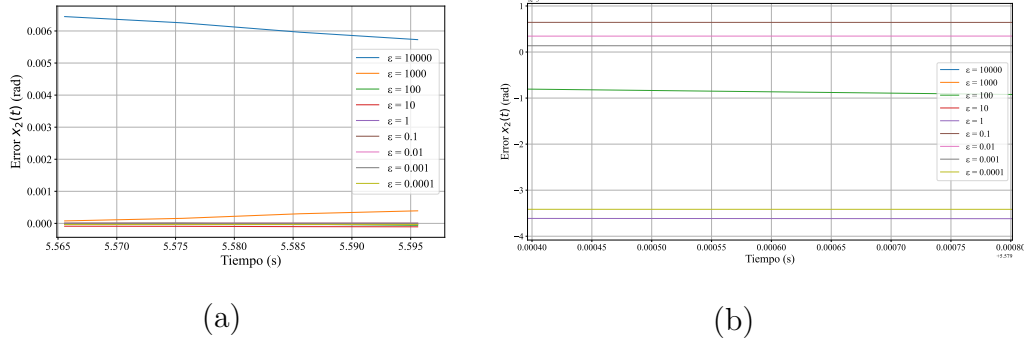
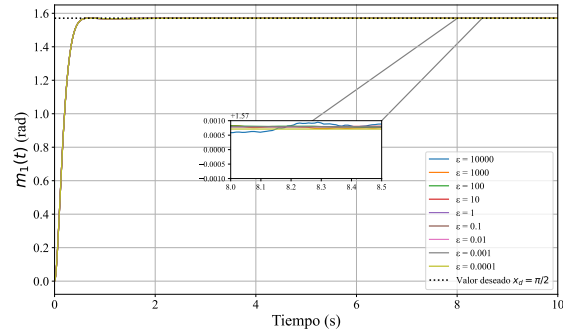
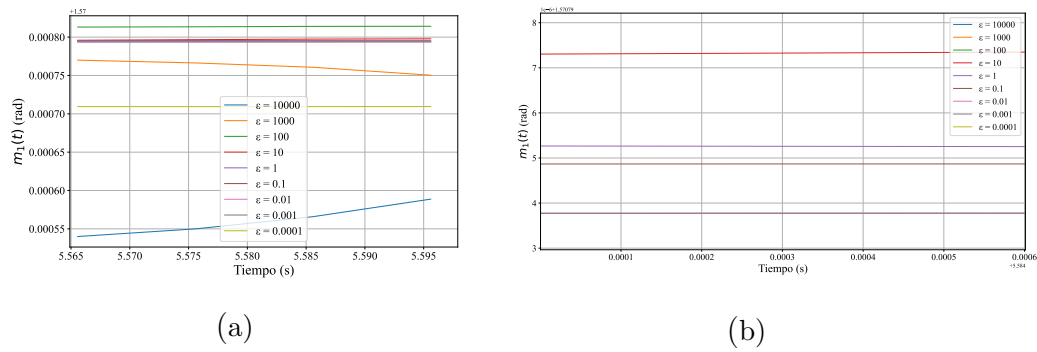
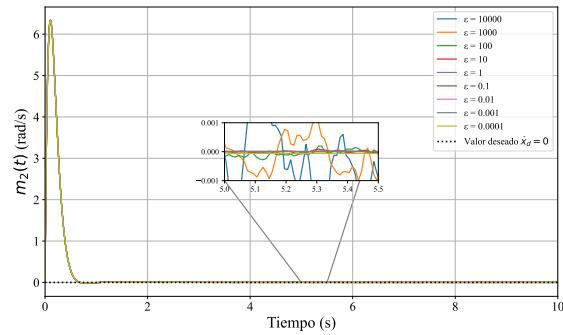


FIGURA 4.8: Acercamientos al error estado x_2 para el controlador $PID|KB$ modificado.

Con el comportamiento promedio de los estados filtrados tal como en las figuras 4.9, 4.10, 4.11 y 4.12.

FIGURA 4.9: Estado filtrado m_1 para el controlador $PID|KB$ modificado.FIGURA 4.10: Acercamientos al estado filtrado m_1 para el controlador $PID|KB$ modificado.FIGURA 4.11: Estado filtrado m_2 para el controlador $PID|KB$ modificado.

Con el comportamiento promedio de los estados del sistema presentado en las figuras 4.13, 4.14, 4.15 y 4.16.

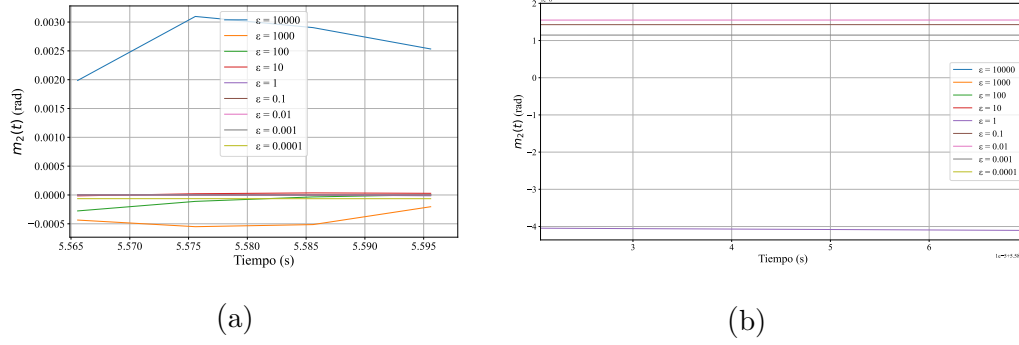


FIGURA 4.12: Acercamientos al estado filtrado m_2 para el controlador $PID|KB$ modificado.

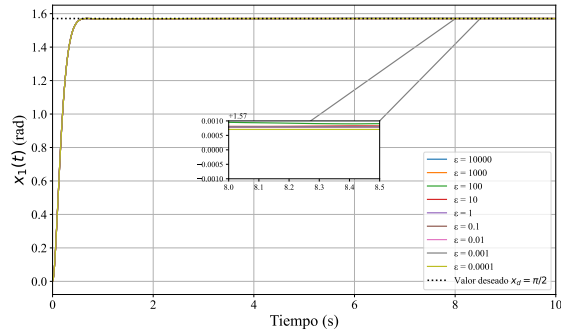


FIGURA 4.13: Estado x_1 para el controlador $PID|KB$ modificado

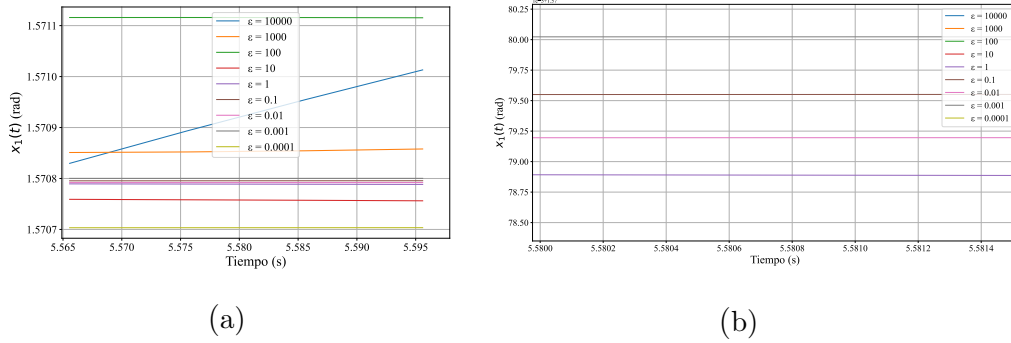
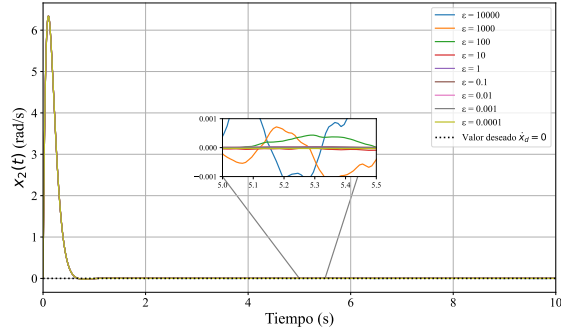
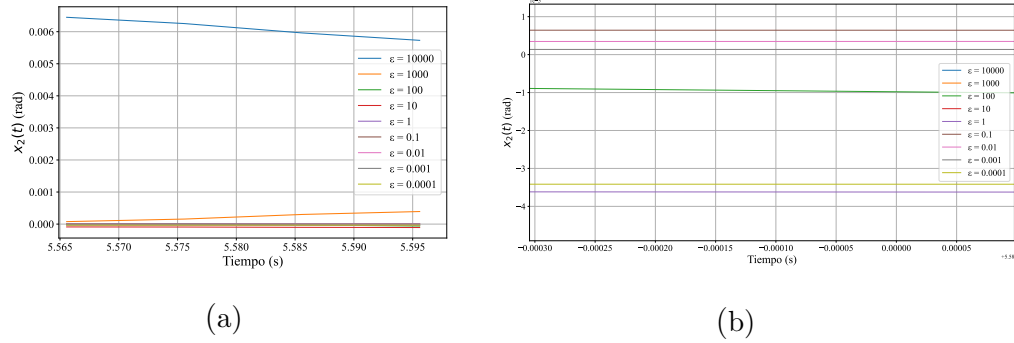


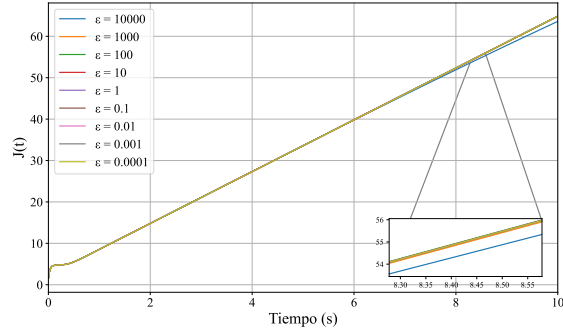
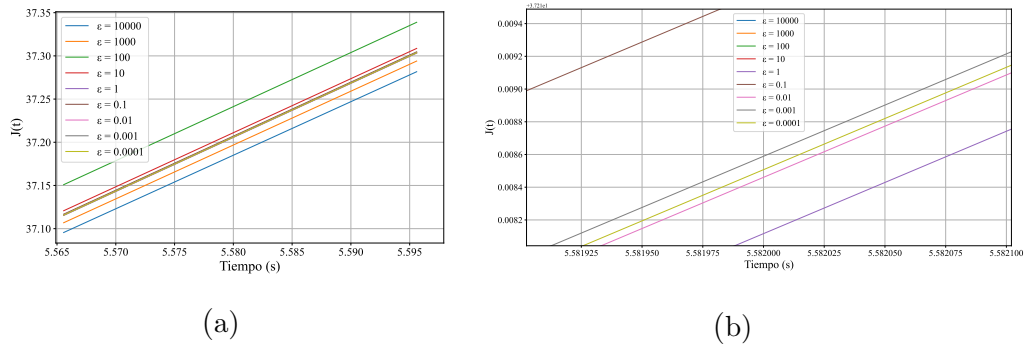
FIGURA 4.14: Acercamientos al estado x_1 para el controlador $PID|KB$ modificado.

FIGURA 4.15: Estado x_2 para el controlador $PID|KB$ modificadoFIGURA 4.16: Acercamientos al estado x_2 para el controlador $PID|KB$ modificado.

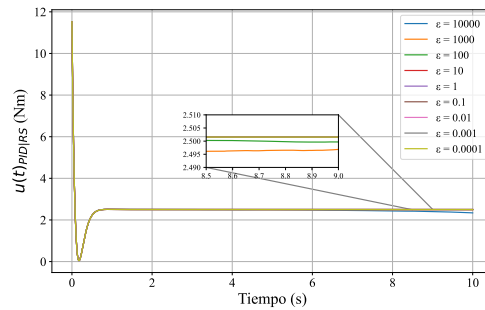
Resultados complementarios del comportamiento del controlador se muestran en el Anexo A para su consulta.

4.1.2 CONTROLADOR $PID|RS$

Para el controlador aplicando la ley de control PID con el filtro RS modificado ($PID|RS$) se obtuvo la función de costo con el comportamiento mostrado en las figuras 4.17 y 4.18.

FIGURA 4.17: Función de costo J del controlador $PID|RS$ modificado.FIGURA 4.18: Acercamientos a la función de costo J del controlador $PID|RS$ modificado.

Con el comportamiento promedio de la señal de control mostrado en las figuras 4.19 y 4.20.

FIGURA 4.19: Señal de control $u_{PID|RS}$ para el controlador $PID|RS$ modificado.

Con el comportamiento promedio de los errores de los estados del sistema mostrado en las figuras 4.21, 4.22, 4.23 y 4.24.

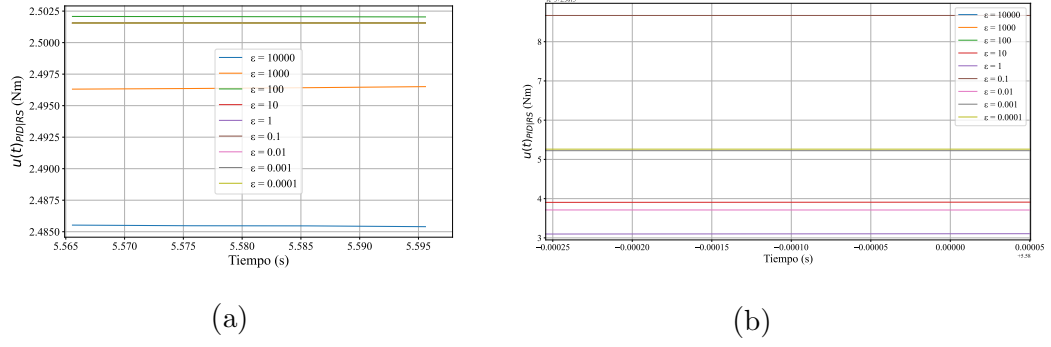


FIGURA 4.20: Acercamientos a la función de costo J del controlador $PID|RS$ modificado.

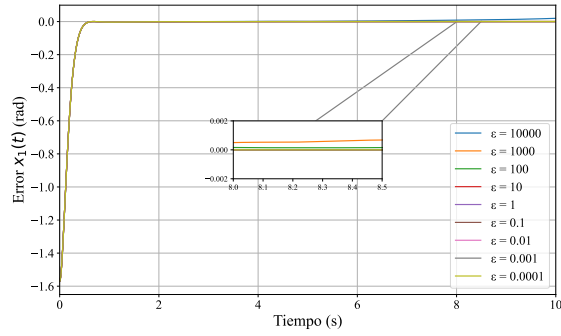


FIGURA 4.21: Error estado x_1 para el controlador $PID|RS$ modificado.

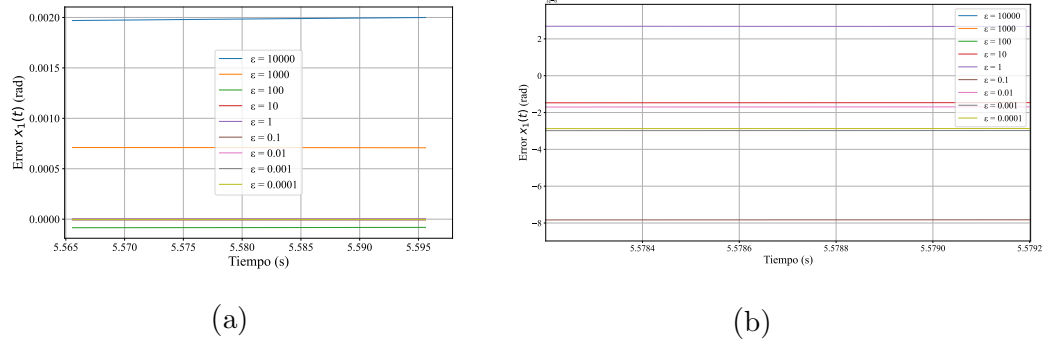
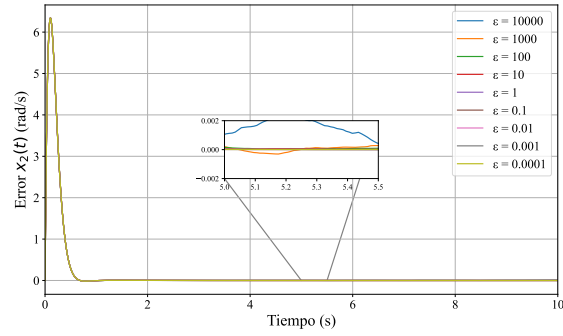
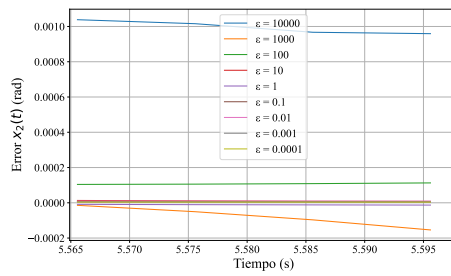
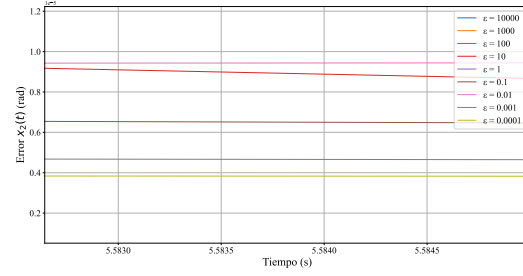


FIGURA 4.22: Acercamientos al error estado x_1 para el controlador $PID|RS$ modificado.

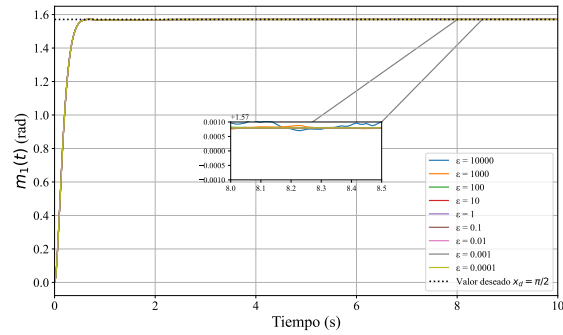
Con el comportamiento promedio de los estados filtrados tal como en las figuras 4.25, 4.26, 4.27 y 4.28.

FIGURA 4.23: Error estado x_2 para el controlador $PID|RS$ modificado.

(a)



(b)

FIGURA 4.24: Acercamientos al error estado x_2 para el controlador $PID|RS$ modificado.FIGURA 4.25: Estado filtrado m_1 para el controlador $PID|RS$ modificado.

Con el comportamiento promedio de los estados del sistema presentado en las figuras 4.29, 4.30, 4.31 y 4.32.

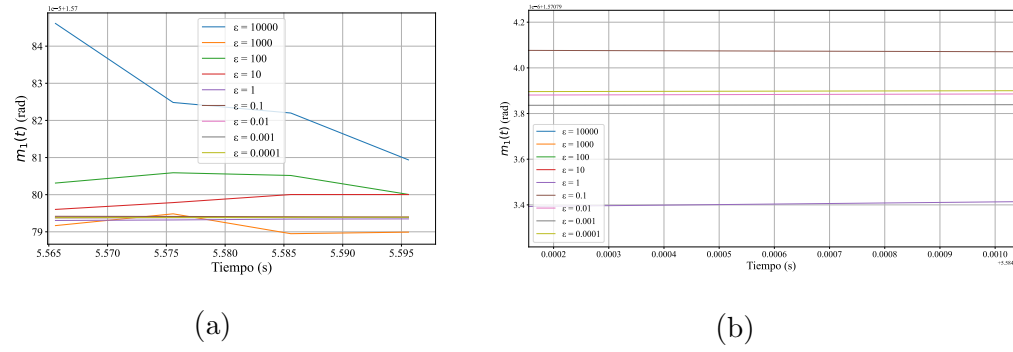


FIGURA 4.26: Acercamientos al estado filtrado m_1 para el controlador $PID|RS$ modificado.

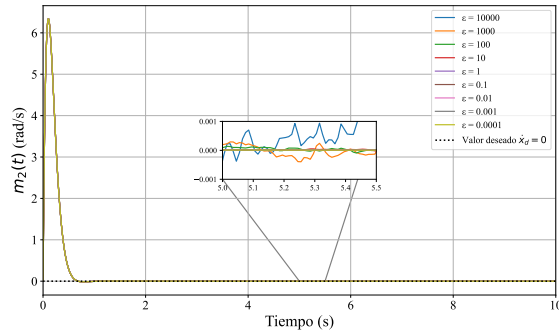


FIGURA 4.27: Estado filtrado m_2 para el controlador $PID|RS$ modificado.

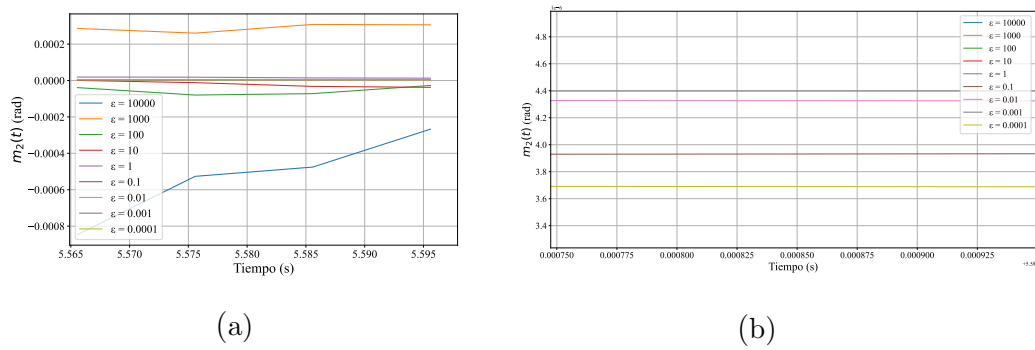
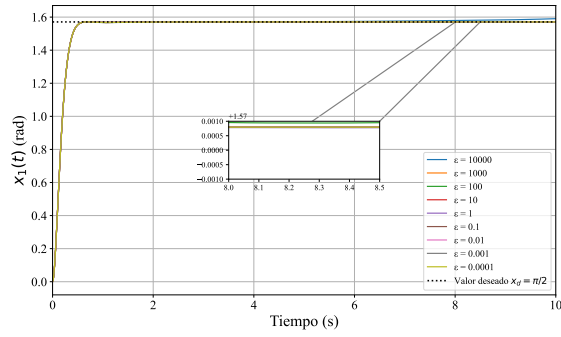
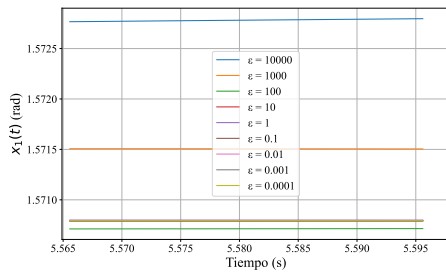
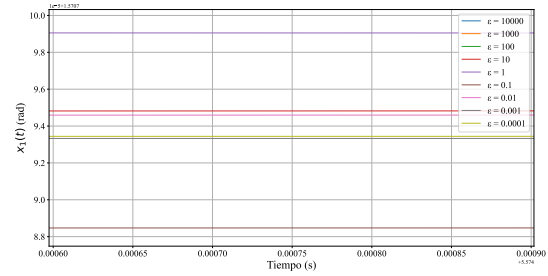


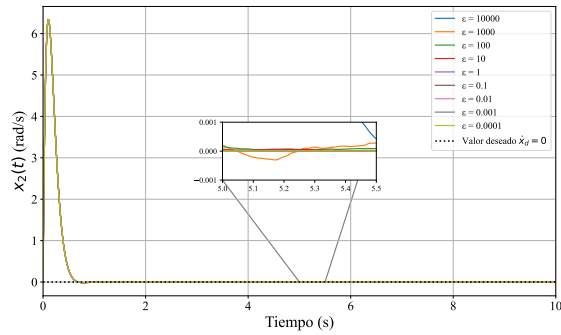
FIGURA 4.28: Acercamientos al estado filtrado m_1 para el controlador $PID|RS$ modificado.

FIGURA 4.29: Estado x_1 para el controlador $PID|RS$ modificado.

(a)



(b)

FIGURA 4.30: Acercamientos al estado x_1 para el controlador $PID|RS$ modificado.FIGURA 4.31: Estado x_2 para el controlador $PID|RS$ modificado.

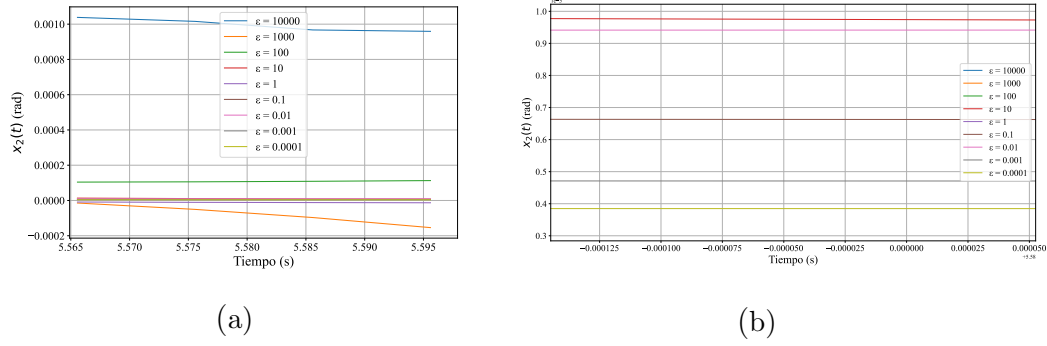


FIGURA 4.32: Acercamientos al estado x_2 para el controlador $PID|RS$ modificado.

Resultados complementarios del comportamiento del controlador se muestran en el Anexo A para su consulta.

4.1.3 CONTROLADOR $RS|KB$

Para el controlador aplicando la ley de control RS con el filtro KB ($RS|KB$) modificado se obtuvo la función de costo con el comportamiento mostrado en las figuras 4.33 y 4.34.

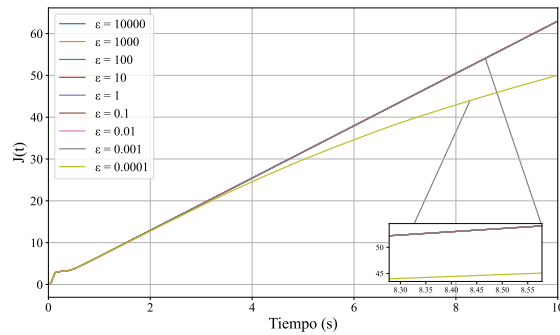


FIGURA 4.33: Función de costo J del controlador $RS|KB$ modificado.

Con el comportamiento promedio de la señal de control mostrado en las figuras 4.35 y 4.36.

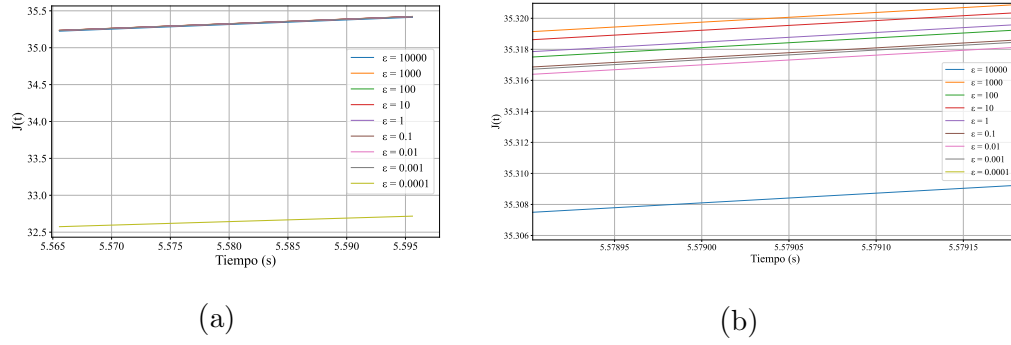


FIGURA 4.34: Acercamientos a la función de costo J del controlador $RS|KB$ modificado.

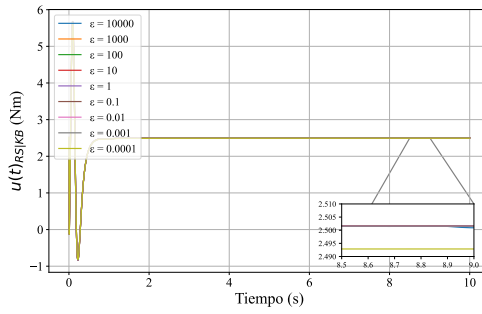


FIGURA 4.35: Señal de control $u_{RS|KB}$ para el controlador $RS|KB$ modificado.

Y Con el comportamiento promedio de los errores de los estados del sistema mostrado en las figuras. 4.37, 4.38, 4.39 y 4.40.

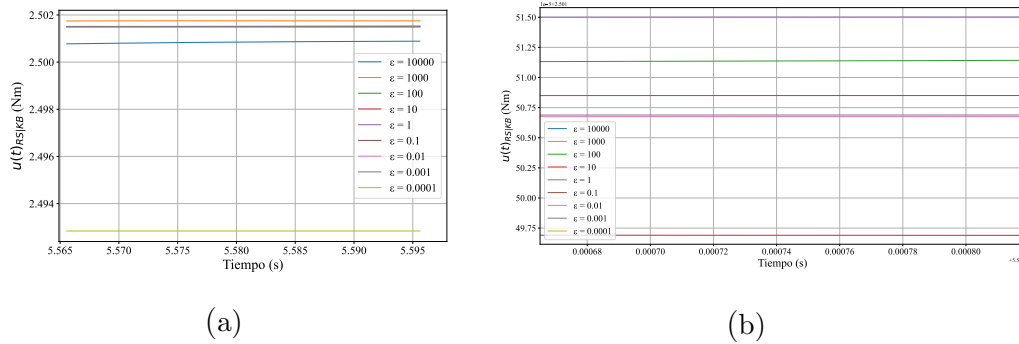
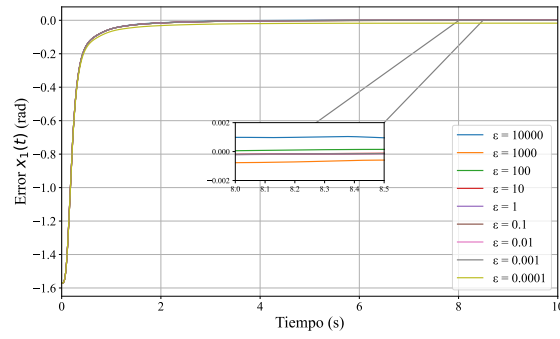
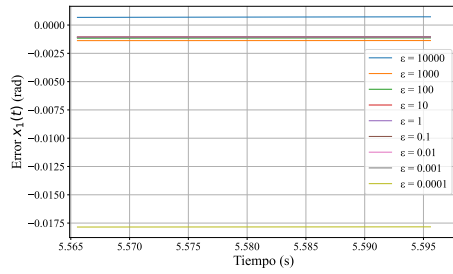
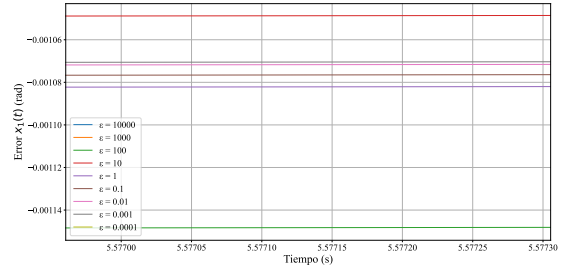


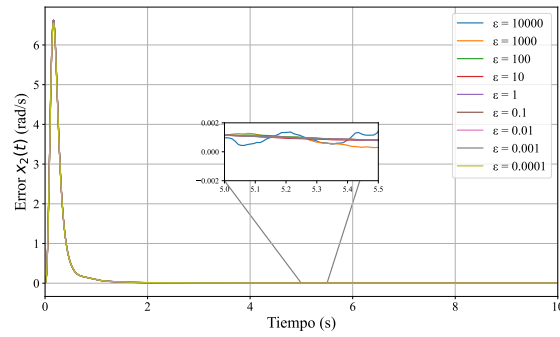
FIGURA 4.36: Acercamientos a la señal de control $u_{RS|KB}$ para el controlador $RS|KB$ modificado.

FIGURA 4.37: Error estado x_1 para el controlador $RS|KB$ modificado.

(b)



(c)

FIGURA 4.38: Acercamientos al error estado x_1 para el controlador $RS|KB$ modificado.FIGURA 4.39: Error estado x_2 para el controlador $RS|KB$ modificado.

Con el comportamiento promedio de los estados filtrados tal como en las figuras

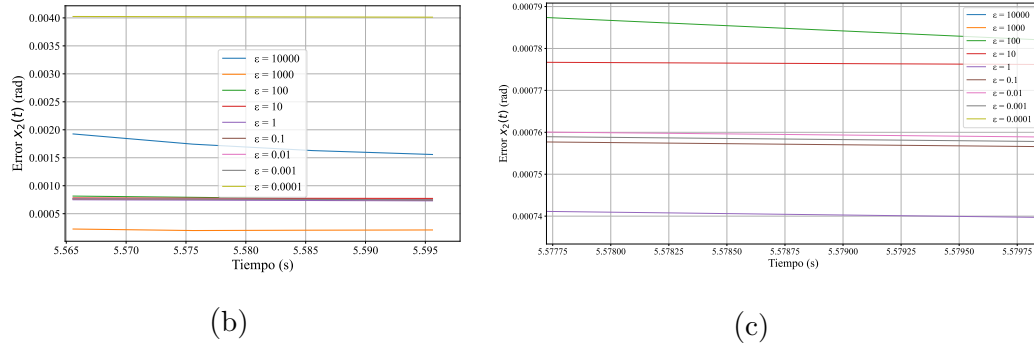
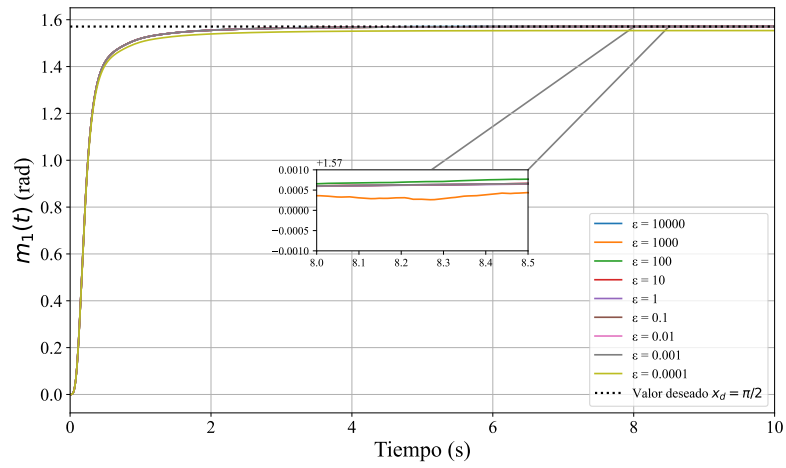
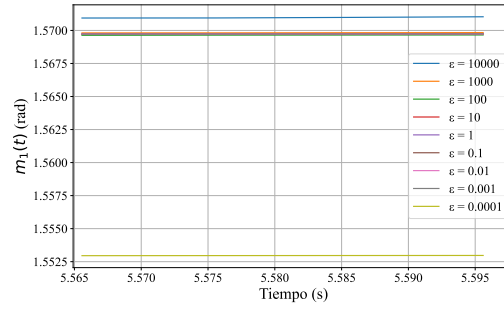
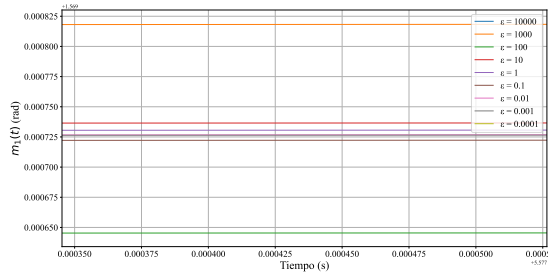


FIGURA 4.40: Acercamientos al error estado x_2 para el controlador $RS|KB$ modificado.

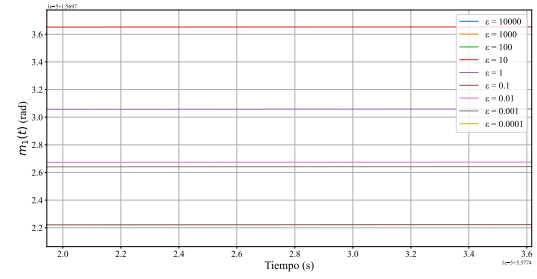




(a)



(b)



(c)

FIGURA 4.42: Acercamientos al estado filtrado m_1 para el controlador $RS|KB$ modificado. Se muestran sus acercamientos b) zoom 1, c) zoom 2 y d) zoom 3.

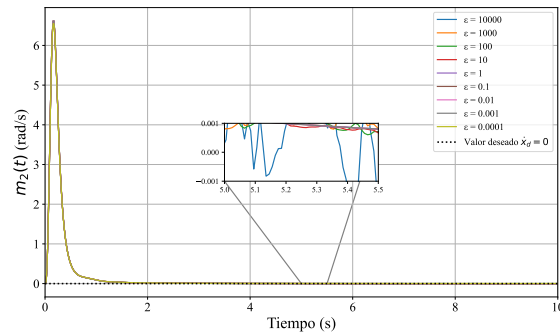
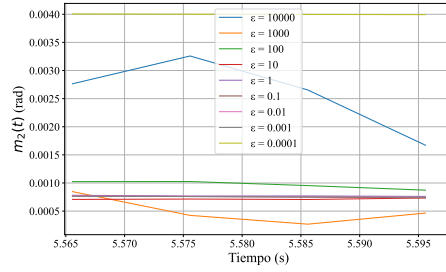
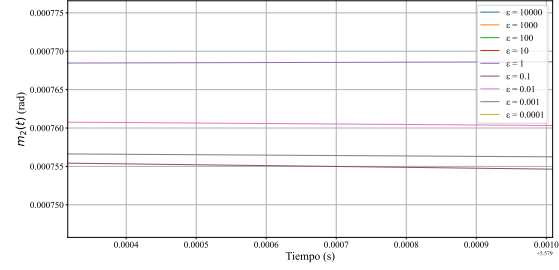


FIGURA 4.43: Estado filtrado m_2 para el controlador $RS|KB$ modificado.



(a)



(b)

FIGURA 4.44: Acercamientos al estado filtrado m_2 para el controlador $RS|KB$ modificado.

Con el comportamiento promedio de los estados del sistema presentado en las figuras 4.45, 4.46, 4.47 y 4.48.

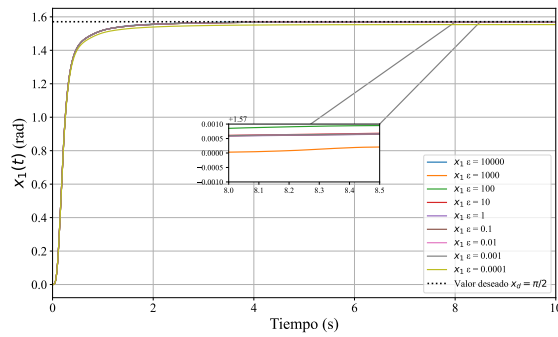
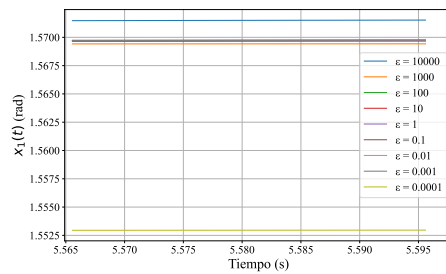
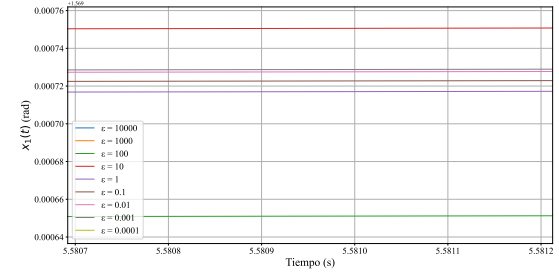


FIGURA 4.45: Estado filtrado x_1 para el controlador $RS|KB$ modificado.

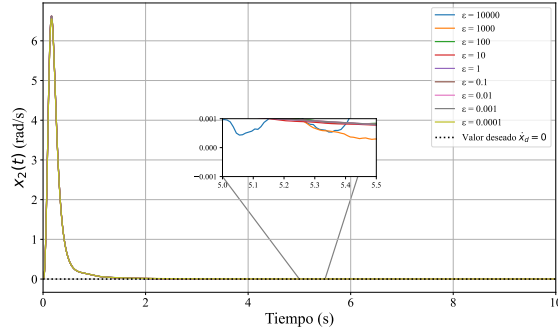
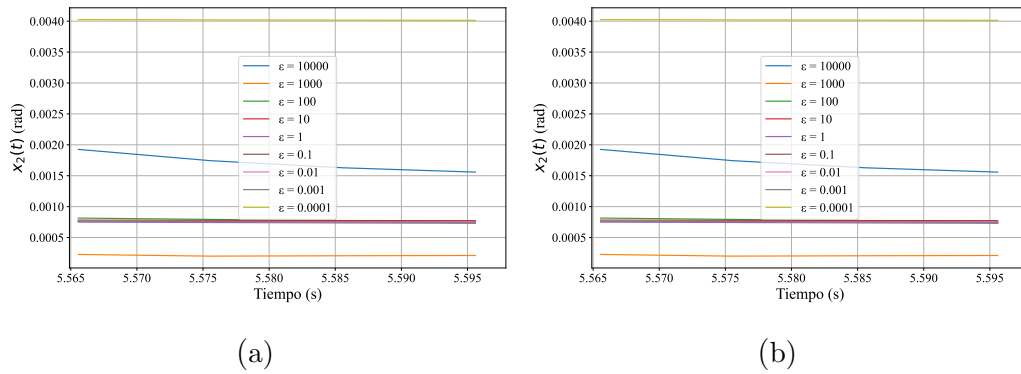


(a)



(b)

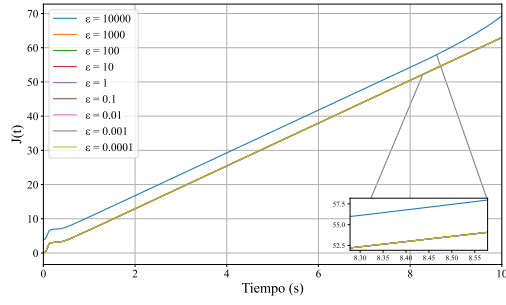
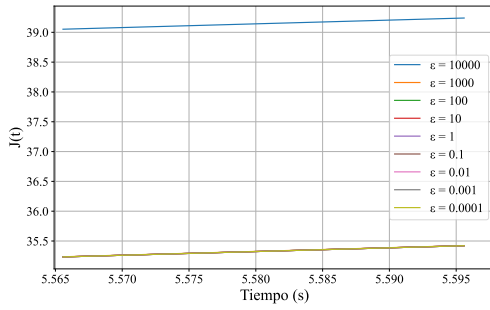
FIGURA 4.46: Acercamientos al estado filtrado x_1 para el controlador $RS|KB$ modificado.

FIGURA 4.47: Estado filtrado x_2 para el controlador $RS|KB$ modificado.FIGURA 4.48: Acercamientos al estado filtrado x_2 para el controlador $RS|KB$ modificado.

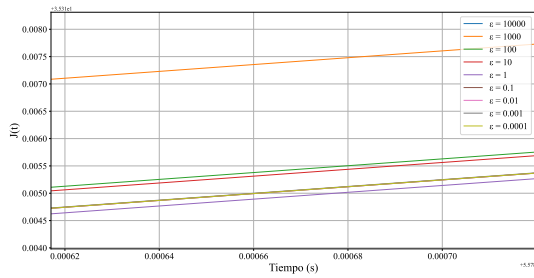
Resultados complementarios del comportamiento del controlador se muestran en el Anexo A para su consulta.

4.1.4 CONTROLADOR $RS|RS$

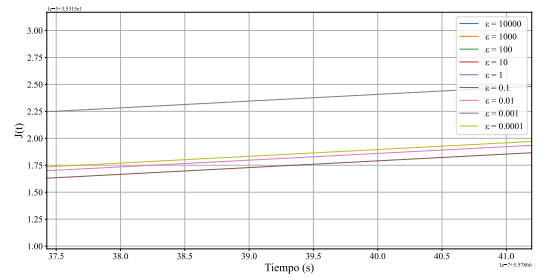
Para el controlador aplicando la ley de control RS con el filtro RS modificado ($RS|RS$) se obtuvo la función de costo con el comportamiento mostrado en las figuras 4.49 y 4.50.

FIGURA 4.49: Función de costo J del controlador $RS|RS$ modificado.

(a)



(b)



(c)

FIGURA 4.50: Acercamientos a la función de costo J del controlador $RS|RS$ modificado.

Con el comportamiento promedio de la señal de control mostrado en las figuras 4.51 y 4.52.

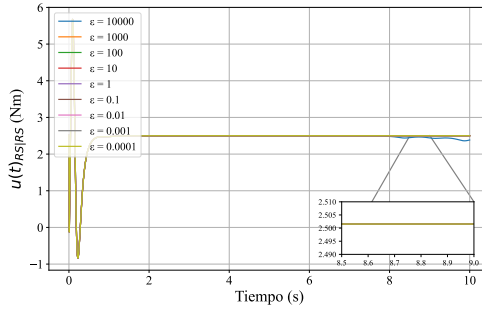
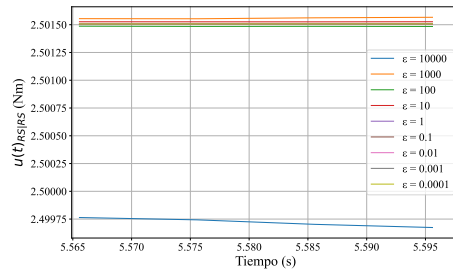
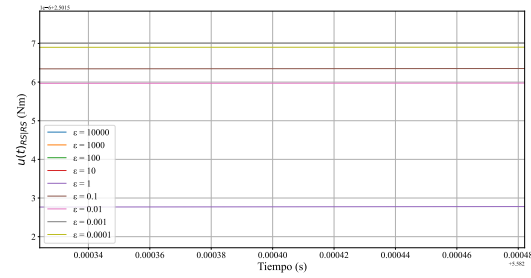


FIGURA 4.51: Señal de control $u_{RS|RS}$ para el controlador $RS|RS$ modificado.



(a)



(b)

FIGURA 4.52: Acercamientos a la señal de control $u_{RS|RS}$ para el controlador $RS|RS$ modificado.

Con el comportamiento promedio de los errores de los estados del sistema mostrado en las figuras 4.53, 4.54, 4.55 y 4.56.

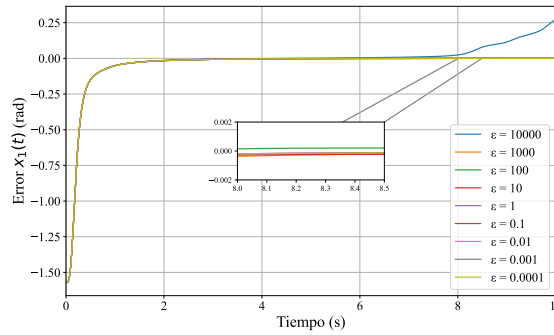


FIGURA 4.53: Error estado x_1 para el controlador $RS|RS$ modificado.

Con el comportamiento promedio de los estados filtrados tal como en las figuras 4.57, 4.58, 4.59 y 4.60.

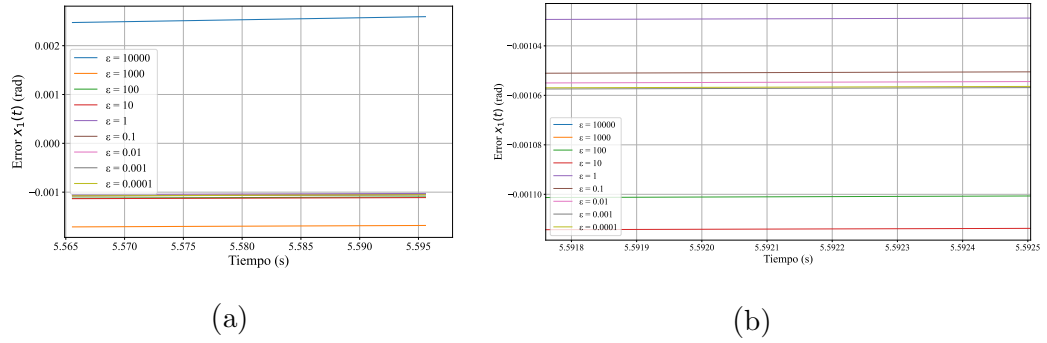


FIGURA 4.54: Acercamientos al error estado x_1 para el controlador $RS|RS$ modificado.

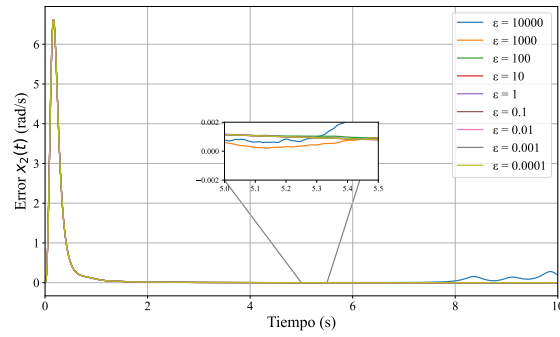


FIGURA 4.55: Error estado x_2 para el controlador $RS|RS$ modificado.

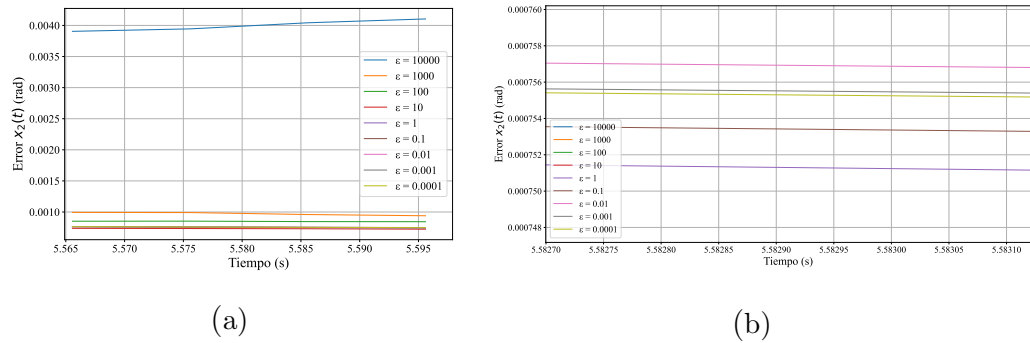
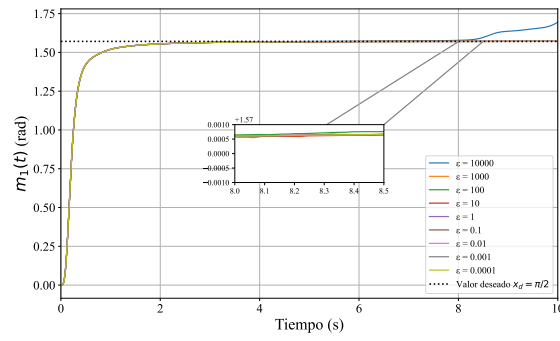
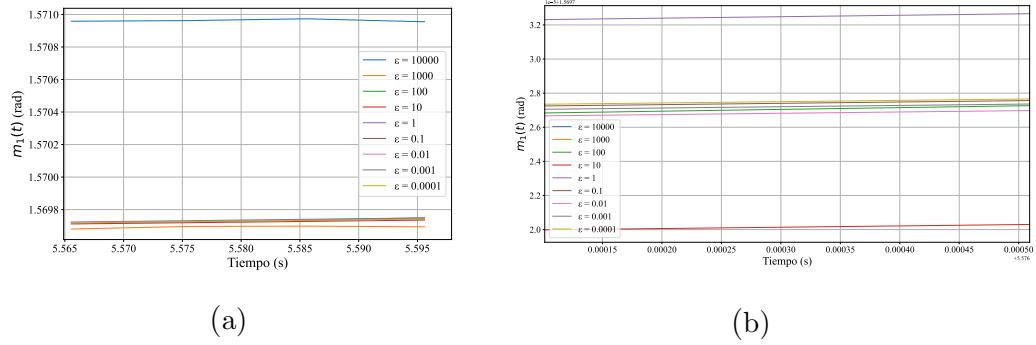
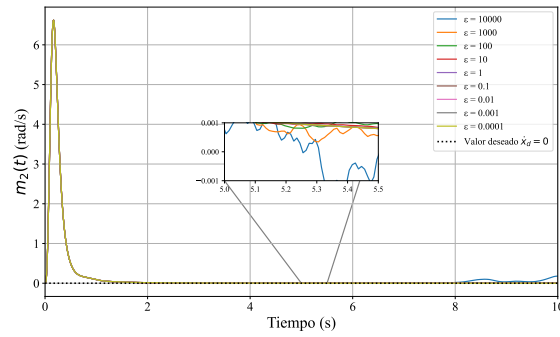


FIGURA 4.56: Acercamientos al error estado x_2 para el controlador $RS|RS$ modificado.

FIGURA 4.57: Estado filtrado m_1 para el controlador $RS|RS$ modificado.FIGURA 4.58: Acercamientos al estado filtrado m_1 para el controlador $RS|RS$ modificado.FIGURA 4.59: Estado filtrado m_2 para el controlador $RS|RS$ modificado.

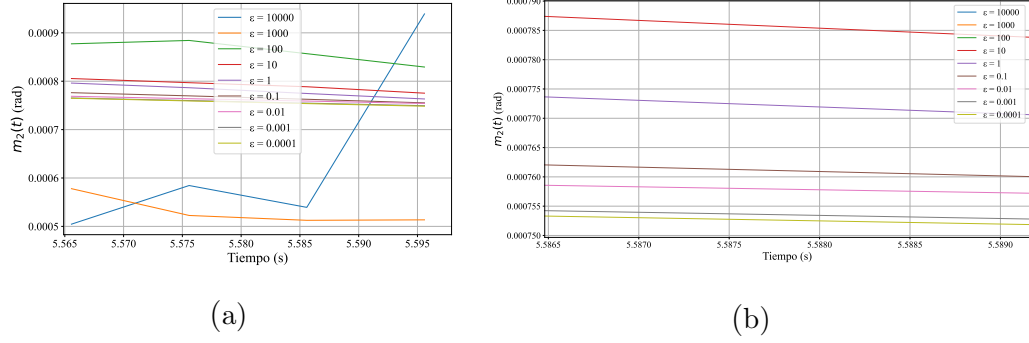


FIGURA 4.60: Acercamientos al estado filtrado m_2 para el controlador $RS|RS$ modificado.

Con el comportamiento promedio de los estados del sistema presentado en las figuras 4.61, 4.62, 4.63 y 4.64.

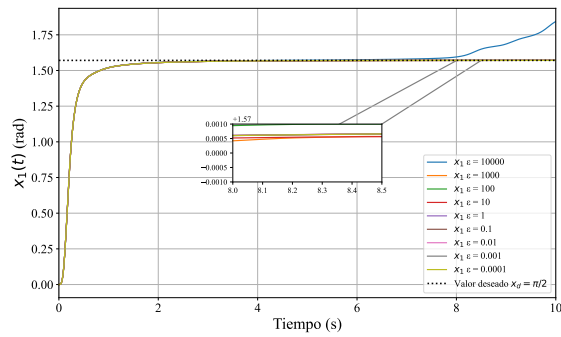


FIGURA 4.61: Estado filtrado x_1 para el controlador $RS|RS$ modificado.

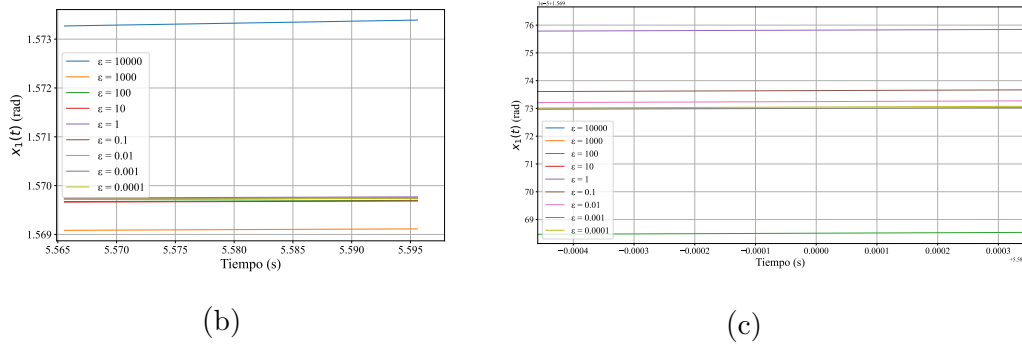
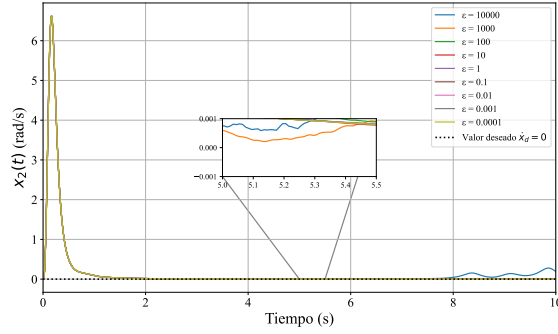
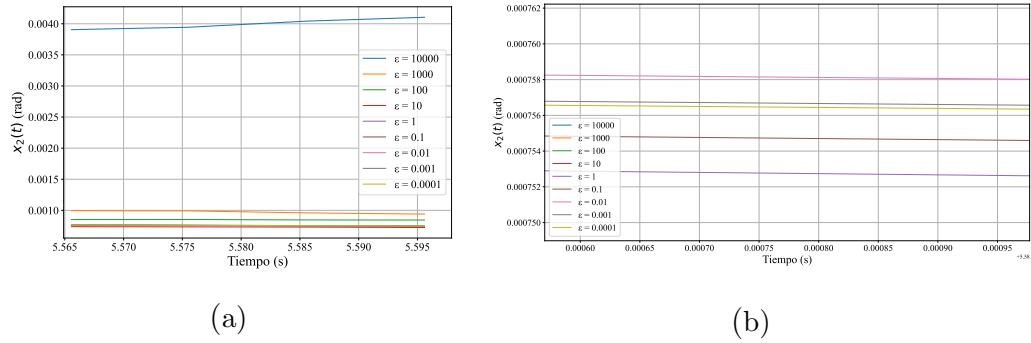


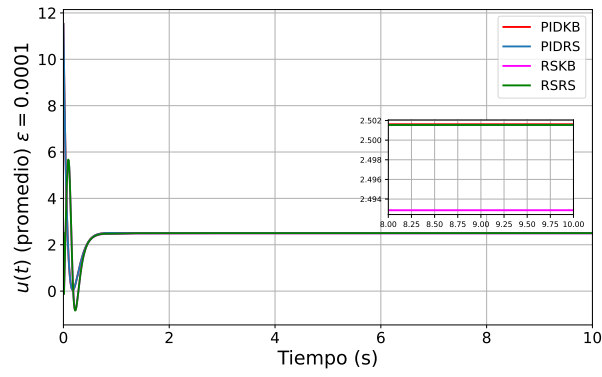
FIGURA 4.62: Acercamientos al estado filtrado x_1 para el controlador $RS|RS$ modificado.

FIGURA 4.63: Estado filtrado x_2 para el controlador $RS|RS$ modificado.FIGURA 4.64: Acercamientos al estado filtrado x_2 para el controlador $RS|RS$ modificado.

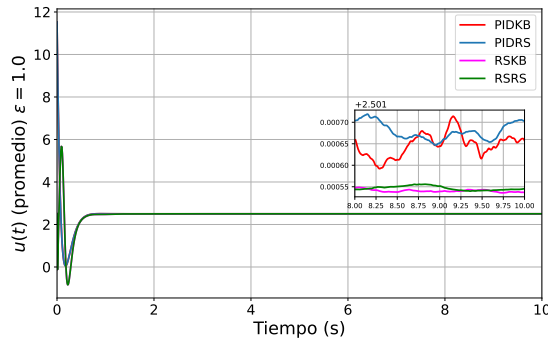
Resultados complementarios del comportamiento del controlador se muestran en el Anexo A para su consulta.

4.1.4.1 SEÑALES DE CONTROL

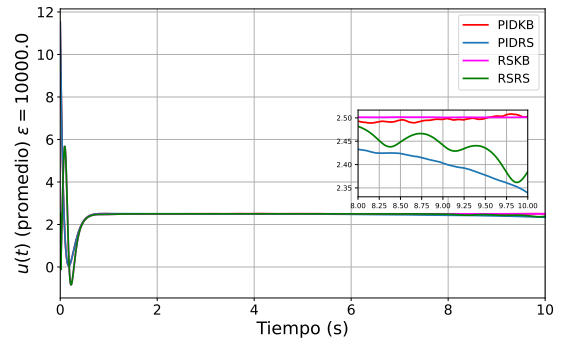
Se realiza una comparación de las señales de control de cada controlador para valores de ε seleccionados, con el fin de poder contrastar el comportamiento de la señal de control conforme se incrementa ε . Estos resultados se muestran en la figura, 4.65.



(a)



(b)



(c)

FIGURA 4.65: Comparación de las señales de control promedio de los controladores para a) $\varepsilon = 0.0001$, b) $\varepsilon = 1$ y c) $\varepsilon = 10000$.

4.2 COMPARACIÓN DE DESEMPEÑO DE LOS CONTROLADORES

Como pudimos observar, los controladores muestran comportamientos bastante similares entre si. Con el fin de poder sintetizar los resultados, se compilan los resultados en tiempo final de cada uno de los controladores.

TABLA 4.1: Resultados generales en tiempo final para el controlador $PID|KB$ modificado para diferentes ε .

ε	$J(T)$	error $m_1(T)$	error $m_2(T)$	error $x_1(T)$	error $x_2(T)$	$u_{PID KB}(T)$
10000	64.79492046	-0.000135188	-0.00136109	-0.000347108	0.001258324	2.502642636
1000	64.78085946	0.000506014	-0.000574027	0.000560626	-0.00055915	2.497906902
100	64.83400592	5.88E-05	0.000179807	5.30E-05	5.59E-05	2.501047433
10	64.86223073	3.24E-05	2.66E-06	3.66E-05	-3.38E-05	2.501334048
1	64.86715019	-1.44E-05	2.02E-05	-1.36E-05	-1.56E-07	2.501657059
0.1	64.86580026	4.30E-06	-2.26E-06	5.30E-06	-3.09E-06	2.501513108
0.01	64.8650034	9.55E-07	-3.05E-07	9.74E-07	-7.17E-07	2.50154321
0.001	64.86060438	1.52E-06	-7.54E-07	1.41E-06	-1.18E-06	2.501540083
0.0001	57.98764123	-5.66E-06	3.04E-05	-9.05E-05	-3.76E-05	2.501615455

TABLA 4.2: Resultados generales en tiempo final para el controlador $PID|RS$ modificado para diferentes ε .

ε	$J(T)$	error $m_1(T)$	error $m_2(T)$	error $x_1(T)$	error $x_2(T)$	$u_{PID RS}(T)$
10000	63.6065841	0.019417114	0.012858938	0.01967365	0.011455119	2.339394817
1000	64.77291908	0.000851694	4.54E-05	0.000823211	0.000538286	2.494702708
100	64.87686583	0.000288302	0.000116257	0.000282039	0.000141791	2.49923566
10	64.87102896	-2.82E-05	-1.63E-05	-2.92E-05	-2.01E-05	2.50178697
1	64.86690698	-1.96E-05	2.14E-06	-1.91E-05	-7.06E-06	2.501702246
0.1	64.86721037	-6.43E-06	-8.39E-06	-6.98E-06	-2.43E-06	2.501604911
0.01	64.86502912	8.95E-07	-3.54E-08	8.67E-07	-1.71E-07	2.501543052
0.001	64.86534278	3.54E-07	8.69E-07	30.4E-07	1.30E-06	2.50154588
0.0001	64.86526254	-5.52E-08	1.99E-07	-4.52E-08	2.94E-07	2.50155009

TABLA 4.3: Resultados generales en tiempo final para el controlador $RS|KB$ modificado para diferentes ε .

ε	$J(T)$	error $m_1(T)$	error $m_2(T)$	error $x_1(T)$	error $x_2(T)$	$u_{RS KB}(T)$
10000	62.96962539	-1.54E-05	0.000962854	0.001406339	-0.000487012	2.501436513
1000	62.98734158	-0.000266667	0.000517931	-0.00052559	0.000455664	2.501501242
100	62.98250777	0.000111868	6.33E-05	5.71E-05	3.58E-05	2.50152688
10	62.98455	-3.99E-05	-0.000117404	-7.99E-05	-2.67E-05	2.501574559
1	62.98369939	2.10E-05	2.55E-05	-2.91E-05	5.65E-05	2.501536887
0.1	62.98275532	-3.28E-06	-1.42E-05	-5.53E-05	4.38E-05	2.501546239
0.01	62.98224279	1.32E-06	4.16E-06	-4.69E-05	3.69E-05	2.501546927
0.001	62.9825675	1.14E-07	-3.77E-08	-4.73E-05	3.28E-05	2.501548343
0.0001	50.02839324	-6.92E-06	1.85E-05	-0.017148479	0.003527027	2.492865908

TABLA 4.4: Resultados generales en tiempo final para el controlador $RS|RS$ modificado para diferentes ε .

ε	$J(T)$	error $m_1(T)$	error $m_2(T)$	error $x_1(T)$	error $x_2(T)$	$u_{RS RS}(T)$
10000	69.29444549	0.14789308	0.011097889	0.272651067	0.190320752	2.384683
1000	62.98497373	9.96E-05	0.000841042	3.85E-05	0.000681429	2.501315426
100	62.98114289	0.000295703	0.000101205	0.000316844	8.55E-05	2.501459378
10	62.98311526	-6.72E-05	7.42E-05	-0.000148752	7.97E-05	2.501552604
1	62.9822664	5.87E-06	-5.10E-06	-4.30E-05	3.90E-05	2.501545433
0.1	62.98235263	3.53E-06	1.27E-05	-4.53E-05	3.96E-05	2.501545693
0.01	62.98232086	9.38E-06	1.05E-06	-3.60E-05	3.48E-05	2.501545479
0.001	62.98237124	-1.08E-07	1.76E-06	-4.78E-05	3.41E-05	2.501548017
0.0001	62.98236398	1.39E-07	1.77E-08	-4.73E-05	3.35E-05	2.501548125

4.3 DISCUSIÓN

Acorde con los resultados presentados anteriormente, observamos lo siguiente:

- Dadas las configuraciones de ganancias utilizadas en ambos controladores, los controladores con control *PID* alcanzan el valor objetivo antes que los controladores con control RS, sin embargo ambos convergen al valor objetivo antes de los 2 segundos de simulación.
- Acorde al comportamiento de las señales de control registradas, se observa que los controladores RS tienen una señal de control con comportamiento más gradual, cumpliendo con su propósito de seguir una trayectoria óptima y minimizando el costo, en comparación a la *PID* que comienza con un pico muy agresivo en la señal de control.
- Los controladores con control *PID*, bajo la sintonización usada, son capaces de controlar bajo cualquiera de las condiciones de ruido, con señales de control mucho más agresivas, pero convergiendo igualmente al mismo valor asintótico aproximado que los controladores RS.
- Ambos controladores con control RS, bajo la sintonización usada, presentan un buen desempeño general para controlar el sistema pese a ser la implementación del control basado en el modelo linealizado al modelo no lineal, excepto para el caso del controlador $RS|RS$ para $\varepsilon = 10000$.
- Todos los controladores fueron capaces de controlar el sistema dentro del intervalo de tiempo simulado, a excepción de del controlador $RS|RS$ para $\varepsilon = 10000$.
- Todos los controladores fueron capaces de filtrar el valor del estado real con un error mínimo, siendo los errores entre el estado y el estado filtrado incluso de ordenes de 10^{-3} y menores para valores de ruido pequeños, pudiendo considerarse a esa escala negligibles.

- Acorde a los resultados expuestos y resumidos en tiempo final, notamos que el costo en tiempo final de los controladores con control RS se mantiene por debajo de los controladores con control PID , excepto en el caso del controlador $RS|RS$, el cual tuvo un valor superior de costo para $\varepsilon = 0.0001$ y $\varepsilon = 10\ 000$.
- Con base en las simulaciones realizadas y bajo las sintonizaciones de cada controlador utilizadas, los cuatro controladores mostraron ser capaces de controlar adecuadamente el sistema con costos en tiempo final similares entre ellos y con errores mínimos, excepto el controlador $RS|RS$, el cual presentó errores considerables al final de sus trayectorias para $\varepsilon = 10\ 000$, lo cual también se reflejó en un costo más elevado respecto a los demás costos registrados.
- Los controladores con control PID mostraron seguir siendo una opción que permanece vigente como opción para controlar el sistema, dentro del intervalo de tiempo simulado y bajo la sintonización implementada, pero cuya señal de control agresiva puede representar inconvenientes en el motor si se forzara más allá de sus límites por algún factor externo.
- Los controladores con control RS mostraron ser capaces de controlar el sistema no lineal bajo el modelo de control del sistema linealizado, dentro del intervalo de tiempo simulado y bajo la sintonización implementada, para la mayoría de los valores de ε , presentándose como una alternativa de bajo costo y con una señal de control más conservadora, que se traduce en un menor riesgo de daños al motor en caso de que se presentase algún factor externo.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

En este trabajo se verificaron las hipótesis establecidas al inicio. Se corroboró el desempeño de los diferentes controladores encontrando diferencias mínimas en los errores tanto del desplazamiento angular como en la velocidad angular para todos los valores del coeficiente de difusión ε , a excepción de $\varepsilon = 10000$, donde se obtuvieron resultados con errores considerables para el controlador RS-RS en el modelo no lineal original. Con respecto a los valores de la función costo J , se verificó que el costo en los controladores RS, el costo es menor que en los controladores *PID*, excepto para $\varepsilon = 10000$.

5.1 PERSPECTIVA A FUTURO

Para finalizar, se exponen las siguientes ideas que surgen de los resultados de este trabajo:

- Se piensa que el proyecto tiene potencial para una futura implementación física, a modo que se pueda poner a prueba el desempeño de cada controlador al aplicarse al sistema real. Para este punto se estaría tomando en cuenta acotar el máximo valor de ε para el ruido soportado por el sistema, el cual se discute en [58], y para el caso del motor que se plantea en este trabajo es $\varepsilon \approx 153.6944277$

- Se piensa que el hecho de implementar la ley de control RS del modelo linealizado al modelo no lineal es lo que causó fallos en $\varepsilon = 10\,000$, por lo que se plantea como trabajo a futuro considerar directamente la dinámica no lineal del sistema desde el inicio, obteniendo una ley de control más acorde al comportamiento no lineal del sistema. Teniendo como premisa que le daría más robustez al método de control RS para ruidos más altos, así como permitiría tener un mejor respaldo teórico.

APÉNDICE A

RESULTADOS COMPLEMENTARIOS

Dado el volúmen de gráficas y resultados obtenidos, las gráficas complementarias respecto a muestras de trayectorias individuales, graficas de comportamiento promedio y comportamiento de matrices de ganancias se encuentran disponibles en el repositorio [63], cuyo el DOI lleva a la plataforma Zenodo, donde se puede realizar la consulta de los resultados correspondientes. Muestras de dichos resultados se presentan en adelante aquí en las figuras A.1, A.2 , A.3 y A.4 como referencia de la información que se puede consultar en el repositorio.

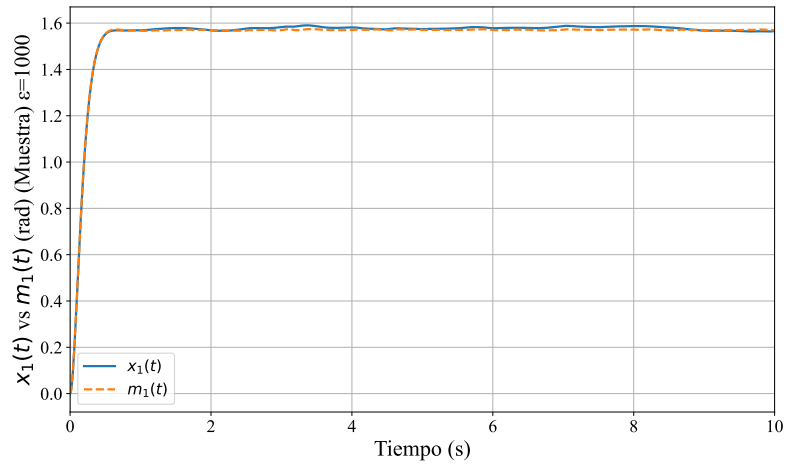


FIGURA A.1: Comparación del estado $x_1(t)$ vs $m_1(t)$ para el controlador $PID|KB$

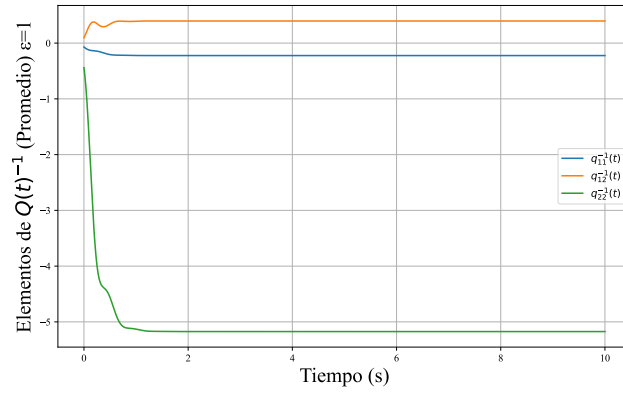


FIGURA A.2: Comportamiento de la matriz de ganancias $Q(t)^{-1}$ del controlador $PID|RS$

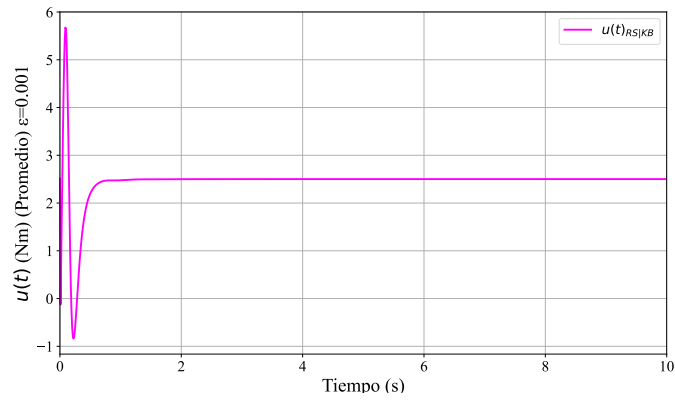


FIGURA A.3: Comportamiento de la señal de control $u_{RS|KB}$ del controlador $RS|KB$

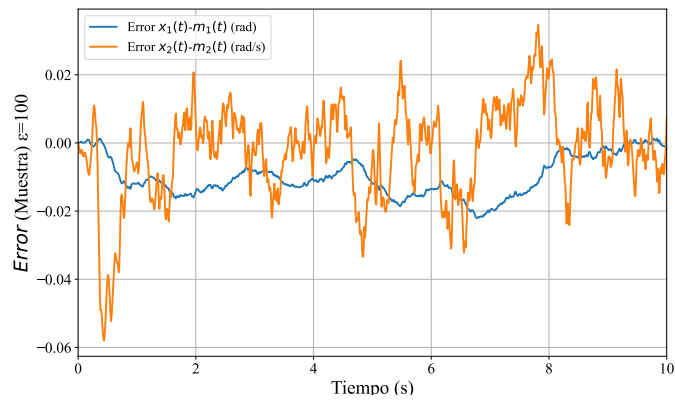


FIGURA A.4: Comportamiento del error de los estados filtrados para el controlador $RS|RS$

APÉNDICE B

ARTÍCULO PUBLICADO

Durante el proceso de este trabajo, y derivado de sus avances, se realizó la siguiente publicación “**Optimal Risk Sensitive and PID Controls Applied to an Actuated Pendulum,**” CCE 2025. M. A. Alcorta-Garcia, J. Perez Padron, H. A. Romero Pando, J. A. Saenz Esqueda y H. A. Partida Villarreal. DOI: <https://10.1109/CCE67728.2025.11271996>

Optimal Risk Sensitive and PID Controls Applied to an Actuated Pendulum

Maria Aracelia Alcorta-Garcia, Joel Perez Padron
Universidad Autonoma de Nuevo Leon,
Facultad de Ciencias Fisico Matematicas
San Nicolas de los Garza, N.L., Mexico
maria.alcortag@uanl.edu.mx, joel.perezpd@uanl.edu.mx

Jose Armando Saenz Esqueda
Universidad Juarez del Estado de Durango
Facultad de Ingenieria Ciencias y Arquitectura
Gomez Palacio, Durango, Mexico
jsaenz@ujed.mx

Hector Atlel Romero Pando
Universidad Autonoma de Nuevo Leon,
Facultad de Ciencias Fisico Matematicas
San Nicolas de los Garza, N.L., Mexico
hector.romerop@uanl.edu.mx

Hiram Asabel Partida Villarreal
Universidad Autonoma de Nuevo Leon,
Facultad de Ingenieria Mecanica y Electrica
San Nicolas de los Garza, N.L., Mexico
hiram.partidav1@uanl.edu.mx

Abstract—In this work the application of optimal control Risk Sensitive (RS) and PID control equations to a stochastic model of actuated pendulum is presented. The representation in space of states is obtained by applying the change of variables method in the original physical model equation of second degree, (first linearization) then a second linearization is applied, using the Jacobian evaluated in the equilibrium points. The main contribution is that the control strategies are derived based on a second linearized model (using the Jacobian), while gains are tuning with respect to the original nonlinear model (first linearization). The maximum torque supported by the motor which is the control input, should not be exceeded for the intensity of the noise when the diffusion parameter ϵ take different values. The comparison between RS optimal control and PID control is presented in graphs and tables according to the errors and values of the exponential quadratic cost criterion J in final time.

Index Terms—model of the pendulum, non-linear system, RS control for non-linear systems, PID control.

I. INTRODUCTION

Numerous works and text books present the simple pendulum as participating in Physics laboratory for learning and understanding their behavior starting of theoretical principles as well as in the classroom analyzing the mathematical model. In [1], authors propose theoretical knowledge about oscillatory motion. Students construct a simple pendulum in which they analyze aspects such as vanishing friction, small amplitude, non-extensible string, point mass of the body, and vanishing mass of the string. Resnik et al. in [2] the simple pendulum illustrates some important principles and theory from Physics, like friction, amplitude, string, point mass of the body, and vanishing mass of the string. The simple pendulum is important considering that the dynamics of many multi-link robotic manipulators are essentially the dynamics of a large number of coupled pendulums. Additionally, the dynamics of a single pendulum is rich enough to introduce models of

the concepts from non-linear dynamics, as can be seen in [3]. Some important applications about the simple pendulum in a diversity of areas can be found in the literature. S. Rajasekaran in [4], applied the example of a simple pendulum to analyze vibration characteristics in the governing equations of motion, which are formulated for free vibration of single-degree-of-freedom (SDOF) undamped system. Some recent developments in linear periodic control theory are illustrated in terms of the optimal control of a simple pendulum problem, which is examined in [5], applying the Linear Quadratic and Gaussian (LQG) approach. The pendulum problem has been used numerous times and continues to be used as an experiment in physics laboratories to illustrate some properties related to the harmonic oscillator, among others. The pendulum's unique feature lies in the non-linearity associated with the original model through the change of variables, being this the main input of this work. Numerous papers have been published, but in these, the pendulum is linearized twice to achieve the control design, but the results are not real model satisfactory because the original model is actually non-linear. In this work, the optimal RS control is designed for the twice-linearized model, but the gains are tuned to the model resulting from the first linearization, the one performed by changing variables. The simple pendulum with motor has been applied and involved in numerous works, for example [6], and [7] among others. The pendulum take relevance in variety of applications, for example, some transducers including electro-magnetic, piezoelectric, triboelectric, and hybrid types which can be integrated with the pendulums to capture kinetic energy from ocean wave, vehicle motion, human motion, structural vibration and flow-induced vibration, and provide effective power devices to wireless sensors, portable electronics, and even large-scale generation as can be seen in [8]. Some applications of the RS optimal control to a robot with wheels on an inclined plane as can be seen in [9]. The efficiency of

BIBLIOGRAFÍA

- [1] D. E. Kirk, *Optimal Control Theory: An Introduction*. Mineola: Dover Publications Inc., 2004.
- [2] K. Ogata, *Ingeniería de control moderna 5ta ed.* Madrid: Pearson, 2010.
- [3] T.-T. Chen, *Linear System Theory and Design*. New York: Oxford University Press, 1999.
- [4] H. Boursès, *System Theory - A Modern Approach 1: Linear Ordinary and Functional Differential Equations*. London: ISTE Ltd and John Wiley & Sons, Inc., 2024.
- [5] G. Blower, *Linear Systems*. Lancaster: Springer, 2022.
- [6] K. J. Åström and T. Hägglund, *Control PID avanzado*. España: Pearson, 2009.
- [7] A. T. Espinoza, *Design of Control Laws and state Observers for Fixed-Wings UAVs: Simulation and Experimental Approaches*. Amsterdam: Elsevier, 2003.
- [8] Z. Trzaska, *Mathematical Modelling and Computing in Physics, Chemistry*. Poland: Springer, 2023.
- [9] H. Sira-Ramírez and R. Márquez, *Control de Sistemas No Lineales: Linealización Aproximada, Extendida y Exacta*. México: CINVESTAV-IPN, 2004.
- [10] V. Santibáñez and R. Kelly, *Control of Robot Manipulators in Joint Space*. London: Springer, 2005.

-
- [11] J. G. Ziegler and N. B. Nichols, “Optimum settings for automatic controllers,” *Transactions of the ASME*, vol. 64, no. 8, pp. 759–768, 1942.
 - [12] P. Whittle, *Risk-Sensitive Optimal Control*. Chichester: Wiley, 1990.
 - [13] M. H. Davis and S. Lleo, *Risk-Sensitive Investment Management*. London: World Scientific, 2015.
 - [14] Q. Lü and X. Zhang, *Probability Theory and Stochastic Modelling*. Switzerland: Springer, 2021.
 - [15] W. H. and W. M. F. McEneaney, “Robust limits of risk-sensitive nonlinear filters,” *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, vol. 14, no. 2, pp. 109–142, 2001.
 - [16] M. Alcorta-Garcia, M. Basin, Y. A. Sanchez, and I. Explore, “Optimal risk-sensitive filtering and control for linear stochastic systems,” in *47th IEEE Conference on Decision and Control*, 2008, pp. pp. 43–48.
 - [17] M. A. Alcorta-Garcia, J. P. Padron, J. A. S. Esqueda, H. A. R. Pando, and H. A. P. Villarreal, “Optimal risk sensitive and pid controls applied to an actuated pendulum,” in *2025 22nd International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE)*, 2025, pp. 1–6.
 - [18] R. Blancas-Rivera and H. Jasso-Fuentes, “Discrete-time hybrid control with risk-sensitive discounted costs,” *Discrete Event Dynamic Systems*, no. 34, pp. 659–687, 2024.
 - [19] V. S. Borkar, “Risk-sensitive control, single controller games and linear programming,” *Journal of Dynamics and Games*, vol. 11, no. 2, pp. 150–159, 2024.
 - [20] S. Treanta and S. Alsalami, “Sufficient efficiency criteria for new classes of non-convex optimization models,” *Axioms*, vol. 13, no. 572, pp. 1–15, 2024.
 - [21] P. Wang, “Risk-sensitive maximumprinciple for controlled system with delay,” *Mathematics*, vol. 11, no. 1058, pp. 1–12, 2023.

-
- [22] Y. Fei, Z. Yang, Y. Chen, Z. Wang, and Q. Xie, “Risk-sensitive reinforcement learning: Near-optimal risk-sample tradeoff in regret,” in *Proceedings of the 34th International Conference on Neural Information Processing Systems (NeurIPS)*, 2020, pp. 22 384–22 395.
- [23] P. Y. Chen, “Introductory chapter,” in *Nonlinear System Analysis – An Overview of Historical and Recent Advances*. Sydney: IntechOpen, 2024, pp. 1–5.
- [24] Q. Zhu, *Nonlinear Systems: Dynamics, Control, Optimization and Applications to the Science and Engineering, 2nd Ed.* Basel: MDPI, 2025.
- [25] L. Stettner, “Discrete time risk sensitive control problem,” *Systems & Control Letters*, vol. 186, no. 105758, pp. 1–15, 2024.
- [26] B. Hammoud, A. Jordana, and L. Righetti, “irisc iterative risk sensitive control for nonlinear systems with imperfect observations,” in *2022 American Control Conference (ACC)*, 2022, pp. 1–8.
- [27] A. Singletary, M. Ahmadi, and A. D. Ames, “Safe control for nonlinear systems with stochastic uncertainty via risk control barrier functions,” *IEEE Control Systems Letters (Volume: 7)*, vol. 7, pp. 349–354, 2022.
- [28] M. B. Nathanson, “105.06 the hermite-sylvester criterion for real-rooted polynomials,” *The Mathematical Gazette*, vol. 105, no. 562, pp. 122–125, 2021.
- [29] A. L. Van and R. Bouzidi, *Lagrangian Mechanics An Advanced Analytical Approach*. London: Wiley, 2019.
- [30] J. R. Mohallem, *Lagrangian and Hamiltonian Mechanics A Modern Approach with Core Principles and Underlying Topics*. Cham: Springer, 2024.
- [31] M. Spurio, *The Fundamentals of Newtonian Mechanics For an Introductory Approach to Modern Physics*. Cham: Springer, 2023.
- [32] A. W. Pila, *Introduction To Lagrangian Dynamics*. Cham: Springer, 2020.

-
- [33] O. M. O'Reilly, *Intermediate dynamics for engineers: Newton-Euler and Lagrangian Mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2020.
- [34] C. C. Ilie, Z. S. Schrecengost, and E. M. van Kempen, *Classical Mechanics Problems and Solutions*. Oxon: CRC Press, 2023.
- [35] V. Moretti, *Analytical Mechanics Classical, Lagrangian and Hamiltonian*. Cham: Springer, 2023.
- [36] J.-L. Basdevant, *Variational Principles in Physics 2nd ed.* Paris: Springer, 2023.
- [37] Z.-Y. Li, J.-L. Fu, and L.-Q. Chen, "Euler-lagrange equation from nonlocal-in-time kinetic energy of nonconservative system," *Physics Letters A*, vol. 374, no. 2, pp. 106–109, 2009.
- [38] E. Babilio and S. Lenci, "Newton vs. euler-lagrange approach, or how and when beam equations are variational," *Meccanica*, pp. 1–19, 2024.
- [39] J. Musilová, P. Musilová, and O. Rossi, *Calculus of Variations on Fibred Manifolds and Variational Physics A Geometrical Approach to Variational Problems in Physics*. Cham: Springer, 2025.
- [40] V. Pagonis and C. W. Kulp, *Mathematical Methods using Python Applications in Physics and Engineering*. Oxon: CRC Press, 2024.
- [41] P. Pustina, C. D. Santina, F. Boyer, A. D. Luca, and F. Renda, "Input decoupling of lagrangian systems via coordinate transformation: General characterization and its application to soft robotics," *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 40, pp. 2098–2110, 2024.
- [42] Q. Ruyant and A. Guay, "Lagrangian possibilities," *Synthese*, vol. 203, no. 125, pp. 1–22, 2024.
- [43] H. A. Radi and J. O. Rasmussen, *Principles of Physics For Scientists and Engineers*. Berkeley: Springer, 2024.

- [44] G. M. Moatimid, T. S. Amer, and A. A. Galal, “An innovative methodology in analyzing certain pendulum oscillators,” *Nature Scientific Reports*, vol. 15, pp. 1–16, 2025.
- [45] J. R. Taylor, *Classical Mechanics*. University Science Books, 2005.
- [46] R. A. Serway and J. W. Jewett, *Física para ciencias e ingeniería: Volumen 1, 7a edición*. México.: Cengage Learning Editores, 2008.
- [47] Z. Xu and Z. Jin, “Simulation and analysis of pendulum motion system with and without drag in the absence of external forces,” in *4th International Conference on Computing Innovation and Applied Physics*, 2025, pp. 83–98.
- [48] J. Wang, Q. Xue, L. Li, B. Liu, L. Huang, and Y. Chen, “Dynamic analysis of simple pendulum model under variable damping,” *Alexandria Engineering Journal*, vol. 61, no. 12, pp. 10 563–10 575, 2022.
- [49] D. G. Zill, *A First Course in Differential Equations with Modeling Applications 12th ed.* Burlington: Cengage Learning, 2024.
- [50] G. M. Moatimid, T. S. Amer, and M. H. Zekry, “Analytical and numerical study of a vibrating magnetic inverted pendulum,” *Archive of Applied Mechanics*, vol. 93, pp. 2533–2547, 2023.
- [51] G. Yakubu, P. Olejnik, and J. Awrejcewicz, “On the modeling and simulation of variable-length pendulum systems a review,” *Archives of Computational Methods in Engineering*, vol. 29, pp. 2397–2415, 2022.
- [52] T. Roy, A. Soqi, D. K. Maiti, R. Wannan, and J. Asad, “Pendulum attached to a vibrating point semi-analytical solution by optimal and modified homotopy perturbation method,” *Alexandria Engineering Journal*, vol. 111, pp. 396–403, 2025.
- [53] K. Zhang and S. Lau, “Numerical modeling simulating the motion of a pendulum,” in *4th International Conference on Computing Innovation and Applied Physics*, 2025, pp. 99–110.

-
- [54] N. Sharif and I. A. Yeasmin, “A comparative study of the pendulum equation using two analytical methods,” *Journal of Mathematics*, vol. 2024, pp. 1–12, 2024.
- [55] M. E. Semenov, S. V. Borzunov, and P. A. Meleshenko, “Inverted pendulum with stochastic suspension,” *Nonlinear Dynamics*, vol. 112, no. 21, pp. 18 685–18 699, 2024.
- [56] B. Nana, K. Polczyński, P. Woafu, J. Awrejcewicz, and G. Wasilewski, “Analysis of the nonlinear dynamics of a single pendulum driven by a magnetic field using the magnetic charges interaction model and the experimentally fitted interaction model,” *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 209, p. 111114, 2024.
- [57] G. M. Moatimid and T. S. Amer, “Analytical solution for the motion of a pendulum with rolling wheel: stability analysis,” *Scientific Reports*, vol. 12, pp. 1–9, 2022.
- [58] M. A. Alcorta-García *et al.*, “Optimal risk sensitive controller design applied to a stochastic dynamics of a simple pendulum robot,” in *20th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE)*, 2023, pp. 1–6.
- [59] D. M. H. A., *Linear Estimation and Stochastic Control*. New York: Chapman and Hall, 1977.
- [60] L. Rincón, *INTRODUCCIÓN A LOS PROCESOS ESTOCÁSTICOS*. CDMX: Facultad de Ciencias UNAM, 2012.
- [61] V. Krishnan, *Nonlinear Filtering and Smoothing: An Introduction to Martingales, Stochastic Integrals and Estimation*. New York: Dover Publications, 2005.
- [62] M. A. A. García, “Tratamiento integral de filtrado y control óptimo de procesos no lineales con múltiples retardos variantes en el tiempo,” Ph.D. dissertation, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Universidad Autónoma de Nuevo León, San Nicolás de los Garza, México, 2003.

-
- [63] H. A. R. Pando, “Raptor135/PID.RS.KB.RS.TESIS.APENDIX-A: Resultados Apéndice A,” Jun. 2026. [Online]. Available: <https://doi.org/10.5281/zenodo.20566968>