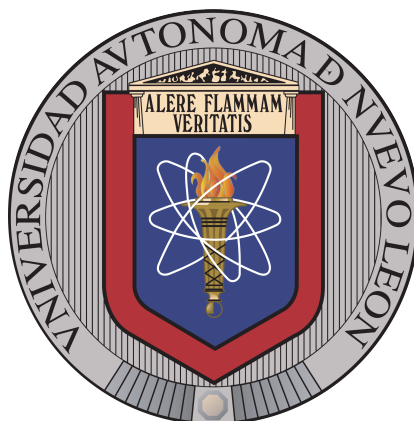


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS

POSGRADO EN INGENIERÍA FÍSICA INDUSTRIAL



CORRECCIONES A 1 LOOP INDEPENDIENTES DEL
MODELO A DECAIMIENTOS HADRONICOS

POR

LUIS ANGEL DÍAZ GÁMEZ

COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRÍA EN INGENIERÍA FÍSICA INDUSTRIAL

AGOSTO 2026

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS

POSGRADO EN INGENIERÍA FÍSICA INDUSTRIAL



CORRECCIONES A 1 LOOP INDEPENDIENTES DEL
MODELO A DECAIMIENTOS HADRONICOS

POR

LUIS ANGEL DÍAZ GÁMEZ

COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRÍA EN INGENIERÍA FÍSICA INDUSTRIAL

AGOSTO 2026



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS
POSGRADO EN INGENIERÍA FÍSICA INDUSTRIAL

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis «Correcciones a 1 loop independientes del modelo a decaimientos hadronicos», realizada por el alumno Luis Angel Díaz Gámez, con número de matrícula 1663499, sea aceptada para su defensa como requisito parcial para obtener el grado de Maestría en Ingeniería Física Industrial .

El Comité de Tesis

Dr. Francisco Vicente Flores Báez
Asesor

Dr. Jose Ruben Morones Ibarra
Revisor

Dra. Diana Berenice Hernandez Uresti
Revisor

Vo. Bo.

Dr. Alvaro Eduardo Cordero Franco
Subdirector de Estudios de Posgrado

San Nicolás de los Garza, Nuevo León, agosto 2026

Para mi familia.

*Que esto nos acerque más al conocimiento y que nos abra al mundo y la forma en
el que lo vemos.*

ÍNDICE GENERAL

Agradecimientos	IX
Nomenclatura	X
Resumen	XII
1. Introducción	1
2. Fundamentos de teoría cuántica de campos	3
2.1. La matriz de dispersión	3
2.2. Expansión perturbativa	4
2.3. Reglas de Feynman	6
2.4. Obtención de resultados finitos	8
3. Correcciones a 1 Loop en la teoría total	11
3.1. Calculo del decaimiento $\phi \rightarrow K^+ K^-$ a nivel árbol	11
3.2. Cálculo de fotones virtuales	13
3.3. Calculo de emisión de fotones reales	16

3.4. Cálculo numérico de las correcciones radiativas	19
4. Correcciones Independientes del Modelo	22
4.1. Renormalizabilidad	23
4.2. El método: Convection Term	25
4.2.1. Correcciones radiativas de fotones virtuales	26
4.2.2. Correcciones radiativas de fotones reales	30
4.3. Correcciones radiativas en el método de Convection Term	33
4.4. Cálculo de aproximación de las correcciones radiativas	35
5. Discusion y Conclusión	37
A. Funciones especiales	40
A.1. Funciones de Passarino-Veltman	40
A.2. Polilogaritmos	41
A.2.1. Definición	41
A.2.2. Programa módulo	42
B. Comandos utilizados en FeynCalc	44
C. Implementación numérica	48

ÍNDICE DE FIGURAS

3.1. Grafo del decaimiento $\phi \rightarrow K^+ K^-$ al LO de la teoría de perturbaciones	12
3.2. Conjunto de grafos generados por la interacción electromagnética de un fotón virtual	14
3.3. Grafos generados por la emisión de un fotón real $\phi \rightarrow K^+ K^- \gamma$	16
4.1. Conjunto de diagramas internos.	27
4.2. Representación del n -ésimo fotón.	27
4.3. n -ésimo fotón real insertado en el conjunto de diagramas.	31
4.4. Diagramas externos de fotones virtuales en el proceso $\phi \rightarrow K^+ K^-$. .	34
5.1. Comparación de los resultados obtenidos mediante el método comple- to y el método del término de convección al variar la masa del mesón ϕ	38

ÍNDICE DE TABLAS

3.1. Ancho de decaimiento al NLO, en función del umbral de detección. . .	21
4.1. Ancho de decaimiento obtenido mediante el metodo de Convection	
Term.	36

AGRADECIMIENTOS

Mis más sinceros agradecimientos al Dr. Francisco Báez por sus enseñanzas, sus consejos y su paciencia durante la realización de este proyecto de investigación. Asimismo, agradezco al Dr. Rubén Morones y a la Dra. Diana Uresti por sus valiosos comentarios y recomendaciones para la elaboración de esta tesis.

De igual manera, expreso mi agradecimiento al SECIHTI por el apoyo financiero otorgado durante mis estudios de Maestría y para el desarrollo de esta investigación.

NOMENCLATURA

Símbolos

Γ	Ancho de decaimiento total.
Γ_0	Ancho de decaimiento a nivel árbol.
δ_{loop}	Factor de correccion de fotones virtuales en el NLO.
$\delta_{\gamma}^{\text{Soft}}$	Factor de correccion de fotones reales.
$\mathcal{M}$	Amplitud de dispersión.
p_i	Cuadrimomento de la partícula i .
k	Cuadrimomento del fotón emitido.
m_{ϕ}	Masa del mesón ϕ .
m	Masa de los kaones cargados $K^{\pm}$
ω_0	Umbral de detección de fotones virtuales.
$g_{\phi K^+ K^-}$	Constante de acoplamiento de la interaccion $\phi \longrightarrow K^+ K^-$ con valor ~ 4.6 .
$\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}$	Factores de correccion en el formalismo de YFS.
Z_i	Fracción de carga de una partícula en términos de la carga elemental e .
θ_i	Signo de distinción de una linea entrante o saliente a un diagrama.

Funciones especiales

A_0	Función escalar de Passarino–Veltman de un punto
B_0	Función escalar de Passarino–Veltman de dos puntos.
C_0	Función escalar de Passarino–Veltman de tres puntos.
$\text{Li}_n(x)$	Polilogaritmo de orden n .

Abreviaturas

QFT	Teoría Cuántica de Campos (<i>Quantum Field Theory</i>).
QED	Electrodinámica Cuántica (<i>Quantum Electrodynamics</i>).
LO	Orden líder (<i>Leading Order</i>).
NLO	Siguiente orden líder (<i>Next-to-Leading Order</i>).
UV	Ultravioleta (<i>Ultraviolet</i>).
IR	Infrarrojo (<i>Infrared</i>).
YFS	Yennie–Frautschi–Suura.

RESUMEN

El cálculo de correcciones radiativas constituye una herramienta fundamental en la física de partículas, ya que permite obtener predicciones teóricas de alta precisión. Sin embargo, en teorías efectivas y modelos no renormalizables, el cálculo perturbativo de órdenes superiores presenta dificultades que limitan la aplicación de los métodos convencionales.

En esta tesis se estudia el método del término de convección del formalismo de Yennie–Frautschi–Suura (YFS), el cual permite estimar correcciones radiativas de manera independiente del modelo a partir de las líneas externas de los diagramas de Feynman. El objetivo principal consiste en comparar este método con el cálculo completo de correcciones radiativas para el decaimiento $\phi(1020) \rightarrow K^+ K^-$.

Para ello, se calcularon las amplitudes de dispersión y los correspondientes anchos de decaimiento utilizando las herramientas computacionales *FeynCalc* y *LoopTools*. Los resultados obtenidos muestran que el método del término de convección reproduce satisfactoriamente las predicciones del cálculo completo, con discrepancias del orden de 2–3 % en el régimen físico de interés, manteniendo además una concordancia estable ante variaciones de parámetros relevantes del proceso.

La principal contribución de este trabajo consiste en la validación cuantitativa del método independiente del modelo para el decaimiento $\phi(1020) \rightarrow K^+ K^-$, determinando su precisión y rango de aplicabilidad mediante una comparación directa con el cálculo completo. Los resultados obtenidos respaldan el uso de este formalismo como una alternativa eficiente para la estimación de correcciones radiativas en procesos donde el cálculo perturbativo completo resulta significativamente más complejo.

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

El cálculo de correcciones radiativas dentro del marco de la teoría de perturbaciones ha adquirido una relevancia fundamental en la actualidad, ya que constituye una herramienta esencial en el análisis de las interacciones fundamentales en la física de partículas elementales.

En el desarrollo de teorías modernas, tales como la teoría de la interacción débil o los modelos con bosones intermediarios, surgen dificultades que limitan la posibilidad de calcular correcciones más allá del primer orden perturbativo. A este tipo de teorías se les denomina no renormalizables, debido a la imposibilidad de absorber las divergencias que aparecen en las integrales de Feynman mediante un número finito de contraterminos.

Estas limitaciones motivan el desarrollo de nuevos enfoques teóricos y herramientas matemáticas que permitan obtener resultados físicamente significativos sin enfrentar divergencias no controlables en el cálculo de correcciones radiativas.

En este contexto, en 1961 Yennie, Frautschi y Suura [1] propusieron un método alternativo que, de manera independiente del modelo considerado, permite estimar de forma aproximada las correcciones al segundo orden en teoría de perturbaciones. En este formalismo, las correcciones se expresan en términos de dos contribuciones, $\mathcal{B}$ y $\tilde{\mathcal{B}}$, cuya suma determina el aporte radiativo a la sección eficaz de la forma

$$2\alpha(\mathcal{B} + \tilde{\mathcal{B}})\sigma_0. \tag{1.1}$$

En este trabajo se analizará el método del término de convección (*convection term*) propuesto dentro de este formalismo, comparándolo con el cálculo completo del ancho de decaimiento en un proceso de dos cuerpos. Asimismo, se verificará que, tal como sugieren los autores, el margen de error asociado a este método es reducido, del orden de $\sim 1\text{--}2\%$ [2].

El presente trabajo se organiza de la siguiente manera:

En el capítulo 2 se presenta el marco teórico necesario, incluyendo una revisión del estado del arte en el cálculo de correcciones radiativas y teoría de perturbaciones. Además, se introduce la observable de interés que será utilizada en la comparación entre métodos.

En el capítulo 3 se realiza el cálculo del ancho de decaimiento para un proceso de dos cuerpos mediante el método completo, el cual servirá como referencia para la comparación.

En el capítulo 4 se estudian las teorías no renormalizables, incluyendo sus criterios de clasificación, y se desarrolla el método del término de convección. Posteriormente, se lleva a cabo el cálculo perturbativo correspondiente y se comparan los resultados con los obtenidos en el capítulo 3.

Finalmente, en el capítulo 5 se presenta una discusión de los resultados obtenidos y se exponen las conclusiones del trabajo.

En el apéndice A se incluyen las definiciones de las funciones especiales utilizadas en el cálculo numérico, tales como las funciones de Passarino–Veltman y los polilogaritmos, así como un módulo desarrollado para su evaluación numérica.

El apéndice B contiene los comandos utilizados en *Jupyter Notebook*, mediante la librería *FeynCalc*, para la obtención de las expresiones analíticas de la amplitud de dispersión del proceso estudiado.

Finalmente, el apéndice C presenta los programas desarrollados para la implementación numérica, los cuales permiten calcular los anchos de decaimiento al siguiente orden en perturbaciones (NLO) para ambos métodos, así como realizar comparaciones al variar parámetros físicos y analizar su comportamiento mediante representaciones gráficas.

CAPÍTULO 2

FUNDAMENTOS DE TEORÍA CUÁNTICA DE CAMPOS

En este capítulo se presentan los fundamentos teóricos necesarios para el desarrollo del presente trabajo, así como las herramientas formales empleadas en el análisis del proceso considerado. En particular, se introducen los conceptos y resultados de la teoría cuántica de campos que permiten describir las correcciones radiativas y la estructura de las amplitudes de dispersión.

Las derivaciones detalladas de las expresiones utilizadas pueden consultarse en las referencias [3, 4, 5, 6, 7].

2.1 LA MATRIZ DE DISPERSIÓN

Al analizar un problema en mecánica cuántica, partimos del hecho de que la teoría no describe procesos deterministas, sino probabilísticos. Por ello, resulta necesario calcular probabilidades de transición entre estados. En particular, en procesos como colisiones o decaimientos, se busca determinar la probabilidad de transición de un estado inicial $|i\rangle$ a un estado final $|f\rangle$.

Estas probabilidades se obtienen a partir de los elementos de la matriz de dispersión

(matriz- S), definidos como

$$S_{fi} = \langle f | S | i \rangle \quad (2.1)$$

La matriz- S contiene las amplitudes de transición entre estados, mientras que las probabilidades están dadas por $|S_{fi}|^2$.

En ausencia de interacciones, la matriz- S se reduce a la identidad, lo que se expresa como

$$S_{fi} = \delta_{fi}. \quad (2.2)$$

En presencia de interacciones, es conveniente escribir

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) T_{fi}, \quad (2.3)$$

donde T_{fi} es la matriz de transición, la cual contiene la información dinámica del proceso, y la delta de Dirac asegura la conservación de la energía y el momento total. Para procesos de decaimiento, la probabilidad por unidad de tiempo (ancho de decaimiento) de una partícula inicial a n partículas finales se expresa como

$$d\Gamma_{fi} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) |\mathcal{M}_{fi}|^2 \frac{1}{2\varepsilon} \prod_{a=1}^n \frac{d^3 p'_a}{(2\pi)^3 2\varepsilon'_a}, \quad (2.4)$$

donde $\mathcal{M}_{fi}$ es la amplitud de dispersión (también llamada amplitud invariante) del proceso. En el caso particular de un decaimiento de dos cuerpos, esta expresión se simplifica a¹

$$d\Gamma = \frac{1}{32\pi^2 m^2} |\mathcal{M}|^2 |\mathbf{p}'| d\Omega \quad (2.5)$$

donde m es la masa de la partícula inicial y $\mathbf{p}'$ es el momento de las partículas finales en el sistema centro de masa.

2.2 EXPANSIÓN PERTURBATIVA

En general, los sistemas físicos de interés en mecánica cuántica y teoría cuántica de campos no pueden resolverse de manera exacta debido a la presencia de interacciones. Por esta razón, se emplea la teoría de perturbaciones, la cual permite obtener

¹Apartir de aquí omitiremos los subíndices f , i pero dejaremos a sobreentendimiento que el ancho de decaimiento marcado por la ecuación (2.5) es para una transición de estados $i \rightarrow f$.

soluciones aproximadas mediante una expansión sistemática en términos de un operador de interacción [8].

En el contexto relativista, esta idea se formula de manera covariante utilizando el formalismo de segunda cuantización. Consideremos un sistema descrito por un hamiltoniano de la forma

$$H = H_0 + V, \quad (2.6)$$

donde H_0 es el hamiltoniano libre y V representa la interacción. La evolución temporal del sistema en la representación de interacción está dada por la ecuación

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t) = V(t) \Phi(t), \quad (2.7)$$

cuya solución formal puede escribirse como

$$\Phi(t_f) = T \exp \left(-i \int_{t_i}^{t_f} dt V(t) \right) \Phi(t_i), \quad (2.8)$$

donde T es el operador de ordenamiento temporal [9]. Tomando el límite $t_i \rightarrow -\infty$ y $t_f \rightarrow +\infty$, se define la matriz de dispersión como

$$S = T \exp \left(-i \int_{-\infty}^{\infty} dt V(t) \right), \quad (2.9)$$

la cual puede expandirse en la serie de Dyson

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int dt_1 \cdots dt_n T \{ V(t_1) \cdots V(t_n) \}. \quad (2.10)$$

Y como ya hemos mencionado con anterioridad, la matriz de dispersion está relacionada directamente con la amplitud de dispersión, lo que nos permite escribirla en forma de serie, de tal manera que tengamos

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 + \cdots \quad (2.11)$$

identificando al primer término de esta expansión como Nivel de arbol (Tree level) y al segundo término como Next to Leading Order (NLO).

2.3 REGLAS DE FEYNMAN

Al realizar cálculos perturbativos en teoría cuántica de campos, las contribuciones a las amplitudes de dispersión pueden organizarse de manera sistemática mediante una representación gráfica en términos de grafos [10]. En este contexto, los grafos relevantes son aquellos que son conexos, ya que únicamente estos contribuyen a las amplitudes de dispersión, mientras que los diagramas desconectados corresponden a procesos independientes [4].

Cada uno de estos grafos representa un término en la expansión perturbativa de la matriz de dispersión. A partir de esta correspondencia, Richard Feynman introdujo un conjunto de reglas que permiten asociar a cada diagrama una expresión matemática bien definida, dando lugar a los llamados diagramas de Feynman.

De esta manera, la amplitud invariante de un proceso puede construirse como la suma de todas las contribuciones asociadas a los diagramas de Feynman relevantes a un orden dado en teoría de perturbaciones.

En teoría cuántica de campos, las amplitudes de dispersión pueden organizarse de manera sistemática mediante una representación gráfica en términos de diagramas de Feynman. Estos diagramas surgen de la expansión perturbativa del funcional generador, el cual puede construirse a partir del formalismo de integrales de camino [7].

En este enfoque, las funciones de Green se obtienen como derivadas funcionales del funcional generador $Z[J, \sigma, \bar{\sigma}]$, el cual incluye fuentes tanto para campos bosónicos como fermiónicos. En particular, se tiene

$$G^{\mu\dots}(x_1, \dots, y_1, \dots, z_1, \dots) = (-1)^{\bar{n}} \left(\frac{1}{i} \right)^n \frac{\delta^n Z[J, \sigma, \bar{\sigma}]}{\delta J_\mu(x_1) \cdots \delta \bar{\sigma}(y_1) \cdots \delta \sigma(z_1) \cdots} \Bigg|_0 \quad (2.12)$$

donde σ y $\bar{\sigma}$ son fuentes de Grassmann asociadas a campos fermiónicos [6]. El funcional generador puede expresarse en términos de valores de expectación en el vacío como

$$Z[J, \sigma, \bar{\sigma}] = \langle 0 | T \exp \left(i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}} + \text{términos de fuente} \right) | 0 \rangle \quad (2.13)$$

lo que permite identificar, mediante su expansión perturbativa, las contribuciones asociadas a propagadores y vértices.

En este contexto, los propagadores se obtienen como funciones de Green de dos puntos, mientras que los vértices están determinados por los términos de interacción del lagrangiano.

A continuación se presentan las reglas de Feynman que se utilizarán para construir las contribuciones a la amplitud de dispersión:

1. El propagador de una partícula escalar está dado por

$$\Delta(p) = \frac{i}{p^2 - m^2} \quad (2.14)$$

2. El propagador del fotón, en el gauge de Feynman, es

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2} \quad (2.15)$$

3. A cada línea externa se le asocia un factor de polarización. En particular:

$$\eta^\mu(P, s) \quad \text{para el mesón vectorial } \phi, \quad (2.16)$$

$$\epsilon^\mu(k, \lambda) \quad \text{para el fotón.} \quad (2.17)$$

4. El vértice de interacción entre un fotón y una partícula escalar está dado por

$$V = -ie(p + p')^\mu \quad (2.18)$$

donde p y p' son los momentos entrante y saliente de la partícula escalar.

5. Por cada loop independiente se introduce una integral de la forma

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \quad (2.19)$$

2.4 OBTENCIÓN DE RESULTADOS FINITOS

En la sección 2.3 se mostró que las contribuciones a la amplitud de dispersión pueden sistematizarse mediante el uso de las reglas de Feynman, las cuales permiten construir de manera sistemática las expresiones asociadas a cada diagrama.

En particular, al analizar diagramas con loops, aparecen integrales en el espacio de momentos de la forma

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 [(p-k)^2 - m^2]}$$

donde los factores en el denominador corresponden a los propagadores de las partículas internas.

En este tipo de integrales, al considerar el límite $k \rightarrow \infty$, el integrando no decrece lo suficientemente rápido, lo que conduce a divergencias. Estas divergencias se denominan divergencias ultravioleta (UV) y reflejan el comportamiento de la teoría a altas energías².

Para tratar estas divergencias, se introduce un procedimiento de regularización, siendo uno de los más utilizados la regularización dimensional. En este esquema, la dimensión del espacio-tiempo se generaliza a $d = 4 - \varepsilon$, donde ε actúa como un parámetro regulador.

Posteriormente, mediante el procedimiento de renormalización, se redefinen los parámetros de la teoría para absorber las divergencias. En particular, en el esquema de sustracción mínima modificada ($\overline{\text{MS}}$), se introduce una escala de renormalización μ con el fin de mantener los acoplamientos adimensionales en dimensiones arbitrarias y parametrizar la dependencia de la teoría con la escala de energía.

En el caso de QED, los campos y parámetros del lagrangiano se renormalizan mediante la introducción de constantes de renormalización Z_i . En particular, se definen las relaciones entre cantidades desnudas y renormalizadas como

$$A_\mu^0 = \sqrt{Z_3} A_\mu, \quad (2.20)$$

²En la sección 4.1 se presenta un análisis más detallado del grado de divergencia superficial de estas integrales.

$$\psi^0 = \sqrt{Z_2} \psi, \quad (2.21)$$

$$m^0 = Z_m m_R, \quad (2.22)$$

$$e^0 = \mu^{\frac{\varepsilon}{2}} Z_e e_R, \quad (2.23)$$

donde $\varepsilon = 4 - d$ y μ es la escala de renormalización introducida en el esquema de regularización dimensional. Las constantes de renormalización pueden escribirse como

$$Z_i = 1 + \delta_i, \quad (2.24)$$

donde δ_i representan los contratérminos que absorben las divergencias ultravioletas. En QED, la identidad de Ward implica que $Z_1 = Z_2$, lo cual establece relaciones entre las constantes de renormalización y garantiza la conservación de la corriente. En el esquema $\overline{\text{MS}}$, los contratérminos contienen únicamente las partes divergentes en ε , y a un loop pueden escribirse esquemáticamente como

$$\delta_i \sim \frac{e_R^2}{16\pi^2} \frac{1}{\varepsilon} + \dots \quad (2.25)$$

donde los términos finitos dependen del esquema de renormalización y del gauge elegido. A partir de estas consideraciones, se obtiene la ecuación del grupo de renormalización, dada por

$$\beta(e_R) \equiv \mu \frac{d}{d\mu} e_R = -\frac{\varepsilon}{2} e_R + \frac{e_R^3}{12\pi^2}, \quad (2.26)$$

la cual describe la dependencia de los parámetros de la teoría con la escala de energía. Por otro lado, además de las divergencias ultravioletas, en teorías gauge como QED también aparecen divergencias asociadas al régimen de bajas energías. Estas surgen al considerar el límite $k \rightarrow 0$ en las integrales de loop y se conocen como divergencias infrarrojas (IR).

A diferencia de las divergencias UV, las divergencias IR no están relacionadas con el comportamiento de la teoría a altas energías, sino con la presencia de partículas sin masa, como el fotón, lo que permite la emisión de cuantos de energía arbitrariamente pequeña. Como consecuencia, estas divergencias no pueden eliminarse mediante la renormalización de los parámetros del lagrangiano.

El tratamiento consistente de las divergencias infrarrojas requiere considerar procesos físicos inclusivos, en los cuales se suman las contribuciones de fotones virtuales y la emisión de fotones reales de baja energía. En este contexto, las divergencias IR se cancelan al nivel de cantidades físicas observables, de acuerdo con el teorema de Bloch-Nordsieck [11].

CAPÍTULO 3

CORRECCIONES A 1 LOOP EN LA TEORÍA TOTAL

En este capítulo analizaremos el decaimiento de uno a dos cuerpos, al primer y segundo orden de la teoría de perturbaciones. Realizaremos el cálculo perturbativo de los aportes a la amplitud de dispersión para encontrar el ancho de decaimiento del proceso $\phi \rightarrow K^+ K^-$; utilizaremos herramientas computacionales para encontrar las ecuaciones analíticas de las amplitudes de dispersión y para el cálculo numérico de estas que nos servirán para encontrar el ancho de decaimiento en este canal.

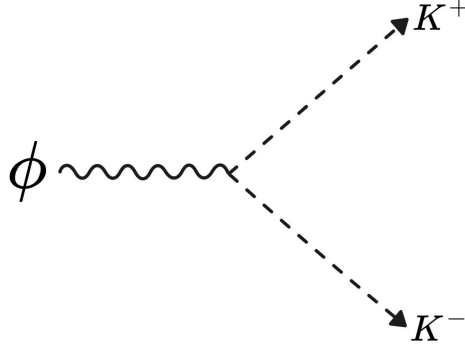
3.1 CALCULO DEL DECAIMIENTO $\phi \rightarrow K^+ K^-$ A NIVEL ÁRBOL

Para la realización del cálculo a nivel árbol de este decaimiento, partiremos de su lagrangiano de interacción, expresado como

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = ig_{\phi K^+ K^-} \phi^\mu [K^+ \partial_\mu K^- - K^- \partial_\mu K^+] \quad (3.1)$$

Este lagrangiano de interacción dibuja el grafo de la figura 3.1.

Usando las reglas de Feynman, podemos encontrar que su amplitud de dispersión

FIGURA 3.1: Grafo del decaimiento $\phi \rightarrow K^+ K^-$ al LO de la teoría de perturbaciones

tiene la forma

$$\mathcal{M}_0 = ig_{\phi K^+ K^-} (p - q) \cdot \eta \quad (3.2)$$

Recordemos que el ancho de decaimiento de uno a dos cuerpos se puede encontrar con la ecuación (2.5)

$$d\Gamma = \frac{1}{32\pi^2 m_\phi^2} |\mathcal{M}|^2 |\mathbf{p}'| d\Omega \quad (3.3)$$

Donde m_ϕ es la masa del mesón ϕ . Tomemos en cuenta que $\mathbf{p}$ es el 3-momento de las partículas dispersadas, por lo cual su norma, se puede expresar como

$$|\mathbf{p}'| = \frac{m_\phi}{2} \sqrt{1 - 4 \frac{m^2}{m_\phi^2}} \quad (3.4)$$

y además, tomando en cuenta la suma sobre polarizaciones y promediando sobre el spin del mesón ϕ , obtenemos

$$\overline{|\mathcal{M}_0|^2} = \frac{g_{\phi K^+ K^-}^2}{3} m_\phi^2 \left(1 - 4 \frac{m^2}{m_\phi^2} \right) \quad (3.5)$$

por lo cual, el ancho de decaimiento a tree level es

$$\Gamma_0 = \frac{g_{\phi K^+ K^-}^2}{48\pi} m_\phi \left(1 - 4 \frac{m^2}{m_\phi^2} \right)^{3/2} \quad (3.6)$$

3.2 CÁLCULO DE FOTONES VIRTUALES

Para comenzar con el cálculo perturbativo de fotones virtuales, tomaremos en cuenta algunas consideraciones que nos servirán para construir las amplitudes de dispersión de cada uno de los grafos generados en el segundo orden de la expansión perturbativa.

Comenzamos considerando que las masas de los kaones cargados es idéntica (nombrandola como m), por lo cual, el propagador de estas dos se diferencia unicamente en su 4-momento, siendo $\Delta(p)$ para el kaon positivo y $\Delta(q)$ para el kaon negativo. Aunque no lo escribiremos de manera explicita, se tomará en cuenta el regulador IR de masa del foton λ , el cuál funcionará como un parámetro para los cálculos numéricos realizados con LoopTools en Fortran.

Ademas de esto, al igual que en la sección 3.1, la masa del mesón ϕ se nombra como m_ϕ y por medio de la relación de conservacion del momento

$$P = p + q \quad (3.7)$$

obtenemos la relación

$$p \cdot q = w = \frac{1}{2}(m_\phi^2 - 2m^2) \quad (3.8)$$

Para comenzar, veamos las aportaciones generadas por los grafos en el NLO, los cuales se muestran en la figura 3.2. El primer grafo que analizaremos será el que se genera en la autointeracción de uno de los kaones [en este caso el positivo (a)]. Utilizando las reglas de Feynman, encontramos que la forma integral de la autoenergía del kaon es

$$\Sigma(p) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^2(2p - k) \cdot (2p - k)}{k^2[(p - k)^2 - m^2]} \quad (3.9)$$

Realizando esta integral, con el uso de la librería FeynCalc en Jupyter notebook¹, encontramos que la expresión de la autoenergía del kaon en términos de Passarino-Veltman es

$$\Sigma(p) = \frac{ie^2}{16\pi^2} [2(m^2 + p^2)B_0(p^2, 0, m^2) - A_0(m^2)] \quad (3.10)$$

¹Los comandos utilizados para resolver las integrales, se encuentran en el apéndice B

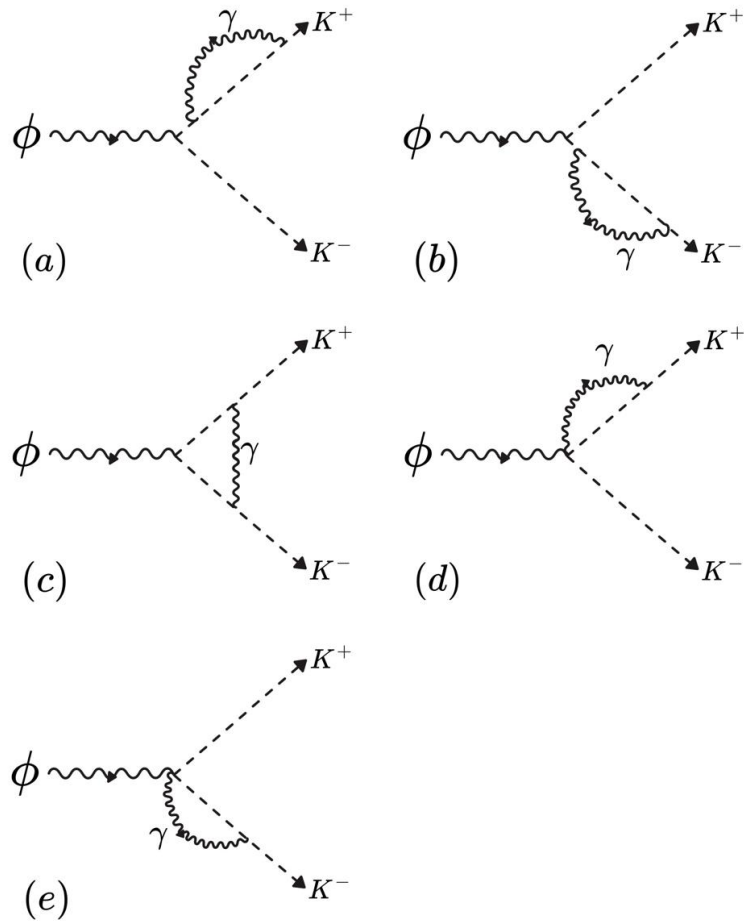


FIGURA 3.2: Conjunto de grafos generados por la interacción electromagnética de un fotón virtual

Y utilizando la definición

$$\mathcal{M}_a = \frac{1}{2i} \mathcal{M}_0 \left[\frac{d\Sigma(p)}{dp^2} \right]_{p^2=m^2} \quad (3.11)$$

obtenemos que el aporte de la autoenergía del kaon es

$$\delta_a = \frac{\mathcal{M}_a}{\mathcal{M}_0} = \frac{\alpha}{4\pi} [B_0(m^2, 0, m^2) + 2m^2 B'_0(m^2, 0, m^2)] \quad (3.12)$$

Siendo la ecuación (3.12) valida para los grafos (a) y (b), de autoenergía de los kaones positivo y negativo.

Ahora, para los grafos (c), (d) y (e), las formas integrales de los aportes a la amplitud de dispersión, son

$$\mathcal{M}_c = -e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^2} \frac{g_{\phi K^+ K^-} [(2p+k) \cdot (2q-k)] [(p-q+2k) \cdot \eta]}{k^2 [(p+k)^2 - m^2] [(q-k)^2 - m^2]} \quad (3.13)$$

$$\mathcal{M}_d = -2e^2 \int \frac{g_{\phi K^+ K^-} (2p-k) \cdot \eta}{k^2 [(p-k)^2 - m^2]} \quad (3.14)$$

$$\mathcal{M}_e = 2e^2 \int \frac{g_{\phi K^+ K^-} (2q-k) \cdot \eta}{k^2 [(q-k)^2 - m^2]} \quad (3.15)$$

Las cuales, al usar FeynCalc, se obtiene como resultado

$$\begin{aligned} \delta_c = \frac{\mathcal{M}_c}{\mathcal{M}_0} = -\frac{\alpha}{4\pi} & \left[\frac{A_0(m^2)}{m^2} - \frac{4w}{m^2 - w^2} B_0(m_\phi^2, m^2, m^2) \right. \\ & + 4w C_0(m^2, m^2, m_\phi^2, m^2, 0, m^2) \\ & \left. - \frac{2(m^2 - 3w)}{m^2 - w} B_0(m^2, 0, m^2) \right] \end{aligned} \quad (3.16)$$

y la suma de (3.14) y (3.15), da como resultado

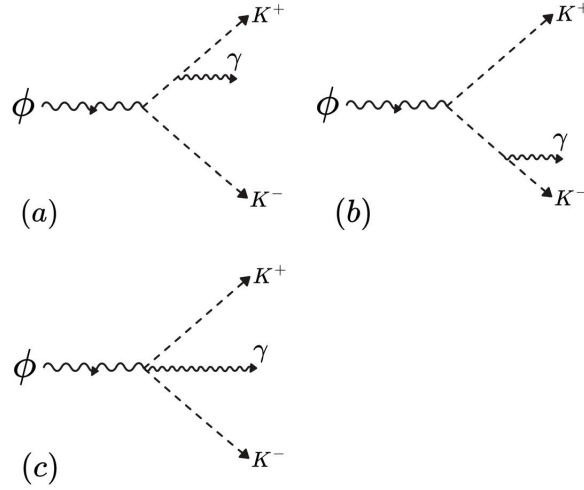
$$\delta_f = \frac{\mathcal{M}_f}{\mathcal{M}_0} = \frac{\alpha}{4\pi} \left[\frac{A_0(m^2)}{m^2} - 4B_0(m^2, 0, m^2) \right] \quad (3.17)$$

Con esto, el resultado total de correcciones de fotones virtuales en el NLO, se encuentra realizando la suma de las ecuaciones (3.12), (3.16), (3.17)

$$\delta_{\text{loop}} = 2\delta_a + \delta_c + \delta_f \quad (3.18)$$

Y el ancho de decaimiento se puede encontrar con la ecuación

$$d\Gamma = \frac{1}{32\pi^2 m_\phi^2} |\mathcal{M}_0|^2 |1 + \delta_{\text{loop}}|^2 |\mathbf{p}| d\Omega \quad (3.19)$$

FIGURA 3.3: Grafos generados por la emisión de un fotón real $\phi \rightarrow K^+K^-\gamma$

A esta ultima ecuación la podemos expresar de la forma

$$d\Gamma = (1 + 2\delta_{\text{loop}})d\Gamma_0 \quad (3.20)$$

La cual nos servirá para expresar el resultado final, mas adelante.

3.3 CALCULO DE EMISIÓN DE FOTONES REALES

Debemos calcular ahora el ancho de decaimiento debido a la emisión de fotones reales. Sea el decaimiento a tres cuerpos dado de la forma $\phi \rightarrow K^+K^-\gamma$, y de la conservación del momento, tenemos ahora

$$P = p + q + k \quad (3.21)$$

Para realizar el calculo perturbativo partamos de los grafos mostrados en la figura 3.3.

Recordemos que para este caso, se puede encontrar la amplitud de dispersion $\mathcal{M}_\gamma$ mediante el uso de las reglas de Feynman. Con esto en consideración, encontramos que las amplitudes de dispersión para los grafos (a) y (b) son

$$\mathcal{M}_a = ieg_{\phi K^+ K^-} (p - q) \cdot \eta \left[\frac{p \cdot \epsilon}{p \cdot k} \right] + ieg_{\phi K^+ K^-} k \cdot \eta \left[\frac{p \cdot \epsilon}{p \cdot k} \right] \quad (3.22)$$

$$\mathcal{M}_b = -ieg_{\phi K^+ K^-}(p-q) \cdot \eta \left[\frac{q \cdot \epsilon}{q \cdot k} \right] + ieg_{\phi K^+ K^-} k \cdot \eta \left[\frac{q \cdot \epsilon}{q \cdot k} \right] \quad (3.23)$$

Ademas, recordemos que

$$\mathcal{M}_0 = ig_{\phi K^+ K^-}(p-q) \cdot \eta \quad (3.24)$$

Por lo que, las amplitudes de dispersion para los grafos (a) y (b), se puede expresar de la forma

$$\mathcal{M}_a = e\mathcal{M}_0 \left[\frac{p \cdot \epsilon}{p \cdot k} \right] + ieg_{\phi K^+ K^-} k \cdot \eta \left[\frac{p \cdot \epsilon}{p \cdot k} \right] \quad (3.25)$$

$$\mathcal{M}_b = e\mathcal{M}_0 \left[\frac{q \cdot \epsilon}{q \cdot k} \right] + ieg_{\phi K^+ K^-} k \cdot \eta \left[\frac{q \cdot \epsilon}{q \cdot k} \right] \quad (3.26)$$

Y sabiendo que la amplitud de dispersion total debe ser invariante de Gauge, podemos obtener la amplitud del grafo (c), mediante

$$\mathcal{M}_a + \mathcal{M}_b + \mathcal{M}_c|_{\epsilon=k} = 0 \quad (3.27)$$

Entonces

$$\mathcal{M}_c = -2ieg_{\phi K^+ K^-} \eta \cdot \epsilon \quad (3.28)$$

Por lo tanto, la amplitud total es

$$\mathcal{M}_\gamma = e\mathcal{M}_0 \left[\frac{p \cdot \epsilon}{p \cdot k} - \frac{q \cdot \epsilon}{q \cdot k} \right] + ieg_{\phi K^+ K^-} k \cdot \epsilon \left[\frac{p \cdot \epsilon}{p \cdot k} + \frac{q \cdot \epsilon}{q \cdot k} \right] - 2ieg_{\phi K^+ K^-} \eta \cdot \epsilon \quad (3.29)$$

Al expresar la amplitud $\mathcal{M}_\gamma$, podemos comprobar el teorema de Low [12], el cual afirma que la amplitud de dispersion puede expresarse en potencias de la energía del fotón ω , siendo en este caso, el primer termino de (3.29), el término dominante de la expansión de Low.

$$\frac{A_{-1}}{\omega} = e\mathcal{M}_0 \left[\frac{p \cdot \epsilon}{p \cdot k} - \frac{q \cdot \epsilon}{q \cdot k} \right] \quad (3.30)$$

Ahora, el teorema de Burnett-Kroll [13], menciona que al calcular el cuadrado del modulo de la amplitud de dispersion, los términos lineales en ω no contribuyen a la sección eficaz (podemos extrapolar esta afirmación al ancho de decaimiento) despues de realizar la suma de polarizaciones.

Para comprobar esto, tomaremos la ecuación (3.29) y obtendremos el cuadrado $|\mathcal{M}_\gamma|^2$.

Mediante una manipulación algebraica un tanto larga, obtenemos como resultado que el cuadrado $|\mathcal{M}_\gamma|^2$, tiene la forma

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}_\gamma|^2 = & e^2 g_{\phi K^+ K^-}^2 \left\{ m_\phi^2 - 4m^2 - 2(p+q) \cdot k + \frac{[(p-q) \cdot k]^2}{m_\phi^2} \right\} A^2 \\
& + e^2 g_{\phi K^+ K^-}^2 \frac{[k \cdot (p+q)]^2}{m_\phi^2} B^2 \\
& + 2e^2 g_{\phi K^+ K^-}^2 \left\{ -k \cdot (p-q) + \frac{[k \cdot (p+q)][(p-q) \cdot k]}{m_\phi^2} \right\} AB \\
& - 4e^2 g_{\phi K^+ K^-}^2 \left\{ -\epsilon \cdot (p-q) + \frac{[\epsilon \cdot (p+q)][(p-q) \cdot k]}{m_\phi^2} \right\} A \\
& - 4e^2 g_{\phi K^+ K^-}^2 \left\{ \frac{[k \cdot (p+q)][\epsilon \cdot (p+q)]}{m_\phi^2} \right\} B + 4e^2 g_{\phi K^+ K^-}^2 (\eta \cdot \epsilon)
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Donde

$$A = \left[\frac{p \cdot \epsilon}{p \cdot k} - \frac{q \cdot \epsilon}{q \cdot k} \right] \tag{3.32}$$

$$B = \left[\frac{p \cdot \epsilon}{p \cdot k} + \frac{q \cdot \epsilon}{q \cdot k} \right] \tag{3.33}$$

De la ecuación (3.31), es facil comprobar que los términos lineales de ω se eliminan mutuamente, esto es

$$-2e^2 g_{\phi K^+ K^-}^2 (p+q) \cdot k A^2 - 2e^2 g_{\phi K^+ K^-}^2 k \cdot (p-q) AB + 4e^2 g_{\phi K^+ K^-}^2 \epsilon \cdot (p-q) A = 0 \tag{3.34}$$

Dando como resultado que el cuadrado $|\mathcal{M}_\gamma|^2$ se reduzca a

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}_\gamma|^2 = & e^2 g_{\phi K^+ K^-}^2 \left\{ m_\phi^2 - 4m^2 + \frac{[(p-q) \cdot k]^2}{m_\phi^2} \right\} A^2 \\
& + e^2 g_{\phi K^+ K^-}^2 \frac{[k \cdot (p+q)]^2}{m_\phi^2} B^2 \\
& + 2e^2 g_{\phi K^+ K^-}^2 \frac{[k \cdot (p+q)][(p-q) \cdot k]}{m_\phi^2} AB \\
& - 4e^2 g_{\phi K^+ K^-}^2 \frac{[\epsilon \cdot (p+q)][(p-q) \cdot k]}{m_\phi^2} A \\
& - 4e^2 g_{\phi K^+ K^-}^2 \left\{ \frac{[k \cdot (p+q)][\epsilon \cdot (p+q)]}{m_\phi^2} \right\} B + 4e^2 g_{\phi K^+ K^-}^2 (\eta \cdot \epsilon)
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Cumpliendo, como anticipamos, el teorema de Burnett-Kroll. Siendo entonces, el termino dominante de orden ω^{-2}

$$\frac{A_{-2}}{\omega^2} = e^2 g_{\phi K^+ K^-}^2 (m_\phi^2 - 4m^2) A^2 \tag{3.36}$$

Como sabemos, al realizar la integración sobre las energías del fotón, en este término, ocurre la catástrofe infrarroja a energías bajas del fotón emitido en la reacción, también llamado Soft-Bremsstrahlung.

Para encontrar el aporte del Soft-Bremsstrahlung en el ancho de decaimiento nos proponemos en resolver, partiendo de (2.4), la ecuación

$$d\Gamma_{\gamma}^{\text{Soft}} = e^2 \left[\frac{p \cdot \epsilon}{p \cdot k} - \frac{q \cdot \epsilon}{q \cdot k} \right]^2 \frac{d^3 k}{\omega(2\pi)^2} d\Gamma_0 \quad (3.37)$$

Dada por el elemento que genera la divergencia infrarroja en la emisión de fotón real.

Resolviendo la integral que se genera en la ecuación (3.37), obtenemos que resultado para el aporte del Soft-Bremsstrahlung es

$$\delta_{\gamma}^{\text{Soft}} = \frac{d\Gamma_{\gamma}^{\text{Soft}}}{d\Gamma_0} = \frac{\alpha}{\pi} \left\{ \left[\frac{2\beta^2}{1-\beta^2} \right] \left[\ln \left(\frac{4\omega_0^2}{\lambda^2} \right) - \frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right) \right] \right. \\ \left. - \ln \left(\frac{\omega_0^2}{\lambda^2} \right) \ln \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right) + 2[\text{Li}_2(\beta) - \text{Li}_2(-\beta)] \right\} \quad (3.38)$$

Donde las funciones $\text{Li}_2(x)$ son las funciones polilogaritmo², la cantidad ω_0 es el umbral de detección de los fotones suaves, el cual se define por medio de un aparato de medición de laboratorio y el factor β está dado por

$$\beta = \sqrt{1 - 4 \frac{m^2}{m_{\phi}^2}} \quad (3.39)$$

Con este resultado, el ancho de decaimiento total, tomando en cuenta la emisión de fotones suaves es

$$d\Gamma = (1 + 2\delta_{\text{loop}} + \delta_{\gamma}^{\text{Soft}}) d\Gamma_0 \quad (3.40)$$

3.4 CÁLCULO NUMÉRICO DE LAS CORRECCIONES RADIATIVAS

Ya que hemos obtenido las ecuaciones para calcular el ancho de decaimiento al segundo orden de la teoría de perturbaciones, es necesario ahora realizar el cálculo

²Ver apéndice A

numerico de los resultados obtenidos.

Para realizar los cálculo numericos utilizamos la libreria LoopTools en Fortran³, la cuál nos sirve para la evaluación de las funciones de Passarino-Veltman, ademas, para la evaluación de las funciones polilogaritmo, hemos escrito un módulo en Fortran⁴, el cuál nos será de utilidad para este cálculo y los siguientes.

Declararemos los parámetros utilizados en la evaluacion de las funciones de Passarino-Veltman de manera arbitraria como lo hace LoopTools por default, esto es

$$\lambda = 1\text{MeV} \quad (3.41)$$

$$\Delta_{UV} = 0\text{MeV} \quad (3.42)$$

$$\mu = 1\text{MeV} \quad (3.43)$$

Aunque los parámetros λ y Δ_{UV} podrían tener cualquier valor ya que las funciones obtenidas en la sección 3.2 demuestran invarianza ante estos parámetros.

Tomaremos en cuenta que las masas de las partículas tendran los valores $m_\phi = 1019$ MeV y $m = 494$ MeV.

Como ya hemos mencionado con anterioridad, el umbral de detección de los fotones reales es un parámetro dependiente del aparato de medición utilizado en experimentos el cual define el valor minimo de energía en el que los fotones reales empiezan a ser detectados; por otro lado el cálculo de fotones duros nos ayudaría a eliminar este parámetro, pero para el alcance de este trabajo realizaremos el cálculo hasta el Soft-Bremsstrahlung. Para este caso, seleccionaremos 10 valores para el umbral de detección y los resultados obtenidos nos servirán mas adelante para la comparacion con el metodo de Convection Term.

Al realizar el calculo al tree level, encontramos que el ancho de decaimiento parcial, tiene como resultado

$$\Gamma_0 = 2.097\text{MeV} \quad (3.44)$$

³Para ver los codigos escritos para la realización de este calculo numerico vease el apéndice C

⁴El codigo del módulo se encuentra al final del apéndice A dedicado a las funciones polilogaritmo.

El cual, comparandolo con el ancho de decaimiento total, obtenemos que el branching ratio es

$$BR(\phi \rightarrow K^+ K^-) = \frac{\Gamma_0(\phi \rightarrow K^+ K^-)}{\Gamma_{\text{Tot}}^\phi} = \frac{2.097}{4.249} = 0.493 \quad (3.45)$$

Es decir un 49.3 % de aportación en la predicción teórica del branching ratio [14].

Ahora, hay que calcular el valor numérico del ancho de decaimiento en el segundo

ω_0 (MeV)	Γ_ϕ (MeV)
5	2.185
10	2.182
15	2.181
20	2.180
25	2.179
30	2.178
32	2.178

TABLA 3.1: Ancho de decaimiento al NLO, en función del umbral de detección.

orden de la teoría de perturbaciones. Para encontrar este valor, hacemos uso de la ecuación (3.40) la cual condensa las correcciones a fotones virtuales y reales. En la tabla 3.1 se muestran los diversos anchos de decaimiento variando nuestro parámetro de umbral de detección ω_0 .

Es importante mencionar en este punto que el branching ratio a este orden de la teoría de perturbaciones debe tomar en cuenta todos los canales de decaimiento para obtener el valor del ancho de decaimiento total ya corregido y con esto obtener nuestro branching ratio; aunque para nuestros objetivos, es suficiente con los resultados mostrados en la tabla 3.1 los cuales nos servirán como base para la comparación con metodo de Convection Term en el capítulo 4.

CAPÍTULO 4

CORRECCIONES INDEPENDIENTES DEL MODELO

Hasta el momento solo hemos tomado en cuenta los casos en los que la teoría es renormalizable, es decir, en donde podemos redefinir factores utilizando un grupo de renormalización que permita eliminar los infinitos generados por las divergencias infrarroja y ultravioleta. Aquí surge la duda: ¿Cual es el criterio que se utiliza para saber cuando una teoría es renormalizable? Podemos seguir preguntandonos que marca la renormalizabilidad de una integral de Feynman, y hay maneras distintas de conocer esto, en las referencias [15, 16, 17], podemos encontrar análisis para la renormalizabilidad por medio de los grafos de Feynman para saber en la teoría mas básica si se puede renormalizar la integral del loop generado.

Por otro lado, existen análisis mas generales utilizando funciones de Green para saber si una teoría es renormalizable. Y si no lo es, ¿qué metodos podemos utilizar para corregir la teoría?

Recordemos que el hecho de que una teoría no sea renormalizable, no quiere decir que esta no sea precisa al Tree level.

Ejemplos de teorías no renormalizables pueden ser la ecuación de Schrödinger, la teoría de Fermi de 4 cuerpos, la teoría de mesones y la gravedad cuántica [18].

En este capitulo revisaremos de una forma breve la renormalizabilidad de las teorías

cuánticas de campos y el método de Convection Term para aproximar los cálculos de corrección de las teorías no renormalizables, y lo probaremos con el proceso ya analizado en el capítulo 3 para el decaimiento del $\phi(1020)$ y compararemos el resultado obtenido en el calculo total con el resultado proporcionado por el método independiente del modelo.

4.1 RENORMALIZABILIDAD

Cuando analizamos teorías como la electrodinámica cuántica, surgen integrales de loop que presentan divergencias en el régimen ultravioleta. Estas divergencias se tratan mediante procedimientos de regularización y renormalización, lo que permite redefinir un número finito de parámetros físicos. En este contexto, surge la pregunta de si este procedimiento puede aplicarse de manera consistente a todos los órdenes en teoría de perturbaciones. Cuando esto es posible, se dice que la teoría es renormalizable.

Una teoría se considera renormalizable si todas las divergencias ultravioleta pueden absorberse en un número finito de contratérminos.

Un análisis particular, que parte de revisar un diagrama de Feynman de orden n [15](es decir, de n vértices) nos da como resultado un grado de divergencia dado por

$$r = 4 - \frac{3}{2}f - b \quad (4.1)$$

donde f son las líneas externas de fermión y b las líneas externas de bosón¹. Este parámetro se interpreta de la siguiente manera: si $r < 0$, la integral de Feynman es convergente; mientras que para $r \geq 0$, la integral presenta divergencias ultravioleta. En particular, cuando $r = 0$, la divergencia es de tipo logarítmico, mientras que si $r > 0$, la divergencia es de tipo potencial. A partir de este análisis, se concluye que

¹Aunque en un aspecto mas acorde a este trabajo, la ecuación se puede generalizar agregando un factor $-s$, el cual se refiere a las líneas externas de partícula escalar en el diagrama, tal como se puede revisar en la referencia [18].

el carácter de renormalizabilidad no depende únicamente del valor de r para un diagrama individual, sino de si las divergencias que aparecen pueden absorberse en un número finito de contratérminos en todos los órdenes de la teoría de perturbaciones. Aunque esta expresión depende únicamente del número de líneas externas, esto no implica una pérdida de generalidad, ya que mediante relaciones topológicas entre líneas internas, externas y vértices, el grado de divergencia puede expresarse completamente en función de las líneas externas.

Si bien el análisis en términos de diagramas de Feynman permite identificar el grado de divergencia superficial, este puede formularse de manera más general utilizando funciones de Green. En este contexto, el análisis dimensional adquiere una interpretación más sistemática, permitiendo extender el estudio de la renormalizabilidad a teorías con interacciones arbitrarias.

Para establecer esta conexión, utilizamos la reducción LSZ[19], la cual relaciona las funciones de Green tiempo-ordenadas con las amplitudes de dispersión. De manera esquemática, se tiene

$$\delta^4(\Sigma p) \mathcal{M} \sim \prod_{i=1}^b \int d^4 x_i e^{\pm i p_i x_i} \square_i \cdots \prod_{j=1}^f \int d^4 y_j e^{\pm i q_j y_j} \gamma^\mu \partial_j \cdots \times \quad (4.2)$$

$$\times \langle \psi_1(y_1) \cdots \psi_f(y_f) A_1(x_1) \cdots A_b(x_b) \rangle$$

Al realizar el análisis dimensional de esta expresión, se recupera el mismo grado de divergencia superficial r . Para extender este resultado, consideremos un lagrangiano al que se le añaden un número finito de términos de interacción adicionales. Sea Δ_i la dimensión de masa asociada al acoplamiento de la i -ésima interacción, y n_i el número de interacciones de vértice.

Bajo estas consideraciones, el análisis dimensional de la función de Green conduce a la transformación

$$\int k^r \longrightarrow \left(\prod_i g_i^{n_i} \right) \int k^{r - \sum_i n_i \Delta_i}, \quad (4.3)$$

de donde se obtiene la generalización del grado de divergencia superficial en la forma

$$r = 4 - \frac{3}{2}f - b - \sum_i n_i \Delta_i. \quad (4.4)$$

Este resultado muestra que el comportamiento ultravioleta de la teoría está determinado por la dimensión de masa de los acoplamientos². Si $\Delta_i > 0$, las interacciones son irrelevantes en el sentido del grupo de renormalización, y el grado de divergencia superficial disminuye, dando lugar a una teoría bien comportada en el ultravioleta. En contraste, si $\Delta_i < 0$, las interacciones se vuelven relevantes y el grado de divergencia superficial crece con el número de vértices, generando nuevas divergencias a cada orden perturbativo. En consecuencia, se requiere un número infinito de contraterminos para renormalizar la teoría, lo que implica que esta es no renormalizable.

4.2 EL MÉTODO: CONVECTION TERM

En la sección anterior se estableció un criterio para determinar el comportamiento ultravioleta de las integrales de Feynman en términos del grado de divergencia superficial. En particular, se observó que al incluir interacciones con acoplamientos de dimensión de masa negativa, el grado de divergencia aumenta con el número de vértices, lo que conduce a teorías no renormalizables en el sentido de que requieren un número infinito de contraterminos.

Sin embargo, este hecho no invalida el poder predictivo de dichas teorías, ya que pueden interpretarse como teorías efectivas válidas a bajas energías, donde es posible organizar los cálculos en una expansión sistemática.

Por otro lado, además de las divergencias ultravioleta, en teorías como la electrodinámica cuántica surgen también divergencias infrarrojas asociadas a la emisión de fotones suaves. Estas no pueden tratarse mediante los procedimientos estándar de renormalización y requieren un análisis distinto.

En este contexto, el método desarrollado por Yennie-Farutschi-Suura [1] permite tratar de manera consistente las divergencias infrarrojas al considerar conjuntamente las contribuciones de correcciones virtuales y emisión real de fotones.

²Vease también la referencia [4].

4.2.1 CORRECCIONES RADIATIVAS DE FOTONES VIRTUALES

El objetivo de este desarrollo es aislar las contribuciones infrarrojas dominantes asociadas a la emisión de fotones suaves y demostrar que estas pueden factorizarse y resumirse en una forma exponencial.

Consideremos un proceso en el cuál se produce una cantidad específica de fotones, mientras una partícula se dispersa de un estado con momento inicial p a un momento final p' . Mantengamos el estado final fijo y consideremos las correcciones radiativas al orden más bajo de los elementos de matriz.

Sea $\mathcal{M}_n(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ la contribución al elemento de matriz correspondiente a todos los diagramas en los cuales hay n fotones virtuales, a los cuales se les distingue por las interacciones de potencial en $\mathcal{M}_0$. Omitiendo las variables de los fotones reales. El elemento de matriz toma la forma

$$\mathcal{M}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{M}_n(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \quad (4.5)$$

Dado que hay n fotones, esperamos que $\mathcal{M}_n$ tenga divergencias infrarrojas de n -ésimo orden. $\mathcal{M}_n$ tiene una estructura polinomial, tal que

$$\mathcal{M}_n = \sum_{r=0}^{\infty} m_{n-r} \frac{(\alpha\mathcal{B})^r}{r!} \quad (4.6)$$

Donde m_j es una función sin divergencias infrarrojas (independiente de n) de orden α^j relativo a $\mathcal{M}_0$, y cada factor $\alpha\mathcal{B}$ contiene la contribución de un fotón virtual. Con esto, se sigue que

$$\mathcal{M} = \exp(\alpha\mathcal{B}) \sum_{n=0}^{\infty} m_n \quad (4.7)$$

lo que muestra que las divergencias infrarrojas se reorganizan en un factor exponencial universal, mientras que el resto de la amplitud permanece libre de divergencias infrarrojas. Luego, se define

$$\mathcal{M}_n = \frac{1}{n!} \int \prod_{i=1}^n \frac{d^4 k_i}{k_i^2 - \lambda^2} \rho_n(k_1, \dots, k_n) \quad (4.8)$$

donde λ es el regulador de masa del fotón, y el factor $1/n!$ se introduce por simetrización de los n fotones virtuales en ρ_n .

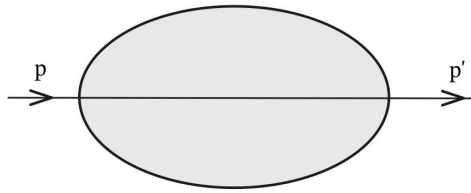
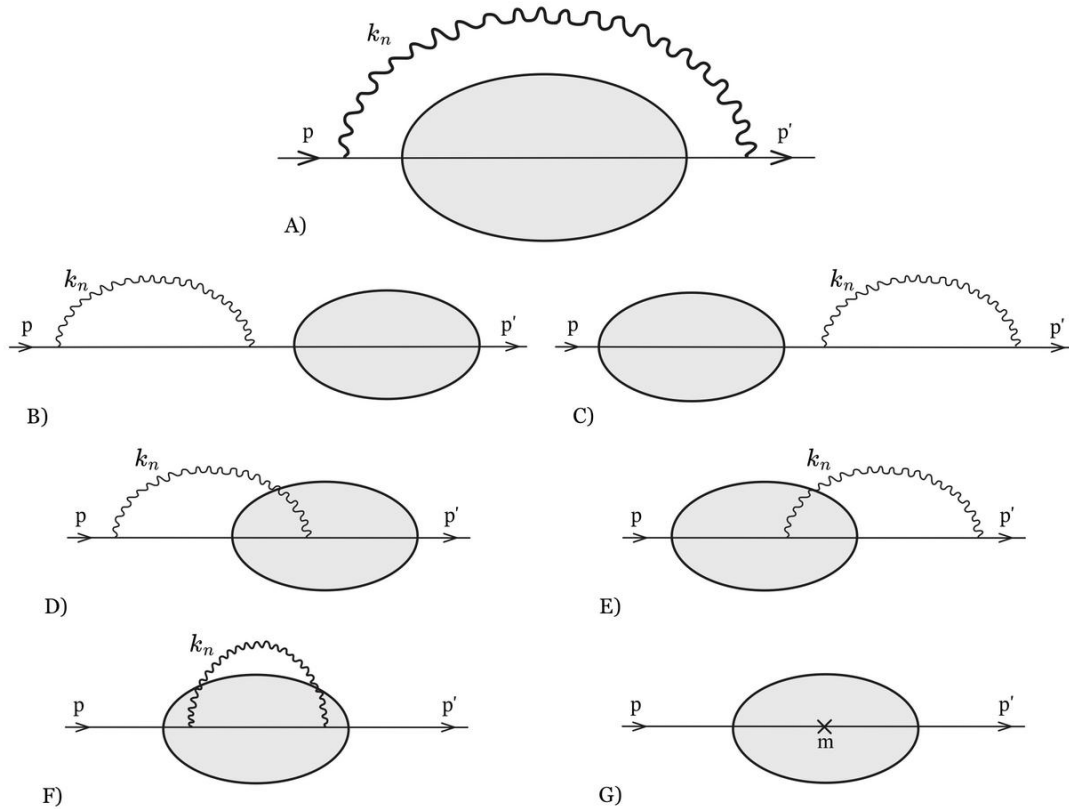


FIGURA 4.1: Conjunto de diagramas internos.

FIGURA 4.2: Representación del n -ésimo fotón.

Ahora, consideremos a ρ_n como una función dependiente de k_n . La figura 4.1 muestra el diagrama que representa el conjunto de diagramas asociados con los primeros $n - 1$ fotones y un número arbitrario de interacciones de potencial.

La figura 4.2 muestra los diagramas que representan las posibles formas en las que el n -ésimo fotón puede ser insertado en varios diagramas básicos. Los diagramas en los cuales el n -ésimo fotón virtual inicia y termina fuera de la zona de los $(n - 1)$ -ésimos diagramas (A), (B) y (C), son infrarrojos en k_n ; por otro lado los diagramas restantes (D), (E) y (F), son finitos cuando $k_n \rightarrow 0$ si todos los otros momentos de los fotones virtuales k_i son diferentes de cero. Como $k_n \rightarrow 0$ y $k_i \rightarrow 0$ simultáneamente, surgen divergencias superpuestas en k_n y k_i . Estas divergencias se cancelan cuando los términos individuales no invariantes de Gauge se combinan en una expresión invariante de Gauge. La única divergencia restante corresponde a la de los diagramas (A), (B) y (C) con el conjunto de k_n igual a cero dentro de los diagramas básicos. Con esto, se puede escribir

$$\rho_n(k_1, \dots, k_n) = S(k_n)\rho_{n-1}(k_1, \dots, k_{n-1}) + \beta_n^{(1)}(k_1, \dots, k_{n-1}; k_n) \quad (4.9)$$

La función $S(k)$ representa el factor universal asociado a la emisión de un fotón suave, el cual contiene toda la estructura infrarroja (k_i) del problema. La función β no contiene divergencias en k_n , y si divergencia infrarroja en las otras k_i 's no empeoran por la separación. β no es infrarroja en k_n . Al iterar el proceso de la ecuación (4.9), se obtiene

$$\begin{aligned} \rho_n(k_1, \dots, k_n) = & S(k_n)S(k_{n-1})\rho_{n-2}(k_1, \dots, k_{n-2}) \\ & + S(k_n)\beta_{n-1}^{(1)}(k_1, \dots, k_{n-2}; k_{n-1}) \\ & + S(k_{n-1})\beta_{n-1}^{(1)}(k_1, \dots, k_{n-2}; k_n) \\ & + [-S(k_{n-1})\beta_{n-1}^{(1)}(k_1, \dots, k_{n-2}; k_n) + \beta_n^{(1)}(k_1, \dots, k_{n-1}; k_n)] \end{aligned} \quad (4.10)$$

La simetría de ρ_n en k_{n-1} y k_n implica invarianza de la expresión entre corchetes, bajo el intercambio de k_{n-1} y k_n . Dado que la cantidad entre corchetes no es infrarroja en k_n para todos los valores del otro k_i , debe ser no infrarrojo en k_{n-1} para todos

los valores de los otros k_i . Esta propiedad se representa por la notación

$$[-S(k_{n-1})\beta_{n-1}^{(1)}(k_1, \dots, k_{n-2}; k_n) + \beta_n^{(1)}(k_1, \dots, k_{n-1}; k_n)] = \beta_n^{(2)}(k_1, \dots, k_{n-2}; k_{n-1}, k_n) \quad (4.11)$$

Las contribuciones infrarrojas de k_n y k_{n-1} son mutuamente independientes. Repitiendo el proceso de iteraciones y el uso de simetrías de ρ_n , ahora se obtiene la siguiente relación

$$\begin{aligned} \rho_n(k_1, \dots, k_n) = & S(k_1) \cdots S(k_n) \beta_0 \\ & + \sum_{i=1}^n S(k_1) \cdots S(k_{i-1}) S(k_{i+1}) \cdots S(k_n) \beta_1(k_i) \\ & + \cdots + \sum_{i=1}^n S(k_i) \beta_{n-1}(k_1, \dots, k_{i-1}, k_{i+1}, \dots, k_n) + \beta_n(k_1, \dots, k_n) \end{aligned} \quad (4.12)$$

Tomando en cuenta que $\beta_i = \beta_i^{(i)}$. La ecuación (4.12) se puede expresar como la suma sobre las permutaciones de k_i y k_j , esto es

$$\rho_n(k_1, \dots, k_n) = \sum_{\text{perm}} \sum_{r=0}^n \frac{1}{r!(n-r)!} \prod_{i=1}^r S(k_i) \beta_{n-r}(k_{r+1}, \dots, k_n) \quad (4.13)$$

β_{n-r} no contiene divergencias infrarrojas. Con esto, se obtiene que $\mathcal{M}_n$ tiene la forma

$$\mathcal{M}_n = \sum_{r=0}^n \frac{1}{r!(n-r)!} \left[\int \frac{d^4 k}{k^2 - \lambda^2} S(k) \right]^r \int \prod_{i=1}^{n-r} \frac{d^4 k_i}{k_i^2} \beta_{n-r}(k_1, \dots, k_{n-1}) \quad (4.14)$$

Con esto podemos definir las siguientes ecuaciones

$$\alpha \mathcal{B}[\mathbf{p}, p'(\epsilon)] \equiv \int \frac{d^4 k}{k^2 - \lambda^2} S(k) \quad (4.15)$$

$$m_r[\mathbf{p}, \mathbf{p}'(\epsilon)] \equiv \frac{1}{r!} \int \prod_{i=1}^r \frac{d^4 k_i}{k_i^2} \beta_r(k_1, \dots, k_r) \quad (4.16)$$

Para definir la función $S(k)$ de la ecuación (4.15) se considera lo siguiente. Sea una partícula cargada de spin un medio³, y con momento p , que emite un fotón real o virtual con momento k . El elemento de matriz asociado a esta emisión tiene la forma

$$\cdots \frac{1}{p - k - m} \mathbf{e} u_p = \cdots \frac{(2p - k) \cdot e - \frac{1}{2}[\mathbf{k}, \mathbf{e}]}{k^2 - 2k \cdot p} u_p \quad (4.17)$$

³Este proceso puede ser realizado para cualquier spin y por inspección podemos saber que forma debe tener la parte de spin.

Esta suma puede ser separada en dos términos a los cuales llamaremos termino de convección y término de spin [2]. Con esto, utilizamos el termino de convección para definir la funcion $S(k)$, y la ecuación (4.15) toma, de manera general, la forma

$$\mathcal{B} = \sum_{\text{pairs}} \frac{-iZ_i\theta_i Z_j\theta_j}{8\pi^3} \int \frac{d^4k}{k^2} \left[\frac{(2p_i\theta_i - k)_\mu}{k^2 - 2k \cdot p_i\theta_i} + \frac{(2p_j\theta_j + k)_\mu}{k^2 + 2k \cdot p_j\theta_j} \right]^2 \quad (4.18)$$

Donde Z_i representa la fracción de carga de una partícula en términos de la carga elemental e y el valor θ_i distingue si una linea entra o sale del diagrama siendo $\theta_i = -1$ para líneas incidentes y $\theta_i = +1$ para líneas salientes.⁴

4.2.2 CORRECCIONES RADIATIVAS DE FOTONES REALES

Para encontrar el factor de corrección para calcular las correcciones a fotones reales, se parte desde la ecuación de una sección eficaz diferencial usando las definiciones que obtuvimos en la sección 4.2.1

$$\frac{d\sigma_n}{d\epsilon} = \exp(2\alpha\mathcal{B}) \frac{1}{n!} \int \prod_{m=1}^n \frac{d^3k_m}{(k_m^2 + \lambda^2)^{1/2}} \delta(\epsilon - \sum_{i=1}^n k_i) \tilde{\rho}_n(\mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) \quad (4.19)$$

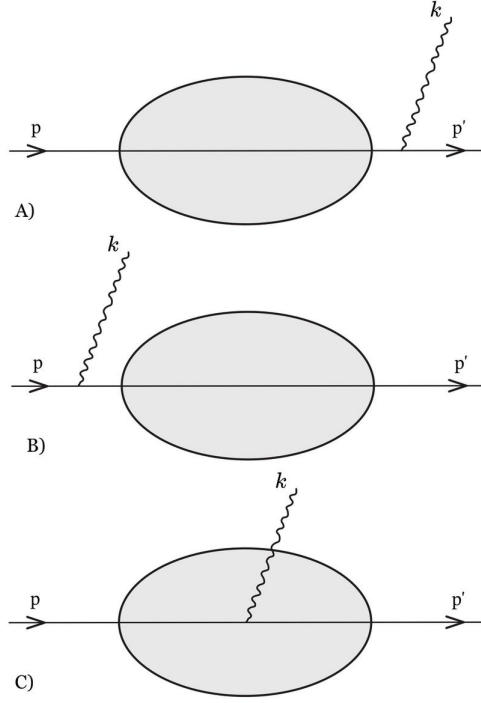
Introduciendo a $\tilde{\rho}_n$ quien cumple la misma función que ρ_n con los fotones virtuales y está dado por el cuadrado absoluto de $\sum m_r$. Esto está definido por algún $E' = E - \sum k_m$ el cuál no necesita coincidir con $E' = E - \epsilon$.

Por otro lado, la delta de dirac asegura que $\tilde{\rho}_n$ contribuya a la sección eficaz solo cuándo $E = E - \epsilon$. La suma sobre todos las posibles fotones no detectados provee la sección eficaz diferencial completa

$$\frac{d\sigma}{d\epsilon} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d\sigma_n}{d\epsilon} \quad (4.20)$$

Los términos infrarrojos pueden ser factorizados de $\tilde{\rho}_n$ por los mismos métodos empleados para ρ_n debido a que $\tilde{\rho}_n$ es simétrica en los fotones reales y las divergencias infrarrojas sobrepuestas se cancelan de la misma manera para ambos fotones reales

⁴Hemos precindido del término λ , ya que como hemos mencionado, este refiere al regulador de masa del fotón virtual, y para los fines de este trabajo no es necerio escribirlo explicitamente.

FIGURA 4.3: n -ésimo fotón real insertado en el conjunto de diagramas.

y virtuales.

Al igual que con los fotones virtuales, los fotones reales en cuanto a los diagramas, se consideran solo los que tengan al foton fuera de la región sombreada (figura 4.3). Análogo al análisis de los fotones virtuales, la función $\tilde{\rho}_n$ se puede escribir como

$$\begin{aligned}
 \tilde{\rho}_n(k_1, \dots, k_n) &= \tilde{S}(k_1) \cdots \tilde{S}(k_n) \tilde{\beta}_0 \\
 &+ \sum_{i=1}^n \tilde{S}(k_1) \cdots \tilde{S}(k_{i-1}) \tilde{S}(k_{i+1}) \cdots \tilde{S}(k_n) \tilde{\beta}_1(k_i) \\
 &+ \cdots + \sum_{i=1}^n \tilde{S}(k_i) \tilde{\beta}_{n-1}(k_1, \dots, k_{i-1}, k_{i+1}, \dots, k_n) + \tilde{\beta}_n(k_1, \dots, k_n)
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

$\tilde{S}$ contiene una divergencia infrarroja y $\tilde{\beta}_i$ no. Debemos evaluar $\tilde{S}$ en $E' = E - \epsilon$. Por otro lado $\tilde{\beta}_i(\dots, k_i, \dots)$ está definida en el energy shell $E' = E - k_m$, esto quiere decir que $\tilde{\beta}_0$ está definida solo en $E' = E$, $\tilde{\beta}_1(k_1)$ está definida en algún $E' = E - k_1$, etc. Tambbién $\delta(\epsilon - \sum k)$ y $\prod \tilde{S}(k_i) \tilde{\beta}_j(\dots, k_m, \dots)$ contribuyen a la integral de la sección eficaz solo cuándo $\epsilon = \sum k_i + \sum k_m$.

Usando la definición de la función delta, y con lo ya discutido anteriormente, se llega a que la sección eficaz diferencial se puede escribir como

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\epsilon} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \exp(2\alpha\mathcal{B}) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{iy\epsilon} \exp \left[\int^{k \leq \epsilon} \frac{d^3 k}{(k^2 + \lambda^2)^{1/2}} \tilde{S}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{p}'(\epsilon)) e^{-iyk} \right] \\ \times \left[\tilde{\beta}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \prod_{m=1}^n \frac{d^3 k_m}{k_m} e^{-iyk_m} \tilde{\beta}_n(\mathbf{p}, \mathbf{p}', k_1, \dots, k_n) \right] \end{aligned} \quad (4.22)$$

El primer exponencial representa la suma sobre los fotones virtuales infrarrojos, el tercer exponencial que contiene la función $\tilde{S}$ representa la suma similar sobre los fotones infrarrojos reales, la suma sobre n se refiere explícitamente a los fotones reales no infrarrojos, y $\tilde{\beta}_n$ contiene implícitamente una suma similar sobre los fotones virtuales no infrarrojos. Los fotones infrarrojos reales en el tercer exponencial se mantienen conectados cinemáticamente con los otros fotones reales por el factor e^{-iyk} el cuál asegura que $\sum k = \epsilon$. En orden de hacer los fotones infrarrojos cinemáticamente independientes, escribimos

$$\int^{k \leq \epsilon} \frac{d^3 k}{(k^2 + \lambda^2)^{1/2}} \tilde{S} e^{-iyk} = 2\alpha\tilde{\mathcal{B}} + D \quad (4.23)$$

donde

$$2\alpha\tilde{\mathcal{B}}[\mathbf{p}, \mathbf{p}'(\epsilon)] \equiv \int^{k \leq \epsilon} \frac{d^3 k}{(k^2 + \lambda^2)^{1/2}} \tilde{S} \quad (4.24)$$

$$D[\mathbf{p}, \mathbf{p}'(\epsilon), y] \equiv \int^{k \leq \epsilon} \frac{d^3 k}{k} \tilde{S} (e^{-iyk} - 1) \quad (4.25)$$

El término $2\alpha\tilde{\mathcal{B}}$ es independiente de y , mientras que el integrando de D no genera problemas cuando $k \rightarrow 0$.

Mediante un análisis similar al de la sección 4.2.1, podemos obtener la función $\tilde{S}$, dandonos como resultado explícito

$$\tilde{\mathcal{B}} = \sum_{\text{pairs}} \frac{Z_i \theta_i Z_j \theta_j}{8\pi^2} \int_0^{K_m} \frac{d^3 k}{(k^2 + \lambda^2)^{1/2}} \left[\frac{p_{i\mu}}{k \cdot p_i} - \frac{p_{j\mu}}{k \cdot p_j} \right]^2 \quad (4.26)$$

Ahora, el exponencial $\exp(2\alpha\tilde{\mathcal{B}})$ viola la condición $\sum k = \epsilon$, pero $\exp(D)$ restaura esta condición y de este modo mantiene la conservación de la energía.

De las ecuaciones anteriores, junto con la definición

$$\frac{d\hat{\sigma}}{d\epsilon} \equiv \frac{1}{2\pi} \int dy e^{iy\epsilon + D} \left[\tilde{\beta}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \prod_{m=1}^n \frac{d^3 k_m}{k_m} e^{-iyk_m} \tilde{\beta}_n \right] \quad (4.27)$$

Para la parte no infrarroja de la sección eficaz, podemos escribir

$$\frac{d\sigma}{d\epsilon} = \exp \left[\lim_{\lambda \rightarrow 0} 2\alpha(\mathcal{B} + \tilde{\mathcal{B}}) \right] \frac{d\hat{\sigma}}{d\epsilon} \quad (4.28)$$

El factor $d\hat{\sigma}/d\epsilon$ es independiente del límite de fotones suaves (esto es, que es finito cuanto $\lambda \rightarrow 0$), donde $\mathcal{B}$ y $\tilde{\mathcal{B}}$ representan las contribuciones infrarrojas de los ordenes mas bajos de correcciones radiativas. Por ende, consideraremos que el factor

$$2\alpha(\mathcal{B} + \tilde{\mathcal{B}}) \quad (4.29)$$

es la corrección del NLO de la teoría de perturbaciones, y con esto, la sección eficaz ya corregida puede expresarse de la forma

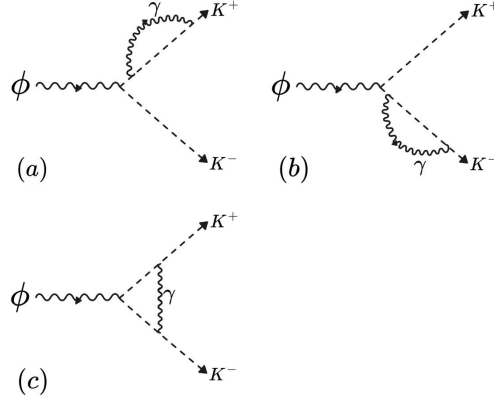
$$\sigma = [1 + 2\alpha(\mathcal{B} + \tilde{\mathcal{B}})]\sigma_0 \quad (4.30)$$

4.3 CORRECCIONES RADIATIVAS EN EL MÉTODO DE CONVECTION TERM

Al igual que en el cálculo realizado en la sección 3.2, debemos primero identificar los grafos que contribuirán en la amplitud de dispersión de nuestro proceso. Como hemos mencionado en la sección 4.2, se deben tomar en cuenta solo los diagramas externos de lo que se considera el conjunto de diagramas contenidos en el proceso. Con esto en consideración, llegamos a la conclusión que los diagramas externos para el cálculo de fotones virtuales de nuestro proceso son los mostrados en la figura 4.4, siendo entonces relevantes solamente los diagramas de autoenergía y el de la interacción de Coulomb.

Para este analisis tomamos a consideracion, de igual manera que en la sección 3.2, que los momentos de las partículas son P para el mesón ϕ , p para el K^+ y q para el K^- .

En virtud de las ecuaciones mostradas en la sección 4.2, debemos encontrar el término correctivo para este proceso.

FIGURA 4.4: Diagramas externos de fotones virtuales en el proceso $\phi \rightarrow K^+ K^-$

Para esto, realizamos la suma de pares de la ecuación (4.18), tomando en cuenta que $Z_\phi = 0$, $Z_{K^+} = 1$, $Z_{K^-} = -1$, $\theta_\phi = -1$, $\theta_{K^+} = 1$ y $\theta_{K^-} = 1$. Con esto, obtenemos que el factor de corrección, tiene la forma integral

$$\mathcal{B} = \frac{i}{8\pi^3} \int \frac{d^4 k}{k^2} \left[\frac{(2p - k)_\mu}{k^2 - 2k \cdot p} + \frac{(2q + k)_\mu}{k^2 + 2k \cdot q} \right]^2 \quad (4.31)$$

El término correctivo tiene como solución⁵

$$\begin{aligned} \mathcal{B} = & -\frac{1}{4\pi} [B_0(m_\phi^2, m^2, m^2) - B_0(0, m^2, m^2) \\ & + 4wC_0(m^2, m^2, m_\phi^2, m^2, 0, m^2) \\ & + 4m^2 C_0(0, m^2, m^2, m^2, m^2, 0)] \end{aligned} \quad (4.32)$$

Por otro lado, debemos encontrar el factor de corrección de los fotones reales $\tilde{\mathcal{B}}$, los cuales identificamos con los diagramas (a) y (b) de la figura 3.3. Utilizando la ecuación (4.26), debemos resolver

$$\tilde{\mathcal{B}} = -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^{K_m} \frac{d^3 k}{(k^2 + \lambda^2)^{1/2}} \left[\frac{p_\mu}{k \cdot p} - \frac{q_\mu}{k \cdot q} \right]^2 \quad (4.33)$$

⁵Hay que recordar que el factor w es el mismo declarado en la sección 3.2, proveniente del producto escalar de los momentos de los kaones cargados.

Esta ecuación tiene una estructura similar a la integral generada en (3.37). Con esto en mente podemos ver que el resultado de esta integral es

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{B}} = -\frac{1}{4\pi} \left\{ \left[\frac{2\beta^2}{1-\beta^2} \right] \left[\ln \left(\frac{4K_m^2}{\lambda^2} \right) - \frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right) \right] \right. \\ \left. - \ln \left(\frac{K_m^2}{\lambda^2} \right) \ln \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right) + 2[\text{Li}_2(\beta) - \text{Li}_2(-\beta)] \right\} \end{aligned} \quad (4.34)$$

Y finalmente, el resultado del ancho de decaimiento se expresa como⁶

$$\Gamma = [1 + 2\alpha(\mathcal{B} + \tilde{\mathcal{B}})]\Gamma_0 \quad (4.35)$$

Tomando en cuenta que Γ_0 es el ancho de decaimiento a nivel árbol, calculado en la sección 3.1.

4.4 CÁLCULO DE APROXIMACIÓN DE LAS CORRECCIONES RADIATIVAS

Luego de haber obtenido los factores de correccion para los fotones virtuales y reales de los diagramas externos, podemos pasar ahora a calcular numericamente el valor del ancho de decaimiento corregido.

El programa realizado para el cálculo numérico de la corrección por medio del método de Convection Term se encuentra en el apéndice C.

Al igual que en la sección 3.4, debemos tomar en cuenta los parámetros necesarios para evaluar las funciones de Passarino-Veltman en LoopTools. De igual forma los factores de corrección no se ven afectados por los valores seleccionados de Δ_{UV} y λ . Además, seleccionamos para el regulador de masa de la partícula, la misma que en la sección 3.2, teniendo entonces como parámetros

$$\lambda = 1\text{MeV} \quad (4.36)$$

$$\Delta_{UV} = 0\text{MeV} \quad (4.37)$$

⁶Siendo este resultado un análogo a la ecuación (4.30), de la corrección a la sección eficaz.

ω_0 (MeV)	Γ_ϕ (MeV)	Error (%)
5	2.121	2.9
10	2.122	2.7
15	2.123	2.6
20	2.123	2.6
25	2.123	2.5
30	2.124	2.4
32	2.124	2.4

TABLA 4.1: Ancho de decaimiento obtenido mediante el metodo de Convection Term.

$$\mu = 1\text{MeV} \quad (4.38)$$

Ademas de tomar en cuenta que, al igual que en el cálculo total, las masas de cada una de las partículas se tomarán como $m_\phi = 1019$ MeV, $m = 494$ MeV.

En la tabla 4.1 se muestran los valores obtenidos para el ancho de decaimiento calculados con el método de Convection Term, mostrando en la tercera columna el margen de error con respecto al método total.

En este resultado, podemos ver que el margen de error obtenido para cada uno de los anchos de decaimiento calculados tiene valor $\sim 2 - 3\%$, lo que sugiere una muy buena aproximación al ancho de decaimiento para correcciones al segundo orden de la teoría de perturbaciones.

CAPÍTULO 5

DISCUSION Y CONCLUSIÓN

La principal conclusión de este trabajo es que el método del término de convección propuesto por Yennie–Frautschi–Suura constituye una aproximación confiable para el cálculo de correcciones radiativas en procesos descritos por teorías no renormalizables. La comparación realizada con el cálculo completo del ancho de decaimiento muestra que ambos métodos presentan una concordancia notable, reproduciendo los mismos resultados físicos con discrepancias del orden de $\sim 2\text{--}3\%$ en el régimen de interés.

Uno de los resultados más relevantes de este estudio es que dicha concordancia se mantiene incluso al variar el umbral de detección de fotones reales, lo que demuestra que el acuerdo entre ambos métodos no corresponde a una coincidencia particular asociada a un conjunto específico de parámetros. Por el contrario, la estabilidad observada indica que el método del término de convección captura adecuadamente las contribuciones radiativas dominantes del proceso utilizando únicamente información proveniente de las líneas externas de los diagramas de Feynman. La evidencia más clara de esta concordancia puede observarse en la figura 5.1, donde se comparan los anchos de decaimiento obtenidos mediante ambos métodos al variar la masa del mesón ϕ en el intervalo $\phi \in [1019, 3000] \text{ MeV}$. Se observa que para masas cercanas al valor físico del $\phi(1020)$ las diferencias entre ambos cálculos son prácticamente despreciables. Aunque la discrepancia aumenta gradualmente a energías mayores,

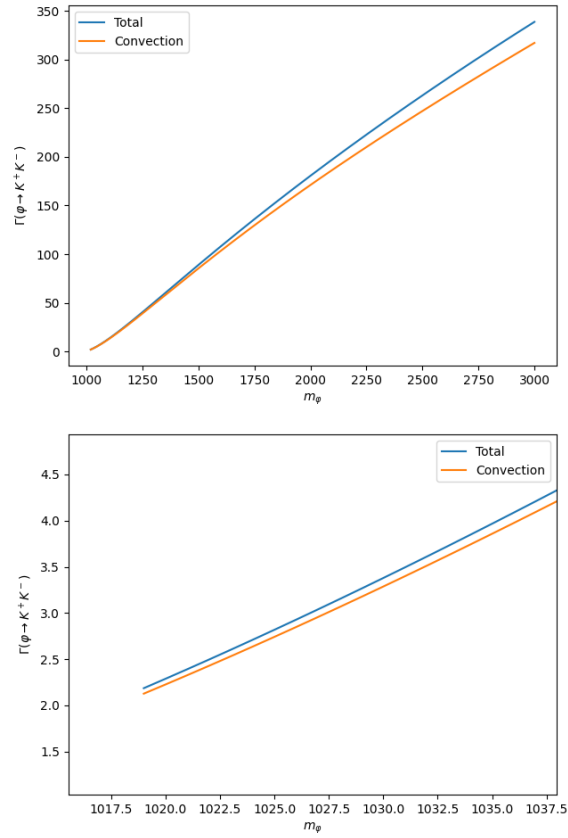


FIGURA 5.1: Comparación de los resultados obtenidos mediante el método completo y el método del término de convección al variar la masa del mesón ϕ .

alcanzando un error relativo máximo de aproximadamente 6.3% y un error RMS cercano al 5.1 %, la concordancia general continúa siendo satisfactoria.

Este comportamiento sugiere que el método conserva su capacidad predictiva en un amplio rango de energías, aunque también pone de manifiesto posibles limitaciones asociadas a efectos no considerados en este trabajo, tales como las contribuciones de *hard-bremsstrahlung* o la pérdida de validez del régimen efectivo de la teoría a energías elevadas.

En consecuencia, puede concluirse que el método del término de convección proporciona una alternativa computacionalmente eficiente al cálculo completo de correcciones radiativas. Su carácter independiente del modelo, junto con la precisión observada en los resultados obtenidos, lo convierten en una herramienta particularmente útil para el estudio de procesos en los que la complejidad del cálculo perturbativo completo dificulta la obtención de resultados analíticos o numéricos.

Finalmente, este trabajo proporciona evidencia cuantitativa que respalda la validez práctica de la aproximación propuesta por Yennie–Frautschi–Suura. Como continuación natural de esta investigación, resulta de interés incorporar contribuciones de fotones duros en ambos esquemas de cálculo y extender el análisis a otros procesos hadrónicos, tanto renormalizables como no renormalizables, con el fin de determinar con mayor precisión el alcance y las limitaciones del método.

APÉNDICE A

FUNCIONES ESPECIALES

A.1 FUNCIONES DE PASSARINO-VELTMAN

Las funciones de Passarino–Veltman constituyen un método sistemático para la reducción de integrales tensoriales de n puntos a un conjunto de integrales escalares base [20].

El procedimiento de reducción se fundamenta en el hecho de que un diagrama de un loop G admite una representación tipo Baikov, lo cual permite expresar los productos escalares que involucran el momento de loop y los momentos externos como combinaciones lineales de los propagadores inversos, junto con un término independiente del momento de loop. En consecuencia, no es necesario considerar diagramas extendidos $\tilde{G}$ de mayor complejidad para llevar a cabo la reducción.

La notación estándar de las funciones de Passarino–Veltman para integrales escalares de uno, dos y tres puntos está dada por:

$$A_0(m) = e^{\varepsilon\gamma_E} \mu^{2\varepsilon} \int \frac{d^D k}{i\pi^{D/2}} \frac{1}{-k^2 + m^2} \quad (\text{A.1})$$

$$B_0(p, m_1, m_2) = e^{\varepsilon\gamma_E} \mu^{2\varepsilon} \int \frac{d^D k}{i\pi^{D/2}} \frac{1}{(-k^2 + m_1^2) [-(k-p)^2 + m_2^2]} \quad (\text{A.2})$$

$$C_0(p_1, p_2, m_1, m_2, m_3) = e^{\varepsilon\gamma_E} \mu^{2\varepsilon} \int \frac{d^D k}{i\pi^{D/2}} \frac{1}{(-k^2 + m_1^2) [-(k - p_1)^2 + m_2^2] [-(k - p_1 - p_2)^2 + m_3^2]} \quad (\text{A.3})$$

Estas funciones corresponden, respectivamente, a integrales escalares con uno, dos y tres propagadores internos.

A.2 POLILOGARITMOS

A.2.1 DEFINICIÓN

La función polilogaritmo de orden dos (dilogaritmo) se define como

$$\text{Li}_2(x) = - \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt, \quad (\text{A.4})$$

la cual presenta un corte de rama en el eje real positivo para $x \geq 1$ [21, 22].

Para $|x| \leq 1$, admite la siguiente representación en serie de potencias:

$$\text{Li}_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}. \quad (\text{A.5})$$

Para su evaluación numérica, es conveniente mapear el argumento x a una región del plano complejo donde la serie anterior converge rápidamente. Esto puede lograrse mediante identidades funcionales. En particular, la identidad de inversión está dada por

$$\text{Li}_2(x) = -\text{Li}_2\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2} [\ln(-x)]^2, \quad (\text{A.6})$$

válida siempre que se tenga una prescripción consistente para el cálculo del logaritmo complejo $\ln(-x)$.

Por otro lado, es posible evitar el uso explícito de $\ln(-x)$ empleando la identidad de reflexión

$$\text{Li}_2(x) = -\text{Li}_2(1-x) + \frac{\pi^2}{6} - \ln(x) \ln(1-x), \quad (\text{A.7})$$

la cual resulta particularmente útil para mapear el argumento a la región $0 \leq \operatorname{Re}(x) \leq 1/2$, donde la convergencia de la serie es más eficiente.

A.2.2 PROGRAMA MÓDULO

A continuación mostraremos el módulo escrito en Fortran para el cálculo de polilogaritmos el cuál utilizamos en los programas desarrollados para el cálculo numérico en el apéndice C.

Listing A.1: Módulo para el cálculo de polilogaritmos.

```

1 module polylog_module
2 implicit none
3 contains
4
5 recursive function Li2(x) result(res)
6   implicit none
7   real(8), intent(in) :: x
8   real(8) :: res, y, pi2
9   real(8) :: term
10  integer :: k
11
12  pi2 = 1.6449340668482264365d0  ! pi^2/6
13
14  if (x == 1.d0) then
15    res = pi2
16    return
17  endif
18
19  if (x == 0.d0) then
20    res = 0.d0
21    return
22  endif
23
24  if (abs(x) <= 0.5d0) then

```

```
25     res = 0.d0
26     do k = 1, 10000
27         term = x**k / dble(k*k)
28         res = res + term
29         if (abs(term) < 1.d-15) exit
30     end do
31     return
32 endif
33
34 if (x < 1.d0) then
35     y = 1.d0 - x
36     res = pi2 - log(x)*log(y) - Li2(y)
37     return
38 endif
39
40 if (x > 1.d0) then
41     y = 1.d0/x
42     res = pi2 - 0.5d0*log(x)**2 - Li2(y)
43     return
44 endif
45
46 end function Li2
47
48 end module polylog_module
```

APÉNDICE B

COMANDOS UTILIZADOS EN FEYNCalc

En este apéndice se muestran los comandos de Jupyter Notebook utilizados para encontrar las aportaciones a las amplitudes de dispersión en términos de Passarino-Veltman de las secciones 3.2 y 4.3.

Los comandos que se muestran a continuación son de uso global en los books «Decaimiento phi 1020.ipynb» y «Decaimiento phi 1020 convection term.ipynb».

Listing B.1: Comandos globales de los books en Jupyter

```
1 << FeynCalc'; #inicializacion de Feyncalc
2
3 # Declaracion de indices tensoriales
4 mu=\[Mu]
5 nu=\[Nu]
6 a=\[Alpha]
7 b=\[Beta]
8 n=\[Eta]
9
10 # Identidades de productos escalares
11 SPD[p,p]=x
12 SPD[p,q]=w
13 SPD[q,q]=y
```

A continuación se muestran los comandos utilizados para el book «Decaimiento phi 1020.ipynb».

Listing B.2: Comandos para el book del calculo total.

```

1  ## Declaracion de los propagadores de particula escalar y de foton
2  SF[p_]:=I FAD[{p,m}]
3  DF[mu_,nu_,k_]:=-FAD[k] I MTD[mu,nu]
4  SF[p]
5  DF[a,b,k]
6
7  ## La funcion de autoenergia de la particula escalar esta dada por
8  ($p$ momento de la particula escalar y $k$ momento del foton)
9  M=e*(2*FVD[p,mu]-FVD[k,mu])*e*(2*FVD[p,nu]-FVD[k,nu])*DF[mu,nu,k]*
10 SF[p-k]
11
12 ## Integracion del loop de $M$ con respecto de $k$
13 resultInt1=TID[M,k,ToPaVe -> True, Prefactor -> 1/(2Pi)^D];
14 Sigma=FCReplaceD[resultInt1, D -> 4]
15 Print["The result is given in terms of Passarino-Veltman"]
16
17 ## Derivada de $\Sigma$ con respecto de $p^2=x$
18 der=D[Sigma,x]
19
20 ## La derivada de la amplitud de dispersion evaluada en $p^2=m^2$
21 es
22 der/.x->m^2
23
24 ## Ahora, la correccion de vertice (interaccion de Coulomb), tiene
25 la forma:
26 ## Aqui $MV$ es la aportacion del vertice en la matriz de dispersion
27 , $p$ es el momento de las particulas, al ser la misma particula
28 pero con cargas contrarias, se usa la misma variable
29 MV=I*g*(FVD[p,a]-FVD[q,a]+2*FVD[k,a])*FVD[n,a]*(SF[p+k])*(-I*e*(2*
30 FVD[p,mu]+FVD[k,mu])*(DF[mu,nu,k])*I*e*(2*FVD[q,nu]-FVD[k,nu])*
31 SF[q-k])
32

```

```

25 ## Integrando $MV$ con respecto de k
26 resultInt2=TID[MV,k,ToPaVe -> True, Prefactor -> 1/(2Pi)^D];
27 SigmaV=FCReplaceD[resultInt2, D -> 4]
28 Print["The result is given in terms of Passarino-Veltman"]
29
30 ## Evaluando este resultado en $p^2=m^2$
31 SVx=SigmaV/.x->m^2
32
33 SVy=SVx/.y->m^2
34
35 ## El resultado ya simplificado es
36 SVy //Simplify
37
38 ## La correccion para el vertice de 4 legs, tiene la forma
39 M2=(-I*2*e*g*MTD[a,b]*FVD[n,b])*SF[p-k]*DF[a,mu,k]*(-I*e*(2*FVD[p,
    mu]-FVD[k,mu]))
40
41 resultInt3=TID[M2,k,ToPaVe -> True, Prefactor -> 1/(2Pi)^D];
42 Sigma3=FCReplaceD[resultInt3, D -> 4]
43 Print["The result is given in terms of Passarino-Veltman"]
44
45 S2=Sigma3/.x->m^2

```

Listing B.3: Comandos para el book del método de convection term.

```

1 ## Declaracion de los propagadores
2 prop1 = FAD[{k, 0}];
3 prop2 = FAD[{p - k, m}];
4 prop3 = FAD[{q + k, m}];
5 prop4 = FAD[{q - k, m}];
6
7 ## Declaracion de los terminos de la suma de pares
8
9 T1 = (I/(8*Pi^3))*((2*FVD[p,mu]-FVD[k,mu])*(2*FVD[p,mu]-FVD[k,mu]))
    *prop2*prop2*prop1
10
11 T2 = (I/(8*Pi^3))*((2*FVD[q,mu]-FVD[k,mu])*(2*FVD[q,mu]-FVD[k,mu]))

```

```

12      *prop4*prop4*prop1
13 T3 = (2*I/(8*Pi^3))*((2*FVD[p,mu]-FVD[k,mu])*(2*FVD[q,mu]+FVD[k,mu
14      ]))*prop2*prop3*prop1
15 ## Sumando los terminos T1, T2 y T3 para formar el integrando
16
17 T = T1 + T2 + T3
18
19 ## Integrando T con respecto de $k$ en 4-dimensiones
20 res = TID[T, k];
21 resPV = ToPaVe[res, k]
22 Print["The result is given in terms of Passarino-Veltman"]
23
24 ## Evaluacion de las identidades de productos escalares
25
26 resPVx = resPV/.x->m^2
27
28 resPVy = resPVx/.y->m^2
29
30 resPV2w = resPVy/.w->((1/2)*(mf^2 - 2*m^2))

```

APÉNDICE C

IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA

En este apéndice se presentan los programas desarrollados en Fortran para la evaluación numérica de las expresiones obtenidas en las secciones 3.2, 4.4 y los programas de Fortran y Python para el análisis final mostrado en el capítulo 5.

Listing C.1: Cálculo numérico por el metodo total.

```
1 program correccion_scalar
2     use polylog_module
3     implicit none
4
5     ! Constantes fisicas
6     double precision :: pi, alpha, e
7     real(8) :: B
8     double precision :: m, m2, w, mf, w0
9
10    ! Resultados intermedios
11    double precision :: lambda_val, old_lambda, delta_val,
12        old_delta, mu_val, old_mu
13    double precision :: B0M, B0V, DB0M, COM, A0M
14    double precision :: dM, MV, MA, MT, dG, MB, f, dGC, MS
15
16    ! --- Funciones externas de LoopTools ---
17    double precision B0, B1, DB0, DB1, C0, A0
18    external B0, B1, DB0, DB1, C0, A0
```

```
18      external ltini
19
20      ! --- Subrutina SetLambda ---
21      double precision SetLambda
22      external SetLambda
23
24      ! --- Subrutina SetDelta ---
25      double precision SetDelta
26      external SetDelta
27
28      ! --- Subrutina SetMudim
29      double precision SetMudim
30      external SetMudim
31
32      ! --- Inicializacion de constantes ---
33      pi = 3.141592653589793d0
34      alpha = 1d0/137.035999d0
35      e = dsqrt(4d0*pi*alpha)
36
37      ! --- Entradas de masa (MeV) ---
38      print *, "Ingrese la masa de la particula escalar
          dispersada (MeV):"
39      read *, m
40      print *, "Ingrese la masa de la particula que decae (MeV):
          "
41      read *, mf
42      m2 = m**2
43      w = (1d0/2d0)*(mf**2 - 2d0*m2)
44      B = dsqrt(1-4d0*m2/(mf**2))
45
46      ! --- Lectura del valor de parametros ---
47      print *, "Introduzca el valor de Lambda:"
48      read *, lambda_val
49      print *, "Introduzca el valor de Delta"
50      read *, delta_val
51      print *, "Introduzca el valor de Mu"
```

```

52      read *, mu_val
53      print *, "Introduzca el umbral de deteccion de fotones"
54      read *, w0
55
56      ! --- Inicializar LoopTools ---
57      call ltini()
58
59      ! --- Cambio del valor de parametros ---
60      old_lambda = SetLambda(lambda_val)
61      old_delta = SetDelta(delta_val)
62      old_mu = SetMudim(mu_val)
63
64      ! --- Funciones de Passarino Veltman evaluadas en m^2 y mf
65      ^2 ---
66
67      AOM = A0(m2)
68      BOM = B0(m2, 0d0, m2)
69      BOV = B0(mf**2, m2, m2)
70      DBOM = DB0(m2, 0d0, m2)
71      COM = C0(m2, m2, mf**2, m2, 0d0, m2)
72
73      ! --- Ecuaciones de FeynCalc ---
74
75      dM = (e**2/(16d0*pi**2))*(BOM + 2d0*m2*DBOM)
76
77      MV = -(e**2/(16d0*pi**2))*(AOM/m2 - (4d0*w/(m2-w))*BOV + 4
78          d0*w*COM - (2d0*(m2-3d0*w)/(m2-w))*BOM)
79
80      MA = (e**2/(16d0*pi**2d0))*(AOM/m2 - 4d0*BOM)
81
82      MS = (e**2/(2d0*pi)**2)*((2d0*B**2/(1d0-B**2))*(log(4*w0
83          **2/lambda_val**2)-(1/B)*log((1+B)/(1-B)))-&
84          log(w0**2/lambda_val**2)*log((1+B)/(1-B))+2d0*(Li2(
85              B)-Li2(-B)))
86
87      f = MA + MV + 2d0*dM

```

```

84
85      MT = 1d0 + 2d0*f + MS
86
87      dG = ((4.6d0**2d0)/(48d0*pi))*mf*((1d0 - (4d0*m2)/mf**2)
88          *(3d0/2d0))
89
90      dGC = dG*MT
91
92      print *, "--- Resultados ---"
93      print *, "El ancho de decaimiento a tree level es:", dG
94      print *, "El ancho de decaimiento a NLO es:", dGC
95
96  end program correccion_scalar

```

Listing C.2: Cálculo numérico por el método de convection term.

```

1  program convection_term
2      use polylog_module
3      implicit none
4
5      ! Constantes fisicas
6      double precision :: pi, alpha, e
7      real(8) :: B
8      double precision :: m, m2, w, mf, w0
9
10     ! Resultados intermedios
11     double precision :: lambda_val, old_lambda, delta_val,
12         old_delta, mu_val, old_mu
13     double precision :: BOM, BOV, COM, COB
14     double precision :: MV, MT, dG, dGC, MS
15
16     ! --- Funciones externas de LoopTools ---
17     double precision B0, C0
18     external B0, C0
19     external ltini
20
21     ! --- Subrutina SetLambda ---

```

```
21      double precision SetLambda
22      external SetLambda
23
24      ! --- Subrutina SetDelta ---
25      double precision SetDelta
26      external SetDelta
27
28      ! --- Subrutina SetMudim
29      double precision SetMudim
30      external SetMudim
31
32      ! --- Inicializacion de constantes ---
33      pi = 3.141592653589793d0
34      alpha = 1d0/137.035999d0
35      e = dsqrt(4d0*pi*alpha)
36
37      ! --- Entradas de masa (MeV) ---
38      print *, "Ingrese la masa de la particula escalar
39              dispersada (MeV):"
40      read *, m
41      print *, "Ingrese la masa de la particula que decae (MeV):
42              "
43      read *, mf
44      m2 = m**2
45      w = (1d0/2d0)*(mf**2 - 2d0*m2)
46      B = dsqrt(1-4d0*m2/(mf**2))
47
48      ! --- Lectura del valor de parametros ---
49      print *, "Introduzca el valor de Lambda:"
50      read *, lambda_val
51      print *, "Introduzca el valor de Delta"
52      read *, delta_val
53      print *, "Introduzca el valor de Mu"
54      read *, mu_val
55      print *, "Introduzca el umbral de deteccion de fotones"
56      read *, w0
```

```

55
56     ! --- Inicializar LoopTools ---
57     call ltini()
58
59     ! --- Cambio del valor de parametros ---
60     old_lambda = SetLambda(lambda_val)
61     old_delta = SetDelta(delta_val)
62     old_mu = SetMudim(mu_val)
63
64     ! --- Funciones de Passarino Veltman evaluadas en m^2 y mf
        ^2 ---
65
66     BOM = B0(m2, 0d0, m2)
67     BOV = B0(mf**2, m2, m2)
68     COM = C0(m2, m2, mf**2, m2, 0d0, m2)
69     COB = C0(0d0, m2, m2, m2, m2, 0d0)
70
71     ! --- Ecuaciones de FeynCalc ---
72
73     MV = -(1/(4d0*pi))*(BOV - BOM + 4d0*w*COM + 4d0*m2*COB)
74
75     MS = -(1/(2d0*pi))*((2d0*B**2/(1d0-B**2))*(log(4*w0**2/
        lambda_val)-(1/B)*log((1+B)/(1-B)))-&
76         log(w0**2/lambda_val)*log((1+B)/(1-B))+2d0*(Li2(B)-
        Li2(-B)))
77
78     MT = 1d0 + (2d0*alpha)*(MV + MS)
79
80     dG = ((4.6d0**2d0)/(48d0*pi))*(mf**2d0)*((1d0 - (4d0*m2)/mf
        **2)**(3d0/2d0))
81
82     dGC = dG*MT
83
84     print *, "--- Resultados ---"
85     print *, "El ancho de decaimiento es a tree level es:", dG
86     print *, "El ancho de decaimiento al NLO es:", dGC

```

```

87
88 end program convection_term

```

Listing C.3: Cálculo comparativo: Convection term vs Total.

```

1 program compare_methods
2   use polylog_module
3   implicit none
4
5   ! Constantes fisicas
6   double precision :: pi, alpha, e
7   double precision :: m, m2, w, mf, w0
8   real(8) :: B
9
10  ! Resultados intermedios
11  double precision :: lambda_val, old_lambda
12  double precision :: delta_val, old_delta
13  double precision :: mu_val, old_mu
14
15  double precision :: BOM, BOV, DBOM, COM, COB, AOM
16  double precision :: dM, MVa, MA, f, MTa
17  double precision :: MVb, MTb, MS
18  double precision :: dGa, dGCa, dGCb
19
20  integer :: N
21  integer :: unit_total, unit_conv
22
23  ! --- Variables para el calculo de error ---
24
25  double precision :: R, eps
26  double precision :: sum_R2, sum_eps2
27  double precision :: L2_norm, RMS_rel, max_rel
28
29  ! --- Funciones externas de LoopTools ---
30  double precision B0, B1, DB0, DB1, C0, A0
31  external B0, B1, DB0, DB1, C0, A0
32  external ltini

```

```
33
34     double precision SetLambda
35     external SetLambda
36
37     double precision SetDelta
38     external SetDelta
39
40     double precision SetMudim
41     external SetMudim
42
43     ! --- Inicializacion de constantes ---
44     pi = 3.141592653589793d0
45     alpha = 1d0/137.035999d0
46     e = dsqrt(4d0*pi*alpha)
47
48     ! --- Entradas de masa (MeV) ---
49     m = 494d0
50     print *, "La masa de los kaones se mantiene fija K^{+/-}=", m,
51           "MeV"
52     mf = 1019d0
53     print *, "La masa del phi variara de 1 en 1 MeV, iniciando en:"
54           , mf, "MeV"
55     m2 = m**2
56     w0 = 5d0
57     print *, "El umbral de deteccion de fotones suaves fijara en:",
58           w0, "MeV"
59
60     ! --- Lectura de parametros ---
61     print *, "Introduzca el valor de Lambda:"
62     read *, lambda_val
63     print *, "Introduzca el valor de Delta"
64     read *, delta_val
65     print *, "Introduzca el valor de Mu"
66     read *, mu_val
67
68     call ltini()
```

```

66
67     old_lambda = SetLambda(lambda_val)
68     old_delta  = SetDelta(delta_val)
69     old_mu     = SetMudim(mu_val)
70
71     ! --- Abrir archivos CSV ---
72     unit_total = 10
73     unit_conv  = 20
74
75     open(unit=unit_total, file="total_method.csv", status="replace"
76           , action="write")
77
78     open(unit=unit_conv, file="convection_method.csv", status="
79           replace", action="write")
80
81
82     write(unit_total, '(A)') "mf,dGC_total"
83     write(unit_conv, '(A)') "mf,dGC_convection"
84
85
86     sum_R2 = 0d0
87     sum_eps2 = 0d0
88     max_rel = 0d0
89     N = 0
90
91     do while(mf <= 3000d0)
92
93         w = (1d0/2d0)*(mf**2 - 2d0*m2)
94         B = dsqrt(1-4d0*m2/(mf**2))
95
96         ! --- Funciones Passarino-Veltman ---
97         A0M = A0(m2)
98         B0M = B0(m2, 0d0, m2)
99         B0V = B0(mf**2, m2, m2)
100        DB0M = DB0(m2, 0d0, m2)
101        C0M = C0(m2, m2, mf**2, m2, 0d0, m2)
102        C0B = C0(0d0, m2, m2, m2, m2, 0d0)
103
104        ! --- Factor de correccion soft-bremsstrahlung ---

```

```

100
101     MS = ((2d0*B**2/(1d0-B**2))*(log(4*w0**2/lambda_val)-(1/B)*
102           log((1+B)/(1-B)))-&
103           log(w0**2/lambda_val)*log((1+B)/(1-B))+2d0*(Li2(B)-
104           Li2(-B)))
105
106     ! =====
107     ! METODO TOTAL
108     ! =====
109
110     dM = (e**2/(16d0*pi**2))*(B0M + 2d0*m2*DB0M)
111
112     MVa = -(e**2/(16d0*pi**2))*(A0M/m2 - (4d0*w/(m2-w))*B0V + 4
113           d0*w*C0M - (2d0*(m2-3d0*w)/(m2-w))*B0M)
114
115     MA = (e**2/(16d0*pi**2))*(A0M/m2 - 4d0*B0M)
116
117     f = MA + MVa + 2d0*dM
118     MTa = 1d0 + 2d0*f + (alpha/pi)*MS
119
120     dGa = ((4.6d0**2d0)/(48d0*pi))*mf*((1d0 - (4d0*m2)/mf**2)
121           *(3d0/2d0))
122     dGCa = dGa * MTa
123
124     ! =====
125     ! CONVECTION TERM
126     ! =====
127
128     MVb = -(1/(4d0*pi))*(B0V - B0M + 4d0*w*C0M + 4d0*m2*C0B)
129     MTb = 1d0 + 2d0*alpha*MVb - (alpha/pi)*MS
130     dGCb = dGa * MTb
131
132     ! --- Guardar tuplas (mf, dGC) ---
133     write(unit_total, '(ES18.10,"",ES18.10)') mf, dGCa
134     write(unit_conv, '(ES18.10,"",ES18.10)') mf, dGCb

```

```
132      ! --- Residuo absoluto ---
133      R = dGCa - dGCb
134
135      ! --- Error relativo ---
136      if (dGCa /= 0d0) then
137          eps = R / dGCa
138      else
139          eps = 0d0
140      end if
141
142      ! --- Acumuladores ---
143      sum_R2 = sum_R2 + R**2
144      sum_eps2 = sum_eps2 + eps**2
145
146      if (abs(eps) > max_rel) then
147          max_rel = abs(eps)
148      end if
149
150      N = N + 1
151      mf = mf + 1d0
152
153  end do
154
155  close(unit_total)
156  close(unit_conv)
157
158  L2_norm = dsqrt(sum_R2 / dble(N))
159  RMS_rel = dsqrt(sum_eps2 / dble(N))
160
161  print *, "===== "
162  print *, "Resultados del analisis:"
163  print *, "Norma L2 absoluta      =", L2_norm
164  print *, "RMS error relativo      =", RMS_rel
165  print *, "Error relativo maximo =", max_rel
166  print *, "===== "
```

```
168  
169 end program compare_methods
```

Listing C.4: Cálculo numérico en Python (VS Code)

```
1 import pandas as pd  
2 import matplotlib.pyplot as plt  
3  
4 def main():  
5     total = pd.read_csv("//wsl.localhost/Ubuntu/home/angel/  
6         total_method.csv")  
7     conv = pd.read_csv("//wsl.localhost/Ubuntu/home/angel/  
8         convection_method.csv")  
9  
10     plt.plot(total["mf"], total["dGC_total"], label="Total")  
11     plt.plot(conv["mf"], conv["dGC_convection"], label="Convection"  
12         )  
13  
14     # Etiquetas  
15     plt.xlabel(r"$m_{\varphi}$")  
16     plt.ylabel(r"$\Gamma(\varphi \rightarrow K^+ K^-)$")  
17  
18     plt.legend()  
19     plt.tight_layout()  
20     plt.show()  
  
if __name__ == "__main__":  
    main()
```

BIBLIOGRAFÍA

- [1] D. R. Yennie, S. C. Frautschi, and H. Suura, “The infrared divergence phenomena and high-energy processes,” *Annals of Physics*, vol. 13, no. 3, pp. 379–452, 1961.
- [2] N. Meister and D. R. Yennie, “Radiative corrections to high-energy scattering processes,” *Physical Review*, vol. 130, no. 3, pp. 1210–1229, 1963.
- [3] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Curso de Física Teórica. Volumen 4: Teoría Cuántica Relativista, Parte 1*. Barcelona: Editorial Reverté, 2013. Reimpresión digital.
- [4] M. Srednicki, *Quantum Field Theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.
- [5] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, Volume I: Foundations*. Cambridge University Press, 1995.
- [6] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*. Oxford University Press, 4 ed., 2002.
- [7] R. P. Feynman and A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*. New York: McGraw-Hill, 1965.
- [8] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Curso de Física Teórica. Volumen 3: Mecánica Cuántica No-Relativista*. Barcelona: Editorial Reverté, 2013. Reimpresión digital.

-
- [9] B. Fauser, “On the hopf algebraic origin of wick normal ordering,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 34, pp. 105–115, 2001.
- [10] S. Weinzierl, *Feynman Integrals*. Springer, 2022.
- [11] F. Bloch and A. Nordsieck, “Note on the radiation field of the electron,” *Physical Review*, vol. 52, no. 2, pp. 54–59, 1937.
- [12] F. E. Low, “Bremsstrahlung of very low-energy quanta in elementary particle collisions,” *Physical Review*, vol. 110, no. 4, pp. 974–977, 1958.
- [13] T. H. Burnett and N. M. Kroll, “Extension of the low soft photon theorem,” *Physical Review Letters*, vol. 20, no. 2, pp. 86–89, 1968.
- [14] P. D. Group, “Review of particle physics,” *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, vol. 2025, no. 8, p. 083C01, 2025.
- [15] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Curso de Física Teórica. Volumen 4: Teoría Cuántica Relativista, Parte 2*. Barcelona: Editorial Reverté, 2013. Reimpresión digital.
- [16] F. Mandl and G. Shaw, *Quantum Field Theory*. Chichester: John Wiley & Sons, 2 ed., 2010.
- [17] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1995.
- [18] M. D. Schwartz, *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2014.
- [19] H. Lehmann, K. Symanzik, and W. Zimmermann, “Zur formulierung quantisierter feldtheorien,” *Il Nuovo Cimento*, vol. 1, pp. 205–225, 1955.
- [20] G. Passarino and M. Veltman, “One-loop corrections for e^+e^- annihilation into $\mu^+\mu^-$ in the weinberg model,” *Nuclear Physics B*, vol. 160, pp. 151–207, 1979.
- [21] L. Lewin, *Polylogarithms and Associated Functions*. North-Holland, 1981.

-
- [22] L. Lewin, *Structural Properties of Polylogarithms*. American Mathematical Society, 1991.