

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA  
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



ESTUDIO DE LA CONTROLABILIDAD DE SISTEMAS LINEALES  
INVARIANTES EN EL TIEMPO.

POR

ING. ÁLVARO ARMANDO DOMÍNGUEZ SÁNCHEZ.

TESIS

EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA  
INGENIERÍA ELÉCTRICA CON ORIENTACIÓN EN  
CONTROL AUTOMÁTICO

CD. UNIVERSITARIA

AGOSTO DE 2013

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA  
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



ESTUDIO DE LA CONTROLABILIDAD DE SISTEMAS LINEALES  
INVARIANTES EN EL TIEMPO.

POR  
ING. ÁLVARO ARMANDO DOMÍNGUEZ SÁNCHEZ.

TESIS  
EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA  
INGENIERÍA ELÉCTRICA CON ORIENTACIÓN EN  
CONTROL AUTOMÁTICO

CD. UNIVERSITARIA

AGOSTO DE 2013

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA  
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

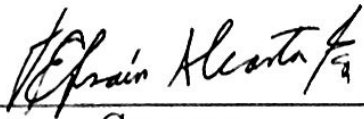
Los miembros del comité de tesis recomendamos que la tesis “ESTUDIO DE LA CONTROLABILIDAD DE SISTEMAS LINEALES INVARIANTES EN EL TIEMPO.” realizada por el alumno **ING. Álvaro Armando Domínguez Sánchez.**, matrícula 1537607 sea aceptada por su defensa como opción al grado de **Maestro en Ciencias** de la Ingeniería Eléctrica con Orientación en Control Automático.

El Comité de Tesis



---

Asesor  
Dr. César Elizondo González



---

Coasesor:  
Dr. Efraín Alcorta García

---

Coasesor:  
Dr. Gerardo Romero Galván

---

Vo. Bo.  
Dr. Moisés Hinojosa Rivera  
División de Estudios de Posgrado

*Dedicado a mis padres:*

*Fidel Álvaro Domínguez*  
*y*  
*Ma. del Carmen Sánchez Martínez.*

*De igual forma este trabajo lo dedico*  
*a mis hermanos Sergio, Moises Alberto y Andrea Marlen esperando*  
*ser un buen ejemplo para ellos.*

# Agradecimientos

A mis padres Fidel Álvaro Domínguez y Ma. del Carmen Sánchez Martínez por sus consejos y apoyo incondicional.

A mis hermanos y familiares por estar siempre conmigo.

A mi asesor Dr. César Elizondo González por sus enseñanzas, paciencia y tolerancia.

Al comité de revisores: Dr. Efraín Alcorta García y Dr. Gerardo Romero Galván, por sus comentarios, recomendaciones y sugerencias.

A mis compañeros y amigos que me brindaron su amistad y apoyo incondicional.

A la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica (FIME) por brindarme la oportunidad de desarrollarme como profesionista.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico brindado.

# RESUMEN

**Estudio de la Controlabilidad de Sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo.**

Publicación No. \_\_\_\_\_

Álvaro Armando Domínguez Sánchez, M. C. en Ingeniería Eléctrica

Universidad Autónoma de Nuevo León, 2013

**Profesor Asesor: Dr. César Elizondo González**

Este documento conforma la tesis de Maestría en Ciencias de la Ingeniería Eléctrica con orientación en Control Automático, de la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, de la Universidad Autónoma de Nuevo León. El trabajo se centra en el estudio de la controlabilidad de sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI).

La idea que motiva este trabajo se origina en los casos en los que el sistema de lazo cerrado es robustamente estable a los parámetros del proceso y controlador, sin embargo, para ciertos valores de estos parámetros el sistema puede perder controlabilidad, observabilidad o ambos.

Un sistema controlable, observable y estable de lazo abierto puede resultar no controlable o no observable en lazo cerrado aunque se mantenga la estabilidad del sistema, es decir, se diseña un controlador para obtener una respuesta deseada del sistema y algunos valores del controlador vuelven no controlable al sistema de lazo cerrado, con lo cual se afecta el comportamiento dinámico del sistema, ya que la posición de los polos y ceros en el plano complejo determinan el comportamiento del mismo.

En la presente tesis se analiza la relación que existe entre la función de transferencia de un sistema de lazo abierto y de lazo cerrado con respecto de sus propiedades de controlabilidad y observabilidad, ya que cuando existe coincidencia de polos con ceros en su función de transferencia el sistema resulta no controlable o no observable.

La presente tesis contiene un análisis de la coincidencia de polos y ceros en la función de

transferencia de un sistema de lazo abierto y de lazo cerrado con retroalimentación de salida y con retroalimentación de estado, analizando la pérdida de controlabilidad u observabilidad.

Además se estudia una medida de controlabilidad y de observabilidad para determinar la “distancia” a la que se encuentra el sistema de volverse no controlable o no observable.

Teniendo en cuenta lo anterior y debido a que lo más recomendable es desplazar polos en lugar de cancelarlos, en este trabajo se describe un método clásico para asignación de polos, con el cual los polos podrán ser ubicados en posiciones que puedan satisfacer las necesidades de estabilidad y desempeño del sistema sin olvidar que se pueden evitar las cancelaciones de polos con ceros. La técnica se basa en el hecho de que un sistema controlable satisface condiciones necesarias y suficientes para arbitrariamente asignar polos mediante retroalimentación de estado.

Además en este trabajo también se analiza una ecuación alternativa para determinar si un sistema en el espacio de estados contiene coincidencia de polos y ceros en su función de transferencia. Para esto se propone un sistema en el espacio de estados inverso al sistema original de tal manera que la función de transferencia se puede obtener sin la necesidad de la inversa de una matriz.

Finalmente se muestran los resultados mediante una aplicación, desarrollando las estrategias de control retroalimentación de salida y retroalimentación de estado las cuales son técnicas que pertenecen al control clásico y al control moderno respectivamente, relacionándose la coincidencia de polos con ceros en la función de transferencia como la no controlabilidad o la no observabilidad del sistema.

# Índice general

Resumen	v
Índice general	vii
Índice de figuras	x
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 Planteamiento del problema . . . . .	1
1.2 Objetivos . . . . .	2
1.2.1 Objetivo General . . . . .	2
1.2.2 Objetivos Particulares . . . . .	2
1.3 Antecedentes . . . . .	3
1.4 Hipótesis . . . . .	4
1.5 Justificación . . . . .	5
1.6 Estructura de la tesis . . . . .	6
<b>2 Coincidencia de polos y ceros.</b>	<b>9</b>
2.1 Introducción . . . . .	9



2.2	Lazo abierto. . . . .	10
2.3	Lazo cerrado. . . . .	13
2.3.1	Controlador proporcional. . . . .	14
2.3.2	Controlador dinámico. . . . .	16
2.4	Ejemplo 1. . . . .	18
2.5	Cancelación de polos. . . . .	20
2.6	Retroalimentación de estado . . . . .	23
2.7	Ejemplo 2. . . . .	26
<b>3</b>	<b>Medida para Controlabilidad, Observabilidad y Asignación de polos.</b>	<b>28</b>
3.1	Medidas para Controlabilidad y Observabilidad. . . . .	29
3.2	Ejemplo. . . . .	31
3.3	Asignación de polos. . . . .	33
3.4	Ejemplo. . . . .	40
<b>4</b>	<b>Estudio de la Controlabilidad de los Sistemas LTI Mediante un Sistema In-</b>	<b>43</b>
	<b>verso.</b>	
4.1	Introducción . . . . .	43
4.2	Procedimiento alternativo para calcular la función de transferencia [10] . . . . .	44
4.3	Condiciones para la Controlabilidad del Sistema. . . . .	47
4.4	Ejemplo. . . . .	48
4.5	Ejemplo 2. . . . .	49

<b>5</b>	<b>Aplicación.</b>	<b>51</b>
5.1	Retroalimentación de salida. . . . .	53
5.1.1	Control proporcional. . . . .	54
5.1.2	Control dinámico. . . . .	56
5.2	Retroalimentación de estado. . . . .	63
<b>6</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>66</b>
6.1	Conclusiones. . . . .	66
6.2	Trabajo a futuro. . . . .	67
	<b>Bibliografía</b>	<b>68</b>

# Índice de figuras

2.1	Región en la que el sistema es estable con los parámetros $a$ y $b$ del controlador, y en algunos puntos el sistema puede perder controlabilidad, observabilidad o ambos. . . . .	9
2.2	Sistema que consta de dos resortes, dos amortiguadores y una placa. . . . .	11
2.3	Sistemas matemáticamente equivalentes. . . . .	12
2.4	Sistema en lazo cerrado con retroalimentación unitaria. . . . .	14
2.5	Lazo cerrado. . . . .	22
2.6	Perturbaciones en el lazo cerrado. . . . .	22
5.1	Sistema que consta de dos resortes, dos amortiguadores y una placa. . . . .	52
5.2	Sistema en lazo cerrado con retroalimentación unitaria. . . . .	53
5.3	Lugar Geométrico de las Raíces. . . . .	55
5.4	Respuesta del sistema al escalón para valores de controlador $K = 0, 1, \dots, 10$ . . . . .	55
5.5	Estado número uno del sistema de lazo cerrado. . . . .	57
5.6	Estado número dos del sistema de lazo cerrado. . . . .	58

5.7 Estado número tres del sistema de lazo cerrado. . . . . 58

5.8 Estado número uno del sistema de lazo cerrado. . . . . 60

5.9 Estado número dos del sistema de lazo cerrado. . . . . 60

5.10 Estado número tres del sistema de lazo cerrado. . . . . 60

5.11 Estado número uno del sistema de lazo cerrado. . . . . 61

5.12 Estado número dos del sistema de lazo cerrado. . . . . 62

5.13 Estado número tres del sistema de lazo cerrado. . . . . 62

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1 Planteamiento del problema

Esta tesis surge de la idea de que en los sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI, por sus siglas en inglés) existen casos para los que el sistema de lazo cerrado es robustamente estable a cambios en los parámetros del proceso y controlador, sin embargo, para ciertos valores de estos parámetros el sistema puede perder controlabilidad, observabilidad o ambos.

Este trabajo está dedicado únicamente al estudio de los posibles cambios de controlabilidad que pueden ocurrir en los sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI), analizando la función de transferencia cuando el sistema se encuentra en lazo abierto y en lazo cerrado usando técnicas de retroalimentación de salida y retroalimentación de estados, así como sus propiedades de estabilidad, controlabilidad y observabilidad.

Además se estudia la relación que existe entre los polos y ceros de la función de transferencia del sistema con las propiedades de controlabilidad, observabilidad y estabilidad, ya que al existir coincidencia de polos con ceros, el sistema es no controlable o no observable o ambos. Esto es importante debido a que algunas veces los parámetros del controlador logran estabilidad en

el sistema inclusive logrando características de desempeño deseadas, sin embargo, resulta que dichos valores producen una pérdida de controlabilidad u observabilidad de tal manera que solo el estudio o diseño de la estabilidad es insuficiente.

Al diseñar un controlador se debe tener cuidado de la estabilidad del sistema, es decir para un sistema de lazo abierto estable, el sistema de lazo cerrado también debe de ser estable, sin embargo, es recomendable que no exista coincidencia de polos con ceros en su función de transferencia de lazo cerrado ya que el sistema de lazo cerrado resultaría no controlable o no observable aunque el sistema de lazo abierto sea controlable, observable y estable.

## **1.2 Objetivos**

### **1.2.1 Objetivo General**

El objetivo de este trabajo es estudiar la relación que existe entre la función de transferencia de un sistema de lazo abierto y de lazo cerrado con respecto a sus propiedades de controlabilidad, observabilidad y estabilidad, para los diferentes valores que puedan tomar los parámetros del controlador, ya que este último puede provocar pérdida de controlabilidad u observabilidad e incluso estabilidad en el sistema de lazo cerrado.

### **1.2.2 Objetivos Particulares**

En las siguientes situaciones se consideran los diferentes valores que pueden darse a los parámetros de un controlador para:

- Analizar las propiedades de controlabilidad, observabilidad y estabilidad en sistemas de

lazo abierto y en sistemas con retroalimentación de salida.

- Analizar las propiedades de controlabilidad, observabilidad y estabilidad en sistemas de lazo abierto y en sistemas con retroalimentación de estado.
- Analizar la pérdida de controlabilidad u observabilidad en sistemas de lazo cerrado.
- Análisis de comparación entre retroalimentación de salida y retroalimentación de estado.

### 1.3 Antecedentes

El concepto de controlabilidad fue introducido por Kalman [22] en el año de 1960 usando representación en el espacio de estado como una herramienta para analizar el comportamiento de los sistemas lineales. La controlabilidad, observabilidad y estabilidad son importantes en el diseño de controladores.

La relación que existe entre las propiedades de estabilidad, controlabilidad y observabilidad con respecto de los polos y ceros de la función de transferencia de un sistema es un tema estudiado por algunos investigadores, por ejemplo:

En [1] se estudia la relación entre la cancelación de polos y ceros con la estabilidad del sistema, estableciendo un conjunto de condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad de sistemas lineales multivariantes retroalimentados, además también se analiza la cancelación de polos con ceros estables e inestables.

En [2] se determina que una condición necesaria y suficiente para que el sistema sea controlable y observable es que no existan cancelaciones de polos y ceros en su función de transferencia.

En [4] se estudia la relación que existe entre las cancelaciones de polos y ceros del sistema en lazo abierto con las cancelaciones de polos y ceros del sistema en lazo cerrado en términos

de descripciones polinomiales, el análisis se realiza para sistemas multivariables con retroalimentación dinámica en configuración de compensador cascada.

En [5] se recomienda evitar la cancelación de polos y ceros al utilizar un sistema de retroalimentación por compensación serie, el comportamiento del sistema es lineal para señales pequeñas y es no lineal para señales grandes, además también se indica que el comportamiento lineal del sistema es afectado por ruido y por la cancelación no exacta de polos y ceros.

En [6] se determina que la cancelación de polos con ceros en una función de transferencia corresponde con la reducción de variables de estado.

En [7] se realiza un análisis de comparación entre cancelar o desplazar los polos de una planta estable, enfatizando que la dinámica cancelada aparece en la función sensibilidad de perturbaciones a la entrada.

En [8] se analiza la cancelación de polos y ceros en sistemas retroalimentados de una entrada y una salida en relación con lo que llaman modos escondidos, donde las propiedades de controlabilidad y observabilidad pueden determinar la presencia de modos escondidos, además de que los modos son escondidos de la excitación de entrada pero no pueden ser escondidos de la excitación por condiciones iniciales, en esta publicación también se recomienda evitar la cancelación de polos con ceros inestables.

## 1.4 Hipótesis

El posible conocimiento de posibles cancelaciones de polos con ceros permitirá mejorar el diseño del controlador.



## 1.5 Justificación

En los sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI) existen casos en los que el sistema de lazo cerrado es robustamente estable a los parámetros del proceso y controlador, sin embargo para ciertos valores de estos parámetros el sistema puede perder controlabilidad, observabilidad o ambos.

Por esta razón en la presente tesis se analiza la relación que existe entre la función de transferencia de un sistema de lazo abierto y de lazo cerrado con respecto de sus propiedades de controlabilidad y observabilidad, ya que cuando existe coincidencia de polos con ceros en su función de transferencia el sistema resulta no controlable o no observable, sin embargo, cuando se cancelan polos con ceros el sistema se encuentra en su realización mínima resultando controlable y observable, aunque matemáticamente las funciones de transferencia con coincidencia de polos y ceros pero sin cancelación de ellos y la función de transferencia ya efectuada la cancelación sean equivalentes, la función de transferencia en su realización mínima ya no representa a el sistema físico correspondiente a antes de la cancelación.

El orden de la función de transferencia de un sistema es igual a el número de elementos activos (elementos que acumulan energía) con lo cual una función de transferencia de segundo orden representa a un sistema físico con dos elementos activos, sin embargo, cuando se cancelan polos con ceros la función de transferencia del sistema se reduce a una de primer orden representando ahora a un sistema con solo un elemento activo, por esta razón es recomendable evitar cancelaciones de polos con ceros, sin embargo, ésta no es la única razón. En las publicaciones [4] - [8] se analizan algunos de los problemas que se tienen al cancelar polos con ceros.

Entre otras cosas en esta tesis se estudia lo que sucede cuando un sistema de lazo abierto estable, controlable y observable puede resultar estable en lazo cerrado pero no controlable o no observable.

## 1.6 Estructura de la tesis

La presente tesis tiene la siguiente estructura:

### **Capítulo dos.** *Coincidencia de polos y ceros.*

En este capítulo se analiza la coincidencia de polos y ceros en la función de transferencia de un sistema de lazo abierto y de lazo cerrado con retroalimentación de salida y con retroalimentación de estado, analizando la pérdida de controlabilidad u observabilidad. En este capítulo también se incluye un análisis de comparación entre cancelar o desplazar los polos de un sistema, ya que al cancelar polos se elimina la dinámica no deseada del sistema y al desplazarlos solo se modifica la respuesta del sistema, analizando las ventajas y desventajas que se tienen al cancelar o desplazar los polos de un sistema estable o inestable.

### **Capítulo tres.** *Medida para Controlabilidad, Observabilidad y Asignación de polos.*

Los métodos tradicionales para determinar la controlabilidad y observabilidad de los sistemas consisten en calcular el rango de una matriz de controlabilidad u observabilidad respectivamente, si la matriz es de rango completo, entonces, el sistema es completamente controlable u observable, sin embargo, de esta manera no es posible determinar que tan cerca se encuentra el sistema de ser no controlable o no observable, en este capítulo se estudian medidas para controlabilidad y observabilidad, con las cuales se puede determinar la distancia que existe entre los polos y ceros del sistema, de tal forma, que cuando la medida de controlabilidad u observabilidad es igual a cero significa que existe coincidencia de polos con ceros en la función de transferencia del sistema.

Además, debido a que lo más recomendable es desplazar polos en lugar de cancelarlos y teniendo en cuenta que la ubicación de polos y ceros en el plano complejo determina el comportamiento del sistema, en este capítulo también se describe un método clásico para asignación de

polos, la técnica se basa en el hecho de que un sistema controlable satisface condiciones necesarias y suficientes para arbitrariamente asignar polos mediante retroalimentación de estado, además de que no es necesario conocer el polinomio característico de lazo abierto.

Mediante asignación de polos se pueden evitar las cancelaciones de polos con ceros ya que los polos podrán ser ubicados en posiciones que puedan satisfacer las necesidades de estabilidad y desempeño del sistema.

**Capítulo cuatro.** *Estudio de la Controlabilidad de los Sistemas LTI Mediante un Sistema Inverso.*

En este capítulo se estudia la coincidencia de polos con ceros en sistemas LTI, utilizando como herramienta a un sistema inverso al sistema original, esto es posible debido a que se puede obtener la función de transferencia del sistema original mediante el procedimiento alternativo descrito en [10], este procedimiento tiene la ventaja de que no necesita de una matriz inversa para obtener la función de transferencia.

El conocimiento del sistema inverso y del sistema original permiten determinar la existencia de coincidencia de polos con ceros en su función de transferencia, con lo cual el sistema resulta no controlable o no observable.

**Capítulo cinco.** *Aplicación.* Finalmente en este capítulo se implementa la teoría descrita en los capítulos anteriores en una aplicación. El sistema seleccionado consta de dos amortiguadores, dos resortes y una placa, este sistema puede ser usado para estudiar el comportamiento de las suspensiones de los automóviles. Para este sistema se desarrollan las estrategias de control retroalimentación de salida y retroalimentación de estado, las cuales son técnicas que pertenecen al control clásico y al control moderno respectivamente. Se estudian las propiedades de controlabilidad y observabilidad para el sistema en lazo abierto y en lazo cerrado relacionándose la coincidencia de polos con ceros en la función de transferencia como

la no controlabilidad o la no observabilidad del sistema.

**Capítulo seis.** *Conclusiones y Trabajo Futuro.*

# Capítulo 2

## Coincidencia de polos y ceros.

### 2.1 Introducción

En los sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo (LTI, por sus siglas en inglés) existen casos en los que un sistema en lazo cerrado es robustamente estable a los parámetros del proceso y controlador, sin embargo para ciertos valores de estos parámetros el sistema puede perder controlabilidad, observabilidad o ambas propiedades. En este capítulo se estudian las posibles causas por las que un sistema lineal invariante en el tiempo de una entrada y una salida (SISO) controlable y observable en lazo abierto puede resultar no controlable o no observable en lazo cerrado.

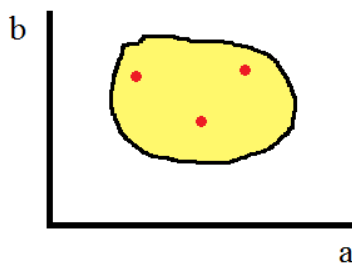


Figura 2.1: Región en la que el sistema es estable con los parámetros  $a$  y  $b$  del controlador, y en algunos puntos el sistema puede perder controlabilidad, observabilidad o ambos.

Un sistema es no controlable o no observable cuando existe coincidencia de polos con ceros en su función de transferencia y se dice que el sistema pierde controlabilidad u observabilidad cuando el sistema de lazo abierto es controlable, observable y en lazo cerrado es no controlable o no observable.

En este capítulo se analiza la coincidencia de polos y ceros en la función de transferencia con lo cual se determina la controlabilidad y observabilidad del sistema. El capítulo se divide en secciones, en la primera sección se estudia al sistema en lazo abierto, en la segunda sección al sistema en lazo cerrado, en la tercera sección se comparan las técnicas de cancelar o desplazar polos y en la última sección se analizan sistemas con retroalimentación de estados.

## 2.2 Lazo abierto.

En algunas ocasiones al obtener el modelo de un sistema puede existir coincidencia de polos y ceros en su función de transferencia y por lo tanto matemáticamente puede haber cancelaciones de polos con ceros, sin embargo existe el problema de si se deben cancelar o no cancelar estos términos, si los términos se cancelan la dinámica del sistema cambia y se estaría representando al modelo de un sistema físico diferente, aunque matemáticamente equivalente, por otro lado si no se realiza la cancelación de factores comunes para que el modelo del sistema corresponda con el sistema físico real, el sistema puede resultar ser no observable o no controlable. En la figura (2.2) se muestra un sistema que fue obtenido de [3], el sistema consta de dos resortes, dos amortiguadores y una placa que se considera sin masa, la salida del sistema es el promedio de los desplazamientos  $(x_1 + x_2)/2$ , donde cada uno de ellos es tomado con respecto de la posición del resorte sin deformación, y la entrada del sistema es una fuerza que se aplica en el centro de la placa sin ejercer ningún par sobre ella. La función de transferencia del sistema se muestra

en la ecuación (2.2.1)

$$G_P(s) = \frac{0.25((k_1 + k_2) + (c_1 + c_2)s)}{k_1 k_2 + (c_1 k_2 + c_2 k_1)s + c_1 c_2 s^2} \quad (2.2.1)$$

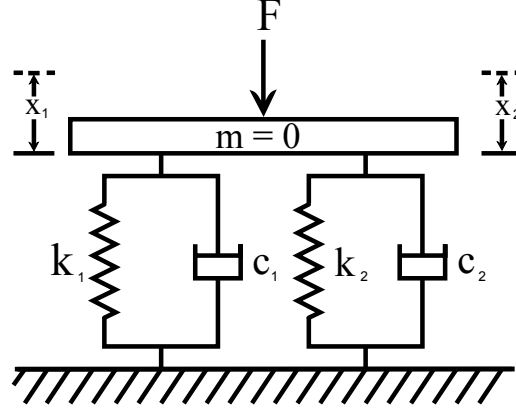


Figura 2.2: Sistema que consta de dos resortes, dos amortiguadores y una placa.

El sistema de la figura (2.2), se puede representar en el espacio de estados mediante la ecuación (2.2.2).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{k_1}{c_1} & 0 \\ 0 & -\frac{k_2}{c_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{c_1} \\ \frac{1}{c_2} \end{bmatrix} u \quad (2.2.2)$$

El sistema de la ecuación anterior es completamente controlable o controlable de rango completo si se cumple que  $\text{rango}(C) = n$ , donde  $C$  es la matriz de controlabilidad, por lo tanto, se tiene que:

$$\text{rango} \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = n \quad (2.2.3)$$

Debido a que la matriz de controlabilidad  $C$  es cuadrada, en este caso es de rango completo si  $\det(C) \neq 0$ , entonces:

$$\det(C) = \begin{vmatrix} \frac{1}{c_1} & -\frac{k_1}{c_1^2} \\ \frac{1}{c_2} & -\frac{k_2}{c_2^2} \end{vmatrix} = \frac{k_1}{c_1^2 c_2} - \frac{k_2}{c_1 c_2^2} \quad (2.2.4)$$

Por lo tanto, el sistema es completamente controlable si se satisface la siguiente ecuación:

$$\frac{k_1}{c_1} \neq \frac{k_2}{c_2}. \quad (2.2.5)$$

Al obtener el modelo del sistema en la ecuación (2.2.1) y tomando en cuenta la ecuación anterior (2.2.5) existe coincidencia de polos con ceros en la función de transferencia del sistema  $G_P(s)$  cuando  $k_1c_2 = k_2c_1$ , la condición anterior se puede cumplir con  $c_1 = c_2$  y  $k_1 = k_2$ .

Al realizar matemáticamente la cancelación de los factores comunes en la función de transferencia  $G_P(s)$ , físicamente cambia la dinámica del sistema obteniéndose ahora el modelo de un sistema físico diferente mostrado en la ecuación (2.2.6), es decir el modelo del sistema con dos resortes y dos amortiguadores matemáticamente cambiaría a representar el modelo de un sistema físico con un solo resorte y un amortiguador en el centro de la placa como se muestra en la figura (2.3), por esta razón cuando el modelo de un sistema en lazo abierto presenta coincidencia de polos y ceros en su función de transferencia se debe evitar realizar cancelaciones ya que se representaría a un modelo que es matemáticamente equivalente pero que físicamente representa a un sistema diferente.

$$G_P(s) = \frac{0.5}{c_1s + k_1}. \quad (2.2.6)$$

En la figura (2.3), se muestra la representación física del modelo de un sistema que presenta cancelación de un polo con un cero, a la izquierda se muestra el sistema sin cancelación y a la derecha con cancelación.

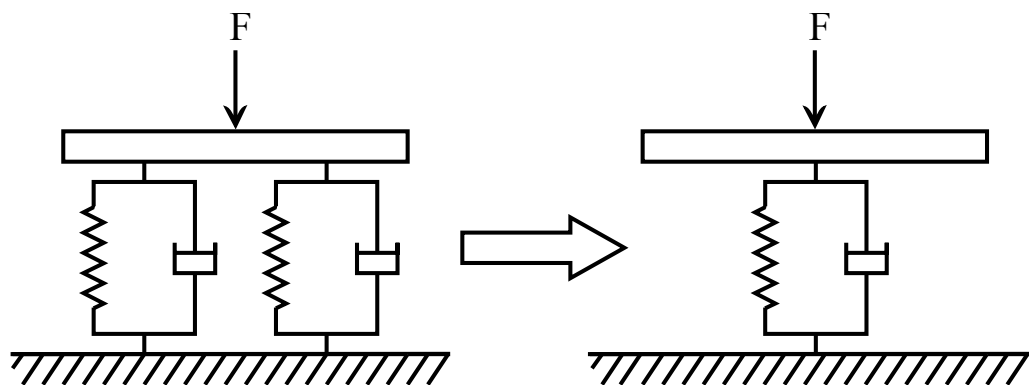


Figura 2.3: Sistemas matemáticamente equivalentes.

Al cancelar matemáticamente los factores comunes en la función de transferencia se dice



que el sistema se encuentra en su realización mínima y por lo tanto el modelo reducido es controlable y observable, aunque el modelo reducido no representa al sistema real en el sentido de que éste tiene menos elementos que almacenan energía, matemáticamente son equivalentes.

Los problemas que existen al trabajar con el modelo de un sistema que presenta coincidencia de polos con ceros en su función de transferencia son principalmente que no se pueden determinar todos los estados a partir de las mediciones de la entrada y la salida, en otras palabras cuando se presenta una falla en el sistema no se puede determinar en donde ocurrió la falla, no se puede saber si la falla ocurrió en alguno de los dos resortes para el caso en el que los resortes son iguales o si ocurrió en alguno de los amortiguadores en el caso de que éstos sean iguales. Desde el punto de vista de identificación se pierde identificabilidad de los parámetros cuando el sistema es no mínimo.

## 2.3 Lazo cerrado.

De la misma manera en que se presentó la sección anterior para el sistema de lazo abierto, ahora se presenta el análisis para el sistema de lazo cerrado, analizando pérdida de controlabilidad u observabilidad al presentarse coincidencia de polos con ceros en la función de transferencia del sistema.

Se considera que el sistema de lazo abierto  $G_P(s)$  no tiene coincidencia de polos con ceros en su función de transferencia con lo cual es controlable y observable. Por otra parte con un controlador  $K(s)$  se pretende dar al sistema de lazo cerrado estabilidad además de ciertas características de desempeño, pero en algunos casos se logra el objetivo provocando una pérdida de controlabilidad u observabilidad no deseados.

A continuación se muestran las condiciones en las que el sistema de lazo cerrado puede presentar coincidencia de polos con ceros, comenzando por analizar al sistema con un controlador proporcional y después con un controlador dinámico. El análisis se realiza para un sistema con retroalimentación unitaria como el que se muestra en la figura (2.4), donde  $G_P(s)$  es la función de transferencia de la planta definida como  $G_P(s) = N(s)/D(s)$ .

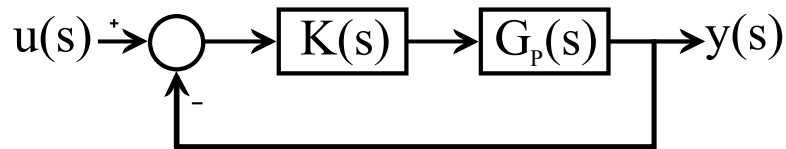


Figura 2.4: Sistema en lazo cerrado con retroalimentación unitaria.

La función de transferencia del sistema de lazo cerrado se muestra en la siguiente ecuación:

$$G_{LC}(s) = \frac{K(s)G_P(s)}{1 + K(s)G_P(s)} = \frac{K(s)N(s)}{D(s) + K(s)N(s)}, \quad (2.3.1)$$

donde  $N(s)$ ,  $D(s)$  son polinomios de grado  $m$  y  $n$  respectivamente.

$$N(s) = (s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m), \quad (2.3.2)$$

$$D(s) = (s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n). \quad (2.3.3)$$

### 2.3.1 Controlador proporcional.

Cuando  $K(s)$  es un control proporcional  $K_P$ , la ecuación (2.3.1) se puede escribir como:

$$G_{LC}(s) = \frac{K_P(s + z_1) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1) \cdots (s + p_n) + K_P(s + z_1) \cdots (s + z_m)}.$$

De la ecuación anterior se puede observar que puede existir coincidencia de polos con ceros en el lazo cerrado si y solo si existe un polo  $p_j$  igual a un cero  $z_i$  y por lo tanto usando un controlador

proporcional  $K_P$  existe coincidencia de polos con ceros en la función de transferencia de lazo cerrado  $G_{LC}(s)$  si y sólo si existe coincidencia de polos con ceros en la función de transferencia del sistema de lazo abierto  $G_P(s)$ , lo cual se expresa en el siguiente lema [21].

**Lemma.** [21] *Dada una planta con función de transferencia  $G_P(s) = N(s)/D(s)$ , un controlador proporcional  $K_P$  en su entrada y con retroalimentación unitaria. Entonces el lazo cerrado tiene cancelación de polos y ceros sí y solo sí el lazo abierto tiene cancelación de polos y ceros.*

*Prueba.* Primero se obtiene la función de transferencia del lazo cerrado.

$$G_{LC}(s) = \frac{K_P N(s)}{D(s) + K_P N(s)}. \quad (2.3.4)$$

Necesidad. Supongamos que la función de transferencia del lazo cerrado tiene cancelación de polos y ceros, eso significa que el numerador y denominador de la función de transferencia de lazo cerrado tienen un factor común que podríamos llamar  $f(s)$ . Entonces dicha función se puede expresar como:

$$G_{LC}(s) = \frac{K_P N^*(s)f(s)}{D^*(s)f(s) + K_P N^*(s)f(s)}, \quad (2.3.5)$$

así que  $N(s) = N^*(s)f(s)$  y  $D(s) = D^*(s)f(s)$ , entonces la función de transferencia de la planta es:

$$G_P(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N^*(s)f(s)}{D^*(s)f(s)}, \quad (2.3.6)$$

y ésta también tiene cancelación de polos y ceros.

Suficiencia. Supongamos que la función de transferencia de la planta tiene cancelación de polos y ceros, entonces

$$G_P(s) = \frac{N^*(s)f(s)}{D^*(s)f(s)}, \quad (2.3.7)$$

por lo tanto  $N(s) = N^*(s)f(s)$  y  $D(s) = D^*(s)f(s)$ . Sustituyendo estos en la función de transferencia del lazo cerrado se obtiene:

$$G_{LC}(s) = \frac{K_P N^*(s)f(s)}{D^*(s)f(s) + K_P N^*(s)f(s)}, \quad (2.3.8)$$

de tal manera que la función de transferencia del lazo cerrado tiene cancelación de polos y ceros.  $\square$

La ganancia  $K_P$  mueve los polos hacia los ceros pero no puede lograr que los polos se cancelen con los ceros y por lo tanto el control proporcional es invariante a la controlabilidad y a la observabilidad, sin embargo, no sucede así cuando el controlador es dinámico como se puede observar a continuación.

### 2.3.2 Controlador dinámico.

Cuando el controlador es dinámico podría existir coincidencia de polos y ceros en la función de transferencia de lazo cerrado como se muestra en el siguiente lema [21].

**Lemma.** [21] *Dado un controlador  $K(s)$  y una planta  $G_P(s)$*

$$K(s) = \frac{N_K(s)}{D_K(s)}, \quad (2.3.9)$$

$$G_P(s) = \frac{N(s)}{D(s)}, \quad (2.3.10)$$

*Ambos sin cancelación de polos con ceros. El controlador está conectado a la entrada de la planta y el control se hace con retroalimentación unitaria de la salida. Entonces la función de transferencia en lazo cerrado  $G_{LC}(s)$  presenta coincidencia de polos con ceros si y sólo si  $K(s)G_P(s)$  presenta coincidencia de polos con ceros.*

*Prueba. Necesidad.* Supóngase que la función de transferencia en lazo cerrado  $G_{LC}(s)$  presenta coincidencia de polos con ceros, entonces de acuerdo a la ecuación (2.3.11) se puede ver que las posibilidades de coincidencia de polos con ceros en cualquier par de polinomios es de acuerdo a las cuatro combinaciones que aparecen abajo.

$$G_{LC}(s) = \frac{N_K(s)N(s)}{D_K(s)D(s) + N_K(s)N(s)}. \quad (2.3.11)$$

a)  $\{N_K(s), D_K(s)\}$

b)  $\{N_K(s), D(s)\}$

c)  $\{N(s), D_K(s)\}$

d)  $\{N(s), D(s)\}$

Las posibilidades “a” y “d” no tienen sentido ya que representarían a un controlador o una planta mal diseñados.

Las únicas posibilidades son las que se presentan en “b” y “c”. Por otra parte la expresión de  $K(s)G_P(s)$  es de acuerdo a (2.3.12)

$$K(s)G_P(s) = \frac{N_K(s)N(s)}{D_K(s)D(s)} \quad (2.3.12)$$

De la ecuación (2.3.12) se puede ver que las coincidencias de polos con ceros en “b” y “c” implican coincidencia de polos con ceros en  $K(s)G_P(s)$

*Suficiencia* Supóngase que  $K(s)G_P(s)$  presenta coincidencia de polos con ceros, entonces de acuerdo a la ecuación (2.3.12) se puede ver que las posibilidades de coincidencia de polos con ceros en cualquier par de polinomios son las mismas que en la prueba de necesidad. De igual manera las posibilidades “a” y “d” no tienen sentido ya que representarían a un controlador o una planta mal modelados. Las únicas posibilidades son las que se presentan en “b” y “c”. De acuerdo a la expresión de  $G_{LC}(s)$  se puede ver que las coincidencias de polos con ceros en “b” y “c” implican coincidencia de polos con ceros en  $G_{LC}(s)$ .

□

De esta sección se puede concluir lo siguiente:

- Cuando existe coincidencia de polos y ceros en  $K(s)G_P(s)$  también existe coincidencia de polos y ceros en  $G_{LC}(s)$ .
- En un sistema con retroalimentación de salida se puede perder controlabilidad u observabilidad cuando existe coincidencia de polos y ceros en la función de transferencia del sistema de lazo cerrado aunque el controlador estabilice al sistema.
- El sistema mostrado en la figura (2.4) es invariante a la controlabilidad y observabilidad al utilizar un control proporcional, sin embargo el sistema puede resultar no controlable o no observable al utilizar un controlador dinámico.

## 2.4 Ejemplo 1.

En la figura (2.2) se muestra un sistema obtenido de [3], el cual consta de dos resortes, dos amortiguadores y una placa. Se considera la salida del sistema como el promedio de los desplazamientos  $(x_1 + x_2)/2$ , donde cada uno de ellos es tomado con respecto de la posición del resorte sin deformación y su función de transferencia es la siguiente:

$$G_P(s) = \frac{0.25((k_1 + k_2) + (c_1 + c_2)s)}{k_1k_2 + (c_1k_2 + c_2k_1)s + c_1c_2s^2}. \quad (2.4.1)$$

Considerando que el sistema  $G_P(s)$  no tiene coincidencia de polos con ceros en su función de transferencia y por lo tanto es controlable y observable. Por otra parte con un controlador  $K(s)$  se pretende dar al sistema de lazo cerrado estabilidad además de ciertas características de desempeño, pero en algunos casos se logra el objetivo provocando una pérdida de controlabilidad u observabilidad no deseados.

En la figura (2.4) se muestra el diagrama de bloques para el sistema de lazo cerrado, donde  $G_P(s)$  se muestra en la ecuación (2.4.1). Usando un controlador dinámico se puede observar

que algunos de los ceros del controlador pueden ser idénticos a algunos de los polos del sistema o viceversa, de tal forma que matemáticamente puede existir cancelación de polos con ceros.

La función de transferencia en lazo cerrado se muestra a continuación:

$$G_{LC}(s) = \frac{K(s)G_P(s)}{1 + K(s)G_P(s)}, \quad (2.4.2)$$

Se propone realizar el análisis con el siguiente controlador:

$$K(s) = \frac{s+a}{s+b}, \quad (2.4.3)$$

y por lo tanto,

$$G_{LC}(s) = \frac{0.25 \left( \frac{s+a}{c_1 c_2} \right) \left( s + \frac{k_1+k_2}{c_1+c_2} \right)}{\left( \frac{s+b}{c_1+c_2} \right) \left( s + \frac{k_1}{c_1} \right) \left( s + \frac{k_2}{c_2} \right) + 0.25 \left( \frac{s+a}{c_1 c_2} \right) \left( s + \frac{k_1+k_2}{c_1+c_2} \right)} \quad (2.4.4)$$

De la ecuación anterior se puede observar que cuando los parámetros  $a$  y  $b$  del controlador son los valores  $a = k_1/c_1$ ,  $a = k_2/c_2$ ,  $b = (k_1+k_2)/(c_1+c_2)$ , puede existir una posible cancelación matemática al existir coincidencia de polos con ceros y el sistema puede ser no controlable o no observable en lazo cerrado.

Cuando  $a = k_1/c_1$ , la ecuación de lazo cerrado que resulta es la siguiente:

$$G_{LC}(s) = \frac{\left( s + \frac{k_1}{c_1} \right) \left( \frac{0.25}{c_1 c_2} \right) \left( s + \frac{k_1+k_2}{c_1+c_2} \right)}{\left( s + \frac{k_1}{c_1} \right) \left[ \left( \frac{s+b}{c_1+c_2} \right) \left( s + \frac{k_2}{c_2} \right) + \left( \frac{0.25}{c_1 c_2} \right) \left( s + \frac{k_1+k_2}{c_1+c_2} \right) \right]} \quad (2.4.5)$$

Cuando  $a = k_2/c_2$ , la ecuación de lazo cerrado que resulta es la siguiente:

$$G_{LC}(s) = \frac{\left( s + \frac{k_2}{c_2} \right) \left( \frac{0.25}{c_1 c_2} \right) \left( s + \frac{k_1+k_2}{c_1+c_2} \right)}{\left( s + \frac{k_2}{c_2} \right) \left[ \left( \frac{s+b}{c_1+c_2} \right) \left( s + \frac{k_1}{c_1} \right) + \left( \frac{0.25}{c_1 c_2} \right) \left( s + \frac{k_1+k_2}{c_1+c_2} \right) \right]} \quad (2.4.6)$$

Cuando  $b = (k_1 + k_2)/(c_1 + c_2)$ , la ecuación de lazo cerrado que resulta es la siguiente:

$$G_{LC}(s) = \frac{0.25 \left( \frac{s+a}{c_1 c_2} \right) \left( s + \frac{k_1+k_2}{c_1+c_2} \right)}{\left( s + \frac{k_1+k_2}{c_1+c_2} \right) \left[ \left( \frac{1}{c_1+c_2} \right) \left( s + \frac{k_1}{c_1} \right) \left( s + \frac{k_2}{c_2} \right) + 0.25 \left( \frac{s+a}{c_1 c_2} \right) \right]} \quad (2.4.7)$$

Por otra parte si se cancelan polos con ceros, el sistema se encuentra en su realización mínima y puede ser controlable y observable, matemáticamente se elimina la dinámica del sistema original, sin embargo, el nuevo modelo no corresponde con la descripción física del sistema, esto sucede en la figura (2.3) donde el sistema físico es de dos resortes y dos amortiguadores y el nuevo modelo corresponde a un sistema de un sólo resorte y un sólo amortiguador.

En resumen un sistema LTI controlable y observable en lazo abierto puede resultar no controlable o no observable en lazo cerrado al utilizar un controlador dinámico, entonces se dice que el sistema en lazo cerrado pierde controlabilidad u observabilidad cuando la matriz de controlabilidad u observabilidad respectivamente del sistema en lazo cerrado no es de rango completo o su determinante no es diferente de cero, lo cual sucede al presentarse coincidencia de polos y ceros en su función de transferencia, por otro lado si los ceros del controlador cancelan polos de la planta, el polinomio denominador de la función de transferencia del sistema pierde grado y por lo tanto el sistema es controlable y observable debido a que se encuentra en su realización mínima.

## 2.5 Cancelación de polos.

Mediante un controlador, las plantas estables pueden desplazar los polos o pueden cancelar alguna dinámica no deseada del sistema, sin embargo las plantas inestables solo deben desplazar los polos ya que la cancelación es aproximada y puede no ser exacta, por lo tanto intentar cancelar alguna dinámica inestable del sistema solo complicaría el problema ya que se tendría la dinámica de la planta y la dinámica del control inestables [8].

Es conocido que el diseño mediante cancelación de polos tiene impacto en el transitorio debido a las perturbaciones a la entrada y el diseño mediante desplazamiento de los polos tiene impacto en la robustez de lazo cerrado. La selección entre cancelar o desplazar polos estables



depende de los requerimientos del sistema en cuanto a la respuesta de perturbaciones a la entrada y la robustez.

La dinámica de una planta estable que es cancelada por el controlador puede aparecer en la función sensibilidad de perturbaciones a la entrada [7], para ver esto se considera que el polinomio numerador y el polinomio denominador pueden separarse en dos partes, una que se puede desplazar  $A_{desp}(s)$ ,  $B_{desp}(s)$  y otra que se puede cancelar  $A_{canc}(s)$ ,  $B_{canc}(s)$ . El modelo de la función de transferencia queda como sigue:

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{B_{canc}(s) B_{desp}(s)}{A_{canc}(s) A_{desp}(s)} \quad (2.5.1)$$

donde  $A_{canc}(s)$  y  $B_{canc}(s)$  son polinomios Hurwitz,  $A_{desp}(s)$  y  $B_{desp}(s)$  pueden contener raíces estables e inestables y el controlador se puede definir de la siguiente manera:

$$K(s) = \frac{N_K(s)}{D_K(s)} = \frac{A_{canc}(s) N_c(s)}{B_{canc}(s) D_c(s)} \quad (2.5.2)$$

donde  $N_K(s)$  y  $D_K(s)$  son el numerador y el denominador de la función de transferencia del controlador, los cuales pueden factorizarse mediante dos polinomios  $A_{canc}(s)$ ,  $N_c(s)$  y  $B_{canc}(s)$ ,  $D_c(s)$  respectivamente.

La función de transferencia del lazo cerrado mostrado en la figura (2.5) es:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K(s) G(s)}{1 + K(s) G(s)} = \frac{B_{desp}(s) N_c(s)}{A_{desp}(s) D_c(s) + B_{desp}(s) N_c(s)} \quad (2.5.3)$$

En la ecuación anterior se observa que la dinámica no deseada del sistema se cancela y ya no aparece en el lazo cerrado, sin embargo esto no sucede al existir perturbaciones en el sistema como se muestra en la figura (2.6). La función sensibilidad de perturbaciones a la entrada  $S_i$

define el impacto de las perturbaciones de la entrada en la salida, y en la siguiente ecuación se puede observar que la dinámica cancelada aparece como factor en  $S_i$ .

$$S_i(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)K(s)} = \frac{B_{desp}(s) D_c(s) B_{canc}(s)}{[A_{desp}(s) D_c(s) + B_{desp}(s) N_c(s)] A_{canc}(s)} \quad (2.5.4)$$

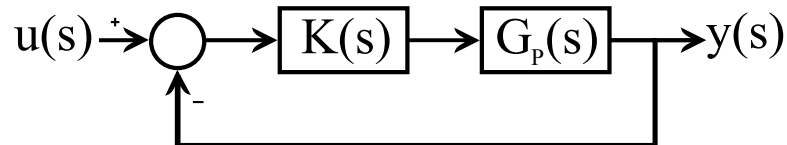


Figura 2.5: Lazo cerrado.

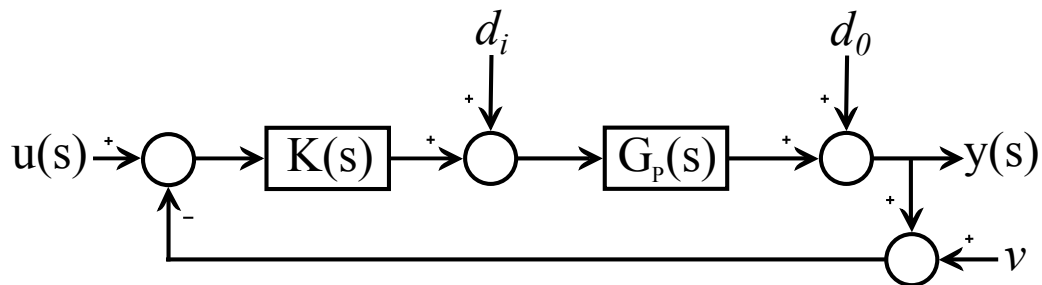


Figura 2.6: Perturbaciones en el lazo cerrado.

Cuando se cancelan polos estables del sistema con los ceros del controlador, los polos cancelados aparecen en la función sensibilidad de perturbaciones a la entrada.

La técnica de control mediante cancelación de polos matemáticamente cancela los polos del sistema con los ceros del controlador para tener algún comportamiento deseado del sistema, sin embargo ésta no es una técnica muy aceptada por muchos investigadores debido a varios problemas [7], por ejemplo no se puede realizar una cancelación exacta por que generalmente los parámetros de la planta no son conocidos exactamente y aunque pudieran ser conocidos los parámetros se encuentran variando continuamente debido a cambios en el ambiente, fluctuaciones en la fuente de alimentación y otros fenómenos que no son predecibles, al desconocer los parámetros de la planta y sus variaciones se tiene un modelo aproximado del sistema físico, de tal forma que no se puede cancelar exactamente la dinámica no deseada del sistema, y por lo

tanto se recomienda desplazar los polos mediante alguna otra técnica como se describe en el siguiente capítulo.

## 2.6 Retroalimentación de estado

La retroalimentación de estado es una técnica que puede ser utilizada para tener alguna configuración deseada de los polos. Es conocido que la retroalimentación de estado puede reubicar la posición de los polos sin afectar a la controlabilidad del sistema.

**Teorema.** [3] El par  $(A - BK, B)$  para algún vector real constante  $K$  de dimension  $1 \times n$ , es controlable si y solo si  $(A, B)$  es controlable.

Si el sistema de lazo abierto no es controlable entonces el sistema con retroalimentación de estado tampoco puede ser controlable, la controlabilidad es invariante a la retroalimentación de estado, sin embargo no sucede lo mismo con la observabilidad ya que el sistema de lazo abierto puede ser observable y el sistema retroalimentado de estado puede resultar ser no observable, lo anterior se muestra a continuación. Un sistema en el espacio de estados se representa de la siguiente manera:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du, \quad (2.6.1)$$

se aplica retroalimentación de estados mediante:  $u = r - kx$ , resultando el sistema retroalimentado mostrado en la siguiente ecuación:

$$\dot{x}_f = A_f x + Br, \quad y_f = C_f x + Dr, \quad (2.6.2)$$

donde  $A_f = A - BK$ ,  $C_f = C - DK$ .

Para llegar a analizar un ejemplo de pérdida de observabilidad se propone estudiar un sistema de segundo orden representado en el espacio de estados mediante la siguiente ecuación:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} x, \quad (2.6.3)$$

de tal forma que se puede hacer retroalimentación de estados mediante:  $u = r - \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} x$ , resultando el sistema retroalimentado mostrado en la siguiente ecuación:

$$\dot{x}_f = \begin{bmatrix} a_{11} - b_1 k_1 & a_{12} - b_1 k_2 \\ a_{21} - b_2 k_1 & a_{22} - b_2 k_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} r, \quad (2.6.4)$$

$$y_f = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} x.$$

Ahora se revisa la controlabilidad y observabilidad del sistema de lazo abierto y del sistema retroalimentado de estado mostrados en las ecuaciones (2.6.3) y (2.6.4) respectivamente. El sistema de lazo abierto mostrado en la ecuación (2.6.3) es controlable si la matriz de controlabilidad en la ecuación (2.6.5) es de rango completo

$$U = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_1 a_{11} + b_2 a_{12} \\ b_2 & b_1 a_{21} + b_2 a_{22} \end{bmatrix}. \quad (2.6.5)$$

La matriz de la ecuación (2.6.5) es cuadrada, por lo que en este caso es de rango completo si  $\det(U) \neq 0$  entonces,

$$\det(U) = b_1^2 a_{21} - b_2^2 a_{12} - b_1 b_2 a_{11} + b_1 b_2 a_{22} \neq 0. \quad (2.6.6)$$

El sistema retroalimentado mostrado en la ecuación (2.6.4) es controlable si la matriz de controlabilidad en la ecuación (2.6.7) es de rango completo

$$\begin{aligned} U_f &= \begin{bmatrix} B & A_f B \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} b_1 & b_1 (a_{11} - b_1 k_1) + b_2 (a_{12} - b_1 k_2) \\ b_2 & b_1 (a_{21} - b_2 k_1) + b_2 (a_{22} - b_2 k_2) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.6.7)$$

La matriz de la ecuación (2.6.7) es cuadrada, por lo que en este caso es de rango completo si  $\det(U_f) \neq 0$  entonces,

$$\det(U_f) = b_1^2 a_{21} - b_2^2 a_{12} - b_1 b_2 a_{11} + b_1 b_2 a_{22} \neq 0, \quad (2.6.8)$$

como se puede observar de las ecuaciones (2.6.6) y (2.6.8) la controlabilidad no depende de  $k$  y por lo tanto el sistema retroalimentado de estado es controlable si el sistema de lazo abierto también es controlable ya que  $\det(U) = \det(U_f)$ . Ahora se analiza la observabilidad de ambos sistemas. El sistema en lazo abierto mostrado en la ecuación (2.6.3) es observable si la matriz de observabilidad en la ecuación (2.6.9) es de rango completo,

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_1 a_{11} + c_2 a_{21} & c_1 a_{12} + c_2 a_{22} \end{bmatrix} \quad (2.6.9)$$

La matriz de la ecuación (2.6.9) es cuadrada, por lo que en este caso es de rango completo si  $\det(V) \neq 0$  entonces,

$$\det(V) = c_1^2 a_{12} - c_2^2 a_{21} - c_1 c_2 a_{11} + c_1 c_2 a_{22} \neq 0. \quad (2.6.10)$$

El sistema retroalimentado de estado mostrado en la ecuación (2.6.4) es observable si la matriz de observabilidad en la ecuación (2.6.11) es de rango completo,

$$V_f = \begin{bmatrix} C \\ CA_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ V_{f21} & V_{f22} \end{bmatrix}, \quad (2.6.11)$$

$$V_{f21} = c_1 (a_{11} - b_1 k_1) + c_2 (a_{21} - b_2 k_1),$$

$$V_{f22} = c_1 (a_{12} - b_1 k_2) + c_2 (a_{22} - b_2 k_2).$$

La matriz de la ecuación (2.6.11) es cuadrada, por lo que es de rango completo si  $\det(V_f) \neq 0$  entonces,

$$\begin{aligned} \det(V_f) = c_1^2 a_{12} - c_2^2 a_{21} - b_1 c_1^2 k_2 + b_2 c_2^2 k_1 - \\ c_1 c_2 a_{11} + c_1 c_2 a_{22} + b_1 c_1 c_2 k_1 - b_2 c_1 c_2 k_2 \end{aligned} \quad (2.6.12)$$

a partir de las ecuaciones (2.6.10) y (2.6.12) se puede observar que el  $\det(V_f)$  también se puede expresar como sigue:

$$\det(V_f) = \det(V) - b_1 c_1^2 k_2 + b_2 c_2^2 k_1 + b_1 c_1 c_2 k_1 - b_2 c_1 c_2 k_2,$$

de la ecuación anterior se puede observar que existen valores de  $k$  que pueden hacer que el sistema en retroalimentación de estado sea no observable, es decir que el  $\det(V_f) = 0$  aunque el sistema de lazo abierto sea observable  $\det(V) \neq 0$ , entonces el sistema retroalimentado puede resultar no observable si se cumple la siguiente relación:  $b_1 c_1^2 k_2 - b_2 c_2^2 k_1 - b_1 c_1 c_2 k_1 + b_2 c_1 c_2 k_2 = \det(V)$ .

## 2.7 Ejemplo 2.

Ahora se muestra un ejemplo en el que un sistema de segundo orden es controlable, observable e inestable en lazo abierto y al aplicar retroalimentación de estado resulta estable, controlable y no observable. El sistema se define como en (2.7.1)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} x. \quad (2.7.1)$$

La función de transferencia del sistema en lazo abierto es:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B = \frac{s + 2}{s^2 + 3s - 4}. \quad (2.7.2)$$

El sistema  $G(s)$  es controlable ya que en la ecuación (2.7.3),  $U$  es una matriz cuadrada y el  $\det(U) \neq 0$ .

$$\det(U) = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1. \quad (2.7.3)$$

El sistema  $G(s)$  es observable ya que en la ecuación (2.7.4),  $V$  es una matriz cuadrada y el  $\det(V) \neq 0$ .

$$\det(V) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 6. \quad (2.7.4)$$

Al aplicar retroalimentación de estado al sistema de la ecuación (2.7.1) para un valor de  $k = \begin{bmatrix} 1 & 8 \end{bmatrix}$  resulta el siguiente sistema:

$$\dot{x}_f = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad y_f = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} x. \quad (2.7.5)$$

La función de transferencia del sistema con retroalimentación en la ecuación (2.7.5) es:

$$G_f(s) = C_f (sI - A_f)^{-1} B_f = \frac{s + 2}{(s + 2)(s + 2)}. \quad (2.7.6)$$

Como se puede observar en la ecuación (2.7.6) ahora el sistema es estable y existe coincidencia de polos con ceros en su función de transferencia y por lo tanto el sistema con retroalimentación de estado resulta controlable y no observable como se muestra en las ecuaciones (2.7.7) y (2.7.8) respectivamente.

El sistema  $G_f(s)$  es controlable ya que en la ecuación (2.7.7),  $U_f$  es una matriz cuadrada y el  $\det(U_f) \neq 0$ .

$$\det(U_f) = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1. \quad (2.7.7)$$

El sistema  $G_f(s)$  es no observable ya que en la ecuación (2.7.8),  $V_f$  es una matriz cuadrada y el  $\det(V_f) = 0$ .

$$\det(V_f) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.7.8)$$

La retroalimentación de estado puede provocar que el sistema pierda observabilidad, esto sucede debido a que los polos del sistema pueden ser movidos a la misma posición de algún cero con lo cual existe coincidencia de polos y ceros en su función de transferencia.

## Capítulo 3

# Medida para Controlabilidad, Observabilidad y Asignación de polos.

Los métodos tradicionales para determinar la controlabilidad y observabilidad de los sistemas consisten en calcular el rango de una matriz de controlabilidad u observabilidad respectivamente, si la matriz es de rango completo, entonces, el sistema es completamente controlable u observable, sin embargo, de esta manera no es posible determinar que tan cerca se encuentra el sistema de ser no controlable o no observable, en la publicación [19] se propone una medida para controlabilidad y observabilidad, con la cual se puede determinar la distancia que existe entre los polos y ceros del sistema o también llamada movilidad de los valores característicos. Mediante retroalimentación de estado es posible mover los polos a la misma posición de los ceros, con lo cual existe coincidencia de polos con ceros en la función de transferencia del sistema resultando este último no controlable o no observable. Los polos no controlables tienen movilidad cero, es decir, los polos de lazo abierto son igual a los polos con retroalimentación de estado, por lo tanto no importa la ganancia de la retroalimentación de estado para los modos no controlables ya que de cualquier forma permanecerán en la misma posición.

Las medidas de controlabilidad u observabilidad pueden determinar la distancia a la que se encuentra el sistema de volverse no controlable o no observable. En la publicación [20]



se encuentra una relación entre la ganancia de retroalimentación y la movilidad de valores característicos del sistema, particularmente de los modos no controlables, ya que los polos de lazo abierto son igual a los polos con retroalimentación de estado.

### 3.1 Medidas para Controlabilidad y Observabilidad.

La medida de controlabilidad y de observabilidad de un sistema, es un tema que no ha sido estudiado recientemente, pero dado que estos conceptos pueden ser útiles en el diseño de controladores, por esa razón se incluye en esta tesis.

En la publicación [20], se describe una técnica para calcular una medida de controlabilidad y de observabilidad. La medida de controlabilidad obtiene información de la “distancia” a la que se encuentra el sistema de volverse no controlable, esto es importante, debido a que se puede calcular el controlador de una manera eficiente, en el sentido de que se puede asegurar la controlabilidad, la observabilidad y la estabilidad del sistema.

Un sistema en el espacio de estados se define como se muestra en la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

La función de transferencia del sistema puede calcularse como se muestra en la siguiente ecuación:

$$y(s) = C(sI - A)^{-1} Bu(s) = \frac{\phi(s)}{\Delta(s)} u(s) \tag{3.1.2}$$

donde el numerador de la función de transferencia es  $\phi(s) = C \text{adj}(sI - A) B$  y el denominador  $\Delta(s) = \det(sI - A)$ . Del polinomio numerador  $\phi(s)$  se pueden definir las dos siguientes ecuaciones:

$$\phi_B(s) = \text{adj}(sI - A) B \tag{3.1.3}$$

$$\phi_C(s) = C \text{adj}(sI - A) \quad (3.1.4)$$

Las ecuaciones  $\phi_B(s)$  y  $\phi_C(s)$  establecen las condiciones para la controlabilidad y la observabilidad del sistema.

Cuando el sistema tiene valores característicos diferentes  $\lambda_i$  donde  $i = 1, 2, \dots, n$ , entonces, el valor característico  $\lambda_i$  es no controlable si y solo si  $\phi_B(\lambda_i) = \vec{0}$ , similarmente para la observabilidad, el valor característico  $\lambda_i$  es no observable si y solo si  $\phi_C(\lambda_i) = \vec{0}$ , donde  $\vec{0}$  es cero vectorial.

Las medidas de controlabilidad  $m_{c_i}$  y de observabilidad  $m_{o_i}$  del modo  $\lambda_i$  para el sistema definido por las matrices  $(A, B, C)$ , con valores característicos diferentes pueden ser calculadas como se muestran en las ecuaciones siguientes:

$$m_{c_i} = \|\phi_B(\lambda_i)\|_F \quad (3.1.5)$$

$$m_{o_i} = \|\phi_C(\lambda_i)\|_F \quad (3.1.6)$$

donde  $\|\cdot\|_F$  es la norma Frobinus.

Las medidas de controlabilidad  $m_c$  y de observabilidad  $m_o$  para el sistema  $(A, B, C)$  están definidas respectivamente como:

$$m_c = \min_i \{m_{c_i}\} \quad (3.1.7)$$

$$m_o = \min_i \{m_{o_i}\} \quad (3.1.8)$$

### 3.2 Ejemplo.

En el siguiente ejemplo se calculan las medidas de controlabilidad y de observabilidad, las cuales indican la distancia a la que se encuentra el sistema de volverse no controlable o no observable.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (3.2.1)$$

$$y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} x$$

los valores característicos del sistema son:  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -4$

$$\phi_B(s) = \text{adj}(sI - A)B = \begin{bmatrix} s + 5 & 1 \\ -4 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} \quad (3.2.2)$$

Ahora se evalúa  $s$  en  $\phi_B(s)$  para cada uno de los valores característicos del sistema  $\lambda_i$ , entonces, para  $\lambda_1 = -1$

$$\phi_B(\lambda_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (3.2.3)$$

con lo cual,

$$m_{c_1} = \|\phi_B(\lambda_1)\| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \quad (3.2.4)$$

Ahora se evalúa de la misma forma el valor característico  $\lambda_2 = -4$ ,

$$\phi_B(\lambda_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} \quad (3.2.5)$$

con lo cual,

$$m_{c_2} = \|\phi_B(\lambda_2)\| = \sqrt{(1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{17} \quad (3.2.6)$$

La medida de controlabilidad se determina por el valor mínimo de  $m_{c_i}$ ,

$$m_c = \min_i \{m_{c_i}\} = \sqrt[2]{2} \quad (3.2.7)$$

Se procede de manera similar para determinar la observabilidad del modo  $\lambda_i$  con la siguiente ecuación:

$$\phi_C(s) = C \text{adj}(sI - A) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+5 & 1 \\ -4 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2s+6 & s+2 \end{bmatrix} \quad (3.2.8)$$

Ahora se evalúa  $s$  en  $\phi_C(s)$  para cada uno de los valores característicos del sistema  $\lambda_i$ , entonces, para  $\lambda_1 = -1$

$$\phi_C(\lambda_1) = \begin{bmatrix} 2(-1)+6 & -1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2.9)$$

con lo cual,

$$m_{o_1} = \|\phi_C(\lambda_1)\| = \sqrt[2]{(4)^2 + (1)^2} = \sqrt[2]{17} \quad (3.2.10)$$

Ahora se evalúa de la misma forma el valor característico  $\lambda_2 = -4$ ,

$$\phi_C(\lambda_2) = \begin{bmatrix} 2(-4)+6 & -4+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \end{bmatrix} \quad (3.2.11)$$

con lo cual,

$$m_{o_2} = \|\phi_C(\lambda_2)\| = \sqrt[2]{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt[2]{8} \quad (3.2.12)$$

La medida de observabilidad se determina por el valor mínimo de  $m_{o_i}$ ,

$$m_o = \min_i \{m_{o_i}\} = \sqrt[2]{8} \quad (3.2.13)$$

Las medidas de controlabilidad y observabilidad determinan la distancia a la que se encuentra el sistema de volverse no controlable o no observable respectivamente.

Cuando la medida de controlabilidad o de observabilidad es igual a cero, indica que el valor característico  $\lambda_i$  es no controlable o no observable respectivamente, y por lo tanto existe coincidencia de polos con ceros en su función de transferencia.

### 3.3 Asignación de polos.

En control moderno mediante retroalimentación de estados los polos pueden ser ubicados en cualquier parte del plano complejo y en control clásico los polos pueden ser ubicados de acuerdo al Lugar Geométrico de la Raíz (LGR) para el sistema de lazo cerrado, se recuerda que el LGR son todas las posibles ubicaciones donde se pueden posicionar los polos del sistema al variar la ganancia del controlador, si los polos requieren ser ubicados en una posición fuera del LGR entonces se diseñan compensadores para modificar al LGR y de esta forma los polos pueden ser ubicados en cualquier parte del plano complejo.

Mediante asignación de polos se pueden evitar las cancelaciones de polos con ceros ya que los polos podrán ser ubicados en posiciones que puedan satisfacer las necesidades de estabilidad y desempeño del sistema, además de que se tiene conocimiento de la ubicación de los polos del sistema con lo cual se evitan las coincidencias de polos con ceros.

En el capítulo anterior se analizaron ventajas y desventajas de cancelar o desplazar polos mediante algún control y de acuerdo a [7] es mejor desplazar polos en lugar de cancelarlos, debido a que la respuesta del sistema en el tiempo se relaciona con la posición que tienen los polos en el plano complejo ahora en este capítulo se describe una técnica para la asignación de polos mediante una transformación del sistema que usa a la matriz de controlabilidad.

La asignación de polos se puede hacer mediante retroalimentación de estado y por lo tanto se debe de calcular la ganancia necesaria que debe tener el control para asignar arbitrariamente

los valores característicos del sistema en lazo cerrado.

Existen diferentes métodos para asignar polos los cuales según [11] pueden clasificarse principalmente como: métodos clásicos los cuales utilizan a la matriz de controlabilidad y pueden transformar al sistema en uno o varios sistemas SISO en el caso de que el sistema sea MIMO, métodos directos los cuales transforman al sistema en una forma canónica usando matrices unitarias estables, métodos que resuelven ecuaciones de matrices silvester, métodos de vectores característicos usando subespacios, y algunos otros como el algoritmo Kautsky Nichols Van Dooren KNV.

En este capítulo se describe el procedimiento de [13] para calcular la ganancia de retroalimentación requerida para la asignación arbitraria de polos de sistemas lineales con una entrada, el método es aplicable a sistemas controlables y no controlables mediante una transformación no explícita de coordenadas y no requiere un previo conocimiento del polinomio característico de lazo abierto.

Los polos de un sistema controlable pueden ser asignados mediante retroalimentación de estado debido a que la controlabilidad del sistema es una condición necesaria y suficiente para asignar polos ya que de esta manera se asegura la existencia de una transformación no singular. La contribución de Ackermann es especialmente útil por que permite el cálculo de la matriz de ganancia de retroalimentación en términos de la matriz inversa de controlabilidad y el polinomio característico deseado, además el polinomio característico de lazo abierto no necesita ser conocido previamente [13]. Además se extiende el trabajo de Ackermann al caso de sistemas no controlables, mostrando que es posible escribir un conjunto de matrices ganancia de retroalimentación de estado las cuales ubican a los polos en posiciones deseadas.

Ahora se describe la técnica descrita en [13] para asignar polos. Un sistema en lazo abierto

se representa en el espacio de estados como se muestra en la ecuación (3.3.1).

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

El sistema en lazo abierto tiene un polinomio característico representado por la siguiente ecuación:

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I_n - A| = \lambda^n - a_n \lambda^{n-1} - \dots - a_2 \lambda - a_1 \quad (3.3.2)$$

el polinomio característico de la ecuación (3.3.2) tiene  $n$  raíces del sistema que se pueden reasignar cuando el sistema es completamente controlable, y cuando el sistema no es controlable de rango completo existen raíces que no se pueden reasignar y permanecen en su misma ubicación, entonces, el polinomio característico se separa en dos partes una en la que se encuentran  $r$  raíces que pertenecen a la parte del sistema que se puede controlar y por lo tanto se pueden reasignar, y otra parte  $U(\lambda)$  en la que se encuentran las  $n - r$  raíces que pertenecen a la parte no controlable del sistema y por lo tanto no se pueden reasignar debido a que son invariantes a la retroalimentación de estado ya que para cualquier ganancia de retroalimentación las raíces no controlables permanecen en el mismo lugar sin cambiar su ubicación.

$$\Delta(\lambda) = (\lambda^r - a_r \lambda^{r-1} - \dots - a_2 \lambda - a_1) U(\lambda) \quad (3.3.3)$$

Al aplicar un control por retroalimentación de estado al sistema de lazo abierto de la ecuación (3.3.1), se obtiene un sistema de lazo cerrado el cual se representa en el espacio de estados como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \dot{x}_f &= (A + Bf')x + Br \\ y_f &= C_f x + Dr \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Donde  $f'$  es la ganancia de retroalimentación de estado.

El polinomio característico del sistema de lazo cerrado de la ecuación (3.3.4) se muestra en la ecuación (3.3.5)

$$\Delta_f(\lambda) = |\lambda I_n - (A + Bf')| = \lambda^n - \beta_n \lambda^{n-1} - \dots - \beta_2 \lambda - \beta_1 \quad (3.3.5)$$

al igual que sucede en la ecuación (3.3.3) para el sistema de lazo abierto, el polinomio característico del sistema en lazo cerrado mostrado en la ecuación (3.3.5) también está compuesto de una parte controlable  $\bar{\Delta}_f(\lambda)$  con  $r$  polos que se pueden reasignar, y una parte no controlable  $U(\lambda)$  con  $n - r$  polos que no se pueden reasignar.

$$\Delta_f(\lambda) = (\lambda^r - \beta_r \lambda^{r-1} - \dots - \beta_2 \lambda - \beta_1) U(\lambda) = \bar{\Delta}_f(\lambda) U(\lambda) \quad (3.3.6)$$

El sistema es completamente controlable cuando la matriz de controlabilidad mostrada en la ecuación (3.3.7) es de rango completo,

$$Q = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad (3.3.7)$$

En el caso de que la matriz de controlabilidad  $Q$  no sea de rango completo, se debe completar la matriz  $Q$  de tal forma que exista su inversa  $Q^{-1}$ . La matriz  $Q$  es una matriz no singular y se puede utilizar para hacer una transformación de similaridad donde  $x = Q\bar{x}$ , entonces el sistema transformado queda como se muestra en la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= Q^{-1}AQ\bar{x} + Q^{-1}Bu \\ \bar{y} &= CQ\bar{x} + Du \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

El sistema transformado se puede representar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u \\ \bar{y} &= \bar{C}\bar{x} + \bar{D}u \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

donde  $\bar{A} = Q^{-1}AQ$ ,  $\bar{B} = Q^{-1}B$ ,  $\bar{C} = CQ$ ,  $\bar{D} = D$ , de tal forma que si el sistema no es controlable de rango completo la matriz  $\bar{A}$  queda separada en una parte controlable  $\bar{A}_c$



de tamaño  $r \times r$  donde se encuentran los  $r$  polos que se pueden reasignar y otra parte no controlable  $\bar{A}_{\bar{c}}$  de tamaño  $(n - r) \times (n - r)$  donde se encuentran los  $n - r$  polos que no se pueden reasignar ya que son invariantes a la retroalimentación de estado. El vector  $\bar{B} = e_1$  y el sistema transformado se puede representar como sigue:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_c \\ \dot{\bar{x}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_c \\ \bar{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_c \\ 0 \end{bmatrix} u \\ \bar{y} &= \begin{bmatrix} \bar{C}_c & \bar{C}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_c \\ \bar{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \bar{D}u \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

Se realiza una segunda transformación al sistema para obtener los coeficientes del polinomio característico y de esta manera calcular la ganancia necesaria para asignar los polos a la ubicación deseada entonces,

$$P = \begin{bmatrix} e'_r \\ e'_r \bar{A} \\ \vdots \\ e'_r \bar{A}^{r-1} \\ e'_{r+1} \\ \vdots \\ e'_n \end{bmatrix} \quad (3.3.11)$$

Los vectores  $e_i$  denotan vectores unitarios con 1 en el  $i$ -ésimo elemento, éstos vectores  $e_i$  se obtienen de la siguiente manera:

$$Q^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = e_1, \quad Q^{-1}AB = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = e_2, \quad Q^{-1}A^2B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = e_3, \quad \dots \quad (3.3.12)$$

La matriz  $P$  de la ecuación (3.3.11) es no singular y el sistema transformado se muestra a continuación :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u \\ \bar{y} &= \bar{C}\bar{x} + \bar{D}u \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

donde

$$\bar{A} = P\bar{A}P^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \quad (3.3.14)$$

$$\bar{B} = P\bar{B} = e_r \quad (3.3.15)$$

Los coeficientes del polinomio característico del sistema de lazo abierto se encuentran en la  $r$ -ésima fila de  $\bar{A}$ , entonces

$$e'_r \bar{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_r & a_{r+1} & \cdots & a_n \end{bmatrix} \quad (3.3.16)$$

y si  $\bar{f}'$  es la diferencia de los coeficientes del polinomio característico de lazo cerrado y el polinomio característico de lazo abierto entonces,

$$\bar{f}' = \begin{bmatrix} \beta_1 - a_1 & \beta_2 - a_2 & \cdots & \beta_r - a_r & \beta_{r+1} - a_{r+1} & \cdots & \beta_n - a_n \end{bmatrix} \quad (3.3.17)$$

El vector ganancia de retroalimentación  $f'$  en términos del sistema original  $(A, B)$  es  $f' =$

$\bar{f}'PQ^{-1}$ , y puede ser escrito como

$$f' = \bar{f}' \begin{bmatrix} e'_r Q^{-1} \\ e'_r \bar{A} Q^{-1} \\ \vdots \\ e'_r \bar{A}^{r-1} Q^{-1} \\ e'_{r+1} Q^{-1} \\ \vdots \\ e'_n Q^{-1} \end{bmatrix} = \bar{f}' \begin{bmatrix} e'_r Q^{-1} \\ e'_r Q^{-1} A \\ \vdots \\ e'_r Q^{-1} A^{r-1} \\ e'_{r+1} Q^{-1} \\ \vdots \\ e'_n Q^{-1} \end{bmatrix} = e'_r Q^{-1} \sum_{i=1}^r (\beta_i - a_i) A^{i-1} + \sum_{i=1}^{n-r} x_i e'_{r+i} Q^{-1} \quad (3.3.18)$$

la primer sumatoria de la ecuación (3.3.18) corresponde a la ganancia para los  $r$  polos que se pueden reasignar y la segunda sumatoria corresponde a la ganancia para los  $n - r$  polos que no se pueden reasignar y en la cual se encuentran los escalares  $x_i$  que corresponden a la diferencia de los coeficientes de los polinomios característicos de lazo cerrado y de lazo abierto que pertenecen a la parte no controlable del sistema y por lo tanto no importa su valor ya que la parte no controlable del sistema es invariante a la retroalimentación de estado y las raíces no controlables del sistema permanecen en el mismo lugar sin cambiar su ubicación en el plano complejo.

Mediante alguna técnica para asignación de polos se ubica a los polos en posiciones deseadas en el plano complejo con la finalidad de modificar el comportamiento del sistema en el tiempo, como se analizó en este capítulo un sistema controlable satisface condiciones necesarias y suficientes para la asignación de polos, mediante retroalimentación de estados los polos del sistema pueden ser asignados arbitrariamente, sin embargo, algunas veces se requiere una ganancia de retroalimentación muy grande que lo puede hacer no realizable. En [12] se propone una medida de controlabilidad para asignar polos en sistemas controlables, no controlables y multi entrada. En resumen es un compromiso entre controlabilidad y magnitud de la ganancia de retroalimentación.

### 3.4 Ejemplo.

A continuación, se muestra un ejemplo en el cual se reasignan los polos de un sistema.

El sistema de lazo abierto se encuentra definido en el espacio de estados como se muestra en la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 4 \end{bmatrix} x\end{aligned}\tag{3.4.1}$$

El sistema es controlable y observable de rango completo, por lo tanto, sus polos pueden ser reasignados a otra ubicación en el plano complejo usando retroalimentación de estados.

Los polos del sistema de lazo abierto se encuentran ubicados en  $-2$  y  $-3$ , y se desea que los polos sean reasignados a  $-3$  y  $-4$ , para lograrlo se debe calcular la ganancia necesaria haciendo uso de la técnica descrita anteriormente para asignar polos.

La matriz de controlabilidad se muestra en la ecuación (3.4.2),

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\tag{3.4.2}$$

La matriz de la ecuación (3.4.2), se utiliza para realizar una transformación de similaridad al sistema de lazo abierto, resultando la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ \bar{y} &= \begin{bmatrix} 0 & 4 \end{bmatrix} \bar{x}\end{aligned}\tag{3.4.3}$$

Se realiza una segunda transformación con la matriz  $P$  para obtener los coeficientes del polinomio característico del sistema de lazo abierto y de esta manera calcular la ganancia necesaria para asignar los polos a la ubicación deseada.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \quad (3.4.4)$$

El sistema que resulta de la transformación se muestra en la siguiente ecuación:

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (3.4.5)$$

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \end{bmatrix} \bar{x}$$

Los coeficientes del polinomio característico del sistema de lazo abierto se encuentran en la  $r$ -ésima fila de  $\bar{A}$ , entonces

$$e'_r \bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -5 \end{bmatrix} \quad (3.4.6)$$

La diferencia de los coeficientes del polinomio característico de lazo cerrado  $s^2 + 7s + 12$  y el polinomio característico de lazo abierto  $s^2 + 5s + 6$  es  $\bar{f}'$ .

$$\bar{f}' = \begin{bmatrix} -6 & -2 \end{bmatrix} \quad (3.4.7)$$

La ganancia de retroalimentación de estado  $f'$  necesaria para mover los polos de la posición -2 y -3 a la posición -3 y -4 se calcula como se muestra en la siguiente ecuación:

$$f' = \bar{f}' P U^{-1} = \begin{bmatrix} -6 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -6 \end{bmatrix} \quad (3.4.8)$$

Para comprobar que la ganancia de retroalimentación de estado  $f'$  mueve los polos a la posición deseada, ésta se sustituye en la ecuación (3.3.4) resultando el siguiente sistema:

$$\dot{x}_f = \begin{bmatrix} -7 & -12 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r \quad (3.4.9)$$

$$y_f = \begin{bmatrix} 0 & 4 \end{bmatrix} x$$

El sistema con retroalimentación de estado mostrado en la ecuación (3.4.9) tiene la siguiente función de transferencia

$$G_f(s) = C_f(sI - A_f)^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+7 & 12 \\ -1 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{4}{(s+3)(s+4)} \quad (3.4.10)$$

De la función de transferencia de la ecuación (3.4.10), se puede observar que ahora los polos se encuentran en la posición deseada.

# Capítulo 4

## Estudio de la Controlabilidad de los Sistemas LTI Mediante un Sistema Inverso.

### 4.1 Introducción

La controlabilidad y observabilidad de los sistemas depende de la coincidencia de polos con ceros en su función de transferencia, ya que un sistema es controlable y observable cuando no existe coincidencia de polos con ceros en su función de transferencia y se dice que el sistema se encuentra en su realización mínima.

Es común que los sistemas se encuentren definidos en el espacio de estados, sin embargo, en ésta representación no es tan sencillo determinar la coincidencia de polos con ceros en el modelo, por lo que una manera para determinarlo es revisar las propiedades de controlabilidad y de observabilidad, por otra parte, cuando el modelo del sistema se encuentra representado como una función de transferencia, la coincidencia de polos con ceros se puede determinar de manera algebraica.

En este capítulo se estudia la controlabilidad de sistemas LTI haciendo uso de un sistema inverso al sistema original, esto es posible debido a que se puede obtener la función de transferencia del sistema original mediante el procedimiento alternativo descrito en [10], este procedimiento tiene la ventaja de que no necesita de una matriz inversa para obtener la función de transferencia.

El conocimiento del sistema inverso y del sistema original permiten determinar si existe coincidencia de polos con ceros en su función de transferencia, con lo cual el sistema resulta no controlable o no observable.

## 4.2 Procedimiento alternativo para calcular la función de transferencia [10]

Un sistema lineal invariante en el tiempo puede ser representado en espacio de estados como sigue:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

Donde  $x$  corresponde al vector de estado,  $u$  es escalar y corresponde a la entrada,  $y$  es escalar y corresponde a la salida. Transformando al sistema de la ecuación (4.2.1) al dominio de la frecuencia y en condiciones iniciales cero resultan las siguientes ecuaciones:

$$x(s) = (sI - A)^{-1} Bu(s) \tag{4.2.2}$$

$$y(s) = (C(sI - A)^{-1} B + D) u(s) \tag{4.2.3}$$

La inversa de una matriz  $(sI - A)^{-1}$  puede ser expresada como la matriz adjunta  $adj(sI - A)$  por el recíproco del determinante  $|sI - A|$ , y ahora la función de transferencia de la ecuación



(4.2.3) puede expresarse de la siguiente manera:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{C \operatorname{adj}(sI - A) B}{|sI - A|} + D \quad (4.2.4)$$

De la ecuación anterior se puede observar que cuando el término  $D = 0$ , el término  $C \operatorname{adj}(sI - A) B$  corresponde a los ceros, con lo cual los valores característicos de  $A$  pueden aparecer en el numerador de la función de transferencia y no necesariamente solo corresponden a los polos, se debe notar que algunos de los valores característicos pueden ser cancelados debido a la posibilidad de la coincidencia de polos con ceros en la función de transferencia.

De acuerdo a la ecuación (4.2.4) existe coincidencia de polos y ceros cuando existen valores característicos de la matriz  $A$  en el numerador y denominador de la función de transferencia de un sistema. En la publicación de [10] se propone una ecuación para obtener los ceros del sistema con lo cual se puede determinar si existen valores característicos de  $A$  en el numerador. Además se obtiene un procedimiento alternativo para calcular la función de transferencia, lo cual se logra mediante un sistema inverso llamado así debido a que los ceros del sistema original corresponden con los polos del sistema inverso.

La derivada de la salida se representa como se muestra en la siguiente ecuación:

$$y^{(i)} = \frac{d^i}{dt^i} y(t) \quad (4.2.5)$$

Al derivar  $n$  veces la salida de la ecuación (4.2.1) y usando la ecuación  $\dot{x} = Ax + Bu$ , resulta el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned} y &= Cx + Du \\ y^{(1)} &= Cx^{(1)} + Du^{(1)} = C(Ax + Bu) + Du^{(1)} = CAx + CBu + Du^{(1)} \\ y^{(2)} &= CAx^{(1)} + CBu^{(1)} + Du^{(2)} = CA^2x + CABu + CBu^{(1)} + Du^{(2)} \\ y^{(3)} &= CA^2x^{(1)} + CABu^{(1)} + CBu^{(2)} + Du^{(3)} = CA^3x + CA^2Bu + CABu^{(1)} + CBu^{(2)} + Du^{(3)} \\ &\vdots \\ y^{(n)} &= CA^n x + CA^{n-1} Bu + CA^{n-2} Bu^{(1)} + \dots + CBu^{(n-1)} + Du^{(n)} \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

De tal forma que al derivar alfa veces la salida se tiene lo siguiente:

$$y^{(\alpha)} = CA^\alpha x + CA^{\alpha-1}Bu + CA^{\alpha-2}Bu^{(1)} + \dots + CABu^{(\alpha-2)} + CBu^{(\alpha-1)} + Du^{(\alpha)} \quad (4.2.7)$$

De la ecuación anterior  $u$ ,  $y$  son escalares, además si las derivadas de  $u$  son igual a cero, resulta la siguiente ecuación:

$$y^{(\alpha)} = CA^\alpha x + CA^{\alpha-1}Bu \quad (4.2.8)$$

Ahora se definen los números  $\alpha$  y  $q$  como se muestra en las ecuaciones (4.2.9) y (4.2.10) respectivamente.

$$\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } D \neq 0; \\ i & \text{si } D = 0, CA^{i-1}B \neq 0, CA^jB = 0 \text{ para } 0 \leq j < i - 1. \end{cases} \quad (4.2.9)$$

$$q^{-1} = \begin{cases} D & \text{si } \alpha = 0; \\ CA^{\alpha-1}B & \text{si } \alpha \neq 0. \end{cases} \quad (4.2.10)$$

En términos de la función de transferencia  $\alpha$  es el orden relativo del sistema y corresponde con la diferencia del orden del polinomio numerador  $m$  y denominador  $n$ , con lo cual el orden del polinomio numerador y denominador es de  $m = n - \alpha$  y  $n$  respectivamente. Por otra parte  $q$  está definido como se muestra en la siguiente ecuación:

$$q^{-1} = \lim_{s \rightarrow \infty} s^\alpha G(s) \quad (4.2.11)$$

De tal forma que la entrada  $u$  se puede expresar de la siguiente manera:

$$u = qy^{(\alpha)} - qCA^\alpha x \quad (4.2.12)$$

Al sustituir la ecuación (4.2.12) en el sistema original de la ecuación (4.2.1) se obtiene como

resultado al sistema inverso mostrado en la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A - BqCA^\alpha) x + Bqy^{(\alpha)} \\ u &= qy^{(\alpha)} - qCA^\alpha x \end{aligned} \tag{4.2.13}$$

La diferencia más importante entre el sistema original en la ecuación (4.2.1) y el sistema inverso en la ecuación (4.2.13) es que en el sistema original es evidente la relación de el estado a la entrada mientras que en el sistema inverso es evidente la relación del estado a la salida.

La importancia del sistema inverso es que la salida tiene una única solución y puede ser calculada, además de que el sistema inverso permite calcular variaciones de la entrada en función de la salida, y por último el sistema inverso puede ser importante en los casos en los que el sistema de ecuaciones no puede ser resuelto y se utilizan métodos cualitativos para resolverlos.

En la publicación [10] se analizan las propiedades de controlabilidad y observabilidad del sistema inverso resultando que el sistema inverso es controlable si el sistema original también es controlable, en cambio, el sistema inverso puede resultar no observable aunque el sistema original sea observable. Los sistemas que son observables y controlables tienen la propiedad llamada irreducible ya que no existen cancelaciones de polos con ceros.

### 4.3 Condiciones para la Controlabilidad del Sistema.

Los polos del sistema inverso corresponden con los ceros del sistema original, por lo tanto existe coincidencia de polos con ceros cuando los valores característicos de  $A$  coinciden con los de  $A - BqCA^\alpha$ . La función de transferencia del sistema original se puede calcular como se muestra en la ecuación (4.3.1)

$$C(sI - A)^{-1} B + D = \frac{q^{-1} |sI - A + BqCA^\alpha|}{s^\alpha |sI - A|} \tag{4.3.1}$$

De la ecuación anterior se puede observar que no se requiere invertir una matriz para obtener la función de transferencia del sistema original.

## 4.4 Ejemplo.

A continuación se muestra un sistema definido en el espacio de estados como sigue:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

Al derivar  $n$  veces la salida de la ecuación (4.4.1) y usando la ecuación  $\dot{x} = Ax + Bu$ , resulta el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned} y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x, \\ y^{(1)} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x + u, \\ y^{(2)} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} x + u + u^{(1)} \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

Ahora se determinan los parámetros  $\alpha$  y  $q^{-1}$  cuando  $D = 0$ , entonces,  $\alpha = i$  si  $CA^{i-1}B \neq 0$  y  $CA^jB = 0$  en el intervalo  $0 \leq j < i - 1$ , por lo tanto  $\alpha = 1$ ,  $q^{-1} = 1$  y el sistema inverso queda como se muestra en la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} y^{(1)}, \\ u &= y^{(1)} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

La función de transferencia del sistema puede calcularse como se muestra en la siguiente ecuación:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{q^{-1} |sI - A + BqCA^\alpha|}{s^\alpha |sI - A|} = \frac{s + 2}{s(s + 1)} \quad (4.4.4)$$

Los valores característicos de la matriz  $A$  son diferentes de los valores característicos de la matriz  $(A - BqCA^\alpha)$ , y por lo tanto no existe coincidencia de polos con ceros, con lo cual, el sistema es controlable y observable.

## 4.5 Ejemplo 2.

Ahora se realiza un ejemplo donde el sistema en el espacio de estados tiene coincidencia de polos con ceros en su función de transferencia. El sistema está definido en el espacio de estados como se muestra en la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} x \end{aligned} \quad (4.5.1)$$

Al derivar  $n$  veces la salida de la ecuación (4.5.1) y usando la ecuación  $\dot{x} = Ax + Bu$ , resulta el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned} y &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} x, \\ y^{(1)} &= \begin{bmatrix} -2 & -4 \end{bmatrix} x + u, \\ y^{(2)} &= \begin{bmatrix} 4 & 8 \end{bmatrix} x - 2u + u^{(1)} \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

Ahora se determinan los parámetros  $\alpha$  y  $q^{-1}$  cuando  $D = 0$ , entonces,  $\alpha = i$  si  $CA^{i-1}B \neq 0$  y  $CA^jB = 0$  en el intervalo  $0 \leq j < i - 1$ , por lo tanto  $\alpha = 1$ ,  $q^{-1} = 1$  y el sistema inverso resulta como se muestra en la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} y^{(1)}, \\ u &= y^{(1)} - \begin{bmatrix} -2 & -4 \end{bmatrix} x \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

La función de transferencia del sistema puede calcularse como se muestra en la siguiente ecuación:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{q^{-1} |sI - A + BqCA^\alpha|}{s^\alpha |sI - A|} = \frac{s + 2}{(s + 2)(s + 2)} \quad (4.5.4)$$

De la ecuación (4.5.4) se observa que existen valores característicos de la matriz  $A$  idénticos a los valores característicos de la matriz  $(A - BqCA^\alpha)$ , con lo cual el sistema puede resultar no controlable o no observable debido a que existe coincidencia de polos con ceros en su función de transferencia.

# Capítulo 5

## Aplicación.

En este capítulo se implementa la teoría descrita en los capítulos anteriores en una aplicación, desarrollando las estrategias de control retroalimentación de salida y retroalimentación de estado las cuales son técnicas que pertenecen al control clásico y al control moderno respectivamente. Se estudian las propiedades de controlabilidad y observabilidad para el sistema en lazo abierto y en lazo cerrado relacionándose la coincidencia de polos con ceros en la función de transferencia como la no controlabilidad o la no observabilidad del sistema. Finalmente se realiza una comparación entre estas dos técnicas de control.

A continuación se muestra una de las aplicaciones que se estudiará en este capítulo, el sistema fue obtenido de [3], el sistema consta de dos resortes, dos amortiguadores y una placa como se muestra en la figura (5.1), se considera la salida del sistema como el promedio de los desplazamientos  $(x_1 + x_2)/2$ , donde cada uno de ellos es tomado con respecto de la posición del resorte sin deformación. El sistema se define en el espacio de estados como se muestra en la ecuación (5.0.1) y la función de transferencia del sistema se muestra en la ecuación (5.0.2).

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -\frac{k_1}{c_1} & 0 \\ 0 & -\frac{k_2}{c_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2c_1} \\ \frac{1}{2c_2} \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5.0.1}$$

$$G_P(s) = \frac{0.25((k_1 + k_2) + (c_1 + c_2)s)}{k_1 k_2 + (c_1 k_2 + c_2 k_1)s + c_1 c_2 s^2} \quad (5.0.2)$$

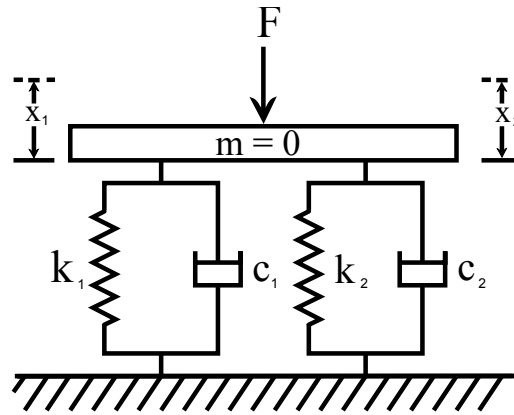


Figura 5.1: Sistema que consta de dos resortes, dos amortiguadores y una placa.

El sistema es controlable y observable si se satisface la siguiente ecuación:

$$\frac{k_1}{c_1} \neq \frac{k_2}{c_2} \quad (5.0.3)$$

Con la finalidad de presentar simulaciones realizadas en MatLab, se seleccionan los siguientes valores de parámetros:  $k_1 = 2$ ,  $c_1 = 1$ ,  $k_2 = 5$ ,  $c_2 = 3$ . De tal forma que las ecuaciones (5.0.1) y (5.0.2) se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -\frac{2}{1} & 0 \\ 0 & -\frac{5}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.0.4)$$

$$G_P(s) = \frac{0.25(7 + 4s)}{10 + 11s + 3s^2} = \frac{\frac{1}{12}(4s + 7)}{(s + 2)(s + \frac{5}{3})} \quad (5.0.5)$$

El sistema de lazo abierto en la ecuación (5.0.4) es controlable y observable, lo cual se muestra en las ecuaciones (5.0.6) y (5.0.7).



El sistema de lazo abierto es controlable debido a que  $\det(U) \neq 0$  como se muestra en la ecuación (5.0.6)

$$\det(U) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{6} & -\frac{5}{18} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (5.0.6)$$

El sistema de lazo abierto es observable debido a que  $\det(V) \neq 0$  como se muestra en la ecuación (5.0.7)

$$\det(V) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{5}{6} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (5.0.7)$$

Al sistema de lazo abierto controlable y observable se le aplica una técnica de control clásico y después una técnica de control moderno para determinar pérdida de controlabilidad u observabilidad y comparar resultados.

## 5.1 Retroalimentación de salida.

Se estudian dos casos para el sistema de lazo cerrado mostrado en la figura (5.2), el primero cuando el controlador es proporcional y el segundo cuando el controlador es dinámico. Se analiza la coincidencia de polos con ceros en la función de transferencia de lazo cerrado para ambos casos.

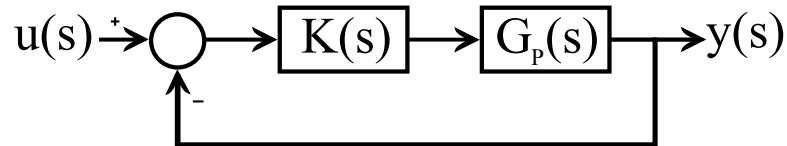


Figura 5.2: Sistema en lazo cerrado con retroalimentación unitaria.

### 5.1.1 Control proporcional.

La función de transferencia de lazo cerrado cuando el controlador es proporcional se muestra en la ecuación (5.1.1)

$$G_{LC}(s) = \frac{K_P G_P(s)}{1 + K_P G_P(s)} = \frac{\frac{1}{12}(4s + 7)K_P}{s^2 + \left(\frac{11}{3} + \frac{1}{3}K_P\right)s + \left(\frac{10}{3} + \frac{7}{12}K_P\right)} \quad (5.1.1)$$

El sistema anterior se puede representar en el espacio de estados mediante las matrices que se muestran en la ecuación (5.1.2):

$$A_{LC} = \begin{bmatrix} \frac{11}{3} + \frac{1}{3}K_P & \frac{10}{3} + \frac{7}{12}K_P \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B_{LC} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C_{LC} = \left[ \frac{1}{3}K_P \quad \frac{7}{12}K_P \right], D_{LC} = 0 \quad (5.1.2)$$

El sistema de lazo cerrado es controlable debido a que  $U_{LC}$  es una matriz cuadrada y el  $\det(U_{LC}) \neq 0$  como se muestra en la ecuación (5.1.3),

$$\det(U_{LC}) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{11}{3} + \frac{1}{3}K_P \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad (5.1.3)$$

El sistema de lazo cerrado es observable debido a que  $V_{LC}$  es una matriz cuadrada y el  $\det(V_{LC}) \neq 0$  como se muestra en la ecuación (5.1.4),

$$\det(V_{LC}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{3}K_P & \frac{7}{12}K_P \\ \frac{7}{12}K_P + \frac{1}{3}K_P\left(\frac{11}{3} + \frac{1}{3}K_P\right) & \frac{1}{3}K_P\left(\frac{10}{3} + \frac{7}{12}K_P\right) \end{vmatrix} = -\frac{295}{432}K_P^2 \quad (5.1.4)$$

El sistema es controlable y observable en lazo abierto y en lazo cerrado.

En la figura (5.3) se muestra la gráfica del Lugar Geométrico de las Raíces (LGR) que muestra todas las posibles ubicaciones donde el control proporcional puede ubicar a los polos del sistema con lo cual cambia la respuesta en el tiempo como se muestra en la figura (5.4).

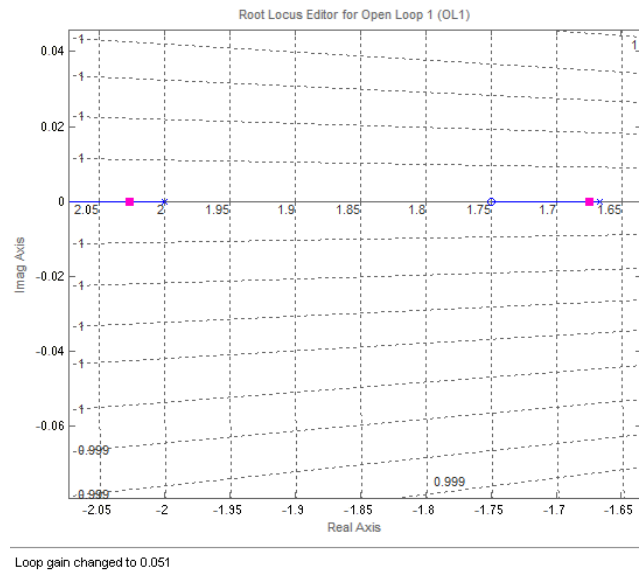


Figura 5.3: Lugar Geométrico de las Raíces.

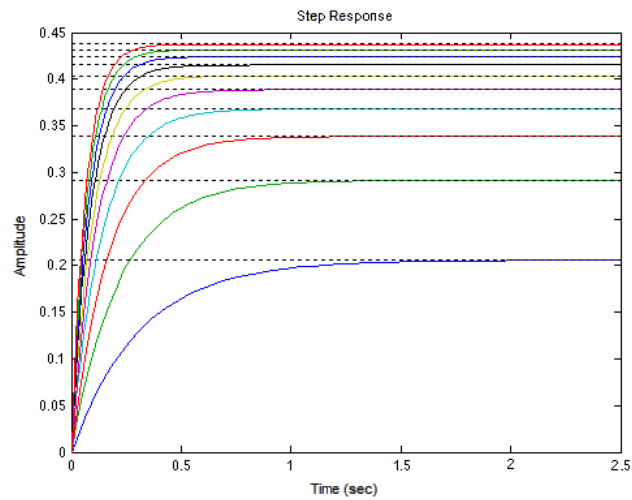


Figura 5.4: Respuesta del sistema al escalón para valores de controlador  $K = 0, 1, \dots, 10$ .

El sistema de lazo cerrado  $G_{LC}(s)$  de la figura (5.2) es controlable y observable al aplicar un control proporcional dado que el sistema de lazo abierto  $G_P(s)$  también es controlable y observable además de que no existe coincidencia de polos con ceros en su función de transferencia.

### 5.1.2 Control dinámico.

El sistema de lazo cerrado mostrado en la figura (5.2) puede resultar no controlable o no observable al aplicar un controlador dinámico como el que se muestra en la ecuación (5.1.5).

$$K(s) = \frac{s + a}{s + b} \quad (5.1.5)$$

De acuerdo a los lemas presentados en el capítulo 2. La función de transferencia del sistema de lazo cerrado tiene coincidencia de polos con ceros cuando  $K(s)G_P(s)$  presenta coincidencia de polos con ceros, es decir cuando el denominador del controlador coincide con alguno de los ceros del sistema o cuando el numerador del controlador coincide con alguno de los polos del sistema. El sistema de lazo cerrado presenta coincidencia de polos con ceros cuando alguno de los parámetros del controlador toma alguno de los siguientes valores:

$$a = \frac{k_1}{c_1} = 2, \quad a = \frac{k_2}{c_2} = \frac{5}{3}, \quad b = \frac{k_1 + k_2}{c_1 + c_2} = \frac{7}{4} \quad (5.1.6)$$

En los siguientes tres puntos se muestra el análisis de controlabilidad y de observabilidad cuando los parámetros del controlador tienen los valores mostrados en la ecuación (5.1.6)

1. Cuando  $a = 2$  y  $b = 1$ . La función de transferencia de lazo cerrado es la que se muestra en la ecuación (5.1.7)

$$G_{LC}(s) = \frac{K(s)G_P(s)}{1 + K(s)G_P(s)} = \frac{\frac{1}{12}(4s + 7)(s + 2)}{\left(s + \frac{3}{2}\right)\left(s + \frac{3}{2}\right)(s + 2)} = \frac{\frac{1}{3}s^2 + \frac{5}{4}s + \frac{7}{6}}{s^3 + 5s^2 + \frac{33}{4}s + \frac{9}{2}} \quad (5.1.7)$$

El sistema anterior de la ecuación (5.1.7) se puede representar en el espacio de estados mediante las matrices que se muestran en la ecuación (5.1.8):

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -\frac{33}{4} & -\frac{9}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \left[ \frac{1}{3} \quad \frac{5}{4} \quad \frac{7}{6} \right], D = 0 \quad (5.1.8)$$

El sistema de la ecuación (5.1.8) es controlable debido a que  $U_{LC1}$  es una matriz cuadrada y el  $\det(U_{LC1}) \neq 0$  como se muestra en la ecuación (5.1.9),

$$\det(U_{LC1}) = \begin{vmatrix} 1 & -5 & \frac{67}{4} \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (5.1.9)$$

El sistema de la ecuación (5.1.8) es no observable debido a que  $V_{LC1}$  es una matriz cuadrada y el  $\det(V_{LC1}) = 0$  como se muestra en la ecuación (5.1.10),

$$\det(V_{LC1}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{5}{4} & \frac{7}{6} \\ -\frac{5}{12} & -\frac{19}{12} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{31}{16} & \frac{15}{8} \end{vmatrix} = 0 \quad (5.1.10)$$

A continuación se muestra en las figuras (5.5) a (5.7) los tres estados que corresponden al sistema controlable y no observable obtenido con las matrices de la ecuación (5.1.8).

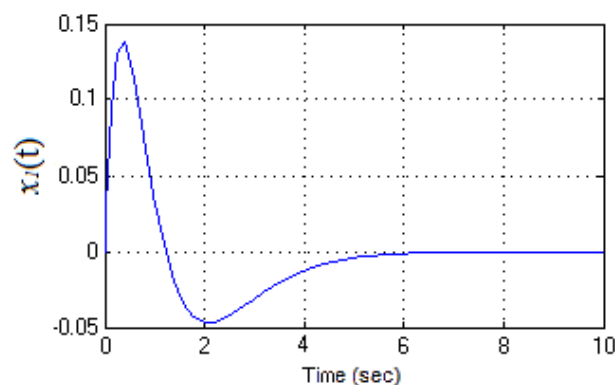


Figura 5.5: Estado número uno del sistema de lazo cerrado.

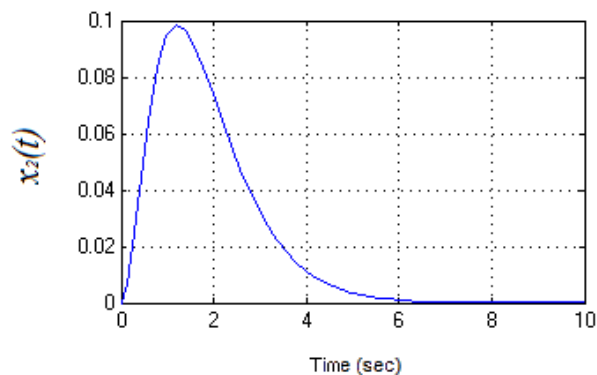


Figura 5.6: Estado número dos del sistema de lazo cerrado.

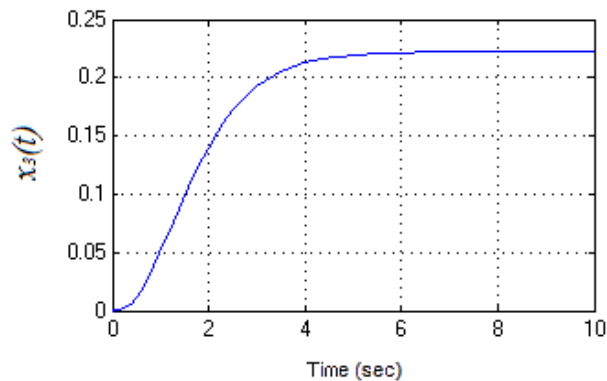


Figura 5.7: Estado número tres del sistema de lazo cerrado.

2. Cuando  $a = 5/3$  y  $b = 1$ . La función de transferencia de lazo cerrado es la que se muestra en la ecuación (5.1.11)

$$G_{LC}(s) = \frac{K(s)G_P(s)}{1 + K(s)G_P(s)} = \frac{\frac{1}{3}s^2 + \frac{41}{36}s + \frac{35}{36}}{s^3 + 5s^2 + \frac{293}{36}s + \frac{155}{36}} = \frac{\frac{1}{12}(4s + 7)(s + \frac{5}{3})}{(s + \frac{5}{3} + \frac{1}{6}\sqrt{7})(s + \frac{5}{3} - \frac{1}{6}\sqrt{7})(s + \frac{5}{3})} \quad (5.1.11)$$

La función de transferencia de la ecuación (5.1.11) se representa en el espacio de estados mediante las matrices que se muestran en la ecuación (5.1.12)

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -\frac{293}{36} & -\frac{155}{36} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \left[ \frac{1}{3} \quad \frac{41}{36} \quad \frac{35}{36} \right], D = 0 \quad (5.1.12)$$

El sistema de la ecuación (5.1.12) es controlable debido a que  $U_{LC2}$  es una matriz cuadrada y el  $\det(U_{LC2}) \neq 0$  como se muestra en la ecuación (5.1.13),

$$\det(U_{LC2}) = \begin{vmatrix} 1 & -5 & \frac{607}{36} \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (5.1.13)$$

El sistema de la ecuación (5.1.12) es no observable debido a que  $V_{LC2}$  es una matriz cuadrada y el  $\det(V_{LC2}) = 0$  como se muestra en la ecuación (5.1.14),

$$\det(V_{LC2}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{41}{36} & \frac{35}{36} \\ -\frac{19}{36} & -\frac{47}{27} & -\frac{155}{108} \\ \frac{97}{108} & \frac{3707}{1296} & \frac{2945}{1296} \end{vmatrix} = 0 \quad (5.1.14)$$

A continuación se muestra en las figuras (5.8) a (5.10) los tres estados que corresponden al sistema controlable y no observable obtenido con las matrices de la ecuación (5.1.12).

3. Cuando  $a = 1$  y  $b = 7/4$ . La función de transferencia de lazo cerrado es la que se muestra en la ecuación (5.1.15)

$$G_{LC}(s) = \frac{K(s)G_P(s)}{1 + K(s)G_P(s)} = \frac{\frac{1}{12}s^2 + \frac{11}{48}s + \frac{7}{48}}{\frac{1}{4}s^3 + \frac{23}{16}s^2 + \frac{8}{3}s + \frac{77}{48}} = \frac{\frac{1}{12}(s+1)(s+\frac{7}{4})}{(s+2+\frac{1}{3}\sqrt{3})(s+2-\frac{1}{3}\sqrt{3})(s+\frac{7}{4})} \quad (5.1.15)$$

La función de transferencia de la ecuación (5.1.15) se representa en el espacio de estados mediante las matrices que se muestran en la ecuación (5.1.16)

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{23}{4} & -\frac{32}{3} & -\frac{77}{12} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \left[ \frac{1}{3} \quad \frac{11}{12} \quad \frac{7}{12} \right], D = 0 \quad (5.1.16)$$

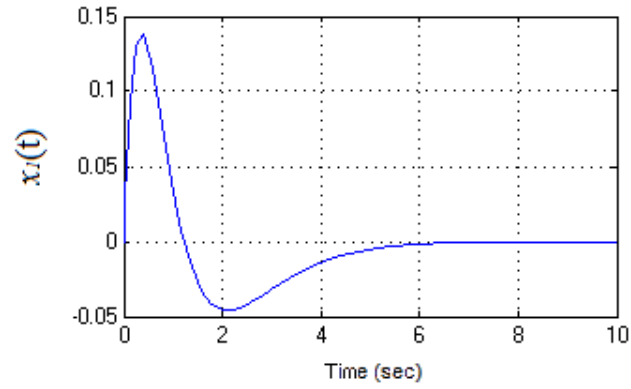


Figura 5.8: Estado número uno del sistema de lazo cerrado.

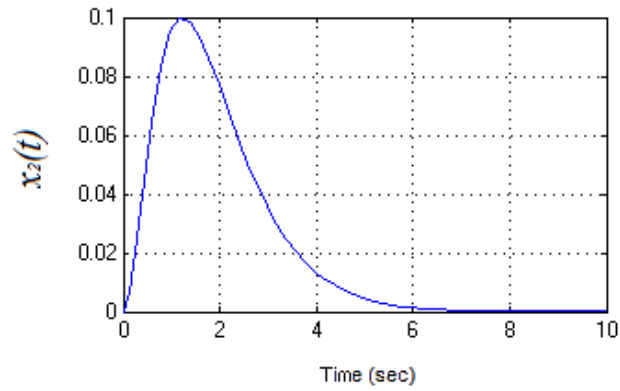


Figura 5.9: Estado número dos del sistema de lazo cerrado.

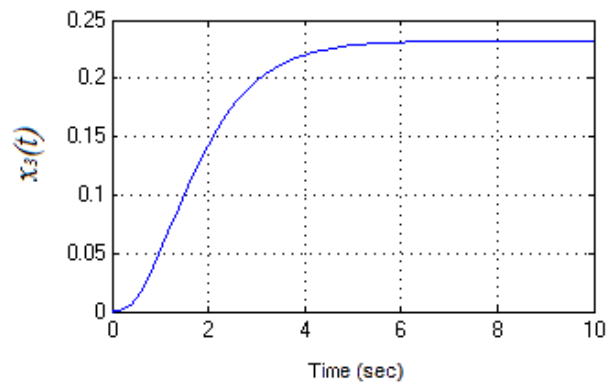


Figura 5.10: Estado número tres del sistema de lazo cerrado.



El sistema de la ecuación (5.1.16) es controlable debido a que  $U_{LC3}$  es una matriz cuadrada y el  $\det(U_{LC3}) \neq 0$  como se muestra en la ecuación (5.1.17),

$$\det(U_{LC3}) = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{23}{4} & \frac{1075}{48} \\ 0 & 1 & -\frac{23}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (5.1.17)$$

El sistema de la ecuación (5.1.16) es no observable debido a que  $V_{LC3}$  es una matriz cuadrada y el  $\det(V_{LC3}) = 0$  como se muestra en la ecuación (5.1.18),

$$\det(V_{LC3}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{11}{12} & \frac{7}{12} \\ -1 & -\frac{107}{36} & -\frac{77}{36} \\ \frac{25}{9} & \frac{307}{36} & \frac{77}{12} \end{vmatrix} = 0 \quad (5.1.18)$$

A continuación se muestra en las figuras (5.11) a (5.13) los tres estados que corresponden al sistema controlable y no observable obtenido con las matrices de la ecuación (5.1.16).

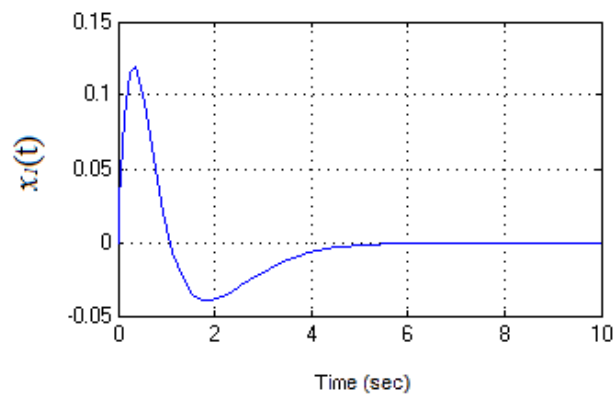


Figura 5.11: Estado número uno del sistema de lazo cerrado.

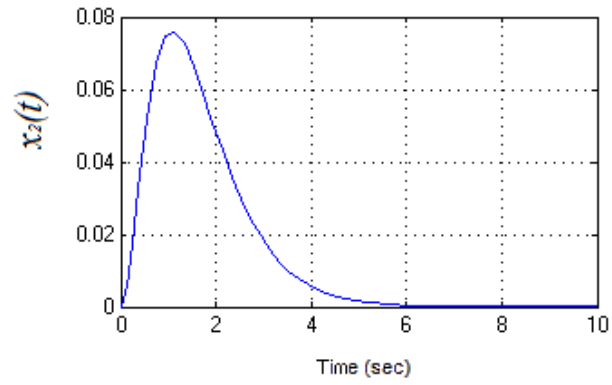


Figura 5.12: Estado número dos del sistema de lazo cerrado.

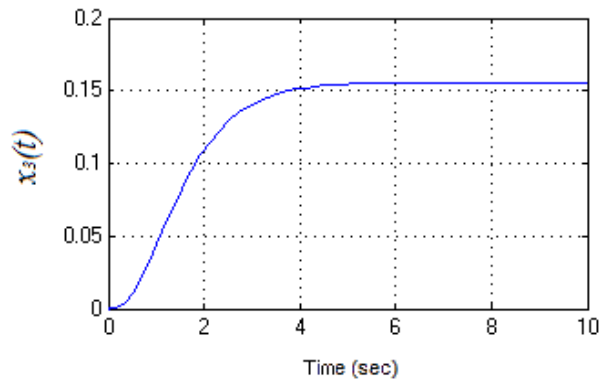


Figura 5.13: Estado número tres del sistema de lazo cerrado.

El sistema de lazo abierto controlable y observable puede resultar no controlable o no observable de lazo cerrado al aplicar un controlador dinámico. Al existir coincidencia de polos con ceros en la función de transferencia el sistema resulta no controlable o no observable.

En los tres casos mostrados anteriormente, un sistema controlable y observable de lazo abierto resulta controlable y no observable en lazo cerrado debido a la ganancia del controlador. Se mostraron las gráficas correspondientes a los estados del sistema para cada uno de los casos, y se puede observar que los estados del sistema tienen un comportamiento diferente aunque el sistema sea controlable y no observable en los tres casos.

## 5.2 Retroalimentación de estado.

En la sección anterior se aplicó una técnica de control por retroalimentación de salida a un sistema controlable y observable de lazo abierto, ahora en esta sección se aplica retroalimentación de estado al mismo sistema.

Mediante retroalimentación de estado se puede ubicar a los polos del sistema en el plano complejo para tener alguna configuración deseada de los polos, con lo cual se tiene algún comportamiento deseado del sistema. Es conocido que retroalimentación de estado no afecta a la controlabilidad del sistema, en otras palabras, si el sistema de lazo abierto es controlable también será controlable el sistema retroalimentado de estado, además si el sistema es controlable de rango completo entonces todos los polos del sistema pueden ser asignados arbitrariamente, sin embargo, aunque el sistema de lazo abierto sea observable, el sistema retroalimentado de estado puede resultar no observable y por lo tanto existe coincidencia de polos con ceros en su función de transferencia. El sistema de lazo abierto está definido en el espacio de estados como se

muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -\frac{2}{1} & 0 \\ 0 & -\frac{5}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

La función de transferencia del sistema en lazo abierto es:

$$G_P(s) = \frac{0.25(7 + 4s)}{10 + 11s + 3s^2} \quad (5.2.2)$$

Al aplicar retroalimentación de estado al sistema de la ecuación (5.2.1) para un valor de  $k = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$  resulta el siguiente sistema:

$$\dot{x}_f = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{23}{12} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix} r, \quad y_f = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} x. \quad (5.2.3)$$

La función de transferencia del sistema de la ecuación (5.2.3) es:

$$G_f(s) = C_f (sI - A_f)^{-1} B_f = \frac{4(s + \frac{7}{4})}{(s + \frac{8}{3})(s + \frac{7}{4})} \quad (5.2.4)$$

Como se puede observar en la ecuación (5.2.4) el sistema es estable y existe coincidencia de polos con ceros en su función de transferencia y por lo tanto el sistema con retroalimentación de estado resulta controlable y no observable como se muestra en las ecuaciones (5.2.5) y (5.2.6) respectivamente.

El sistema  $G_f(s)$  es controlable ya que en la ecuación (5.2.5),  $U_f$  es una matriz cuadrada y el  $\det(U_f) \neq 0$ .

$$\det(U_f) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{11}{8} \\ \frac{1}{6} & -\frac{29}{72} \end{vmatrix} = \frac{1}{36} \quad (5.2.5)$$

El sistema  $G_f(s)$  es no observable ya que en la ecuación (5.2.6),  $V_f$  es una matriz cuadrada y el  $\det(V_f) = 0$ .

$$\det(V_f) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} \end{vmatrix} = 0. \quad (5.2.6)$$

La retroalimentación de estado puede provocar que el sistema pierda observabilidad, esto sucede para algunos valores del controlador debido a que los polos del sistema pueden ser movidos a la misma posición de algún cero con lo cual existe coincidencia de polos y ceros en su función de transferencia.

# Capítulo 6

## Conclusiones

### 6.1 Conclusiones.

Finalmente en este capítulo se presentan las conclusiones de este trabajo, las cuales se describen en los siguientes puntos:

- Se realizó un estudio de las propiedades de controlabilidad y observabilidad de sistemas LTI en relación con la coincidencia de polos y ceros en su función de transferencia, ya que al existir coincidencia de polos con ceros el sistema resulta no controlable o no observable.
- Se estudiaron sistemas de lazo abierto, sistemas con retroalimentación de salida y sistemas con retroalimentación de estado, analizando sus propiedades de controlabilidad y de observabilidad.
- Se presentaron dos lemas relacionados con la coincidencia de polos y ceros en la función de transferencia.
- Se determinó que el control proporcional es invariante a la controlabilidad y a la observabilidad, es decir si el sistema de lazo abierto es controlable y observable entonces el

sistema de lazo cerrado también será controlable y observable.

- Se analizó que puede existir pérdida de controlabilidad o de observabilidad al utilizar un control control dinámico, esto es debido a que puede existir coincidencia de polos con ceros en la función de transferencia del sistema de lazo cerrado.
- Se estudiaron medidas de controlabilidad y de observabilidad para determinar la distancia a la que se encuentra el sistema de volverse no controlable o no observable.
- Se estudió la propuesta de [10] para obtener la función de transferencia de un sistema representado en el espacio de estados sin la necesidad de calcular una matriz inversa, lo cual permite establecer condiciones para la coincidencia de polos con ceros determinando la controlabilidad y observabilidad del sistema.
- Se analizó que puede existir pérdida de observabilidad mediante retroalimentación de estado debido a que la ganancia puede mover los polos de tal forma que su ubicación coincide con ceros del sistema y por lo tanto en su función de transferencia existe coincidencia de polos con ceros.
- Se estudio una técnica para asignación de polos.

## 6.2 Trabajo a futuro.

- Encontrar una relación entre controlabilidad y estabilidad de sistemas LTI.
- Encontrar una manera de revisar la controlabilidad y observabilidad de un sistema definido como una función de transferencia sin la necesidad de tener que representarlo en espacio de estados.

# Bibliografía

- [1] B. D. O. Anderson y M. R. Gevers. "*On Multivariable Pole-Zero Cancellations and the Stability of Feedback Systems*". IEEE Transactions on Circuits and Systems, VOL. CAS-28, NO. 8. 1981.
- [2] S. Butman y R. Sivan, "*On Cancellations, Controllability and Observability*". IEEE Transactions on Automatic Control, California Institute of Technology, Pasadena, CA, USA. 1964.
- [3] C. T. Chen. "*Linear System Theory and Design*". Third Edition, Oxford University Press. 1999.
- [4] E. Emre. "*Pole-Zero Cancellations in Dynamic Feedback Systems*". 21st IEEE Conference on Decision and Control, Department of Electrical Engineering, Texas Tech University, Lubbock, Texas 79409. 1982.
- [5] R. N. Clark. "*Another Reason to Eschew Pole-Zero Cancellation*". IEEE Control Systems Magazine, Dept. of Electr. Eng., Washington Univ., Seattle, WA, USA. 1988.
- [6] S. Atadan. "*Pole-Zero Cancellation and State/Output Equations*". Proceedings of the 33rd Midwest Symposium on Circuits and Systems, Department of Mechanical Engineering, British Columbia University, Vancouver, BC. 1991.
- [7] S. F. Graebe y R. H. Middleton. "*Stable Open Loop Poles: To Cancel or not to Cancel?*". Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control, New Orleans, LA. 1995.
- [8] S. Kahne. "*Pole-Zero Cancellations in SISO Linear Feedback Systems*". IEEE Transactions on Education, Vol. 33, NO. 3. Dept. of Appl. Phys. and Electr. Eng., Oregon Grad. Center, Beaverton, OR. 1990.
- [9] R. W. Brockett, "*The Invertibility of Dynamic Systems With Application to Control*", Systems Research Center, Case Institute of Technology, Cleveland, Ohio, May, 1963.
- [10] R. W. Brockett, "*Poles, Zeros, and Feedback: State Space Interpretation*", IEEE Transactions on Automatic Control, April, 1965.



- [11] E. K. Chu. *"Optimization and Pole Assignment in Control System Design"*, Department of Mathematics and Statistics, Monash University, Clayton, Australia, 2001.
- [12] H. Kobayashi *"A Controllability Measure and Pole Assignment"*, Institute for System Dynamics and Control, Stuttgart University, West Germany,
- [13] J. Hickin, *"Pole Assignment in Single Input Linear Systems"*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-25, NO. 2, APRIL, 1980.
- [14] W. M. Wonham *"On Pole Assignment in Multi Input Controllable Linear Systems"*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-12, NO. 6, DECEMBER, 1967.
- [15] P. J. Antsaklis y A. N. Michael, *"Linear Systems"*, Mc Graw Hill, 1997.
- [16] K. Ogata *"Ingeniería de control moderna"*, Prentice Hall, Tercera Edición, 1998.
- [17] P. Seferlis, *"System Poles and Zeros Sensitivity for Dynamic Process Controllability"*, American Control Conference, Marriot Waterfront, Baltimore, MD, USA, 2010.
- [18] J. C. Willems y S. K. Mitter, *"Controllability, Observability, Pole Allocation and State Reconstruction"*, IEEE Transactions on Automatic Control, VOL. AC-16, NO. 6, DECEMBER 1971.
- [19] M. Tarokh, *"Measures for Controllability, Observability and Fixed Modes"*, IEEE Transactions on Automatic Control, August 1992.
- [20] M. Tarokh, *"Measuring How Far a Controllable System is from an Uncontrollable One"*, IEEE Transactions on Automatic Control, April 1986.
- [21] A. Domínguez, C. Elizondo, E. Alcorta, G. Romero, *"Pérdida De Controlabilidad U Observabilidad De Sistemas LTI En Lazo Cerrado"*, Congreso Nacional 2012 de la Asociación de México de Control Automático.
- [22] R. E. Kalman, *"Contributions to the Theory of Optimal Control"*, Vol. 5, 1960, pp.102-119.