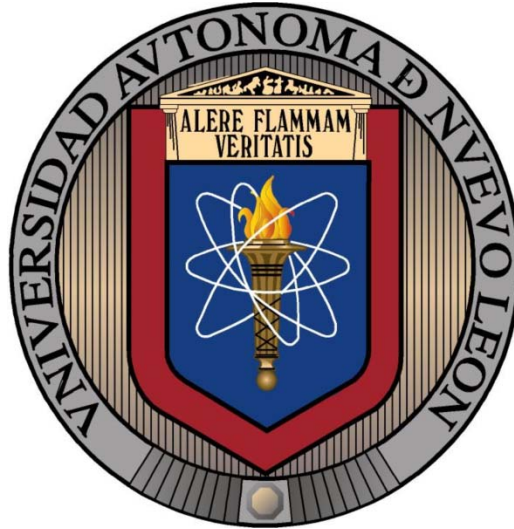


UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON.

FACULTAD DE CIENCIAS FISICO MATEMATICAS.

DIVISION DE ESTUDIOS DE POST-GRADO.



**DISEÑO DE ALGORITMOS ÓPTIMOS DE FILTRADO Y
CONTROL EN MODOS DESLIZANTES.**

TESIS

GRADO DE DOCTOR EN INGENIERIA FISICA INDUSTRIAL.

PRESENTA

PABLO CESAR RODRIGUEZ RAMIREZ

SAN NICOLAS DE LOS GARZA, NUEVO LEON.

DICIEMBRE DEL 2012

Diseño de Algoritmos Óptimos de Filtrado y Control en Modos Deslizantes

Pablo Cesar Rodríguez Ramírez
Universidad Autónoma de Nuevo León
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
División de Estudios de Post-Grado

26 de noviembre de 2012

DEDICATORIA

Para mi hermano Ivan.

Todos compartimos el mundo por un breve momento, para mi fue un honor compartirlo contigo.

AGRADECIMIENTOS

Para mi esposa, Victoria Celeste Rodríguez Carreón por darme la confianza para seguir adelante, por estar conmigo siempre y nunca dejar que me de por vencido, gracias esposa te amo; para mi hija, Paola Celeste Rodríguez Rodríguez por ser mi inspiración y por esos momento inigualables que me a brindado desde su nacimiento y para mis padres por su apoyo incondicional y guía a lo largo de mi vida. Al Dr. Mikhail Valentinovich Basin, por su apoyo y tiempo para mis estudios e investigación del doctorado. Al Dr. Manuel Alejandro Jiménez Lizárraga, por sus consejos durante mi preparación académica. A toda mi familia en general, gracias por su apoyo que me dieron durante toda mi vida. Al Conacyt, por el financiamiento económico brindado.

RESUMEN

En esta tesis se presentan los siguientes resultados:

Se consideraron sistemas lineales y polinomiales estocásticos, sobre procesos de observación lineales, ambos afectados por ruidos blancos Gaussianos, la matriz de observación es arbitraria y no necesariamente es invertible. Para estos sistemas se desarrollaron: un filtro por modos deslizantes para sistemas lineales, el filtro por modos deslizantes para sistemas polinomiales y el filtro del estado y estimación de parámetros para sistemas lineales cada uno de estos filtros se diseño sobre procesos de observación lineales y además para dos distintas normas en promedio cuadrático y en promedio modulo. También se diseñaron reguladores por modos deslizantes, el controlador por modos deslizantes para sistemas lineales y el controlador por modos deslizantes para sistemas polinomiales ambos se diseñaron para dos diferentes criterios de Bolza-Meyer, donde 1) los términos de la energía del control y del estado son cuadráticos dentro de la integral y el término no integral es de primer grado o 2) el término de la energía del control es cuadrático y el término de la energía del estado es de primer orden.

ABSTRACT

This thesis presents the following results:

We considered stochastic linear and polynomial systems, over linear observation processes, both affected by Gaussian white noise, the observation matrix is arbitrary and not invertible. For these systems have been developed: a filter for linear system by sliding mode, a filter for polynomial system by sliding mode, the filter state, parameter estimation for linear systems each of these filters are designed over linear observation processes, in addition to two different norms on mean square and mean module. Regulators also designed for sliding mode, the sliding mode controller for linear systems, the sliding mode controller for polynomial systems both have been designed for two different criteria of Bolza-Meyer, where 1) the terms of the energy of control, the state are quadratic within the integral and non-integral term is of first degree or 2) the terms of the energy of control is quadratic and the term of the energy of the state is first order.

ÍNDICE GENERAL

1. Introducción	1
1.1. Motivación.	1
1.2. Antecedentes	2
1.3. Aportaciones	3
1.3.1. Diseño por Modos Deslizantes para Sistemas Lineales con Estados no Medibles	3
1.3.2. Diseño del Controlador por Modos Deslizantes para Sistemas Lineales con Estados no Medibles	4
1.3.3. Diseño de Filtrado por Modos Deslizantes para Sistemas no Lineales Polinomiales con Estados no Medibles	4
1.3.4. Diseño del Controlador por Modos Deslizantes para Sistemas Polinomiales con Estados no Medibles	5
1.3.5. Filtrado del Estado por Modos Deslizantes y Estimación de Parámetros para Sistemas Lineales Estocásticos	6
1.4. Organización de la Tesis	6
2. Marco Teórico	7
2.1. Teoría de Probabilidad y Variables Aleatorias.	7
2.1.1. Axiomas de Probabilidad	7
2.1.2. Variables Aleatorias	8
2.1.3. Probabilidad Condicional y Esperanza Condicional.	9
2.2. Procesos Estocásticos.	9
2.2.1. Ley de Probabilidad de un Proceso Estocástico	10
2.2.2. Convergencia de Secuencias Aleatorias.	11
2.2.3. Calculo en Promedio Cuadrático.	11
2.2.4. Proceso de Wiener.	13
2.2.5. Ruido Blanco.	14
2.3. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas.	14

2.3.1.	Integral Estocástica de Itô	15
2.3.2.	Calculo Estocástico de Itô.	16
2.4.	Teoría de Filtrado.	17
2.4.1.	Filtro de Kalman-Bucy.	18
2.5.	Control Óptimo.	19
2.5.1.	Principio del Máximo de Pontryagin.	19
2.5.2.	Programación Dinámica.	20
2.5.3.	Control Óptimo del Regulador Lineal Cuadrático.	20
2.5.4.	Control Estocástico para Sistemas Lineales con Observación Completa.	21
2.5.5.	Control Estocástico para Sistemas Lineales con Observación Incompleta.	22
2.6.	Modos Deslizantes.	23
2.6.1.	Diseño de la superficie deslizante.	24
2.6.2.	Diseño del Controlador.	24
3.	Diseño de Filtrado por Modos Deslizantes para Sistemas Lineales con Estados no Medibles	27
3.1.	Planteamiento del Problema de Filtrado	27
3.2.	Diseño De Filtro En Modo Deslizante en Promedio Cuadrático	28
3.2.1.	Ejemplo I	29
3.2.2.	Apéndice I	31
3.3.	Diseño del Filtro en Modo Deslizante en Promedio Modulo	32
3.3.1.	Ejemplo II	32
3.3.2.	Apéndice II	33
3.4.	Conclusiones	34
4.	Diseño del Controlador por Modos Deslizantes para Sistemas Lineales con Estados no Medibles	38
4.1.	Problema de Controlador Óptimo	38
4.1.1.	Planteamiento del Problema	38
4.2.	Diseño del Control en Promedio Cuadrático	40
4.2.1.	Principio de Separación I.	40
4.2.2.	Solución del Problema de Control Óptimo. I	41
4.2.3.	Ejemplo I.	42
4.3.	Diseño del Controlador en Promedio Modulo	44
4.3.1.	Principio de Separación II.	44
4.3.2.	Solución del Problema de Control Óptimo II	45

4.3.3. Ejemplo II	46
4.4. Conclusions	48
5. Diseño de Filtrado por Modos Deslizantes para Sistemas no Lineales Polinomiales con Estados no Medibles	57
5.1. Planteamiento de Problema del Filtrado por Modos Deslizantes	57
5.2. Diseño del Filtro por Modos Deslizantes en Promedio Cuadrático.	59
5.2.1. Ejemplo I	61
5.2.2. Apéndice I.	62
5.3. Diseño del Filtro por Modos Deslizantes en Promedio Modulo.	63
5.3.1. Ejemplo II	65
5.3.2. Apéndice II	66
5.4. Conclusión	67
6. Diseño del Controlador por Modos Deslizantes para Sistemas Polinomiales con Estados no Medibles	71
6.1. Problema del Controlador Óptimo	71
6.1.1. Planteamiento del Problema	71
6.2. Diseño del Controlador en Promedio Cuadrático	73
6.2.1. Principio de Separación I.	73
6.2.2. Diseño del Control I.	75
6.2.3. Diseño del Controlador para un Estado Polinomial de Tercer Orden I.	76
6.2.4. Ejemplo. I	77
6.3. Diseño de Control en Promedio Modulo.	79
6.3.1. Principio de Separación. II	79
6.3.2. Diseño del Control II.	81
6.3.3. Diseño del Controlador para un Estado Polinomial de Tercer Orden II.	82
6.3.4. Ejemplo II.	82
6.4. Conclusiones.	85
7. Filtrado del Estado por Modos Deslizantes y Estimación de Parámetros para sistemas lineales estocásticos	94
7.1. Problema de Filtrado para Sistemas Lineales con Parámetros Desconocidos	94
7.2. Reducción del Problema.	95
7.3. Filtro por Modos Deslizantes en Promedio Cuadrático	96
7.3.1. Ejemplo 1	97
7.4. Filtro por Modos Deslizantes en Promedio Modulo	99

7.4.1. Ejemplo 2	100
7.5. Conclusión	102
8. Conclusiones y Trabajo Futuro.	114
8.1. Conclusiones.	114
8.2. Trabajo Futuro.	114
Bibliography	116

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

1.1. Motivación.

Los sistemas físicos están diseñados y construidos para realizar ciertas funciones definidas. Con el fin de determinar si un sistema está funcionando correctamente, y en última instancia para controlar el rendimiento del sistema, el ingeniero debe saber lo que el sistema está haciendo en cualquier instante de tiempo. En otras palabras, el ingeniero debe conocer el estado de su sistema. Los sistemas físicos a menudo están sujetos a perturbaciones aleatorias, de modo que el estado del sistema en si puede ser aleatorio. Con el fin de determinar el estado de un sistema, el ingeniero construye un dispositivo de medición y toma las mediciones u observaciones del sistema. Estas mediciones son generalmente contaminadas con el ruido causado por los componentes electrónicos y mecánicos del dispositivo de medición.

El problema de determinar el estado de un sistema a partir de las mediciones con ruido se conoce como estimación, o filtrado, y es el tema principal de esta tesis. Es de vital importancia en la ingeniería, ya que las estimaciones del estado se requieren en el seguimiento, y para el control de los sistemas. Además, una gran clase de problemas de identificación (de sistemas) puede considerarse como problemas de filtración.

Por otro lado, muchos sistemas físicos naturalmente requieren el uso de términos discontinuos en su dinámica. Esto es, por ejemplo, el caso de los sistemas mecánicos con fricción. Este hecho fue reconocido y aprovechado ventajosamente desde el principio del siglo 20 para la regulación de una gran variedad de sistemas dinámicos. La piedra angular de este nuevo enfoque fue la teoría de ecuaciones diferenciales con lado derecho discontinuo. Sobre esta base, estrategias discontinuas de control en retroalimentación surgieron a mediados del siglo 20 bajo el nombre de la teoría de los sistemas de estructura variable. Desde este punto de vista, las entradas de control suelen tomar los valores de un conjunto discreto, como los límites extremos de un relevador, o de una colección limitada de funciones preestablecidas de control en realimentación.

Para el conocimiento de los lectores no se han creado herramientas de estimación que involucren término discontinuos, es por esto que es importante construir herramientas de estimación más eficientes que

las ya existentes, en este trabajo diseñamos filtrado por modos deslizantes para sistemas lineales y polinomiales sobre observaciones lineales, y también diseñamos filtrado por modos deslizantes para sistemas lineales con parámetros desconocidos. Por otro lado, se desarrollan reguladores por modos deslizantes para sistemas lineales y polinomiales sobre observaciones lineales.

1.2. Antecedentes

1) Desde que el control por modos deslizantes fue inventado en el principio de 1970s (vea una revisión histórica en [1, 2, 3, 4]), se ha aplicado para resolver varias clases de problemas. Por ejemplo, la metodología de control por modos deslizantes se ha utilizado en la estabilización [5, 6, 7], rastreo [8, 9, 10], diseño de observadores [11, 12, 13], análisis de dominios de frecuencia [14, 15], y otros problemas de control. Modificaciones prometedoras del concepto original de modos deslizantes, tales como modos deslizantes integrales [16, 17] y modos deslizantes de alto orden [18, 19, 20, 21], han sido desarrollados. El regulador óptimo por modos deslizantes ha sido diseñado recientemente para sistemas lineales con criterio afín cuadrático de Bolza-Meyer [22, 23]. Aplicaciones del método de modos deslizantes se extiende incluso a sistemas estocásticos [24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31] y problemas de filtrado estocástico [32, 33, 34, 35]. Las técnicas de modos deslizantes también han sido ampliamente utilizados para aplicaciones industriales ([36]–[41]).

2) Sin embargo, no hay algoritmos de filtrado por modos deslizantes que den solución al problema de diseño de filtrado en promedio cuadrático y promedio modulo para sistemas lineales y no lineales polinomiales. Mientras tanto, simplemente el hecho de que el control por modos deslizantes tiene un sentido físico transparente [1] y se aplica satisfactoriamente a muchos problemas técnicos [5] conduce a la conjetura que el filtro por modos deslizantes en promedio cuadrático y promedio modulo, dual al regulador por modos deslizantes obtenidos en [22] y [23], deberían existir.

3) Por otro lado, aunque es posible diseñar una superficie deslizante tal que un funcional de costo cuadrático de horizonte infinito que solo incluya al estado del sistema sea minimizada [1], al parecer, no se ha diseñado un algoritmo de control por modos deslizantes, que resuelva el problema de controlador óptimo para un criterio de Bolza-Meyer con un término cuadrático de control [54, 55].

4) El problema simultáneo del estimado óptimo del estado e identificación de parámetros para sistemas estocásticos con parámetros desconocidos ha sido sistemáticamente tratados desde el comienzo del trabajo [64]. El resultado óptimo se obtuvo en [64] para sistemas lineales de tiempo discreto con parámetros desconocidos constantes dentro de un intervalo de tiempo finito de filtrado, utilizando el principio de máxima probabilidad, en vista de un conjunto finito de los valores de estado y de los parámetros en un instante de tiempo. La aplicación del principio de máxima probabilidad se continuó para sistemas lineales de tiempo discreto en [65] y para sistemas lineales de tiempo continuo en [66]. Sin embargo, el uso del principio de máxima probabilidad reveló ciertas limitaciones en el resultado final: a. los parámetros

desconocidos se asumen constantes para evitar complicaciones en el problema de optimización generado y b. no se pueden obtener ecuaciones dinámicas directas para el seguimiento de la dinámica del estado óptimo y la estimación de parámetros en la situación general, sin imponer supuestos especiales en la estructura del sistema.

1.3. Aportaciones

1.3.1. *Diseño por Modos Deslizantes para Sistemas Lineales con Estados no Medibles*

El capítulo 3 presenta la solución del problema de filtrado en promedio cuadrático y promedio modulo para sistemas lineales, que contienen un término en modo deslizante, signo del proceso de innovación. Se demuestra que el diseño del filtro por modos deslizantes en promedio cuadrático genera el estimado por modos deslizantes, que tiene el mismo mínimo del estimado de la varianza del error como el mejor estimado dado por el filtro de Kalman-Bucy clásico [44], aunque las matrices de ganancia de ambos filtros sean diferentes. Sobre la base de nuestro conocimiento, este es el primer diseño de filtro por modos deslizantes que es óptimo con respecto al criterio en promedio cuadrático y da el estimado con la mismas propiedades estructurales como el filtro óptimo convencional. Por otro lado, el diseño del filtro por modos deslizantes genera el estimado en promedio modulo, que da un mejor valor para el criterio en promedio cuadrático en comparación con el filtro de Kalman-Bucy en promedio cuadrático. Sobre la base de nuestro conocimiento, este es el primer diseño de filtro por modos deslizantes que es óptimo con respecto al criterio en promedio modulo. El resultado teórico es complementado con un ejemplo ilustrativo verificando el desempeño de los filtros diseñados. Mostrando que el estimado producido por el filtro diseñado y el filtro de Kalman-Bucy dan el estimado con el mismo estimado de la varianza del error, mientras hay una ventaja en favor al diseño del filtro por modos deslizantes en promedio modulo.

Debería ser observado que los filtros diseñados presentan una considerable ventaja en la teoría y en la práctica de filtrado, dado la obtención de que las ecuaciones de filtrado tienen una estructura más simple en comparación al filtro de Kalman-Bucy clásico. Esto permite hacer que las aplicaciones a la industria sean más efectivas de los filtros en promedio cuadrático y promedio modulo para mecánica, energía, robótica entre otras plantas técnicas ([45]–[50]), donde el problema de estimación del estado deberá ser resuelto en la presencia de ruidos estocásticos no acotados. La más simple estructura del filtro es logrado en vista del proceso de innovación como una función signo, en contraste con los filtros diseñados en [32, 33, 34, 35]. Como indicamos, esto produce la solución del problema de filtrado dual a la solución del problema de control dado en [22, 23].

Los resultados de este capítulo se publicaron en:

- a) Basin M.V., Rodríguez Ramírez P. (2011) Sliding mode filter design for linear systems with unmeasured states, IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol. 58, no. 8, pp. 3616-3622.

- b) Basin M.V., Rodríguez Ramírez P. (2010) Sliding mode mean-module filtering for linear stochastic systems, IEEE International Conference on Industrial Technology, 2010 , Pág.(s): 1777 - 1780
- c) Basin M.V., Rodríguez Ramírez P. (2010) Sliding mode mean-square filtering for linear stochastic systems, IEEE International Conference on Industrial Technology, Pág(s): 1781 - 1784
- d) Basin M.V., Rodríguez Ramírez P. (2010) Sliding mode filter design for linear systems with unmeasured states, IEEE International Symposium on Intelligent Control, Pág.(s): 2468 - 2473

1.3.2. *Diseño del Controlador por Modos Deslizantes para Sistemas Lineales con Estados no Medibles*

En el capítulo 4 se desarrolla el problema del controlador óptimo para sistemas lineales sobre observaciones lineales con respecto a diferentes criterios de Bolza-Meyer, donde 1) los términos de la energía del control y del estado son cuadráticos dentro de la integral y el término no integral es de primer grado y 2) el término de la energía del control es cuadrático y el término de la energía del estado es de primer orden. Las soluciones óptimas son obtenidas como controladores por modos deslizantes, cada uno consiste de un filtro por modos deslizantes y un regulador por modos deslizantes, mientras el controlador retroalimentado LQG convencional falla al proveer una solución causal. El desempeño del controlador óptimo obtenido es verificado en el ejemplo ilustrativo contra el controlador LQG convencional para el criterio cuadrático de Bolza-Meyer. El resultado de la simulación confirma la ventaja en favor al controlador por modos deslizantes diseñado.

Los resultados de este capítulo se publicaron en:

- a) Basin M.V., Rodríguez Ramírez P. (2012) Sliding mode controller design for linear systems with unmeasured states, Journal of The Franklin Institute, Vol. 349, no. 4, pp. 1337-1349.
- b) Basin M.V., Rodríguez Ramírez P. (2010) Sliding mode controller design for linear systems with unmeasured states, 11th International Workshop on Variable Structure Systems, Page(s): 89 - 94

1.3.3. *Diseño de Filtrado por Modos Deslizantes para Sistemas no Lineales Polinomiales con Estados no Medibles*

En el capítulo 5 se presenta la solución del problema de filtrado en promedio cuadrático y en promedio modulo para sistemas no lineales polinomiales estocásticos, que contienen un término por modos deslizantes, signo del proceso de innovación. Esto demuestra que el filtro por modos deslizantes diseñado genera el estimado en promedio cuadrático, que tiene el mismo mínimo estimado de la varianza del error como el mejor estimado dado por el filtro polinomial en promedio cuadrático convencional [59], aunque las matrices de ganancia de ambos filtros son diferentes. Por otro lado, el filtro por modos deslizantes diseñado que genera el estimado en promedio modulo, dan un mejor valor del criterio en promedio cuadrático

en promedio modulo en comparación con el filtro polinomial en promedio cuadrático convencional [59]. Para nuestro conocimiento, esos son los primeros diseños de filtros por modos deslizantes par sistemas no lineales polinomiales estocásticos que son óptimos con respecto a los criterio en promedio cuadrático y en promedio modulo. Además, dada cualquier función no lineal puede ser aproximada por un polinomio de cierto grado para cualquier presidios, esto llevaría potencialmente al diseño sub-óptimo de filtros en promedio cuadrático y en promedio modulo finito dimensionales para cualquier estado del sistema no lineal sobre observaciones lineales.

Los resultados de este capítulo se publicaron en:

- a) Basin M.V., Rodríguez Ramírez P. (2012) Sliding mode filter design for nonlinear polynomial systems with unmeasured states, Information Sciences, Vol. 204, pp. 82-91.
- b) Basin M.V., Rodríguez Ramírez P. (2011) Sliding mode mean-module filter design for polynomial systems, American Control Conference, Pág.(s): 632 - 636
- c) Basin M.V., Rodríguez Ramírez P. (2012) Sliding mode filtering for polynomial systems, 12th IEEE International Workshop on Variable Structure Systems, January 12-14, Mumbai.

1.3.4. *Diseño del Controlador por Modos Deslizantes para Sistemas Polinomiales con Estados no Medibles*

En el capítulo 6 se desarrolla la solución del problema de controlador óptimo para sistemas polinomiales sobre observaciones lineales con respecto a diferentes criterios de Bolza-Meyer, donde 1) los términos del la energía del control y del estado son cuadráticos dentro de la integral y el término no integral es de primer grado o 2) el término de la energía del control es cuadrático y el término de la energía del estado es de primer orden. Los resultados teóricos son complementados con un ejemplo ilustrativo verificando el desempeño del algoritmo del controlador diseñado. Ambos diseños de controladores por modos deslizantes son comparados con el controlador retroalimentado polinomial-cuadrático correspondiente al criterio de Bolza-Meyer cuadrático, que esta basado en el filtro Kalman-Bucy [44] y el regulador polinomial-cuadrático convencional [63]. Los resultados de la simulación confirman una ventaja en favor al controlador por modos deslizantes diseñados.

Los resultados de este capítulo se publicaron en:

- a) Basin M.V., Rodríguez Ramírez P. (2011) Sliding mode controller design for polynomial systems with unmeasured states, 37th Annual Conference on IEEE Industrial Electronics Society, Pág.(s): 3569 - 3574.

1.3.5. *Filtrado del Estado por Modos Deslizantes y Estimación de Parámetros para Sistemas Lineales Estocásticos*

En el capítulo 7 se presenta el filtro óptimo por modos deslizantes e identificación de parámetros para sistemas lineales estocásticos con parámetros desconocidos sobre observaciones lineales, que están basados en el modo deslizante del proceso de innovación. Un desarrollo histórico de control por modos deslizantes puede ser observado en [1]–[4]. El problema de filtrado se formalizó considerando los parámetros desconocidos como estados del sistema adicionales, procesos de Wiener, satisfaciendo la ecuación lineal estocástica de Itô con drift cero y difusión uno. Así, el problema es reducido al diseño del filtro por modos deslizantes para sistemas bilineales con estados no medibles, cuya solución es obtenida en [67] y [68], respectivamente. Aquí se presenta el algoritmo óptimo para el estimado del estado e identificación de parámetros simultáneamente en sistemas lineales con parámetros desconocidos multiplicativos y aditivos sobre observaciones lineales. Note que desde el problema original de identificación es reducido al problema de filtrado por modos deslizantes para el sistema de estado extendido incluyendo al estado y parámetros, la condición de identificabilidad para el sistema original coincide con la condición de observabilidad para el sistema extendido.

Los resultados de este capítulo se publicaron en:

- a) Basin M.V., Rodríguez Ramírez P. (2012) Sliding Mode State Filtering and Parameter Estimation for Stochastic Linear Systems, 12th IEEE International Workshop on Variable Structure Systems, January 12-14, Mumbai.

1.4. *Organización de la Tesis*

En el capítulo 2 se presenta una síntesis teórica de procesos estocásticos, teoría de filtrado y teoría de modos deslizantes. En el capítulo 3 se plantea y resuelve el problema de diseño de filtrado por modos deslizantes para sistemas lineales estocásticos sobre observaciones lineales con estados no medibles. En el capítulo 4 se resuelve el problema de diseño del controlador por modos deslizantes para sistemas lineales sobre observaciones lineales con estados no medibles. En el capítulo 5 se obtiene la solución del problema de diseño de filtrado por modos deslizantes para sistemas polinomiales sobre observaciones lineales con estados no medibles. En el capítulo 6 se considera el problema de diseño del controlador por modos deslizantes para sistemas polinomiales sobre observaciones lineales con estados no medibles. En el capítulo 7 se obtiene la solución del problema de filtrado del estado por modos deslizantes y estimación de parámetros para sistemas lineales estocásticos. En el Capítulo 8 son presentadas las conclusiones y los trabajos futuros a desarrollar.

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO

2.1. Teoría de Probabilidad y Variables Aleatorias.

2.1.1. Axiomas de Probabilidad

El concepto fundamental de la teoría de probabilidad es el espacio probabilístico, que es denotado por Ω , con elementos denotados por ω . Ω es un espacio simple muestral, y sus elementos ω son muestras o resultados experimentales. Ciertos subconjuntos de Ω son llamados eventos. Nosotros asignamos probabilidades a los eventos via una función probabilística $P(*)$ definido en la clase de eventos. Esto es, que cada evento Λ asignamos un numero $P(\Lambda)$, llamado la probabilidad de Λ . La función de Probabilidad satisface los siguientes axiomas:

1. $P(\Lambda) \geq 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. Si $\Lambda_i \cap \Lambda_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, \dots, n$, entonces $P(\Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_n) = P(\Lambda_1) + \dots + P(\Lambda_n)$
4. Si $\Lambda_i \cap \Lambda_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, \dots, n, \dots$, entonces $P(\Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_n \cap \dots) = P(\Lambda_1) + \dots + P(\Lambda_n) + \dots$

Como la probabilidad no puede ser asignada para cada subconjunto de Ω , entonces definamos un clase F de subconjuntos de Ω tal que para cualquier subconjunto ω de F , siempre se pueda asignar una probabilidad $P(\omega)$, F es llamado campo de Borel y satisface que:

1. $\Omega \in F$
2. Si $\Lambda \in F$, entonces $\Omega - \Lambda \in F$
3. Si $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n \in F$, entonces $\cup_1^n \Lambda_i \in F$ y $\cap_1^n \Lambda_i \in F$
4. Si $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots \in F$, entonces $\cup_1^\infty \Lambda_i \in F$ y $\cap_1^\infty \Lambda_i \in F$

Además, para toda clase dada F_0 de conjuntos ω , existe un único campo de Borel $B(F_0)$ de conjuntos de ω con las propiedades:

1. $F_0 \subset B(F_0)$
2. Si F_1 , es un campo de Borel de conjuntos ω y si $F_0 \subset F_1$, entonces $B(F_0) \subset F_1$.

$B(F_0)$ es el campo de Borel más pequeño de conjuntos ω que contiene todos los conjuntos de F_0 . Este es llamado campo de Borel generado por F_0 . La clase de eventos es un campo de Borel B y la función de probabilidad está definida sobre B . Supondremos que el espacio probabilístico Ω , el campo de Borel B , y la función de probabilidad $P(*)$ han sido definidos. El conjunto (Ω, B, P) es llamado prueba.

2.1.2. Variables Aleatorias

Una función real de valor finito $x(*)$ definida en Ω es llamada variable aleatoria si, para cualquier número real x , la desigualdad

$$x(\omega) \leq x \quad (2,1)$$

definida en el conjunto ω está definida su probabilidad. En vista de la definición de variable aleatoria, la función

$$F_x(x) = P(x(\omega) \leq x) \quad (2,2)$$

es definido para todo valor x y es llamada función de distribución de la variable aleatoria x . La esperanza de una variable aleatoria x es definido

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xp_x(x)dx \quad (2,3)$$

donde $p_x(x)$ es la función de densidad de la variable aleatoria x . Diremos que $E(x)$ existe si $E(x) < \infty$, esto es, si la integral anterior es absolutamente convergente. Ahora

$$E(x^n) = \int x^n p_x(x)dx \quad (2,4)$$

define el n -ésimo momento de x . $E(x^2)$ es llamado el valor en promedio cuadrático de x .

$$E((x - E(x))^n) = \int (x - E(x))^n p_x(x)dx \quad (2,5)$$

define el n -ésimo momento central de x . El segundo momento central de x es llamado la varianza

$$Var(x) = E((x - E(x))^2) \quad (2,6)$$

Además, los momentos conjuntos de la forma

$$E(x_k^n x_l^m) \quad (2,7)$$

y los momentos centrales conjuntos

$$E((x_k - E(x_k))^n (x_l - E(x_l))^m) \quad (2,8)$$

pueden ser definidos. De particular importancia es la covarianza de x_k y x_l que es definido como

$$cov(x_k, x_l) = E((x_k - E(x_k))(x_l - E(x_l))) \quad (2,9)$$

Una variable aleatoria también puede ser especificada en términos de su función característica definida por

$$\phi_x(u) = E(\exp(iux)) \quad (2,10)$$

La importancia de esta función se da en el hecho de que uno puede obtener todos los momentos de la variable aleatoria x por diferenciación de la función característica

$$E(x^n) = \left(\frac{1}{i^n}\right) \frac{d^n}{du^n} \phi_x(0) \quad (2,11)$$

para todo n , probando de que $\phi_x(u)$ es analítica. La función característica satisface

$$|E(\exp(iux))| \leq E(|\exp(iux)|) = 1 \quad (2,12)$$

de esta definición, se observa que la función características es la transformada de Fourier de la función de densidad.

2.1.3. Probabilidad Condicional y Esperanza Condicional.

Dadas las variables aleatorias x y y definimos la función de probabilidad condicional $P(x(\omega) \leq x | y)$ de la variable aleatoria x dado la variable aleatoria y como

$$P(x(\omega) \leq x | y) = \frac{P((x(\omega) \leq x) \cap (y(\omega) \leq y))}{P(y(\omega) \leq y)} \quad (2,13)$$

$P(x(\omega) \leq x | y)$ no esta definido si $P(y(\omega) \leq y) = 0$. Así, de la experimento (Ω, B, P) , podemos construir una nuevo experimento dado por $(\Omega, B, P(* | y))$, es fácil ver que $P(* | y)$ satisface los axiomas probabilísticos de la sección anterior. La esperanza condicional de la variable aleatoria x dado la variable aleatoria y es definido por

$$E(x | y) = \int xp_{x|y}(x | y)dx \quad (2,14)$$

2.2. Procesos Estocásticos.

Un proceso estocástico $X(t, \omega)$ con $t \in T$ es una familia de variables aleatorias indexada por el conjunto de parámetros T . El parámetro t se refiere al tiempo. Si la variables aleatorias $X(t, \omega)$ tiene

realizaciones discretas, diremos que el proceso estocástico tiene un espacio de estados discreto. Si tiene realizaciones continuas diremos que el proceso estocástico tiene un espacio de estados continuo. El conjunto de parámetro T también puede tener valores discretos o continuos. Un espacio de estados continuo, de un proceso con parámetros continuos será llamado función aleatoria. Además, observe que un proceso estocástico $X(t, \omega)$ es de hecho una función de dos variables, el parámetro del tiempo t y el parámetro probabilístico ω . Para cada t , $X(t, *)$ es una variable aleatoria. Para cada ω , $X(*, \omega)$ es una realización del proceso, es decir, una función simple.

2.2.1. Ley de Probabilidad de un Proceso Estocástico

Sea $X(t, \omega)$ con $t \in T$ un proceso estocástico, para cualquier conjunto finito $\{t_1, \dots, t_n\} \in T$, la función de distribución conjunta de las variables aleatorias $X(t_1, \omega), \dots, X(t_n, \omega)$ (o X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) es llamada distribución finito dimensional del proceso estocástico

$$F_X(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \quad (2,15)$$

para todo conjunto finito $\{t_1, \dots, t_n\} \in T$. Un proceso estocástico puede ser caracterizado por su distribución finito dimensional. Equivalentemente, el proceso estocástico puede ser caracterizado por su función de densidad conjunta

$$p_X(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \quad (2,16)$$

o su función característica

$$\phi_{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}}(u_1, \dots, u_n) \quad (2,17)$$

para todo conjunto finito $\{t_1, \dots, t_n\} \in T$. Por las ecuaciones anteriores de distribución finito dimensional, función de densidad conjunta o la función característica para todo conjunto finito $\{t_1, \dots, t_n\} \in T$ sirve para especificar la ley de probabilidad del proceso estocástico. Nosotros podemos escribir

$$p(x_t) = p(x, t) \quad 2,18$$

Para cada t , $p(*, t)$ es la densidad $p_{x_t}(*)$ de la variable aleatoria $x_t(*)$, Simuladamente

$$p(x_t, x_\tau) = p(x, y, t, \tau) \quad 2,19$$

Para cada t y τ , $p(*, *, t, \tau)$ es la densidad conjunta $p_{x_t, x_\tau}(*, *)$ de las variables aleatorias $x_t(*)$ y $x_\tau(*)$. La densidad condicional

$$p(x_t | x_\tau) = \frac{p(x_t, x_\tau)}{p(x_\tau)} \quad 2,20$$

La densidad de primer y segundo orden del proceso estocástico puede responder preguntas probabilísticas acerca del proceso. Para dos clases importantes de procesos estocásticos (Proceso Gaussiano y Proceso

de Markov), estas densidades contestan todas las preguntas acerca de los procesos. Esto es, permiten especificar la ley de probabilidad de los procesos. La función del tiempo t

$$m_x(t) = E(x_t) \quad (2,21)$$

se llama función de la esperanza del proceso. La función de los tiempos t, τ

$$\Gamma_x(t, \tau) = E(x_t x_\tau^T) \quad (2,22)$$

se llama función de correlación del proceso. La función de los tiempos t, τ

$$P_x(t, \tau) = E([x_t - m_x(t)][x_\tau - m_x(\tau)]^T) \quad (2,23)$$

se llama función de correlación del proceso. La función matricial de t

$$P_x(t) = P_x(t, t) \quad (2,23)$$

es la matriz de covarianza para el vector aleatorio x_t .

2.2.2. Convergencia de Secuencias Aleatorias.

Sea $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ una secuencia aleatoria escalar. La secuencia $\{x_n\}$ se dice que converge para x con probabilidad 1 si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(\omega) = x(\omega) \quad (2,24)$$

para al menos todo ω . La secuencia $\{x_n\}$ se dice que converge a x en probabilidad si, para cualquier $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|x_n(\omega) - x(\omega)| \geq \epsilon) = 0 \quad (2,25)$$

La secuencia $\{x_n\}$ se dice que converge para x en promedio cuadrático si $E(|x_n|^2) < \infty$ para todo n , $E(|x|^2) < \infty$, y

$$l.i.m. x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} E(|x - x_n|^2) = 0 \quad (2,26)$$

y x es llamado el límite en promedio de $\{x_n\}$. La convergencia con probabilidad 1 y la convergencia en promedio cuadrático implican convergencia en probabilidad, pero no se pueden comparar las convergencias en promedio cuadrático y con probabilidad 1.

2.2.3. Cálculo en Promedio Cuadrático.

Sea $\{x_t(\omega), t \in T\}$ un proceso estocástico escalar, con parámetros continuos, con segundo momento finito. Esto es, $E(|x_t|^2) < \infty$ para toda $t \in T$. Esto implica que $m(t) = E(x_t)$ y la función de correlación

$\Gamma(t, \tau) = E(x_t, x_\tau)$ y la función de covarianza $P(t, \tau)$ existen para todo $t, \tau \in T$. La función aleatoria x_t se dice que es continua en promedio cuadrático para $t \in T$ si

$$l.i.m._{h \rightarrow 0} x_{t+h} = x_t \quad (2,27)$$

para $t + h \in T$. Por definición del limite en promedio cuadrático obtenemos:

Teorema 2.1 x_t es continuo en promedio cuadrático en $t \in T$ si, y solo si, $\Gamma(t, \tau)$ es continuo en (t, t) .

Corolario. $\Gamma(t, \tau)$ es continuo en (t, t) si, y solo si, $m(t)$ es continuo en t y $P(t, \tau)$ es continuo en (t, t) .

La función aleatoria x_t se dice que es diferenciable en promedio cuadrático en $t \in T$ si el siguiente limite, que define la derivada en promedio cuadrático, existe

$$l.i.m._{h \rightarrow 0} \frac{(x_{t+h} - x_t)}{h} = \frac{dx_t}{dt} = \dot{x}_t \quad (2,28)$$

para $t + h \in T$.

Teorema 2.2 x_t es diferenciable en promedio cuadrático en $t \in T$, si, y solo si, $\frac{\partial \Gamma(t, \tau)}{\partial t, \partial \tau}$ existe en (t, t) .

Corolario. $\frac{\partial \Gamma(t, \tau)}{\partial t, \partial \tau}$ existe en (t, t) si, y solo si, $\dot{m}(t)$ existe en t y $\frac{\partial P(t, \tau)}{\partial t, \partial \tau}$ existe en (t, t) .

En consecuencia de este corolario tenemos que si x_t es diferenciable en promedio cuadrático para cualquier $t \in T$, entonces

$$m_{\dot{x}}(t) = \dot{m}_x(t) \quad (2,29)$$

$$\Gamma_{\dot{x}\dot{x}}(t, \tau) = \frac{\partial \Gamma_{xx}(t, \tau)}{\partial t, \partial \tau} \quad (2,30)$$

$$P_{\dot{x}\dot{x}}(t, \tau) = \frac{\partial P_{xx}(t, \tau)}{\partial t, \partial \tau} \quad (2,31)$$

son la esperanza, correlación y covarianza del proceso \dot{x}_t , también podemos observar que la derivada en promedio cuadrático y la esperanza conmutan.

Ahora consideremos $a, b \in T, a \leq b$, y la partición del intervalo $[a, b]$ definida como

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

Además, digamos que $\rho = \max_i(t_{i+1} - t_i)$, y consideremos a t_i un momento del tiempo tal que $t_i \leq t_i < t_{i+1}$. bajo estas condiciones diremos que la función aleatoria x_t es integrable en promedio cuadrático sobre $[a, b]$ si el siguiente limite existe

$$l.i.m._{\rho \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} x_{t_i}(t_{i+1} - t_i) = \int_a^b x_t dt \quad (2,32)$$

Teorema 2.3 x_t es integrable en promedio cuadrático sobre $[a, b]$ si, y solo si, $\Gamma(t, \tau)$ es Riemann integrable sobre $[a, b] \times [a, b]$.

Corolario. $\Gamma(t, \tau)$ es Riemann integrable sobre $[a, b] \times [a, b]$ si, y solo si, $m(t)$ es R-integrable sobre $[a, b]$ y $P(t, \tau)$ es R-integrable sobre $[a, b] \times [a, b]$.

En consecuencia de este corolario tenemos que si x_t es integrable en promedio cuadrático sobre $[a, b]$, $[c, d] \in T$, entonces

$$E\left(\int_a^b x_t dt\right) = \int_a^b m(t) dt \quad (2,33)$$

$$E\left(\int_a^b x_t dt \int_c^d x_\tau d\tau\right) = \int_a^b \int_c^d \Gamma(t, \tau) dt d\tau \quad (2,34)$$

$$\text{cov}\left(\int_a^b x_t dt \int_c^d x_\tau d\tau\right) = \int_a^b \int_c^d P(t, \tau) dt d\tau \quad (2,35)$$

2.2.4. Proceso de Wiener.

Un proceso con parámetros continuos $\{x_t, t \in T\}$ tiene incrementos independientes si, para cualquier conjunto finito $\{t_i \mid t_i \leq t_{i+1}\} \in T$, las variables aleatorias

$$x_{t_2} - x_{t_1}, x_{t_3} - x_{t_2}, \dots, x_{t_n} - x_{t_{n-1}}$$

son independientes. El proceso x_t se dice que tiene incrementos independientes estacionarios si, además,

$$x_{t+h} - x_{\tau+h}$$

tiene la misma distribución como $x_t - x_\tau$ para todo $t > \tau \in T$ y cualquier $h > 0$. Un proceso estocástico que es de gran importancia en la teoría y aplicaciones, y que juega un rol importante en esta tesis, es el proceso de Wiener. Un proceso con parámetros continuos $x_t, t \geq 0$ es un proceso de Wiener si

1. $x_t, t \geq 0$ tiene incrementos independientes estacionarios
2. para todo $t \geq 0$, x_t tiene una distribución normal
3. para todo $t \geq 0$, $E(x_t) = 0$
4. $P(x_0 = 0) = 1$

La función de covarianza de un proceso de Wiener esta dada por

$$E[(x_t - E(x_t))(x_\tau - E(x_\tau))^T] = Q \text{mín}(t, \tau)$$

donde Q es una matriz definida positiva.

2.2.5. Ruido Blanco.

Un ruido blanco Gaussiano es un proceso Gaussiano con

$$E[(x_t - E(x_t))(x_\tau - E(x_\tau))^T] = Q\delta(t - \tau)$$

también un ruido blanco Gaussiano puede ser considerado como la derivada en promedio cuadrático débil de un proceso de Wiener, definido como sigue. Sea $\{x_t, t \geq 0\}$ un proceso de Wiener, del cual sabemos que su función de covarianza es

$$P_x(t, \tau) = Q \text{mín}(t, \tau)$$

la función de covarianza del proceso $\{\frac{dx_t}{dt}, t \geq 0\}$ es

$$P_{\dot{x}}(t, \tau) = \frac{\partial^2 P_x(t, \tau)}{\partial t \partial \tau}$$

por lo tanto

$$P_{\dot{x}}(t, \tau) = Q \frac{\partial^2 \text{mín}(t, \tau)}{\partial t \partial \tau}$$

como sabemos

$$\text{mín}(t, \tau) = \begin{cases} \tau, & \tau < t \\ t, & \tau > t \end{cases}$$

entonces la primera derivada parcial de esta función es

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{mín}(t, \tau) = \begin{cases} 0, & \tau < t \\ 1, & \tau > t \end{cases}$$

que es la función Heaviside o función de salto (en τ) y su derivada con respecto a τ es la delta de Dirac $\delta(t - \tau)$. Obteniendo

$$P_{\dot{x}}(t, \tau) = Q\delta(t - \tau)$$

y \dot{x}_t es un proceso con una delta-covarianza. Entonces, formalmente, un ruido blanco Gaussiano es la derivada en promedio cuadrático débil del proceso de Wiener.

2.3. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas.

Sistemas dinámicos continuos con estado finito-dimensionales, que son sujetos a disturbios aleatorios, pueden ser representados por ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales. Sean x_t y w_t , respectivamente, el vector de estado n -dimensional y el disturbio aleatorio m -dimensional en el tiempo t . Entonces una ecuación diferencial general del tipo descrito puede ser escrita como

$$\frac{dx_t}{dt} = f(x_t, w_t, t), \quad t \geq t_0 \tag{2,36}$$

donde f es una función no lineal real n -dimensional. La ecuación (2.36) es llamada ecuación diferencial estocástica, sistema dinámico estocástico continuo. La función del disturbio aleatorio w_t es llamado función driving. La condición inicial para (2.36) puede ser una constante o una variable aleatoria x_{t_0} con una distribución específica. La ley de probabilidad del proceso $\{w_t, t \geq t_0\}$ se asume especificada. Un caso especial importante de (2.36) es la ecuación diferencial estocástica con un aditivo ruido blanco Gaussiano

$$\frac{dx_t}{dt} = f(x_t, t) + G(x_t, t)\psi_t, \quad t \geq t_0 \quad (2.37)$$

donde G es una función matricial $n \times m$, y la condición inicial x_{t_0} que es independiente del ruido blanco Gaussiano $\{\psi_t, t \geq t_0\}$. Como el proceso $\{\psi_t\}$ es delta-correlacionado, y por lo tanto, el ψ_t no es integrable en promedio cuadrático, y dado el resultado de la sección anterior que un ruido blanco Gaussiano es la derivada en promedio cuadrático débil de un proceso de Wiener. Sea $\{W_t, t \geq t_0\}$ un proceso de Wiener independiente. Entonces

$$\psi_t \sim \frac{dW_t}{dt}$$

y podemos escribir una forma equivalente de (2.37) como

$$dx_t = f(x_t, t)dt + G(x_t, t)dW_t, \quad t \geq t_0 \quad (2.38)$$

Ahora (2.38) solo tiene sentido cuando la integral existe

$$x_t - x_{t_0} = \int_{t_0}^t f(x_\tau, \tau)d\tau + \int_{t_0}^t G(x_\tau, \tau)dW_\tau$$

donde la primera integral puede ser definida como una integral en promedio cuadrático o como una integral ordinaria, la segunda integral sera definida como una integral estocástica de Itô, y por lo tanto (2.38) es una ecuación diferencial estocástica de Itô.

2.3.1. Integral Estocástica de Itô

La integral

$$\int_a^b g(\tau)dW_\tau$$

donde $g(t)$ es una función real y $\{W_t\}$ es un proceso de Wiener escalar, y es llamada integral de Wiener. Y el caso generalizado por Itô cuando la función $g_t(\omega)$ es aleatoria, y la integral

$$\int_a^b g_\tau(\omega)dW_\tau$$

es llamada integral estocástica de Itô. Sea $T = [a, b]$, y sea $\{W_t, t \in T\}$ un proceso de Wiener con parámetro de la varianza Q . Suponemos que la función aleatoria $g_t(\omega)$ esta definida en T y supongamos que $g_t(\omega)$ es independiente de $\{W_{t_k} - W_{t_l} : t \leq t_l \leq t_k \leq b\}$ para todo $t \in T$

$$\int_T E(|g_t(\omega)|^2)dt < \infty$$

Particionado T :

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

y sea $\rho = \max_i(t_{i+1} - t_i)$. Entonces la integral de Itô es definida como

$$\int_T g_t(\omega) dW_t = l.i.m._{\rho \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} g_{t_i}(\omega)(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \quad (2,39)$$

De esta definición es fácil ver que

$$E\left(\int_T g_t(\omega) dW_t\right) = 0 \quad (2,40)$$

en vista de la suposición de independencia. También podemos calcular

$$\begin{aligned} E\left(\int_T g_t(\omega) dW_t \int_T f_t(\omega) dW_t\right) &= \\ &= E\left(l.i.m._{\rho \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} g_{t_i}(\omega)(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) l.i.m._{\rho \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f_{t_i}(\omega)(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})\right) = \\ &= Q l.i.m._{\rho \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} E(g_{t_i} f_{t_i})(t_{i+1} - t_i) = Q \int_T E(g_t f_t) dt \end{aligned} \quad (2,41)$$

2.3.2. Calculo Estocástico de Itô.

Lema 2.4 Sea x_t es la solución única de la ecuación diferencial estocástica

$$dx_t = f(x_t, t)dt + G(x_t, t)dW_t, \quad t \geq t_0 \quad (2,42)$$

donde x y f son vectores n -dimensionales, G es $n \times m$, y $\{W_t, t \geq t_0\}$ es un proceso de Wiener m -dimensional con $E(dW_t dW_t^T) = Qdt$. Sea $\phi(x_t, t)$ una función real escalar, continuamente diferenciable en t y tenga segundo derivada parcial mixta continua con respecto a los elementos de x . Entonces la diferencial estocástica $d\phi$ de ϕ es

$$d\phi = \phi_t dt + \phi_x^T dx_t + \frac{1}{2} tr(GQG^T) \phi_{xx} dt \quad (2,43)$$

donde

$$\begin{aligned} \phi_t &= \frac{\partial \phi}{\partial t}; \quad \phi_x^T = \left[\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \phi}{\partial x_n} \right] \\ \phi_{xx} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Observe que (2.43) puede ser escrito como

$$d\phi = (\phi_t + \phi_x^T f + \frac{1}{2} tr(GQG^T) \phi_{xx}) dt + \phi_x^T G dW_t \quad (2,44)$$

2.4. Teoría de Filtrado.

Consideremos la ecuación dinámica estocástica continua descrita por la ecuación diferencial estocástica.

$$dx_t = f(x_t, t)dt + G(x_t, t)dW_t, \quad t \geq t_0 \quad (2.45)$$

donde x y f son vectores n -dimensionales, G es $n \times m$, y $\{W_t, t \geq t_0\}$ es un proceso de Wiener m -dimensional con $E(dW_t dW_t^T) = Qdt$. La ecuación (2.45) es equivalente a

$$\frac{dx_t}{dt} = f(x_t, t) + G(x_t, t)\psi_t,$$

donde $\{\psi_t, t \geq t_0\}$ es un ruido blanco Gaussiano, $\psi_t \sim N(0, Q(t))$. Supongamos observaciones continuas son tomadas en el sistema (2.45), de la forma

$$dY_t = h(x_t, t)dt + dW'_t \quad (2.46)$$

donde Y_t y h son vectores m -dimensionales y $\{W'_t, t \geq t_0\}$ es un proceso de Wiener m -dimensional con $E(dW'_t dW'^T_t) = R(t)dt, R(t) > 0$. Supongamos que $\{W_t\}, \{W'_t\}$ y x_{t_0} son independientes. La ecuación (2.46) es equivalente a

$$y_t = h(x_t, t) + \psi'_t \quad (2.47)$$

con la identificación

$$y_t \sim \frac{dY_t}{dt} \quad \psi'_t \sim \frac{dW'_t}{dt}$$

y con $\{\psi'_t, t \geq t_0\}$ un ruido blanco Gaussiano, $\psi'_t \sim N(0, R(t))$. Las ecuaciones (2.45) y (2.46), juntas, constituyen un vector de ecuaciones diferenciales estocásticas. El problema de estimación es buscar el estimado óptimo $\hat{x}(t)$ del sistema de estado $x(t)$ basado en el proceso de observación $Y(t) = \{y(s), 0 \leq s \leq t\}$, que minimiza la norma euclidiana

$$J = E[(x(t) - \hat{x}(t))^T (x(t) - \hat{x}(t)) | F_t^Y] \quad (2.48)$$

para cualquier momento del tiempo t .

Las ecuaciones de filtrado óptimo se obtienen usando la formula para la ecuación diferencial de itô de la esperanza condicional $m(t) = E(x(t) | F_t^Y)$

$$\begin{aligned} dm(t) = & E(f(x, t) | F_t^Y)dt + E(x[h(x_t, t) - E(h(x_t, t) | F_t^Y)]^T | F_t^Y) \times \\ & (dy(t) - E(h(x_t, t) | F_t^Y))dt \end{aligned} \quad (2.49)$$

2.4.1. Filtro de Kalman-Bucy.

En el caso particular, si la función $f(x_t, t) = a_0(t) + a_1(t)x(t)$, $G(x_t, t) = B(t)$ y $h(x_t, t) = A_0(t) + A(t)x(t)$ la ecuación de filtrado óptimo de la esperanza condicional es

$$\begin{aligned} dm(t) = & E(a_0(t) + a_1(t)x(t) | F_t^Y)dt + E(x[A_0(t) + A(t)x(t) - \\ & E(A_0(t) + A(t)x(t) | F_t^Y)]^T | F_t^Y) \times \\ & (B(t)B(t)^T)^{-1}(dy(t) - E(A_0(t) + A(t)x(t) | F_t^Y))dt \end{aligned} \quad (2,50)$$

de aquí obtenemos que

$$\begin{aligned} E(a_0(t) + a_1(t)x(t) | F_t^Y) &= a_0(t) + a_1(t)m(t) \\ E(x[A_0(t) + A(t)x(t) - E(A_0(t) + A(t)x(t) | F_t^Y)]^T | F_t^Y) \\ &= E(x[x(t) - E(x(t) | F_t^Y)]^T | F_t^Y)A(t)^T = P(t)A(t)^T \\ E(A_0(t) + A(t)x(t) | F_t^Y) &= A_0(t) + A(t)m(t) \end{aligned}$$

por lo tanto la ecuación diferencial de la esperanza condicional es

$$\begin{aligned} dm(t) = & (a_0(t) + a_1(t)m(t))dt + P(t)A(t)^T \times \\ & (B(t)B(t)^T)^{-1}(dy(t) - A_0(t) - A(t)m(t))dt \end{aligned} \quad (2,51)$$

La ecuación (2.51) deberá tener una condición inicial $m(t_0) = E(x_0 | F_{t_0}^Y)$. Tratando de componer una forma cerrada para el sistema del ecuaciones de filtrado, la ecuación (2.51) deberá ser complementada con la ecuación para la varianza del error $P(t)$. Para este propósito usamos la formula diferencial de Itô de la varianza $P(t) = E((x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T | F_t^Y)$ dada por

$$\begin{aligned} dP(t) = & (E((x(t) - m(t))(f(x, t))^T | F_t^Y) + E((f(x, t))(x(t) - m(t))^T | F_t^Y) \\ & b(t)b^T(t) - E(x[h(x_t, t) - E(h(x_t, t) | F_t^Y)]^T | F_t^Y)A(t)^T \times \\ & (B(t)B(t)^T)^{-1}A(t)^T E([h(x_t, t) - E(h(x_t, t) | F_t^Y)]x^T | F_t^Y))dt + \\ & E((x(t) - m(t))(x(t) - m(t))[h(x_t, t) - E(h(x_t, t) | F_t^Y)]^T | F_t^Y) \times \\ & (B(t)B(t)^T)^{-1}(dy(t) - E(h(x_t, t) | F_t^Y))dt \end{aligned} \quad (2,52)$$

sustituyendo la expresión para $h(x_t, t)$ la formula anterior toma la forma

$$\begin{aligned} dP(t) = & (E((x(t) - m(t))(f(x, t))^T | F_t^Y) + E((f(x, t))(x(t) - m(t))^T | F_t^Y) \\ & b(t)b^T(t) - P(t)A(t)^T(B(t)B(t)^T)^{-1}A(t)^T P(t))dt + \\ & E((x(t) - m(t))(x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T | F_t^Y) \times \end{aligned} \quad (2,53)$$

$$A^T(t)(B(t)B(t)^T)^{-1}(dy(t) - A_0(t) - A(t)m(t))dt$$

como $f(x_t, t) = a_0(t) + a_1(t)x(t)$ obtenemos

$$E((x(t) - m(t))(a_0(t) + a_1(t)x(t))^T | F_t^Y) = P(t)a_1(t)^T$$

$$E((a_0(t) + a_1(t)x(t))(x(t) - m(t))^T | F_t^Y) = a_1(t)P(t)$$

además

$$E((x(t) - m(t))(x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T | F_t^Y) = 0$$

por lo tanto la ecuación para la varianza del error sera

$$dP(t) = (P(t)a_1(t)^T + a_1(t)P(t)$$

$$b(t)b^T(t) - P(t)A(t)^T(B(t)B(t)^T)^{-1}A(t)^TP(t))dt \quad (2.54)$$

con la condición inicial $P(t_0) = E((x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T | F_{t_0}^Y)$. Las ecuaciones (2.51) y (2.54) forman el filtro de Kalman-Bucy.

2.5. Control Óptimo.

En esta sección se derivan las condiciones necesarias y suficientes para el problema básico de optimización dinámica para buscar una función de control $u(\cdot)$ que minimice el funcional de costo

$$J(x_0, u) = \int_0^T g(t, x(t), u(t))dt + h(x(T)) \quad (2.55)$$

donde la variable de estado $x(t)$ satisface la ecuación diferencial

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0 \quad (2.56)$$

Aquí $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$ y x_0 es un vector dado en R^n . $f(t, x(t), u(t))$ y $g(t, x(t), u(t))$ son funciones continuas en R^{1+n+m} . Más aun, para f y g todas las derivadas parciales de x y u existen y son continuas. $h(x) \in C^1$.

2.5.1. Principio del Máximo de Pontryagin.

Asumiremos que existe un subconjunto $U \subset R^m$ tal que para todo $t \in [0, T]$, $u(t) \in U$. El conjunto de funciones de controles admisibles \mathcal{U} consiste de funciones medibles desde $[0, T]$ en U para que la ecuación diferencial (2.56) tenga solución única sobre $[0, T]$ y el funcional de costo (2.55) exista. Dado que f y g son funciones continuas en u , entonces f y g son también funciones medibles. Como consecuencia la función de costo (2.55) existe si solo asumimos que U es acotado. Si además f satisface la desigualdad

$$|f(t, x(t), u(t))| \leq L|x| + N, t \in [0, T], x \in R^n, u \in U$$

para algunas constantes positivas L y N , la ecuación diferencial (2.56) tiene solución única para toda función medible u .

Teorema 2.5 Considere el problema de optimización dado por las ecuaciones (2.55) y (2.56). Introduzcamos $H = g + \lambda f$. Sea $u^*(t) \in \mathcal{U}$ control que da un mínimo local para el funcional de costo (2.55), y sea $x^*(t)$ la trayectoria correspondiente. Entonces existe una función de co-estado $\lambda^{*T} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaciendo

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \left(= \frac{\partial H(t, x^*, u^*, \lambda^*)}{\partial \lambda^*} \right), \quad x(0) = x_0 \quad (2.57)$$

$$\dot{\lambda}^*(t) = -\frac{\partial H(t, x^*, u^*, \lambda^*)}{\partial x}, \quad \lambda^*(T) = \frac{\partial h(x(T))}{\partial x} \quad (2.58)$$

y, para todo $t \in (0, T)$ en que u^* es continua

$$H(t, x^*, u^*, \lambda^*) = \min_{u \in \mathcal{U}} H(t, x^*, u, \lambda^*)$$

esto es

$$u^*(t) = \arg \min_{u \in \mathcal{U}} H(t, x^*, u, \lambda^*)$$

2.5.2. Programación Dinámica.

Teorema 2.6 Considere el problema de optimización dado por las ecuaciones (2.55) y (2.56). Sea $u^*(t) \in \mathcal{U}$ un control que da un mínimo local para la función de costo (2.55), y sea $x^*(t)$ la trayectoria correspondiente. Sea $V(t, x) = \min_{u \in \mathcal{U}} J(t, x)$ y asumamos que las derivadas parciales de $V(t, x)$ existe, $\frac{\partial V}{\partial x}$ es continua y, además, $\frac{d}{dt} V(t, x(t))$ existe. Entonces para $t_0 \leq t \leq T$

$$-\frac{\partial V}{\partial t}(t, x) = \min_{u \in \mathcal{U}} \left\{ g(t, x, u) + \frac{\partial V}{\partial x}(t, x) f(t, x, u) \right\}, \quad V(T, x) = h(x(T)) \quad (2.59)$$

y

$$u^*(t) = \arg \min_{u \in \mathcal{U}} \left\{ g(t, x, u) + \frac{\partial V}{\partial x}(t, x) f(t, x, u) \right\} \quad (2.60)$$

2.5.3. Control Óptimo del Regulador Lineal Cuadrático.

Considere el sistema lineal invariante en el tiempo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.61)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, es el estado del sistema, $u(t) \in \mathcal{U}$ es el vector de variables que pueden ser usadas para controlar el sistema y x_0 es el estado inicial dado del sistema. También consideremos el criterio cuadrático dado por:

$$J = \int_0^T \{x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)\}dt + x^T(T)Q_Tx(T) \quad (2.62)$$

donde las matrices Q, R y Q_T se asumen que son simétricas. Además, asumimos que la matriz R es definida positiva.

Teorema 2.7 El problema de control lineal cuadrático (2.61) y (2.62) tiene, para cualquier condición inicial del estado x_0 , tiene solución si y solo si la ecuación diferencial de Riccati dada por

$$\dot{K}(t) = -A^T K(t) - K(t)A(t) + K(t)BR^{-1}B^T K(t) - Q, \quad K(T) = Q_T \quad (2.63)$$

tiene solución simétrica $K(t)$ sobre $[0, T]$. Si el problema de control lineal cuadrático tiene solución, entonces es única y el problema de control en forma de retroalimentación es

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T K(t)x(t), \quad (2.64)$$

con $x(t)$ es la solución de la ecuación

$$\dot{x}(t) = (A - BR^{-1}B^T K(t))x(t), \quad x(t_0) = x_0$$

Más aun, $J(u^*) = x_0^T K(0)x_0$.

2.5.4. Control Estocástico para Sistemas Lineales con Observación Completa.

Consideremos el sistema descrito por la ecuación diferencial del estado:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + w(t), \quad (2.65)$$

con la condición inicial del estado

$$x(t_0) = x_0$$

y la variable controlable es

$$z(t) = D(t)x(t), \quad (2.66)$$

En (2.65) $w(t)$ es un ruido blanco con intensidad $V(t)$. La condición inicial del estado x_0 es una variable aleatoria, independiente del ruido blanco w , que

$$E(x_0 x_0^T) = Q_0$$

Considere el criterio

$$E \left\{ \int_{t_0}^T [z^T(t)R_3(t)z(t) + u^T(t)R_2(t)u(t)]dt + x^T(T)P_1x(T) \right\} \quad (2.67)$$

donde $R_3(t)$ y $R_2(t)$ son matrices simétricas definidas positivas para $t_0 \leq t \leq T$ y P_1 es simétrica definida no negativa. Entonces el problema de determinar para cada $t, t_0 \leq t \leq T$, la entrada $u(t)$ como función de toda la información de las pasado tal que el criterio es minimizado es llamado el problema del

regulador óptimo lineal estocástico. Si todas las matrices en la formulación del problema son constantes, nos referiremos a él como el problema del regulador óptimo lineal estocástico invariante en el tiempo.

Teorema 2.8 La solución óptima lineal del problema del regulador óptimo lineal estocástico es seleccionar la entrada acorde a la ley de control

$$u(t) = -R_2^{-1}(t)B^T(t)P(t)x(t) \quad (2,68)$$

Aquí $P(t)$ es la solución de la ecuación matricial de Riccati

$$-\dot{P}(t) = D^T(t)R_3(t)D(t) - P(t)B(t)R_2^{-1}(t)B^T(t)P(t) + A^T(t)P(t) + P(t)A(t) \quad (2,67)$$

con la condición terminal

$$P(T) = P_1$$

el valor mínimo del criterio está dado por

$$tr \left[P(t_0)Q_0 + \int_{t_0}^T P(t)V(t)dt \right] \quad (2,68)$$

2.5.5. Control Estocástico para Sistemas Lineales con Observación Incompleta.

Ahora consideremos el sistema:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + w_1(t), \quad (2,69)$$

$$x(t_0) = x_0$$

donde x_0 es un vector estocástico con esperanza \bar{x}_0 y matriz de varianzas Q_0 . La variable de observación está dada por

$$y(t) = C(t)x(t) + w_2(t) \quad (2,70)$$

El proceso estocástico adjunto $col(w_1, w_2)$ es un ruido blanco con intensidad

$$\begin{pmatrix} V_1(t) & V_{12}(t) \\ V_{21}(t) & V_2(t) \end{pmatrix}$$

La variable controlada puede ser expresada como

$$z(t) = D(t)x(t), \quad t \geq t_0 \quad (2,71)$$

Entonces el problema del regulador de salida óptimo lineal estocástico es el problema de buscar el funcional

$$u(t) = f[y(\tau), t_0 \leq \tau \leq t], \quad t_0 \leq t \leq T \quad (2,72)$$

tal que el criterio

$$E \left\{ \int_{t_0}^T [z^T(t)R_3(t)z(t) + u^T(t)R_2(t)u(t)]dt + x^T(T)P_1x(T) \right\} \quad (2,73)$$

es minimizado. Aquí $R_3(t)$, $R_2(t)$ y P_1 son matrices de peso simétricas tales que $R_2(t) > 0$, $R_3(t) > 0$ $t_0 \leq t \leq T$, y $R_2(t) \geq 0$.

Teorema 2.9 La solución óptima lineal del problema del regulador de salida óptimo lineal estocástico es el mismo que la solución del problema del regulador óptimo lineal estocástico excepto que en la ley de control el estado $x(t)$ es reemplazado con el mínimo estimado en promedio cuadrático $\hat{x}(t)$, esto es, la entrada es seleccionada como

$$u(t) = -R_2^{-1}(t)B^T(t)P(t)\hat{x}(t) \quad (2,74)$$

donde $\hat{x}(t)$ satisface la ecuación

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) + K(t)[y(t) - C(t)\hat{x}(t)], \quad (2,75)$$

$$\hat{x}(t_0) = \hat{x}_0$$

Aquí $K(t) = Q(t)C^T(t)V_2^{-1}$, la matriz de varianza $Q(t)$ es la solución de la ecuación de Riccati

$$\dot{Q}(t) = V_1(t) - Q(t)C^T(t)V_2^{-1}(t)C(t)Q(t) + A(t)Q(t) + P(t)A^T(t) \quad (2,76)$$

$$Q(t_0) = Q_0$$

y $P(t)$ satisface la ecuación matricial de Riccati

$$-\dot{P}(t) = D^T(t)R_3(t)D(t) - P(t)B(t)R_2^{-1}(t)B^T(t)P(t) + A^T(t)P(t) + P(t)A(t) \quad (2,77)$$

$$P(T) = P_1$$

.

2.6. Modos Deslizantes.

Consideremos el sistema no lineal dado por

$$\dot{x}(t) = f(t, x) + g(t, x)u(t), \quad (2,78)$$

donde $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$, $f(t, x) \in R^{n \times n}$, y $g(t, x) \in R^{n \times m}$. La componente de retroalimentación discontinua esta dada por

$$u_i = \begin{cases} u_i^+(t, x) & \sigma_i(x) > 0 \\ u_i^-(t, x) & \sigma_i(x) < 0 \end{cases} \quad (2,79)$$

donde $\sigma_i(x) = 0$ es la i -ésimo superficie deslizante, y

$$\sigma(x) = [\sigma_1(x), \sigma_2(x), \dots, \sigma_m(x)]^T = 0, \quad (2,80)$$

es la superficie deslizante $(n - m)$ dimensional.

2.6.1. Diseño de la superficie deslizante.

Supongamos que, en el instante del tiempo t_0 la trayectoria de estado de la planta intercepta la superficie deslizante y el modo deslizante existe para $t \geq t_0$. El control equivalente es buscar una entrada u_{eq} tal que la trayectoria del estado se mantenga en la superficie deslizante $\sigma(x) = 0$. La existencia del modo deslizante implica que $\sigma(x) = 0$ para todo $t \geq t_0$ y $\dot{\sigma}(x) = 0$.

Diferenciado $\sigma(x)$ con respecto al tiempo a lo largo de la trayectoria de (2.78) obtenemos

$$\left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] \dot{x} = \left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] [f(t, x) + g(t, x)u_{eq}] = 0, \quad (2.81)$$

donde u_{eq} es el llamado control equivalente. Note que bajo la acción del control equivalente u_{eq} cualquier trayectoria que inicia en la superficie $\sigma(x) = 0$ se mantiene en ella, desde $\dot{\sigma}(x) = 0$. Como consecuencia, la superficie deslizante $\sigma(x) = 0$ es un conjunto invariante.

Para calcular u_{eq} se asume que la el producto matricial $\left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] g(t, x)$ es no singular para todo t y x . Entonces

$$u_{eq} = - \left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} g(t, x) \right]^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x} f(t, x), \quad (2.82)$$

Por lo tanto, dado $\sigma(x(t_0)) = 0$, la dinámica del sistema sobre la superficie deslizante para $t \geq t_0$, es obtenido por sustituir (2.82) en (2.78), esto es,

$$\dot{x}(t) = \left[I - g(t, x) \left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} g(t, x) \right]^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] f(t, x), \quad (2.83)$$

En el caso especial de una superficie lineal $\sigma(x(t_0)) = Sx(t)$, (2.83) resulta en

$$\dot{x}(t) = \left[I - g(t, x) [Sg(t, x)]^{-1} S \right] f(t, x), \quad (2.84)$$

Note que (2.83) con la restricción de $\sigma(x) = 0$ determina el comportamiento del sistema en la superficie deslizante. Como un resultado, el movimiento en la superficie deslizante es gobernado por una reducción de orden para el conjunto de variables del estado restringidas a $\sigma(x) = 0$.

2.6.2. Diseño del Controlador.

El problema es escoger una control capaz de forzar la trayectoria del estado de la planta a la superficie deslizante y de mantener una condición de modo deslizante. La sumisión es que la superficie deslizante ya a sido diseñada. En este caso, el control $u(t)$ tiene la forma (2.79).

Método de Diagonalización. Este método está basado en la construcción de un nuevo vector de control u^* a través de una transformación no singular del control original definida por

$$u^*(t) = Q^{-1}(t, x) \left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] g(t, x) u(t) \quad (2.85)$$

donde $Q(t, x)$ es una matriz diagonal arbitraria de dimension $m \times m$ con elementos $q_i(t, x), i = 1, \dots, m$ tales que $\inf |q_i(t, x)| > 0$ para todo $t \geq 0$ y todo x .

En términos de u^* la dinámica del estado

$$\dot{x}(t) = f(t, x) + g(t, x) \left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} g(t, x) \right]^{-1} Q(t, x) u^*(t), \quad (2,86)$$

Para la existencia y alcanzabilidad del modo deslizante es suficiente que se satisfaga la condición $\sigma(x)\dot{\sigma}(x) < 0$. En términos de u^*

$$\dot{\sigma}(x) = \frac{\partial \sigma}{\partial x} f(t, x) + Q(t, x) u^*(t) \quad (2,87)$$

Entonces, las entradas u_i^{*+} y u_i^{*-} son seleccionadas para satisfacer

$$q_j(t, x) u_i^{*+} < - \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} f_j(t, x)$$

cuando $\sigma_j(x) > 0$

$$q_j(t, x) u_i^{*-} > - \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} f_j(t, x)$$

cuando $\sigma_j(x) < 0$.

Otros métodos.

Una posible estructura del control es

$$u_i = u_{i_{eq}} + u_{i_N}$$

donde $u_{i_{eq}}$ es la i -ésimo componente del control equivalente y donde u_{i_N} es el término discontinuo de (2.79). Para la condición $\sigma(x)\dot{\sigma}(x) < 0$ calculamos $\dot{\sigma}(x)$ como

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}(x) &= \left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] \dot{x} = \left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] [f(t, x) + g(t, x)(u_{i_{eq}} + u_{i_N})] \\ &= \left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] g(t, x) u_{i_N} \end{aligned}$$

por simplicidad, asumimos que $\left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] g(t, x) = I$. Entonces $\dot{\sigma}(x) = u_{i_N}$.

Definamos diferentes tipos de controles:

1. Función signo

$$u_{i_N} = -\alpha_i(x) \text{sign}(\sigma_i(x))$$

donde $\alpha_i(x) > 0$, para todo x y la función signo esta definida como

$$\text{sign}(\sigma_i(x)) = \begin{cases} 1, & \text{si } \sigma_i(x) > 0 \\ -1, & \text{si } \sigma_i(x) < 0 \\ 0, & \text{si } \sigma_i(x) = 0 \end{cases}$$

observe que el control satisface

$$\sigma_i(x)\dot{\sigma}_i(x) = -\alpha_i(x) \mid \sigma_i(x) \mid < 0$$

cuando $\sigma_i(x) \neq 0$.

2. Retroalimentación Lineal

$$u_{i_N} = -L\sigma(x)$$

donde $L \in R^{m \times m}$ es una matriz constante definida positiva. Observe que el control satisface

$$\sigma(x)\dot{\sigma}(x) = -\sigma^T(x)L\sigma(x) < 0$$

cuando $\sigma(x) \neq 0$.

3. Vector unitario

$$u_{i_N} = -\frac{\sigma(x)}{\|\sigma(x)\|}\rho, \quad \rho > 0$$

que implica que

$$\sigma(x)\dot{\sigma}(x) = -\rho\|\sigma(x)\| < 0$$

cuando $\sigma(x) \neq 0$.

CAPÍTULO 3

DISEÑO DE FILTRADO POR MODOS DESLIZANTES PARA SISTEMAS LINEALES CON ESTADOS NO MEDIBLES

3.1. Planteamiento del Problema de Filtrado

Sea (Ω, F, P) un espacio probabilístico completo con una familia de σ -álgebras $F_t, t \geq t_0$ creciente continua por la derecha, y sean $(W_1(t), F_t, t \geq t_0)$ y $(W_2(t), F_t, t \geq t_0)$ procesos estándar de Wiener independientes. Los procesos aleatorios $(x(t), y(t))$ F_t -medibles son descritos por una ecuación diferencial para el estado del sistema

$$dx(t) = (a_0(t) + a(t)x(t))dt + b(t)dW_1(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (3.1)$$

y la ecuación diferencial lineal para el proceso de observación

$$dY(t) = A(t)x(t)dt + B(t)dW_2(t). \quad (3.2)$$

Aquí, $x(t) \in R^n$ es el vector del estado y $y(t) \in R^m$, $m \leq n$, es el proceso de observación. La condición inicial $x_0 \in R^n$ es un vector Gaussiano tal que x_0 , $W_1(t)$, y $W_2(t)$ son independientes. Asumamos que $B(t)B^T(t)$ es una matriz definido positivo. Todos los coeficientes de (3.1)–(3.2) son funciones determinísticas del tiempo de dimensiones apropiadas.

Las ecuaciones del estado y observación pueden también ser escritas en una forma alternativa

$$\dot{x}(t) = a_0(t) + a(t)x(t) + b(t)\psi_1(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (3.1^*)$$

$$y(t) = A(t)x(t) + B(t)\psi_2(t), \quad (3.2^*)$$

donde $y(t) = \dot{Y}(t)$, y $\psi_1(t)$ y $\psi_2(t)$ son ruidos blancos Gaussian, que son derivadas en promedio cuadrático débil del proceso estándar de Wiener $W_1(t)$, y $W_2(t)$ (ver [51]). La representación (3.1),(3.2) y (3.1*), (3.2*) son equivalentes ([52]). Las ecuaciones (3.1*), (3.2*) presentan la forma convencional para las ecuaciones (3.1),(3.2), que es actualmente usado en la practica.

El problema de estimación es buscar el estimado $\hat{x}(t)$ del estado del sistema $x(t)$, basado en el proceso de observación $Y(t) = \{y(s), t_0 \leq s \leq t\}$, que minimice la norma promedio cuadrático

$$J = E[(x(t) - \hat{x}(t))^T (x(t) - \hat{x}(t)) | F_t^Y] \quad (3,3)$$

para todo momento del tiempo t . Aquí, $E[z(t) | F_t^Y]$ representa la esperanza condicional del proceso estocástico $z(t) = (x(t) - \hat{x}(t))^T (x(t) - \hat{x}(t))$ con respecto a σ - algebra F_t^Y generado por el proceso de observación $Y(t)$ en el intervalo $[t_0, t]$. Como sabemos [51], este estimado esta dado por la esperanza condicional

$$\hat{x}(t) = m(t) = E(x(t) | F_t^Y)$$

del estado del sistema $x(t)$ con respecto a la σ - algebra F_t^Y generado por el proceso de observación $Y(t)$ en el intervalo $[t_0, t]$. Como de costumbre, la función matricial

$$P(t) = E[(x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T | F_t^Y]$$

es el estimado de la varianza del error.

La bien conocida solución para el problema de filtrado planteado es el filtro Kalman-Bucy [44]. Una solución alternativa que involucra un término en modo de deslizamiento está dado en la sección 3 y entonces la probaremos el apéndice 1. Como demostramos, el filtro obtenido en modo deslizante es óptimo con respecto al criterio (3.3).

En este capítulo también incluye el problema de filtrado en promedio modulo para buscar el estimado $\hat{x}(t)$ del estado del sistema $x(t)$, basado en el proceso de observación $Y(t) = \{y(s), t_0 \leq s \leq t\}$, que minimiza la norma promedio-modulo

$$J = E[|x(t) - \hat{x}(t)| | F_t^Y] \quad (3,4)$$

para todo momento del tiempo t . Aquí, $|x| = [|x_1|, \dots, |x_n|] \in R^n$ es definido como el vector de valores absolutos de los componentes del vector $x \in R^n$.

La solución para el problema de filtrado planteado, involucra un término en modo deslizante, esta dado en la sección 4 y sera probado en el apéndice 2. Como demostramos, el filtro obtenido en modo deslizante es óptimo con respecto al criterio (3.4).

3.2. Diseño De Filtro En Modo Deslizante en Promedio Cuadrático

La solución del problema de filtrado en promedio cuadrático para el sistema lineal (3.1) y el criterio (3.3) está dado como sigue. El estimado en promedio cuadrático satisface la ecuación diferencial con un

término en modo deslizante

$$\dot{m}(t) = a_0(t) + a(t)m(t) + Q(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}A(t)\text{Sign}[A^T(t)(A(t)A^T(t))^{-1}y(t) - m(t)], \quad (3,5)$$

con la condición inicial $m(t_0) = E(x(t_0) | F_{t_0}^Y)$. Aquí, la función Signo de un vector $x = [x_1, \dots, x_n] \in R^n$ esta definido como $\text{Sign}[x] = [\text{sign}(x_1), \dots, \text{sign}(x_n)] \in R^n$, y la función signo de un escalar x esta definido como $\text{sign}(x) = 1$, si $x > 0$, $\text{sign}(x) = 0$, si $x = 0$, y $\text{sign}(x) = -1$, si $x < 0$ ([53]).

La función matricial $Q(t)$ satisface la ecuación matricial con coeficientes variantes en el tiempo

$$\dot{Q}(t) = (b(t)b^T(t))* | A^T(t)(A(t)A^T(t))^{-1}y(t) - m(t) | + a(t)Q(t), \quad (3,6)$$

Con la condición inicial

$$Q(t_0) = E[(x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T | F_{t_0}^Y] * | A^T(t_0)(A(t_0)A^T(t_0))^{-1}y(t_0) - m(t_0) |.$$

Aquí, $|x| = [|x_1|, \dots, |x_n|] \in R^n$ esta definido como el vector absoluto de los componentes del vector $x \in R^n$, y $A * b$ denota el producto entre la matriz $A \in R^{n \times n}$ y el vector $b \in R^n$, que resulta en la matriz definida como sigue: todas las entradas de la j -th columna de la matriz A es multiplicada por la j -th componente del vector b , $j = 1, \dots, n$.

El resultado presentado esta formulado en el siguiente teorema.

Teorema 3.1 El filtro en promedio cuadrático para el estado lineal (3.1) sobre observaciones lineales (3.2) esta dado por la ecuación (3.5) para el estimado $m(t) = E(x(t) | F_t^Y)$ y la ecuación (3.6) para la matriz de ganancia del filtro $Q(t)$.

3.2.1. Ejemplo I

Esta sección presenta un ejemplo ilustrando el filtro por modos deslizantes en promedio cuadrático diseñado para sistemas lineales (3.1),(3.2), usando las ecuaciones de filtrado (3.5),(3.6).

Considere un estado lineal escalar no medible

$$\dot{x}(t) = x(t) + \psi_1(t), \quad x(0) = x_0, \quad (3,7)$$

y el proceso de observación lineal escalar

$$y(t) = x(t) + \psi_2(t), \quad (3,8)$$

donde $\psi_1(t)$ and $\psi_2(t)$ son ruidos blancos Gaussianos, que son la derivada en promedio cuadrático débil de un proceso estándar de Wiener (ver [51]). Las ecuaciones (3.7),(3.8) corresponden a la forma convencional alternativa (3.1*), (3.2*) para las ecuaciones (3.1),(3.2).

El problema de filtrado es buscar el estimado en promedio cuadrático para el estado lineal (3.7), usando observaciones lineales (3.8) confundido con disturbios modelados como ruidos blancos Gaussianos independientes e idénticamente distribuidos.

Las ecuaciones de filtrado (3.5),(3.6) toma la siguiente forma particular para el sistema (3.7),(3.8)

$$\dot{m}(t) = m(t) + Q(t)\text{sign}[y(t) - m(t)], \quad (3.9)$$

con la condición inicial $m(0) = E(x(0) | y(0)) = m_0$,

$$\dot{Q}(t) = Q(t) + |y(t) - m(t)|, \quad (3.10)$$

con la condición inicial $Q(0) = E((x(0) - m(0))(x(0) - m(0))^T | y(0)) + |y(0) - m(0)|$.

El estimado obtenido antes resolviendo las ecuaciones (3.9),(3.10) son comparadas con el estimado que satisface las ecuaciones de filtrado de Kalman-Bucy [44] para el sistema lineal (3.7),(3.8)

$$\dot{m}_K(t) = m_K(t) + P(t)[y(t) - m_K(t)], \quad (3.11)$$

con la condición inicial $m(0) = E(x(0) | y(0)) = m_0$,

$$\dot{P}(t) = 1 + 2P(t) - P^2(t), \quad (3.12)$$

con la condición inicial $P(0) = E((x(0) - m(0))(x(0) - m(0))^T | y(0))$.

Los resultado de la simulación numérica son obtenidos resolviendo el sistema de ecuaciones (3.9),(3.10) y (3.11),(3.12). Los valores obtenidos de los estimados $m(t)$ y $m_K(t)$ satisfacen las ecuaciones (3.9) y (3.11), respectivamente, son comparadas con los valores de la variable estado $x(t)$ en (3.7).

Para cada filtro (3.9),(3.10) y (3.11),(3.12) y el sistema de referencia (3.7),(3.8), involucrados en la simulación, asignamos los siguientes valores iniciales: $x_0 = 1$, $m_0 = 10$, $P(0) = 100$, $Q(0) = 866,9$. El horizonte de filtrado se ajusta a $T = 0,4$. Los disturbios Gaussianos $\psi_1(t)$ y $\psi_2(t)$ en (3.7),(3.8) son realizados usando funciones de ruidos blancos en MatLab.

Son obtenidas las siguientes gráficas: En la Fig. 3.1. tenemos la gráfica de referencia del estado $x(t)$, satisfaciendo la ecuación (3.7), el estimado del filtro en modo deslizante en promedio cuadrático $m(t)$, satisfaciendo la ecuación (3.9), y el estimado del filtro de Kalman-Bucy $m_K(t)$, satisfaciendo la ecuación (3.11), son mostradas en el intervalo de simulación $[0, 0,4]$. Además, en la Fig. 3.2 el estimado del filtro en modo deslizante en promedio cuadrático $m(t)$, promediado por un filtro Butterworth y todas las variables de la Fig. 3.1 se muestran a detalle en el intervalo $[0,2, 0,4]$.

Se puede observar que los estimados dados por ambos filtros generan el mismo mínimo del estimado de la varianza del error, aunque las matrices de ganancia $Q(t)$ y $P(t)$ son diferentes

3.2.2. Apéndice I

Demostración del teorema 3.1 La bien conocida solución clásica de problema de filtrado para sistemas lineales (3,1*) sobre observaciones lineales (3,2*) con respecto al criterio en promedio cuadrático (3.3) esta dado por el filtro de Kalman-Bucy [44]. El estimado en promedio cuadrático $m(t) = E(x(t) | F_t^Y)$ está gobernado por la ecuación

$$\dot{m}(t) = a_0(t) + a(t)m(t) + P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}A(t)[A^T(t)(A(t)A^T(t))^{-1}y(t) - m(t)].$$

con la condición inicial $m(t_0) = E(x(t_0) | F_{t_0}^Y)$. El estimado de la matriz de varianza del error en promedio cuadrático $P(t)$ satisface la ecuación de Riccati

$$\dot{P}(t) = a(t)P(t) + P(t)a^T(t) + b(t)b^T(t) - P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}A(t)P(t),$$

con la condición inicial $P(t_0) = E[(x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T | F_{t_0}^Y]$.

Vamos a demostrar que el filtro de Kalman-Bucy coincide con el diseño del filtro en promedio cuadrático (3.5),(3.6). En efecto, introduciendo la nueva matriz de ganancia $Q(t) = P(t) * | A^T(t)(A(t)A^T(t))^{-1}y(t) - m(t) |$, la anterior ecuación del estimado para $m(t)$ coincide con la ecuación (3.5). Además, en vista de la ecuación del estimado para $m(t)$, la ecuación (3.1) y la ecuación $A(t)(A^T(t)(A(t)A^T(t))^{-1}y(t) - m(t)) = A(t)(x(t) - m(t) + A^T(t)(A(t)A^T(t))^{-1}B(t)\psi_2(t))$, la recién introducida matriz de ganancia $Q(t)$ satisface la ecuación

$$\begin{aligned} \dot{Q}(t) &= E(\dot{Q}(t) | F_t^Y) = E\left(\frac{d(P(t) * | A^T(t)(A(t)A^T(t))^{-1}y(t) - m(t) |)}{dt} | F_t^Y\right) = \\ &E\left(\frac{dP(t)}{dt} * | A^T(t)(A(t)A^T(t))^{-1}y(t) - m(t) | + P(t) * \frac{d(| A^T(t)(A(t)A^T(t))^{-1}y(t) - m(t) |)}{dt} | F_t^Y\right) = \\ &E((P(t)a^T(t) + a(t)P(t) + b(t)b^T(t) - P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}A(t)P(t)) * \\ &| A^T(t)(A(t)A^T(t))^{-1}y(t) - m(t) | + (-P(t)a^T(t) * | A^T(t)(A(t)A^T(t))^{-1}y(t) - m(t) | + \\ &P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}A(t)P(t) * | A^T(t)(A(t)A^T(t))^{-1}y(t) - m(t) |) | F_t^Y) = \\ &b(t)b^T(t) * | A^T(t)(A(t)A^T(t))^{-1}y(t) - m(t) | + a(t)P(t) * | A^T(t)(A(t)A^T(t))^{-1}y(t) - m(t) | = \\ &b(t)b^T(t) * | A^T(t)(A(t)A^T(t))^{-1}y(t) - m(t) | + a(t)Q(t), \end{aligned}$$

con la condición inicial

$Q(t_0) = E[(x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T | F_{t_0}^Y] * | A^T(t_0)(A(t_0)A^T(t_0))^{-1}y(t_0) - m(t_0) |$, que coincide con (3.6). El teorema es probado. ■

3.3. Diseño del Filtro en Modo Deslizante en Promedio Modulo

La solución del problema de filtrado en promedio modulo para sistemas lineales (3.1) y el criterio (3.4) es dado a continuación. El estimado en promedio cuadrático satisface la ecuación diferencial con un término en modo deslizante

$$\dot{m}(t) = a_0(t) + a(t)m(t) + Q(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}A(t)\text{Sign}[A^T(t)(A(t)A^T(t))^{-1}y(t) - m(t)]. \quad (3.13)$$

con la condición inicial $m(t_0) = E(x(t_0) | F_{t_0}^Y)$, donde la función signo es definida en la sección 3.3.

La función matricial $Q(t)$ satisface la ecuación matricial con coeficientes de tiempo variante.

$$\dot{Q}(t) = b(t)b^T(t) + a(t)Q(t), \quad (3.14)$$

con la condición inicial $Q(t_0) = E[(x(t_0) - m(t_0))(Sign(A^T(t_0)(A(t_0)A^T(t_0))^{-1}A(t_0)x(t_0) - m(t_0)))^T | F_{t_0}^Y]$.

El resultado presentado es formulado en el siguiente teorema.

Teorema 3.2 El filtro en promedio modulo para el estado lineal (3.1) sobre observaciones lineales (3.2) esta dado por las ecuaciones (3.13) para el estimado $m(t)$ y la ecuación (3.14) para la matriz de ganancia del filtro $Q(t)$.

3.3.1. Ejemplo II

En esta sección presentamos un ejemplo ilustrando el filtro en modo deslizante en promedio modulo diseñado para sistemas lineales (3.1),(3.2), usando las ecuaciones de filtrado (3.13),(3.14).

Consideraré de nuevo un estado lineal, escalar, no medible

$$\dot{x}(t) = x(t) + \psi_1(t), \quad x(0) = x_0, \quad (3.15)$$

y el proceso de observación lineal escalar

$$y(t) = x(t) + \psi_2(t), \quad (3.16)$$

donde $\psi_1(t)$ and $\psi_2(t)$ son ruidos blancos Gaussianos.

El problema de Filtrado es buscar un estimado en promedio modulo para el estado lineal (3.15), usando observaciones lineales (3.16) confundido con disturbio modelados como ruidos blancos Gaussianos independientes e idénticamente distribuidos.

Las ecuaciones de filtrado (3.13),(3.14) toman la forma particular para el sistema (3.15),(3.16)

$$\dot{m}(t) = m(t) + Q(t)\text{sign}[y(t) - m(t)], \quad (3.17)$$

con la condición inicial $m(0) = E(x(0) | y(0)) = m_0$,

$$\dot{Q}(t) = Q(t) + 1, \quad (3.18)$$

con la condición inicial $Q(0) = E((x(0) - m(0))(Sign(x(0) - m(0)))^T | y(0))$.

El estimado obtenido antes resolviendo las ecuaciones (3.17),(3.18) son también comparados con el estimado que satisface las ecuaciones de filtrado de Kalman-Bucy (3.11),(3.12).

Para cada filtro (3.17),(3.18) y (3.11),(3.12) y la referencia del sistema (3.15),(3.16), involucrados en la simulación, se les asigna los siguientes valores iniciales: $x_0 = 1$, $m_0 = 10$, $P(0) = Q(0) = 100$. El horizonte de filtrado se ajusta a $T = 0,4$.

Note que la condición inicial $P(0)$ y $Q(0)$ son asignado iguales por propósitos de la simulación, donde los resultados deberán ser comparados con respecto al criterio en promedio modulo (3.4). Si el valor inicial para Q es asignado como $Q(0) = 10$, el filtro de Kalman-Bucy daría un mejor resultado como el mejor filtro lineal en promedio cuadrático.

Se obtiene las siguientes gráficas: La gráfica del estado de referencia $x(t)$, satisfaciendo la ecuación (3.15), el estimado del filtro de modos deslizantes en promedio modulo $m(t)$, satisfaciendo las ecuaciones (3.17), y el estimado del filtro de Kalman-Bucy en promedio cuadrático $m_K(t)$, satisfaciendo la ecuación (3.11), se muestran en el intervalo entero de $[0, 0,4]$ en Fig. 3.3.

Se puede observar que el filtro de modo deslizantes en promedio modulo (3.17),(3.18) arroja un valor ciertamente mejor del criterio en promedio modulo (3.4) en comparación con el filtro de Kalman-Bucy (3.11),(3.12).

Nota que la comparación de el filtro de modo deslizante en promedio modulo diseñado (3.17),(3.18) con el filtro de Kalman-Bucy en promedio cuadrático (3.11),(3.12) con respecto al criterio (3.4) es lleva acabo con fines ilustrativos, siendo que el filtro (3.17),(3.18) teóricamente deberá dar un mejor resultado , como se sigue del teorema 2.

3.3.2. Apéndice II

Demostración del teorema 3.2 Acorde a la teoría general de filtrado en base al proceso de innovación [51], el estimado óptimo es una función lineal que minimiza el criterio residual. Sin embargo, el estimado de Kalman-Bucy en promedio cuadrático depende linealmente de la integral de $x(t) - E(x(t) | F_t^Y)$, que es la derivada del mínimo residuo en promedio cuadrático $(1/2)(x(t) - E(x(t) | F_t^Y))^T(x(t) - E(x(t) | F_t^Y))$, dado que el lado derecho la ecuación del estimado del filtro de Kalman-Bucy linealmente incluye la derivada del término $x(t) - E(x(t) | F_t^Y)$ (see [44]). Similar mente, la ecuación del estimado en promedio modulo linealmente incluye la derivada $Sign(x(t) - E(x(t) | F_t^Y))$ del mínimo residuo en promedio modulo $|x(t) - E(x(t) | F_t^Y)|$ en el criterio (3.4). Por lo tanto, el estimado en promedio modulo puede ser representado por la ecuación (3.13)

$$\dot{m}(t) = a_0(t) + a(t)m(t) + Q(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}A(t)Sign[A^T(t)(A(t)A^T(t))^{-1}y(t) - m(t)].$$

con la condición inicial $m(t_0) = E(x(t_0) | F_{t_0}^Y)$. Aquí, la matriz de ganancia $Q(t)$ deberá ser reselectionada para minimizar la varianza condicional del estimado del error producida por el estimado $m(t)$. Acorde a la formula de Itô (Ver, por ejemplo, [51]), la ecuación para el estimado de la varianza del error condicional $P(t) = E[(x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T | F_t^Y]$, producida por el estimado $m(t)$, toma la forma

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) = & a(t)P(t) + P(t)a^T(t) + b(t)b^T(t) - Q(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}A(t) \times \\ & E(\text{Sign}(A^T(t)(A(t)A^T(t))^{-1}A(t)x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T | F_t^Y) - E((x(t) - m(t)) \times \\ & \times (\text{Sign}(A^T(t)(A(t)A^T(t))^{-1}A(t)x(t) - m(t))^T | F_t^Y)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}A(t)Q^T(t) + \\ & Q(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}A(t)Q^T(t). \end{aligned}$$

Como se sigue de las ecuaciones anteriores, la variable $P(t)$ es minima, si la matriz de ganancia $Q(t)$ es asignada como $Q(t) = E((x(t) - m(t))(\text{Sign}(A^T(t)(A(t)A^T(t))^{-1}A(t)x(t) - m(t)))^T | F_t^Y)$. En vista de la formula de Itô, la ecuación para $Q(t)$ esta dada por (3.14) con la condición inicial $Q(t_0) = E[(x(t_0) - m(t_0))(\text{Sign}(A^T(t_0)(A(t_0)A^T(t_0))^{-1}A(t_0)x(t_0) - m(t_0)))^T | F_{t_0}^Y]$. El teorema esta probado. ■

3.4. Conclusiones

Este capítulo presenta el problema de filtrado en promedio cuadrático y promedio modulo y el diseño de las soluciones como filtros basados en una ganancia en modo deslizante. Ambos problemas de filtrado son considerados para sistemas lineales con ruidos blancos Gaussianos. Se demuestra que el diseño del filtro en modo deslizante en promedio cuadrático generado por el estimado en promedio cuadrático, obtiene el mismo mínimo del estimado de la varianza del error que el mejor estimado dado por el filtro clásico de Kalman-Bucy, aunque las matrices de ganancia de ambos filtros son diferentes. Esto es verificado numéricamente en un ejemplo que el estimado producido por el diseño del filtro en modo deslizante en promedio cuadrático y el filtro de Kalman-Bucy producen el mismo mínimo del estimado de la varianza del error. Por otro lado, el diseño del filtro en modos deslizantes en promedio modulo generado por el estimado en promedio modulo, que el mejor valor del criterio en promedio modulo en comparación con el filtro de Kalman-Bucy en promedio cuadrático. Esta conclusion es teóricamente probada y verificada numéricamente en el ejemplo. La aproximación propuesta basada en involucrar el término de innovación en modo deslizante es esperado para ser aplicado a otros problemas de filtrado con criterios sin promedio cuadrático donde el filtro convencional lineal de Kalman-Bucy no funciona, en particular, sistemas polinomiales.

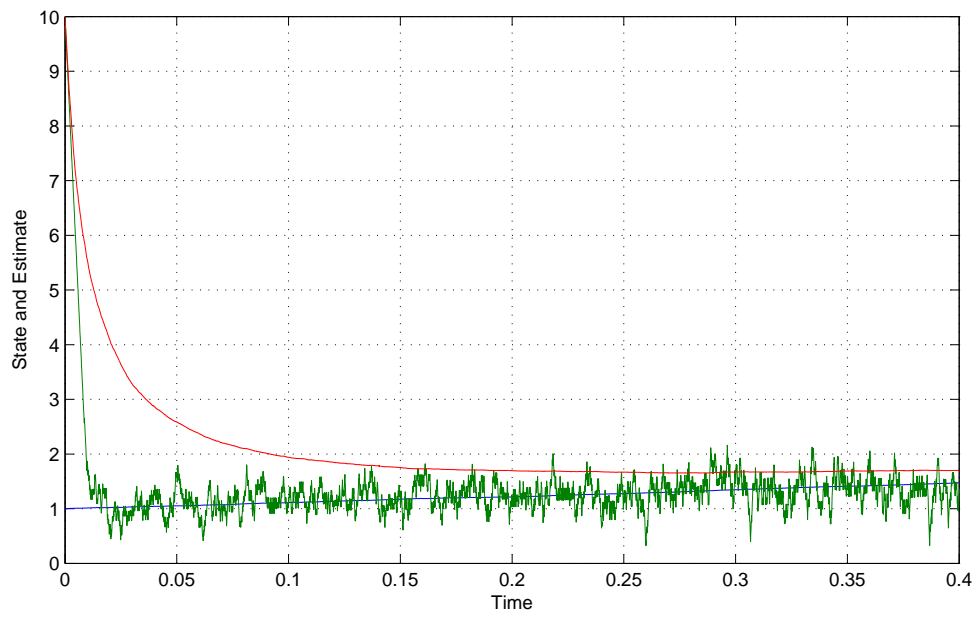


Figura 3.1: Las gráficas del estado no medible (3.7) $x(t)$ (Azul), el estimado de modo deslizante en promedio cuadrático (3.9) $m(t)$ (Verde), y el estimado de Kalman-Bucy (3.11) $m_K(t)$ (Rojo) en el intervalo $[0, 0,4]$.

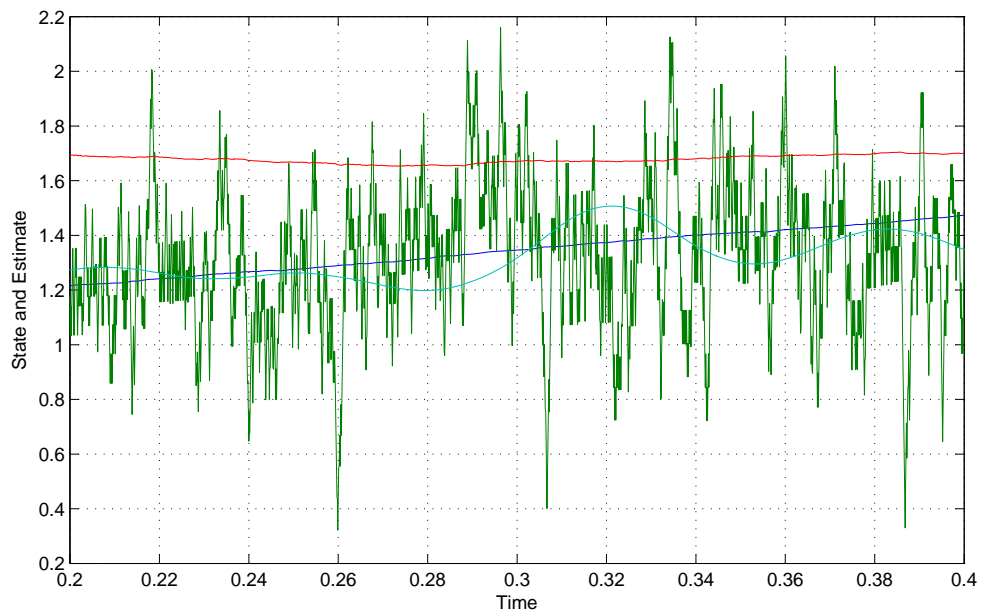


Figura 3.2: Las gráficas del estado no medible (3.7) $x(t)$ (Azul), el estimado de modo deslizante en promedio cuadrático (3.9) $m(t)$ (Verde), el estimado de modo deslizante en promedio cuadrático (3.9) $m(t)$ promediado por el filtro Butterworth (Celeste), y el estimado de Kalman-Bucy (3.11) $m_K(t)$ (Rojo) en el intervalo $[0,2,0,4]$.

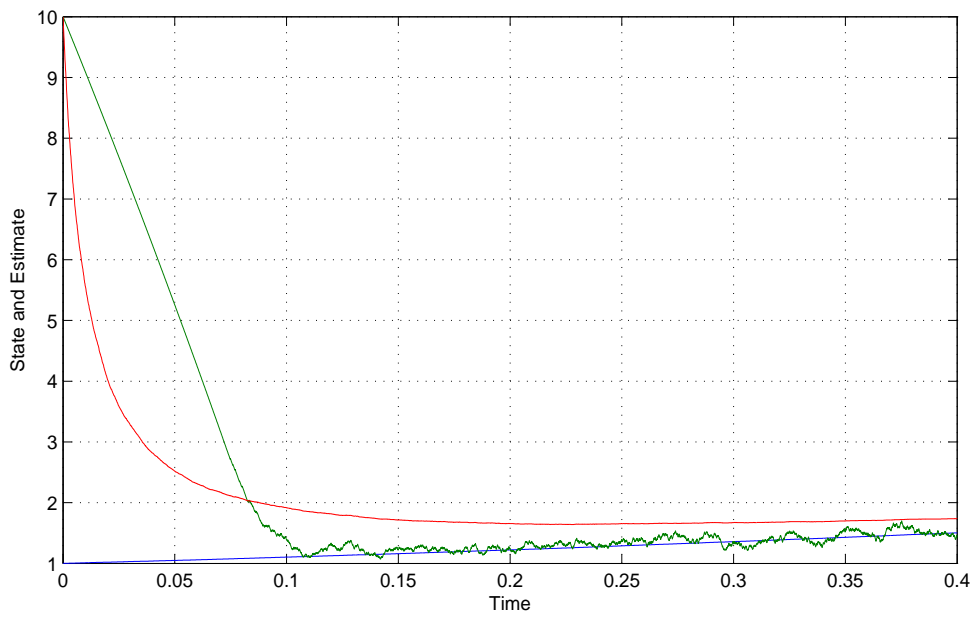


Figura 3.3: Las gráficas del estado no medible (3.15) $x(t)$ (Azul), el estimado de modo deslizante en promedio modulo (3.17) $m(t)$ (Verde), y el estimado de Kalman-Bucy (3.11) $m_K(t)$ (Rojo) en el intervalo $[0, 0.4]$.

CAPÍTULO 4

DISEÑO DEL CONTROLADOR POR MODOS DESLIZANTES PARA SISTEMAS LINEALES CON ESTADOS NO MEDIBLES

4.1. Problema de Controlador Óptimo

4.1.1. Planteamiento del Problema

Sea (Ω, F, P) un espacio probabilístico completo con una familia de σ -álgebras $F_t, t \geq t_0$ creciente continua por la derecha, y sean $(W_1(t), F_t, t \geq t_0)$ y $(W_2(t), F_t, t \geq t_0)$ procesos estándar de Wiener independientes. Los procesos aleatorios $(x(t), y(t))$ F_t -medibles son descritos por una ecuación diferencial para el estado del sistema

$$dx(t) = a(t)x(t)dt + B(t)u(t)dt + b(t)dW_1(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (4.1)$$

y la ecuación diferencial lineal para el proceso de observación

$$dy(t) = A(t)x(t)dt + G(t)dW_2(t). \quad (4.2)$$

Aquí, $x(t) \in R^n$ es el vector de estados, $u(t) \in R^l$ es la entrada de control, y $y(t) \in R^m$ es el vector de observación lineal, $m \leq n$. La condición inicial $x_0 \in R^n$ es un vector Gaussiano tal que $x_0, W_1(t) \in R^p$, y $W_2(t) \in R^q$ son independientes. La matriz de observación $A(t) \in R^{m \times n}$ no se supone que sea invertible o cuadrada. Asumimos que $G(t)G^T(t)$ es una matriz definida positiva, por lo tanto, $m \leq q$. Todos los coeficientes en (4.1)–(4.2) son funciones determinísticas de dimensiones apropiadas. Sin pérdida de generalidad, el sistema (4.1) (el par (A, B)) se asume que sea controlable, esto es, los componentes del estado no controlables no son considerados.

Las ecuaciones del estado y observación pueden ser escritas en una forma alternativa

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + B(t)u(t) + b(t)\psi_1(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (4.1^*)$$

$$y(t) = A(t)x(t) + B(t)\psi_2(t), \quad (4.2^*)$$

donde $y(t) = \dot{Y}(t)$, y $\psi_1(t)$ y $\psi_2(t)$ son ruidos blancos Gaussianos, que son derivada en promedio cuadrático débil de un proceso estándar de Wiener $W_1(t)$, y $W_2(t)$ (ver [51]). La representación (4.1),(4.2) y (4.1*), (4.2*) son equivalentes ([52]). Las ecuaciones (4.1*), (4.2*) presentan la forma convención para las ecuaciones (4.1),(4.2), que son actualmente usadas en la practica.

En el problema de control óptimo lineal clásico [54, 55], el criterio para minimizar es definido como un funcional cuadrático Bolza-Meyer:

$$J_3 = E\left[\frac{1}{2}[x(T)]^T \psi[x(T)] + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T (u^T(s)R(s)u(s) + x^T(s)L(s)x(s))ds\right],$$

donde $R(t)$ es definido positivo y ψ , $L(t)$ son funciones matriciales simétricas definidas no negativas, y $T > t_0$ es un cierto momento del tiempo. El símbolo $E[f(x)]$ representa la esperanza (promedio) de la función f de la variable aleatoria x , y a^T denota la traspuesta del vector (matriz) a . La solución del problema es bien conocida [54, 55] y considerada como fundamental en la teoría de sistemas lineales óptimos.

En este capítulo, el criterio a minimizar incluye un término terminal no cuadrático o un término de la energía del estado no cuadrático o ambos y son definidos como:

$$J_1 = E\left[\sum_{i=1}^n \psi_{ii} | x_i(T) | + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T (u^T(s)R(s)u(s) + x^T(s)L(s)x(s))ds\right], \quad (4.3)$$

$$J_2 = E\left[\sum_{i=1}^n \psi_{ii} | x_i(T) | + \int_{t_0}^T \frac{1}{2}(u^T(s)R(s)u(s))ds + \sum_{i=1}^n L_{ii}(s) | x_i(s) | ds\right], \quad (4.4)$$

donde $R(s)$ es definida positiva y $L(s)$ es una función matricial simétrica continua definida no negativa, ψ es una matriz diagonal definida no negativa, y $|x_i|$ denota el valor absoluto de los componentes de x_i del vector $x \in R^n$.

El problema de control óptimo es buscar un control $u^*(t)$, $t \in [t_0, T]$, que minimice el criterio J a lo largo de la trayectoria no observable $x^*(t)$, $t \in [t_0, T]$, generada al sustituir $u^*(t)$ dentro de la ecuación del estado (4.1).

La solución del problema del control óptimo planteado esta dado en las siguientes secciones.

4.2. Diseño del Control en Promedio Cuadrático

4.2.1. Principio de Separación I.

LA solución del primer problema, de acuerdo con el principio de separación para sistemas estocásticos lineales (ver [54, 55]), el estado lineal no medible $x(t)$, satisfaciendo (4.1), es reemplazado con el estimado en promedio cuadrático $m(t)$ sobre observaciones lineales $y(t)$ (4.2), que es obtenido usando el filtro de modos deslizantes en promedio cuadrático para sistemas lineales (ver [57] Para el planteamiento y solución del problema de filtrado correspondiente)

$$\dot{m}(t) = a(t)m(t) + B(t)u(t) + K(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1} \times A(t) \text{Sign}[A^T(t)(A(t)A^T(t))^{-1}y(t) - m(t)]. \quad (4,5)$$

$$m(t_0) = m_0 = E(x(t_0) | F_{t_0}^Y),$$

$$\dot{K}(t) = (b(t)b^T(t)) * | A^T(t)(A(t)A^T(t))^{-1}y(t) - m(t) | + K(t)a^T(t), \quad (4,6)$$

$$K(t_0) = E[(x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T | F_{t_0}^Y] * | A^T(t_0)(A(t_0)A^T(t_0))^{-1}y(t_0) - m(t_0) |.$$

Aquí, La función Signo de un vector $x = [x_1, \dots, x_n] \in R^n$ esta definido como $\text{Sign}[x] = [\text{sign}(x_1), \dots, \text{sign}(x_n)] \in R^n$, y la función signo de un escalar x es definido como $\text{sign}(x) = 1$, si $x > 0$, $\text{sign}(x) = 0$, si $x = 0$, y $\text{sign}(x) = -1$, si $x < 0$ ([53]). un vector $|x| = [|x_1|, \dots, |x_n|] \in R^n$ es definido como el vector de valores absolutos de los componentes del vector $x \in R^n$, y $A * b$ denota un producto entre una matriz $A \in R^{n \times n}$ y un vector $b \in R^n$, que resulta en la matriz definida como: Todas las entradas de la j -th columna de la matriz A son multiplicados por el j -th componente del vector b , $j = 1, \dots, n$.

Recordando que $m(t)$ es el estimado en promedio cuadrático para el vector de estado $x(t)$, basado en el proceso de observación $Y(t) = \{y(s), t_0 \leq s \leq t\}$, que minimiza la norma en promedio cuadrático

$$H = E[(x(t) - m(t))^T(x(t) - m(t)) | F_t^Y]$$

para todo momento del tiempo t . Aquí, $E[\xi(t) | F_t^Y]$ Es la esperanza condicional del proceso estocástico $\xi(t) = (x(t) - m(t))^T(x(t) - m(t))$ con respecto a la σ -algebra F_t^Y generado por el proceso de observación $Y(t)$ en el intervalo $[t_0, t]$. Como sabemos [51], Este estimado óptimo esta dado por la esperanza condicional

$$m(t) = E(x(t) | F_t^Y)$$

del estado $x(t)$ con respecto a la σ -algebra F_t^Y generada por el proceso de observación $Y(t)$ en el intervalo $[t_0, t]$. Como siempre, la función matricial

$$P(t) = E[(x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T | F_t^Y]$$

es el estimado de la varianza del error.

Es fácil verificar (ver [54, 55]) que el problema de control óptimo para el estado del sistema (4.1) y la función de costo (4.3) es equivalente al problema de control óptimo para el estimado (4.5) y el función de costo J_1 representada como

$$J_1 = \sum_{i=1}^n \psi_{ii} | m_i(T) | + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T (u^T(s)R(s)u(s) + m^T(s)L(s)m(s))ds + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T tr[P(s)L(s)]ds + tr[P^{-1}(T)K(T)\psi], \quad (4,7)$$

donde $tr[A]$ denota la traza de la matriz A . Donde la ultima parte de J_1 no depende del control $u(t)$ o del estado $x(t)$, la reducción de la función de costo M_1 para minimizar toma la forma

$$M_1 = \sum_{i=1}^n \psi_{ii} | m_i(T) | + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T (u^T(s)R(s)u(s) + m^T(s)L(s)m(s))ds. \quad (4,8)$$

Así, la solución del problema de control óptimo especificado por (4.1),(4.3) puede ser hecho resolviendo el problema de control óptimo dado por (4.4),(4.8). Finalmente, el mínimo valor del criterio J_1 deberá ser determinado usando (4.7). Esta conclusión presenta el principio de separación para sistemas lineales con criterio no cuadrático (4.3).

4.2.2. Solución del Problema de Control Óptimo. I

La solución optima del problema de control definido por (4.4),(4.8) esta dado por [22]. Aplicando el principio de separación de la sección anterior para el filtro en modo deslizante en promedio cuadrático en [57] y el regulador óptimo en modo deslizante [22], el control óptimo que resuelve el problema original (4.1)–(4.3) esta dado por el siguiente teorema.

Teorema 4.1 El control óptimo para el sistema lineal (4.1) sobre observaciones lineales (4.2) con respecto al criterio no cuadrático (4.3) esta dado por la ley de control

$$u(t) = R^{-1}(t)B^T(t)Q(t)Sign[m(t)], \quad (4,9)$$

donde la función matricial $Q(t)$ es la solución de la ecuación matricial

$$\dot{Q}(t) = L(t)* | m(t) | -a^T(t)Q(t). \quad (4,10)$$

La condición terminal de la ecuación (4.10) esta definida como $Q(T) = -\psi$, si el estado $m(t)$ no llega a la superficie deslizante $m(t) = 0$ dentro del intervalo de $[t_0, T]$, $m(t) \neq 0$, $t \in [t_0, T]$. De otra manera, si el estado $m(t)$ llega a la superficie deslizante $m(t) = 0$ dentro del intervalo de tiempo $[t_0, T]$, $m(t) = 0$ para algún $t \in [t_0, T]$, entonces $Q(t)$ se fija igual a la función matricial $Q_0(t)$ que es la tal una solución de (4.10) haciendo que $m(t)$ llegue a la superficie deslizante $m(t) = 0$ bajo la ley de control (4.8) con la matriz $Q_0(t)$ exactamente en el momento $t = T$, $m(T) = 0$, perom $m(t) \neq 0$, $t < T$.

Sustituyendo el anterior control óptimo (4.9) en la ecuación (4.5), se obtiene la siguiente ecuación del estimado del estado controlado óptimamente

$$\begin{aligned} \dot{m}(t) = a(t)m(t) + B(t)R^{-1}(t)B^T(t)Q(t)Sign[m(t)] + K(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1} \times \\ A(t)Sign[A^T(t)(A(t)A^T(t))^{-1}y(t) - m(t)], \end{aligned} \quad (4.11)$$

con la condición inicial $m(t_0) = E(x(t_0) | F_t^Y)$.

Demostración Se sigue fácilmente de la aplicación del principio de separación de la sección anterior para el filtro de modos deslizantes en promedio cuadrático en [57] y el regulador en modo deslizante óptimo en [22]. ■

Así, la ecuación del estimado controlado óptimamente (4.11), la ecuación matricial de ganancia del control (4.10), la ley de control (4.9), y las ecuación matricial de ganancia del filtro (4.5) dan la solución completa del problema de control óptimo para sistemas lineales sobre observaciones lineales y con función de criterio no cuadrático (4.3).

4.2.3. Ejemplo I.

Esta sección presenta un ejemplo del diseño del controlador por modos deslizantes para sistemas lineales (4.1) sobre observaciones lineales (4.2) con criterio no cuadrático (4.3), usando el control (4.6),(4.9)–(4.11), y comparándolo con el mejor disponible controlador LQG.

Considere la ecuación del estado lineal

$$\dot{x}(t) = x(t) + u(t) + \psi_1(t), \quad x(0) = 1, \quad (4.12)$$

y un proceso de observación lineal

$$y(t) = x(t) + \psi_2(t), \quad (4.13)$$

donde $\psi_1(t)$ and $\psi_2(t)$ son ruidos blancos Gaussian, que son la derivada en promedio cuadrático débil de un proceso estándar de Wiener (ver [51]). Las ecuaciones (4.12),(4.13) corresponden a la forma convencional alternativa (4.1*), (4.2*) para las ecuaciones (4.1),(4.2).

El problema de controlador es buscar un control $u(t)$, $t \in [0, T]$, $T = 1, 2$, que minimice el criterio

$$J_1 = 50 |x(T)| + \frac{1}{2} \int_0^T (u^2(t) + x^2(t))dt, \quad (4.14)$$

En otras palabras, el problema de control es minimizar la energía total del estado x usando el mínimo de la energía total del control u .

Aplicando el controlador por modos deslizantes (4.6),(4.9)–(4.11), y la ley de control (4.9) esta dado por

$$u(t) = Q(t)sign[x(t)], \quad (4.15)$$

donde $m(t)$ satisface la ecuación

$$\dot{m}(t) = m(t) + u(t) + K(t)\text{sign}[y(t) - m(t)], \quad (4.16)$$

con la condición inicial $m(0) = E(x(0) | y(0)) = m_0$, $K(t)$ satisface la ecuación

$$\dot{K}(t) = K(t) + |y(t) - m(t)|, \quad (4.17)$$

con la condición inicial $K(0) = E((x(0) - m(0))(x(0) - m(0))^T | y(0)) * |y(0) - m(0)|$, y $Q(t)$ satisface la ecuación

$$\dot{Q}(t) = |m(t)| - Q(t), \quad (4.18)$$

con la condición terminal $Q(1,2) = -50$, si $m(t) \neq 0$ para cualquier $t < 5$, y $Q^*(t^*) = 0$, donde t^* es el tiempo que el estimado $m(t)$ llega a la superficie deslizante $m = 0$ en el momento final $t = T$, de otra forma.

Sustituyendo el control anterior (4.15) y la expresión obtenida para $K(t)$ y $Q(t)$ dentro de (4.16), la ecuación del estimado del estado controlado óptimamente toma la forma

$$\dot{m}(t) = m(t) + Q(t)\text{sign}[m(t)] + K(t)\text{sign}[y(t) - m(t)], \quad (4.19)$$

con la condición inicial $m(0) = E(x(0) | y(0)) = m_0$. El sistema obtenido (4.17)–(4.19) puede ser resuelto usando métodos numéricos simples, tales como el método de disparo. Este método consiste en variar la condición inicial de (4.18) hasta que la condición terminal dada este satisfecha.

Para la simulación numérica del sistema (4.12),(4.13) y el controlador (4.15)–(4.19), los valores iniciales $x(0) = 1$, $m(0) = 10$, y $P(0) = 866,25$ son asignados. El tiempo final esta fijado para $T = 1,2$. Los disturbios $\psi_1(t)$ en (4.12) y $\psi_2(t)$ en (4.13) son realizados usando la función de ruidos blancos de MatLab.

El sistema (4.17)–(4.19) es primero simulado con la condición final $Q^*(1,2) = -50$. Como la simulación muestra, al estado $m(t)$ llegando al cero antes del momento final $T = 1,2$. En consecuencia, la condición terminal para la ecuación (4.18) es cambiado a $Q^*(1,2) = -\psi_0$ tal que $m(1,2) = 0$, y el sistema (4.17)–(4.19) es simulado de nuevo. El resultado obtenido aplicando el controlador (4.15)–(4.19) al sistema (4.12) son mostrados en la Fig. 4.1, que presenta la gráfica del estado controlado (4.12) $x(t)$, el estimado controlado (4.19) $m(t)$, el control (4.15) $u(t)$, y el criterio (4.14) $J_1(t)$ en el intervalo $[0, 1,2]$. El valor del criterio (4.14) en el momento final $T = 1,2$ es $J_1(1,2) = 4,985$.

El diseño del controlador por modos deslizantes (4.6),(4.9)–(4.11) es comparado con el mejor controlador lineal para el criterio J_3 con el término cuadrático no integral

$$J_3 = 25x^2(T) + \frac{1}{2} \int_0^T (u^2(t) + x^2(t))dt, \quad (4.20)$$

Como sigue de la teoría LQG optima [54, 55], la ley de control lineal esta dado por

$$u(t) = Q(t)m(t), \quad (4.21)$$

donde $m(t)$ satisface la ecuación

$$\dot{m}(t) = m(t) + u(t) + P(t)[y(t) - m(t)], \quad (4.22)$$

con la condición inicial $m(0) = E(x(0) | y(0)) = m_0$, la varianza $P(t)$ satisface la ecuación de Riccati

$$\dot{P}(t) = 1 + 2P(t) - P^2(t), \quad (4.23)$$

con la condición inicial $P(0) = E((x(0) - m(0))(x(0) - m(0))^T | y(0))$, y $Q(t)$ satisface la ecuación de Riccati

$$\dot{Q}(t) = 1 - 2Q(t) - Q^2(t), \quad Q(1,2) = -50. \quad (4.24)$$

Sustituyendo el control anterior (4.21) y las expresiones obtenidas para $P(t)$ y $Q(t)$ dentro (4.22), la ecuación del estimado del estado controlado óptimamente toma la forma

$$\dot{m}(t) = m(t) + Q(t)m(t) + P(t)[y(t) - m(t)], \quad (4.25)$$

con la condición inicial $m(0) = E(x(0) | y(0)) = m_0$.

Note que la comparación entre el controlador de modo deslizante (4.6),(4.9)–(4.11) con el mejor controlador LQG (4.21)–(4.25) con respecto al criterio (4.14) es llevado acabo para fines ilustrativos, dado que el controlador (4.6),(4.9)–(4.11) debería dar teóricamente un mejor resultado, como se sigue del teorema 4.1.

Los resultado obtenido al aplicar el controlado (4.6),(4.21)–(4.25) para el sistema (4.12),(4.13) son mostrados en la Fig. 4.1-4.4, que presenta las gráficas del estado controlado (4.12) $x(t)$, el estimado controlado (4.25) $m(t)$, el control (4.21) $u(t)$, y el criterio (4.14) $J_1(t)$ en el intervalo $[0, 1,2]$. El valor del criterio (4.14) en el momento final $T = 1,2$ es $J_1(1,2) = 7,51$.

Se puede observar que el controlado por modos deslizantes (4.6),(4.9)–(4.11) obtiene un mejor valor del criterio (4.14) en comparación con el controlador retroalimentado LQG (4.21)–(4.25). Note que el controlador retroalimentado LQG falla para proveer un control óptimo para el criterio (4.14).

4.3. Diseño del Controlador en Promedio Modulo

4.3.1. Principio de Separación II.

Resolviendo el segundo problema, el estado lineal no medible $x(t)$, satisface (4.1), es reemplazado con un estimado en promedio modulo $m(t)$ sobre observaciones lineales $y(t)$ (4.2), que se obtiene usando el filtrado por modos deslizantes en promedio modulo para sistemas lineales (ver [58] para el planteamiento y solución del problema de filtrado correspondiente)

$$\dot{m}(t) = a(t)m(t) + B(t)u(t) + K(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}A(t)Sign[A^T(t)(A(t)A^T(t))^{-1}y(t) - m(t)]. \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} m(t_0) &= m_0 = E(x(t_0) | F_{t_0}^Y), \\ \dot{K}(t) &= b(t)b^T(t) + K(t)a^T(t), \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$K(t_0) = E[(x(t_0) - m(t_0))(Sign(A^T(t)(A(t)A^T(t))^{-1}A(t)x(t_0) - m(t_0)))^T | F_{t_0}^Y].$$

Aquí, $m(t)$ es el estimado en promedio modulo par el vector de estado $x(t)$, basado en el proceso de observación $Y(t) = \{y(s), t_0 \leq s \leq t\}$, que minimiza la norma promedio modulo

$$J = E[|| x(t) - \hat{x}(t) || | F_t^Y]$$

para todo momento t .

Es fácilmente verificable (see [54, 55]) que el problema de control óptimo para el estado del sistema (4.1) y función de costo (4.4) es equivalente al problema de control óptimo para el estimado (4.9) y el funcional de costo J_2 representado como

$$\begin{aligned} J_2 &= \sum_{i=1}^n \psi_{ii} | m_i(T) | + \int_{t_0}^T \frac{1}{2} (u^T(s)R(s)u(s))ds + \sum_{i=1}^n L_{ii}(s) | m_i(s) | ds + \\ &\quad \frac{1}{2} \int_{t_0}^T tr[K(s)L(s)]ds + tr[K(T)\psi], \end{aligned} \quad (4.28)$$

donde $tr[A]$ denota la traza de la matriz A . Dado que la ultima parte de J_2 no depende del control $u(t)$ o del estado $x(t)$, la reducción efectiva de la función de costo M_2 para minimizar toma la forma

$$M_2 = \sum_{i=1}^n \psi_{ii} | m_i(T) | + \int_{t_0}^T \frac{1}{2} (u^T(s)R(s)u(s))ds + \sum_{i=1}^n L_{ii}(s) | m_i(s) | ds. \quad (4.29)$$

Así, la solución del problema de control óptimo especificado por (4.1),(4.4) puede se encontrado resolviendo el problema de control óptimo dado por (4.26),(4.29). Finalmente, el valor mínimo del criterio J_2 deberá ser determinado usando (4.28). Esta conclusion presenta el principio de separación para sistemas lineales con criterio no cuadrático (4.4).

4.3.2. Solución del Problema de Control Óptimo II

La solución optima del problema de control definida por (4.26),(4.29) esta dada por [23]. Aplicando el principio de separación de la sección anterior para el filtro por modos deslizantes en promedio modulo en [58] y el regulador óptimo por modos deslizantes [23], la solución del controlador óptimo del problema original (4.1),(4.2),(4.4) esta dado por el siguiente teorema.

Teorema 4.2 El controlador óptimo para el sistema lineal (4.1) sobre observaciones lineales (4.2) con respecto al criterio no cuadrático (4.4) esta dado por la siguiente ley de control

$$u(t) = R^{-1}(t)B^T(t)Q(t)Sign[m(t)], \quad (4.30)$$

donde la función matricial $Q(t)$ es la solución de la ecuación matricial

$$\dot{Q}(t) = L(t) - a^T(t)Q(t). \quad (4.31)$$

La condición terminal para la ecuación (4.31) es definida como $Q(T) = -\psi$, si el estado $m(t)$ no llega a la superficie deslizante $m(t) = 0$ dentro del intervalo de tiempo $[t_0, T]$, $m(t) \neq 0$, $t \in [t_0, T]$. De otra manera, si el estado $m(t)$ llega a la superficie deslizante $m(t) = 0$ dentro del intervalo de tiempo $[t_0, T]$, entonces la condición terminal para $Q(t)$ es fijado como cero en el momento del tiempo t^* , $Q(t^*) = 0$, donde t^* es el tiempo máximo posible de llegada a la superficie deslizante $m(t) = 0$. En otras palabras, si no existe una solución del sistema de ecuaciones (4.1), (4.30), (4.31) haremos que satisfaga las condiciones $m(t_0) = m_0$ y $Q(t_1) = 0$, $t_1 > t^*$, cuando $m(t) \neq 0$ para $t < t_1$ y $m(t) = 0$ para algún $t \geq t_1$.

Sustituyendo el control óptimo anterior (4.30) dentro de la ecuación (4.26), la siguiente ecuación del estimado del estado controlado óptimamente es obtenida

$$\begin{aligned} \dot{m}(t) = a(t)m(t) + B(t)R^{-1}(t)B^T(t)Q(t)Sign[m(t)] + K(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1} \times \\ A(t)Sign[A^T(t)(A(t)A^T(t))^{-1}y(t) - m(t)], \end{aligned} \quad (4.32)$$

con la condición inicial $m(t_0) = E(x(t_0) | F_t^Y)$.

Demostración Se sigue fácilmente de la aplicación del principio de separación de la sección anterior al filtro por modos deslizantes en promedio modulo en [58] y el regulador óptimo por modos deslizantes en [23]. ■

Así, la ecuación del estimado del estado controlado óptimamente (4.32), la ecuación matricial de ganancia del control (4.31), la ley de control (4.30), y la ecuación matricial de la ganancia del filtro (4.27) dan la solución completa del problema del controlador óptimo para sistemas lineales sobre observaciones lineales y función del criterio no cuadrático (4.4).

4.3.3. Ejemplo II

Esta sección presenta un ejemplo del diseño del controlador óptimo por modos deslizantes para el sistema lineal (4.1) sobre observaciones lineales (4.2) con un criterio no cuadrático (4.4), usando el controlador (4.27),(4.30)–(4.32), y comparándolo con el mejor controlador LQG disponible.

Considere la ecuación del estado lineal

$$\dot{x}(t) = x(t) + u(t) + \psi_1(t), \quad x(0) = 1, \quad (4.33)$$

y el proceso de observación lineal

$$y(t) = x(t) + \psi_2(t), \quad (4.34)$$

donde $\psi_1(t)$ y $\psi_2(t)$ son ruidos blancos Gaussianos.

El problema de controlador es buscar un control $u(t)$, $t \in [0, T]$, $T = 1, 2$, que minimice el criterio

$$J_2 = 50 |x(T)| + \int_0^T \frac{1}{2}(u^2(t) + |x(t)|) dt, \quad (4.35)$$

En otras palabras, el problema de control es minimizar la energía total del estado x usando la minimiza energía del control u .

Aplicando el controlador por modos deslizantes (4.27),(4.30)–(4.32), la ley de control (4.30) esta dada por

$$u(t) = Q(t) \text{sign}[x(t)], \quad (4.36)$$

donde $m(t)$ satisface la ecuación

$$\dot{m}(t) = m(t) + u(t) + K(t) \text{sign}[y(t) - m(t)], \quad (4.37)$$

con la condición inicial $m(0) = E(x(0) | y(0)) = m_0$, $K(t)$ satisface la ecuación

$$\dot{K}(t) = K(t) + 1, \quad (4.38)$$

con la condición inicial $K(0) = E((x(0) - m(0))(Sign(x(0) - m(0)))^T | y(0))$, y $Q(t)$ satisface la ecuación

$$\dot{Q}(t) = 1 - Q(t), \quad (4.39)$$

con la condición terminal $Q^*(t^*) = 0$, donde t^* es el valor máximo posible del tiempo para la llegada a la superficie deslizante $m(t) = 0$ por el estimado del estado $m(t)$.

Sustituyendo el control anterior (4.36) y las expresiones obtenidas para $K(t)$ y $Q(t)$ dentro de (4.33), la ecuación del estimado del estado controlado óptimamente toma la forma

$$\dot{m}(t) = m(t) + Q(t) \text{sign}[m(t)] + K(t) \text{sign}[y(t) - m(t)], \quad (4.40)$$

con la condición inicial $m(0) = E(x(0) | y(0)) = m_0$.

Para la simulación numérica del sistema (4.33),(4.34) y el controlados (4.36)–(4.40), las condiciones iniciales $x(0) = 1$, $m(0) = 10$, y $P(0) = 100$ son asignadas. El tiempo final es fijado como $T = 1, 2$. Los disturbios $\psi_1(t)$ en (4.33) y $\psi_2(t)$ en (4.34) son realizados usando la función de ruidos blancos de MatLab.

Los resultados obtenidos aplicando el controlador (4.36)–(4.40) para el sistema (4.33) se muestran en la Fig. 4.2, que presenta las gráficas del estado controlado (4.33) $x(t)$, el estimado controlado (4.40) $m(t)$, el control (4.36) $u(t)$, y el criterio (4.35) $J_2(t)$ en el intervalo $[0, 1, 2]$. El valor del criterio(4.35) en el momento final $T = 1, 2$ es $J_2(1, 2) = 5, 634$.

El controlador por modos deslizantes (4.27),(4.30)–(4.32) es comparado con el mejor regulador lineal (4.21)–(4.25) para el criterio (4.20) J_3 .

De nuevo, la comparación entre el diseño del controlador por modos deslizantes (4.27),(4.30)–(4.32) con el mejor controlador LQG (4.21)–(4.25) con respecto al criterio (4.20) esta hecho para propósitos

ilustrativos, dado que el controlador (4.27),(4.30)–(4.32) deberá tener un mejor resultado teóricamente, como consecuencia del teorema 4.2.

Los resultados obtenidos aplicando el controlador (4.27),(4.30)–(4.32) para el sistema (4.33),(4.34) son mostrados en la Fig. 4.5-4.8, que presenta las gráficas del estado controlado (4.33) $x(t)$, el estimado controlado (4.40) $m(t)$, el control (4.36) $u(t)$, y el criterio (4.35) $J_2(t)$ en el intervalo $[0, 1,2]$. Los valores del criterio (4.35) en el momento $T = 1,2$ es $J_2(1,2) = 7,586$.

Se puede observar que el controlador por modos deslizantes (4.27),(4.30)–(4.32) obtiene un mejor valor del criterio (4.35) en comparación con el controlador LQG (4.21)–(4.25). Note que otra vez el controlador LQG clásico fallo para dar el control óptimo para el criterio (4.35).

4.4. Conclusions

Este capítulo presenta dos problemas de controlador óptimo, donde la soluciones están dadas por controladores por modos deslizantes, cada uno consiste de un filtro por modos deslizantes y un regulador por modos deslizantes. Los problemas de controlador óptimo son considerados para sistemas lineales sobre observadores lineales con respecto a dos diferentes criterios de Bolza-Meyer, donde 1) los términos del la energía del control y del estado son cuadráticos dentro de la integral y el término no integral es de primer grado o 2) el término de la energía del control es cuadrático y el término de la energía del estado es de primer orden. Esto demuestra que la solución optima esta dada por un controlador por modos deslizantes, mientras el controlador retroalimentado lineal falla para proveer una solución factible. El enfoque propuesto basado en control por modos deslizantes se espera sean aplicables para problemas de controlador óptimo para sistemas polinomiales con criterio no cuadrático, donde el controlador convencional retroalimentado no funciona.

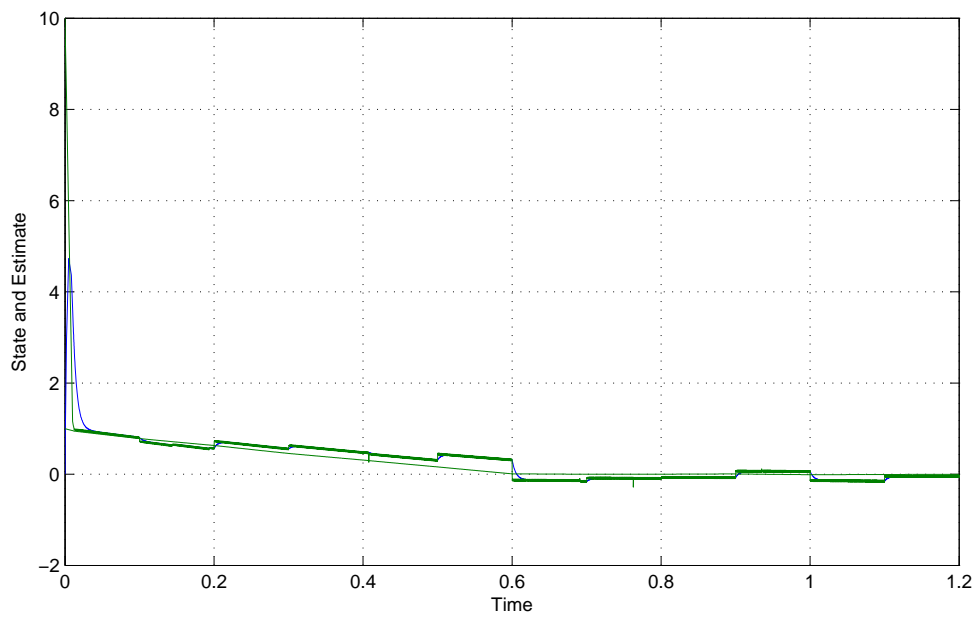


Figura 4.1: Controlador óptimo por modos deslizantes con respecto al criterio J_1 vs. el controlador retroalimentado lineal en la entera simulación en el intervalo $[0, 1, 2]$. **1. Controlador por modos deslizantes.** Gráfica del estado controlado (4.12) $x(t)$ (Azul) y del estimado controlado (4.19) $m(t)$ (Verde)

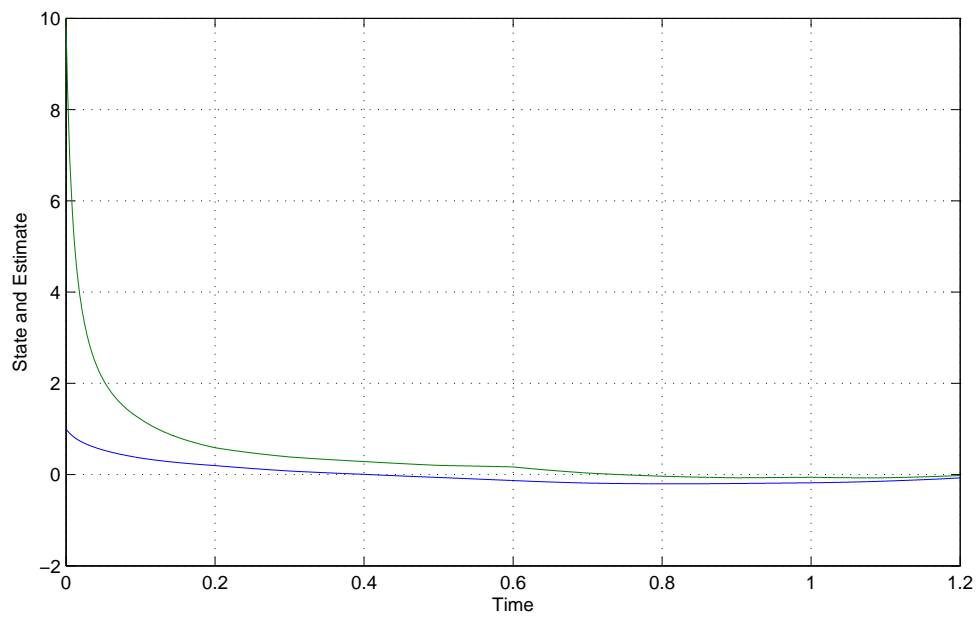


Figura 4.2: Controlador óptimo por modos deslizantes con respecto al criterio J_1 vs. el controlador retroalimentado lineal en la entera simulación en el intervalo $[0, 1, 2]$. **2. Controlador retroalimentado lineal.** Gráfica del estado controlado (4.12) $x(t)$ (Azul) y del estimado controlado (4.25) $m(t)$ (Verde)

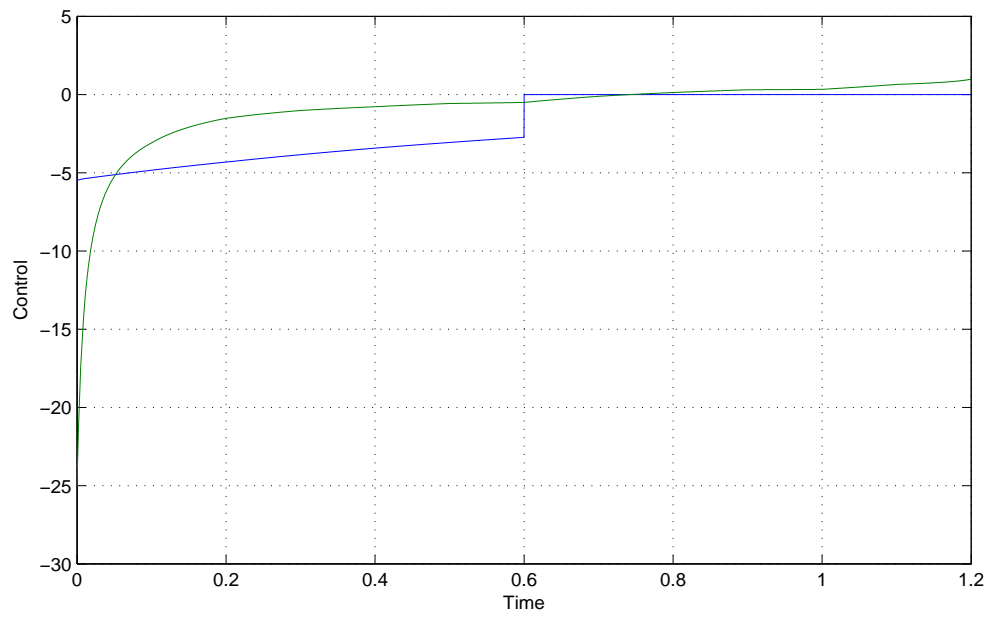


Figura 4.3: Controlador óptimo por modos deslizantes con respecto al criterio J_1 vs. el controlador retroalimentado lineal en la entera simulación en el intervalo $[0, 1,2]$. **3. Control.** Gráfica del control por modos deslizantes (4.15) $u^*(t)$ (Azul) y control retroalimentado lineal (4.21) $u(t)$ (Verde)

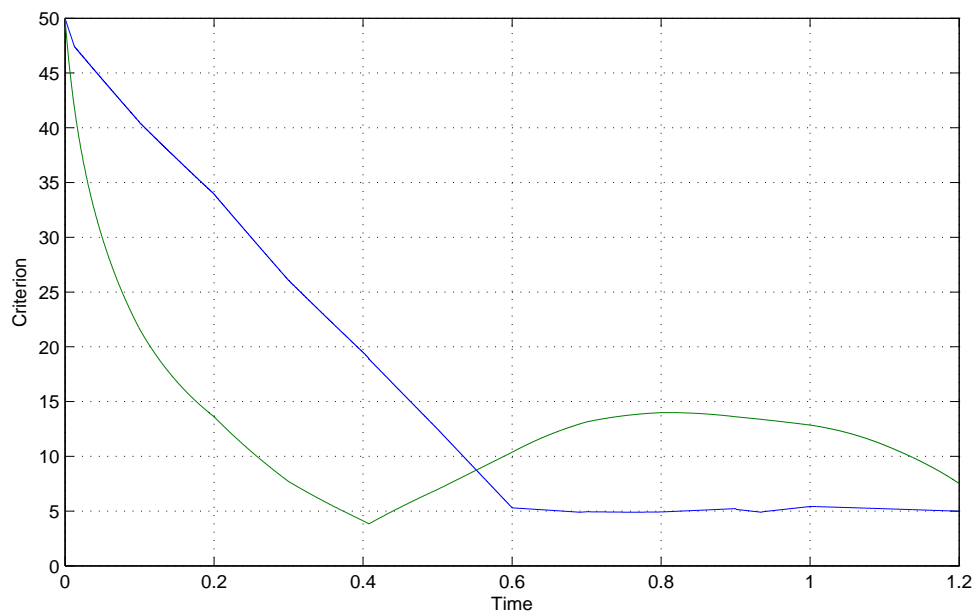


Figura 4.4: Controlador óptimo por modos deslizantes con respecto al criterio J_1 vs. el controlador retroalimentado lineal en la entera simulación en el intervalo $[0, 1,2]$. **4. Criterio.** Gráfica del criterio (4.14) J_1 producido por el controlador por modos deslizantes (Azul) y por el controlador retroalimentado lineal (Verde).

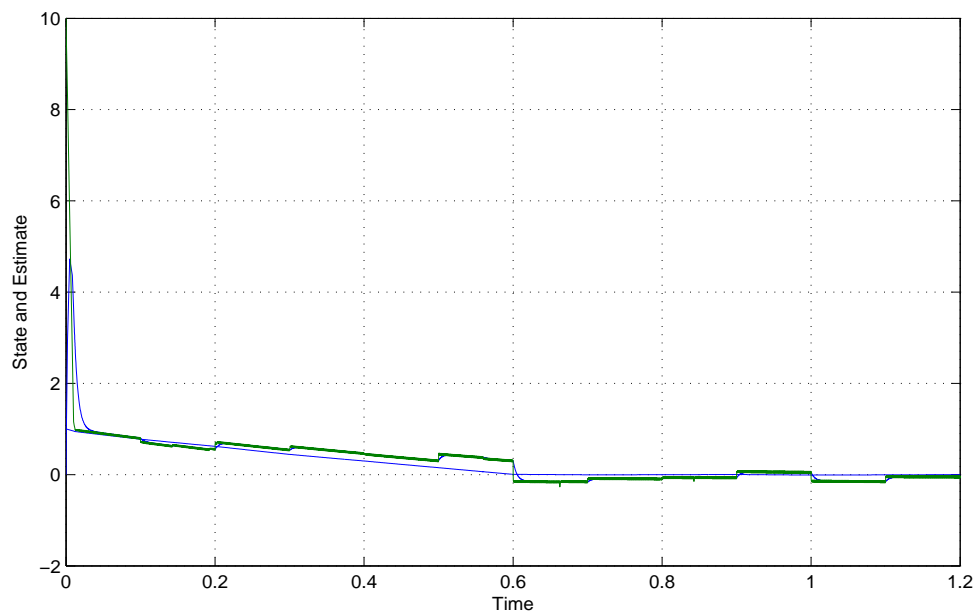


Figura 4.5: Controlador óptimo por modos deslizantes con respecto al criterio J_1 vs. el controlador retroalimentado lineal en la entera simulación en el intervalo $[0, 1, 2]$. **1. Controlador por modos deslizantes.** Gráfica del estado controlado (4.33) $x(t)$ (Azul) y del estimado controlado (4.40) $m(t)$ (Verde)

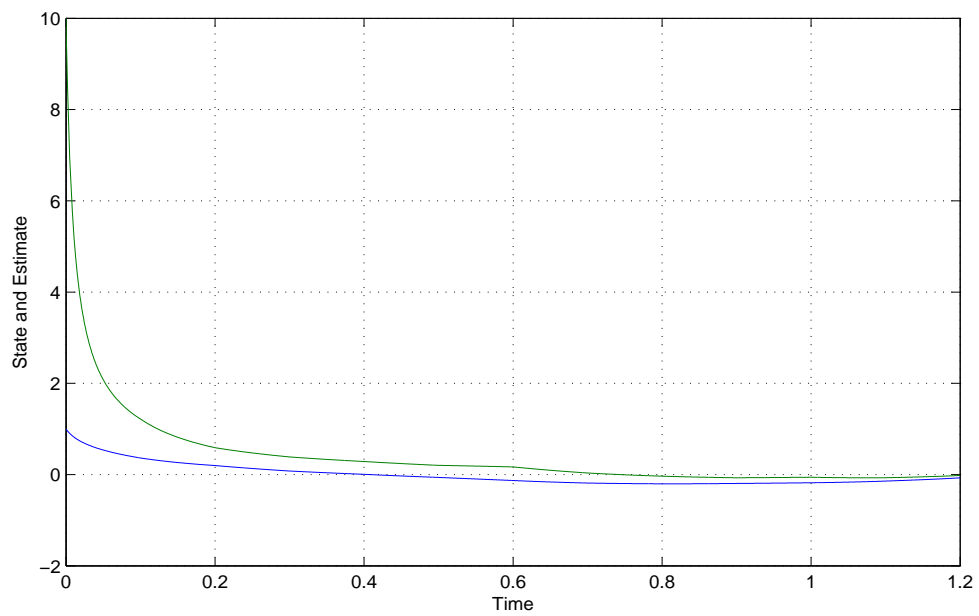


Figura 4.6: Controlador óptimo por modos deslizantes con respecto al criterio J_1 vs. el controlador retroalimentado lineal en la entera simulación en el intervalo $[0, 1, 2]$. **2. Controlador retroalimentado lineal.** Gráfica del estado controlado (4.33) $x(t)$ (Azul) y del estimado controlado (4.25) $m(t)$ (Verde)

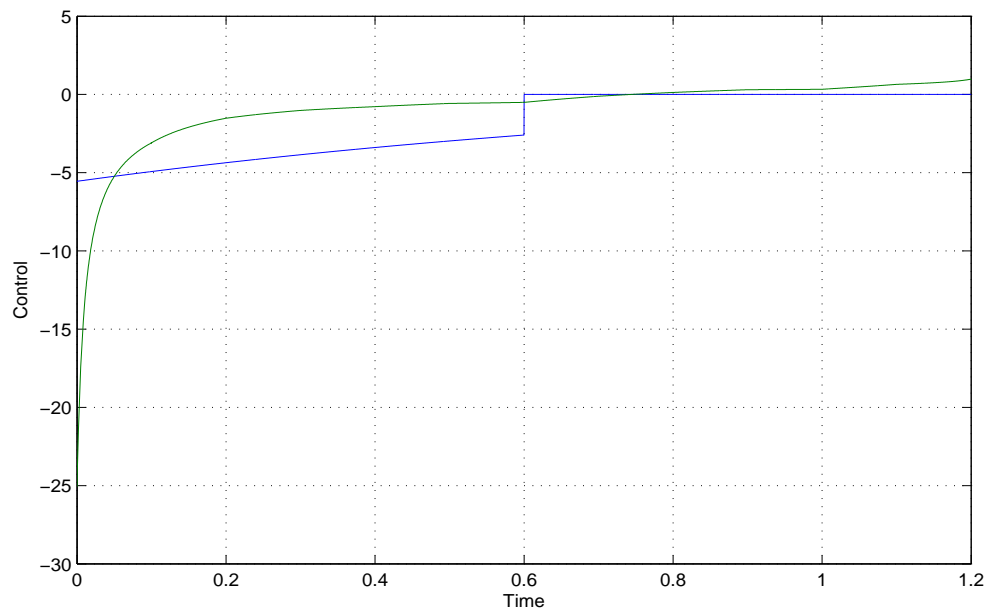


Figura 4.7: Controlador óptimo por modos deslizantes con respecto al criterio J_1 vs. el controlador retroalimentado lineal en la entera simulación en el intervalo $[0, 1,2]$. **3. Control.** Gráfica del control por modos deslizantes (4.36) $u^*(t)$ (Azul) y control retroalimentado lineal (4.21) $u(t)$ (Verde)

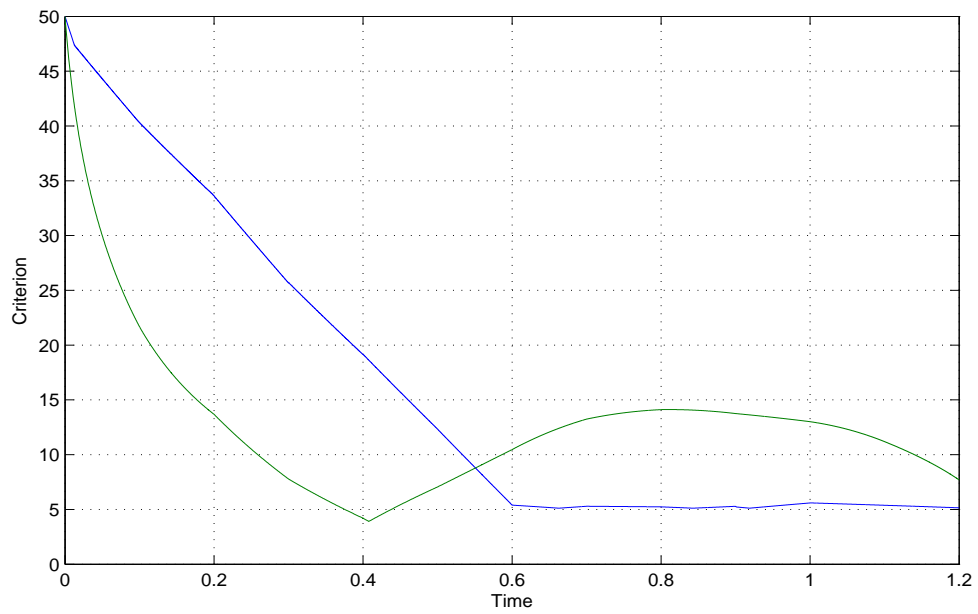


Figura 4.8: Controlador óptimo por modos deslizantes con respecto al criterio J_1 vs. el controlador retroalimentado lineal en la entera simulación en el intervalo $[0, 1,2]$. **4. Criterio.** Gráfica del criterio (4.35) J_1 producido por el controlador por modos deslizantes (Azul) y por el controlador retroalimentado lineal (Verde).

CAPÍTULO 5

DISEÑO DE FILTRADO POR MODOS DESLIZANTES PARA SISTEMAS NO LINEALES POLINOMIALES CON ESTADOS NO MEDIBLES

5.1. Planteamiento de Problema del Filtrado por Modos Deslizantes

Sea (Ω, F, P) un espacio probabilístico completo con una familia de σ -álgebras $F_t, t \geq t_0$ creciente continua por la derecha, y sean $(W_1(t), F_t, t \geq t_0)$ y $(W_2(t), F_t, t \geq t_0)$ procesos estándar de Wiener independientes. Los procesos aleatorios $(x(t), y(t))$ F_t -medibles son descritos por una ecuación diferencial polinomial para el estado del sistema

$$dx(t) = f(x, t)dt + b(t)dW_1(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (5.1)$$

y la ecuación diferencial lineal para el procesos de observación

$$dY(t) = A(t)x(t)dt + B(t)dW_2(t). \quad (5.2)$$

Aquí, $x(t) \in R^n$ es el vector de estados y $y(t) \in R^m$, $m \leq n$, es el proceso de observación. La condición inicial $x_0 \in R^n$ es un vector Gaussiano tal que x_0 , $W_1(t)$, y $W_2(t)$ son independientes. Asimismo que $B(t)B^T(t)$ es una matriz definido positivo. Todos los coeficientes en (5.1),(5.2) son funciones determinísticas del tiempo de apropiadas dimensiones.

La función no lineal $f(x, t)$ es considerada polinomial de n variables, los componentes del vector de estados $x(t) \in R^n$, con coeficientes dependientes del tiempo. Como $x(t) \in R^n$ es un vector, se requiere

una definición especial del polinomio para $n > 1$. Un polinomio de grado p del vector $x(t) \in R^n$ es considerado como una forma p -lineal de n componentes de $x(t)$

$$f(x, t) = a_0(t) + a_1(t)x(t) + a_2(t)xx^T + \dots + a_p(t)x \dots p \text{ times} \dots x,$$

donde $a_0(t)$ es un vector de dimension n , a_1 es una matriz de dimension $n \times n$, a_2 es in 3D tensor de dimension $n \times n \times n$, a_p es un $(p+1)$ D tensor de dimension $n \times \dots (p+1) \text{ times} \dots \times n$, y $x \times \dots p \text{ times} \dots \times x$ es un p D tensor de dimension $n \times \dots p \text{ times} \dots \times n$ obtenido por la multiplicación espacial del vector $x(t)$, p veces por si mismo. Tal polinomio puede también ser expresado en forma de sumatoria

$$f_k(x, t) = a_0 \ k(t) + \sum_i a_1 \ ki(t)x_i(t) + \sum_{ij} a_2 \ kij(t)x_i(t)x_j(t) + \dots + \sum_{i_1 \dots i_p} a_p \ ki_1 \dots i_p(t)x_{i_1}(t) \dots x_{i_p}(t),$$

$$k, i, j, i_1 \dots i_p = 1, \dots, n.$$

Las ecuaciones del estado y observación puedes ser escritas en una forma alternativa

$$\dot{x}(t) = f(x, t) + b(t)\psi_1(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (5.1^*)$$

$$y(t) = A(t)x(t) + B(t)\psi_2(t), \quad (5.2^*)$$

donde $y(t) = \dot{Y}(t)$, y $\psi_1(t)$ y $\psi_2(t)$ son ruidos blancos Gaussianos, que son la derivada en promedio cuadrático débil de los procesos estándar de Wiener $W_1(t)$, y $W_2(t)$ (ver [51]). La representación (5.1),(5.2) y (5.1*), (5.2*) son equivalentes ([52]). Las ecuaciones (5.1*), (5.2*) presentan la forma convencional para las ecuaciones (5.1),(5.2), que es actualmente usados en la practica.

El problema de estimación es buscar un estimado $\hat{x}(t)$ del estado del sistema $x(t)$, basado en el proceso de observación $Y(t) = \{y(s), t_0 \leq s \leq t\}$, que minimice la norma en promedio cuadrático

$$J = E[(x(t) - \hat{x}(t))^T(x(t) - \hat{x}(t)) | F_t^Y] \quad (5.3)$$

para todo momento del tiempo t . Aquí, $E[z(t) | F_t^Y]$ es la esperanza condicional del proceso estocástico $z(t) = (x(t) - \hat{x}(t))^T(x(t) - \hat{x}(t))$ con respecto a la σ - algebra F_t^Y generada por el proceso de observación $Y(t)$ en el intervalo $[t_0, t]$. Como sabemos [51], este estimado esta dado por la esperanza condicional

$$\hat{x}(t) = m(t) = E(x(t) | F_t^Y)$$

del estado del sistema $x(t)$ con respecto a la σ - algebra F_t^Y generado por el proceso de observación $Y(t)$ en el intervalo del tiempo $[t_0, t]$. Como siempre, la función matricial

$$P(t) = E[(x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T | F_t^Y]$$

es el estimado de la varianza del error.

Este capítulo también presenta el problema de filtrado en promedio modulo como la búsqueda del estimado $\hat{x}(t)$ del estado del sistema $x(t)$, basado en el proceso de observación $Y(t) = \{y(s), t_0 \leq s \leq t\}$, que minimiza la norma en promedio modulo

$$J = E[|| x(t) - \hat{x}(t) || | F_t^Y] \quad (5,4)$$

para todo momento del tiempo t . Aquí, $| x | = [| x_1 |, \dots, | x_n |] \in R^n$ es definido como el vector absoluto de los componentes del vector $x \in R^n$.

La solución para estos problemas de filtrado para sistemas polinomiales estocásticos esta dado por el filtro polinomial en promedio cuadrático [61] generalizando el filtro óptimo de Kalman-Bucy [44] par sistemas lineales. Una solución alternativa involucrando un término en modos deslizante es dada en la sección siguiente y probada en el apéndice. Como demostraremos, el filtro por modos deslizantes obtenido es óptimo con respecto al criterio (5.3),(5.4).

5.2. Diseño del Filtro por Modos Deslizantes en Promedio Cuadrático.

La solución del problema de filtrado en promedio cuadrático pas el sistema polinomial estocástico (5.1) y el criterio (5.3) esta dado como sigue. El estimado en promedio cuadrático satisface la ecuación diferencial con un término en modos deslizantes

$$\dot{m}(t) = E(f(x,t)|F_t^Y) + Q(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}A(t)Sign[A^T(t)(A(t)A^T(t))^{-1}y(t) - m(t)]. \quad (5,5)$$

con la condición inicial $m(t_0) = E(x(t_0) | F_{t_0}^Y)$.

Aquí, la función Signo del vector $x = [x_1, \dots, x_n] \in R^n$ esta definido como $Sign[x] = [sign(x_1), \dots, sign(x_n)] \in R^n$, y la función Signo de un escalar x esta definido como $sign(x) = 1$, si $x > 0$, $sign(x) = 0$, si $x = 0$, y $sign(x) = -1$, si $x < 0$ ([53]).

La función matricial $Q(t)$ satisface la ecuación matricial con coeficientes variantes en el tiempo

$$\dot{Q}(t) = E(f(x,t)(x(t) - m(t))^T | F_t^Y) + (b(t)b^T(t))* | A^T(t)(A(t)A^T(t))^{-1}y(t) - m(t) |, \quad (5,6)$$

con la condición inicial

$$Q(t_0) = E[(x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T | F_{t_0}^Y] * | A^T(t_0)(A(t_0)A^T(t_0))^{-1}y(t_0) - m(t_0) |.$$

Aquí, $| x | = [| x_1 |, \dots, | x_n |] \in R^n$ esta definido como el vector de valores absolutos de los componentes del vector $x \in R^n$, y $A * b$ denota el producto entre una matriz $A \in R^{n \times n}$ y un vector $b \in R^n$, que resulta en una matriz definida como sigue: Todas las entradas de la j -th columna de la matriz A son multiplicado por el j -th componente del vector b , $j = 1, \dots, n$.

Note que las ecuaciones (5.5) y (5.6) no tienen una forma de un sistema cerrado de ecuaciones debido a la presencia del polinomio dependiente de x , $E(f(x,t) | F_t^Y)$, y $E(f(x,t)(x(t) - m(t))^T | F_t^Y)$, que no son expresados todavía como funciones de las variables del filtro, $m(t)$ y $Q(t)$ (o $P(t)$). Sin embargo, como se demuestra en [62], la forma cerrada del sistema para las ecuaciones de filtrado en promedio cuadrático pueden ser obtenidas para cualquier estado polinomial (5.1) sobre observaciones lineales (5.2). En la siguiente sección, el filtro por modos deslizantes en promedio cuadrático es obtenido en el caso particular del estado polinomial de tercer orden. Consideren el caso donde $f(x,t)$ es,

$$f(x,t) = a_0 + a_1(t)x + a_2(t)xx^T + a_3(t)xxx^T \quad (5,7)$$

un polinomio de tercer orden, donde x es un vector n -dimensional, $a_0(t)$ es un vector de dimension n , a_1 es una matriz de dimension $n \times n$, a_2 es un 3D tensor de dimension $n \times n \times n$, a_3 es un 4D tensor de dimension $n \times n \times n \times n$. En este caso, Las siguientes ecuaciones de filtrado para el estimado óptimo $m(t)$ y para la matriz de ganancia $Q(t)$ son obtenidas

$$\begin{aligned} \dot{m}(t) = & a_0 + a_1m(t) + a_2m(t)m(t)^T + a_2P(t) + 3a_3P(t)m(t) + a_3m(t)m(t)m(t)^T \\ & + Q(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}A(t)Sign[A^T(t)(A(t)A^T(t))^{-1}y(t) - m(t)]. \end{aligned} \quad (5,8)$$

con la condición inicial $m(t_0) = E(x(t_0) | F_{t_0}^Y)$,

$$\begin{aligned} \dot{Q}(t) = & a_1Q(t) + 2a_2m(t)Q(t) + (a_2m(t)Q(t))^T + 3(a_3(P(t)Q(t) + m(t)m(t)^TQ(t))) \\ & + (a_3(3P(t)Q(t) + 2m(t)m(t)^TQ(t)))^T + (b(t)b^T(t))* | A^T(t)(A(t)A^T(t))^{-1}y(t) - m(t) | \end{aligned} \quad (5,9)$$

con la condición inicial

$$Q(t_0) = E[(x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T | F_{t_0}^Y] * | A^T(t_0)(A(t_0)A^T(t_0))^{-1}y(t_0) - m(t_0) | .$$

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) = & a(t)P(t) + P(t)a^T(t) + 2a_2(t)m(t)P(t) \\ & + 2(a_2(t)m(t)P(t))^T + 3(a_3(P(t)P(t) + m(t)m^T(t)P(t))) \\ & + 3(a_3(P(t)P(t) + m(t)m^T(t)P(t)))^T + b(t)b^T(t) - P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}A(t)P(t) \end{aligned} \quad (5,10)$$

con la condición inicial $P(t_0) = E[(x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T | F_{t_0}^Y]$.

Consecuentemente, el resultado principal esta formulado en el siguiente teorema y demostrado en el apéndice.

Teorema 5.1 El filtro en promedio cuadrático para el estado del sistema estocástico polinomial (5.7) sobre observaciones lineales (5.2) esta dado por la ecuación (5.8) para el estimado $m(t) = E(x(t) | F_t^Y)$ y las ecuaciones (5.9) y (5.10) para la matriz de ganancia del filtro $Q(t)$ y la matriz de la varianza del error $P(t)$.

5.2.1. Ejemplo I

Esta sección presenta un ejemplo ilustrativo del diseñado filtro por modos deslizantes en promedio cuadrático para un estado polinomial de segundo orden (5.7) sobre observaciones lineales (5.2), usando las ecuaciones de filtrado (5.8)–(5.10).

Considere el estado polinomial no medible escalar

$$\dot{x}(t) = 0,1x^2(t) + \psi_1(t), \quad x(0) = x_0, \quad (5.11)$$

y el proceso de observación lineal escalar

$$y(t) = x(t) + \psi_2(t), \quad (5.12)$$

donde $\psi_1(t)$ y $\psi_2(t)$ son ruidos blancos Gaussianos, que son la derivada en promedio cuadrático débil de un proceso estándar de Wiener (ver [51]). Las ecuaciones (5.11),(5.12) corresponden a la forma alternativa (5.1*), (5.2*) para las ecuaciones (5.1),(5.2).

El problema de filtrado es buscar un estimado en promedio cuadrático para el estado polinomial de segundo orden (5.11), usando observaciones lineales (5.12) confundidos con disturbios modelados como ruidos blancos Gaussianos independientes e idénticamente distribuidos.

Las ecuaciones de filtrado (5.8),(5.9) y (5.10) toman la forma particular siguiente para el sistema (5.11),(5.12)

$$\dot{m}(t) = 0,1m^2(t) + 0,1P(t) + Q(t)\text{sign}[y(t) - m(t)], \quad (5.13)$$

con la condición inicial $m(0) = E(x(0) | y(0)) = m_0$,

$$\dot{Q}(t) = 0,3Q(t) + |y(t) - m(t)|, \quad (5.14)$$

con la condición inicial $Q(0) = E((x(0) - m(0))(x(0) - m(0))^T | y(0)) * |y(0) - m(0)|$.

$$\dot{P}(t) = 1 + 0,4m(t)P(t) - P^2(t), \quad (5.15)$$

con la condición inicial $P(0) = E((x(0) - m(0))(x(0) - m(0))^T | y(0))$. El estimado obtenido antes resolviendo las ecuaciones (5.13)–(5.15) son también comparadas con el estimado en promedio cuadrático que satisface las ecuaciones de filtrado [61] para el sistema polinomial de segundo orden (5.11),(5.12)

$$\dot{m}_K(t) = 0,1m_K^2(t) + 0,1P(t) + P(t)[y(t) - m_K(t)], \quad (5.16)$$

con la condición inicial $m(0) = E(x(0) | y(0)) = m_0$,

$$\dot{P}(t) = 1 + 0,4m(t)P(t) - P^2(t), \quad (5.17)$$

con la condición inicial $P(0) = E((x(0) - m(0))(x(0) - m(0))^T | y(0))$.

Los resultados de la simulación numérica son obtenidos resolviendo el sistema ecuaciones de filtrado (5.13)–(5.15) y (5.16),(5.17). Los valores obtenidos del estimado $m(t)$ y $m_K(t)$ que satisfacen las ecuación (5.13) y (5.16), respectivamente, son comparados con los valores reales de la variable de estado $x(t)$ en (5.11).

Para cada uno de los dos filtros (5.13)–(5.15) y (5.16),(5.17) y el sistema de referencia (5.11),(5.12), involucrados en la simulación, se les asigna los siguientes valores iniciales: $x_0 = 1$, $m_0 = 10$, $P(0) = 100$, $Q(0) = 943,74$. El horizonte de filtrado es fijado a $T = 0,4$. Los disturbios Gaussianos $\psi_1(t)$ y $\psi_2(t)$ en (5.11),(5.12) son realizados usando funciones de ruidos blancos en MatLab.

Las siguientes gráficas son obtenidas: La gráficas del estado de referencia $x(t)$, satisfaciendo la ecuación (5.11), el filtro del estimado por modos deslizantes en promedio cuadrático $m(t)$, satisfaciendo la ecuación (5.13), y el filtro del estimado polinomial en promedio cuadrático $m_K(t)$, satisfaciendo la ecuación (5.16), son mostradas en el intervalo entero de simulación $[0, 0,4]$ en la Fig. 5.1. Además, La gráfica del filtro del estimado por modos deslizantes en promedio cuadrático $m(t)$ promediado por el filtro Butterworth y todas las variables de Fig 5.1 son mostradas a detalle en el intervalo $[0,2, 0,4]$ en la Fig. 5.2.

Se puede observar que el estimado por ambos filtros generan el mismo estimado de la varianza del error, aunque las matrices $Q(t)$ y $P(t)$ son diferentes.

5.2.2. Apéndice I.

Demostración del teorema 5.1 La bien conocida solución clásica para el problema de filtrado para estados polinomiales estocásticos (5,1*) sobre observaciones lineales (5,2*) con respecto al criterio en promedio cuadrático (5.3) esta dado por el filtro polinomial en promedio cuadrático [61]. El estimado en promedio cuadrático $m(t) = E(x(t) | F_t^Y)$ es gobernado por la ecuación

$$\begin{aligned} \dot{m}(t) = & a_0(t) + a_1(t)m(t) + a_2(t)m(t)m^T(t) + a_2(t)P(t) + 3a_3(t)P(t)m(t) + a_3(t)m(t)m^T(t)m^T(t) \quad (5,18) \\ & + P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}A(t)[A^T(t)(A(t)A^T(t))^{-1}y(t) - m(t)]. \end{aligned}$$

con la condición inicial $m(t_0) = E(x(t_0) | F_{t_0}^Y)$, y el estimado en promedio cuadrático de la varianza matricial del error $P(t)$ satisface la ecuación de Riccati

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) = & a(t)P(t) + P(t)a^T(t) + 2a_2(t)m(t)P(t) \quad (5,19) \\ & + 2(a_2(t)m(t)P(t))^T + 3(a_3(P(t)P(t) + m(t)m^T(t)P(t))) \\ & + 3(a_3(P(t)P(t) + m(t)m^T(t)P(t)))^T + b(t)b^T(t) - P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}A(t)P(t), \end{aligned}$$

con la condición inicial $P(t_0) = E[(x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T | F_{t_0}^Y]$.

Mostraremos que el filtro polinomial en promedio cuadrático (5.18),(5.19) coincide con el diseño del filtro en promedio cuadrático (5.8),(5.9),(5.10). En efecto, introduciendo la nueva matriz de ganancia

$Q(t) = P(t) * | A^T(t)(A(t)A^T(t))^{-1}y(t) - m(t) |$, la ecuación del estimado (5.18) coincide con la ecuación (5.8). Además, en vista de (5.19),(5.1), y la igualdad $A(t)(A^T(t)(A(t)A^T(t))^{-1}y(t) - m(t)) = A(t)(x(t) - m(t) + A^T(t)(A(t)A^T(t))^{-1}B(t)\psi_2(t))$, la recién matriz de ganancia introducida $Q(t)$ satisface la ecuación

$$\begin{aligned} \dot{Q}(t) &= E(\dot{Q}(t) | F_t^Y) = E\left(\frac{d(P(t) * | A^T(t)(A(t)A^T(t))^{-1}y(t) - m(t) |)}{dt} | F_t^Y\right) = \\ &E\left(\frac{dP(t)}{dt} * | A^T(t)(A(t)A^T(t))^{-1}y(t) - m(t) | + P(t) * \frac{d(| A^T(t)(A(t)A^T(t))^{-1}y(t) - m(t) |)}{dt} | F_t^Y\right) = \\ &E\left((a(t)P(t) + P(t)a^T(t) + 2a_2(t)m(t)P(t) + 2(a_2(t)m(t)P(t))^T + 3(a_3(P(t)P(t) + m(t)m^T(t)P(t))) \right. \\ &\quad \left. + 3(a_3(P(t)P(t) + m(t)m^T(t)P(t)))^T + b(t)b^T(t) \right. \\ &\quad \left. - P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}A(t)P(t) * | A^T(t)(A(t)A^T(t))^{-1}y(t) - m(t) | + \right. \\ &\quad \left. (-P(t)(a_1^T(t) + a_2m(t) + a_3P(t)) * | A^T(t)(A(t)A^T(t))^{-1}y(t) - m(t) | + \right. \\ &\quad \left. P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}A(t)P(t) * | A^T(t)(A(t)A^T(t))^{-1}y(t) - m(t) |) | F_t^Y\right) = \\ &b(t)b^T(t) * | A^T(t)(A(t)A^T(t))^{-1}y(t) - m(t) | + (a(t)P(t) + 2a_2(t)m(t)P(t) + (a_2(t)m(t)P(t))^T \\ &\quad + 3(a_3(P(t)P(t) + m(t)m^T(t)P(t))) + (a_3(3P(t)P(t) + 2m(t)m^T(t)P(t)))^T) \\ &\quad * | A^T(t)(A(t)A^T(t))^{-1}y(t) - m(t) | = \\ &b(t)b^T(t) * | A^T(t)(A(t)A^T(t))^{-1}y(t) - m(t) | + a_1(t)Q(t) + 2a_2mQ + (a_2mQ)^T + \\ &\quad 3(a_3(PQ + mm^TQ)) + (a_3(3PQ + 2mm^TQ))^T \end{aligned}$$

con la condición inicial

$Q(t_0) = E[(x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T | F_{t_0}^Y] * | A^T(t_0)(A(t_0)A^T(t_0))^{-1}y(t_0) - m(t_0) |$, que coincide con (5.9). El teorema es probado. ■

5.3. Diseño del Filtro por Modos Deslizantes en Promedio Modulo.

La solución del problema de filtrado en promedio modulo para el sistema polinomial (5.1) y el criterio (5.4) esta dado como sigue. El estimado en promedio modulo satisface la ecuación diferencial con un término por modos deslizantes

$$\begin{aligned} \dot{m}(t) &= E(f(x, t) | F_t^Y)dt + Q(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1} \times \\ &\quad A(t)Sign[A^T(t)(A(t)A^T(t))^{-1}y(t) - m(t)]. \end{aligned} \quad (5,20)$$

con la condición inicial $m(t_0) = E(x(t_0) | F_{t_0}^Y)$.

Aquí, La función Signo de un vector $x = [x_1, \dots, x_n] \in R^n$ esta definido como $Sign[x] = [sign(x_1), \dots, sign(x_n)] \in R^n$, y la función signo de un escalar x es definido como $sign(x) = 1$, si $x > 0$, $sign(x) = 0$, si $x = 0$, y $sign(x) = -1$, si $x < 0$ ([53]).

La función matricial $Q(t)$ satisface la ecuación matricial con coeficientes variantes en el tiempo

$$\dot{Q}(t) = b(t)b^T(t) + E(f(x,t)(x(t) - m(t))^T | F_t^Y), \quad (5.21)$$

con la condición inicial $Q(t_0) = E[(x(t_0) - m(t_0))(Sign(A^T(t_0)(A(t_0)A^T(t_0))^{-1}A(t_0)x(t_0) - m(t_0)))^T | F_{t_0}^Y]$.

Note que las ecuaciones (5.5) y (5.6) no tienen una forma de un sistema cerrado de ecuaciones debido a la presencia del polinomio dependiente de x , $E(f(x,t) | F_t^Y)$, y $E(f(x,t)(x(t) - m(t))^T | F_t^Y)$, que no son expresados todavía como funciones de las variables del filtro, $m(t)$ y $Q(t)$ (o $P(t)$). Sin embargo, como se demuestra en [62], la forma cerrada del sistema para las ecuaciones de filtrado en promedio cuadrático pueden ser obtenidas para cualquier estado polinomial (5.1) sobre observaciones lineales (5.2), usando las técnicas de representación de los momentos superiores de la variable aleatoria Gaussiana condicional $x(t) - m(t)$ como funciones de los primeros dos momentos condicionales, $m(t)$ y $P(t)$ (ver [62] para más detalles de la técnica). Aparentemente, la dependencia polinomial de $f(x,t)$ y $f(x,t)(x(t) - m(t))^T$ de x es el punto clave para que esta representación sea posible.

Inmediatamente, la forma cerrada para las ecuaciones de filtrado es obtenida de (5.20) y (5.21) para la función $f(x,t)$ de tercer orden en la ecuación (5.1), como sigue. Cabe señalar, además, que la aplicación del mismo procedimiento resultaría en diseñar un sistema cerrado de las ecuaciones de filtrado para cualquier función polinomial $f(x,t)$ en (5.1).

Sea la función

$$f(x,t) = a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)xx^T + a_3(t)xxx^T \quad (5.22)$$

un polinomio de tercer orden, donde x es un vector n -dimensional, $a_0(t)$ es un vector de dimension n , a_1 es una matriz de dimension $n \times n$, a_2 es un 3D tensor de dimension $n \times n \times n$, a_3 es un 4D tensor de dimension $n \times n \times n \times n$. En este caso, Las siguientes ecuaciones de filtrado para el estimado óptimo $m(t)$ y para la matriz de ganancia $Q(t)$ son obtenidas

$$\dot{m}(t) = a_0(t) + a_1(t)m(t) + a_2(t)m(t)m^T(t) + a_3(t)Q(t)* | A^T(t)(A(t)A^T(t))^{-1}y(t) - m(t) | + \quad (5.23)$$

$$3a_3(t)m(t)Q(t)* | A^T(t)(A(t)A^T(t))^{-1}y(t) - m(t) | + a_3(t)m(t)m(t)m^T(t) + Q(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1} \times$$

$$A(t)Sign[A^T(t)(A(t)A^T(t))^{-1}y(t) - m(t)],$$

$$m(t_0) = E(x(t_0) | F_{t_0}^Y),$$

$$\dot{Q}(t) = a_1(t)Q(t) + 2a_2(t)m(t)Q(t) + a_3(t)[Q(t)Q(t)* | A^T(t)(A(t)A^T(t))^{-1}y(t) - m(t) | + \quad (5.24)$$

$$3m(t)m^T(t)Q(t)] + b(t)b^T(t),$$

$$Q(t_0) = E[(x(t_0) - m(t_0))(Sign(A^T(t_0)(A(t_0)A^T(t_0))^{-1}A(t_0)x(t_0) - m(t_0)))^T | F_{t_0}^Y].$$

Consecuentemente, este resultado esta formulado en el siguiente teorema y probado en el apéndice.

Teorema 5.2. El filtro en promedio modulo para el estado polinomial del sistema de tercer orden (5.22) sobre observaciones lineales (5.2) esta dado por la ecuación (5.23) para el estimado $m(t)$ y la ecuación (5.24) para el filtro de la ganancia matricial $Q(t)$.

5.3.1. Ejemplo II

Esta sección presenta un ejemplo ilustrativo del filtro por modos deslizantes en promedio cuadrático para un estado polinomial de segundo orden (5.22) sobre observaciones lineales (5.2), usando las ecuaciones de filtrado (5.23),(5.24).

Considerando el estado polinomial no medible escalar

$$\dot{x}(t) = 0,1x^2(t) + \psi_1(t), \quad x(0) = x_0, \quad (5.25)$$

y el proceso de observación lineal escalar

$$y(t) = x(t) + \psi_2(t), \quad (5.26)$$

donde $\psi_1(t)$ y $\psi_2(t)$ son ruidos blancos Gaussianos, que son la derivada en promedio cuadrático débil de un proceso estándar de Wiener (ver [51]). Las ecuaciones (5.25),(5.26) corresponden a la forma alternativa (5.1*), (5.2*) para las ecuaciones (5.1),(5.2).

El problema de filtrado es buscar un estimado en promedio modulo para el estado polinomial de segundo orden (5.25), usando observaciones lineales (5.26) confundidos con disturbios modelados como ruidos blancos Gaussianos independientes e idénticamente distribuidos.

Las ecuaciones de filtrado (5.23),(5.24) toman la siguiente forma particular par el sistema (5.25),(5.26)

$$\dot{m}(t) = 0,1m^2(t) + \quad (5.27)$$

$$0,1Q(t) | y(t) - m(t) | + Q(t) \text{sign}[y(t) - m(t)],$$

con la condición inicial $m(0) = E(x(0) | y(0)) = m_0$,

$$\dot{Q}(t) = 0,2m(t)Q(t) + 1, \quad (5.28)$$

con la condición inicial $Q(0) = E((x(0) - m(0))(Sign(x(0) - m(0)))^T | y(0))$.

El estimado obtenido resolviendo las anteriores ecuaciones (5.27),(5.28) son también comparadas con el estimado que satisface las ecuaciones de filtrado en promedio cuadrático [61] para el sistema polinomial de segundo orden (5.25),(5.26)

$$\dot{m}_P(t) = 0,1m_P^2(t) + 0,1P(t) + P(t)[y(t) - m_P(t)], \quad (5.29)$$

con la condición inicial $m(0) = E(x(0) | y(0)) = m_0$,

$$\dot{P}(t) = 1 + 0,4m_P(t)P(t) - P^2(t), \quad (5.30)$$

con la condición inicial $P(0) = E((x(0) - m(0))(x(0) - m(0))^T | y(0))$.

Los resultados de la simulación numérica son obtenidos resolviendo el sistema ecuaciones de filtrado (5.27),(5.28) y (5.29),(5.30). Los valores obtenidos del estimado $m(t)$ y $m_P(t)$ que satisfacen las ecuación (5.27) y (5.29), respectivamente, son comparados con los valores reales de la variable de estado $x(t)$ en (5.25).

Para cada uno de los dos filtros (5.27),(5.28) y (5.29),(5.30) y el sistema de referencia (5.25),(5.26), involucrados en la simulación, se les asigna los siguientes valores iniciales: $x_0 = 1$, $m_0 = 4$, $P(0) = Q(0) = 100$. El horizonte de filtrado es fijado a $T = 0,4$. Los disturbios Gaussianos $\psi_1(t)$ y $\psi_2(t)$ en (5.25),(5.26) son realizados usando funciones de ruidos blancos en MatLab.

Observe que la condición inicial de $P(0)$ y $Q(0)$ son asignados iguales para propósitos de la simulación, ya que los resultados deberán ser comparados con respecto al criterio en promedio modulo (5.4). Si el valor inicial para Q es asignado como $Q(0) = 10$, el filtro polinomial en promedio cuadrático [61] debería dar un mejor resultado para el filtro polinomial en promedio cuadrático.

Las siguientes gráficas son obtenidas: La gráficas del estado de referencia $x(t)$, satisfaciendo la ecuación (5.25), el filtro del estimado por modos deslizantes en promedio modulo $m(t)$, satisfaciendo la ecuación (5.27), y el filtro del estimado polinomial en promedio cuadrático $m_P(t)$, satisfaciendo la ecuación (5.29), son mostradas en el intervalo entero de simulación $[0, 0,4]$ en la Fig. 5.3.

Se puede observar que el filtro por modos deslizantes en promedio modulo (5.27),(5.28) dará ciertamente un mejor valor para el criterio en promedio modulo (5.21) en comparación al filtro polinomial en promedio cuadrático (5.29),(5.30).

Note que la comparación del filtro por modos deslizantes en promedio modulo (5.27),(5.28) con el filtro polinomial en promedio modulo (5.29),(5.30) con respecto al criterio (5.4) es realizado con propósitos ilustrativos, dado que el filtro (5.27),(5.28) teóricamente debería dar un mejor resultado, como se sigue del teorema 5.2.

5.3.2. Apéndice II

Demostración del teorema 5.2 Acorde a la teoría general de filtrado basado en el proceso de innovación [51], el estimado óptimo es una función lineal que minimiza el criterio residual. Por ejemplo, el estimado polinomial en promedio cuadrático depende linealmente de la integral de $x(t) - E(x(t) | F_t^Y)$, que es la derivada del residuo minimizado en promedio cuadrático $(1/2)(x(t) - E(x(t) | F_t^Y))^T (x(t) - E(x(t) | F_t^Y))$, dado que el lado derecho de la ecuación del estimado del filtro polinomial en promedio cuadrático incluye linealmente la derivada del término $x(t) - E(x(t) | F_t^Y)$ (ver [61]). Similar mente, La ecuación del estimado en promedio modulo incluye linealmente la derivada de $Sign(x(t) - E(x(t) | F_t^Y))$ del residuo minimizado en promedio modulo $|x(t) - E(x(t) | F_t^Y)|$ en el criterio (5.4). Por lo tanto, el estimado en

promedio modulo puede ser representado por la ecuación

$$\begin{aligned} \dot{m}(t) = & a_0(t) + a_1(t)m(t) + a_2(t)m(t)m^T(t) + a_2(t)P(t) + 3a_3(t)m(t)P(t) + a_3(t)m(t)m(t)m^T(t) + \\ & + Q(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}A(t)Sign[A^T(t)(A(t)A^T(t))^{-1}y(t) - m(t)]. \end{aligned}$$

con la condición inicial $m(t_0) = E(x(t_0) | F_{t_0}^Y)$. Aquí, la matriz de ganancia $Q(t)$ deberá ser seleccionado para minimizar la varianza condicional del estimado del error producida por el estimado $m(t)$. Acorde a la formula de Itô (ver, por ejemplo, [51]), la ecuación para el estimado de la varianza del error $P(t) = E[(x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T | F_t^Y]$, producido por el estimado $m(t)$, toma la forma

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) = & (a_1(t)P(t) + P(t)a_1^T(t) + 2a_2(t)m(t)P(t) + 2(a_2(t)m(t)P(t))^T + \\ & 3(a_3(t)[P(t)P(t) + m(t)m^T(t)P(t)]) + 3(a_3(t)[P(t)P(t) + m(t)m^T(t)P(t)]^T + \\ & + b(t)b^T(t) - Q(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}A(t)E(Sign(A^T(t)(A(t)A^T(t))^{-1}A(t)x(t) - m(t)) \times \\ & \times (x(t) - m(t))^T | F_t^Y) - E((x(t) - m(t))(Sign(A^T(t)(A(t)A^T(t))^{-1}A(t)x(t) - m(t))^T | F_t^Y) \times \\ & A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}A(t)Q^T(t) + Q(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}A(t)Q^T(t). \end{aligned}$$

Como se sigue de la ecuación anterior, la variable $P(t)$ es minimizado, si la matriz de ganancia $Q(t)$ es asignado como $Q(t) = E((x(t) - m(t))(Sign(A^T(t)(A(t)A^T(t))^{-1}A(t)x(t) - m(t)))^T | F_t^Y)$. En vista de la definición de $Q(t)$, la ecuación para $m(t)$ es representada como (5.25) y, en vista de la formula de Itô [51], la ecuación para $Q(t)$ esta dada por (5.24), con la condición inicial $Q(t_0) = E[(x(t_0) - m(t_0))(Sign(A^T(t_0)(A(t_0)A^T(t_0))^{-1}A(t_0)x(t_0) - m(t_0)))^T | F_{t_0}^Y]$. El teorema es probado. ■

5.4. Conclusión

Este capítulo presenta el diseño y problema de filtrado en promedio cuadrático y promedio modulo, como una solución, de filtrado basado en una ganancia por modos deslizantes. Ambos problemas de filtrado son considerados para sistemas polinomiales estocásticos con ruidos blancos Gaussianos. Esto demuestra que el diseño del filtro por modos deslizantes genera el estimado en promedio cuadrático, que tiene el mismo mínimo de la varianza del error como el mejor estimado dado por el filtro polinomial en promedio cuadrático, aunque la matriz de ganancia de ambos filtros son diferentes. Es verificado numéricamente en el ejemplo que el estimado producido por el filtro diseñado y el filtro polinomial en promedio cuadrático da el mismo mínimo del estimado de la varianza del error. Por otro lado, el filtro por modos deslizantes diseñado por el estimado en promedio modulo, da un mejor valor del criterio en comparación al filtro polinomial en promedio cuadrático. Esta conclusion es probado y verificado numéricamente en el ejemplo ilustrativo. La aproximación propuesta basada en involucrar el término de innovación por modos deslizantes se espera sean aplicables a otros problemas de filtrado en promedio no cuadrático para sistemas no lineales, donde el filtro polinomial en promedio cuadrático convencional no funciona.

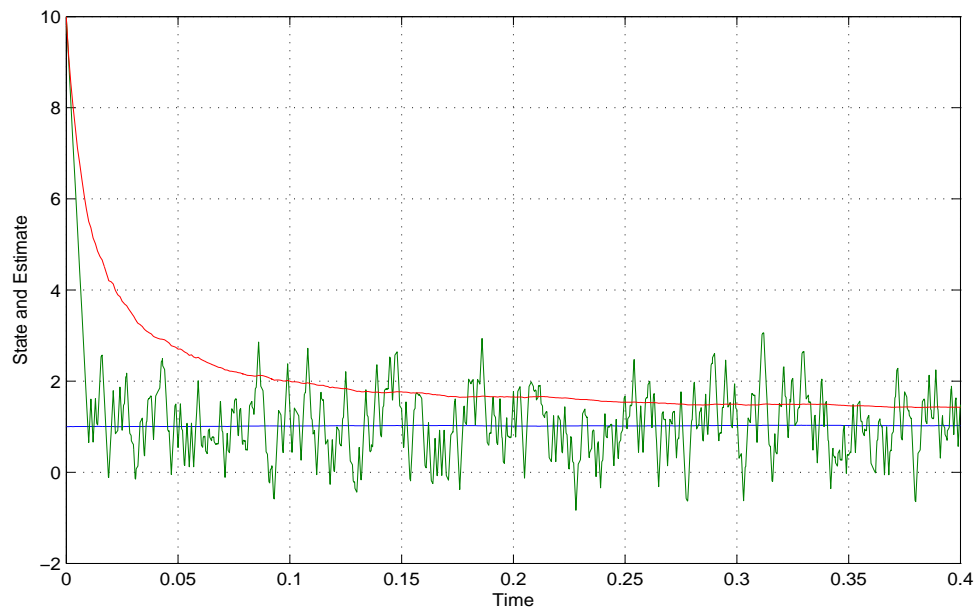


Figura 5.1: La gráfica del estado no medible (5.11) $x(t)$ (Azul), el estimado por modos deslizantes en promedio cuadrático (5.13) $m(t)$ (Verde), y el estimado del filtro polinomial en promedio cuadrático (5.16) $m_K(t)$ (Rojo) en el intervalo $[0, 0,4]$.

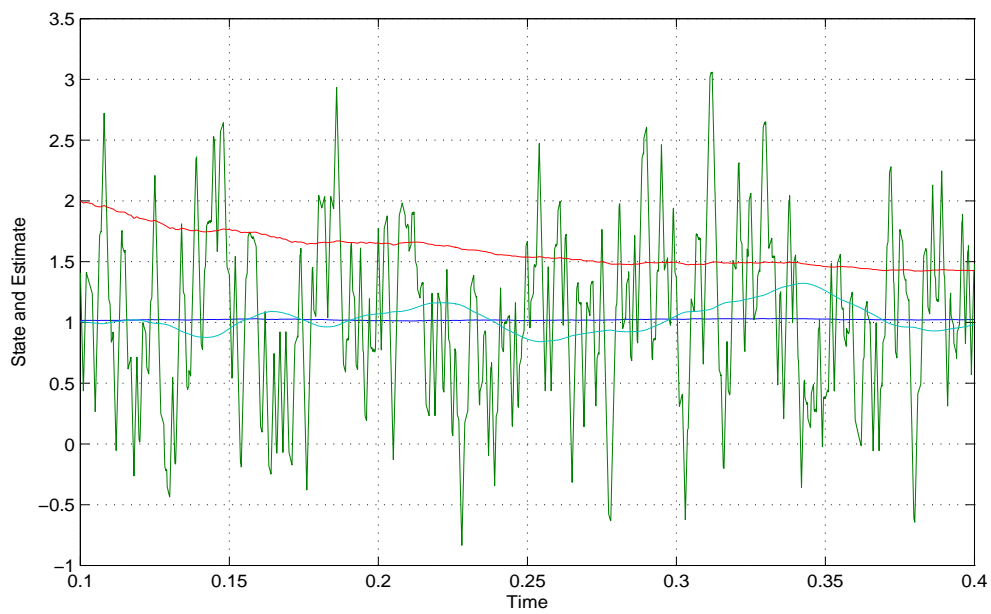


Figura 5.2: La gráfica del estado no medible (5.11) $x(t)$ (Azul), el estimado por modos deslizantes en promedio cuadrático (5.13) $m(t)$ (Verde), el estimado por modos deslizantes en promedio cuadrático (5.13) $m(t)$ promediado por un filtro Butterworth (Celeste), y el estimado polinomial en promedio cuadrático (5.16) $m_K(t)$ (Rojo) en el intervalo $[0,1,0,4]$.

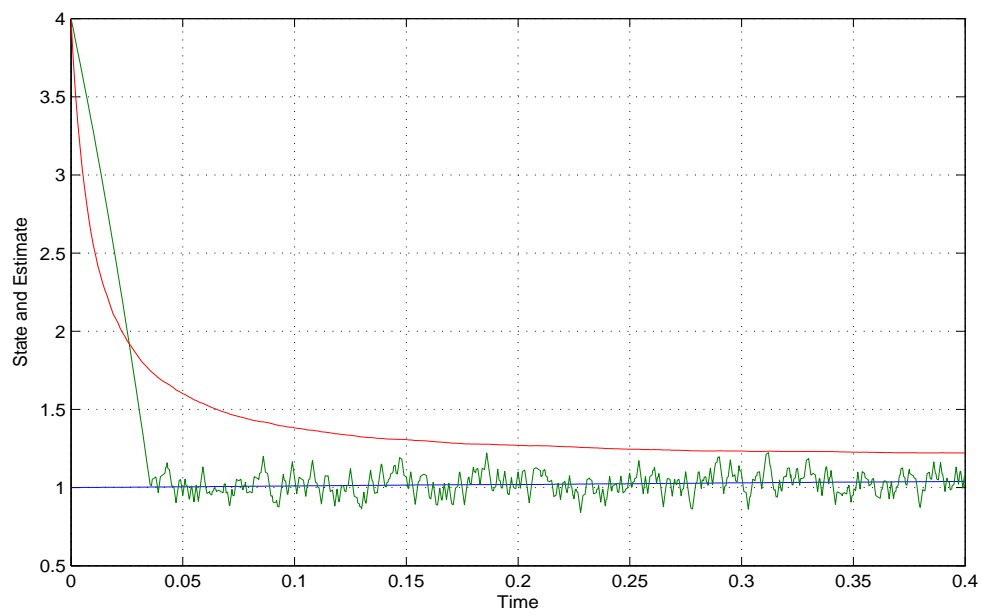


Figura 5.3: La gráfica del estado no medible (5.27) $x(t)$ (Azul), el estimado por modos deslizantes en promedio modulo (5.27) $m(t)$ (Verde), y el estimado polinomial en promedio cuadrático (5.29) $m_P(t)$ (Rojo) en el intervalo $[0, 0,4]$.

CAPÍTULO 6

DISEÑO DEL CONTROLADOR POR MODOS DESLIZANTES PARA SISTEMAS POLINOMIALES CON ESTADOS NO MEDIBLES

6.1. Problema del Controlador Óptimo

6.1.1. Planteamiento del Problema

Sea (Ω, F, P) un espacio probabilístico completo con una familia de σ -álgebras $F_t, t \geq t_0$ creciente continua por la derecha, y sean $(W_1(t), F_t, t \geq t_0)$ y $(W_2(t), F_t, t \geq t_0)$ procesos estándar de Wiener independientes. Los procesos aleatorios $(x(t), y(t))$ F_t -medibles son descritos por una ecuación diferencial polinomial para el estado del sistema

$$dx(t) = f(x, t)dt + B(t)u(t)dt + b(t)dW_1(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (6,1)$$

y la ecuación diferencial lineal para el proceso de observación

$$dY(t) = A(t)x(t)dt + B(t)dW_2(t). \quad (6,2)$$

Aquí, $x(t) \in R^n$ es el vector de estados, $u(t) \in R^l$ es la entrada de control, y $y(t) \in R^m$ es el vector de observación lineal, $m \leq n$. LA condición inicial $x_0 \in R^n$ es un vector Gaussiano tal que $x_0, W_1(t) \in R^p$, y $W_2(t) \in R^q$ son independientes. La matriz de observación $A(t) \in R^{m \times n}$ no se supone que sea invertible o cuadrada. Asumimos que $G(t)G^T(t)$ es una matriz definida positiva, por lo tanto, $m \leq q$. Todos

los coeficientes en (6.1)–(6.2) son funciones determinísticas de dimensiones apropiadas. Sin pérdida de generalidad, el sistema (6.1) (el par (A, B)) se asume que sea controlable, esto es, los componentes del estado no controlables no son considerados.

La función no lineal $f(x, t)$ es considerada polinomial de n variables, los componentes del vector de estados $x(t) \in R^n$, con coeficientes dependientes del tiempo. Como $x(t) \in R^n$ es un vector, se requiere una definición especial del polinomio para $n > 1$. Un polinomio de grado p del vector $x(t) \in R^n$ es considerado como una forma p -lineal de n componentes de $x(t)$

$$f(x, t) = a_0(t) + a_1(t)x(t) + a_2(t)xx^T + \dots + a_p(t)x \dots p \text{ times} \dots x,$$

donde $a_0(t)$ es un vector de dimension n , a_1 es una matriz de dimension $n \times n$, a_2 es un 3D tensor de dimension $n \times n \times n$, a_p es un $(p+1)$ D tensor de dimension $n \times \dots (p+1) \text{ times} \dots \times n$, y $x \times \dots p \text{ times} \dots \times x$ es un p D tensor de dimension $n \times \dots p \text{ times} \dots \times n$ obtenido por la multiplicación espacial del vector $x(t)$, p veces por si mismo. Tal polinomio puede también ser expresado en forma de sumatoria

$$\begin{aligned} f_k(x, t) = & a_0_k(t) + \sum_i a_{1_{ki}}(t)x_i(t) + \sum_{ij} a_{2_{kij}}(t)x_i(t)x_j(t) \\ & + \dots + \sum_{i_1 \dots i_p} a_{p_{ki_1 \dots i_p}}(t)x_{i_1}(t) \dots x_{i_p}(t), \\ & k, i, j, i_1 \dots i_p = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Las ecuaciones del estado y observación pueden ser escritas en una forma alternativa

$$\dot{x}(t) = f(x, t) + B(t)u(t) + b(t)\psi_1(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (6.1^*)$$

$$y(t) = A(t)x(t) + B(t)\psi_2(t), \quad (6.2^*)$$

donde $y(t) = \dot{Y}(t)$, y $\psi_1(t)$ y $\psi_2(t)$ son ruidos blancos Gaussianos, que son la derivada en promedio cuadrático débil de los procesos estándar de Wiener $W_1(t)$, y $W_2(t)$ (ver [51]). La representación (6.1), (6.2) y (6.1*), (6.2*) son equivalentes ([52]). Las ecuaciones (6.1*), (6.2*) presentan la forma convencional para las ecuaciones (6.1), (6.2), que es actualmente usados en la práctica.

En el problema del controlador lineal óptimo clásico [54, 55], el criterio a minimizar está definido como un funcional cuadrático Bolza-Meyer:

$$J_3 = E\left[\frac{1}{2}[x(T)]^T \psi[x(T)] + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T (u^T(s)R(s)u(s) + x^T(s)L(s)x(s))ds\right],$$

donde $R(t)$ es definido positivo y ψ , $L(t)$ son funciones matriciales simétricas definidas no negativas, y $T > t_0$ es un cierto momento del tiempo. El símbolo $E[f(x)]$ representa la esperanza (promedio) de la función f de la variable aleatoria x , y a^T denota la traspuesta del vector (matriz) a . La solución del

problema es bien conocida [54, 55] y considerada como fundamental en la teoría de sistemas lineales óptimos.

En este capítulo, el criterio a minimizar incluye un término terminal no cuadrático o un término de la energía del estado no cuadrático o ambos y son definidos como:

$$J_1 = E\left[\sum_{i=1}^n \psi_{ii} | x_i(T) | + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T (u^T(s)R(s)u(s) + x^T(s)L(s)x(s))ds\right], \quad (6,3)$$

$$J_2 = E\left[\sum_{i=1}^n \psi_{ii} | x_i(T) | + \int_{t_0}^T \frac{1}{2}(u^T(s)R(s)u(s))ds + \sum_{i=1}^n L_{ii}(s) | x_i(s) | ds\right], \quad (6,4)$$

donde $R(s)$ es definida positiva y $L(s)$ es una función matricial simétrica continua definida no negativa, ψ es una matriz diagonal definida no negativa, y $|x_i|$ denota el valor absoluto de los componentes de x_i del vector $x \in R^n$.

El problema de control óptimo es buscar un control $u^*(t)$, $t \in [t_0, T]$, que minimice el criterio J_1 o J_2 a lo largo de la trayectoria no observable $x^*(t)$, $t \in [t_0, T]$, generada al sustituir $u^*(t)$ dentro de la ecuación del estado (6.1).

6.2. Diseño del Controlador en Promedio Cuadrático

6.2.1. Principio de Separación I.

La solución del primer problema, el estado polinomial no medible $x(t)$, satisfaciendo (6.1), es reemplazado con el estimado en promedio cuadrático $m(t)$ sobre observaciones lineales $y(t)$ (6.2), que es obtenido usando el filtro de modos deslizantes en promedio cuadrático para sistemas polinomiales (ver [69] Para el planteamiento y solución del problema de filtrado correspondiente)

$$\begin{aligned} \dot{m}(t) = E(f(x, t) | F_t^Y) + B(t)u(t) + K(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1} \times \\ A(t)Sign[A^T(t)(A(t)A^T(t))^{-1}y(t) - m(t)]. \end{aligned} \quad (6,5)$$

con la condición inicial $m(t_0) = E(x(t_0) | F_{t_0}^Y)$.

Aquí, La función Signo de un vector $x = [x_1, \dots, x_n] \in R^n$ esta definido como $Sign[x] = [sign(x_1), \dots, sign(x_n)] \in R^n$, y la función signo de un escalar x es definido como $sign(x) = 1$, si $x > 0$, $sign(x) = 0$, si $x = 0$, y $sign(x) = -1$, si $x < 0$ ([53]).

La función matricial $K(t)$ satisface la ecuación matricial con coeficientes variantes en el tiempo

$$\dot{K}(t) = E(f(x, t)(x(t) - m(t))^T | F_t^Y) + (b(t)b^T(t))^* | A^T(t)(A(t)A^T(t))^{-1}y(t) - m(t) |, \quad (6,6)$$

con la condición inicial

$$K(t_0) = E[(x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T | F_{t_0}^Y] * | A^T(t_0)(A(t_0)A^T(t_0))^{-1}y(t_0) - m(t_0) |.$$

Aquí, $|x| = [|x_1|, \dots, |x_n|] \in R^n$ es definido como el vector de valores absolutos de los componentes del vector $x \in R^n$, y $A*b$ denota un producto entre una matriz $A \in R^{n \times n}$ y un vector $b \in R^n$, que resulta en la matriz definida como: Todas las entradas de la j -th columna de la matriz A son multiplicados por el j -th componente del vector b , $j = 1, \dots, n$.

Recordando que $m(t)$ es el estimado en promedio cuadrático para el vector de estado $x(t)$, basado en el proceso de observación $Y(t) = \{y(s), t_0 \leq s \leq t\}$, que minimiza la norma en promedio cuadrático

$$H = E[(x(t) - m(t))^T(x(t) - m(t)) | F_t^Y]$$

para todo momento del tiempo t . Aquí, $E[\xi(t) | F_t^Y]$ Es la esperanza condicional del proceso estocástico $\xi(t) = (x(t) - m(t))^T(x(t) - m(t))$ con respecto a la σ -álgebra F_t^Y generado por el proceso de observación $Y(t)$ en el intervalo $[t_0, t]$. Como sabemos [51], este estimado óptimo esta dado por la esperanza condicional

$$m(t) = E(x(t) | F_t^Y)$$

del estado $x(t)$ con respecto a la σ -álgebra F_t^Y generada por el proceso de observación $Y(t)$ en el intervalo $[t_0, t]$. Como siempre, la función matricial

$$P(t) = E[(x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T | F_t^Y]$$

es el estimado de la varianza del error.

Observación 6.1. Note que las ecuaciones (6.5) y (6.6) no tienen una forma de un sistema cerrado de ecuaciones debido a la presencia del polinomio dependiente de x , $E(f(x, t) | F_t^Y)$, y $E(f(x, t)(x(t) - m(t))^T | F_t^Y)$, que no son expresados todavía como funciones de las variables del filtro, $m(t)$ y $Q(t)$ (o $P(t)$). Sin embargo, como se demuestra en [62], la forma cerrada del sistema para las ecuaciones de filtrado en promedio cuadrático pueden ser obtenidas para cualquier estado polinomial (6.1) sobre observaciones lineales (6.2).

Es fácil verificar que el problema de control óptimo para el estado del sistema (6.1) y la función de costo (6.3) es equivalente al problema de control óptimo para el estimado (6.5) y el función de costo J_1 representada como

$$J_1 = \sum_{i=1}^n \psi_{ii} | m_i(T) | + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T (u^T(s)R(s)u(s) + m^T(s)L(s)m(s))ds + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T tr[P(s)L(s)]ds + tr[P^{-1}(T)K(T)\psi], \quad (6,7)$$

donde $tr[A]$ denota la traza de la matriz A . Donde la ultima parte de J_1 no depende del control $u(t)$ o del estado $x(t)$, la reducción de la función de costo M_1 para minimizar toma la forma

$$M_1 = \sum_{i=1}^n \psi_{ii} | m_i(T) | + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T (u^T(s)R(s)u(s) + m^T(s)L(s)m(s))ds. \quad (6,8)$$

Así, la solución del problema de control óptimo especificado por (6.1),(6.4) puede ser hecho resolviendo el problema de control óptimo dado por (6.5),(6.8). Finalmente, el mínimo valor del criterio J_1 deberá ser determinado usando (6.7). Esta conclusión presenta el principio de separación para sistemas lineales con criterio no cuadrático (6.4).

6.2.2. Diseño del Control I.

La solución optima del problema de control definido por (6.5),(6.8) esta dado por [70]. Aplicando el principio de separación de la sub-sección anterior para el filtro en modo deslizante en promedio cuadrático en [69] y el regulador óptimo en modo deslizante [70], el control óptimo que resuelve el problema original (6.1)–(6.4) esta dado por el siguiente teorema.

Teorema 6.1. El controlador en promedio cuadrático para el sistema polinomial (6.1) sobre observaciones lineales (6.2) con respecto al criterio no cuadrático (6.4) esta dado por la ley de control

$$u(t) = R^{-1}(t)B^T(t)Q(t)Sign[m(t)], \quad (6,9)$$

donde la función matricial $Q(t)$ es la solución de la ecuación matricial

$$\begin{aligned} \dot{Q}(t) = L(t)* | m(t) | -[a_1(t) + 2a_2(t)m(t) + \\ 3a_3(t)m(t)m^T(t) + \dots + pa_p(t)m(t) \dots_{p-1 \text{ times}} \dots m(t)]^T Q(t). \end{aligned} \quad (6,10)$$

La condición terminal de la ecuación (6.10) esta definida como $Q(T) = -\psi$, si el estado $m(t)$ no llega a la superficie deslizante $m(t) = 0$ dentro del intervalo de $[t_0, T]$, $m(t) \neq 0$, $t \in [t_0, T]$. De otra manera, si el estado $m(t)$ llega a la superficie deslizante $m(t) = 0$ dentro del intervalo de tiempo $[t_0, T]$, $m(t) = 0$ para algún $t \in [t_0, T]$, entonces $Q(t)$ se fija igual a la función matricial $Q_0(t)$ que es tal una solución de (6.10) haciendo que $m(t)$ llegue a la superficie deslizante $m(t) = 0$ bajo la ley de control (6.9) con la matriz $Q_0(t)$ exactamente en el momento $t = T$, $m(T) = 0$, pero $m(t) \neq 0$, $t < T$.

Sustituyendo el anterior control óptimo (6.9) en la ecuación (6.5), se obtiene la siguiente ecuación del estimado del estado controlado óptimamente

$$\begin{aligned} \dot{m}(t) = E(f(x, t) | F_t^Y) + \\ B(t)R^{-1}(t)B^T(t)Q(t)Sign[m(t)] + K(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1} \times \\ A(t)Sign[A^T(t)(A(t)A^T(t))^{-1}y(t) - m(t)]. \end{aligned} \quad (6,11)$$

con la condición inicial $m(t_0) = E(x(t_0) | F_{t_0}^Y)$.

Como se comentado en la observación 6.1, las ecuaciones del controlador obtenidas (6.5),(6.6), (6.9)–(6.11), no presentan un sistema de ecuaciones cerrado explícito, si una forma especifica del polinomio $f(x, t)$ en (6.1) no se proporciona. Por lo tanto, en la siguiente sub-sección, se obtiene una forma cerrada

de las ecuaciones de filtrado (6.5) y (6.6) par la función de tercer orden $f(x, t)$ en la ecuación (6.1), como sigue. Debería observar, sin embargo, que la aplicación del mismo procedimiento daría resultado en el diseño de sistemas cerrados de ecuaciones de filtrado para cualquier función polinomial $f(x, t)$ en (6.1).

6.2.3. Diseño del Controlador para un Estado Polinomial de Tercer Orden I.

Sea la función

$$f(x, t) = a_0 + a_1(t)x + a_2(t)xx^T + a_3(t)xxx^T \quad (6.12)$$

un polinomio de tercer orden, donde x es un vector n -dimensional, $a_0(t)$ es un vector de dimension n , a_1 es una matriz de dimension $n \times n$, a_2 es un 3D tensor de dimension $n \times n \times n$, a_3 es un 4D tensor de dimension $n \times n \times n \times n$. En este caso, Las siguientes ecuaciones de filtrado para el estimado óptimo $m(t)$ y para la matriz de ganancia $Q(t)$ son obtenidas

$$\begin{aligned} \dot{m}(t) = & a_0 + a_1m(t) + a_2m(t)m(t)^T + a_2P(t) + 3a_3P(t)m(t) + a_3m(t)m(t)m(t)^T \quad (6.13) \\ & + K(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}A(t)Sign[A^T(t)(A(t)A^T(t))^{-1}y(t) - m(t)]. \end{aligned}$$

con la condición inicial $m(t_0) = E(x(t_0) | F_{t_0}^Y)$,

$$\begin{aligned} \dot{K}(t) = & a_1K(t) + 2a_2m(t)K(t) + (a_2m(t)K(t))^T + 3(a_3(P(t)K(t) + m(t)m(t)^TK(t))) \quad (6.14) \\ & + (a_3(3P(t)K(t) + 2m(t)m(t)^TK(t)))^T + (b(t)b^T(t))* | A^T(t)(A(t)A^T(t))^{-1}y(t) - m(t) | \end{aligned}$$

con la condición inicial

$$K(t_0) = E[(x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T | F_{t_0}^Y] * | A^T(t_0)(A(t_0)A^T(t_0))^{-1}y(t_0) - m(t_0) | .$$

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) = & a(t)P(t) + P(t)a^T(t) + 2a_2(t)m(t)P(t) \quad (6.15) \\ & + 2(a_2(t)m(t)P(t))^T + 3(a_3(P(t)P(t) + m(t)m^T(t)P(t))) \\ & + 3(a_3(P(t)P(t) + m(t)m^T(t)P(t)))^T + b(t)b^T(t) - P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}A(t)P(t) \end{aligned}$$

con la condición inicial $P(t_0) = E[(x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T | F_{t_0}^Y]$.

Consecuentemente, el resultado obtenido es formulado en el siguiente teorema.

Teorema 6.2. El controlador en promedio cuadrático para un estado polinomial de tercer orden del sistema (6.12) sobre observaciones lineales (6.2) con respecto a un criterio no cuadrático (6.4) es dado por la ley de control (6.9), la ecuación (6.13) para el estimado $m(t) = E(x(t) | F_t^Y)$, las ecuaciones (6.14) y (6.15) para la matriz de ganancia del filtro $K(t)$ y la matriz de la varianza del error $P(t)$, y la ecuación (6.10) para la matriz de ganancia del control $Q(t)$.

6.2.4. Ejemplo. I

Esta sección presenta un ejemplo del diseño del controlador por modos deslizantes para sistemas polinomiales (6.1) sobre observaciones lineales (6.2) con criterio no cuadrático (6.4), usando el control (6.9),(6.10),(6.13)–(6.15), y comparándolo con el controlador polinomial en promedio cuadrático de tercer orden [63].

Considere una ecuación del estado cuadrática

$$\dot{x}(t) = 0,1x^2(t) + u(t) + \psi_1(t), \quad x(0) = 1, \quad (6.16)$$

y un proceso de observación lineal

$$y(t) = x(t) + \psi_2(t), \quad (6.17)$$

donde $\psi_1(t)$ and $\psi_2(t)$ son ruidos blancos Gaussian, que son la derivada en promedio cuadrático débil de un proceso estándar de Wiener (ver [51]). Las ecuaciones (6.16),(6.17) corresponden a la forma convencional alternativa (6.1*), (6.2*) para las ecuaciones (6.1),(6.2).

El problema de controlador es buscar el control $u(t)$, $t \in [0, T]$, $T = 0,4$, que minimiza el criterio

$$J_1 = 50 |x(T)| + \frac{1}{2} \int_0^T (u^2(t) + x^2(t)) dt, \quad (6.18)$$

En otras palabras, el problema de control es minimizar la energía total del estado x usando el mínimo de la energía total del control u .

Aplicando el controlador por modos deslizantes diseñado (6.9),(6.10),(6.13)–(6.15), la ley de control (6.9) esta dada por

$$u(t) = Q(t) \text{sign}[m(t)], \quad (6.19)$$

donde $m(t)$ satisface la ecuación

$$\dot{m}(t) = 0,1m^2(t) + 0,1P(t) + K(t) \text{sign}[y(t) - m(t)], \quad (6.20)$$

con la condición inicial $m(0) = E(x(0) | y(0)) = m_0$,

$$\dot{K}(t) = 0,3K(t) + |y(t) - m(t)|, \quad (6.21)$$

con la condición inicial $Q(0) = E((x(0) - m(0))(x(0) - m(0))^T | y(0)) * |y(0) - m(0)|$,

$$\dot{P}(t) = 1 + 0,4m(t)P(t) - P^2(t), \quad (6.22)$$

con la condición inicial $P(0) = E((x(0) - m(0))(x(0) - m(0))^T | y(0))$, and

$$\dot{Q}^*(t) = |m(t)| - 0,2m(t)Q^*(t), \quad (6.23)$$

con la condición terminal $Q(0,4) = -50$, si $m(t) \neq 0$ para cualquier $t < T$, y $Q^*(t^*) = 0$, donde t^* es el tiempo que el estimado $m(t)$ llega a la superficie deslizante $m = 0$ en el momento final $t = T$, de otra forma.

Sustituyendo el control anterior (6.19) dentro (6.20), la ecuación del estimado controlado óptimamente del estado toma la forma

$$\begin{aligned} \dot{m}(t) = & 0,1m^2(t) + 0,1P(t) + \\ & Q(t)\text{sign}[m(t)] + K(t)\text{sign}[y(t) - m(t)], \end{aligned} \quad (6,24)$$

con la condición inicial $m(0) = E(x(0) | y(0)) = m_0$. El sistema obtenido (6.20)–(6.24) puede ser resuelto usando métodos numéricos simples, tales como método de disparo. Este método consiste en variar la condición inicial de (6.23) hasta que la condición terminal dada este satisfecha.

Para la simulación numérica del sistema (6.16),(6.17) y el controlador (6.20)–(6.24), los valores iniciales $x(0) = 1$, $m(0) = 10$, y $P(0) = 866,25$ son asignados. El tiempo final esta fijado para $T = 0,4$. Los disturbios $\psi_1(t)$ en (6.16) y $\psi_2(t)$ en (6.17) son realizados usando la función de ruidos blancos de MatLab.

El sistema (6.20)–(6.24) es primero simulado con la condición final $Q^*(0,4) = -50$. Como la simulación muestra, al estado $m(t)$ llegando al cero antes del momento final $T = 0,4$. En consecuencia, la condición terminal para la ecuación (6.23) es cambiado a $Q^*(0,4) = -\psi_0$ tal que $m(0,4) = 0$, y el sistema (6.20)–(6.24) es simulado de nuevo. El resultado obtenido aplicando el controlador (6.20)–(6.24) al sistema (6.12) son mostrados en la Fig. 6.1, que presenta la gráfica del estado controlado (6.16) $x(t)$, el estimado controlado (6.20) $m(t)$, el control (6.19) $u(t)$, y el criterio (6.18) $J_1(t)$ en el intervalo $[0, 0,4]$. El valor del criterio (6.18) en el momento final $T = 0,4$ es $J_1(0,4) = 6,8286$.

El diseño del controlador por modos deslizantes (6.9),(6.10),(6.13)–(6.15) es comparado con el mejor controlador lineal para el criterio J_3 con el término cuadrático no integral

$$J_3 = 25x^2(T) + \frac{1}{2} \int_0^T (u^2(t) + x^2(t))dt, \quad (6,25)$$

Como se sigue de la teoría de control polinomial-cuadrático [63], la ley de control esta dada por

$$u(t) = Q(t)m(t), \quad (6,26)$$

donde $m(t)$ satisface la ecuación

$$\dot{m}(t) = 0,1m^2(t) + 0,1P(t) + u(t) + P(t)[y(t) - m(t)], \quad (6,27)$$

con la condición inicial $m(0) = E(x(0) | y(0)) = m_0$,

$$\dot{P}(t) = 1 + 0,4m(t)P(t) - P^2(t), \quad (6,28)$$

con la condición inicial $P(0) = E((x(0) - m(0))(x(0) - m(0))^T | y(0))$, y

$$\dot{Q}(t) = 1 - 0,3m(t)Q(t) - Q^2(t), \quad Q(0,4) = -50. \quad (6,29)$$

Sustituyendo el control anterior (6.26) dentro (6.27), las ecuación del estimado controlado óptimamente del estado toma la forma

$$\dot{m}(t) = 0,1m^2(t) + 0,1P(t) + Q(t)m(t) + P(t)[y(t) - m(t)], \quad (6,30)$$

con la condición inicial $m(0) = E(x(0) | y(0)) = m_0$.

Note que la comparación entre el controlador de modo deslizante (6.9),(6.10),(6.13)–(6.15) con el controlador polinomial-cuadrático (6.25)–(6.29) con respecto al criterio (6.18) es llevado acabo para fines ilustrativos, dado que el controlador (6.9),(6.10),(6.13)–(6.15) debería dar teóricamente un mejor resultado, como se sigue del teorema 6.1.

Los resultado obtenido al aplicar el controlado (6.9),(6.10),(6.13)–(6.15) para el sistema (6.16),(6.17) son mostrados en la Fig. 6.1-6.4, que presenta las gráficas del estado controlado (6.16) $x(t)$, el estimado controlado (6.24) $m(t)$, el control (6.19) $u(t)$, y el criterio (6.18) $J_1(t)$ en el intervalo $[0, 0,4]$. El valor del criterio (6.18) en el momento final $T = 0,4$ es $J_1(0,4) = 14,7499$.

Puede ser observado que el controlador por modos deslizantes (6.9),(6.10),(6.13)–(6.15) haría un mejor valor para el criterio (6.18) en comparación con el controlador retroalimentado polinomial-cuadrático (6.25)–(6.29). Note que el controlador retroalimentado polinomial-cuadrático falla para proveer un control para el criterio (6.18).

6.3. Diseño de Control en Promedio Modulo.

6.3.1. Principio de Separación. II

Resolviendo el segundo problema, el estado polinomial no medible $x(t)$, satisface (6.1), es reemplazado con un estimado en promedio modulo $m(t)$ sobre observaciones lineales $y(t)$ (6.2), que se obtiene usando el filtrado por modos deslizantes en promedio modulo para sistemas polinomiales (ver [71] para el planteamiento y solución del problema de filtrado correspondiente)

$$\begin{aligned} \dot{m}(t) = E(f(x, t) | F_t^Y) + B(t)u(t) + K(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1} \times \\ A(t)Sign[A^T(t)(A(t)A^T(t))^{-1}y(t) - m(t)], \end{aligned} \quad (6,31)$$

con la condición inicial $m(t_0) = E(x(t_0) | F_{t_0}^Y)$.

Aquí, la función Signo de un vector $x = [x_1, \dots, x_n] \in R^n$ esta definido como $Sign[x] = [sign(x_1), \dots, sign(x_n)] \in R^n$, y la función signo de un escalar x es definido como $sign(x) = 1$, si $x > 0$, $sign(x) = 0$, si $x = 0$, y $sign(x) = -1$, si $x < 0$ ([53]).

La función matricial $K(t)$ satisface la ecuación matricial con coeficientes variantes en el tiempo

$$\dot{K}(t) = b(t)b^T(t) + E(f(x, t)(x(t) - m(t))^T | F_t^Y), \quad (6,32)$$

con la condición inicial

$$K(t_0) = E[(x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T | F_{t_0}^Y] * | A^T(t_0)(A(t_0)A^T(t_0))^{-1}y(t_0) - m(t_0) | .$$

Aquí, $|x| = [|x_1|, \dots, |x_n|] \in R^n$ es definido como el vector de valores absolutos de los componentes del vector $x \in R^n$, y $A * b$ denota un producto entre una matriz $A \in R^{n \times n}$ y un vector $b \in R^n$, que resulta en la matriz definida como: Todas las entradas de la j -th columna de la matriz A son multiplicados por el j -th componente del vector b , $j = 1, \dots, n$.

Recordando que $m(t)$ es el estimado en modulo para el vector de estado $x(t)$, basado en el proceso de observación $Y(t) = \{y(s), t_0 \leq s \leq t\}$, que minimiza la norma en promedio modulo

$$J = E[|x(t) - \hat{x}(t)| | F_t^Y]$$

para todo momento t .

Observación 6.2.

Note que las ecuaciones (6.31) y (6.32) no tienen una forma de un sistema cerrado de ecuaciones debido a la presencia de términos polinomiales dependientes de x , $E(f(x, t) | F_t^Y)$, y $E(f(x, t)(x(t) - m(t))^T | F_t^Y)$, que no son expresados todavía como funciones de las variables del filtro, $m(t)$ y $Q(t)$ (o $P(t)$). Sin embargo, como se demuestra en [62], la forma cerrada del sistema para las ecuaciones de filtrado en promedio cuadrático pueden ser obtenidas para cualquier estado polinomial (6.1) sobre observaciones lineales (6.2).

Es fácilmente verificable que el problema de control óptimo para el estado del sistema (6.1) y función de costo (6.4) es equivalente al problema de control óptimo para el estimado (6.31) y el funcional de costo J_2 representado como

$$J_2 = \sum_{i=1}^n \psi_{ii} |m_i(T)| + \int_{t_0}^T \frac{1}{2} (u^T(s)R(s)u(s))ds + \sum_{i=1}^n L_{ii}(s) |m_i(s)| ds + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T tr[K(s)L(s)]ds + tr[K(T)\psi], \quad (6.33)$$

donde $tr[A]$ denota la traza de la matriz A . Dado que la ultima parte de J_2 no depende del control $u(t)$ o del estado $x(t)$, la reducción efectiva de la función de costo M_2 para minimizar toma la forma

$$M_2 = \sum_{i=1}^n \psi_{ii} |m_i(T)| + \int_{t_0}^T \frac{1}{2} (u^T(s)R(s)u(s))ds + \sum_{i=1}^n L_{ii}(s) |m_i(s)| ds. \quad (6.34)$$

Así, la solución del problema de control óptimo especificado por (6.1),(6.4) puede ser encontrado resolviendo el problema de control óptimo dado por (6.31),(6.34). Finalmente, el valor mínimo del criterio J_2 deberá ser determinado usando (6.33). Esta conclusion presenta el principio de separación para sistemas lineales con criterio no cuadrático (6.4).

6.3.2. Diseño del Control II.

La solución óptima del problema de control definida por (6.31),(6.34) esta dada por [56]. Aplicando el principio de separación de la sub-sección anterior para el filtro por modos deslizantes en promedio modulo en [71] y el regulador óptimo por modos deslizantes [56], la solución del controlador óptimo del problema original (6.1)–(6.4) esta dado por el siguiente teorema.

Teorema 6.3. El controlador en promedio modulo para un sistema polinomial (6.1) sobre observaciones lineales (6.2) con respecto al criterio no cuadrático (6.4) esta dado por la ley de control

$$u(t) = R^{-1}(t)B^T(t)Q(t)Sign[m(t)], \quad (6.35)$$

donde la función matricial $Q(t)$ es la solución de la ecuación matricial

$$\dot{Q}(t) = L(t) - [a_1(t) + 2a_2(t)m(t) + \quad (6.36)$$

$$3a_3(t)m(t)m^T(t) + \dots + pa_p(t)m(t) \dots_{p-1 \text{ times}} \dots m(t)]^T Q(t).$$

La condición terminal para la ecuación (6.36) es definida como $Q(T) = -\psi$, si el estado $m(t)$ no llega a la superficie deslizante $m(t) = 0$ dentro del intervalo de tiempo $[t_0, T]$, $m(t) \neq 0$, $t \in [t_0, T]$. De otra manera, si el estado $m(t)$ llega a la superficie deslizante $m(t) = 0$ dentro del intervalo de tiempo $[t_0, T]$, entonces la condición terminal para $Q(t)$ es fijado como cero en el momento del tiempo t^* , $Q(t^*) = 0$, donde t^* es el tiempo máximo posible de llegada a la superficie deslizante $m(t) = 0$. En otras palabras, si no existe una solución del sistema de ecuaciones (6.1), (6.4), (6.31) haremos que satisfaga las condiciones $m(t_0) = m_0$ y $Q(t_1) = 0$, $t_1 > t^*$, cuando $m(t) \neq 0$ para $t < t_1$ y $m(t) = 0$ para algún $t \geq t_1$. Note que $m(t) = 0$, $t \geq t^*$, y, consecuentemente, $u(t) = 0$, $t \geq t^*$; más aun, el valor de $Q(t)$, $t \geq t^*$, no es necesario.

Sustituyendo el control óptimo anterior (6.35) dentro de la ecuación (6.31), la siguiente ecuación del estimado del estado controlado óptimamente es obtenida

$$\dot{m}(t) = E(f(x, t) | F_t^Y) + \quad (6.37)$$

$$B(t)R^{-1}(t)B^T(t)Q(t)Sign[m(t)] + K(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1} \times$$

$$A(t)Sign[A^T(t)(A(t)A^T(t))^{-1}y(t) - m(t)].$$

con la condición inicial $m(t_0) = E(x(t_0) | F_t^Y)$.

Como se a comentado en la observación 6.2, las ecuaciones del controlador obtenidas (6.31),(6.32), (6.35)–(6.37), no presentan un sistema de ecuaciones cerrado explícito, si una forma especifica del polinomio $f(x, t)$ en (6.1) no es proporcional. Por lo tanto, en la siguiente sub-sección, se obtiene una forma cerrada de las ecuaciones de filtrado (6.31) y (6.32) par la función de tercer orden $f(x, t)$ en la ecuación (6.1), como sigue. Debería observar, sin embargo, que la aplicación del mismo procedimiento daría resultado en el diseño de sistemas cerrados de ecuaciones de filtrado para cualquier función polinomial $f(x, t)$ en (6.1).

6.3.3. Diseño del Controlador para un Estado Polinomial de Tercer Orden II.

Sea la función

$$f(x, t) = a_0 + a_1(t)x + a_2(t)xx^T + a_3(t)xxx^T \quad (6.38)$$

un polinomio de tercer orden, donde x es un vector n -dimensional, $a_0(t)$ es un vector de dimension n , a_1 es una matriz de dimension $n \times n$, a_2 es un 3D tensor de dimension $n \times n \times n$, a_3 es un 4D tensor de dimension $n \times n \times n \times n$. En este caso, Las siguientes ecuaciones de filtrado para el estimado óptimo $m(t)$ y para la matriz de ganancia $Q(t)$ son obtenidas

$$\begin{aligned} \dot{m}(t) = & a_0(t) + a_1(t)m(t) + a_2(t)m(t)m^T(t) + a_2(t)K(t)* | A^T(t)(A(t)A^T(t))^{-1}y(t) - m(t) | + \quad (6.39) \\ & 3a_3(t)m(t)K(t)* | A^T(t)(A(t)A^T(t))^{-1}y(t) - m(t) | + \\ & a_3(t)m(t)m(t)m^T(t) + B(t)R^{-1}(t)B^T(t)Q(t)Sign[m(t)]+ \\ & +K(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}A(t)Sign[A^T(t)(A(t)A^T(t))^{-1}y(t) - m(t)]. \end{aligned}$$

con la condición inicial $m(t_0) = E(x(t_0) | F_{t_0}^Y)$,

$$\begin{aligned} \dot{K}(t) = & a_1(t)K(t) + 2a_2(t)m(t)K(t) + a_3(t)[K(t)K(t)* | A^T(t)(A(t)A^T(t))^{-1}y(t) - m(t) | + \quad (6.40) \\ & 3m(t)m^T(t)K(t))] + b(t)b^T(t), \end{aligned}$$

$$K(t_0) = E[(x(t_0) - m(t_0))(Sign(A^T(t_0)(A(t_0)A^T(t_0))^{-1}A(t_0)x(t_0) - m(t_0)))^T | F_{t_0}^Y].$$

Consecuentemente, el resultado obtenido es formulado en el siguiente teorema.

Theorem 6.4. El controlador en promedio modulo para un estado polinomio de tercer orden del sistema (6.38) sobre observaciones lineales (6.2) con respecto a un criterio no cuadrático (6.4) es dado por la ley de control (6.35), la ecuación (6.39) para el estimado $m(t) = E(x(t) | F_t^Y)$, la ecuación (6.40) para la matriz de ganancia del filtro $K(t)$, y la ecuación (6.36) para la matriz de ganancia del control $Q(t)$.

6.3.4. Ejemplo II.

Esta sección presenta un ejemplo del diseño del controlador por modos deslizantes en promedio modulo para sistemas polinomiales (6.1) sobre observaciones lineales (6.2) con criterio no cuadrático (6.4), usando el control (6.35),(6.36),(6.39),(6.40), y comparándolo con el controlador polinomial en promedio cuadrático de tercer orden [63].

Considere la ecuación de estado cuadrática

$$\dot{x}(t) = 0,1x^2(t) + u(t) + \psi_1(t), \quad x(0) = 1, \quad (6.41)$$

y el proceso de observación lineal

$$y(t) = x(t) + \psi_2(t), \quad (6.42)$$

donde $\psi_1(t)$ and $\psi_2(t)$ son ruidos blancos Gaussian, que son la derivada en promedio cuadrático débil de un proceso estándar de Wiener (ver [51]). Las ecuaciones (6.41),(6.42) corresponden a la forma convencional alternativa (6.1*), (6.2*) para las ecuaciones (6.1),(6.2).

El problema de controlador es buscar el control $u(t)$, $t \in [0, T]$, $T = 0,4$, que minimiza el criterio

$$J_2 = 50 |x(T)| + \int_0^T \left(\frac{1}{2} u^2(t) + |x(t)| \right) dt, \quad (6.43)$$

En otras palabras, el problema de control es minimizar la energía total del estado x usando el mínimo de la energía total del control u .

Aplicando el controlador por modos deslizantes diseñado (6.35),(6.36),(6.39),(6.40), la ley de control (6.35) esta dada por

$$u(t) = Q(t) \text{sign}[m(t)], \quad (6.44)$$

donde $m(t)$ satisface la ecuación

$$\dot{m}(t) = 0,1m^2(t) + \quad (6.45)$$

$$0,1K(t) |y(t) - m(t)| + u(t) + K(t) \text{sign}[y(t) - m(t)],$$

con la condición inicial $m(0) = E(x(0) | y(0)) = m_0$,

$$\dot{K}(t) = 0,2m(t)K(t) + 1, \quad (6.46)$$

con la condición inicial $K(0) = E((x(0) - m(0))(\text{Sign}(x(0) - m(0)))^T | y(0))$, and

$$\dot{Q}^*(t) = 1 - 0,2m(t)Q^*(t), \quad (6.47)$$

con la condición terminal $Q^*(t^*) = 0$, donde t^* es el tiempo máximo posible llegada a la superficie deslizante $m = 0$ por el estado del sistema $m(t)$.

Sustituyendo el control anterior (6.44) dentro (6.45), la ecuación del estimado controlado óptimamente del estado toma la forma

$$\dot{m}(t) = 0,1m^2(t) + 0,1K(t) |y(t) - m(t)| + \quad (6.48)$$

$$Q(t) \text{sign}[m(t)] + K(t) \text{sign}[y(t) - m(t)],$$

con la condición inicial $m(0) = E(x(0) | y(0)) = m_0$. El sistema obtenido (6.44)–(6.48) puede ser resuelto usando métodos numéricos simples, tales como el método de disparo. Este método consiste en variar la condición inicial de (6.47) hasta que la condición terminal dada este satisfecha.

Para la simulación numérica del sistema (6.41),(6.42) y el controlador (6.44)–(6.48), los valores iniciales $x(0) = 1$, $m(0) = 10$, y $K(0) = 100$ son asignados. El tiempo final esta fijado para $T = 0,4$. Los disturbios $\psi_1(t)$ en (6.16) y $\psi_2(t)$ en (6.17) son realizados usando la función de ruidos blancos de MatLab.

Los resultado obtenido al aplicar el controlado (6.44)–(6.48) para el sistema (6.41),(6.42) son mostrados en la Fig. 6.2, que presenta las gráficas del estado controlado (6.41) $x(t)$, el estimado controlado (6.48) $m(t)$, el control (6.44) $u(t)$, y el criterio (6.43) $J_2(t)$ en el intervalo $[0, 0,4]$. El valor del criterio (6.43) en el momento final $T = 0,4$ es $J_2(0,4) = 1,2285$.

El diseño del controlador por modos deslizantes (6.35),(6.36),(6.39),(6.40) es comparado con el mejor controlador polinomial para el criterio J_3 con el término cuadrático no integral

$$J_3 = 25x^2(T) + \frac{1}{2} \int_0^T (u^2(t) + x^2(t))dt, \quad (6.49)$$

Como se sigue de la teoría de control polinomial-cuadrático [63], la ley de control esta dada por

$$u(t) = Q(t)m(t), \quad (6.50)$$

donde $m(t)$ satisface la ecuación

$$\dot{m}(t) = 0,1m^2(t) + 0,1P(t) + u(t) + P(t)[y(t) - m(t)], \quad (6.51)$$

con la condición inicial $m(0) = E(x(0) | y(0)) = m_0$,

$$\dot{P}(t) = 1 + 0,4m(t)P(t) - P^2(t), \quad (6.52)$$

con la condición inicial $P(0) = E((x(0) - m(0))(x(0) - m(0))^T | y(0))$, y

$$\dot{Q}(t) = 1 - 0,3m(t)Q(t) - Q^2(t), \quad Q(0,4) = -50. \quad (6.53)$$

Sustituyendo el control anterior (6.50) dentro (6.51), las ecuación del estimado controlado óptimamente del estado toma la forma

$$\dot{m}(t) = 0,1m^2(t) + 0,1P(t) + Q(t)m(t) + P(t)[y(t) - m(t)], \quad (6.54)$$

con la condición inicial $m(0) = E(x(0) | y(0)) = m_0$.

Para la simulación numérica del sistema (6.41),(6.42) y el controlador (6.50)–(6.54), los valores iniciales $x(0) = 1$, $m(0) = 10$, y $P(0) = 100$ son asignados.

Los resultado obtenido al aplicar el controlado (6.50)–(6.54) para el sistema (6.41) son mostrados en la Fig. 6.5-6.8, que presenta las gráficas del estado controlado (6.41) $x(t)$, el estimado controlado (6.51) $m(t)$, el control (6.50) $u(t)$, y el criterio (6.43) $J_2(t)$ en el intervalo $[0, 0,4]$. El valor del criterio (6.43) en el momento final $T = 0,4$ es $J_2(0,4) = 15,4089$.

Note que la comparación entre el controlador de modo deslizante (6.35),(6.36),(6.39),(6.40) con el controlador polinomial-cuadrático (6.50)–(6.54) con respecto al criterio (6.43) es llevado acabo para fines ilustrativos, dado que el controlador (6.35),(6.36),(6.39),(6.40) debería dar teóricamente un mejor resultado, como se sigue del teorema 6.3.

Se puede observar que el controlador por modos deslizantes (6.35),(6.36),(6.39),(6.40) dan un valor mejor del criterio (6.43) en comparación del controlador retroalimentado polinomial-cuadrático (6.50)–(6.54). Note que el controlador retroalimentado polinomial-cuadrático falla para proveer un control para el criterio (6.43).

6.4. Conclusiones.

Este capítulo presenta el problema del controlador en promedio cuadrático y el problema del controlador en promedio modulo para sistemas polinomiales, cuya solución esta dada por un controlador por modos deslizantes que consiste de un filtro por modos deslizantes en promedio cuadrático y un filtro por modos deslizantes en promedio modulo, respectivamente, y un regulador por modos deslizantes. El problema del controlador óptimo es considerado para sistemas polinomiales sobre observaciones lineales con respecto a diferentes criterios Bolza-Meyer, donde 1) el energía del control y la energía del estado dentro de la integral son cuadráticos y el término no integral es de primer orden o 2) la energía del control es cuadrático y la energía del estado es de primer orden. Es demostrado que la solución optima dada por el controlador por modos deslizantes, mientras el controlador retroalimentado polinomial convencional falla para dar una solución factible.

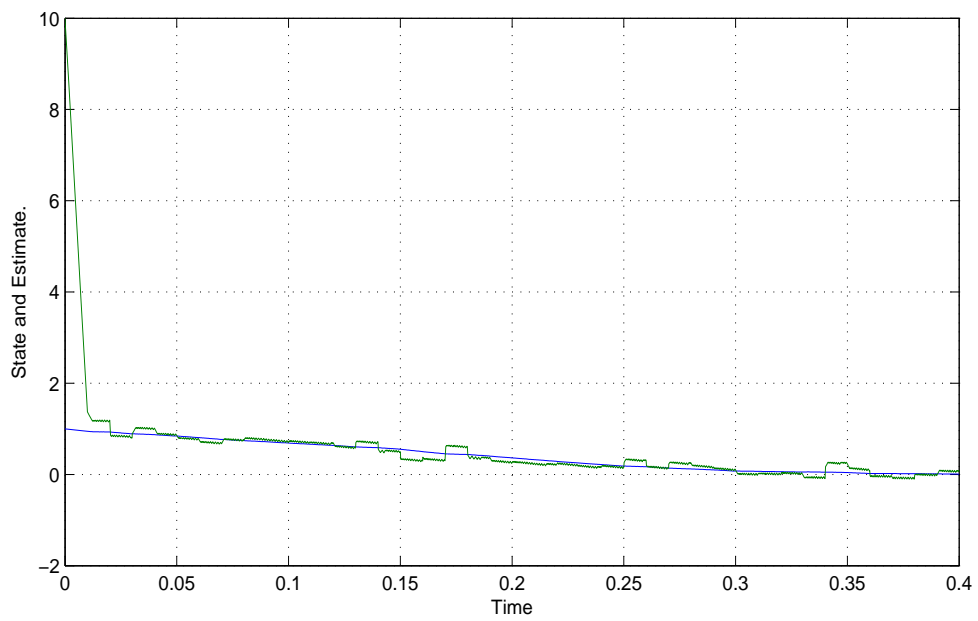


Figura 6.1: El controlador por modos deslizantes óptimo con respecto al criterio J_1 vs. el controlador retroalimentado polinomial en el intervalo entero $[0, 0,4]$. **1. Controlador por modos deslizantes.** La gráfica del estado controlado (6.16) $x(t)$ (Azul) y el estimado controlado (6.20) $m(t)$ (Verde)

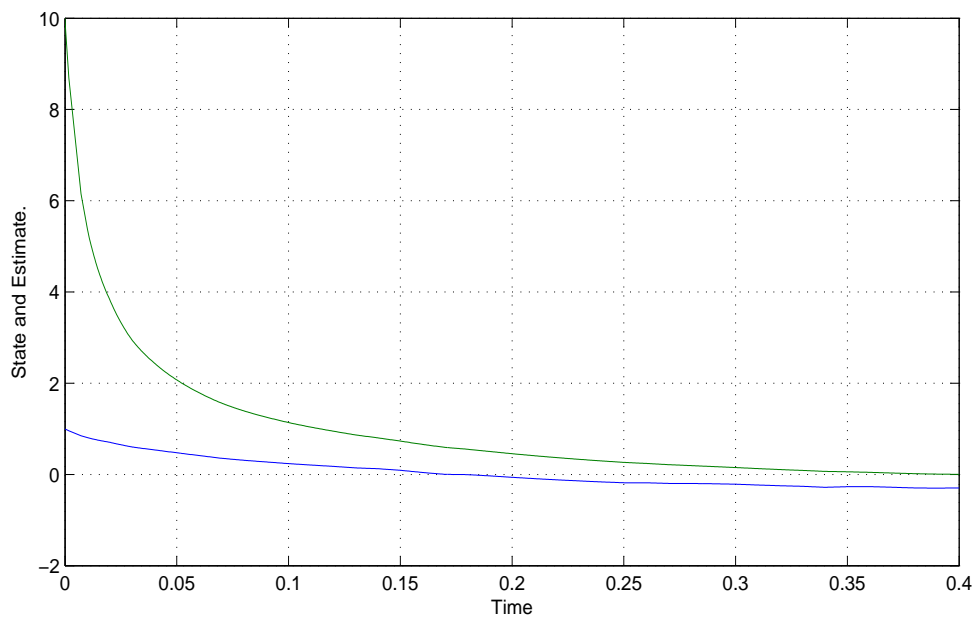


Figura 6.2: El controlador por modos deslizantes óptimo con respecto al criterio J_1 vs. el controlador retroalimentado polinomial en el intervalo entero $[0, 0.4]$. **2. controlador retroalimentado polinomial.** La gráfica del estado controlado (6.16) $x(t)$ (Azul) y el estimado controlado (6.24) $m(t)$ (Verde)

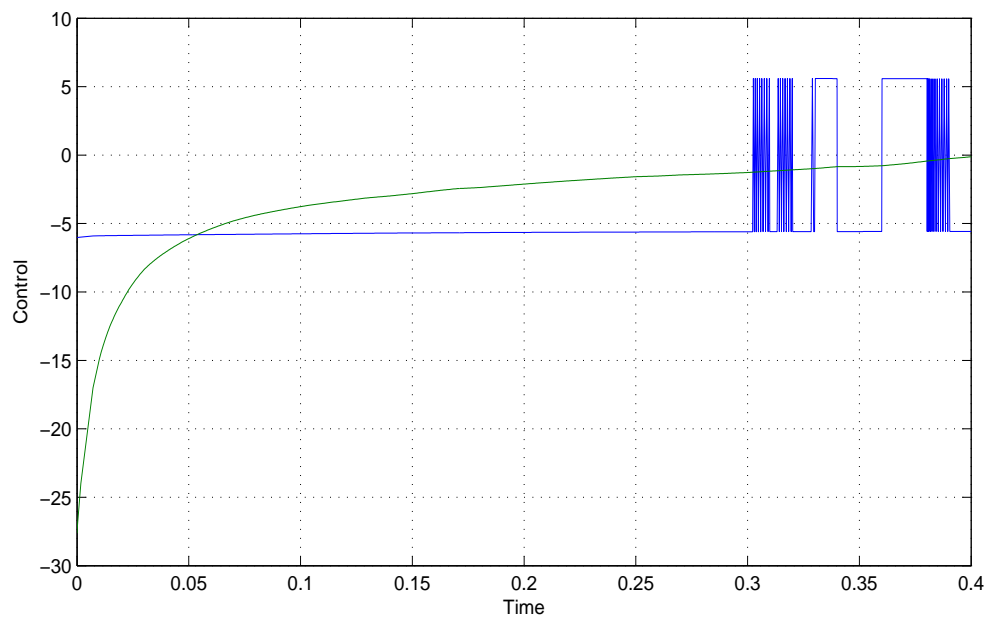


Figura 6.3: El controlador por modos deslizantes óptimo con respecto al criterio J_1 vs. el controlador retroalimentado polinomial en el intervalo entero $[0, 0.4]$. **3. Control.** Gráfica del control por modos deslizantes (6.19) $u^*(t)$ (Azul) y el control retroalimentado polinomial (6.26) $u(t)$ (Verde)

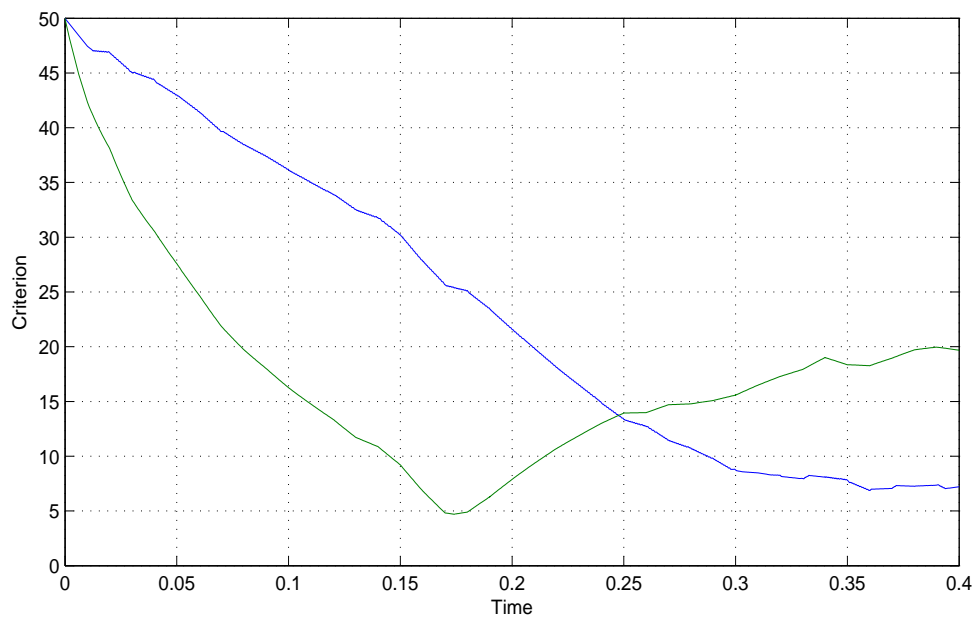


Figura 6.4: El controlador por modos deslizantes óptimo con respecto al criterio J_1 vs. el controlador retroalimentado polinomial en el intervalo entero $[0, 0.4]$. **4. Criterio.** Gráfica del criterio (6.18) J_1 producido por el control por modos deslizantes (Azul) y por el controlador retroalimentado polinomial (Verde).

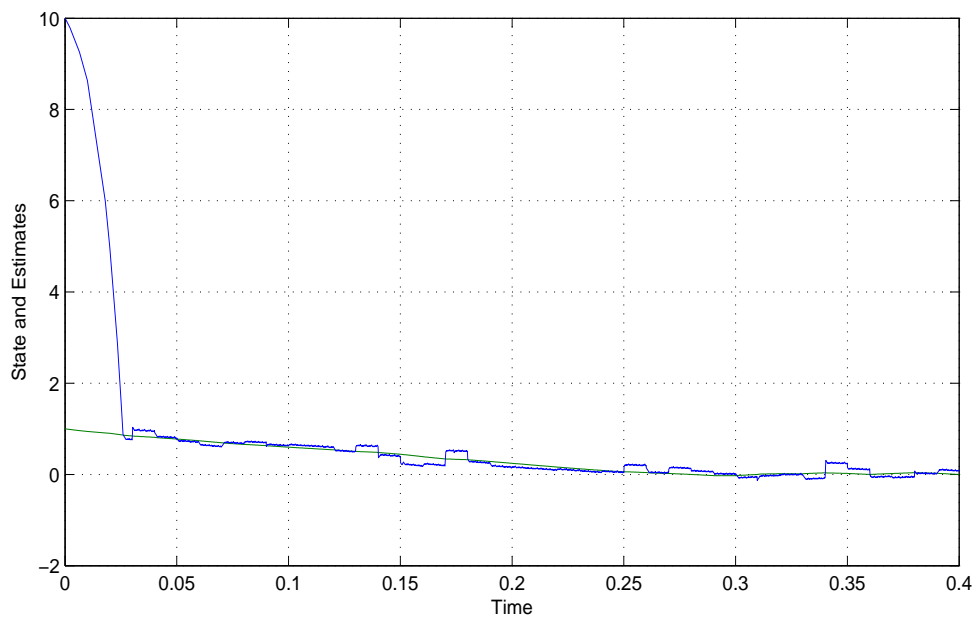


Figura 6.5: El controlador por modos deslizantes óptimo con respecto al criterio J_2 vs. el controlador retroalimentado polinomial en el intervalo entero $[0, 0,4]$. **1. Controlador por modos deslizantes.** La gráfica del estado controlado (6.41) $x(t)$ (Azul) y el estimado controlado (6.45) $m(t)$ (Verde)

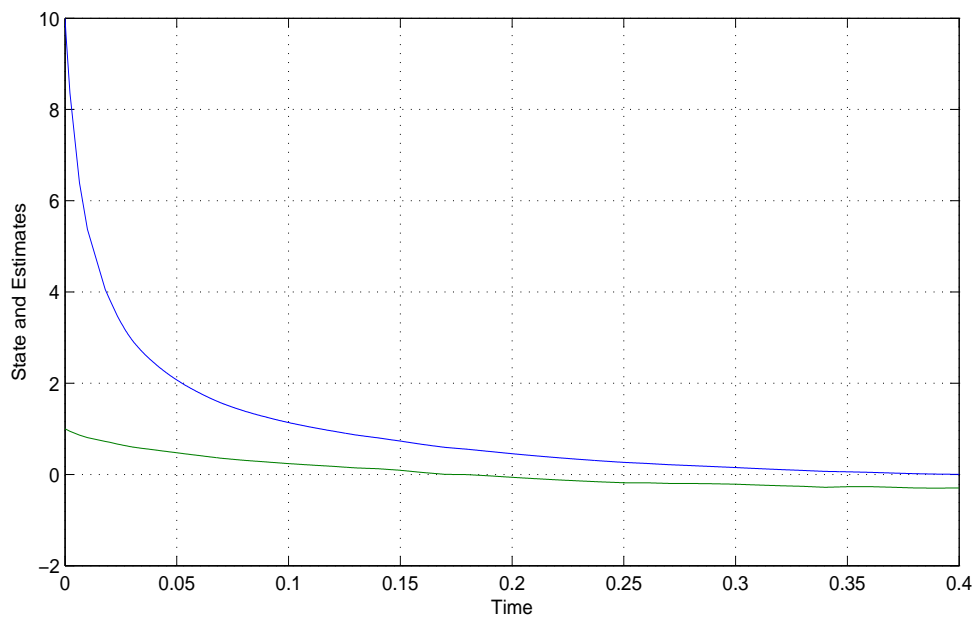


Figura 6.6: El controlador por modos deslizantes óptimo con respecto al criterio J_2 vs. el controlador retroalimentado polinomial en el intervalo entero $[0, 0.4]$. **2. controlador retroalimentado polinomial.** La gráfica del estado controlado (6.41) $x(t)$ (Azul) y el estimado controlado (6.51) $m(t)$ (Verde)

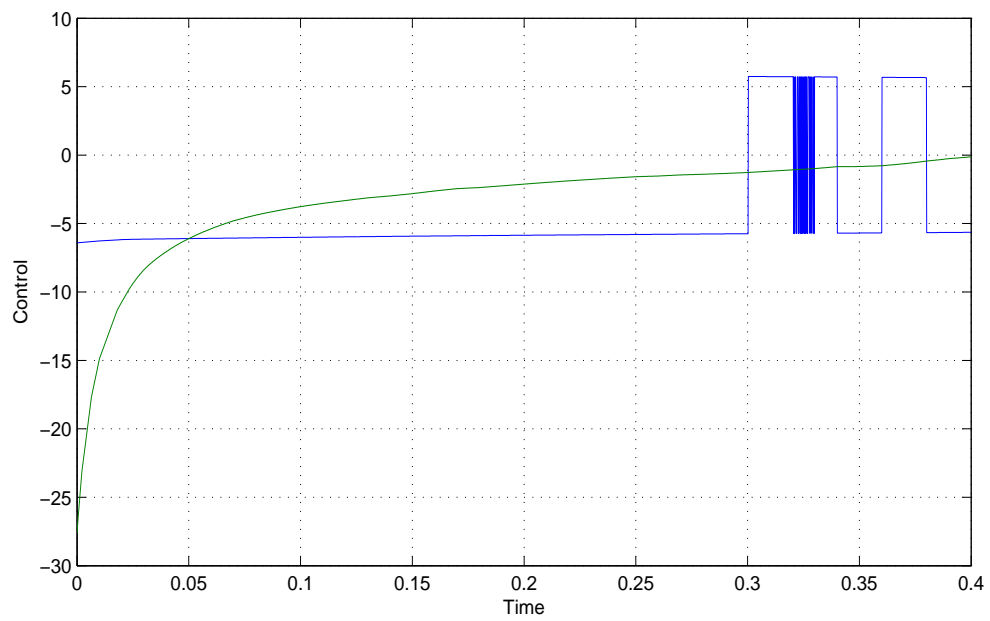


Figura 6.7: El controlador por modos deslizantes óptimo con respecto al criterio J_2 vs. el controlador retroalimentado polinomial en el intervalo entero $[0, 0.4]$. **3. Control.** Gráfica del control por modos deslizantes (6.44) $u^*(t)$ (Azul) y el control retroalimentado polinomial (6.50) $u(t)$ (Verde)

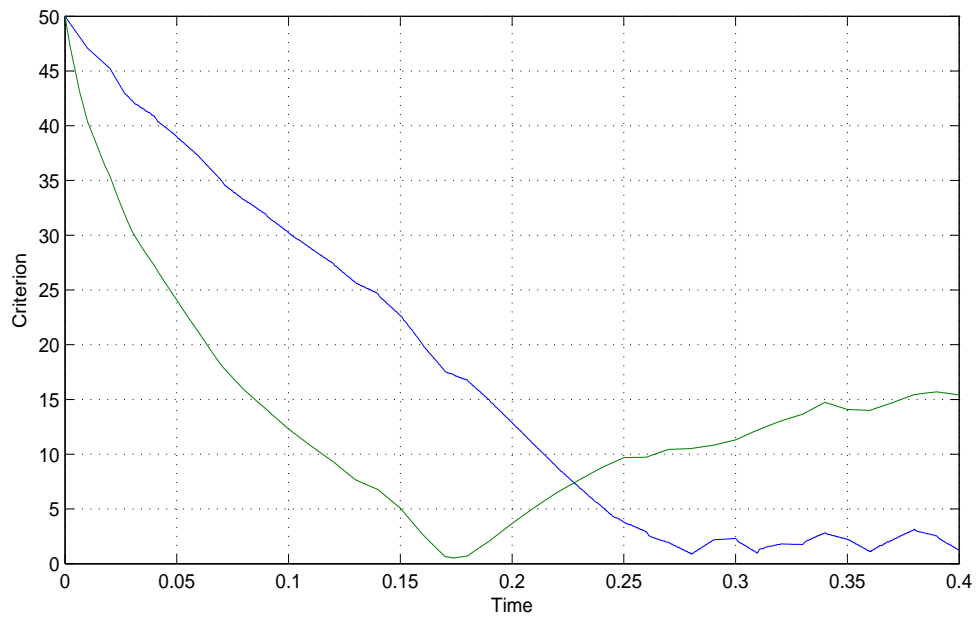


Figura 6.8: El controlador por modos deslizantes óptimo con respecto al criterio J_2 vs. el controlador retroalimentado polinomial en el intervalo entero $[0, 0.4]$. **4. Criterio.** Gráfica del criterio (6.43) J_2 producido por el control por modos deslizantes (Azul) y por el controlador retroalimentado polinomial (Verde).

CAPÍTULO 7

FILTRADO DEL ESTADO POR MODOS DESLIZANTES Y ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS PARA SISTEMAS LINEALES ESTOCÁSTICOS

7.1. Problema de Filtrado para Sistemas Lineales con Parámetros Desconocidos

Sea (Ω, F, P) un espacio probabilístico completo con una familia de σ -álgebras $F_t, t \geq t_0$ creciente continua por la derecha, y sean $(W_1(t), F_t, t \geq t_0)$ y $(W_2(t), F_t, t \geq t_0)$ procesos estándar de Wiener independientes. Los procesos aleatorios $(x(t), y(t))$ F_t -medibles son descritos por una ecuación diferencial polinomial con un parámetro vectorial desconocido $\theta(t)$ para el estado del sistema

$$\begin{aligned} dx(t) &= (a_0(\theta, t) + a(\theta, t)x(t))dt + b(t)dW_1(t), \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned} \tag{7,1}$$

y la ecuación diferencial para el proceso de observación

$$dy(t) = (A_0(t) + A(t)x(t))dt + B(t)dW_2(t). \tag{7,2}$$

Aquí, $x(t) \in R^n$ es el vector de estado, $y(t) \in R^m$ es el vector de observación lineal, $m \leq n$, y $\theta(t) \in R^p$, $p \leq n \times n + n$, es el vector de entradas desconocidas de la matriz $a(\theta, t)$ y los componentes desconocidos del vector $a_0(\theta, t)$. Esto último significa que ambas estructuras contienen componentes desconocidos $a_{0_i}(t) = \theta_k(t), k = 1, \dots, p_1 \leq n$ y $a_{ij}(t) = \theta_k(t), k = p_1 + 1, \dots, p \leq n \times n + n$, así como los componentes conocidos $a_{0_i}(t)$ y $a_{ij}(t)$, cuyos valores son funciones conocidas del tiempo. La condición inicial $x_0 \in R^n$

es un vector Gaussiano tal que x_0 , $W_1(t)$, y $W_2(t)$ son independientes. Asumimos que $B(t)B^T(t)$ es una matriz definida positiva. Todos los coeficientes en (7.1)–(7.2) son funciones determinísticas del tiempo de dimensiones apropiadas.

Se considera que no hay ninguna información útil sobre los valores de los parámetros desconocidos $\theta_k(t)$, $k = 1, \dots, p$, y esta incertidumbre crece cuando el tiempo tiene a infinito. En otras palabras, los parámetro desconocido pueden ser modelados como procesos de Wiener F_t -medurable

$$d\theta(t) = dW_3(t), \quad (7.3)$$

con la condición inicial desconocida $\theta(t_0) = \theta_0 \in R^p$, donde $(W_3(t), F_t, t \geq t_0)$ es un proceso de Wiener independiente de x_0 , $W_1(t)$, y $W_2(t)$.

El problema de estimación es buscar un estimado óptimo $\hat{z}(t) = [\hat{x}(t), \hat{\theta}(t)]$ del vector combinado del estado del sistema y parámetros desconocidos $z(t) = [x(t), \theta(t)]$, basado en el proceso de observación $Y(t) = \{y(s), 0 \leq s \leq t\}$. Como sabemos [51], este estimado óptimo esta dado por la esperanza condicional

$$\hat{z}(t) = m(t) = E(z(t) | F_t^Y)$$

del sistema de estado $z(t) = [x(t), \theta(t)]$ con respecto a la σ - algebra F_t^Y generada por el proceso de observación $Y(t)$ en el intervalo $[t_0, t]$. Usando los modos deslizantes en promedio cuadrático, la función matricial

$$P(t) = E[(z(t) - m(t))(z(t) - m(t))^T | F_t^Y]$$

es el estimado de la varianza del error y para el modo deslizante en promedio modulo, la función matricial

$$P(t) = E[|z(t) - m(t)| | F_t^Y]$$

es el estimado de la varianza del error.

La solución propuesta para este problema de filtrado esta basado en el diseño del filtro por modos deslizantes para sistemas polinomiales con estados no medibles, que son obtenidos en [67] y [68].

7.2. Reducción del Problema.

Para aplicar las ecuaciones de filtrado óptimo para el vector de estado $z(t) = [x(t), \theta(t)]$, gobernado por las ecuaciones (7.1) y (7.3), sobre las observaciones lineales (7.2) (ver [67] y [68]), la ecuación de estado (7.1) deberá ser escrita en forma polinomial. Para este motivo, una matriz $a_1(t) \in R^{(n+p) \times (n+p)}$, un tensor cubico $a_2(t) \in R^{(n+p) \times (n+p) \times (n+p)}$, y un vector $c_0(t) \in R^{(n+p)}$ son introducidos como sigue.

La ecuación para la i -ésimo componente del vector de estado esta dada por

$$dx_i(t) = (a_{0i}(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j(t))dt + \sum_{j=1}^n b_{ij}(t)dW_{1j}(t),$$

$$x_i(t_0) = x_{0_i}.$$

Entonces: 1. Si la variable $a_{0_i}(t)$ es una función conocida, entonces la i -ésimo componente del vector $c_0(t)$ es fijado para esta función, $c_{0_i}(t) = a_{0_i}(t)$. De otra forma, si la variable $a_{0_i}(t)$ es una función desconocida, entonces la $(i, n+i)$ -th entrada de la matriz $a_1(t)$ es fijado como 1. Como observo, el numero del componentes desconocidos del vector a_0 es igual a $p_1 \leq n$.

2. Si la variable $a_{ij}(t)$ es una función conocida, entonces la (i, j) -th componente de la matriz $a_1(t)$ es fijado para esta función, $a_{1_{ij}}(t) = a_{ij}(t)$. De otra forma, si la variable $a_{ij}(t)$ es una función desconocida, entonces la $(i, n+p_1+k, j)$ -th entrada del tensor cubico $a_2(t)$ es fijado como 1, donde k es el numero de que esta entrada desconocida ocurre en la matriz $a_{ij}(t)$, consecuentemente contando las entradas desconocidas por renglones desde la primera hasta n -ésimo entrada en cada renglón. El numero de entradas desconocidas en la matriz a_1 es igual a $p - p_1 \leq n^2$, donde $p_1 \leq n$ es el numero de componentes desconocidos del vector a_0 , y $p \leq n^2 + n$ es el numero total de variables desconocidas.

3. Todas las otras entradas no asignadas de la matriz $a_1(t)$, el tensor cubico $a_2(t)$, y el vector $c_0(t)$ son fijados como 0.

Usando la notación introducida, las ecuaciones del estado (7.1),(7.3) para el vector $z(t) = [x(t), \theta(t)] \in R^{n+p}$ pueden ser re-escritas como

$$dz(t) = (c_0(t) + a_1(t)z(t) + a_2(t)z(t)z^T(t))dt + \text{diag}[b(t), I_{p \times p}] \text{diag}[W_1^T(t), W_3^T(t)]^T, \quad (7.4)$$

$$z(t_0) = [x_0, \theta_0],$$

donde la matriz $a_1(t)$, el tensor cubico $a_2(t)$, y el vector $c_0(t)$ ya se han definido, y $I_{p \times p}$ es la matriz identidad $p \times p$ - dimensional. la ecuación (7.4) es bilineal con respecto al estado extendido $z(t) = [x(t), \theta(t)]$.

Así, el problema de estimación esta ahora re-formulado en lo que se refiere a buscar el estimado óptimo $\hat{z}(t) = m(t) = [\hat{x}(t), \hat{\theta}(t)]$ para el vector de estado $z(t) = [x(t), \theta(t)]$, gobernado por la ecuación bilineal (7.4), basado en el proceso de observación $Y(t) = \{y(s), 0 \leq s \leq t\}$, satisfaciendo la ecuación (7.2).

7.3. Filtro por Modos Deslizantes en Promedio Cuadrático

La solución de este problema es obtener las ecuaciones de filtrado por modos deslizantes en promedio cuadrático óptimas para el estado bilineal con parte lineal parcialmente medible sobre observaciones lineal [67] y dado por

$$\dot{m}(t) = c_0(t) + a_1(t)m(t) + a_2(t)m(t)m^T(t) + a_2(t)P(t) + Q(t)[A(t), 0_{m \times p}]^T (B(t)B^T(t))^{-1} \times \quad (7.5)$$

$$\text{Sign}[y(t) - (A_0(t) + [A(t), 0_{m \times p}]m(t))].$$

$$m(t_0) = [E(x(t_0) | F_t^Y), E(\theta(t_0) | F_t^Y)],$$

$$\dot{Q}(t) = a_1(t)Q(t) + 2a_2(t)m(t)Q(t) + (a_2(t)m(t)Q(t))^T + (diag[b(t), I_p])(diag[b(t), I_p]^T) \times \quad (7,6)$$

$$| y(t) - (A_0(t) + [A(t), 0_{m \times p}]m(t)) |$$

$$Q(t_0) = E[(z(t_0) - m(t_0))(z(t_0) - m(t_0))^T | F_{t_0}^Y] * | y(t_0) - (A_0(t_0) + [A(t_0), 0_{m \times p}]m(t_0)) | .$$

$$\dot{P}(t) = a_1(t)P(t) + P(t)a_1^T(t) + 2a_2(t)m(t)P(t) + \quad (7,7)$$

$$2(a_2(t)m(t)P(t))^T + (diag[b(t), I_p])(diag[b(t), I_p]^T) - P(t)[A(t), 0_{m \times p}]^T (B(t)B^T(t))^{-1} [A(t), 0_{m \times p}]P(t),$$

$$P(t_0) = E((z(t_0) - m(t_0))(z(t_0) - m(t_0))^T | F_{t_0}^Y),$$

donde $0_{m \times p}$ es la matriz cero $m \times p$ - dimensional.

Teorema 7.1. El filtro por modos deslizantes en promedio cuadrático finito dimensional para el vector de estado extendido $z(t) = [x(t), \theta(t)]$, gobernado por la ecuación (7.4), sobre observaciones lineales (7.2) esta dado por la ecuación (7.5) para el estimado óptimo $\hat{z}(t) = m(t) = [\hat{x}(t), \hat{\theta}(t)] = E([x(t), \theta(t)] | F_t^Y)$ y las ecuaciones (7.6) y (7.7) para el estimado de la varianza del error $P(t) = E[(z(t) - m(t))(z(t) - m(t))^T | F_t^Y]$. Este filtro, aplicado para el sub-vector $\theta(t)$, también sirve como el identificado óptimo para el vector de parámetros desconocidos $\theta(t)$ en la ecuación (7.1), dando el estimado del sub-vector $\hat{\theta}(t)$ como el estimado óptimo del parámetro.

Demostración. La demostración se sigue directamente de los pasos 1-3 para diseñar los coeficientes en la ecuación (7.4), la nueva ecuación de estado extendido (7.4), y las ecuaciones de filtrado por modos deslizantes en promedio cuadrático óptimo (7.5),(7.6),(7.7) para el estado bilineal-lineal con parte parcialmente medible lineal sobre observaciones lineales, que fueron obtenidas en [67].

Así, basado en las ecuaciones de filtrado por modos deslizantes en promedio cuadrático general para estados bilineales con parte parcialmente medible sobre observaciones lineales, el filtro óptimo del estado y el identificador de parámetros son obtenidos para el estado del sistema lineal (7.1) con parámetro desconocidos, modelados por (7.3), sobre observaciones lineales (7.2). Donde el problema original de identificación es reducido al problema de filtrado para el estado del sistema extendido incluyendo al estado y parámetros, la condición de identificabilidad para el sistema original coincide con la condición de observabilidad para el sistema extendido.

7.3.1. Ejemplo 1

Esta sección presenta un ejemplo del diseño de filtrado por modos deslizantes en promedio cuadrático e identificación para estados del sistema lineales con parámetros multiplicativos desconocidos, basados en el estado lineal medible.

Sea el estado del sistema bidimensional $x(t) \in R$ satisfaciendo la ecuación bilineal con un parámetro desconocido escalar $\theta \in R$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (7,8)$$

$$\dot{x}_2(t) = \theta x_2(t) + \psi_1(t),$$

y el proceso de observación escalar $y(t) \in R$ esta dado por la ecuación lineal

$$y(t) = x_1(t) + \psi_2(t), \quad (7,9)$$

donde $\psi_1(t)$ y $\psi_2(t)$ son ruidos blancos Gaussianos, que son la derivada en promedio cuadrático débil en procesos estándar de Wiener (ver [51]). Las ecuaciones (7.8)–(7.9) presentan la forma convencional para las ecuaciones (7.1)–(7.2), que es actualmente usado en la practica [52]. El parámetro θ esta modelado como un proceso estándar de Wiener, esto es, satisface la ecuación

$$d\theta(t) = dW_3(t), \quad \theta(0) = \theta_0,$$

que también puede ser escrita como

$$\dot{\theta}(t) = \psi_3(t), \quad \theta(0) = \theta_0, \quad (7,10)$$

donde $\psi_3(t)$ es un ruido blanco Gaussiano. El ruido blanco Gaussiano $\psi_1(t)$ y $\psi_3(t)$ en las ecuaciones del estado y parámetro son asumidas que son ruidos blancos Gaussianos independientes.

El problema de filtrado por modos deslizantes en promedio cuadrático es buscar un estimado óptimo para el estado bilineal-lineal (7.8),(7.10), usando observaciones lineales (7.9) confundidos con disturbios modelados como ruidos blancos Gaussianos independientes e idénticamente distribuidos.

Las ecuaciones de filtrado por modos deslizantes en promedio cuadrático (7.5),(7.6),(7.7) toman la siguiente forma particular para el sistema (7.8)–(7.10)

$$\begin{aligned} \dot{m}_1(t) &= m_2(t) + Q_{11}(t) \text{Sign}(y(t) - m_1(t)) \\ \dot{m}_2(t) &= P_{23}(t) + m_2(t)m_3(t) + Q_{21}(t) \text{Sign}(y(t) - m_1(t)) \\ \dot{m}_3(t) &= Q_{31}(t) \text{Sign}(y(t) - m_1(t)), \end{aligned} \quad (7,11)$$

con la condición inicial $m_1(0) = E(x_{10} | y(0)) = m_{10}$, $m_2(0) = E(x_{20} | y(0)) = m_{20}$ and $m_3(0) = E(\theta_0 | y(0)) = m_{30}$,

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{11}(t) &= Q_{21}(t), \\ \dot{Q}_{21}(t) &= 2m_3(t)Q_{21}(t), \\ \dot{Q}_{31}(t) &= 0, \end{aligned} \quad (7,12)$$

con la condición inicial $Q(0) = E((x_0, \theta_0) - m(0))(x_0, \theta_0) - m(0))^T | y(0) | y(0) - m_1(0) | ..$

$$\dot{P}_{11}(t) = P_{21}(t) + P_{12} + P_{11}^2, \quad (7,13)$$

$$\begin{aligned}
\dot{P}_{12}(t) &= P_{22}(t) + 2m_3P_{21} + P_{11}P_{12}, \\
\dot{P}_{13}(t) &= P_{23}(t) + P_{11}P_{13}, \\
\dot{P}_{21}(t) &= P_{22}(t) + 2m_3P_{21} + P_{11}P_{12}, \\
\dot{P}_{22}(t) &= 1 + 4m_3P_{22} + P_{21}P_{12}, \\
\dot{P}_{23}(t) &= 2m_3P_{21} + P_{21}P_{13},
\end{aligned}$$

con la condición inicial $P(0) = E((x_0, \theta_0) - m(0))(x_0, \theta_0) - m(0))^T | y(0))$.

Resultados numéricos de la simulación son obtenidos resolviendo el sistema de ecuaciones de filtrado (7.11)–(7.13). Los valores obtenidos de $m_1(t)$, estimado para $x_1(t)$, $m_2(t)$, estimado para $x_2(t)$, y $m_3(t)$, estimado para $\theta(t)$, son comparados con los valores reales de la variable de estado $x_1(t)$, $x_2(t)$ y el parámetro $\theta(t)$ en (7.8)–(7.10).

Para el filtro (7.11)–(7.13) y el sistema de referencia (7.8)–(7.10) involucrados en la simulación, son asignados los siguientes valores iniciales: $x_{10} = 1000$, $x_{20} = 10$, $m_{10} = 990$, $m_{20} = 3,5$, $m_{30} = 2$, $Q_{110} = 100$, $Q_{210} = Q_{310} = 10$, $P_{110} = P_{220} = 100$, $P_{120} = P_{210} = P_{130} = P_{230} = 10$ para el parámetro desconocido $\theta = 1$, así consideramos al sistema (7.8) inestable en la primera simulación y $x_{10} = 280$, $x_{20} = 45$, $m_{10} = 290$, $m_{20} = 53$, $m_{30} = 0$, $Q_{110} = 866,25$, $Q_{210} = Q_{310} = 86,62$, $P_{110} = P_{220} = 100$, $P_{120} = P_{210} = P_{130} = P_{230} = 10$ para el parámetro desconocido $\theta = -1$, así consideraremos al sistema (7.8) estable en la segunda simulación. Los correspondientes resultados son mostrados en las gráficas Figs. 7.1-7.6.

7.4. Filtro por Modos Deslizantes en Promedio Modulo

La solución de este problema es obtenido usando las ecuaciones de filtrado por modos deslizantes en promedio modulo óptimas para el estado bilineal-lineal con parte lineal parcialmente medible sobre observaciones lineal [68] y dado por

$$\begin{aligned}
\dot{m}(t) &= c_0(t) + a_1(t)m(t) + a_2(t)m(t)m(t)^T + \\
&+ a_2(t)K(t)* | y(t) - (A_0(t) + [A(t), 0_{m \times p}]m(t)) | + \\
&+ K(t)[A(t), 0_{m \times p}]^T (B(t)B^T(t))^{-1} Sign[y(t) - (A_0(t) + [A(t), 0_{m \times p}]m(t))]. \\
m(t_0) &= [E(x(t_0) | F_t^Y), E(\theta(t_0) | F_t^Y)],
\end{aligned} \tag{7,14}$$

$$\begin{aligned}
\dot{K}(t) &= a_1(t)K(t) + 2a_2(t)m(t)K(t) + (diag[b(t), I_p])(diag[b(t), I_p])^T \\
K(t_0) &= E[(z(t_0) - m(t_0))Sign[(A^T(t_0)(A(t_0)A^T(t_0))^{-1}A(t_0)z(t_0) - m(t_0))]^T | F_{t_0}^Y]
\end{aligned} \tag{7,15}$$

donde $0_{m \times p}$ es la matriz de ceros $m \times p$ - dimensional.

Teorema 7.2. El filtro por modos deslizantes en promedio modulo finito dimensional para el vector de estado extendido $z(t) = [x(t), \theta(t)]$, gobernado por la ecuación (7.4), sobre observaciones lineales (7.2) esta dado por la ecuación (7.14) para el estimado óptimo $\hat{z}(t) = m(t) = [\hat{x}(t), \hat{\theta}(t)] = E([x(t), \theta(t)] | F_t^Y)$ y la ecuación (7.15) para el estimado de la varianza del error $P(t) = E[(| z(t) - m(t) |) | F_t^Y]$. Este filtro, aplicado para el sub-vector $\theta(t)$, también sirve como el identificado óptimo para el vector de parámetros desconocidos $\theta(t)$ en la ecuación (7.1), dando el estimado del sub-vector $\hat{\theta}(t)$ como el estimado óptimo del parámetro.

Demostración. La demostración se sigue directamente de los pasos 1-3 para diseñar los coeficientes en la ecuación (7.4), la nueva ecuación de estado extendido (7.4), y las ecuaciones de filtrado por modos deslizantes en promedio modulo óptimo (7.14),(7.15) para el estado bilineal-lineal con parte parcialmente medible lineal sobre observaciones lineales, que fueron obtenidas en [68].

Así, basado en las ecuaciones de filtrado por modos deslizantes en promedio modulo general para estados bilineales con parte parcialmente medible sobre observaciones lineales, el filtro óptimo del estado y el identificador de parámetros son obtenidos para el estado del sistema lineal (7.1) con parámetro desconocidos, modelados por (7.3), sobre observaciones lineales (7.2). Donde el problema original de identificación es reducido al problema de filtrado para el estado del sistema extendido incluyendo al estado y parámetros, la condición de identificabilidad para el sistema original coincide con la condición de observabilidad para el sistema extendido.

7.4.1. Ejemplo 2

Esta sección presenta un ejemplo del diseño de filtrado por modos deslizantes en promedio modulo e identificación para estados del sistema lineales con parámetros multiplicativos desconocidos, basados en el estado lineal medible.

Sea el estado del sistema bidimensional $x(t) \in R$ satisfaciendo la ecuación bilineal con un parámetro desconocido escalar $\theta \in R$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \tag{7.16}$$

$$\dot{x}_2(t) = \theta x_2(t) + \psi_1(t),$$

y el proceso de observación escalar $y(t) \in R$ esta dado por la ecuación lineal

$$y(t) = x_1(t) + \psi_2(t), \tag{7.17}$$

donde $\psi_1(t)$ y $\psi_2(t)$ son ruidos blancos Gaussianos, que son la derivada en promedio cuadrático débil de procesos estándar de Wiener (ver [51]). Las ecuaciones (7.16)–(7.17) presentan la forma convencional para las ecuaciones (7.1)–(7.2), que es actualmente usado en la practica [52]. El parámetro θ esta modelado como un proceso estándar de Wiener, esto es, satisface la ecuación

$$d\theta(t) = dW_3(t), \quad \theta(0) = \theta_0,$$

que también pueden ser escritas como

$$\dot{\theta}(t) = \psi_3(t), \quad \theta(0) = \theta_0, \quad (7.18)$$

donde $\psi_3(t)$ es un ruido blanco Gaussiano. El ruido blanco Gaussiano $\psi_1(t)$ y $\psi_3(t)$ en las ecuaciones del estado y parámetro son asumidas que son ruidos blancos Gaussianos independientes.

El problema de filtrado por modos deslizantes en promedio modulo es buscar un estimado óptimo para el estado bilineal-lineal (7.16),(7.18), usando observaciones lineales (7.17) confundidos con disturbios modelados como ruidos blancos Gaussianos independientes e idénticamente distribuidos.

Las ecuaciones de filtrado (7.14),(7.15) toman la siguiente forma particular para el sistema (7.16)–(7.18)

$$\begin{aligned} \dot{m}_1(t) &= m_2(t) + Q_{11}(t) \text{Sign}(y(t) - m_1(t)) \\ \dot{m}_2(t) &= Q_{23}(t) |y(t) - m_1(t)| + m_2(t)m_3(t) \\ &\quad + Q_{21}(t) \text{Sign}(y(t) - m_1(t)) \\ \dot{m}_3(t) &= Q_{31}(t) \text{Sign}(y(t) - m_1(t)), \end{aligned} \quad (7.19)$$

con la condición inicial $m_1(0) = E(x_{10} | y(0)) = m_{10}$, $m_2(0) = E(x_{20} | y(0)) = m_{20}$ y $m_3(0) = E(\theta_0 | y(0)) = m_{30}$,

$$\begin{aligned} \dot{K}_{11}(t) &= K_{21}(t), \\ \dot{K}_{21}(t) &= 2m_3(t)K_{21}(t), \\ \dot{K}_{23}(t) &= 2m_3(t)K_{23}(t), \\ \dot{K}_{31}(t) &= 0, \end{aligned} \quad (7.20)$$

con la condición inicial $K(0) = E((x_0, \theta_0) - m(0)) \text{Sign}([x_0, \theta_0] - m(0))^T | y(0)$.

Resultados numéricos de la simulación son obtenidos resolviendo el sistema de ecuaciones de filtrado (7.19)–(7.20). Los valores obtenidos de $m_1(t)$, estimado para $x_1(t)$, $m_2(t)$, estimado para $x_1(t)$, y $m_3(t)$, estimado para $\theta(t)$, son comparados con los valores reales de la variable de estado $x_1(t)$, $x_2(t)$ y el parámetro $\theta(t)$ en (7.16)–(7.18).

Para el filtro (7.19)–(7.20) y el sistema de referencia (7.16)–(7.18) involucrados en la simulación, son asignados los siguientes valores iniciales: $x_{10} = 1000$, $x_{20} = 10$, $m_{10} = 990$, $m_{20} = 3,5$, $m_{30} = 2$, $K_{110} = 100$, $K_{210} = K_{230} = K_{310} = 10$ para el parámetro desconocido $\theta = 1$, así consideramos al sistema (7.16) inestable en la primera simulación y $x_{10} = 280$, $x_{20} = 45$, $m_{10} = 290$, $m_{20} = 53$, $m_{30} = 0$, $K_{110} = 100$, $K_{210} = K_{230} = K_{310} = 10$ para el parámetro desconocido $\theta = -1$, así consideraremos al sistema (7.16) estable en la segunda simulación. Los correspondientes resultados son mostrados en las gráficas Figs. 7.7-7.12.

7.5. Conclusión

Este capítulo presenta el filtrado óptimo por modos deslizantes y el problema de identificación de parámetros para sistemas lineales estocásticos con parámetros desconocidos multiplicativos y aditivos sobre observaciones lineales con una matriz de observación invertible, donde los parámetros desconocidos son considerados procesos de Wiener. Los resultados de la simulación muestran que ambos filtro por modos deslizantes, en promedio cuadrático y promedio modulo, producen errores de estimación fiable de convergencia para todos los estados y el parámetro desconocido.

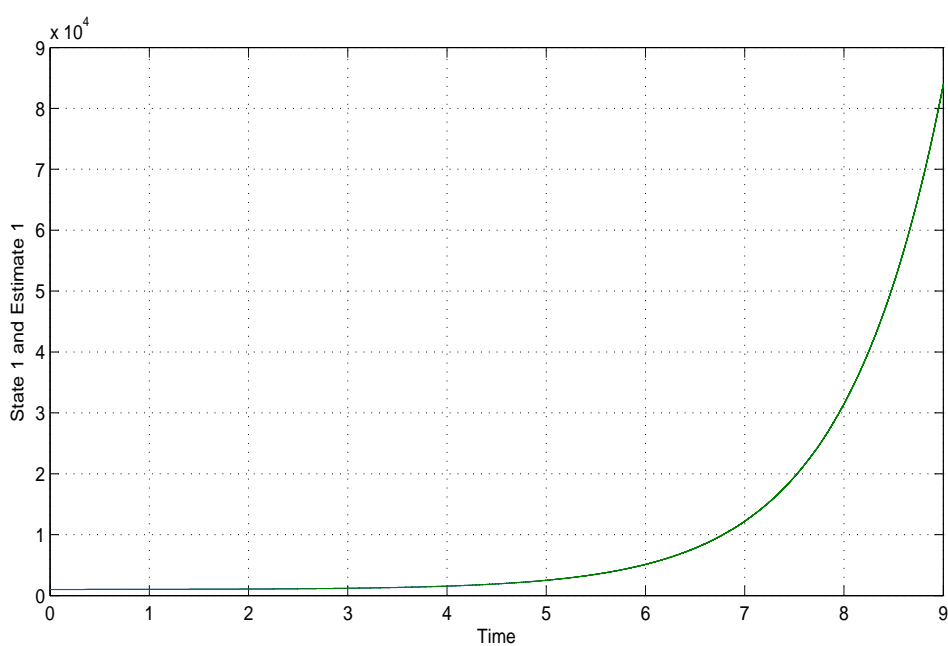


Figura 7.1: La gráfica muestra $x_1(t)$ y $m_1(t)$ en líneas azul y verde, respectivamente, para el sistema inestable (7.8) con filtro en promedio cuadrático en el intervalo de simulación $[0, 9]$.

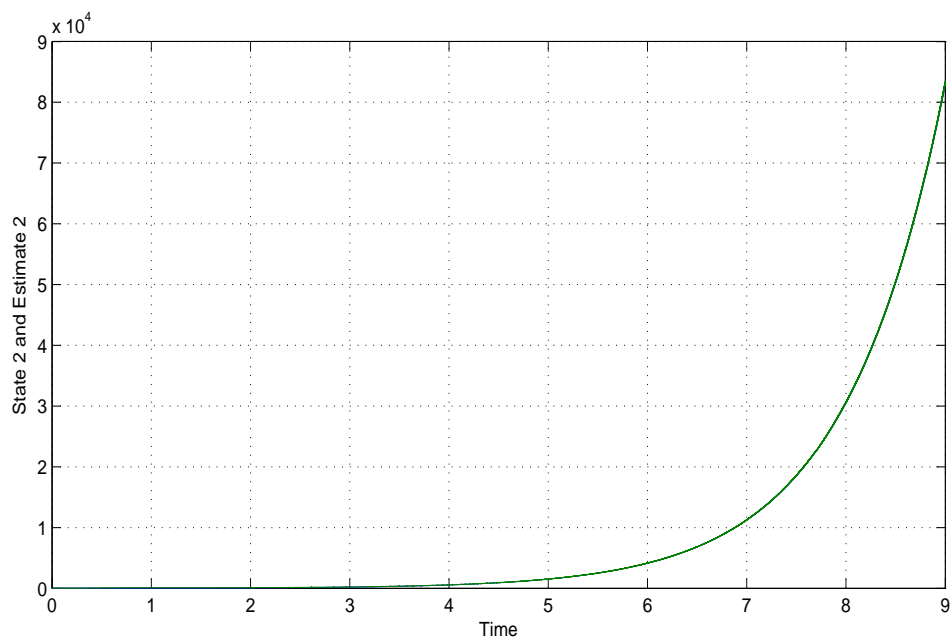


Figura 7.2: La gráfica muestra $x_2(t)$ y $m_2(t)$ en líneas azul y verde respectivamente, para el sistema inestable (7.8) con filtro en promedio cuadrático en el intervalo de simulación $[0, 9]$.

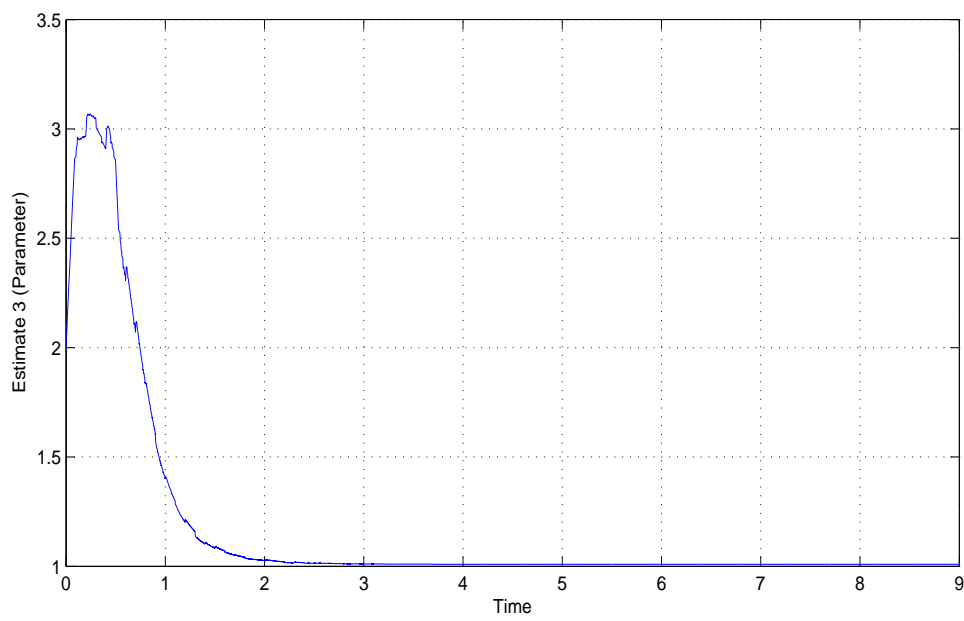


Figura 7.3: La gráfica muestra el estimado del parámetro $m_3(t)$, para el sistema inestable (7.8) con filtro en promedio cuadrático en el intervalo de simulación $[0, 9]$.

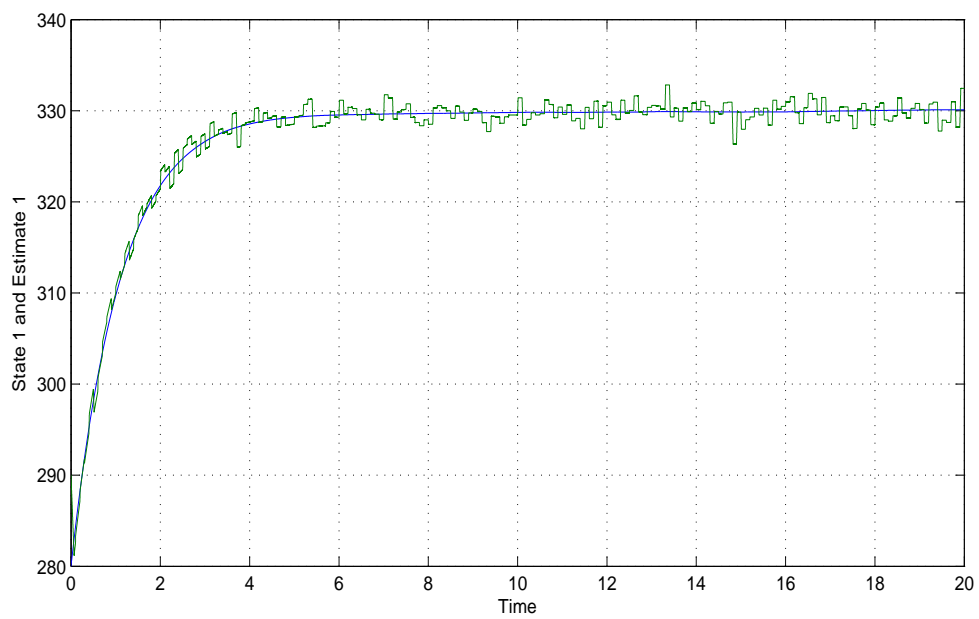


Figura 7.4: La gráfica muestra $x_1(t)$ y $m_1(t)$ en líneas azul y verde, respectivamente, satisfaciendo (7.11), para el sistema estable (7.8) con filtro en promedio cuadrático en el intervalo de simulación $[0, 20]$.

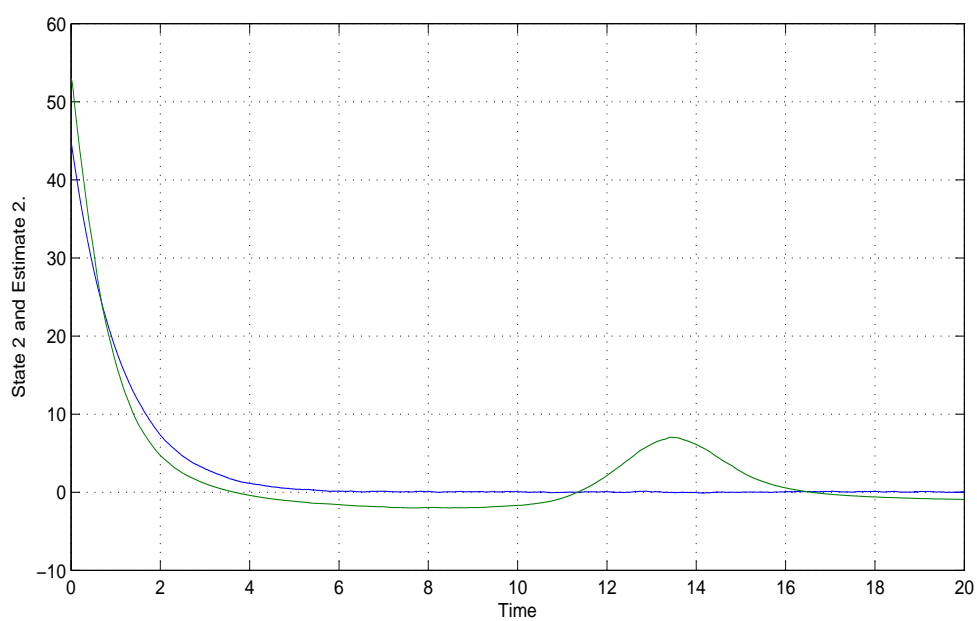


Figura 7.5: La gráfica muestra $x_2(t)$ y $m_2(t)$ en líneas azul y verde respectivamente, para el sistema estable (7.8) con filtro en promedio cuadrático en el intervalo de simulación $[0, 20]$.

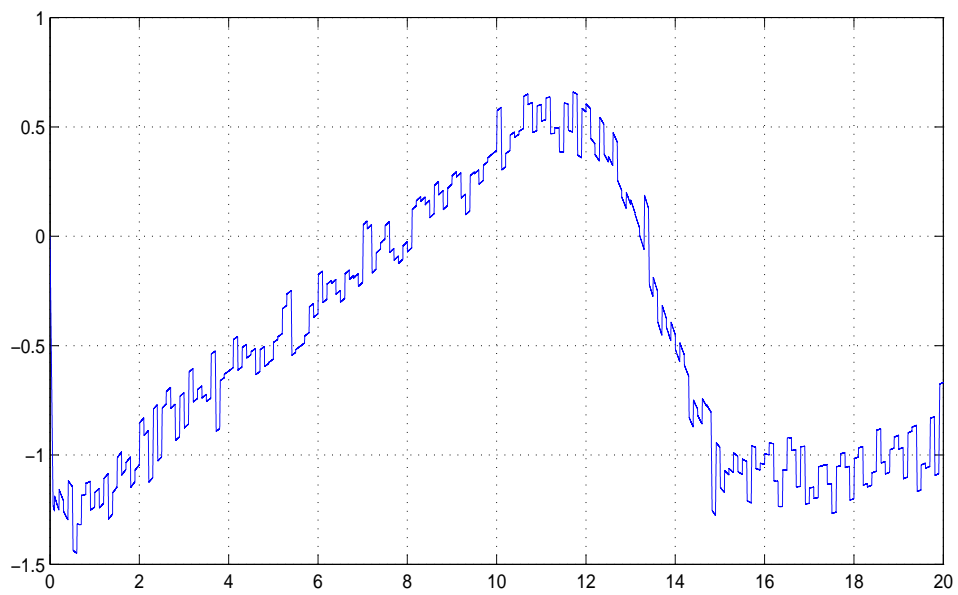


Figura 7.6: La gráfica muestra el estimado del parámetro $m_3(t)$, satisfaciendo (7.11), para el sistema estable (7.8) con filtro en promedio cuadrático en el intervalo de simulación $[0, 20]$.

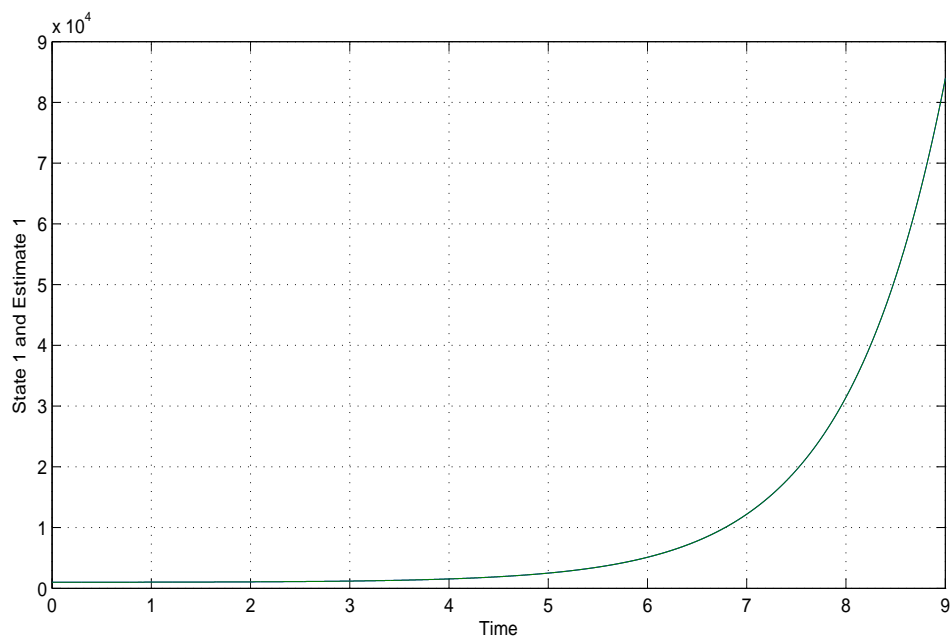


Figura 7.7: La gráfica muestra $x_1(t)$ y $m_1(t)$ en líneas azul y verde, respectivamente, para el sistema inestable (7.16) con filtro en promedio modulo en el intervalo de simulación $[0, 9]$.

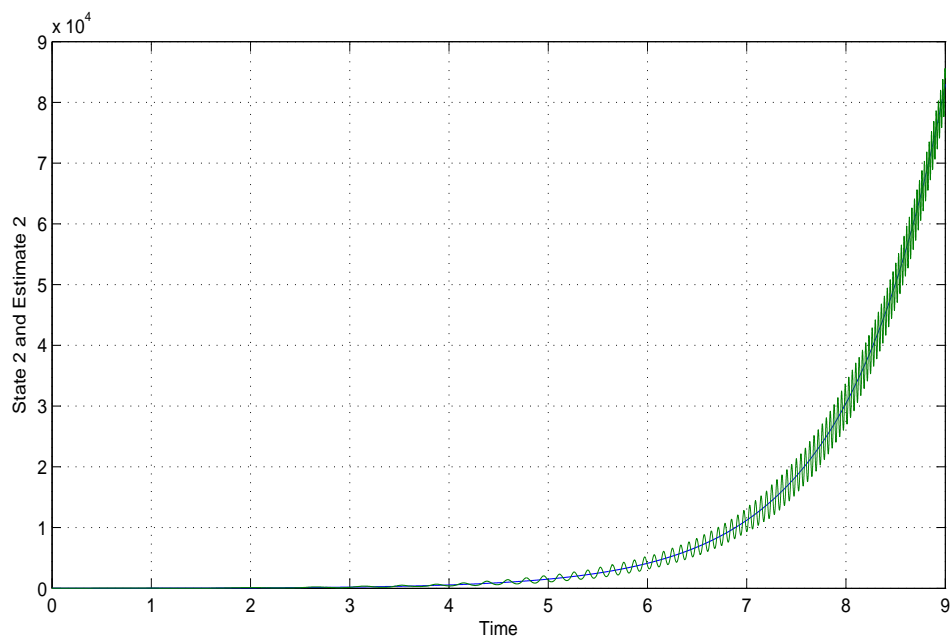


Figura 7.8: La gráfica muestra $x_2(t)$ y $m_2(t)$ en líneas azul y verde respectivamente, para el sistema inestable (7.16) con filtro en promedio modulo en el intervalo de simulación $[0, 9]$.

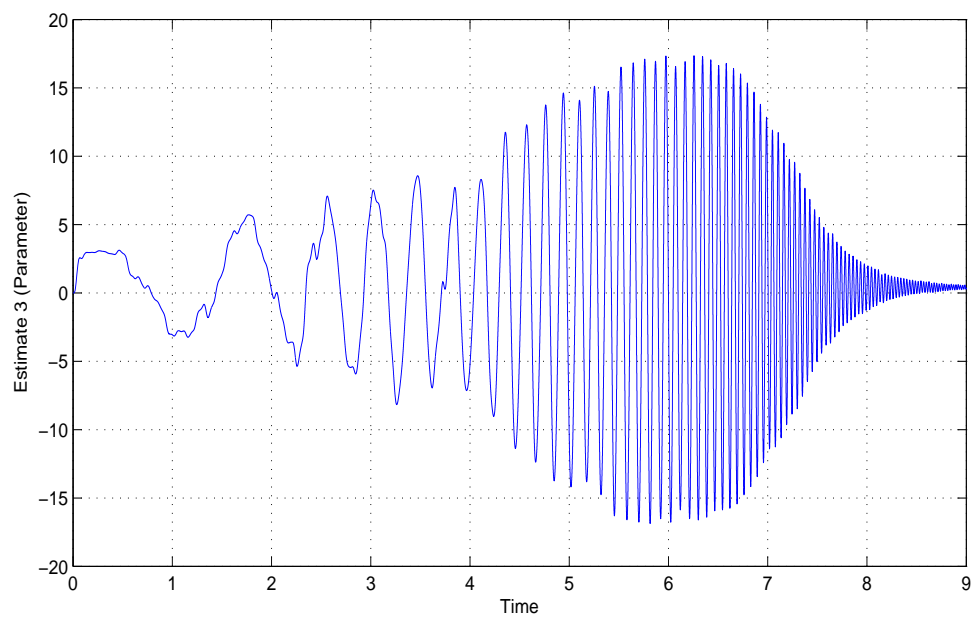


Figura 7.9: La gráfica muestra el estimado del parámetro $m_3(t)$, satisfaciendo (7.19), para el sistema inestable (7.16) con filtro en promedio modulo en el intervalo de simulación $[0, 9]$.

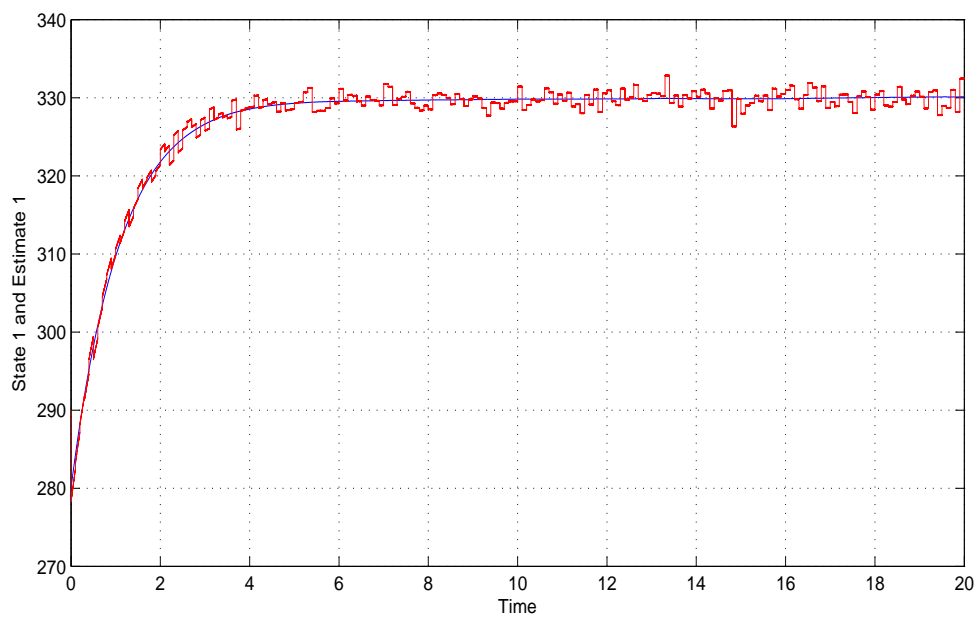


Figura 7.10: La gráfica muestra $x_1(t)$ y $m_1(t)$ en líneas azul y rojo, respectivamente, para el sistema inestable (7.16) con filtro en promedio modulo en el intervalo de simulación $[0, 20]$.

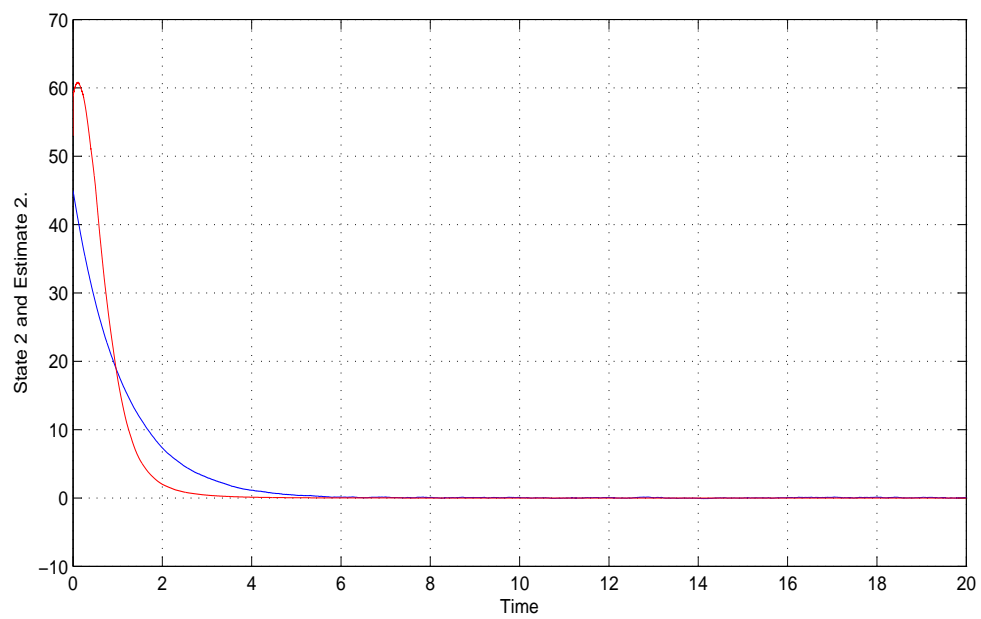


Figura 7.11: La gráfica muestra $x_2(t)$ y $m_2(t)$ en líneas azul y rojo respectivamente, satisfaciendo (7.19), para el sistema inestable (7.16) con filtro en promedio modulo en el intervalo de simulación $[0, 20]$.

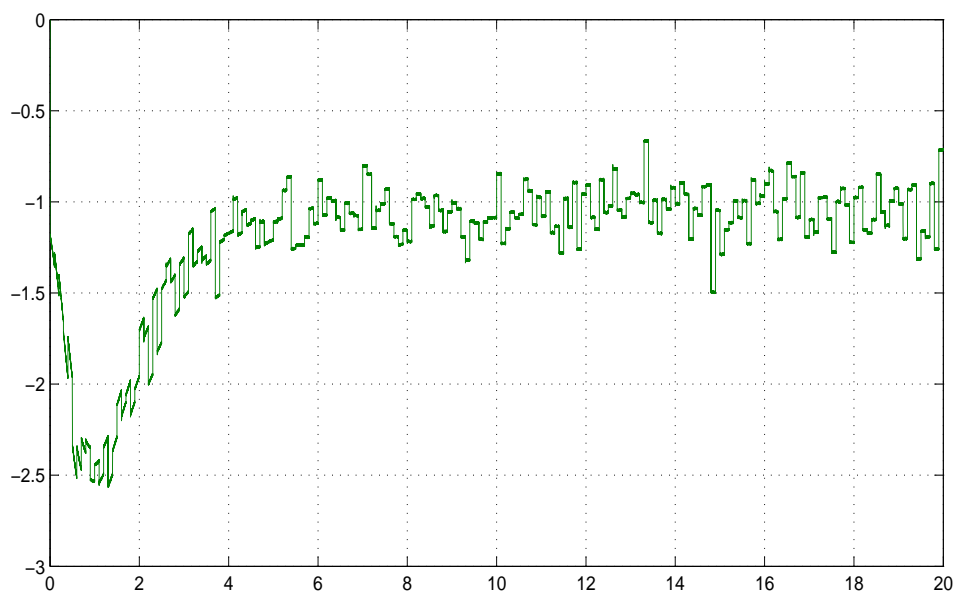


Figura 7.12: La gráfica muestra el estimado del parámetro $m_3(t)$, satisfaciendo (7.19), para el sistema inestable (7.16) con filtro en promedio modulo en el intervalo de simulación $[0, 20]$.

CAPÍTULO 8

CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO.

8.1. Conclusiones.

En este trabajo se diseñaron los filtros por modos deslizantes para sistemas lineales y polinomiales con observaciones lineales, además también se desarrollo el filtro por modos deslizantes para sistemas lineales con parámetros desconocidos, dichos filtros mostraban una ventaja en comparación con los filtros convencionales para estos sistemas, los filtros se desarrollaron con el objetivo de que el estimado del estado minimizara dos normas diferentes, 1) la norma en promedio cuadrático y 2) la norma promedio modulo. También se desarrollaron los controladores por modos deslizantes para sistemas lineales y polinomiales sobre observaciones lineales, mostrando también una ventaja en la minimization de los criterios en comparación con los controladores convencionales para estos sistemas, en el caso del controlador por modos deslizantes se diseñaron para dos diferentes criterios de Bolza-Meyer, donde 1) los términos del la energía del control y del estado son cuadráticos dentro de la integral y el término no integral es de primer grado o 2) el término de la energía del control es cuadrático y el término de la energía del estado es de primer orden.

8.2. Trabajo Futuro.

Existen varios trabajos en los cuales se podría extender las herramientas desarrolladas en este trabajo, como por ejemplo:

- Diseño del controlador por modos deslizantes para sistemas lineales con parámetros desconocidos.
- Diseño de filtrado por modos deslizantes para sistemas polinomiales sobre observaciones polinomiales.
- Diseño del controlador por modos deslizantes para sistemas polinomiales sobre observaciones polinomiales.

- Diseño de filtrado por modos deslizantes para sistemas polinomiales con ruidos multiplicativos.
- Diseño de controlador por modos deslizantes para sistemas polinomiales con ruidos multiplicativos.
- Diseño de filtrado por modos deslizantes para sistemas lineales y polinomiales con retardo en el estado y en las observaciones.
- Diseño del controlador por modos deslizantes para sistemas lineales y polinomiales con retardo en el estado y en las observaciones.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] V. I. Utkin, *Sliding Modes in Control and Optimization*, Springer, 1992.
- [2] C. Edwards, S. K. Spurgeon, *Sliding Mode Control: Theory and Applications*, Taylor and Francis, 1998.
- [3] W. Perruquetti, J. P. Barbot, *Sliding Mode Control In Engineering*, New York, 2002.
- [4] L. Fridman, A. Levant, “Higher order sliding modes,” In *Sliding Mode Control in Engineering* (W. Perruquetti, J. P. Barbot, Eds.), Marcel Dekker, 2002, pp. 53–101.
- [5] V.I. Utkin, J. Guldner, J. Shi, *Sliding Mode Control in Electromechanical Systems*, Taylor and Francis, 1999.
- [6] S. Suzuki, Y. Pan, K. Furuta, S. Hatakeyama, “VS-control with time-varying sliding sector: Design and application to pendulum,” *Asian Journal of Control*, Vol. 6, 2004, pp. 307–316.
- [7] Y. Niua, D. W.C. Hob, “Stabilization of discrete-time stochastic systems via sliding mode technique,” *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 349, Issue 4, 2012, pp. 1497–1508.
- [8] F. Castaños, L. Fridman, “Analysis and design of integral sliding manifolds for systems with unmatched perturbations,” *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 51, 2006, pp. 853–858.
- [9] S. Baev, Y. B. Shtessel, C. Edwards, S. K. Spurgeon, “Output feedback tracking in causal nonminimum-phase nonlinear systems using HOSM techniques,” *Proc. 10th International Workshop on Variable Structure Systems*, 2008, pp. 209–214.
- [10] X. Hu, L. Wu, C. Hu, H. Gao, “Adaptive sliding mode tracking control for a flexible air-breathing hypersonic vehicle,” *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 349, Issue 2, 2012, pp. 559–577.
- [11] A. Azemi, E. Yaz, “Sliding mode adaptive observer approach to chaotic synchronization,” *ASME Transactions. J. Dynamic Systems, Measurements and Control*, Vol. 122, 2000, pp. 758–765.
- [12] S.K. Spurgeon, “Sliding mode observers: A survey,” *Intern. Journal of Systems Science*, Vol. 39, 2008, pp. 751–764.

- [13] B. Bandyopadhyay, "Sliding Mode Observer Based Sliding Mode Controller for Slosh-Free Motion Through PID Scheme," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol. 56, Issue 9, 2009, pp. 3432–3442.
- [14] I. Boiko, L. Fridman, A. Pisano, E. Usai, "Analysis of chattering in systems with second order sliding modes," *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 52, 2007, pp. 2085–2102.
- [15] I. Boiko, "Frequency domain precision analysis and design of sliding mode observers," *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 347, Issue 6, 2010, pp. 899–909.
- [16] V. I. Utkin, L. Shi, "Integral sliding mode in systems operating under uncertainty conditions," *Proc. 35th Conference on Decision and Control*, 1996, pp. 4591–4596.
- [17] F. Zhao, "Integral sliding mode control of time-delay systems with mismatching uncertainties," *Journal of Systems Engineering and Electronics*, Vol. 21, Issue 2, 2010, pp. 273–280.
- [18] G. Bartolini, A. Ferrara, A. Levant, E. Usai, "On second order sliding mode controllers," In: *Variable Structure Systems, Sliding Mode and Nonlinear Control* (K. D. Young and U. Ozguner, Eds.), *Lecture Notes in Control and Information Series*, Springer, Vol. 247, 1999, pp. 329–350.
- [19] A. Girin, "High-Order Sliding-Mode Controllers of an Electropneumatic Actuator: Application to an Aeronautic Benchmark ," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 17, Issue 3, 2009, pp. 633–645.
- [20] B. Beltran, "High-Order Sliding-Mode Control of Variable-Speed Wind Turbines," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 56, Issue 9, 2009, pp. 3314–3321.
- [21] S. E. Ben Elghali, "High-Order Sliding Mode Control of a Marine Current Turbine Driven Doubly-Fed Induction Generator ," *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, Vol. 35, Issue 2, 2010, pp. 402–411.
- [22] M. V. Basin, A. Ferrara, D. Calderon-Alvarez, "Sliding mode regulator as solution to optimal control problem," *Proc. 47th Conference on Decision and Control*, 2008, pp. 2184–2189.
- [23] M. V. Basin, A. Ferrara, D. Calderon-Alvarez, F. Dinuzzo, "Sliding mode optimal regulator for a Bolza-Meyer criterion with non-quadratic state energy terms," *Proc. 2009 American Control Conference*, 2009, pp. 4951–4955.
- [24] Y. Xia, Y. Jia, "Robust sliding mode control for uncertain stochastic time-delay systems," *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 48, 2003, pp. 1086–1092.
- [25] Y. Niu, D. W. C. Ho, J. Lam, "Robust integral sliding mode control for uncertain stochastic systems with time-varying delay", *Automatica*, Vol. 41, 2005, pp. 873–880.

- [26] P. Shi, Y. Xia, G. P. Liu, D. Rees, "On designing of sliding mode control for stochastic jump systems," *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 51, 2006, pp. 97–103.
- [27] Y. Xia, M. Fu, H. Yang, G. P. Liu, "Robust sliding mode control for uncertain time-delay systems based on delta operator," *Intern. J. Robust Nonlinear Control*, Vol. 18, 2008, pp. 1142–1161.
- [28] Y. Xia, G. P. Liu, P. Shi, J. Chen, D. Rees, "Robust delay-dependent sliding mode control for uncertain time-delay systems," *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, Vol. 56, 2009, pp. 3646–3655.
- [29] L. Wu , "State Estimation and Sliding-Mode Control of Markovian Jump Singular Systems , " *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 55, Issue 5, 2010, pp. 1213–1219.
- [30] Y. Niu , "Robust H_∞ Control for Nonlinear Stochastic Systems: A Sliding-Mode Approach , " *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 53, Issue 7, 2008, pp. 1695–1701.
- [31] J. Hu, Z. Wang, H. Gao, L. K. Stergioutas "Robust H_∞ sliding mode control for discrete time-delay systems with stochastic nonlinearities," *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 349, Issue 4, 2012, pp. 1459–1479.
- [32] M. V. Basin, L. Fridman, M. Skliar, "Optimal, robust sliding mode filter for systems with continuous, delayed measurements," *Proc. 41st Conference on Decision, Control*, 2002, pp. 2594–2599.
- [33] S. R. Habibi, R. Burton, "The variable structure filter," *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, Vol. 125, 2003, pp. 287–293.
- [34] M. V. Basin, L. Fridman, J. G. Rodriguez-Gonzalez, P. Acosta, "Integral sliding mode design for robust filtering and control of linear stochastic time-delay systems," *Intern. J. Robust Nonlinear Control*, Vol. 15, 2005, pp. 407–421.
- [35] S. R. Habibi, R. Burton, "Parameter identification for a high-performance hydrostatic actuation system using the variable structure filter concept," *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, Vol. 129, 2007, pp. 229–235.
- [36] P. Ignaciuk, A. Bartoszewicz, "Linear quadratic optimal discrete-time sliding-mode controller for connection-oriented communication networks," *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, Vol. 55, 2008, pp. 4013–4021.
- [37] X.-G. Yan, C. Edwards, "Adaptive sliding-mode-observer-based fault reconstruction for nonlinear systems with parametric uncertainties," *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, Vol. 55, 2008, pp. 4029–4036.
- [38] J. P. V. S. Cunha, R. R. Costa, L. Hsu, "Design of first-order approximation filters for sliding-mode control of uncertain systems," *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, Vol. 55, 2008, pp. 4037–4046.

- [39] H. H. Choi, "Sliding mode output feedback control design," *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, Vol. 55, 2008, pp. 4047–4054.
- [40] B. Wang, X. Yu, X. Li, "ZOH discretization effect on higher-order sliding-mode control systems," *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, Vol. 55, 2008, pp. 4055–4064.
- [41] J.-L. Chang, "Robust discrete-time model reference sliding-mode controller design with state and disturbance estimation," *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, Vol. 55, 2008, pp. 4065–4074.
- [42] M. V. Basin, P. Rodriguez-Ramirez, "Sliding mode mean-square filtering for linear stochastic systems," *Proc. 2010 IEEE International Conference on Industrial Technology*, 2010, pp. 1761–1764.
- [43] M. V. Basin, P. Rodriguez-Ramirez, "Sliding mode mean-module filtering for linear stochastic systems," *Proc. 2010 IEEE International Conference on Industrial Technology*, 2010, pp. 1757–1760.
- [44] R. E. Kalman, R. S. Bucy, "New results in linear filtering and prediction theory," *ASME Trans., Part D (J. of Basic Engineering)* Vol. 83, 1961, pp. 95–108.
- [45] M. S. Zaky, M. M. Khater, S. S. Shokralla, H. A. Yasin, "Wide-Speed-Range estimation with online parameter identification schemes of sensorless induction motor drives," *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, Vol. 56, 2009, pp. 1699–1707.
- [46] H. Huerta, A. G. Loukianov, J. M. Canedo, "Multimachine power-system control: integral-sm approach," *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, Vol. 56, 2009, pp. 2229–2236.
- [47] B. Yalcin, K. Ohnishi, "Infinite-Mode networks for motion control," *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, Vol. 56, 2009, pp. 2933–2944.
- [48] E. Kayacan, Y. Oniz, O. Kaynak, "A grey system modeling approach for sliding-mode control of antilock braking system," *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, Vol. 56, 2009, pp. 3244–3252.
- [49] L. Wang, T. Chai, L. Zhai, "Neural-Network-Based terminal sliding-mode control of robotic manipulators including actuator dynamics," *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, Vol. 56, 2009, pp. 3296–3304.
- [50] S. Rao, M. Buss, V. Utkin, "Simultaneous state and parameter estimation in induction motors using first- and second-order sliding modes," *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, Vol. 56, 2009, pp. 3369–3376.
- [51] V. S. Pugachev, I. N. Sinitsyn, *Stochastic Systems: Theory and Applications*, World Scientific, 2001.
- [52] K. J. Åström, *Introduction to Stochastic Control Theory*, Academic Press, New York, 1970.

- [53] A. F. Filippov, *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*, Kluwer, 1988.
- [54] H. Kwakernaak, R. Sivan, *Linear Optimal Control Systems*, Wiley-Interscience, New York, 1972.
- [55] W. H. Fleming, R. W. Rishel, *Deterministic and Stochastic Optimal Control*, Springer, 1975.
- [56] M. V. Basin, A. Loukianov, R. Hernandez-Fabian, "Sliding mode regulator as solution to optimal control problem with a non-quadratic criterion," *Proc. 11th IEEE Workshop on Variable Structure Systems*, 2010, submitted.
- [57] M. V. Basin, P. Rodriguez-Ramirez, "Sliding mode mean-square filtering for linear stochastic systems," *Proc. 2010 IEEE International Conference on Industrial Technology*, 2010, accepted.
- [58] M. V. Basin, P. Rodriguez-Ramirez, "Sliding mode mean-module filtering for linear stochastic systems," *Proc. 2010 IEEE International Conference on Industrial Technology*, 2010, accepted.
- [59] M. V. Basin, D. A. Calderon-Alvarez, M. Skliar, "Optimal filtering for incompletely measured polynomial states over linear observations," *International J. Adaptive Control and Signal Processing*, Vol. 22, 2008, pp. 482–494.
- [60] M. Yan, Y. Shi, "Robust discrete-time sliding mode control for uncertain systems with time-varying state delay," *IET Control Theory & Applications*, Vol. 2, 2008, pp. 662–674.
- [61] M. V. Basin, J. Perez, M. Skliar, "Optimal filtering for polynomial system states with polynomial multiplicative noise," *International J. Robust and Nonlinear Control*, Vol. 16, 2006, pp. 287–298.
- [62] M. V. Basin, *New Trends in Optimal Filtering and Control for Polynomial and Time-Delay Systems*, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2008.
- [63] M. V. Basin, D. Calderon-Alvarez, "Optimal controller for uncertain stochastic polynomial systems," *Journal of The Franklin Institute*, Vol. 346, 2009, pp. 206–222.
- [64] Bar-Shalom Y. "Optimal simultaneous state estimation and parameter identification in linear discrete-time systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 17, 1972, pp. 308–319.
- [65] Elliott LJ, Krishnamurthy V. "New finite-dimensional filters for parameter estimation of discrete-time linear gaussian models," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 44, 1999, pp. 938–951.
- [66] Elliott LJ, Krishnamurthy V. "New finite-dimensional filters for estimation of continuous-time linear gaussian systems," *SIAM. J. Contr. Optim.*, Vol. 35, 1997, pp. 1908–1923.
- [67] M. V. Basin, P. Rodriguez-Ramirez, "Sliding mode controller design for stochastic polynomial systems with unmeasured states," *Proc. 37th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*, 2011, pp. 3444–3449.

- [68] M. V. Basin, P. Rodriguez-Ramirez, "Sliding mode mean-module filter design for polynomial systems," *Proc. 2011 American Control Conference*, 2011, pp. 632–636.
- [69] M. V. Basin, P. Rodriguez-Ramirez, "Sliding mode filtering for polynomial systems," *Proc. 12th IEEE Workshop on Variable Structure Systems*, 2012, pp 365–360.
- [70] M. V. Basin, D. Calderon-Alvarez, "Sliding mode regulator as solution to optimal control problem for non-linear polynomial systems," *Journal of The Franklin Institute*, Vol. 347, 2010, pp. 910–922.
- [71] M. V. Basin, P. Rodriguez-Ramirez, "Sliding mode mean-module filter design for polynomial systems," *Proc. 2011 American Control Conference*, 2011, pp. 632–636.
- [72] L. Luque-Vega, B. Castillo-Toledo, A. G. Loukianov "Robust block second order sliding mode control for a quadrotor," *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 349, issue 2, 2011, pp. 719–739.
- [73] I. Salgado "Super-twisting-like algorithm in discrete time nonlinear systems," *2011 International Conference on Advanced Mechatronic Systems (ICAMechS)*, 2011, pp. 497–502.
- [74] M. Liu, G. Sun "Observer-based sliding mode control for Itô stochastic time-delay systems with limited capacity channel," *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 349, issue 4, 2012, pp. 1602–1616.
- [75] K. Al-Hosani, V. I. Utkin "Parameters estimation using sliding mode observer with shift operator," *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 349, issue 4, 2012, pp. 1509–1525.
- [76] M. Basin, L. Fridman, P. Shi "Optimal sliding mode algorithms for dynamic systems," *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 349, issue 4, 2012, pp. 1317–1322.
- [77] L. Fraguera, L. Fridman, V.V. Alexandrov "Output integral slidingmode control to stabilize position of a Stewart platform," *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 349, issue 4, 2012, pp. 1526–1542.
- [78] G. Bartolini, A. Ferrara, V.I. Utkin, "Design of discrete-time adaptive sliding mode control," *Proceedings of the 31st IEEE Conference on Decision and Control, 1992.*, Vol. 2, 1992, pp. 2387–2391.
- [79] J. Cabrera-Vázquez, A. G. Loukianov, J. M. Cañedo, V. I. Utkin, "Robust controller for synchronous generator with local load via VSC," *International Journal of Electrical Power and Energy Systems*, Vol. 29, issue 4, 2007, pp. 348–359.
- [80] Y.V. Orlov, V.I. Utkin, "Sliding mode control in indefinite-dimensional systems," *Automatica*, Vol. 23, issue 6, 1987, pp. 753–757.
- [81] S.K. Korovin, V.I. Utkin, "Using sliding modes in static optimization and nonlinear programming," *Automatica*, Vol. 10, issue 5, 1974, pp. 525–532.

- [82] H. Lee, V. I. Utkin, "Chattering suppression methods in sliding mode control systems," *Annual Reviews in Control*, Vol. 31, issue 2, 2007, pp. 179–188.
- [83] G. Bartolini, A. Ferrara, V.I. Utkin, "Adaptive sliding mode control in discrete-time systems," *Automatica*, Vol. 31, issue 8, 1995, pp. 769–773.
- [84] H. Lee, V. I. Utkin, "Chattering Problem in Sliding Mode Control Systems," *Analysis and Design of Hybrid Systems 2006*, 2006.
- [85] V.I. Utkin, "Variable structure systems with sliding modes," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 22, issue 2, 1977, pp. 212–222.
- [86] J. Ackermann, V.I. Utkin, "Sliding mode control design based on Ackermann's formula," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 43, issue 2, 1998, pp. 234–237.
- [87] V.I. Utkin, "Application of equivalent control method to the systems with large feedback gain," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 23, issue 3, 1978, pp. 484–486.
- [88] Z. Yan, Ch. Jin, V.I. Utkin, "Sensorless sliding-mode control of induction motors," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol. 47, issue 6, 2000, pp. 1286–1297.
- [89] A.G. Loukianov, J.M. Canedo, V.I. Utkin, Cabrera-Vazquez, "Discontinuous controller for power systems: sliding-mode block control approach," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol. 51, issue 2, 2004, pp. 340–353.
- [90] S. Rao, M. Buss, V.I. Utkin, "Simultaneous State and Parameter Estimation in Induction Motors Using First- and Second-Order Sliding Modes," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol. 56, issue 9, 2009, pp. 3369–3376.
- [91] V.I. Utkin, "Sliding mode control design principles and applications to electric drives," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol. 40, issue 1, 1993, pp. 23–36.
- [92] L. Wu, Ch. Wang, Q. Zeng, "Observer-based sliding mode control for a class of uncertain nonlinear neutral delay systems," *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 345, issue 3, 2008, pp. 233–253.
- [93] M.L. Chan, C.W. Tao, T.T. Lee, "Sliding mode controller for linear systems with mismatched time-varying uncertainties," *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 337, issue 3, 2000, pp. 105–115.
- [94] H. Yang, Y. Xia, P. Shi, "Observer-based sliding mode control for a class of discrete systems via delta operator approach," *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 347, issue 7, 2010, pp. 1199–1213.
- [95] N. Luo, J. Rodellar, M.De la Sen, J. Vehi, "Output feedback sliding mode control of base isolated structures," *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 337, issue 5, 2000, pp. 555–557.

- [96] Y. Xia, Z. Zhu, Ch. Li, H. Yang, Q. Zhu, “Robust adaptive sliding mode control for uncertain discrete-time systems with time delay,” *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 347, issue 1, 2010, pp. 339–357.
- [97] M.J. Jang, Ch.L. Chen, Y.M. Tsao, “Sliding mode control for active magnetic bearing system with flexible rotor,” *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 342, issue 4, 2005, pp. 401–419.
- [98] P. Herman, “Sliding mode control of manipulators using first-order equations of motion with diagonal mass matrix,” *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 342, issue 4, 2005, pp. 353–363.
- [99] Ch.Ch. Wen, Ch.-Ch. Cheng, “Design of sliding surface for mismatched uncertain systems to achieve asymptotical stability,” *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 345, issue 8, 2008, pp. 926–941.
- [100] Z. Gao, B. Jiang, P. Shi, M. Qian, J. Lin, “Active fault tolerant control design for reusable launch vehicle using adaptive sliding mode technique,” *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 349, issue 4, 2012, pp. 1543–1560.
- [101] A. Polyakov, “Minimization of disturbances effects in time delay predictor-based sliding mode control systems,” *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 349, issue 4, 2012, pp. 1380–1396.
- [102] O. Barambones, P. Alkorta, “A robust vector control for induction motor drives with an adaptive sliding-mode control law,” *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 348, issue 2, 2011, pp. 300–314.
- [103] Y. Hacioglu, Y. Ziya Arslan, N. Yagiz, “MIMO fuzzy sliding mode controlled dual arm robot in load transportation,” *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 348, issue 8, 2011, pp. 1886–1902.
- [104] K. Lu, Y. Xia, Z. Zhu, M.V. Basin, “Sliding mode attitude tracking of rigid spacecraft with disturbances,” *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 349, issue 2, 2012, pp. 413–440.
- [105] T.R. Oliveira, A. J. Peixoto, L. Hsu, “Global real-time optimization by output-feedback extremum-seeking control with sliding modes,” *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 349, issue 4, 2012, pp. 1397–1415.
- [106] L. Besnard, Y. B. Shtessel, B. Landrum, “Quadrotor vehicle control via sliding mode controller driven by sliding mode disturbance observer,” *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 349, issue 2, 2012, pp. 658–684.
- [107] C. Pukdeboon, A.S.I. Zinober, “Control Lyapunov function optimal sliding mode controllers for attitude tracking of spacecraft,” *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 346, issue 2, 2012, pp. 456–475.
- [108] F. Kazempour, J. Ghaisari, “The design of networked distributed sliding mode controllers with non-ideal links,” *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 349, issue 2, 2012, pp. 604–621.

- [109] P. Ignaciuk, A. Bartoszewicz, "LQ optimal sliding-mode supply policy for periodic-review perishable inventory systems," *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 349, issue 4, 2012, pp. 1561–1582.
- [110] Z. Zexu, W. Weidong, L. Litao, H. Xiangyu, C. Hutao, L. Shuang, C. Pingyuan, "Robust sliding mode guidance and control for soft landing on small bodies," *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 349, issue 2, 2012, pp. 493–509.
- [111] A. Tkacenko, P.P. Vaidyanathan, "On optimal estimations with minimum error entropy criterion," *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 346, issue 6, 2009, pp. 593–610.
- [112] E. Cheres, "Parameter estimation of an unstable system with a PID controller in a closed loop configuration," *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 343, issue 2, 2006, pp. 204–209.
- [113] Y. Feng J. Zheng, X. Yu, N. V. Truong, "Hybrid Terminal Sliding-Mode Observer Design Method for a Permanent-Magnet Synchronous Motor Control System," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol. 56, issue 9, 2009, pp. 3424–3431.
- [114] L. Wu, P. Shi, H. Gao, "State Estimation and Sliding-Mode Control of Markovian Jump Singular Systems," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol. 55, issue 5, 2010, pp. 1213–1219.
- [115] Ch.M. Lin, Ch.F. Hsu, "Adaptive fuzzy sliding-mode control for induction servomotor systems," *IEEE Transactions on Energy Conversion*, Vol. 19, issue 2, 2004, pp. 362–368.
- [116] A. Benchaib, A. Rachid, E. Audrezet, M. Tadjine, "Real-time sliding-mode observer and control of an induction motor," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol. 46, issue 1, 1999, pp. 128–138.
- [117] K. Abidi, J.X. Xu, Y. Xinghuo, "On the Discrete-Time Integral Sliding-Mode Control," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 52, issue 4, 2007, pp. 709–715.
- [118] M. Defoort, F. Nollet, T. Floquet, W. Perruquetti, "A Third-Order Sliding-Mode Controller for a Stepper Motor," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol. 56, issue 9, 2009, pp. 3337–3346.
- [119] W.F. Xie, "Sliding-Mode-Observer-Based Adaptive Control for Servo Actuator With Friction," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol. 54, issue 3, 2007, pp. 1517–1527.
- [120] L. Wu, H. Gao, Ch. Wang, "Quasi Sliding Mode Control of Differential Linear Repetitive Processes With Unknown Input Disturbance," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol. 58, issue 7, 2011, pp. 3059–3068.