

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



CLASIFICACIÓN DE CONSENSO DERIVADA DE  
MÉTODOS MULTICRITERIO APLICADOS AL  
ANÁLISIS ABC DE INVENTARIOS

POR

RAFAEL TORRES ESCOBAR

EN OPCIÓN AL GRADO DE

MAESTRÍA EN CIENCIAS

EN INGENIERÍA DE SISTEMAS

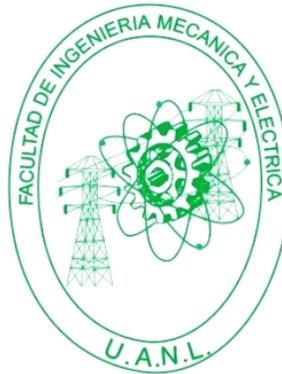
SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN

JUNIO 2012

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



CLASIFICACIÓN DE CONSENSO DERIVADA DE  
MÉTODOS MULTICRITERIO APLICADOS AL  
ANÁLISIS ABC DE INVENTARIOS

POR

RAFAEL TORRES ESCOBAR

EN OPCIÓN AL GRADO DE

MAESTRÍA EN CIENCIAS

EN INGENIERÍA DE SISTEMAS

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN

JUNIO 2012

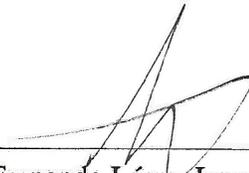
**Universidad Autónoma de Nuevo León**

**Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica**

**División de Estudios de Posgrado**

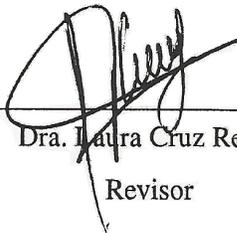
Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis «Clasificación de Consenso Derivada de Métodos Multicriterio Aplicados al Análisis ABC de Inventarios», realizada por el alumno Rafael Torres Escobar, con número de matrícula 1541912, sea aceptada para su defensa como opción al grado de Maestría en Ciencias en Ingeniería de Sistemas.

El Comité de Tesis



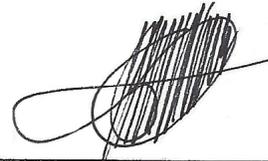
Dr. Fernando López Irarragorri

Director de tesis



Dra. Laura Cruz Reyes

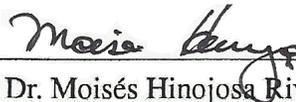
Revisor



Dr. Óscar Leonel Chacón Mondragón

Revisor

Vo. Bo.



Dr. Moisés Hinojosa Rivera

División de Estudios de Posgrado

San Nicolás de los Garza, Nuevo León, junio 2012

*A YAVÉ.*

*A mis padres  
Reynaldo y Julieta.*

# ÍNDICE GENERAL

---

<b>Agradecimientos</b>	<b>XVI</b>
<b>Resumen</b>	<b>XVIII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes . . . . .	1
1.1.1. Contextualización del tema . . . . .	1
1.1.2. Trabajos previos . . . . .	3
1.1.3. Descripción del problema científico . . . . .	4
1.2. Objetivos . . . . .	4
1.2.1. Objetivo general . . . . .	4
1.2.2. Objetivos específicos . . . . .	4
1.2.3. Tareas de investigación . . . . .	4
1.2.4. Resultados esperados de la investigación . . . . .	5
1.2.5. Novedad científica . . . . .	5
1.3. Estructura de la tesis . . . . .	6
1.3.1. Descripción del resto de los capítulos . . . . .	6

---

1.4. Conclusiones del capítulo . . . . .	7
<b>2. Marco Teórico</b>	<b>8</b>
2.1. Inventarios. . . . .	8
2.1.1. Complejidad de los inventarios . . . . .	9
2.1.2. Clases de inventarios . . . . .	11
2.1.3. Costos de los inventarios . . . . .	11
2.1.4. Distribución por Valor . . . . .	12
2.1.5. Análisis ABC . . . . .	13
2.2. Toma de Decisiones bajo Criterios Múltiples . . . . .	14
2.3. Introducción a la Optimización Multiobjetivo . . . . .	19
2.4. Métodos de clasificación . . . . .	27
2.4.1. Métodos de Clasificación Multicriterio. . . . .	28
2.5. Teorías Matemáticas de Consenso . . . . .	29
2.5.1. Tipos de clasificaciones para el problema de consenso . . . . .	32
2.6. Optimización Robusta . . . . .	34
2.7. Optimización con muchos objetivos (Many-Objective Optimization) . . . . .	37
2.8. Conclusiones. . . . .	38
<b>3. Formulación del problema</b>	<b>41</b>
3.1. Descripción del problema. . . . .	41
3.2. Estado del arte. . . . .	45
3.2.1. Análisis ABC Multicriterio . . . . .	46

---

3.2.2. Métodos basados en comités (ensembles) . . . . .	50
3.2.3. El problema de los comités de clasificadores (classifier ensembles)	52
3.2.4. El problema de los comités de agrupamientos(clustering ensembles)	55
3.3. Conclusiones. . . . .	65
<b>4. Metodología de apoyo a la decisión</b>	<b>67</b>
4.1. Artículos Fáciles y Difíciles de clasificar . . . . .	67
4.2. Modelo genérico de consenso . . . . .	69
4.3. Modelo matemático propuesto . . . . .	71
4.3.1. Conjuntos . . . . .	71
4.3.2. Datos . . . . .	72
4.3.3. Parámetros . . . . .	72
4.3.4. Variables de decisión . . . . .	72
4.3.5. Función Objetivo . . . . .	72
4.3.6. Otras restricciones . . . . .	73
4.3.7. Modelo matemático . . . . .	74
4.4. Determinación de la posibilidad de obtener un consenso confiable . . . . .	75
4.5. Generación variaciones. . . . .	75
4.6. Aplicación de modelo matemático . . . . .	77
4.6.1. Sin variaciones . . . . .	77
4.6.2. Con variaciones . . . . .	78
4.7. Conclusiones . . . . .	79

<b>5. Evaluación computacional</b>	<b>81</b>
5.1. Datos tomados de la literatura. . . . .	82
5.1.1. Descripción de los datos. . . . .	82
5.1.2. Dificultad de la clasificación de los artículos. . . . .	82
5.1.3. Generación de variaciones para los datos tomados de la literatura.	85
5.1.4. Clasificación de consenso sin variaciones para los datos de la literatura. . . . .	87
5.1.5. Clasificación de consenso para los datos de la literatura con varia- ciones. . . . .	88
5.2. Datos tomados de un caso de estudio real. . . . .	90
5.2.1. Descripción de los datos. . . . .	90
5.2.2. Dificultad de la clasificación de los artículos. . . . .	91
5.2.3. Generación de variaciones para los datos del caso de estudio. . . . .	93
5.2.4. Trabajos previos para la clasificación de consenso de los datos del caso de estudio. . . . .	94
5.2.5. Clasificación de consenso sin variaciones para los datos del caso de estudio. . . . .	96
5.2.6. Clasificación de consenso con variaciones para los datos del caso de estudio. . . . .	98
5.3. Comparaciones entre consenso obtenido sin variaciones y con variaciones	99
5.4. Comparación de resultados del caso de estudio obtenido con la metodología propuesta . . . . .	100
5.5. Conclusiones. . . . .	101

---

<b>6. Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>103</b>
6.1. Conclusiones . . . . .	104
6.2. Trabajo Futuro . . . . .	105
<b>A. Datos tomados de la literatura</b>	<b>108</b>
<b>B. Datos del caso de estudio</b>	<b>111</b>
B.1. Clasificación de expertos . . . . .	114
<b>C. Clasificaciones de consenso para los datos de la literatura</b>	<b>118</b>
C.1. Sin variaciones . . . . .	118
C.2. Con variaciones . . . . .	119
<b>D. Clasificaciones de consenso para el caso de estudio</b>	<b>122</b>
D.1. Sin variaciones . . . . .	122
D.2. Con variaciones . . . . .	124
<b>E. Variaciones para los datos tomados de la literatura</b>	<b>127</b>
E.1. Generación de variaciones con dos movimientos a la vez . . . . .	127
E.2. Generación de variaciones con tres movimientos a la vez . . . . .	128
E.3. Generación de variaciones con seis movimientos a la vez . . . . .	128
<b>Bibliografía</b>	<b>130</b>
<b>Ficha autobiográfica</b>	<b>147</b>

# ÍNDICE DE FIGURAS

---

2.1. Distribución por valor. . . . .	14
2.2. Ramas de la Toma de Decisiones Multicriterio . . . . .	16
3.1. Clasificación representativa . . . . .	44
3.2. Variaciones . . . . .	44
5.1. Porcentaje de los artículos en cada categoría para la clasificación de consenso con variaciones con los datos tomados de [35]. . . . .	89

# ÍNDICE DE TABLAS

---

4.1. Artículos por categoría $k_i, i = 1, 2, 3$ de acuerdo a los métodos $M_j, j = 1, \dots, 6$ usados en [35]. . . . .	68
4.2. Ejemplo sobre la dificultad de clasificación de un artículo. . . . .	69
4.3. Representación genérica de una variación . . . . .	76
(a). Matriz hipotética sobre la que hace una variación . . . . .	76
(b). Variación de la matriz hipotética original . . . . .	76
4.4. Movimientos al mismo tiempo que se tomarán en cuenta para el caso de $n = 6$ métodos. . . . .	78
5.1. Artículos fáciles y difíciles de clasificar para los datos de la literatura [35].	83
5.2. Frecuencia por categoría para los artículos considerados muy poco fáciles de clasificar, datos de la literatura [35]. . . . .	85
5.3. Número de variaciones obtenidas para los datos de la literatura. . . . .	86
5.4. Variaciones con un movimiento a la vez . . . . .	86
(b). Variación en el primer elemento elemento . . . . .	86
(c). Variación en el segundo elemento elemento . . . . .	86
(d). Variación en el segundo elemento elemento . . . . .	86

5.5. Cantidad de artículos en el consenso $Z_1$ de los datos de la literatura sin realizar variaciones. . . . .	87
5.6. Cantidad de artículos en cada categoría de los datos de la literatura [35]. . . . .	88
5.7. Resultados del consenso $Z_2$ obtenido mediante la realización de variaciones para los datos de la literatura [35]. . . . .	89
5.8. Artículos por categoría de acuerdo a los métodos usados en [7] para obtener un consenso. . . . .	91
5.9. Artículos fáciles y difíciles de clasificar para los datos del caso de estudio [7]. . . . .	92
5.10. Número de variaciones obtenidas para los datos del caso de estudio. . . . .	93
5.11. Porcentajes obtenidos en el consenso para los datos del caso de estudio mediante los métodos de [7] y [61]. . . . .	96
5.12. Porcentajes mínimos y máximos aceptables para cada categoría $k_i, i = 1, 2, 3$ . . . . .	96
5.13. Resumen de las proporciones de artículos por cada categoría $k_i, i = 1, 2, 3$ sin realizar variaciones en el caso de estudio [7]. . . . .	97
5.14. Comparación de los resultados del consenso obtenido para los datos del caso de estudio sin realizar variaciones. . . . .	97
5.15. Resumen de las proporciones de artículos obtenidas mediante la metodología de consenso propuesta en esta tesis por cada categoría $k_i, i = 1, 2, 3$ con variaciones para el caso de estudio de [7]. . . . .	98
5.16. Comparación de los resultados del consenso obtenido con la metodología de esta tesis para los datos del caso de estudio con variaciones. . . . .	98
5.17. Número de artículos que aparecen en ambas soluciones por cada categoría $k_i, i = 1, 2, 3$ para el caso de estudio. . . . .	99

5.18. Artículos que están en la misma categoría en los consensos y en la clasificación de los expertos. . . . .	100
A.1. Tabla de resultados obtenidos por seis métodos multicriterio para el análisis ABC [35] . . . . .	108
B.1. Datos usados para el caso de estudio. . . . .	111
B.2. Clasificaciones de los artículos del caso de estudio por parte de los expertos. . . . .	114
C.1. Consenso de la literatura sin variaciones. . . . .	118
C.2. Consenso de los datos de la literatura con variaciones. . . . .	120
D.1. Consenso del caso de estudio sin variaciones. . . . .	122
D.2. Consenso del caso de estudio con variaciones. . . . .	124
E.1. Variaciones con dos movimientos a la vez . . . . .	128
(b). Variación en el primer elemento elemento . . . . .	128
(c). Variación en el segundo elemento elemento . . . . .	128
(d). Variación en el segundo elemento elemento . . . . .	128
E.2. Variaciones con tres movimientos a la vez . . . . .	129
(b). Variación en el primer elemento elemento . . . . .	129
(c). Variación en el segundo elemento elemento . . . . .	129
(d). Variación en el segundo elemento elemento . . . . .	129
E.3. Variaciones con seis movimientos a la vez . . . . .	129
(b). Variación en el primer elemento elemento . . . . .	129

---

(c). Variación en el segundo elemento elemento . . . . .	129
(d). Variación en el segundo elemento elemento . . . . .	129

# ÍNDICE DE ALGORITMOS

---

4.1. Variación . . . . .	77
--------------------------	----

# AGRADECIMIENTOS

---

Agradezco a YAVÉ por permitirme caminar a través del sendero de la Vida, aprendiendo de todas las cosas y las personas que he encontrado en mi camino. Agradezco su infinita misericordia al dejarme escalar otra montaña para ver las extraordinarias obras de su más preciosa creación que es el Ser Humano, quien a pesar de los importantes avances que ha tenido en los últimos 60 años sigue siendo como un diminuto grano de arena en el espacio.

A mis Padres por motivarme a seguir adelante cada vez que escucho la historia de sus vidas, siempre me imagino esos hechos y mi admiración por ellos es inmensa. Agradezco los consejos y comentarios que me hicieron durante el transcurso de la maestría y por creer en mí cada día. Les agradezco por hacerme sentir como en casa a pesar de la distancia. Agradezco a mi hermana Claudia Janett por sus palabras de aliento, también expreso mi agradecimiento a mis sobrinos Éxal y Emilio por ser tan simpáticos cuando llegaba a casa. A mi Familia en general por los ánimos y saludos que me enviaban. Por compartir momentos alegres y por el apoyo que sentía cuando podíamos platicar.

Al Posgrado en Ingeniería de Sistemas por permitirme ingresar al programa de maestría. Esta oportunidad, me enfrentó a grandes retos personales que me hicieron ver las situaciones y problemas desde una perspectiva diferente. Muchas gracias PISIS.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por la beca de manutención durante los cuatro semestres, sin los cuales hubiera sido imposible realizar estos estudios. Agradezco también al CONACyT por la beca mixta otorgada para realizar

una estancia de investigación en el departamento de Industrias de la Universidad Técnica Federico Santa María, Campus Vitacura, en Santiago de Chile.

Agradezco a la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica por la beca de inscripción y colegiatura para tomar los cursos de maestría, además agradezco el apoyo que también me proporcionó para la realización de la estancia de investigación en la Universidad Técnica Federico Santa María, Campus Vitacura, en Santiago de Chile.

Estoy agradecido con mi Director de Tesis el Dr. Fernando López Irraragorri por las orientaciones recibidas para la realización de la tesis. Mis agradecimientos para la Dra. Laura Cruz Reyes del Instituto Tecnológico de Ciudad Madero y para el Dr. Óscar Leonel Chacón Mondragón por sus comentarios y revisiones para hacer de esta tesis un mejor trabajo.

Mis agradecimientos especiales para el Dr. Luis Acosta Espejo del Departamento de Industrias de la Universidad Técnica Federico Santa María (USM) en Santiago de Chile quien muy amablemente me recibió para realizar la estancia de investigación bajo su tutoría y consejos, agradezco también al Dr. Víctor Albornoz por ocuparse de que la estancia en la USM y en Santiago de Chile fuera muy agradable. Agradezco al Dr. Sebastián Maldonado de la Universidad de los Andes en Santiago de Chile por su tiempo ofrecido para tener una plática informal sobre el tema de mi tesis y de esta manera tener otra visión del problema.

A mis compañeros de maestría por compartir sus conocimientos, experiencias y preocupaciones. Gracias por sus consejos y ánimos. Agradezco a los profesores del PISIS por la exposición de sus conocimientos en las clases, así como la disponibilidad para contestar cualquier duda.

# RESUMEN

---

Rafael Torres Escobar.

Candidato para el grado de Maestría en Ciencias en Ingeniería de Sistemas.

Universidad Autónoma de Nuevo León.

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica.

Título del estudio:

## CLASIFICACIÓN DE CONSENSO DERIVADA DE MÉTODOS MULTICRITERIO APLICADOS AL ANÁLISIS ABC DE INVENTARIOS

Número de páginas: 147.

**OBJETIVOS Y MÉTODO DE ESTUDIO:** El objetivo de esta tesis consiste en proporcionar una clasificación de consenso cuando se tienen diversas soluciones proporcionadas por métodos multicriterio para el análisis ABC de inventarios. Cuando se observan soluciones diferentes (clasificaciones) de diversos métodos multicriterio para un mismo conjunto de artículos, el tomador de decisiones puede llegar a dudar sobre la veracidad de las soluciones que se le presentan. Así, se destaca la importancia de presentarle al tomador de decisiones una solución que mejor represente a un conjunto de soluciones previamente dadas por métodos multicriterio que se basan en el análisis ABC de inventarios y que además sea estable (robusta) ante pequeñas perturbaciones o posibles equivocaciones de los métodos multicriterio al realizar una clasificación de un artículo en una de las tres categorías A, B o

C. Proporcionarle una solución de consenso, hace que el tomador de decisiones se pueda concentrar en los artículos que son más difíciles de clasificar, dejando la clasificación de los artículos fáciles de clasificar a la metodología de consenso.

Se presentan dos conjuntos de datos, uno correspondiente a los datos comúnmente usados en la literatura ABC multicriterio que se usan para validar un nuevo método multicriterio y el otro conjunto de datos es tomado de un caso de estudio real en el que se tiene la clasificación dada por expertos para contrastar la calidad de las soluciones de la metodología propuesta en esta tesis. Sobre cada conjunto de datos se aplica un esquema utilizando variaciones y otro esquema sin generar variaciones.

CONTRIBUCIONES Y CONCLUSIONES: Las contribuciones más importantes de esta tesis se centran en la propuesta de una metodología para entregar una clasificación de consenso robusta que permita al tomador de decisiones centrar su atención en los artículos más difíciles de clasificar. Los resultados obtenidos a través de los experimentos numéricos mostraron resultados adecuados al entregar soluciones que se mantenían dentro de las proporciones de la regla empírica de Pareto. Además, la investigación sobre una clasificación de consenso derivada de clasificaciones ABC multicriterio estableció analogías con el problema de la partición central por lo que resultaría útil profundizar en métodos asociados con la partición central para incluirlos en la metodología como un trabajo futuro.

Firma del asesor: \_\_\_\_\_

Dr. Fernando López Irarragorri

## CAPÍTULO 1

# INTRODUCCIÓN

---

En este capítulo se describe el diseño de la investigación enfocada al desarrollo de una metodología para la clasificación robusta de artículos en inventario basada en el análisis ABC multicriterio, respecto a un conjunto de clasificaciones multicriterio dadas. Las secciones que la componen son:

**Antecedentes.** Se expone el contexto en el que se origina el problema científico, así como los antecedentes al problema, resultados previos que motivaron el desarrollo de ésta investigación. En esta sección también se describe el problema científico.

**Objetivos.** En esta sección encontramos el objetivo general y los objetivos específicos, así como los resultados esperados y la novedad científica. Las tareas de investigación también se exponen aquí.

**Estructura de la tesis.** Se describe brevemente el tema central del resto de los capítulos

**Conclusiones del capítulo.**

## 1.1 ANTECEDENTES

### 1.1.1 CONTEXTUALIZACIÓN DEL TEMA

En la administración de inventarios hay tres variables de decisión [135], estas variables se centran en la cantidad a ordenar, cuándo ordenar y qué artículos ordenar.

Así también, en base a las variables de decisión, hay tres decisiones importantes relacionadas con los sistemas de inventarios, las cuales son: decisiones de cantidad, decisiones de tiempo y decisiones de control.

Las decisiones de control son las que dan origen al uso de métodos que nos permitan asignar recursos económicos y de tiempo para el monitoreo de artículos en un inventario. Así, el análisis ABC para la clasificación de artículos en inventario ha sido ampliamente utilizado para diseñar las estrategias de control en los sistemas de inventarios.

El análisis ABC tradicionalmente utiliza el criterio del uso anual en dinero, el cual es la multiplicación del costo unitario del producto por el volumen utilizado en el año (demanda) de ese producto.

La clasificación de los artículos en un inventario bajo el método ABC se basa en el principio de Pareto [96, 97, 132, 133], conocido también como la regla del 80-20, esto quiere decir que pocos productos representan la mayor inversión en el inventario. Numéricamente nos dice que el 20 % de los artículos representan el 80 % de la inversión en inventario, lo cual conforma el primer grupo, etiquetado como grupo A, luego el grupo conformado por el 30 % de los artículos que representan aproximadamente el 15 % de la inversión en inventario se etiqueta como el grupo B, por último el 50 % de los artículos que apenas representa el 5 % del valor en inventario es etiquetado como el grupo C.

Hay un inconveniente con el enfoque tradicional del análisis ABC, ya que por lo general la clasificación de un artículo en A, B o C puede depender de otros factores [33, 38, 78], como: obsolescencia, tiempo de espera, criticidad, reemplazabilidad. Esto es debido a que por la naturaleza de los artículos que se quieren clasificar, se deberá de tener un control estricto sobre éstos.

Al incluir otros criterios para realizar el análisis ABC para los artículos en un inventario, es conveniente hacer uso de la toma de decisiones multicriterio [30, 31, 91, 108, 154], ya que de esta manera se puede hacer el análisis con todos los criterios de interés de manera conjunta, a diferencia del análisis ABC tradicional, en el que el análisis se haría separadamente para cada criterio.

### 1.1.2 TRABAJOS PREVIOS

El trabajo de [64] constituye el primer intento de abordar el análisis ABC bajo el enfoque multicriterio, la limitación del modelo es que solo es útil para dos criterios.

Posteriormente se aplicaron diversos métodos ABC multicriterio para la clasificación de artículos en inventario, los cuales, de acuerdo a [35] se agrupan en: métodos basados en el análisis de decisiones multicriterio, métodos basados en el análisis envolvente de datos y métodos basados en inteligencia artificial.

Existen trabajos importantes como los de [33, 114, 124] que desarrollan metodologías para una clasificación de artículos en un inventario bajo el análisis ABC multicriterio que facilitan al tomador de decisiones hacer la clasificación considerando más de dos criterios, pero aún no se responde a la cuestión sobre qué método preferir ante la discrepancia de los resultados arrojados por cada método.

Pero en un estudio comparativo realizado por [35] podemos ver que no existe un método superior dentro de los métodos ABC multicriterio para la clasificación de artículos en inventario, en ese trabajo se recomienda el desarrollo de un método de consenso que se aplique a los resultados obtenidos por diferentes métodos multicriterio de clasificación a un problema concreto.

Para el problema de encontrar una clasificación de consenso se enfatiza aquí el trabajo propuesto por [7] en el que se empieza a tomar la idea de encontrar un consenso ante discrepancias entre resultados de diversos métodos multicriterio como los que se exponen en [35]. Así el trabajo de [7] hace uso de una heurística que utiliza los conceptos de pesimista y optimista. En el trabajo de [7] también se expone una manera de obtener una clasificación de consenso utilizando el método de [61] en el que los resultados no son muy satisfactorios debido a que en algunos casos este método proporciona más de una clasificación para un mismo artículo; se hablará más de los métodos de [7] y [61] en la sección 5.2.4.

### 1.1.3 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA CIENTÍFICO

Partiendo de un conjunto de clasificaciones dadas por la aplicación de diversos métodos de clasificación multicriterio a artículos de un inventario, se desea derivar una recomendación (clasificación) robusta respecto a estas clasificaciones para el tomador de decisiones.

## 1.2 OBJETIVOS

### 1.2.1 OBJETIVO GENERAL

Desarrollar una metodología robusta, basada en resultados proporcionados por el análisis multicriterio de la decisión aplicado al método ABC para la clasificación de inventarios, para apoyar la toma de decisiones de la clasificación de artículos en la administración de inventarios.

### 1.2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Desarrollar una metodología y un método de apoyo a la decisión multicriterio para la clasificación de artículos en un inventario a partir de clasificaciones obtenidas por la aplicación de diversos métodos de clasificación multicriterio.
2. Validar el método empleando datos de prueba reportados en la literatura y un caso real.

### 1.2.3 TAREAS DE INVESTIGACIÓN

Para la realización de esta investigación se plantearon las siguientes tareas científicas que sistemáticamente nos conducirán a resultados que nos servirán para verificar nuestros resultados esperados. Las tareas básicamente son 7:

1. Familiarización con el tema de investigación.
2. Diseño de la investigación.
3. Revisión de bibliografía y del estado del arte.
4. Realización de la investigación.
5. Validación de la metodología y método propuesto.
6. Elaboración reporte de investigación.
7. Defensa de tesis.

#### 1.2.4 RESULTADOS ESPERADOS DE LA INVESTIGACIÓN

Desarrollando sistemáticamente las tareas científicas para esta investigación se desarrollará una metodología de apoyo a la decisión que incluye la obtención de una clasificación multicriterio de artículos que minimiza la discrepancia entre los resultados de distintos métodos ABC multicriterio, en específico se consideraran cuatro métodos ABC multicriterio.

Se implementará un prototipo que, apoyado en la metodología de una clasificación robusta ABC multicriterio para la clasificación de artículos en un inventario, nos de una clasificación con la mínima discrepancia entre los métodos ABC multicriterio que alimentarán los datos de entrada para la implementación computacional.

#### 1.2.5 NOVEDAD CIENTÍFICA

1. Una clasificación única que mejor represente a un conjunto de clasificaciones multicriterio para un conjunto de artículos en inventario. Además, esta clasificación es robusta debido a que se considerarán perturbaciones en los parámetros de entrada, y es la que tiene el menor número de discrepancias con respecto al conjunto de clasificaciones multicriterio como datos de entrada.

2. Se propone una metodología de consenso para el apoyo a la toma de decisiones en el problema de la clasificación multicriterio de artículos de un inventario.

## 1.3 ESTRUCTURA DE LA TESIS

### 1.3.1 DESCRIPCIÓN DEL RESTO DE LOS CAPÍTULOS

En el Capítulo 2 se describe el fundamento teórico para el desarrollo de una metodología robusta basada en el análisis ABC multicriterio.

En el Capítulo 3 se plantea el problema desde la perspectiva de la clasificación de consenso utilizando el enfoque de para exponer la necesidad de la utilización de métodos de consenso utilizando resultados previos de métodos multicriterio para clasificar artículos en inventario en base al análisis ABC.

En el Capítulo 4 se expondrán los métodos propuestos para dar solución al problema de la diversificación de resultados que se han obtenido con distintos métodos ABC multicriterio.

En el Capítulo 5 se llevará a cabo el análisis de los experimentos realizados con la metodología propuesta para realizar una clasificación ABC multicriterio robusta, así el método propuesto será respaldado con una metodología validada a través de la experimentación cuyos resultados analizados en este capítulo nos darán la antesala del Capítulo 6.

En el Capítulo 6 se presentarán las conclusiones en base a la experimentación y análisis de los resultados, para formular las recomendaciones pertinentes que orienten a la toma de decisiones referente a la clasificación de artículos en un inventario utilizando el análisis ABC multicriterio. También se presentan recomendaciones para trabajos futuros.

## 1.4 CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO

El análisis ABC para la clasificación de artículos en un inventario es una herramienta administrativa usada ampliamente para diseñar estrategias de control, de tal manera que los recursos asignados tanto de tiempo y dinero sean los adecuados. Cuando el administrador (tomador de decisiones) del inventario se interesa en la inclusión de otro criterio como la obsolescencia, criticidad, reemplazabilidad, entre otros, el método ABC tradicional deja de ser una herramienta eficaz por considerar únicamente un criterio, el uso anual en dinero. De esta manera es conveniente realizar el análisis ABC bajo los métodos multicriterio, y por la diversidad de los métodos multicriterio que se ha utilizado para el análisis ABC, encontramos que la aplicación de varios métodos multicriterio para la clasificación de artículos en un inventario dan resultados diferentes.

El problema de obtener resultados distintos (clasificaciones) al aplicar diversos métodos multicriterio para la clasificación de artículos en un inventario, nos motiva al desarrollo de una metodología, acompañada de una implementación computacional, para dar respuesta al problema de la discrepancia de resultados en la utilización de métodos multicriterio para la clasificación de artículos en un inventario. De esta manera, el tomador de decisiones centrará su atención en un sólo método que garantice la mejor elección entre diversos métodos multicriterio propuestos para llevar a cabo el análisis ABC.

## CAPÍTULO 2

# MARCO TEÓRICO

---

En este capítulo se exponen las teorías principales que dan soporte al problema de esta tesis, muchas de las teorías expuestas tienen una relación parcial con nuestro problema ya que dentro de la literatura revisada no se encontraron temas que relacionan directamente la búsqueda de una clasificación de consenso para el área de inventarios. Dentro de las teorías expuestas en esta sección se encuentran las relacionadas con inventarios, toma de decisiones bajo criterios múltiples, optimización multiobjetivo, métodos de clasificación, teorías de consenso, optimización robusta y optimización con muchos objetivos. Cada teoría comparte algún elemento significativo con nuestro problema por lo que se cree que serán útiles considerarlas.

## 2.1 INVENTARIOS.

Los inventarios juegan un papel importante para que las compañías se mantengan competitivas dentro de los mercados. Los clientes pueden preferir empresas que aseguren una continua disponibilidad de productos deseados; si las compañías se comprometen a entregar los productos dentro de intervalos de tiempo razonablemente cortos con el tiempo se desarrollará una fidelidad a la compañía que se traducirá en beneficios tanto para el cliente como para la compañía [117].

Son estas relaciones de confianza las que resultan redituables mientras se mantengan a través del tiempo, sin embargo mantener una relación fiable con los clientes implican

costos que se deben manejar estratégicamente para conseguir un balance con los beneficios [95, 110].

### 2.1.1 COMPLEJIDAD DE LOS INVENTARIOS

Hay que considerar que una compañía puede llegar a manejar miles de productos [78, 132] por lo que debe cuidar que las existencias se encuentren disponibles para los clientes. Los productos son almacenados de diferentes formas dependiendo de sus características físicas o químicas. También se puede observar que los productos salen de un almacén de acuerdo a diferentes patrones de consumo o diferentes tipos de productos, quizá algunos productos salgan del almacén individualmente (por unidad) o en masa (centenas, millares, etc.).

Cada producto de acuerdo a sus propiedades intrínsecas podrá tener una vida útil superior o inferior, como es el caso de los productos perecederos por lo que se tendrá especial cuidado con esos productos *delicados*, los siniestros que se puedan considerar con anticipación como el caso de los incendios determinarán el tipo de ubicación que se les dará a los almacenes para preservar la seguridad de los productos.

Si un artículo llega a faltar quizá pueda ser sustituido por otro similar, y esta característica de *reemplazabilidad* es útil para responder rápidamente a los requerimientos de los clientes, por el contrario también existe la posibilidad que ante la carencia de un producto los clientes no acepten otro artículo por ser éste un artículo complementario [132], esto es que la funcionalidad de un artículo depende de otro. Ahora pensemos en el caso en el que los productos son entregados en el domicilio del cliente, la compañía tendrá que considerar los medios por el que habrá de embarcar los productos, o si por lo contrario el cliente llega a la compañía a recoger el producto deseado; habrá que pensar en las facilidades para que la entrega en las instalaciones sea rápida. Existen casos en los que los clientes estén dispuestos a esperar por un producto o exijan una atención inmediata de los pedidos que hizo a la compañía, sin embargo en ocasiones la compañía no es la única responsable ante la falta de un artículo ya que en ocasiones el proveedor no entrega la materia prima o

componentes necesarios para entregar el artículo al cliente; puede ser que los artículos se dañen durante el envío desde el proveedor a la compañía que entregará el artículo final, o que no lleguen en las cantidades solicitadas al proveedor, o quizá los tiempos de entrega son grandes y esto retrasa las fechas de entrega.

Considerando lo anterior se nota que para administrar un inventario se requiere considerar muchos factores que impactarán en la rentabilidad y confianza al final de nuestro proceso en donde se encuentra el cliente. Por ello, para garantizar un control adecuado de un inventario se deben tener en cuenta tres aspectos básicos:

1. Fijar intervalos de revisión de existencias en el inventario
2. Cuándo se debe ordenar
3. Qué cantidad se debe ordenar

Los inventarios que son bienes almacenados representan valor para la compañía debido a que se almacenan para actuar como un amortiguador que permita satisfacer la demanda, o el abastecimiento de los materiales de entrada para fabricar un producto final. Hay diversos tipos de inventarios: de materias primas, productos en proceso, productos terminados o mano de obra. La principal razón para mantener inventarios es la satisfacción de los clientes, ya que si no se satisface a tiempo a un cliente éste se puede ir con la competencia, sin embargo se pueden citar otras razones [95, 110]:

- Disminución entre los tiempos de oferta y demanda: existen productos que solo están disponibles durante una época específica del año, pero su demanda es uniforme durante todo el año, en este caso nos podemos referir a algún cultivo que se almacena durante una temporada para estar disponible todo el año.
- Reducción de los costos de producción: se consiguen disminuir costos al producir un gran número de artículos sin que tengan una demanda específica para disponer de los artículos posteriormente.

- Incertidumbre ante la demanda: aplicando técnicas de pronósticos podemos determinar cuánto producto tener y así pedir una cantidad de productos que estén por encima del nivel del pronóstico.

### 2.1.2 CLASES DE INVENTARIOS

Además de las funciones que desempeñan los inventarios, también cabe recalcar cómo se clasifican los inventarios según el proceso:

**Materias primas:** Materiales que sirven para la elaboración de los productos finales. Madera, acero, algodón, etc.

**Trabajo en proceso:** Materiales y componentes que están siendo procesados.

**Productos terminados:** Productos finales que son almacenados para luego embarcarlos a los clientes o venderlos directamente.

### 2.1.3 COSTOS DE LOS INVENTARIOS

Cuando se va a decidir qué cantidad de productos se van a ordenar o producir, habrá que considerar los costos asociados, por lo que los costos asociados al manejo de los inventarios para establecer políticas se clasifican como:

1. Costo de ordenar: estos costos se conforman por los costos asociados a las órdenes de compra como llamadas telefónicas, internet, salarios del departamento de compras, etc., o los costos de producir los artículos como los tiempos de preparación de las máquinas.
2. Costos de mantenimiento: debido a que los productos almacenados ocupan espacio y a la vez estos espacios deben de ser adecuados, contar con luz, agua, etc., dependiendo del tipo de producto que se maneje, existen costos asociados que se pueden dividir en:

- Obsolescencia.
  - Deterioro.
  - Impuestos.
  - Seguros.
  - Capital.
3. Costos por faltantes: si los productos no están listos para ser entregados a los clientes, es una venta perdida o se incurren en costos extras por conseguir los productos para satisfacer a los clientes. Los costos de las órdenes atrasadas implican papelería extra en distintos departamentos, embarques especiales los cuales son más caros ya que las órdenes atrasadas son cantidades pequeñas.
4. Costos asociados a la capacidad: a veces se necesitan cubrir tiempos extras para el manejo de un almacén, que implica un costo, o puede ser también que se incurran en costos por tiempos ociosos como sería la falta de uso de un espacio destinado al almacenamiento de los productos o materia prima. En otras ocasiones se requerirá contratar personal y también puede ser que la contratación de un nuevo personal requiera de un entrenamiento que se refleje como un costo.

#### 2.1.4 DISTRIBUCIÓN POR VALOR

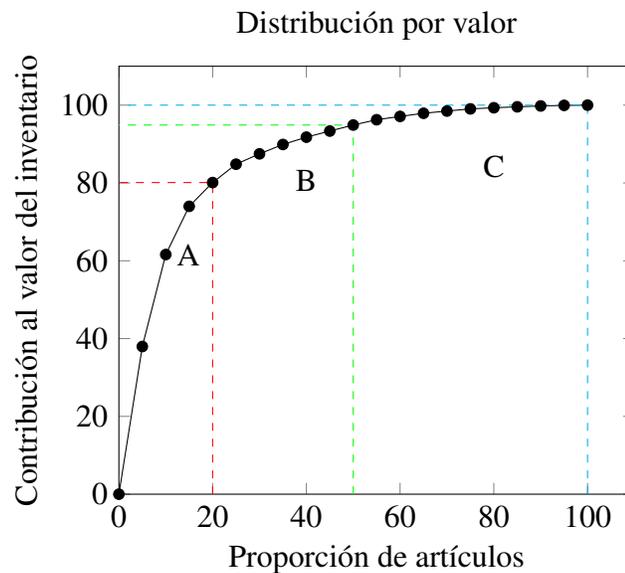
Para un conjunto de personas, atributos, objetos, etc., un pequeño grupo será representativo del conjunto en términos de valor. Así, por ejemplo, en el 20% de las personas en un país, se concentra el 80% de la riqueza[89]; cerca del 20% de los automóviles que se fabrican en la fábrica representan el 80% de las ventas, el 20% de los artículos en el hogar para los que se hace un presupuesto representan el 80% de los gastos. Este concepto del 80-20, que también es conocido como el Principio de Pareto, es muy útil en la industria ya que puede usarse para las pruebas de control de calidad o para la administración de inventarios por citar algunos ejemplos.

### 2.1.5 ANÁLISIS ABC

Cuando la regla del 80-20 es aplicada a los inventarios, surge la herramienta administrativa llamada *análisis ABC*, lo que nos dice que un inventario se puede clasificar en tres categorías, sean éstas la categoría A, la B y la C. En cada categoría se concentran un conjunto de artículos que representan un porcentaje del valor total del inventario. De esta manera los artículos clase A recibirán la mayor atención por parte de la administración, por lo regular estos artículos representan entre un 5% y 20% del valor total del inventario; los artículos clase B son los que tendrán una importancia moderada para la administración, un gran número de artículos cae en esta clase, hasta un 50%.

Para hacer la clasificación ABC de los artículos en un inventario, se usa tradicionalmente el criterio llamado *uso anual en dinero* (ADU por sus siglas en inglés), y en base a este criterio se aplica la siguiente metodología [132, 135]:

1. El costo unitario y el uso anual(demanda) se identifican para cada artículo en el inventario.
2. Se calcula el producto del costo unitario y la demanda ( $c \times D$ ) para cada artículo y los valores  $c \times D$  se tabulan en orden descendiente.
3. Evaluar la actividad acumulada desde el inicio de la lista y acumulando las actividades por artículo hacia abajo.
4. Se calcula, avanzando hacia abajo:
  - Porcentaje acumulado de artículos basado en el número total de artículos.
  - Porcentaje acumulado de uso del dinero basado en el uso total anual.
5. Graficar la curva ABC del porcentaje acumulado del uso del dinero en función del porcentaje de artículos (Figura 2.1).



**Figura 2.1** – Distribución por valor.

## 2.2 TOMA DE DECISIONES BAJO CRITERIOS MÚLTIPLES

El ser humano diariamente toma decisiones para realizar sus actividades, desde decidir qué ropa utilizar para ir al trabajo, qué transporte tomar para ir a la escuela, qué platillo ordenar a la hora de la comida, etc., todas estas decisiones se toman en función de la satisfacción que produzcan, esto quiere decir que buscamos tomar la mejor decisión basada en la máxima satisfacción o por lo menos la que aporte una satisfacción razonable. Sin embargo, cuando se toma una decisión en ocasiones el proceso se da en cuestión de segundos, considerando varios criterios que influyen sobre nuestras alternativas para al final elegir la que mejor nos parezca.

Clásicamente en el campo de la investigación de operaciones, los problemas se modelan a través de un función objetivo que tiene que estar sujeta a un conjunto de restricciones que aseguren la factibilidad del problema. Este enfoque clásico lleva a establecer una única función objetivo que busca maximizar o minimizar las ganancias, los costos, tiempos, etc., así los modelos clásicos son mono-objetivos.

Pero cuando se analiza la realidad bajo la que se desarrollan los problemas en los negocios, gobierno o industrias nos damos cuenta que el uso de múltiples criterios es casi

necesario para tomar una decisión, se toma una decisión realizando una evaluación de distintos criterios sobre un conjunto de alternativas. Así el uso de múltiples criterios en la toma de decisiones ha dado origen al uso de métodos multicriterio.

La representación del proceso de decisión está condicionada por diferentes elementos [140]:

- Decisiones bien definidas no existen todo el tiempo, en ocasiones se trata solamente de orientaciones.
- El tomador de decisiones la mayoría de las veces no es único, pueden ser varios tomadores de decisiones que conforman el centro decisor.
- Las decisiones, alternativas o acciones no son fijas, por lo regular se realizan en tiempo real, por lo que tienden a cambiar constantemente.
- Aunque el tomador de decisiones quiera escoger la mejor opción, existe la posibilidad de que la mejor opción no exista o que el tomador de decisiones no sea capaz de elegir entre una buena solución y la mejor solución.

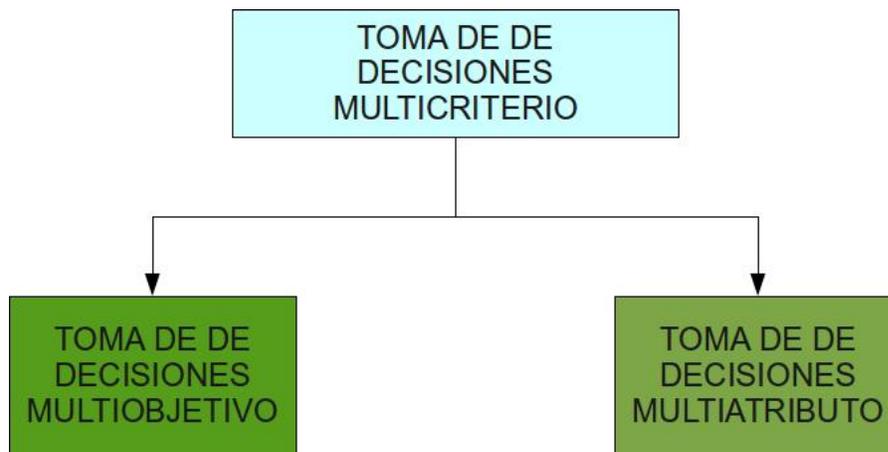
En la literatura se encuentran dos áreas que se refieren a la Toma de Decisiones Multicriterio y el Apoyo a las Decisiones Multicriterio, la diferencia reside en la forma en que se modelan los problemas.

Según [42, 142], los métodos multicriterio se pueden dividir en dos ramas (Figura 2.2):

1. Toma de decisiones multiobjetivo
2. Toma de decisiones multiatributo

La diferencia entre la toma de decisiones multiobjetivo (TDMO) y multiatributo (TDMA) reside en el espacio de decisión, ya que cuando se toma en cuenta un espacio de decisión continuo estamos hablando de **TDMO** y si el espacio de decisión es discreto hablamos

de **TDMA** [57]. Aunque TDMO y TDMA se derivan de la toma de decisiones multicriterio es común referirse a la toma de decisiones multicriterio como toma de decisiones multiatributo, por lo que en esta tesis se emplea el término toma de decisiones multicriterio (TDMC) como un equivalente de toma de decisiones multiatributo (TDMA) [142]. Cuando un problema se modela como un problema de decisión bajo criterios múltiples,



**Figura 2.2** – Ramas de la Toma de Decisiones Multicriterio

éste presenta las siguientes características:

1. Alternativas: hay un conjunto finito de alternativas a evaluar
2. Múltiples atributos: existen un conjunto finito de atributos(criterios) sobre los que se evaluarán las alternativas. Se emplea una estructura jerárquica entre los criterios si éstos son más de doce [142].
3. Conflicto entre atributos: los atributos considerados a menudo compiten por recursos entre ellos.
4. Unidades inconmensurables: las escalas sobre las que se evalúan las alternativas bajo cada atributo son diferentes entre sí.
5. Ponderaciones: los atributos en consideración son ponderados por el decisor de acuerdo a una preferencia relativa.

6. Matriz de decisión: los métodos multicriterio se estudian a partir de una matriz de decisión en la que se reflejan las alternativas, atributos y ponderaciones del problema, así como las evaluaciones de cada alternativa bajo cada atributo.

Así como los problemas multicriterio comparten las características antes mencionadas, también es posible hacer una clasificación de acuerdo al **tipo de datos**, esto es si los datos son deterministas, estocásticos o difusos; también se pueden clasificar de acuerdo al **número de personas que fungen como decisores**, así si hay un único decisor estamos hablando de problemas de un único decisor o si son más de uno, hablamos de métodos multicriterio grupales [36, 59, 146, 152].

Además, debido al conjunto de soluciones que el tomador de decisiones enfrenta, a menudo será necesario elegir un “compromiso” entre los objetivos planteados de tal manera que se especifique una elección de compromiso entre las alternativas disponibles. Así, el resultado final de un problema de decisión en el ámbito multiobjetivo se compone de un proceso de optimización y decisión [146]. Las técnicas de solución de los problemas multiobjetivo desde la perspectiva del tomador de decisiones se clasifican en función de la forma en que se incorporan las preferencias del tomador de decisiones, esta incorporación se puede llevar a cabo *a)* antes; *b)* durante; o *c)* después del proceso de decisión [42, 140, 146].

Así, la intervención del tomador de decisiones de acuerdo a la forma en que se agregan sus preferencias categoriza a los métodos como [42, 140]:

1. Los métodos habilitan al tomador de decisiones para intervenir antes del proceso de resolución y estos métodos son llamados *a priori*.
2. Los métodos que permiten que el tomador de decisiones intervenga durante el curso del proceso de resolución son llamados métodos *interactivos*.
3. Los métodos en los que el tomador de decisiones interviene después del proceso de resolución son llamados *a posteriori*

Los métodos TDMC se han aplicado a una diversidad de problemas como los que a continuación se mencionan [163]:

1. Manufactura integrada.
2. Evaluación de inversiones.
3. Sistemas de manufactura flexible
4. Diseños de fábricas

Los métodos TDMC son importantes en las aplicaciones de casos reales, ya que los sectores industriales y gubernamentales a menudo requieren evaluar un conjunto de alternativas bajo múltiples criterios en conflicto.

Cada método TDMC usa técnicas numéricas que ayudan al decisor a elegir la mejor alternativa entre varias alternativas dadas. Así, se miden las consecuencias de cada alternativa bajo un criterio seleccionado para luego medir el mismo conjunto de alternativas bajo un criterio distinto y así sucesivamente.

Algunos de los métodos multicriterio más utilizados son [26, 133, 162]:

- Escalarización.
- Proceso de jerarquía analítica.
- TOPSIS.
- La familia ELECTRE.
- PROMETHEE.

Para la evaluación de alternativas en TDMC encontramos los siguientes pasos [142]:

1. Determinar criterios y alternativas relevantes.
2. Ponderar los criterios de acuerdo a la importancia relativa del decisor sobre los que evaluará cada alternativa.
3. Procesar los valores de la matriz de decisión para determinar el *ranking* de cada alternativa.

## 2.3 INTRODUCCIÓN A LA OPTIMIZACIÓN MULTIOBJETIVO

En ocasiones trabajar con modelos de un sólo objetivo se convierte en una tarea complicada debido a que en la fase de modelación se pueden tener sesgos. Al tener únicamente un objetivo para nuestro problema se está dejando a un lado otros objetivos que pueden ser de mucha importancia y que su inclusión dentro del problema dará una mejor representación de la realidad, haciendo que nuestro modelo sea de cierta manera más flexible.

Hay que estar conscientes también que esta flexibilidad que se gana con la inclusión de más objetivos nos lleva a múltiples soluciones óptimas las cuáles son llamadas *soluciones de Pareto*. Una idea útil para representar al mejor conjunto de soluciones es la del *intercambio* [46], esta idea surge del hecho de que mientras mejoremos un objetivo degeneraremos otro(s) objetivo(s). Nuestro interés se centrará solamente en un pequeño grupo de soluciones, pero para considerar tales soluciones de interés, estas soluciones deberán de *dominar* a otras soluciones [100].

A continuación se dará una introducción a la optimización multiobjetivo abordando definiciones matemáticas, empezando primero con la optimización mono-objetivo.

### OPTIMIZACIÓN MONO-OBJETIVO

En un problema de optimización clásico (mono-objetivo) se busca el valor mínimo o máximo de una función, además, esta función por lo regular se encuentra acotada por restricciones que definen el espacio de búsqueda de soluciones.

La definición de un problema mono-objetivo es la siguiente [42]:

**Definición 2.1 Problema de Optimización Mono-objetivo:** *Un problema mono-objetivo es definido como la maximización o minimización de  $f(\mathbf{x})$  sujeta a  $g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = \{1, \dots, m\}$ , y  $h_j(\mathbf{x}) = 0, j = \{1, \dots, p\}$   $\mathbf{x} \in \Omega$ . Una solución minimiza o maximiza el escalar  $f(\mathbf{x})$  donde  $\mathbf{x}$  es un vector  $n$ -dimensional de variables de decisión  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  en el universo  $\Omega$ .*

Observe que  $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$  y  $h_j(\mathbf{x} = 0)$  representan restricciones que deben de satisfacerse mientras se optimiza (maximización o minimización)  $f(\mathbf{x})$ .  $\Omega$  contiene a  $\mathbf{x}$  que puede ser usada para satisfacer una evaluación de  $f(\mathbf{x})$  y sus restricciones. Hay que recalcar que  $\mathbf{x}$  puede ser un vector de variables continuas o discretas así como también  $f$  puede ser continua o discreta.

El método para encontrar el óptimo global (que puede *no* ser único) de cualquier función se llama **Optimización Global**. En general, el mínimo global de un problema mono-objetivo se presenta en la definición 2.2:

**Definición 2.2** *Optimización global del mínimo de una función mono-objetivo* Dada una función  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ ,  $\Omega \neq \emptyset$  para  $\mathbf{x} \in \Omega$  el valor  $f^* \triangleq f(\mathbf{x}^*) > -\infty$  es llamado un **mínimo global** si y solo si

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega : f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x}).$$

$\mathbf{x}^*$  es por definición la solución global mínima,  $f$  es la función objetivo, y el conjunto  $\Omega$  es la región factible de  $\mathbf{x}$ . La meta de encontrar una solución global mínima es llamada **problema de optimización global** para un problema mono-objetivo.

Aunque los problemas de optimización mono-objetivo pueden tener una única solución óptima, los problemas de optimización multiobjetivo (MOPs por sus siglas en inglés) presentan posiblemente un conjunto de soluciones incontables, que cuando son evaluadas, producen vectores cuyas componentes representan *trade-offs* (intercambios) en el espacio de objetivos. Luego el tomador de decisiones elige una solución (o soluciones) eligiendo uno o más de estos vectores.

## EL PROBLEMA DE LA OPTIMIZACIÓN MULTIOBJETIVO

El **Problema de la Optimización Multiobjetivo** se puede definir como el problema de encontrar(ver [42]):

“un vector de variables de decisión que satisfaga las restricciones y optimice un vector función cuyos elementos representan las funciones objetivo. Estas

funciones conforman una descripción matemática de criterios de desempeño que usualmente están en conflicto entre ellos. Así, la palabra *optimizar* se refiere a encontrar una solución que daría valores aceptables para el tomador de decisiones.”

**VARIABLES DE DECISIÓN** Las variables de decisión son las cantidades numéricas para las que se eligen valores en un problema de optimización. Estas cantidades por lo regular son denotadas como  $\{x_j\}_{j=1}^n$ .

El vector  $\mathbf{x}$  de  $n$  variables de decisión es representado como:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Lo anterior puede ser escrito de manera conveniente como:

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T,$$

donde  $T$  indica la transposición del vector columna al vector fila.

**RESTRICCIONES** En la mayoría de los problemas hay restricciones impuestas por el entorno o disponibilidad de recursos. Estas restricciones deben ser satisfechas para considerar una solución aceptable. Todas estas limitaciones se conocen como restricciones del problema, y describen la interacción entre las variables de decisión y los parámetros del problema. Estas restricciones se expresan matemáticamente como desigualdades:

$$g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

o igualdades:

$$h_j(\mathbf{x}) = 0 \quad j = 1, \dots, p$$

Note que  $p$ , el número de restricciones de igualdad, debe ser menor que  $n$ , el número de variables de decisión, debido a que si  $p \geq n$  no hay grados de libertad para la opti-

mización, y habrían más variables desconocidas que ecuaciones. El número de *grados de libertad* está dado por  $n - p$ . También, las restricciones deben ser explícitas o implícitas.

COMMENSURABLE VS INCOMMENSURABLE. Para saber qué tan buena es una solución, es necesario tener algún criterio de evaluación. Estos criterios se expresan como funciones que se pueden calcular llamadas **funciones objetivo**. En la vida real algunas funciones están en conflicto entre ellas, esto es que mientras una función se quiere maximizar en otra se quiere minimizar. Ahora bien, estas funciones objetivo pueden ser conmensurables (expresadas en las mismas unidades de medición) o inconmensurables (expresadas en diferentes unidades de medición). En la optimización multiobjetivo por lo regular las funciones objetivo siempre están en conflicto estableciendo un orden parcial en el espacio de búsqueda. De hecho encontrar el óptimo global de un problema de optimización multiobjetivo es un problema *NP-Completo* [42, 57].

ATRIBUTOS, CRITERIOS, OBJETIVOS Y METAS. En la Investigación de Operaciones comúnmente se distingue entre atributos, criterios, objetivos y metas. *Atributos* son aspectos que diferencian propiedades o características de una alternativa o consecuencia. *Criterios* generalmente denotan evaluaciones de medidas, dimensiones o escalas contra las cuales las alternativas son valoradas. Los *objetivos* en ocasiones son vistos de la misma manera que los criterios, pero pueden denotar un nivel deseado de logro o por lo menos una idea del valor que se quiere conseguir. Las *metas*, son un término que comúnmente se usa para designar el potencial con el que un ideal se puede lograr, mientras que el término *objetivo* designa ideales inalcanzables.

Las funciones objetivo son designadas como:  $f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x})$ , donde  $k$  es el número de funciones objetivo en el problema multiobjetivo que se está resolviendo. Por lo tanto, las funciones objetivo forman una función vector  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  que se define como:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_k(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

que en su forma transpuesta queda como:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x})]^T$$

El conjunto de todas las  $n$ -tuplas de números reales denotados como  $\mathbb{R}^n$  es llamado espacio  $n$ -euclidiano. Dos espacios euclidianos se consideran en los problemas multiobjetivo:

- El espacio  $n$ -dimensional de las variables de decisión en el que cada eje de las coordenadas corresponde a un componente del vector  $\mathbf{x}$ .
- El espacio  $k$ -dimensional de las funciones objetivo en el que cada eje de las coordenadas corresponde a un componente del vector  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ .

#### FORMULACIÓN MATEMÁTICA DE UN PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN MULTIOBJETIVO

A continuación se presentan definiciones genéricas para la formulación matemática de un problema multiobjetivo.

La formulación matemática de un problema mono-objetivo se extiende para reflejar la naturaleza de los problemas multiobjetivo donde no hay una única función objetivo a optimizar sino varias. Así, nos encontramos con un conjunto de soluciones en lugar de una única solución. Este conjunto de soluciones son encontradas usando la Teoría de la Optimalidad de Pareto. Note que en los problemas multiobjetivo requiere que el tomador de decisiones elija una solución de los valores  $\mathbf{x}_i^*$ . La elección es un *trade-off* de una solución completa  $\mathbf{x}$  sobre otra en el espacio multiobjetivo.

Los problemas multiobjetivos son aquellos en donde la meta es optimizar  $k$  funciones objetivo al mismo tiempo. Ésto puede involucrar la maximización, minimización o ambas de las  $k$  funciones objetivo. Un mínimo (o máximo) global de un problema multiobjetivo se define como:

**Definición 2.3 Problema General Multiobjetivo:** *Un problema general multiobjetivo se define como la minimización (o maximización)  $F(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x}))$  sujeto a*

$g_i(\mathbf{x}) \leq 0$ ,  $i = \{1, \dots, m\}$  y  $h_j(\mathbf{x}) = 0$ ,  $j = \{1, \dots, p\}$   $\mathbf{x} \in \Omega$ . Una solución de un problema multiobjetivo minimiza (o maximiza) los componentes de un vector  $F(\mathbf{x})$  donde  $\mathbf{x}$  es una vector de variables de decisión  $n$ -dimensional  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  del universo  $\Omega$ . Note que  $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$  y  $h_j(\mathbf{x}) = 0$  representan restricciones que deben satisfacerse mientras se minimiza (o maximiza)  $F$  y  $\Omega$  contiene todas las posibles soluciones de  $\mathbf{x}$  que pueden ser usadas para satisfacer una evaluación de  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$

Así un problema de optimización multiobjetivo se compone de  $k$  objetivos reflejados en las  $k$  funciones objetivo,  $m + p$  restricciones en las funciones objetivo y  $n$  variables de decisión. Las  $k$  funciones objetivo pueden ser lineales o no-lineales y continuas o discretas. La evaluación  $F : \Omega \mapsto \Lambda$ , es un mapeo del vector de variables de decisión en los vectores de salida ( $\mathbf{y} = a_1, \dots, a_k$ ).

## VECTOR IDEAL

**Definición 2.4 Vector Ideal:** Sea

$$\mathbf{x}^{0(i)} = [x_1^{0(i)}, x_2^{0(i)}, \dots, x_n^{0(i)}]^T$$

un vector de variables que optimiza (minimiza o maximiza) la  $i$ -ésima función objetivo  $f_i(x)$ . El vector  $\mathbf{x}^{0(i)} \in \Omega$  es tal que

$$f_i(\mathbf{x}^{0(i)}) = \underset{x \in \Omega}{\text{opt}} f_i(\mathbf{x})$$

El vector

$$\mathbf{f}^0 = [f_1^0, f_2^0, \dots, f_k^0]^T$$

(donde  $f_i^0$  denota el óptimo de la  $i$ -ésima función) es ideal para un problema multiobjetivo, y el punto en  $\mathbb{R}^n$  que es determinado por este vector es la solución ideal, por consiguiente es llamado **vector ideal**.

El vector ideal contiene el óptimo para cada objetivo por separado en el mismo punto en  $\mathbb{R}^n$ .

## CONVEXIDAD Y CONCAVIDAD

De acuerdo a [21, 27, 57] una función convexa se define como sigue:

**Definición 2.5 Convexidad:** Una función  $\phi(\mathbf{x})$  es llamada **convexa** sobre el dominio de  $\mathbb{R}$  si para cualesquiera dos vectores  $\mathbf{x}_1$  y  $\mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}$ ,

$$\phi(\theta\mathbf{x}_1 + (1 - \theta)\mathbf{x}_2) \leq \theta\phi(\mathbf{x}_1) + (1 - \theta)\phi(\mathbf{x}_2)$$

donde  $\theta$  es un escalar entre  $0 \leq \theta \leq 1$ .

Una función convexa no puede tener un valor más grande que los valores de las funciones obtenidas por interpolación lineal entre  $\phi(\mathbf{x}_1)$  y  $\phi(\mathbf{x}_2)$ .

Si la desigualdad inversa de la ecuación anterior sucede, la función es **cóncava**. De esta manera,  $\phi(\mathbf{x})$  es **cóncava** si  $-\phi(\mathbf{x})$  es **convexa**. Las funciones lineales son convexas y cóncavas al mismo tiempo.

Un conjunto de puntos es un **conjunto convexo** en el espacio  $n$ -dimensional si, para todas las parejas de puntos  $\mathbf{x}_1$  y  $\mathbf{x}_2$  en el conjunto, el segmento de línea recta que los une también se encuentra dentro del conjunto. Así, para cada punto  $\mathbf{x}$ , donde

$$\mathbf{x} = \theta\mathbf{x}_1 + (1 - \theta)\mathbf{x}_2 \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

también está dentro del conjunto.

## OPTIMALIDAD DE PARETO

Teniendo varias funciones objetivo, la noción de “óptimo” cambia, ya que en los problemas de optimización multiobjetivo se quiere encontrar un *trade-off* (compromiso) adecuado en lugar de una única solución como es el caso de la optimización global. La noción de “óptimo” adoptado por muchos matemáticos es la que originalmente propuso Francis Ysidro Edgeworth[42] y después fue generalizada por Vilfredo Pareto[119] por lo que la mayoría de los investigadores usan indistintamente los términos *Óptimo de Pareto*, *Optimalidad de Pareto*, *Pareto Óptimo*. Una definición formal se da a continuación[46]:

**Definición 2.6** Una solución  $\mathbf{x} \in \Omega$  se dice que es óptima en el sentido de Pareto con respecto a  $\Omega$  si y solo si no hay otra  $\mathbf{x}' \in \Omega$  para la cual  $\mathbf{v} = \mathbf{F}(\mathbf{x}') = (f_1(\mathbf{x}'), \dots, f_k(\mathbf{x}'))$  domina a  $\mathbf{u} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x}))$ .

Lo anterior quiere decir que  $\mathbf{x}^*$  es Pareto óptima si no existe un vector  $\mathbf{x}$  que disminuya el valor de algún criterio sin causar al mismo tiempo el incremento del valor de otro criterio (asumiendo minimización). Otras definiciones dentro de los problemas de optimización multiobjetivo son las siguientes:

**Definición 2.7 Dominancia de Pareto:** Un vector  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_k)$  se dice que domina a otro vector  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_k)$  (expresado como  $\mathbf{u} \preceq \mathbf{v}$ ) si y solo si  $\mathbf{u}$  es parcialmente menor que  $\mathbf{v}$ , esto es,  $\forall i \in \{1, \dots, k\}, u_i \leq v_i \wedge \exists i \in \{1, \dots, k\} : u_i < v_i$

**Definición 2.8 Conjunto Óptimo de Pareto:** Para un problema multiobjetivo dado,  $F(\mathbf{x})$ , el Conjunto Óptimo de Pareto,  $\mathcal{P}^*$ , se define como:

$$\mathcal{P}^* := \{\mathbf{x} \in \Omega \mid \neg \exists \mathbf{x}' \in \Omega F(\mathbf{x}') \preceq F(\mathbf{x})\}$$

Las soluciones óptimas en el sentido de Pareto son aquellas dentro del espacio de decisión cuyas componentes vectoriales en el espacio de la función objetivo no pueden ser mejoradas al mismo tiempo. Estas soluciones se denominan como *soluciones admisibles* o *eficientes* con todo el conjunto representado por  $\mathcal{P}^*$ . Estos vectores se nombran como *no-dominados*; seleccionar un vector(es) de este conjunto (el conjunto de la frontera de Pareto,  $\mathcal{PF}^*$ ) implícitamente implica la aceptación de soluciones óptimas de Pareto o variables de decisión. Estas soluciones conforman todas las soluciones cuyos vectores asociados son no-dominados.

**Definición 2.9 Frontera de Pareto:** Para un problema multiobjetivo dado,  $F(\mathbf{x})$ , y el Conjunto Pareto Optimal,  $\mathcal{P}^*$ , la frontera de Pareto  $\mathcal{PF}^*$  se define como:

$$\mathcal{PF}^* := \{\mathbf{u} = F(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathcal{P}^*\}$$

## 2.4 MÉTODOS DE CLASIFICACIÓN

Los métodos de clasificación se desarrollan en el concepto estadístico de *regresión* que utiliza la información de los grupos definidos *a priori*.

De acuerdo al enfoque de la regresión estadística, se tiene un conjunto de variables independientes  $\mathbf{X}$  que se relacionan con la variable dependiente  $Y$  a través de una función  $f$ ; para encontrar la función  $f$  se usan observaciones de muestra  $(Y, \mathbf{X})$ , así los problemas de clasificación se abordan desde una perspectiva similar tomando en cuenta que los valores de la variable dependiente  $Y$  son *continuos* bajo el enfoque de la regresión estadística, mientras que los valores de  $Y$  en los problemas de clasificación son *discretos*. De lo anterior, se denota como  $C$  a la variable dependiente que determina la clasificación de una alternativa, y los diferentes grupos que servirán para clasificar se denotarán como  $C_1, C_2, \dots, C_q$  en donde  $q$  es el número de grupos. De manera similar,  $\mathbf{g}$  denotará el vector de variables independientes, este vector de variables independientes será referenciado como criterios o atributos, utilizando el término de *criterios* para una descripción ordinal de las alternativas y *atributos* para una descripción nominal [55].

Las muestras de observaciones que servirán para desarrollar el modelo de clasificación serán las *muestras de entrenamiento* o *conjunto de referencia*. Las observaciones serán las alternativas, en donde cada alternativa  $\mathbf{x}_j$  es el vector de los resultados que se obtienen al evaluar una alternativa  $j$  bajo cada criterio, o sea  $\mathbf{x}_j = (g_{j1}, g_{j2}, \dots, g_{jn})$ . Así con la notación anterior el objetivo se centra en encontrar una función  $f(\mathbf{g}) \mapsto \hat{C}$  para determinar la clasificación de una alternativa. Lo anterior se lleva a cabo utilizando una medida que permita *minimizar* la diferencia entre la clasificación a priori  $C$  y la clasificación estimada  $\hat{C}$  del modelo.

Existen dos cuestiones que marcan la diferencia entre el proceso descrito anteriormente en comparación con la regresión estadística, estas diferencias residen en la forma en que se estiman los parámetros y el esquema del modelo de clasificación.

Comúnmente se ve que el modelo de clasificación combina el desempeño de cada alternativa considerando todos los criterios para dar una calificación final a la alternativa e indicar con qué probabilidad esa alternativa pertenece a un grupo, a su vez, esa calificación será la medida de desempeño ya que se buscará minimizar el error de las alternativas mal-clasificadas. Los modelos de clasificación se dividen en cuantitativos y simbólicos, esta división establece diferentes metodologías que comúnmente son usadas. Los modelos cuantitativos se basan en índices que asignan una alternativa a un grupo, mientras que los modelos simbólicos se basan en reglas de inducción del tipo “**SI condición ENTONCES conclusión**”.

#### 2.4.1 MÉTODOS DE CLASIFICACIÓN MULTICRITERIO.

Dados un conjunto discreto de alternativas bajo algún criterio, se pueden realizar cuatro tipos de análisis [163]:

1. identificar la mejor alternativa o seleccionar un conjunto limitado de *mejores alternativas*.
2. elaborar un *ranking* de alternativas, desde la mejor hasta la peor alternativa.
3. clasificación/ordenamiento de alternativas en grupos homogéneos predefinidos.
4. identificar las principales características de las alternativas y describirlas en base a esas características.

De lo anterior se puede observar que los primeros tres tipos de análisis (elección de la mejor alternativa, ranking, clasificación) implican una evaluación de un resultado, y además estas evaluaciones son de dos tipos: subjetiva y absoluta. La elección de la mejor alternativa y ranking se basan en evaluaciones subjetivas mientras que la *clasificación-ordenamiento* se basa sobre juicios absolutos. Si bien los grupos para clasificar u ordenar son establecidos a priori sin considerar las alternativas, se requiere una comparación entre las clasificaciones/ordenamiento con un *perfil de referencia* para saber a qué grupo pertenece cada alternativa [26, 163].

La clasificación y el ordenamiento asignan las alternativas a grupos definidos *a priori*, sin embargo la diferencia reside en la manera de definir los grupos, así para la clasificación los grupos se definen de manera *nominal*, y para el ordenamiento los grupos se definen de manera *ordinal* de tal manera que las alternativas se empiezan a *ordenar* de la más preferida a la menos preferida. Existen numerosas aplicaciones para los problemas de clasificación y ordenamiento como los que se mencionan en [163].

De lo anterior se ve que el problema de clasificación tiene *dos ramas*, por un lado está la clasificación como tal, y por otro lado está el ordenamiento (sorting); para la clasificación no tenemos información adicional (preferencias) de las alternativas, mientras que para el ordenamiento se conocen las preferencias sobre las alternativas [26].

La forma en que se definen los grupos *a priori* se basan en reglas que son independientes de las alternativas que se están considerando por lo que los juicios absolutos a los que nos referimos, en realidad dependen del ambiente de decisión que se está considerando, por ejemplo, veamos el caso de un institución que busca conseguir un crédito financiero, la entidad que emitirá el crédito fija reglas para clasificar a las instituciones dentro de posiblemente “dos grupos”, por un lado está el grupo de instituciones que acreditarán los requisitos y por otro lado las que **no** acreditarán; las reglas son independientes de las alternativas (instituciones solicitantes) disponibles pero estas reglas pueden ser más rígidas bajo una circunstancia dada o más flexibles en otra, causando que las instituciones que antes fueron aprobadas para el crédito quizá no lo sean después [163].

Similar a la definición de clasificación, está el término del *agrupamiento*, que aunque también asigna objetos a una clase, este proceso se da *a posteriori*, agrupando a los elementos de acuerdo a características similares.

## 2.5 TEORÍAS MATEMÁTICAS DE CONSENSO

Elegir entre un grupo de objetos aquél que mejor represente al grupo ha sido un problema que ha despertado el interés de investigadores para establecer un consenso,

la labor no ha sido fácil y además con el paso del tiempo ha disminuido el número de investigaciones que se refieran al problema de consenso desde el punto de vista matemático, estas investigaciones aparentemente tuvieron su mayor auge durante los años posteriores a la década de los 70 hasta el año 2000, prueba de ésto, figura en una revisión bibliográfica de ochocientos títulos de artículos científicos relacionados con las palabras clave: *clasificación de consenso, medidas de acuerdo, índices de consenso* y que se acotaron dentro de un marco temporal de 10 años comprendidos entre el año 2000 y 2010, de los ochocientos títulos consultados once títulos se relacionaron *parcialmente* con el problema de obtener una clasificación de consenso a partir de un conjunto de objetos o datos, sin embargo de los once artículos solamente **cinco artículos** tenían una relación directa con el problema que nos motiva.

De manera clásica, el problema de obtener una clasificación de consenso se ha abordado mediante *n-árboles, dendrogramas, particiones* como los trabajos de [2, 51, 72, 82, 112, 138], sin embargo, no se encontró en la literatura revisada el uso de clases predefinidas con un significado para alguien como por ejemplo un tomador de decisiones.

La necesidad de obtener clasificaciones tuvo su origen principalmente en el área de las ciencias naturales por lo que muchos de los títulos que se revisaron se relacionan con esta área, además de que libros basados en esta área se han convertido en pilares para abordar el tema de la clasificación de consenso [136], así el uso de términos como *taxonomía, filogenia, cladístico* son ampliamente usados en la literatura afín.

Cuando tenemos un número determinado de clasificaciones multicriterio quizá nos enfrentemos al problema de decidir cuál será el mejor método a elegir. Esta situación puede crear confusión para el tomador de decisiones quien no tendrá una preferencia clara por algún método. Elegir entre un conjunto de clasificaciones aquella que mejor represente a este conjunto nos hace reflexionar sobre la idea del consenso en un grupo de expertos en donde se busca una opinión que esté en mayor acuerdo con la opinión del grupo [37, 60, 66]. Así, podemos ver como cada clasificación dada por un método multicriterio puede representar a un experto dando una opinión dentro del grupo, para luego sacar un

clasificación que mejor represente la opinión de cada experto (consenso), en este caso la clasificación de cada método [157].

El problema de encontrar una clasificación de consenso ha sido ampliamente investigado [9, 14, 72, 82, 112, 113], sin embargo se ha abordado sin tener en cuenta el significado de las clases. Para el problema tratamos en esta tesis, las clases sí tienen un significado claro ya que se asignarán recursos de tiempo y dinero para cada clase, además que de antemano sabemos que son tres clasificaciones en las que dividiremos el conjunto de artículos.

La decisión de asignar una clasificación final a un artículo del inventario, nos dará una discrepancia sobre las clasificaciones de entrada por lo que la mejor decisión se tomará sobre una medida de desempeño que nos permita saber cuál es la clasificación que nos de el menor número de discrepancias. Estas discrepancias pueden ser vistas como transformaciones necesarias para definir un objeto a partir de otro, en este caso a partir de una matriz de similitud que correspondería a la matriz generada por las distintas evaluaciones que se harían en la función objetivo para ir midiendo las discrepancias dando lugar así al enfoque de *optimización directa* para encontrar dendrogramas [72].

Si bien, el problema no se centra en la búsqueda de un dendrograma para encontrar las clases, nuestro problema es visto como un árbol con dos niveles, en el que la altura de cada nodo es la misma. Además, el uso de las alturas en los dendrogramas no se recomienda ya que se quieren comparar clasificaciones de un mismo conjunto de datos que se obtuvieron por métodos de clasificación distintos [72]. También vemos que por tener definidas las clases de antemano, estas clases se repetirán en cada árbol que cada clasificación multicriterio nos proporciona como datos de entrada, por lo que decimos que tenemos componentes replicados como se menciona en [72].

Para encontrar una clasificación de consenso podemos hacer uso de modelos taxonómicos como particiones o  $n$ -árboles además de los dendrogramas mencionados anteriormente. Esto es por el hecho de que los modelos taxonómicos son ordenados por naturaleza [9], así podemos ver cómo una clase de nuestro interés se agrupe dentro de otra clase o

si una clase representada por una partición puede ser más delgada o más gruesa que otra. Aparentemente una medida de distancia nos sería útil como medida de desempeño, pero desde el punto de vista de los modelos taxonómicos dos objetos no se pueden comparar bajo las medidas clásicas de distancia en un espacio Euclídeo [9].

El problema de consenso se puede tratar usando un índice de lejanía como una función de distancia entre los objetos, que en nuestro problema sería la distancia entre una clasificación dada por un método multicriterio, y el objeto de consenso que sería la clasificación final. [9].

Otra forma que puede ser útil para clasificar elementos de un conjunto de datos es a través de tablas de contingencia [82], en la que se calculan medidas de acuerdo y desacuerdo. Esta clasificación se hace sobre pares de objetos, aquí habrá que hacer una adecuación para nuestro problema ya que tenemos tres clasificaciones posibles para cada artículo.

Con lo que hemos visto hasta este momento, la caracterización que puede resultar conveniente para clasificar nuestro problema es a través de latices [113], ya que los tipos de clasificaciones más importantes se dan en esta estructura, y un tipo de clasificación simple que nos puede ayudar en nuestro problema son las particiones. Si optamos por los  $n$ -árboles para la caracterización de nuestro problema encontraremos una gran dificultad para encontrar un consenso debido a que los  $n$ -árboles carecen de una estructura en látice. Los latices polinomiales dan de forma natural una función de consenso. Esta función de consenso para nuestro problema consiste en encontrar una función que nos concentre en una sola clasificación la mayor cantidad posible de información para determinar una única clasificación [25, 113].

### 2.5.1 TIPOS DE CLASIFICACIONES PARA EL PROBLEMA DE CONSENSO

A continuación se describen tres tipos de clasificaciones para el problema de consenso (partición, dendrograma, agrupamiento jerárquico), se utilizarán las definiciones y notación propuesta en [113], el interés se centra en reunir diferentes clasificaciones de un tipo

determinado en una única clasificación del mismo tipo. Denotaremos por  $\Gamma(S)$  al conjunto de todas las clasificaciones posibles, y  $\Gamma^k(S)$  al conjunto de *perfiles*  $(C_1, C_2, \dots, C_k)$  de  $k$  clasificaciones, luego una función  $f : \Gamma^k(S) \mapsto \Gamma(S)$  proporciona un modelo matemático dentro del proceso de agregación. Una función de este tipo se conoce como *función de consenso*. Se usará la terminología de la taxonomía numérica.  $S$  denotará un conjunto de  $n$  objetos que se desean clasificar, los elementos de  $S$  también son referidos como *unidades taxonómicas operativas*(UTOs).

## PARTICIONES

El tipo de clasificación más sencillo es la *partición*. Se denotará por  $\Pi(S)$  a la colección de todas las particiones de  $S$ . La partición de  $S$  contenida en *conjuntos singulares* o *instancias únicas* (singleton) es denotada como  $\mathbf{0}$ ; por otro lado la partición única  $S$  se denotará como  $\mathbf{1}$ . Para las particiones  $P, Q \in \Pi(S)$  se dice que  $P$  es más fina que  $Q$  o que  $Q$  es más ancha que  $P$ , de manera abreviada lo anterior se representa como  $P \leq Q$  ó  $Q \geq P$ , si cada celda en  $P$  está contenida en alguna celda de  $Q$ , o si  $Q$  está conformada por la unión de las celdas de  $P$ .

Así, bajo este orden parcial, se dice que  $\Pi(S)$  es un *látice*. Cada par  $P, Q$  en  $\Pi(S)$  tiene una máxima cota inferior en  $P \wedge Q$  en  $\Pi(S)$ , que es la partición más ancha de  $S$  al menos tan delgada como  $P$  y  $Q$ , y tiene una mínima cota superior  $P \vee Q$  en  $\Pi(S)$ , la cual es la partición más delgada al menos tan ancha como  $P$  y  $Q$ .

## DENDROGRAMAS

A continuación se consideran clasificaciones de  $S$  en dendrogramas. Un *dendrograma* en  $S$  es un mapeo  $D : \mathbb{R}_+ \mapsto \Pi(S)$ ,  $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ , que satisface

1.  $D$  es isótona:  $D(h) \leq D(h')$  si  $h \leq h'$ ,
2.  $D$  es continua por la derecha  $D(h + \varepsilon) = D(h)$  para un  $\varepsilon > 0$ ;
3.  $D(0) = \mathbf{0}$  y  $D(h) = \mathbf{1}$  para algún  $h > 0$ .

Se considera a un dendrograma como una familia de particiones de un sólo parámetro; cada *nivel*  $D(h)$  del dendrograma es una partición del conjunto subyacente  $S$  de UOTs, con los niveles más altos que dan origen a particiones más anchas.

Sea  $\Delta(S)$  la colección de todos los dendrogramas de  $S$ . El refinamiento de orden parcial sobre  $\Pi(S)$  se extiende hacia un orden parcial sobre  $\Delta(S)$  bajo la siguiente definición nivel por nivel, para  $D, E \in \Delta(S)$  se define que  $D \leq E$  si y solo si  $D(h) \leq E(h)$  para cada  $h \in \mathbb{R}_+$ .

Los dendrogramas corresponden a los *árboles-valorados*, que definen una estructura en látice nivel por nivel en  $\Delta(S)$ .

#### AGRUPAMIENTO JERÁRQUICO ( $n$ -ÁRBOLES)

El tercer tipo de clasificación considerado en  $S$  son los  $n$ -árboles. Un  $n$ -árbol (*agrupamiento jerárquico*) en  $S$  es una colección de subconjuntos no-vacíos de  $S$  que contiene todos los conjuntos singulares (singletons) y  $S$ , y además satisface el requerimiento de *árbol*.

$$X, Y \in T \text{ y } X \cap Y \neq \emptyset \text{ implica } X \subseteq Y \text{ o } Y \subseteq X \quad (2.1)$$

Un  $n$ -árbol puede resultar de un *dendrograma* si se quisiera retener las relaciones jerárquicas de las UOTs ignorando los valores numéricos.

La estructura más simple de los  $n$ -árboles en  $S$  es un *bush* ( $n$ -árbol trivial)  $T_0 = \mathbf{0} \cup \mathbf{1}$ . Se denota a las colecciones de  $n$ -árboles en  $S$  por  $\Theta(S)$ . Distinta a las colecciones  $\Pi(S)$  y  $\Delta(S)$ ,  $\Theta(S)$  no posee una estructura *natural* en látice, por lo que se genera una gran dificultad para el consenso.

## 2.6 OPTIMIZACIÓN ROBUSTA

Los datos  $A, b$  asociados a un programa lineal (PL) del tipo

$$\min\{c^T x \mid Ax \geq b\}$$

tienen un cierto grado de “incertidumbre” en la mayoría de los problemas de la vida real [3, 11, 16, 18, 20]. En muchos modelos matemáticos la incertidumbre es ignorada completamente usando un valor nominal representativo [12, 79]. El método clásico que se usa en la Investigación de Operaciones para este tipo de problemas es la optimización estocástica [19, 53, 156], pero en estos métodos las restricciones pueden ser violadas con cierta penalidad o con cierta probabilidad (oportunidad de las restricciones [10, 88]). Cuando se usan penalidades los modelos de programación estocástica no recuperan necesariamente las restricciones del programa lineal original, aunque las variables aleatorias sean degeneradas (deterministas), sino únicamente una *relajación* de estas restricciones [12].

La *Optimización Robusta* (RO, por sus siglas en inglés) es un método para modelar problemas bajo incertidumbre, en donde el modelador quiere encontrar decisiones que sean óptimas en el “peor de los casos” de las incertidumbres dentro de un conjunto dado [79]. Típicamente, el problema de optimización original de incertidumbre se convierte a una forma determinista (contraparte robusta), el cual es un programa convexo, usando fuertes argumentos de dualidad y luego se resuelve con algoritmos estándares de optimización. De esta manera el término “robusto” se refiere a la inmunidad del problema en contra de las perturbaciones en los parámetros del modelo [70, 71].

A continuación, utilizando la notación matemática de [13] se describirá un problema de optimización robusta típico.

Un problema de genérico de programación matemática es de la forma:

$$\min_{x_0 \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n} \{x_0 : f_0(x, \zeta) - x_0 \leq 0, f_i(x, \zeta) \leq 0, i = 1, \dots, m\} \quad (2.2)$$

donde  $x$  es el vector de diseño, las funciones  $f_0$  (función objetivo) y  $f_1, \dots, f_m$  son *elementos estructurales* del problema, y  $\zeta$  se refiere a los *datos* especificando una instancia particular del problema.

En los problemas de optimización de la vida real, el ambiente de decisión se caracteriza de la siguiente manera:

R.1 Los datos son inciertos/inexactos;

- R.2 La solución óptima, aunque sea calculada de manera precisa, puede ser difícil de implementarla;
- R.3 Las restricciones pueden permanecer factibles para todas las realizaciones significativas de los datos;
- R.4 Los problemas son a gran escala ( $n$  o  $m$  son grandes);
- R.5 Soluciones óptimas malas *no* son comunes.

R.1 (y también R.2) implica que en muchos casos tratamos con problemas de optimización inciertos – familias de problemas de optimización comunes (deterministas)

$$\{(P[\zeta]) \mid \zeta \in \mathcal{U}\}, \quad (2.3)$$

donde  $\mathcal{U}$  es algún “conjunto incierto” en el espacio de los datos.

En el punto R.3 se manifiesta que una solución candidata significativa  $(x_0, x)$  de un problema incierto (2.3) es requerido para satisfacer el sistema semi-infinito de restricciones:

$$f_0(x, \zeta) \leq x_0, \quad f_i(x, \zeta) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad \forall (\zeta \in \mathcal{U}) \quad (2.4)$$

Por otro lado R.4 impone un fuerte requerimiento para ser capaz de procesar eficientemente el sistema semi-infinito de restricciones (2.4) para problemas a gran escala.

La *Optimización Robusta* según [13] es una metodología de modelado, combinada con un conjunto de herramientas computacionales, cuyo objetivo es cumplir con los requerimientos R.1, R.2, R.3 y R.4. La urgencia de tener tal metodología se deriva del requerimiento R.5.

En la metodología de Optimización Robusta, se asocia un problema bajo incertidumbre (2.3) con su **contra-parte robusta**, que es un programa de optimización típico (semi-infinito)

$$\min_{x_0, x} \{x_0 : f_0(x, \zeta) \leq x_0, \quad f_i(x, \zeta) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad \forall (\zeta \in \mathcal{U});\} \quad (2.5)$$

las soluciones factibles-óptimas de la contraparte robusta son llamadas soluciones factibles-robustas del problema bajo incertidumbre (2.3).

Los principales retos asociados con la metodología de Optimización Robusta son [13]:

C.1 Cuándo y cómo reformular (2.5) como un problema de optimización computacionalmente tratable, o al menos aproximar (2.5) a un problema tratable.

C.2 Cómo especificar conjuntos de incertidumbre  $\mathcal{U}$  razonables en aplicaciones específicas.

Se recomienda a los lectores interesados en el tema de Optimización Robusta ver el libro de Ben-Tal, El Ghaoui y Nemirovski [10] ya que es una excelente referencia y se proveen más detalles sobre el tema.

## 2.7 OPTIMIZACIÓN CON MUCHOS OBJETIVOS (MANY-OBJECTIVE OPTIMIZATION)

En diversos problemas que se presentan en ingeniería a menudo se tiene la necesidad de optimizar más de dos funciones objetivo, las cuales muchas veces se encuentran en conflicto [41, 43, 123]; la optimización con muchos objetivos (*many-objective optimization*) se refiere a los problemas multiobjetivo con más de tres objetivos [58, 62, 134]. La complejidad de esta clase de problemas se refleja en un esfuerzo modesto para resolverlos [93].

Las técnicas usadas para problemas con pocos objetivos (dos o tres) han presentado dificultades en el espacio de objetivos de mayor dimensión [4, 44, 86, 148]; los algoritmos evolutivos son los más utilizados para lidiar con problemas multiobjetivo [42, 43, 44, 48, 52, 85, 94] y son referidos como Algoritmos Evolutivos Multi-Objetivo (MOEA, por sus siglas en inglés), en el 2007 se reportó una atención del 38.8 % por parte de la industria y académicos en tópicos relacionados con MOEA [101].

Los algoritmos de optimización multiobjetivo más usados, para dos o tres objetivos, son los que se basan en el ordenamiento de Pareto como el NSGA II y SPEA2, sin embargo no se desempeñan bien con problemas de cuatro o más objetivos en conflicto [48, 84, 134, 151]. Como el número de objetivos incrementa, la población se convierte en no-dominada y la presión selectiva de la población hacia el conjunto de Pareto falla.

Existen tres razones por las que la definición de optimalidad en el sentido de Pareto no son satisfactorias para los problemas con más de tres objetivos [58, 92]:

1. El número de funciones objetivo mejoradas no es tomado en cuenta.
2. La relevancia de las mejoras no es tomada en cuenta.
3. No se consideran preferencias entre objetivos.

En [92] se mencionan dos definiciones para atacar las deficiencias mencionadas anteriormente. Una es llamada  $k$ -Optimalidad cuando toma en cuenta el número de objetivos mejorados. La otra definición es llamada Optimalidad Difusa, cuando toma en cuenta el tamaño de las funciones objetivo mejoradas e incluye parámetros a través del tomador de decisiones bajo la hipótesis de que todos los objetivos tienen la misma importancia.

Una alternativa para los problemas de más de tres objetivos es usar un método que no dependa del ranking de Pareto para ordenar la población [83], como puede ser el uso de algoritmos evolutivos de vanguardia para atacar eficientemente problemas de altas dimensiones. La incorporación del aprendizaje como parte del proceso de búsqueda es una solución viable, esta incorporación, se puede llevar a cabo a través algoritmos de estimación de distribución (EDAs, por sus siglas en inglés) [101].

## 2.8 CONCLUSIONES.

En este capítulo se abordan las teorías que se relacionan y dan soporte al trabajo de esta tesis; los tópicos que se describen son:

**Inventarios.** Se abordó una introducción al tema de inventarios haciendo énfasis en la importancia que tienen para una compañía. Se plantea que la necesidad de establecer políticas que permitan tomar buenas decisiones con respecto a las cantidades a ordenar, los tiempos en los que hay que ordenar y sobre todo el control que se ejercerá sobre los artículos para no incurrir en costos de oportunidad. Se describieron los tipos de inventarios que existen dentro de la administración de inventarios. Dentro de este tópico se explica el concepto de la distribución por valor de los artículos en inventario que da lugar a la tradicional clasificación de artículos bajo el método ABC. Se mencionan cuáles son los pasos a seguir para la aplicación del método ABC; observando estos pasos vemos la sencillez del método ABC y se comprende por qué ha sido un método tan popular dentro de la administración de inventarios.

**Toma de decisiones bajo múltiples criterios.** En esta sección se da un panorama general de la toma de decisiones multicriterio explicando cuál es la importancia de su uso dentro de la toma de decisiones. Bajo esta metodología surgen los resultados de distintos métodos que incluyen más de dos criterios para el análisis ABC, por lo que es una opción atractiva para conseguir un resultado que abarque un mayor número de criterios que quizá se encuentren en conflicto. En este apartado se exponen algunas analogías de la decisión en grupo con el problema que se aborda en esta tesis.

**Optimización Multiobjetivo.** Se da una introducción a la optimización multiobjetivo por estar relacionada con la optimización multicriterio que de acuerdo a una definición formal, la optimización multiobjetivo es una derivación de ésta, refiriéndose el término multicriterio a multiatributo. Se definieron conceptos de la optimización multiobjetivo esenciales como vector ideal, convexidad, concavidad y optimalidad en el sentido de Pareto.

**Métodos de clasificación.** Se dieron las definiciones de clasificación y se contrastaron las diferencias entre los problemas clásicos con el problema de esta tesis.

**Teorías de consenso.** Se dieron definiciones de lo que es un consenso y las áreas clásicas de la ciencia en los que ha aparecido, sin embargo se hace notar que ninguna de

las definiciones de los problemas clásicos de consenso se adapta al problema de esta tesis. Se expone la relación que existe entre la toma de decisión en grupo. Se explica la diferencia entre un problema de clasificación con y sin jerarquías, así como el significado de una categoría de clasificación para el tomador de decisiones que hace del problema de esta tesis un problema peculiar. Se dieron las definiciones de particiones, dendrogramas y  $n$ -árboles.

**Optimización robusta.** Otra meta que se persigue en la generación de una clasificación de consenso es tener una clasificación que sea robusta ante perturbaciones en los parámetros de entrada, por lo que en esta sección se expuso la idea general del método de optimización robusta, el cual, tiene una similitud con la metodología de solución propuesta.

**Optimización con muchos objetivos.** Debido a un concepto denominado “variaciones” en los capítulos siguientes, se incluye una breve introducción a la optimización con muchos objetivos mencionando su importancia dentro de los problemas de ingeniería. Se mencionó también las causas por las que los algoritmos habituales para optimización multiobjetivo no funcionan bien para la optimización. La importancia y sugerencias que se deben considerar dentro de los problemas también son mencionadas.

## CAPÍTULO 3

# FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

---

En este capítulo se describe con mayor detalle el problema abordado en esta tesis. Se hace una descripción del problema exponiendo las motivaciones de este trabajo, se mencionan las razones por la que los tomadores de decisiones muchas veces quieren incluir más de un criterio de clasificación y que ha dado lugar a la toma de decisiones multicriterio para la administración de inventarios. Se exponen los supuestos bajo los que se trabajan en esta tesis, también derivado de estos supuestos se expone la similitud con metodologías que aparecen en la literatura de los comités de agrupamiento (referidos como clustering ensembles). Se hace una revisión del estado del arte de los problemas relacionados con nuestro problema, aunque se enfatiza que el problema tiene muchas similitudes con diversas metodologías que usan métodos de consenso, aunque ninguno de los trabajos revisados se adapta completamente al nuestro, por lo que la revisión de la literatura puede ser un poco variada en lo tópicos que se manejan, dentro de estos tópicos principalmente están los de la toma de decisiones multicriterio para inventarios, comités de clasificadores y agrupamiento, lo anterior sumado a la literatura relacionada con particiones y consensos que tuvieron una presencia importante en la década de los 80's.

### 3.1 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA.

Como ya hemos mencionado anteriormente el análisis ABC tradicional en inventarios usa como criterio de clasificación el *uso anual en dinero*, que es la multiplicación del uso

de un artículo (demanda)  $D$  por su costo unitario  $c$  [22, 132]:

$$ADU = D \times c.$$

Sin embargo en el análisis ABC tradicional ha sido estudiado desde el área de la toma de decisiones multicriterio debido a que la atención o el control que se ejerce sobre los artículos a clasificar se basan solamente en un solo criterio [35], y los administradores sienten la necesidad de utilizar otros criterios de clasificación [29, 87, 147] como la criticidad, tiempo de demora, obsolescencia, disponibilidad, reemplazabilidad, costo de oportunidad, entre otros, ya que usar solamente un criterio de clasificación no refleja una clasificación adecuada.

Los problemas ABC multicriterio son un caso especial de los problemas fundamentales de decisión que se cataloga como clasificación ordinal [34]. Las alternativas son los items a clasificar, y estos artículos son ordenados en tres grupos, **A**, **B** o **C**. Las preferencias de acuerdo a la clasificación son  $A \succ B \succ C$ , así, los artículos en la clase A recibirán más atención por parte de la administración. Los artículos dentro del mismo grupo reciben la misma atención por lo que son indiferentes de esta manera. Las preferencias del tomador de decisiones son importantes en este proceso de clasificación debido a que en función de sus preferencias pueden haber diferentes resultados de clasificación [34].

Los diferentes métodos de clasificación multicriterio empleados en los trabajos de [33, 64, 87, 114, 124, 161] son un ejemplo de clasificaciones que presentan discrepancias en el proceso de clasificación sobre el mismo conjunto de datos. El trabajo de [35] es el que pone de manifiesto estas discrepancias.

Una comparación de resultados de diversos métodos multicriterio para el análisis ABC en inventarios, muestra que hay discrepancias entre los resultados de seis métodos [35].

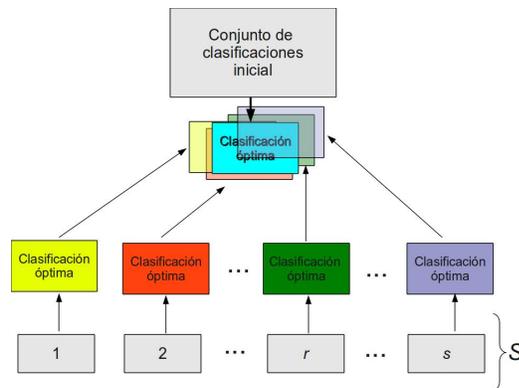
Cuando se tienen diferentes resultados sobre un mismo conjunto de datos el tomador de decisiones quizá se sienta confundido a la hora de depositar su confianza en un método único ya que, aunque el resultado sea en algunos casos adecuado, la pregunta inmediata

será: “¿la clasificación es confiable?” , o “¿por qué difieren otros métodos, si se trata del mismo conjunto de artículos?” para atacar este problema de decisión se requiere entregar una solución que sea estable (robusta, ver Figura 3.1) ante pequeñas perturbaciones en los parámetros de entrada, como ejemplo, podemos citar el caso en el que hipotéticamente, uno de los métodos se equivoque una vez, ésto se representaría con una variación en la etiqueta (clasificación) asignada inicialmente, por lo que si un artículo es clasificado como **A**, exploraremos que sucede con una variación asignando una etiqueta, la más próxima por ejemplo, que sea **B**.

El problema de encontrar una única solución, se asemeja a los problemas presentados en la sección 3.2.2, en el que mediante la combinación de varias soluciones de métodos de agrupamiento (clusterings) o clasificadores se busca obtener una solución única que sea la más representativa del conjunto de soluciones que fungen como parámetros de entrada y además que se desempeñen bien [81, 105]. Podemos vincular esta clase de razonamiento con las ideas expuestas en teorías sociales, que hacen referencia a un consenso o comité [37, 102], como el teorema expuesto por el matemático y filósofo *Nicolás de Condorcet* [126].

Las soluciones dadas por diferentes algoritmos de agrupamiento en los comités de agrupamiento o los diferentes clasificadores que se forman a partir de los conjuntos de datos de entrenamiento en los comités de clasificadores, se pueden interpretar como un experto ejerciendo una opinión sobre el mismo conjunto de alternativas [5], también, esta situación se asemeja al consenso de opiniones que tomamos en cuenta antes de tomar una decisión que para nosotros es importante [22, 115, 122, 159]. Existen bases para preferir sistemas basados en comités (estadística, grandes volúmenes de datos, fusión de datos) y a la vez estos sistemas están basados en teorías matemáticas que formalizan su uso [122].

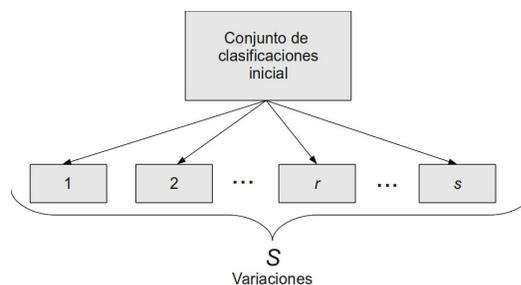
De lo anterior, nuestro problema es encontrar un solución de consenso [67, 130, 157] que sea estable (robusta) ante pequeñas variaciones (ver Figura 3.2) en los parámetros de entrada a partir de un conjunto de clasificaciones dadas por la aplicación de diversos métodos de clasificación multicriterio para artículos en un inventario. Los supuestos del problema son dos:



**Figura 3.1** – Clasificación representativa

- Las clasificaciones obtenidas por otros métodos multicriterio son diferentes pero no difieren mucho entre sí.
- Analista y tomador de decisiones no tienen argumentos sólidos para seleccionar un método multicriterio, para el análisis ABC en inventarios, por encima de los otros métodos.

De acuerdo a los supuestos que se manejan en esta tesis, se puede notar que el problema tiene una estructura similar a las estructuras de los comités de agrupamiento (clustering ensembles) que se comentaron en la sección 3.2.4.



**Figura 3.2** – Variaciones

Las decisiones que se deben tomar son las asignaciones de clase (etiqueta) para cada producto de tal manera que las clasificaciones finales sean representativas para cada solución que conforma la matriz de datos.

El objetivo es minimizar en número total de discrepancias de las clasificaciones finales con respecto al conjunto de soluciones iniciales entregadas por diversos métodos multicriterio.

## 3.2 ESTADO DEL ARTE.

En esta sección se revisará el enfoque de diversos autores para resolver el problema de encontrar una clasificación basada en la toma de decisiones multicriterio así como los enfoques utilizados para encontrar una clasificación de consenso.

En la actualidad hay trabajos relacionados con la clasificación multicriterio de inventarios usando el enfoque ABC, aunque estos problemas son los que motivaron esta investigación, aún no se encuentra una evidencia clara del uso de métodos de consenso en el área de inventarios que usen el análisis ABC multicriterio.

Dentro de los enfoques comunes que se encuentran en la literatura para el análisis ABC multicriterio destacan los siguientes [35]:

**Apoyo a la toma de decisiones multicriterio.** Dentro de este grupo destacan los métodos AHP [63, 121], distancias basadas en casos [33], modelos lineales ponderados [114].

**Análisis envolvente de datos.** Aquí destacan los modelos lineales ponderados y sus extensiones [124, 161] así como el ordenamiento flexible multicriterio [32].

**Inteligencia artificial.** Como los métodos de redes neuronales artificiales [120], algoritmos genéticos [76], conjuntos aproximados [34] y enjambre de partículas [143].

Además de los enfoques mencionados anteriormente también se enfatiza en que las teorías de consenso han llamado la atención en los últimos años en el área de los métodos de agrupamiento (clusterings) y clasificación (classifiers) lo que converge en los métodos de comités de agrupamiento (clustering ensembles, del idioma inglés) dentro de estos métodos el que más tiene similitud con el problema de esta tesis es el de los agrupamientos esto es

por el hecho de que parten de la premisa de que no se tiene una preferencia sobre un método que conforma el comité (ensemble). A continuación se expone la literatura relacionada con el análisis ABC multicriterio y los comités de agrupamiento y clasificadores.

### 3.2.1 ANÁLISIS ABC MULTICRITERIO

En una empresa se pueden llegar a manejar cientos de artículos [90] para satisfacer la demanda y asegurar una excelente competitividad a través de la satisfacción de sus clientes entregando los productos que requieren en el momento que se necesitan, como es el caso del movimiento generado por la globalización en el que grandes cadenas comerciales como Walmart, Sears, Bestbuy fabrican sus productos en China para producir en cantidades mayores a un precio relativamente bajo [35]; así, se requieren de buenas políticas encaminadas a la administración de sus inventarios para mantener dicha competitividad por lo que los administradores necesitan una buena planeación y control sobre una gran cantidad de artículos [106].

Por esta razón, en la práctica de la administración de inventarios se ha recurrido frecuentemente al uso del análisis ABC, una herramienta sencilla de entender y aplicar en la que se usa el principio de Pareto [132, 89, 35], la metodología básicamente consiste en clasificar a los artículos en tres grandes grupos categorizados por las letras A, B y C, utilizando como criterio *tradicional* el uso anual en dinero que se refiere al impacto monetario que tiene un artículo tomando en cuenta los movimientos registrados durante el año y su costo unitario. La categorización denota la importancia de cada grupo de artículos, siendo los artículos “A” los más importantes, los artículos “B” medianamente importantes y los artículos “C” poco importantes [91], esta idea propuesta por primera vez en los años 50's por Dickie [54, 158] ilustra el ejemplo en el que existen *pocos artículos* (entre el 15% y 20% del total de artículos) que representan una importante suma de dinero para la organización [132, 135], por lo que éstos se consideran los más importantes y es a este grupo de artículos al que se le debe poner mayor atención y mantener un control estricto sobre su administración; por otro lado existen artículos en el que su impacto financiero es mediano y a la vez también representan un cantidad moderada del total de artículos (entre

el 30 % y 35 %) por lo que este grupo se clasifica en el grupo “B” ejerciendo un control menos riguroso con respecto a los artículos del primer grupo. Por último, el resto de los artículos, que representa la mayoría (alrededor del 50% del total de los artículos) tiene un impacto en la inversión muy bajo por lo que el control sobre estos artículos clasificados como “C”, es muy poco.

Sin embargo, a través del tiempo investigadores en el área de la administración de inventarios se percataron que muchas veces considerar solamente el criterio del *uso anual en dinero* (ADU, por sus siglas en Inglés) no era suficiente para establecer un clasificación adecuada [154, 91] ya que en algunos casos un artículo que no tenía un gran impacto de acuerdo al ADU, **sí** tenía un impacto grande al verlo desde otro punto de vista como la criticidad, lo que llevaba a un confusión a la hora de decidir qué criterio debía ser el adecuado para clasificarlo [63].

Dentro de los criterios que se han considerado comúnmente en el análisis ABC figuran los siguientes [33, 31, 78, 35, 63, 64, 65, 45, 77]:

- costo unitario promedio
- lead time
- reemplazabilidad
- reparabilidad
- perecibilidad
- durabilidad
- distribución de la demanda

por lo que la inclusión de más de dos criterios dentro del análisis ABC dio origen al término *Análisis ABC Multi-Criterio* [35] o también conocido de una manera más general como *Clasificación de Inventario Multi-Criterio* [31, 114].

Así dentro de los trabajos pioneros en el análisis ABC Multi-Criterio, referido en adelante como ABCMC, figura el trabajo de Flores y Whybark [64], en el que usan una matriz de criterios conjunta, utilizando dos criterios de clasificación en donde uno de ellos es el clásico ADU, este trabajo resalta la importancia de considerar más de un criterio para el análisis ABC sin embargo el método empleado es limitado solamente a dos criterios, lo que hace difícil la inclusión de más de dos criterios.

Derivado del trabajo de [64], el análisis ABC multicriterio empezó a llamar la atención utilizando métodos más sofisticados para clasificar los artículos de un inventario considerando más de dos criterios; posteriormente en [63] se resalta el hecho de la limitación del método para utilizar una clasificación usando el método de proceso analítico de jerarquía [129], sin embargo se reconoce en este trabajo que se requiere una gran cantidad de tiempo por parte de la administración para desarrollar más información sobre cada artículo en inventario ya que se revisan y clasifican miles de artículos respecto a un criterio clave, lo que da lugar a una restricción sobre el número de criterios a considerar.

En [125] se presenta un método sencillo y práctico basado en la teoría de conjuntos difusos (*fuzzy sets*) en conjunto con el proceso analítico de jerarquía de Saaty [128]; en este trabajo eligen un conjunto de criterios para determinar los pesos relativos, luego asignan una puntuación para cada ítem por cada criterio usando una distribución triangular y calculan la puntuación final normalizada por cada artículo. Usando el principio de comparación de números difusos, cada puntuación final es comparada unas con otras para clasificar cada artículo como A, B o C.

La metodología propuesta en [125], fue aplicada a una compañía importante en Irán, utilizando cinco criterios de clasificación, las clasificaciones que obtuvieron caen dentro de la regla empírica del *principio de Pareto*, sin embargo se enfatiza que la clasificación final obtenida es altamente dependiente del tomador de decisiones.

En [78] se propone un *proceso analítico de jerarquía difuso con desarrollo envolvente de datos* (FAHP-DEA, por sus siglas en inglés), para la clasificación ABC. El FAHP-DEA propuesto en este trabajo usa el FAHP (proceso analítico de jerarquía difuso, por sus siglas

en inglés) para determinar los pesos de cada criterio, el desarrollo envolvente de datos (DEA, por sus siglas en inglés) para determinar sus valores en términos lingüísticos y el método de *ponderación simple aditiva* (SAW, por sus siglas en inglés) para dar una puntuación por cada criterio dentro de una puntuación global de cada artículo. Esta combinación de un FAHP con un DEA se hace para vencer la limitación del AHP de comparar un gran número de alternativas, y debido a que las compañías pueden manejar miles de artículos, el AHP aplicado por sí solo no es práctico.

En [154] se propone la idea de una clasificación bajo el método ABC tomando en cuenta el efecto *cross-selling*, el cual se refiere al hecho de que la importancia de un artículo no se centra solamente en el valor del artículo sino que en ocasiones su importancia es influenciada por otros artículos que se relacionan directa o indirectamente con el artículo a clasificar, por lo que la acción de ordenar una determinada cantidad de un artículo estaría sujeta a las cantidades que se van a ordenar de otro artículo relacionado. La clasificación propuesta en [154] se basa en la “regla de pérdida” o “costo de oportunidad” en el que se cuantifica la importancia de un artículo en función de lo que se dejaría de ganar por no considerar otros artículos relacionados.

En [33] se realiza una clasificación generando pesos y umbrales de clasificación basados en la evaluación, por parte del tomador de decisiones, de un conjunto de casos por lo que las dificultades que se presentan con la caracterización de las preferencias se evitan. Los casos que el tomador de decisiones evalúa se basan en decisiones que se han tomado en el pasado, alternativas ficticias que se apegan a la realidad o decisiones que se toman en base a un subconjunto representativo de alternativas bajo consideración; de esta manera, los tomadores de decisiones prefieren dar sus opiniones basadas en ejemplos que explicarlas en términos de parámetros funcionales. En este trabajo, se proponen dos tipos de criterios, definidos como positivos y negativos para definir artículos ideales y anti-ideales, esto se hace con la finalidad de definir los supuestos de distancias que se usan para realizar la clasificación, posteriormente se definen funciones basadas en las distancias cuadradas que se incorporan en un modelo de programación lineal cuya función objetivo se basa en la minimización del error.

En [77] se presenta una versión extendida del modelo de Ng [114] considerando los valores ponderados para la clasificación multicriterio ABC. El modelo de [114] es simple y fácil de usar, además de presentar gran flexibilidad para agregar información adicional de los administradores para la clasificación del inventario. Sin embargo existen situaciones en que las puntuaciones (clases) para cada artículo son independientes de las ponderaciones obtenidas por el modelo, por lo que los pesos no tienen ninguna participación en la determinación total de la puntuación para cada artículo por lo que no se refleja la posición real del artículo.

En [158] se realizan pruebas para medir la efectividad de tres métodos de clasificación basados en técnicas de inteligencia artificial aplicados al problema del ABCMC, en comparación con el *Análisis Discriminante Múltiple* (MDA, por sus siglas en inglés). Las técnicas empleadas en este trabajo son: máquinas de soporte vectorial, redes de propagación en reversa (BPNs, por sus siglas en inglés), el algoritmo de los  $k$  vecinos más cercanos ( $k$ -NN, por sus siglas en inglés). En [158] se utilizaron cuatro criterios de clasificación para un conjunto de 47 artículos, los cuales han sido ampliamente usados en literatura para comparar resultados de diversos métodos [64, 114, 124]. Se usó una triple validación cruzada para evaluar la efectividad de las cuatro técnicas. Los resultados mostraron que las técnicas basadas en inteligencia artificial (IA) se desempeñaron mejor que el MDA, además el método SVM fue el que mejor resultados tuvo. Los hallazgos de [158] muestran que los *Sistemas de Planeación de Recursos Empresariales* (ERP, por sus siglas en inglés) pueden ser usados para implementar una clasificación multicriterio ABC usando métodos basados en *inteligencia artificial*.

### 3.2.2 MÉTODOS BASADOS EN COMITÉS (ENSEMBLES)

En esta sección se exponen algunos trabajos recientes sobre la metodología de *comités*. Antes de introducir al lector con las definiciones y trabajos relacionados, es importante hacer notar una distinción entre comités para clasificación y agrupamiento (clusterings) definiendo primero los conceptos de clasificación y agrupamiento (clusterings) desde el enfoque del Aprendizaje Automático (Machine Learning).

El *aprendizaje automático* se define como el proceso por el cual una computadora (máquina) mejora su desempeño usando resultados previos [131]. La mayoría de las aplicaciones del aprendizaje automático se centran en el *reconocimiento de patrones* que generalmente se refiere a la clasificación de objetos de acuerdo a sus características [118]. Estas características de objetos también son referidas como *atributos*, los cuales sirven como medición para distinguir a los objetos entre sí. Los objetos pueden ser agrupados en clases de acuerdo a su similitud [118].

El aprendizaje automático con una estructura de *clasificación* puede ser categorizado en dos clases principales [118]: *aprendizaje supervisado* y *aprendizaje no-supervisado*.

En el aprendizaje supervisado un sistema tiene la capacidad de aprender a partir de ejemplos, los cuales se conforman por un conjunto de parejas de entradas y salidas [17, 118, 126]. La entrada es un vector de atributos de un objeto y la salida es la *etiqueta* del objeto (es decir, la clase a la que pertenece el objeto). Un conjunto de objetos con vectores de atributos y etiquetas que designan las clases a las que pertenecen, se llama *conjunto de entrenamiento* [99, 126]. Este conjunto es usado para obtener *funciones de clasificación* [126, 155]. Los sistemas entrenados tienen la capacidad de predecir la etiqueta (clase) de un objeto sin etiqueta (clase) [155]. Un conjunto de objetos con vectores de atributos cuyas etiquetas son *desconocidas* se llama *conjunto de prueba* [118, 126]. El término *supervisado* se deriva del hecho de que las etiquetas de los objetos en el conjunto de entrenamiento se dan como entradas y son determinadas por una fuente externa que se considera como *supervisor* [99, 118, 131].

Por el contrario, el *aprendizaje no-supervisado* es el caso en el que los objetos no son etiquetados por ningún tipo de información, y el aprendizaje se lleva a cabo con la formación de clases de objetos basados en similitudes entre sus atributos [80, 118, 145].

### 3.2.3 EL PROBLEMA DE LOS COMITÉS DE CLASIFICADORES (CLASSIFIER ENSEMBLES)

Comités de aprendizaje (Ensemble Learning) es un método que entrena un conjunto de clasificadores individuales y luego combina sus predicciones para clasificar ejemplos. Como uno de los avances más importantes en el aprendizaje inductivo, el *aprendizaje de comités* ha cobrado mucha importancia en el *aprendizaje automático* (Machine Learning) y *minería de datos* (Data Mining) [131].

El principal objetivo detrás de la metodología de comités es considerar varios clasificadores de manera individual, y combinarlos para obtener un clasificador que realice la tarea de cada uno de ellos. Como analogía, el ser humano tiende a buscar varias opiniones antes de tomar una decisión muy importante, luego considera esas opiniones para combinarlas y tomar la decisión final [122, 126] o como un grupo de decisores que ejercen una opinión distinta para tomar una única decisión en base a un consenso [111, 115, 160, 159].

La estructura de un método de comités para clasificación contiene los siguientes elementos [126]:

**Conjunto de entrenamiento.** Un conjunto de datos etiquetados (clasificados) para el entrenamiento de comités. El conjunto de entrenamiento se puede describir de varias formas, la que más frecuente es la de vectores de atributos. Sea  $A$  el conjunto de entrada de atributos que contiene  $n$  elementos:  $A = \{a_1, \dots, a_i, \dots, a_n\}$  considerando  $a$  y la variable que representa la clase o atributo objetivo.

**Inductor base.** El inductor es un algoritmo de inducción que obtiene un conjunto de entrenamiento y forma un clasificador que representa la relación entre los atributos de entrada y el atributo objetivo. Sea  $I$  el inductor. Usando la notación  $M = I(S)$  se representa un clasificador  $M$  el cual es inducido por el inductor  $I$  sobre un conjunto de entrenamiento  $S$ .

**Generador de diversidad.** Este componente es el responsable de generar diversos clasificadores.

**Combinador (unificador).** El combinador (unificador) combina las clasificaciones de varios clasificadores.

Es útil distinguir entre estructuras dependientes e independientes para la construcción de comités (ensemble). En una estructura dependiente la salida de un clasificador es usada en la construcción del siguiente clasificador. De esta manera es posible toma ventaja del conocimiento generado en la iteración anterior para guiar el aprendizaje en las siguientes iteraciones. Alternativamente cada clasificador es construido independientemente y sus resultados son combinados de alguna manera [126].

Para una explicación más detallada de los comités de clasificadores se puede consultar el trabajo de [126] en donde se hace una revisión de los métodos basados en comités (ensembles) más usados hasta el momento, el cual a la vez es un tutorial para las personas interesadas en construir sistemas basados en comités bajo el enfoque de clasificación.

#### LITERATURA RELACIONADA CON EL PROBLEMA COMITÉS DE CLASIFICADORES

En [131] se usa un método para mejorar la predicción y eficacia de clasificadores de datos biomédicos, se propone un algoritmo de comités basados en optimización de *Colonia de hormigas* (Ant Colony Optimization) y *Conjuntos Aproximados* (Rough Sets). La optimización de colonia de hormigas (ACO por sus siglas en inglés) y los conjuntos aproximados son incorporados para seleccionar un subconjunto de los clasificadores para agregación. Los resultados experimentales, comparados con los métodos existentes, muestran un decremento en el tamaño del comité y se obtiene un mayor desempeño de predicción para los datos biomédicos.

En [23] utilizan *Modelos Aditivos Generalizados* (GAMs, por sus siglas en inglés), una técnica estadística de modelación no-paramétrica o semi-paramétrica como miembros del comité. Proponen tres clasificadores comité tipo GAMs para clasificación binaria basada en esquemas como Bagging, Método de Subespacio Aleatorio (RSM, por sus siglas en inglés) y una combinación de ambos. En cada método propuesto se usa la agregación promedio para combinar probabilidades de pertenencia de clase a posteriori generadas

por los miembros GAMs. Realizan validación experimental con doce conjuntos de datos binarios tomados del repositorio UCI, comparan el desempeño de un único GAM y entre los tres algoritmos comité GAM.

En [116] evalúan dos métodos comités de clasificadores (Bagging y Boosting) para 23 conjunto de dato, para ésto usan redes neuronales y árboles de decisión como algoritmos de clasificación. Los resultados indican que el método Baggin casi siempre es más preciso para un único clasificador y que en ocasiones es menos preciso que el método Boosting. Por otro lado, el Boosting puede crear comités que son menos precisos que un único clasificador cuando se usan redes neuronales. El desempeño de los métodos Boosting depende de las características de los datos que se examinan lo que disminuye su desempeño. Con respecto a estudios previos, el trabajo de [116] sugiere que es más redituable trabajar con pocos clasificadores combinados, y que se obtienen mejores resultados combinando hasta 25 clasificadores con Árboles de Decisión Boosting.

En [153] hacen un estudio comparativo de la efectividad de métodos comité para la clasificación de sentimientos. En este trabajo se enfocan en comités de conjunto de atributos (características) y algoritmos de clasificación. Se diseñan dos esquemas de atributos que son particulares en el análisis de sentimientos: el discurso y las palabras. Para cada esquema utilizan las técnicas de Nâives Bayes (NB, por sus siglas en inglés), entropía máxima (ME, por sus siglas en inglés) y máquinas de soporte vectorial (SVM, por sus siglas en inglés) como clasificadores de base para predecir la clasificación. En la etapa de comité, aplican tres métodos comité que son el de combinación fija, combinación ponderada y combinación de meta-clasificadores con tres estrategias (comité de atributos, comité de algoritmos de clasificación y comité de atributos y algoritmos de clasificación). Se comparan varios experimentos usando cinco conjuntos de datos usados en el área de la clasificación de sentimientos.

En [56] hacen una evaluación de métodos para la construcción de comités de clasificadores homogéneos con una estructura de apilamiento (stacking). En [56] comentan que la selección del mejor de los clasificadores en un comité generado por la aplicación de diversos algoritmos de aprendizaje debe ser comparado con el desempeño de una estructura

de apilamiento. La evaluación empírica de [56] muestra que las estructuras de apilamiento se desempeñan bien pero no mejor con respecto a una validación cruzada. Así en [56] se propone un nuevo método de *apilamiento* para clasificación usando modelos de *árboles*, muestran también que este método se desempeña mejor que otros métodos de combinación además de que es mejor que seleccionar el mejor clasificador individual.

En [28] hacen una revisión de los intentos de explicar la diversidad del error incluyendo explicaciones cuantitativas y heurísticas. La medición de la diversidad del error es uno de los elementos requeridos para una predicción confiable cuando se usan métodos basados en comités (ensembles). Incluyen una extensa literatura sobre clasificación y algunos aspectos de la teoría de regresión. Examinan varias técnicas para crear comités y los categorizan formando una taxonomía. Como parte de la taxonomía que proponen se introduce la idea de métodos de creación de diversidad implícitos y explícitos.

### 3.2.4 EL PROBLEMA DE LOS COMITÉS DE AGRUPAMIENTOS (CLUSTERING ENSEMBLES)

Dados un conjunto de  $r$  particiones  $\Lambda = \{\lambda^q \mid q = 1, \dots, r\}$ , con la  $q$ -ésima partición  $\lambda^q$  con  $k^q$  clusters, la función de consenso  $\Gamma$  para combinar múltiples clusters se define como [98, 139, 144, 107]:

$$\Gamma : \Lambda \mapsto \lambda, \quad N^{n \times x} \mapsto N^n, \quad (3.1)$$

que mapea un conjunto de agrupamientos en un agrupamiento único. Si no existe información *a priori* acerca de la importancia relativa de los agrupamientos individuales, una meta que se persigue es buscar un agrupamiento que comparta la mayor cantidad de información con los agrupamientos originales.

Basados en la *medida de concordancia* (información compartida) entre particiones, se define una medición entre un conjunto de  $r$  particiones  $\Lambda$  y una única partición  $\lambda$  como el promedio de la *información compartida*:

$$S(\lambda, \Lambda) = \frac{1}{r} \sum_{q=1}^r S(\lambda, \lambda^q). \quad (3.2)$$

De esta manera, el problema de los comités de agrupamiento es encontrar una partición de consenso  $\lambda^*$  del conjunto de datos  $X$  que maximice la función objetivo  $S(\lambda, \Lambda)$  del grupo de particiones  $\Lambda$ :

$$\lambda^* = \arg \max_{\lambda} \frac{1}{r} \sum_{q=1}^r S(\lambda, \lambda^q). \quad (3.3)$$

#### LITERATURA RELACIONADA CON EL PROBLEMA DE COMITÉS DE AGRUPAMIENTO

En [139] se hace un estudio sobre problema de combinar múltiples particiones de un conjunto de objetos dentro de un único grupo sin tener acceso a las características o algoritmos que dieron origen a tales particiones; en este trabajo se hace uso del término “re-utilización del conocimiento” el cual marca la antesala de los *comités de agrupamiento*. La idea propuesta en [139] se expone como un problema combinatorio para el que se exponen tres técnicas que proporcionan funciones de consenso eficientes. Estas técnicas, llamadas unificadores o combinadores, se basan en medidas de similitud, partición de hipergrafos y meta-clusters.

En [139] se menciona la importancia de la integración de múltiples fuentes de información y modelos de aprendizaje en diversas disciplinas como la combinación de estimadores econométricos, sistemas basados en reglas y fusión de datos multisensores. Las dos principales motivaciones para desarrollar *comités de agrupamiento* según [139] es el aprovechamiento de la información generada por otros métodos de agrupamiento sobre un mismo conjunto de datos y la estimación de clusters cuando sólo se tiene acceso a una sección de un conjunto de datos debido a restricciones impuestas por el entorno en el que se generan los datos (quizá los datos no puedan compartir información o simplemente no se pueden poner juntos en el análisis). Estas definiciones se dan a continuación:

**RE-UTILIZACIÓN DEL CONOCIMIENTO.** En varias aplicaciones puede que ya existan agrupamientos (clusterings) para un conjunto de objetos que se está estudiando y deseamos integrar estos *agrupamientos* en una única solución, o usarlos para sugerir un nuevo grupo (cluster) de los objetos estudiados (considerando quizá un conjunto de características

distintas) [139]. Como ejemplo, en [139] exponen el estudio realizado sobre clusters de visitantes a un sitio web con fines de facilitar una campaña de mercadeo. La compañía ya tenía una segmentación del mercado basada en estudios demográficos, índices de créditos, región geográfica y patrones de compra que los clientes tenían en las diversas sucursales de la compañía. La compañía no quería desahacerse de todo ese cúmulo de información, por el contrario, los directivos querían utilizar la información para generar nuevo conocimiento. Se hace notar que este legado de agrupamientos fueron entregados por expertos o por otras compañías con métodos patentados y que tenían que ser usados sin mirar cuáles fueron las características originales bajo las que se hicieron tales estudios.

COMPUTACIÓN DISTRIBUIDA [139]. A menudo, la información se obtiene y se almacena por áreas geográficas debido a restricciones operacionales u organizacionales y se tiene la necesidad de procesar los datos “*in situ*” tanto como sea posible. En el *aprendizaje automático* se asume que los datos están disponibles en un único lugar centralizado. Se puede discutir que los datos sean transferidos a un solo lugar y llevar a cabo una serie de fusiones y uniones de los datos para obtener un solo conjunto de datos, y luego aplicar el algoritmo que mejor nos parezca después de aleatorizar y sacar muestras de este conjunto de datos único. Sin embargo en la práctica, este enfoque puede ser costoso por el ancho de banda y almacenamiento de datos. En ciertos casos también hay restricciones que impidan concentrar los datos de diferentes fuentes en un único conjunto por cuestiones de seguridad, privacidad, datos que son de tercera parte (propietarios o patentados) y otras cuestiones por parte de los dueños de los datos, términos legales de la compartición de datos, falta de tolerancia para compartir la información o requerimientos por el procesamiento de datos en tiempo real.

La severidad de las restricciones mencionadas anteriormente se ha convertido evidentemente en un retraso para varias agencias de gobierno que intentan integrar sus bases de datos y técnicas de análisis. Un *comité de agrupamiento* puede ser empleado en escenarios en los que no es posible concentrar todos los clusters de distintas fuentes en sólo un cluster, por esto la computación distribuida permite que se compartan cantidades pequeñas de información como clusters de etiquetas. El comité puede ser usado para clusters de carac-

terísticas distribuidas en situaciones donde cada entidad de agrupamiento (cluster) tenga que acceder solamente a un número limitado de características o atributos de cada objeto.

La idea detrás de los comités de agrupamientos es básicamente encontrar una **solución única** que mejor represente a un conjunto de soluciones dadas por la aplicación de diferentes algoritmos de agrupamiento o por la aplicación del mismo algoritmo de agrupamiento con diferentes parámetros de inicialización sobre el mismo conjunto de datos, la mejor representación del agrupamiento único que se denomina *agrupamiento de consenso* (conocidos también en el idioma inglés como consensus clustering) [139, 141, 130, 15] también se representa como la que comparte la mayor cantidad de información [139] con los agrupamientos que conforman el *comité* (comité), es importante recalcar que durante el proceso de construcción del agrupamiento de consenso no se tiene acceso a las características originales o atributos que usaron los algoritmos de agrupamiento para conformar el comité [8, 109, 130, 139, 144].

En [98] comparan una partición de consenso contra múltiples particiones enfocándose en medidas basadas en las relaciones por cada par de objetos, las cuales se van actualizando conforme se van cambiando las etiquetas asignadas a cada objeto. Las medidas consideradas como función objetivo en el trabajo de [98] fueron: el índice Rand, Jaccard y Wallace, además para hacer frente al problema de convergencia local de una estrategia voraz (greedy) proponen un esquema basado en el recocido simulado que es computacionalmente factible y resalta tres ventajas que son: 1) el desarrollo de una serie de funciones de consenso para el comité de agrupamiento, no solo una; 2) evita el problema de convergencia local y 3) aumenta el rendimiento computacional debido a que la función de consenso es  $O(nkr)$  para  $n$  objetos,  $k$  clusters en la partición objetivo y  $r$  agrupamientos en el *comité*. Además, la estructura propuesta puede trabajar con un número arbitrario de particiones variando el número de clusters lo que provee una solución a gran escala para el problema de *comités de agrupamiento* tomando un conjunto de datos muy grande. El desempeño de la estructura propuesta es afectado por la medida que se usa para comparar los agrupamientos en la función objetivo y el esquema de optimización para encontrar la solución de consenso.

En [144] se presenta un método basado en *votación de clusters activos* (VACs por sus siglas en inglés), para combinar múltiples *agrupamientos base* en un único comité de agrupamiento que proporciona estabilidad ante la falta de datos y que no requiere que todos los datos estén centralizados en un único lugar. El método, que se usa para procesar los datos que se encuentran en distintos centros de almacenaje, produce una variedad de agrupamientos, que se denominan “base”, enfocados solamente en una proporción o características de los datos. El trabajo de [144] entrega un método de voto adaptativo por el cual los agrupamientos van modificando (actualizando) sus valores (votos) para maximizar una medida global de calidad, la cual se basa en la información que comparte el comité de agrupamiento con los agrupamientos base.

En [107] estudian el *criterio miope* del índice de *Información Mutua Normalizada Promedio* (ANMI por sus siglas en inglés) ya que este índice puede reemplazar al índice de *clasificaciones erróneas* siempre y cuando las etiquetas de clasificación o categorías estén dadas dentro del cluster actual, la formulación propuesta por [107] se basa en una función Lagrangiana. Así, [107] da un nuevo punto de vista para la formulación de comités de agrupamientos. De acuerdo a [107], los comités de agrupamientos juegan el papel de cuantizador de espacio irregular, por lo que mapean patrones en un nuevo espacio transformado no-lineal donde los clusters tienden a ser más compactos y separados además analizan el consenso de agrupamientos basados en la entropía, asociando probabilidades a vectores de etiquetas. Dentro del análisis que realizan, desatacan el uso del índice de *información mutua normalizada promedio* (ANMI, por sus siglas en inglés) [139].

En [8] presentan una formulación del *problema de votación* (voting problem) como un problema de regresión de múltiples variables de entrada y salida, demuestran también que el método de votación acumulada es un caso especial de un problema de regresión lineal. Usan una técnica de generación de comités aleatorizada donde se seleccionan al azar un gran número de grupos (clusters) para cada partición del comité. Aplican un algoritmo extraído de la *Teoría de la Información* para obtener el agrupamiento de consenso, este algoritmo minimiza la divergencia promedio de Jensen-Shannon dentro del cluster y produce una jerarquía de  $k$ -particiones.

Cuando se usan métodos basados en *comités de agrupamientos* por lo regular surgen dos aspectos a tratar, por una lado se tiene que elegir una manera adecuada de construir un conjunto de soluciones individuales, o cómo elegir a los mejores agrupadores (*clusterers*), mientras que por otro lado se tiene que tratar con la manera de combinar los resultados del *comité* en un único agrupamiento (función de consenso) [130, 145], así en [103] se trabaja en el segundo aspecto mencionado anteriormente.

En [103] encaran el problema de encontrar un agrupamiento de consenso como un problema de *fusión de información* en el contexto general de lo que se denomina *razonamiento incierto*. Cada algoritmo de agrupamiento es considerado como una fuente de información, la cual tiene un grado de incertidumbre sobre la verdadera partición de los objetos. En [103] se propone una estrategia para un comité de agrupamiento basado en tres puntos: 1) generación de masa, 2) agregación y 3) síntesis; se apoyan en la teoría de *látices* [113] usando *funciones de credibilidad* sobre *látices* de conjuntos de particiones. La diferencia con los *látices* propuestos en [113] reside en que en este trabajo se trata con *látices* de intervalos de particiones. El trabajo de [103] también se ocupa de la robustez ante posibles perturbaciones en los agrupamientos.

En [15] proponen un modelo teórico para calcular una medida de similitud entre varios agrupamientos, el modelo parte bajo el supuesto de que se tienen  $k > 1$  particiones (*clusters*) del mismo conjunto de datos, cada uno con el mismo número de conjuntos, la meta es hacer corresponder los conjuntos en cada partición para minimizar la medida de similitud. En [15] demuestran que el problema es MAX-SNP-Duro aún para particiones que contengan a lo más dos elementos, también muestran un algoritmo de aproximación  $2 - \frac{2}{k}$  para cualquier  $k$ .

En [150] proponen una estrategia para combinar *comités* de particiones obtenidas por agrupamientos. Esta estrategia puede ser usada para obtener una nueva partición difuso sin importar si los las particiones que se combinan son suaves (*difusas*) o duras (*rígidas*) [8, 139, 130]. No importa si las particiones que se usan como entrada del algoritmo se obtuvieron a partir de diversos algoritmos de agrupamiento o son el resultado de un mismo algoritmo de agrupamiento con inicializaciones aleatorias. El algoritmo propuesto por [150]

combina particiones de manera secuencial para atacar el inconveniente de la infactibilidad debida a la combinación simultánea de todas las particiones, también mejora la habilidad de un algoritmo de agrupamiento para encontrar estructuras en un conjunto de datos y no está sujeto a la estructura de un cluster determinado.

En [141] extienden el estudio sobre los comités de agrupamientos introduciendo una representación integral de múltiples agrupamientos y formulando el problema como un agrupamiento de categorías, también proponen un modelo probabilístico de consenso usando mezclas finitas de distribuciones multinomiales en un espacio de agrupamientos, una partición combinada es encontrada como una solución al problema de máxima verosimilitud usando el algoritmo EM. En [141] se define una nueva función de consenso que se relaciona con el criterio de la varianza entre clases usando la definición generalizada de *información mutua*, finalmente demuestran la eficacia de combinar particiones generadas por *algoritmos de agrupamiento débiles* que usan proyecciones y divisiones aleatorias de datos; [141] analizan la calidad de la medida de consenso global de los comités de agrupamientos con información incompleta y el efecto de la falta de “etiquetas” de grupo o de agrupamiento.

Los algoritmos de agrupamiento han sido aplicados exitosamente en una variedad de escenarios, sin embargo la elección del algoritmo adecuado para un conjunto de datos dado no es una tarea sencilla [40], y la tarea se complica más cuando existe más de una estructura en los datos, por lo que se proponen estrategias avanzadas para el análisis de grupos (clusters) que combinan varios criterios para evitar la elección de un único criterio cuando nada se conoce acerca de la estructura de los datos y garantizar a su vez la recuperación de todas las estructuras cuando existe más de una. Típicamente los algoritmos de agrupamiento tratan con la dificultad de elegir el algoritmo adecuado mientras que aún se concentran en el descubrimiento de una única estructura; los métodos multiobjetivo en contraste, se ocupan de los dos problemas al mismo tiempo.

El trabajo de [40] propone un marco para el análisis cluster parecida al algoritmo MOCLE (Multi-Objective Clustering Ensemble) que hibridiza el comité de agrupamiento y estrategias de agrupamiento multiobjetivo. En [40] se desarrolla un algoritmo llamado MCHPF (Multi-Objective Clustering with Hierarchical Partition Fusions) que es una

versión de programación genética (GP, por sus siglas en inglés) basada en la *eficiencia de Pareto* (ver sección 2.3) para envolver una población de comités, tomando en cuenta medidas de validación complementarias para agrupamientos. El MCHPF de [40] diseña automáticamente funciones de consenso que posiblemente ya están documentadas en la literatura, así el método propuesto por [40] pudo encontrar varias estructuras presentes en los datos considerando más de un criterio (función objetivo). El algoritmo de [40] se pone a prueba mediante experimentos sistemáticos con datos artificiales, de referencia y del área de la bioinformática con variaciones en sus estructuras, comparando la calidad de las particiones obtenidas por el MCHPF contra algoritmos tradicionales y multiobjetivo.

En [6] abordan el problema de la segmentación de mercado, exponiendo la idea de que un mismo conjunto de clientes son catalogados en diferentes segmentos por distintas bases (patrones de compra, estilo de vida, demografía, etc.). Sale a relucir la duda sobre cuál es la segmentación que mejor represente a un conjunto de clientes, por lo que exponen la necesidad de obtener una *partición de consenso*. Mencionan que uno de los métodos clásicos tiene sus orígenes en la *teoría de la votación* y de la *elección social* basado sobre preferencias de agregación. El trabajo de [6] se enfoca en comparar métodos que no usan modelos estadísticos (non-model based) y métodos que sí los usan (model based) para obtener particiones de consenso. Hacen una comparación de tres métodos entre sí que son: 1) el problema de la partición de cliques (CPP), 2) mezclas finitas (FMM) y 3) SEGWAY. El primer método es un enfoque clásico mientras que el segundo es caracterizado por la mezcla multinomial para datos categóricos; el tercer método que comparan es considerado en [6] por ser de reciente desarrollo y por la incorporación del *índice Rand ajustado* (ARI, por sus siglas en inglés) que ha sido adulado por su eficiencia en una variedad de contextos que tratan sobre clasificación [137].

En [130] proponen ocho funciones de consenso para obtener un agrupamiento de consenso “suave” o difuso, en donde el término “suave” se utiliza para denotar un grado de pertenencia de un elemento del conjunto de datos a un cluster, a partir de *comités de agrupamientos difusos*. Las funciones de consenso propuestas son formuladas como la concatenación de dos pasos los cuales se llevan a cabo de manera secuencial, estos pasos

son: 1) desambiguación y 2) aplicación de un procedimiento de votación. En particular se describen dos maneras de llevar a cabo los pasos de desambiguación (directa e iterativa) por cuatro procedimientos de votación (suma, producto, Borda y Copeland) lo que da lugar a las ocho funciones de consenso. El desempeño de las funciones de consenso es analizado bajo dos aspectos: el costo computacional y la calidad de las particiones de consenso que se entregan. Para evaluar la calidad de las particiones de consenso que se entregan, en [130] crean una versión “rígida” de los agrupamientos de consenso difusos, midiendo la similitud con respecto al verdadero cluster de los datos. Los resultados computacionales de la experimentación de este trabajo indican que las funciones de consenso propuestas por medio de los métodos de votación constituyen una alternativa competitiva para enfrentar el problema de los agrupamientos de consenso difusos.

En [109] proponen un enfoque un poco distinto de los métodos de comités al suponer que no necesariamente existe una única solución óptima para un agrupamiento, por lo que se desea proveer un número limitado de “buenas” soluciones diferentes, por lo que proponen un consenso basado en *mínimos cuadrados*. El método expuesto por [109] generaliza la idea de los *agrupamientos por mínimos cuadrados* además de que permite extrapolar de forma automática un pequeño número de soluciones diferentes agrupamientos a partir de un conjunto de datos de agrupamientos que se obtienen por la aplicación de diversos algoritmos de agrupamiento para algún conjunto de datos seleccionado. Definen una medida de calidad en términos del *error cuadrado mínimo* y presentan gráficas para la visualización de las soluciones del método propuesto; esta representación gráfica la desarrollan a través de las probabilidades promedio por parejas de cada grupo de soluciones.

En [104] se presentan un novedoso algoritmo basado en *grafos de similitud* para combinar múltiples agrupamientos eficiente y efectivamente. Los grafos de similitud son grafos ponderados y no-dirigidos que representan una matriz de co-asociación (similitud). El algoritmo propuesto es llamado COMUSA (Combining Multiple Clusterings via Similarity Graph) que tiene como entrada múltiples agrupamientos y crea grafos de similitud usando la evidencia acumulada de los agrupamientos

En [145] se propone un nuevo método, llamado *Partición de Consenso Ponderada vía Kernels* (WPCK, por sus siglas en inglés). Dado que la utilización de los comités de agrupamientos se basan principalmente en dos etapas (construcción de agrupamientos y construcción de la función de consenso), el método de [145] parte de que la etapa de generación de agrupamientos, el conjunto de particiones se puede obtener por cualquier tipo de algoritmo de agrupamiento con diferentes parámetros de inicialización. Un promedio de las particiones en el comité de agrupamiento no es una solución apropiada. Extraen información relevante del comité de agrupamiento antes de realizar la combinación de particiones introduciendo el paso llamado *Análisis de la Relevancia de las Particiones*. La función de consenso la definen a través de la *meta-heurística* de recocido simulado. El soporte de la función de consenso que presentan [145] está fundamentado sobre una teoría matemática rigurosa haciendo las demostraciones de las definiciones usadas en la construcción de la función de consenso.

En [80] toman el esquema de los comités de agrupamiento para usarlos con agrupamientos de datos categóricos. La mayoría de los algoritmos de agrupamiento usados en la literatura se enfocan en datos numéricos lo que permite aprovechar las propiedades geométricas para definir funciones de distancia entre los datos. Sin embargo las propiedades de los atributos categóricos hace que los agrupamientos de datos categóricos puedan parecer más complicados de llevarse a cabo. Así, en el trabajo de [80] resaltan las similitudes entre los agrupamientos de datos categóricos con los comités de agrupamiento que se han tratado como áreas distintas. Proponen el problema de los agrupamientos de datos categóricos (CDC, por sus siglas en inglés) como un problema de optimización desde el punto de vista de los comités de agrupamiento (CE, por sus siglas en inglés), señalan también que los algoritmos en ambas áreas (CDC y CE) pueden ser intercambiables. Realizan la experimentación de la metodología usando cuatro conjuntos de datos de la vida real.

En [69] se entregan una recopilación de técnicas para comités de agrupamientos; en esta recopilación se abordan las definiciones sobresalientes sobre los comités de agrupamientos, así como los retos y taxonomía de estos métodos. Describen funciones de consenso basadas en los siguientes enfoques: partición de Hiper-grafos, votación, Infor-

mación Mutua, Co-asociación y Mezclas Finitas; exponen las ventajas y desventajas de cada método así como su complejidad computacional. Comparan las características de los comités de agrupamientos como la complejidad, robustez, simplicidad y confiabilidad usando distintos conjuntos de datos.

### 3.3 CONCLUSIONES.

En este capítulo se hizo la descripción del problema de esta tesis el cual consiste en encontrar una solución única a partir de un conjunto de clasificaciones multicriterio para el análisis ABC de inventario. Se expusieron las causas por las que el tomador de decisiones muchas veces quiere incluir más de un criterio aparte del criterio tradicional del uso anual en dinero. Se mencionó la importancia del análisis ABC para la administración de inventarios y los criterios que comúnmente son tomados en cuenta o que comúnmente los administradores quieren incluir en un análisis integral bajo el esquema del análisis ABC. Se documentó literatura relacionada con los métodos ABC multicriterio frecuentemente usados.

Dentro de la definición del problema se hicieron analogías con problemas de la literatura que se relacionan con teorías sociales principalmente de las que diversos autores han tomado la idea de que una buena solución se puede conseguir de un consenso de varias soluciones y que además esta estrategia puede resultar más provechosa por que se incluyen las mejores características de ese conjunto de soluciones. Siguiendo con estas analogías, en este capítulo se hizo una revisión de los principales trabajos en el área de los comités de clasificadores y agrupamiento, denominados en la literatura como “classifier ensembles” y “clustering ensembles” respectivamente, ésto es porque se encontró una analogía significativa con el hecho de que los comités de clasificación y agrupamiento por lo regular no incluyen una preferencia sobre los métodos o soluciones que conforman el comité (ensemble); por preferencia se quiere dar a entender que los métodos utilizados tienen la misma importancia para el tomador de decisiones o experimentador. Se expuso un concepto sumamente utilizado en la literatura de los comités que es el de reuso del

---

conocimiento que motiva a los investigadores a hacer uso de las metodologías de comités para encontrar soluciones robustas [139].

## CAPÍTULO 4

# METODOLOGÍA DE APOYO A LA DECISIÓN

---

En este capítulo se propone una metodología de solución para resolver el problema de encontrar una clasificación de consenso que sea estable ante pequeñas perturbaciones en los parámetros de entrada. De acuerdo a la literatura revisada en el capítulo 2, el problema de encontrar una clasificación de consenso a partir de clasificaciones multicriterio para artículos en un inventario usando el método ABC tiene similitudes con diversos problemas abordados en la literatura de consenso. Dentro de la literatura, uno de los enfoques que más se asemeja es el de encontrar una solución de consenso en los comités de agrupamiento (clustering ensembles). Sin embargo, estos enfoques son solo una aproximación ya que el problema que se trata en esta tesis puede resultar en una combinación de ambos además de la inclusión de elementos de la toma de decisiones multicriterio para incluir preferencias.

### 4.1 ARTÍCULOS FÁCILES Y DIFÍCILES DE CLASIFICAR

De acuerdo a los datos presentados en la Tabla A.1, en el apéndice de esta tesis, en la que se exponen las discrepancias en los resultados dados por diferentes métodos multicriterio se puede observar que para cada caso el porcentaje de artículos en cada categoría obedece la regla empírica de Pareto del 80-20 por lo que en este sentido cada método es similar, como se muestra en la Tabla 4.1.

**Tabla 4.1** – Artículos por categoría  $k_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  de acuerdo a los métodos  $M_j$ ,  $j = 1, \dots, 6$  usados en [35].

	$k_1$		$k_2$		$k_3$	
	Cantidad	Porcentaje (%)	Cantidad	Porcentaje (%)	Cantidad	Porcentaje (%)
$M_1$	10	21.28	14	29.79	23	48.94
$M_2$	10	21.28	14	29.79	23	48.94
$M_3$	10	21.28	14	29.79	23	48.94
$M_4$	10	21.28	14	29.79	23	48.94
$M_5$	5	10.64	26	55.32	16	34.04
$M_6$	5	10.64	11	23.40	31	57.45

De la Tabla 4.1 se puede sacar un conclusión preliminar de la partición de consenso que se busca, la cual está entre los métodos  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  o  $M_4$ . Esta conclusión preliminar se basa en los porcentajes o cantidad de artículos que se tienen por cada categoría (A, B o C) en cada método de clasificación multicriterio; quizá se pueda decidir el escoger un método de los originales como el consenso por el simple hecho de tener el mismo número de artículos en cada categoría en la mayoría de veces (frecuencia). Sin embargo, observando únicamente las proporciones o número de artículos en cada categoría puede ser un proceso engañoso debido a que pueden existir artículos que aparezcan el mismo número de veces en categorías distintas por lo cual el decidir a qué categoría pertenece dicho artículo puede ser complicado; de esta manera, el primer paso de la metodología es distinguir cuáles serán los artículos más fáciles y difíciles de clasificar.

Este proceso de distinción se realizará en función de la frecuencia con la que un artículo aparece en una categoría por cada método multicriterio. Un artículo que tenga una frecuencia muy alta en un método será un artículo fácil de clasificar mientras que un artículo que tenga la misma frecuencia en dos o tres métodos será un artículo difícil de clasificar por no poder decidir fácilmente en qué categoría clasificarlo.

La Tabla 4.2 ilustra la facilidad o dificultad de clasificación de un artículo, suponiendo que se tienen 4 métodos y 3 artículos. Siguiendo el ejemplo, vemos que el primer artículo es clasificado 2 veces en categoría A y una vez en categoría B y C, así el artículo  $x_1$  se

dice que es “fácil” de clasificar. El siguiente artículo  $x_2$  es clasificado cuatro veces como categoría A , por lo que se dice que este artículo es “muy fácil” ya que fue clasificado en la misma categoría por todos los métodos, finalmente para el artículo  $x_3$  no hay una categoría única ya que fue clasificado 2 veces como B y 2 veces en C, por lo que el artículo  $x_3$  se dice que es “difícil” de clasificar.

**Tabla 4.2** – Ejemplo sobre la dificultad de clasificación de un artículo.

Artículo	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$	$f_A$	$f_B$	$f_C$	Consenso	Dificultad
$x_1$	A	B	A	C	2	1	1	<b>A</b>	fácil
$x_2$	A	A	A	A	4	0	0	<b>A</b>	muy fácil
$x_3$	B	B	C	C	0	2	2	<b>B,C</b>	difícil

De esta manera, se asignarán términos lingüísticos del tipo “muy fácil”, “fácil”, “regularmente fácil”, “muy difícil” o “difícil” para indicar la facilidad o dificultad de clasificación de un artículo.

## 4.2 MODELO GENÉRICO DE CONSENSO

Para el problema de obtener una clasificación de consenso se han propuesto tres enfoques [9]: I) **constructivo**, que involucra métodos combinatorios para lo cual se auxilian con el uso de algoritmos heurísticos; II) **axiomático**, en el que se formulan procedimientos para encontrar un consenso de acuerdo a propiedades “deseables” y por último; III) **optimización**, en el que se plantea un función de costo entre el conjunto de clasificaciones observadas y la clasificación de consenso, de tal manera que esta función de costo sea minimizada. En esta tesis se usa un enfoque de *optimización*.

Nuestro problema puede verse como un conjunto de particiones  $\mathbf{P}$  en la que a cada partición corresponde un método de clasificación multicriterio  $P_j \in \mathbf{P}$ ,  $j = \{1, \dots, m\}$  y a la vez cada método se compone de  $k$ -grupos disjuntos cuya unión es el conjunto de artículos

$I = \{x_1, \dots, x_n\}$ , el problema de obtener una partición de consenso se puede formalizar a través de uno de los dos modelos propuestos por [73]:

1. Las particiones  $\{P_j(j = 1, \dots, m)\}$  son las mismas, la única diferencia entre ellas son errores en las muestras tomadas o errores de medición. La partición de consenso  $E$  basta para representar al conjunto de particiones  $P_j(j = 1, \dots, m)$ .
2. Existen diferencias sistemáticas entre las particiones, pero otras particiones difieren solamente por errores de medición o muestreo entre algunas particiones. En este caso, se requiere particionar al conjunto  $\mathbf{P}$  en  $c$  clases disjuntas  $\{C_l(l = 1, \dots, c)\}$  de particiones similares primarias, el término “primario” se refiere al conjunto de particiones  $\mathbf{P}$  dados originalmente como parámetros de entrada, para definir un partición secundaria y encontrar una partición  $M_l$  para cada clase  $C_l(l = 1, 1, \dots, c)$ .

En cada uno de los dos casos expresados anteriormente la partición de consenso puede:

- (a) pertenecer al conjunto  $\mathbf{E}$  de todas las particiones del conjunto  $I$  de  $n$  artículos ,
- (b) o ser restringida a pertenecer a una de las particiones del conjunto  $\mathbf{P}$ , esto significa que la partición de consenso sea una de las  $m$  particiones originales.

Estableciendo  $\Delta(P_k, E)$  como una medida de cercanía entre la solución de consenso y las clasificaciones multicriterio dadas (particiones), lo que se busca es minimizar las discrepancias generadas por cada método con respecto a la solución de consenso. Así, tomando en consideración los esquemas anteriores, nuestra solución al problema de obtener una partición y por ende una clasificación de consenso se concentra en el modelo 1 bajo el caso (a) expresado de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \min \sum_{k=1}^m \Delta(P_k, E) \\ \text{sujeto a} \\ E \in \mathbf{E} \end{aligned} \tag{4.1}$$

Una solución para para la formulación (4.1) fue denominada *partición central* [73], aunque muchos autores han preferido usar el término de “mediana” [9, 75]. De los trabajos

previos para obtener una partición de consenso se sabe que el problema de la partición central o mediana de la formulación (4.1) es NP-duro [49, 73, 74]; esto quiere decir no hay un algoritmo polinomial que proporcione una solución óptima a menos que  $P = NP$  [47, 68].

### 4.3 MODELO MATEMÁTICO PROPUESTO

Como parte de la metodología de solución para el problema que se trata en esta tesis, tenemos un modelo matemático de programación entera que se usa para encontrar la clasificación de consenso. El modelo matemático es parte de la estrategia al emplearlo sin variaciones o con variaciones en el conjunto de clasificaciones de las que se parte para encontrar un consenso. La generación de variaciones se discutirá más adelante en la sección 4.5.

Antes de presentar la formulación del problema se presentará la nomenclatura usada así como la notación, parámetros y variables consideradas en la misma.

#### 4.3.1 CONJUNTOS

*I*: Conjunto de los artículos en inventario.

*J*: Conjunto de métodos multicriterio.

*K*: Conjunto de categorías de artículos, definidas para elaborar políticas de control de inventarios.

*S*: Conjunto de instancias correspondientes a variaciones posibles en la clasificación de artículos, debido a imprecisiones en la aplicación de los métodos de clasificación multicriterio o en la representación de las preferencias del tomador de decisiones entre otros factores.

### 4.3.2 DATOS

$a_{ijk}$ : Categoría  $k$  asignada al artículo  $i$  bajo el método  $j$ .

$\alpha_k$ : Disminución aceptable (en porcentaje) de la proporción para la categoría  $k$ .

$\beta_k$ : Aumento aceptable (en porcentaje) de la proporción para la categoría  $k$ .

### 4.3.3 PARÁMETROS

$$\underline{d}_s = \min \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} |z_{ik} - a_{ijks}| \quad s \in S \quad (4.2)$$

sujeto a

$$\sum_{k \in K} z_{ik} = 1, \quad i \in I, \quad z \in \{0, 1\}^{|I| \times |K|}$$

Cantidad mínima absoluta de discrepancias entre las clasificaciones de la variación  $s$ , de donde se obtiene el conjunto de clasificaciones  $\{\underline{z}_s^*\}$ , para las cuales se alcanza la cantidad mínima de discrepancias.

### 4.3.4 VARIABLES DE DECISIÓN

$$z_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si ítem } i \text{ es clasificado como clase } k, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (4.3)$$

### 4.3.5 FUNCIÓN OBJETIVO

Una manera de establecer un consenso entre un conjunto de objetos es definir una métrica de lejanía entre estos objetos, esta métrica de lejanía se puede establecer como una función de distancia [127] entre los objetos considerados y el objeto candidato que fungirá como consenso [9, 102]; así, nuestro problema es establecer un consenso [160] entre las soluciones entregadas por diferentes métodos multicriterio para el análisis ABC,

por lo que se considera una función de distancia entre las soluciones y la solución candidata (consenso) como se ve las función objetivo (4.4). Las función objetivo busca minimizar la cantidad de discrepancias respecto a las clasificaciones dadas en cada variación  $s$ . Las métricas que comúnmente se usan para las distancias son la distancia Euclidiana y la de Manhattan, que se derivan de la distancia Minkowski [24, 127, 149]. La métrica que se usa en esta tesis es la distancia Manhattan porque en ocasiones la distancia euclidiana no es recomendable [9].

$$\min \sum_{k \in K} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} |z_{ik} - a_{ijk}| \quad (4.4)$$

La función objetivo (4.4) no es lineal debido al uso del valor absoluto de las diferencias entre las variables de decisión y las clasificaciones iniciales. Aplicando una técnica de linealización [21, 39, 50] es posible linealizar la función objetivo (4.4) utilizando una variable auxiliar  $H_{ijk} = |z_{ik} - a_{ijk}|$  y la adición de las siguientes restricciones:

$$H_{ijk} + z_{ik} \geq a_{ijk}, \quad i \in I, \quad j \in J, \quad k \in K \quad (4.5)$$

$$H_{ijk} - z_{ik} \geq -a_{ijk}, \quad i \in I, \quad j \in J, \quad k \in K \quad (4.6)$$

La función objetivo (4.4) queda de la siguiente manera:

$$\min \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} H_{ijk}, \quad (4.7)$$

sujeto a:

$$H_{ijk} + z_{ik} \geq a_{ijk}, \quad i \in I, \quad j \in J, \quad k \in K \quad (4.8)$$

$$H_{ijk} - z_{ik} \geq -a_{ijk}, \quad i \in I, \quad j \in J, \quad k \in K \quad (4.9)$$

#### 4.3.6 OTRAS RESTRICCIONES

La restricción (4.10) asegura que se asigne una sola categoría  $k$  a un artículo  $i$

$$\sum_{k \in K} z_{ik} = 1, \quad i \in I \quad (4.10)$$

La restricción (4.11) asegura que las proporciones entre los cardinales de cada clase se encuentren entre ciertos porcentajes  $\alpha$  y  $\beta$  según la regla de Pareto,  $N$  representa el número total de artículos en el inventario considerados para la clasificación.

$$\alpha_k \leq \frac{\sum_{i \in I} z_{ik}}{N} \leq \beta_k, \quad k \in K \quad (4.11)$$

De la restricción (4.11) tenemos el siguiente conjunto de restricciones:

$$\alpha_k \cdot N \leq \sum_{i \in I} z_{ik}, \quad k \in K \quad (4.12)$$

$$\sum_{i \in I} z_{ik} \leq \beta_k \cdot N \quad k \in K \quad (4.13)$$

por último el dominio de las variables es el siguiente:

$$z \in \{0, 1\}^{|I| \times |K|}, \quad H \in \{0, 1\}^{|I| \times |J| \times |K|} \quad (4.14)$$

#### 4.3.7 MODELO MATEMÁTICO

El modelo matemático completo se muestra a continuación:

$$\min \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} H_{ijk} \quad (4.15)$$

sujeto a:

$$H_{ijk} + z_{ik} \geq a_{ijk} \quad i \in I, j \in J, k \in K \quad (4.16)$$

$$H_{ijk} - z_{ik} \geq -a_{ijk} \quad i \in I, j \in J, k \in K \quad (4.17)$$

$$\sum_{k \in K} z_{ik} = 1 \quad i \in I \quad (4.18)$$

$$\alpha_k \cdot N \leq \sum_{i \in I} z_{ik} \quad k \in K \quad (4.19)$$

$$\beta_k \cdot N \geq \sum_{i \in I} z_{ik} \quad k \in K \quad (4.20)$$

$$z \in \{0, 1\}^{|I| \times |K|} \quad (4.21)$$

$$H \in \{0, 1\}^{|I| \times |J| \times |K|} \quad (4.22)$$

## 4.4 DETERMINACIÓN DE LA POSIBILIDAD DE OBTENER UN CONSENSO CONFIABLE

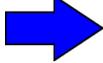
De acuerdo a la dificultad de la clasificación de artículos en los que se ve cuales fueron los más difíciles y los más fáciles de clasificar (sección 4.1) podemos anticipar que la obtención de un artículo de consenso quizá sea una tarea complicada al tener artículos muy discordantes, sin embargo el modelo matemático de programación entera se puede contrastar contra los artículos que resultaron difíciles de clasificar en la matriz de datos original (clasificaciones dadas por diversos métodos multicriterio) para formarnos un juicio sobre la calidad de nuestros resultados y sustentarlo con los resultados de cada método de clasificación ABC multicriterio.

## 4.5 GENERACIÓN VARIACIONES.

Por variación se quiere dar a entender una perturbación (movimiento) en la matriz de datos original que corresponde a las clasificaciones dadas por cada método multicriterio, como ejemplo veamos un caso ficticio mostrado en la Tabla 4.3 en el que se tiene una matriz original con 5 métodos y 6 artículos, luego se procede a realizar una perturbación en los dos primeros elementos de la fila correspondiente a  $x_1$ , lo que nos da una variación de la matriz original (Tabla 4.3b) con los nuevos elementos **B** y **C** mientras los demás elementos de la matriz siguen intactos.

Teniendo como base una matriz **A** de tamaño  $n \times m$  en donde  $n$  representa el número de artículos en un inventario y  $m$  el número de métodos, las variaciones se realizan de la siguiente forma: si el elemento  $a_{ij}$  de la matriz **A** es categorizado con la etiqueta A o B por un método multicriterio, el movimiento que se realiza sobre el elemento  $a_{ij}$  es hacia la etiqueta B, esto es, se cambia la etiqueta A por una etiqueta B; para el caso en que el elemento  $a_{ij}$  sea una etiqueta B; se realizarán dos movimientos, contando cada movimiento como una variación, este movimiento se hace primero hacia A y luego hacia C,

**Tabla 4.3** – Representación genérica de una variación

(a) Matriz original							(b) Variación					
Artículo	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$	$M_5$		Artículo	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$	$M_5$
$x_1$	A	B	A	B	C		$x_1$	B	C	A	B	C
$x_2$	A	C	A	B	C		$x_2$	A	C	A	B	C
$x_3$	A	C	A	A	C		$x_3$	A	C	A	A	C
$x_4$	C	A	A	C	C		$x_4$	C	A	A	C	C
$x_5$	B	C	A	B	A		$x_5$	B	C	A	B	A
$x_6$	C	C	A	C	B		$x_6$	C	C	A	C	B

esto quiere decir que si un elemento es etiquetado como B se hace un cambio de etiqueta en ése elemento por una etiqueta A y luego se cambia la etiqueta de ése mismo elemento por una etiqueta C. Lo anterior se expresa en el algoritmo 4.1

Para la realización de diferentes variaciones también se toma en cuenta el número de movimientos (perturbaciones) realizados al mismo tiempo, esto nos permite realizar dos o más movimientos al mismo tiempo. La idea de estos movimientos “al mismo tiempo” es para plantear la posibilidad de que dos métodos se equivoquen al mismo tiempo o que quizá tres métodos se equivoquen al mismo tiempo por artículo.

Para determinar el número de movimientos al mismo tiempo que se toman en cuenta para realizar las variaciones, se determinó la siguiente regla: mientras el residuo de dividir el número de métodos  $n$  entre el número de movimientos deseados  $v$  sea “cero” (esto es que  $n \bmod v = 0$ ), entonces el número de  $v$ -movimientos a la vez es tomado en cuenta. Para ilustrar lo anterior, veamos el caso en el que se tienen  $n = 6$  métodos y se quiere saber cuántos movimientos  $v$  al mismo tiempo se tomarán en cuenta, de este ejemplo vemos que los movimientos tomados en cuenta son  $v = 1, 2, 3, 6$ , esto es debido a que son los únicos valores para los que el número de métodos  $n$  es divisible, ver Tabla 4.4.

---

**Algoritmo 4.1:** Variación

---

**Entrada** : **A**: Matriz de clasificaciones iniciales de dimensión  $n \times m$ **Salida** : **S**: Variación de la matriz original

```
1 begin
2   for  $i = 1$  to Articulos do
3     for  $j = 1$  to Metodos do
4       if  $a_{ij} = A$  or  $a_{ij} = C$  then
5          $a_{ij} \leftarrow B$ ;
6       else
7          $a_{ij} \leftarrow A$ ;
8          $a_{ij} \leftarrow C$ ;
9       end
10    end
11  end
12 end
```

---

## 4.6 APLICACIÓN DE MODELO MATEMÁTICO

A continuación se explica el proceso de la aplicación del modelo matemático propuesto en la sección 4.3.7 a los datos obtenidos de diferentes clasificaciones multicriterio para los casos en el que no se realizan variaciones y cuando sí se realizan variaciones.

### 4.6.1 SIN VARIACIONES

Para obtener una solución de consenso a través del modelo matemático sin tener en cuenta variaciones, se toman las clasificaciones entregadas por cada método multicriterio para conformar una matriz  $\mathbf{A}_{m \times n}$  y se aplica directamente el modelo de la sección 4.3.7.

**Tabla 4.4** – Movimientos al mismo tiempo que se tomarán en cuenta para el caso de  $n = 6$  métodos.

$v$	$n \bmod v$	¿considerar?
1	0	Sí
2	0	Sí
3	0	Sí
4	2	No
5	1	No
6	0	Sí

#### 4.6.2 CON VARIACIONES

Ya que se observaron cuáles fueron los artículos más fáciles y difíciles de clasificar, la idea de experimentar con diferentes datos generados a partir de la matriz de datos original se hace para observar el comportamiento de las posibles clasificaciones obtenidas por la aplicación de alguna regla que simule un escenario en el que un método de clasificación multicriterio para el método ABC se equivoque y posteriormente evaluar esa clasificación en el modelo matemático propuesto en la sección 4.3.7; estas variaciones son las que se obtienen por la aplicación de la ecuación (4.2).

Luego de establecer una solución para el problema original se realizarán variaciones con uno, dos o más movimientos a la vez, para finalmente aplicar el modelo matemático propuesto en la sección 4.3.7 y obtener un solución única.

La restricción de la ecuación (4.1) se puede ver como las variaciones sobre los parámetros del modelo, ya que esta generación tiene una similitud a la búsqueda de las particiones  $E$  expuestas en la ecuación (4.1).

Para obtener una clasificación de consenso utilizando variaciones en los parámetros de entrada, se procede de la siguiente manera:

1. Se determina el conjunto de movimientos  $\mathcal{V}$  al mismo tiempo que han de emplearse.

2. Se generan las variaciones de acuerdo a los movimientos determinados del paso anterior y utilizando la regla de cambio de etiqueta que se explicó en la sección 4.5
3. Se aplica la ecuación (4.2) a cada conjunto de variaciones obtenido por cada movimiento.
4. Se extrae el conjunto de soluciones que proporcionan el menor número de discrepancias en cada conjunto de variaciones.
5. Se aplica la ecuación (4.2) al conjunto con el menor número de discrepancias del paso anterior para obtener una única clasificación por cada conjunto de variaciones.
6. Se aplica el modelo de la sección 4.3.7 sobre el conjunto de clasificaciones obtenidas del paso anterior.

## 4.7 CONCLUSIONES

En este capítulo se expone la metodología de solución propuesta para encontrar una solución de consenso derivada de clasificaciones multicriterio. Se expuso un modelo genérico de consenso tomado de la literatura, esto es debido que el consenso se puede obtener bajo dos esquemas: el primero consiste en tomar una solución que mejor represente al conjunto de soluciones originales, el segundo consiste en tomar una de las soluciones originales como el consenso por ser la más parecida a las demás soluciones.

Como se ha expuesto en secciones anteriores, nuestro problema es encontrar un consenso a partir de la generación de distintas instancias obtenidas a través de variaciones en los parámetros que corresponden al conjunto de clasificaciones originales, por lo que nuestro modelo cae dentro de los métodos que buscan encontrar una solución de consenso asumiendo que solo existen errores de medición en los datos por lo que cada método se considera igual, esto quiere decir que son iguales en el sentido de que contienen el mismo número de grupos pero difieren en los elementos que contienen en cada grupo. Este enfoque es denominado en la literatura como *partición central*. También este enfoque corresponde al enfoque de optimización que aparece en la literatura de consenso.

---

Se explica como se generan las variaciones que posteriormente se utilizan en el modelo matemático de programación entera para obtener la solución de consenso, esta solución de consenso tiene como función objetivo minimizar el número de discrepancias con respecto al conjunto de clasificaciones dadas originalmente y además se imponen restricciones sobre el número de artículos deseados en cada categoría para seguir la regla del 80-20 del principio de Pareto.

## CAPÍTULO 5

# EVALUACIÓN COMPUTACIONAL

---

En este capítulo se presentan los resultados de los experimentos numéricos realizados con dos conjuntos de datos, el primero corresponde a la literatura que motivó este trabajo en la que se presentan los resultados de clasificaciones multicriterio de 6 métodos para un conjunto de 47 artículos, los datos de esta literatura aparecen en el trabajo de [35] los cuales se exponen en la Tabla A.1. El otro conjunto de datos sobre al que se le aplicó la metodología propuesta corresponden al trabajo realizado por [7] en el que se trabaja cuatro métodos multicriterio sobre un conjunto de 57 artículos, en el trabajo de [7] se aplica una metodología para encontrar un clasificación de consenso, esta metodología se basa en una heurística en la que se clasifica un artículo bajo un enfoque pesimista y otro optimista para posteriormente aplicar un método de clasificación de multicriterio basada en el análisis ABC de inventarios propuesto por [64].

Se presentan los resultados de las variaciones realizadas para los datos de la literatura y los datos del caso de estudio, así como las clasificaciones de consenso obtenidas sin y con la aplicación de variaciones.

Para la realización de las variaciones se recurrió al lenguaje de programación de alto nivel C++ usando el compilador GCC versión 4.6.1 bajo GNU/Linux Ubuntu 11.10. La resolución de cada variación generada para calcular el conjunto de clasificaciones con el menor número de discrepancias se hizo codificando el modelo matemático en el lenguaje de programación matemática GNU MathProg con el solver independiente GLPK LP/MIP

Solver, versión 4.43 [1]. Se utilizó una computadora HP con 4Gb de memoria RAM y un procesador Intel Core i3-350M a 2.7GHz.

## 5.1 DATOS TOMADOS DE LA LITERATURA.

### 5.1.1 DESCRIPCIÓN DE LOS DATOS.

El ejemplo de la literatura (ver [35]) se basa sobre un problema de administración de inventarios en un hospital. En este trabajo se consideran 47 artículos utilizados del área de terapia respiratoria, estos datos se derivan a su vez del trabajo de [63]; los artículos según [63] son clasificados usando un AHP basado en el análisis ABC multicriterio. Se identificaron cuatro criterios: (1) uso anual en dinero, que varía sobre un rango de \$25.38 a \$5840.64 ; (2) costo unitario promedio, variando en un rango de \$5.12 a \$210.00; (3) factor de criticidad, 1, 0.50 ó 0.01 se asigna a cada uno de los 47 artículos, en donde 1 indica muy crítico, 0.50 moderadamente crítico y 0.01 quiere decir no crítico; por último, (4) tiempo guía (lead time) que varía en un rango de 1 a siete semanas. Como se mencionó antes, además del método aplicado inicialmente de [63], se aplicaron varios métodos ABC multicriterio incluyendo [33, 114, 124, 161]. Los resultados de estos métodos son mostrados en la Tabla A.1.

### 5.1.2 DIFICULTAD DE LA CLASIFICACIÓN DE LOS ARTÍCULOS.

En esta sección se presentan los artículos más difíciles y fáciles de clasificar, se da la definición de grado de dificultad y grado de facilidad para la clasificación de un artículo en una categoría (A, B o C).

#### IDENTIFICACIÓN DE LOS ARTÍCULOS MÁS CONFLICTIVOS

En esta sección se presentan los **artículos que resultan más difíciles de clasificar**, se hace notar que estos grupos son difíciles de clasificar en el sentido de que no presentan

una mayor frecuencia en alguna de las tres categorías tomadas en cuenta (A, B o C), sino por el contrario, aparecen con la misma frecuencia en dos o tres categorías lo que hace difícil decidir a qué grupo pertenecen para contrastarlos en la clasificación de consenso.

Dentro de estos artículos difíciles de clasificar se hace una diferencia entre dos grupos de artículos, por una lado tenemos artículos que son difíciles de clasificar “en alguna medida” y artículos difíciles de clasificar “en gran medida” (Tabla 5.1), eso es porque los artículos difíciles de clasificar moderadamente aparecen con la misma frecuencia en dos de las tres categorías, por lo que la toma de decisiones se reduciría a clasificarlos solamente en uno de esos dos grupos, sin embargo, los artículos que son más difíciles de clasificar tienen la misma frecuencia de aparición en las tres categorías por lo que la decisión de clasificarlo en uno de los tres grupos es más complicada.

El adjetivo “alguna medida” o “gran medida” se representa con los siguientes valores, que denominaremos grados de dificultad, observe que el grado de dificultad se asocia con el término lingüístico “alguna medida” o “gran medida”:

1. Alguna medida
2. Gran medida

**Tabla 5.1** – Artículos fáciles y difíciles de clasificar para los datos de la literatura [35].

													Total
Muy fácil	25	26	30	35	41	42	44	46					8
Fácil	1	2	9	13	23	27	31	38	43	45	47	3	12
Regularmente Fácil	4	7	12	20	22	37	40						7
Poco fácil	6	16	19									3	
Muy poco fácil	5	10	14	21	24	34						6	
Difícil	8	11	17	18	29	32	33	36	39				9
Muy difícil	15	28										2	

De acuerdo a lo anterior, observando los datos presentados en la Tabla 5.1 los artículos más difíciles de clasificar es el conjunto de artículos  $\{x_{15}, x_{28}\}$ . Por otro lado el conjunto artículos con una dificultad moderada de clasificación es  $\{x_8, x_{11}, x_{17}, x_{18}, x_{29}, x_{32}, x_{33}, x_{36}, x_{39}\}$  (Tabla 5.1).

## IDENTIFICACIÓN DE LOS ARTÍCULOS MENOS CONFLICTIVOS

En esta sección se presentan el análisis de los artículos que resultan más fáciles de clasificar, se retoma la idea expresada en la sección 5.1.2. Se hace notar que estos grupos son fáciles de clasificar en el sentido de que presentan una mayor frecuencia en alguna de las tres categorías tomadas en cuenta (A, B o C), sin embargo dentro de estos artículos fáciles de clasificar se hace una diferencia de los artículos que presentan una fuerte clasificación en alguna de las tres categorías con respecto a aquellos que tienen una débil clasificación en alguna de las tres categorías. El adjetivo de fuerte o débil se considera en función de la frecuencia con la que aparece un artículo en una de las tres categorías (A, B o C), marcando este adjetivo como “grados de facilidad” con los siguientes valores asociados a un término lingüístico:

1. Muy poca facilidad de clasificación
2. Poca facilidad de clasificación
3. Regular facilidad de clasificación
4. Gran facilidad de clasificación
5. Muy grande facilidad de clasificación

Así, decimos que un grupo de artículos con una grado de facilidad de clasificación “3”, indica que la facilidad de clasificación es “regularmente fácil” de acuerdo a su frecuencia en alguna de las tres categorías.

Observando los artículos fáciles de clasificar en la Tabla 5.1 vemos que el conjunto de artículos más fáciles de clasificar es  $\{x_{25}, x_{26}, x_{30}, x_{35}, x_{41}, x_{42}, x_{44}, x_{46}\}$  seguido por el conjunto de artículos fáciles de clasificar grado dos. La Tabla 5.1 también muestra el conjunto de artículos que son poco fáciles de clasificar debido a que un cambio en la clasificación de un artículo fácilmente crearía un problema en determinar su clasificación única, por ejemplo en la Tabla 5.2 se muestran las frecuencias con la que cada artículo

**Tabla 5.2** – Frecuencia por categoría para los artículos considerados muy poco fáciles de clasificar, datos de la literatura [35].

<b>Item</b>	$k_1$	$k_2$	$k_3$
5	1	3	2
10	2	3	1
14	2	3	1
21	1	3	2
24	1	2	3
34	1	2	3

aparece en cada categoría de clasificación  $k_i$ , el artículo 5 que muestra mayor frecuencia de aparición en la categoría B, ante alguna perturbación en el esquema de clasificación manejado para ese artículo rápidamente invalidaría la afirmación de que el artículo 5 puede pertenecer a la categoría B ya que si en en alguno de los métodos es clasificado como categoría A tendríamos un problema al decidir cuál es la categoría que mejor representa a este artículo por tener la misma frecuencia en cada uno de los métodos, es decir su grado de dificultad sería dos. Por otro lado si uno de los métodos clasifica al artículo 5 en la categoría C tendríamos dificultad de clasificación grado uno al presentarse la dificultad de clasificarlo en la categoría B o C.

### 5.1.3 GENERACIÓN DE VARIACIONES PARA LOS DATOS TOMADOS DE LA LITERATURA.

Para el caso de los datos de la literatura tomados de [35], el número de variaciones que se obtuvieron para cada movimiento se muestra en la Tabla 5.3. Para estas variaciones generadas se observa que el valor objetivo oscila alrededor de los valores 91 y 98. El número total de variaciones fue de 375 para 1 movimiento a la vez, 209 para 2 movimientos al mismo tiempo, 153 para tres movimientos al mismo tiempo y 81 variaciones para seis movimientos al mismo tiempo. A continuación se expone brevemente como se realizaron

**Tabla 5.3** – Número de variaciones obtenidas para los datos de la literatura.

mov	No.variaciones	función objetivo	
		min	max
1	375	94	96
2	209	97	93
3	153	92	98
6	81	91	95

las variaciones sobre el conjunto de datos mostrados en la literatura [35].

#### GENERACIÓN DE VARIACIONES CON UN MOVIMIENTO A LA VEZ

Para visualizar el esquema de realizar un movimiento a la vez nos enfocaremos en las primeras dos filas de la matriz de datos originales (Tabla A.1) propuestas por [35]. El movimiento se realiza de acuerdo a al algoritmo 4.1.

**Tabla 5.4** – Variaciones con un movimiento a la vez

(a) Matriz Original							(b) Variación 1						
Item	Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	Item	Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6
1	A	B	A	A	A	A	1	<b>B</b>	B	A	A	A	A
2	A	C	A	A	A	A	2	A	C	A	A	A	A
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
46	C	C	C	C	C	C	46	C	C	C	C	C	C
47	C	B	C	C	C	C	47	C	B	C	C	C	C

(c) Variación 2							(d) Variación 3						
Item	Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	Item	Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6
1	A	<b>A</b>	A	A	A	A	1	A	<b>C</b>	A	A	A	A
2	A	C	A	A	A	A	2	A	C	A	A	A	A
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
46	C	C	C	C	C	C	46	C	C	C	C	C	C
47	C	B	C	C	C	C	47	C	B	C	C	C	C

Como se muestra en la Tabla 5.4, las tres variaciones se originan de la matriz original, haciendo un movimiento (cambio de etiqueta) de acuerdo al algoritmo 4.1 en cada celda de la matriz, restaurando los valores originales durante el avance por cada fila de la matriz de datos originales.

Para más detalles de la generación de variaciones con dos o más movimientos a la vez, se sugiere revisar el apéndice E.

#### 5.1.4 CLASIFICACIÓN DE CONSENSO SIN VARIACIONES PARA LOS DATOS DE LA LITERATURA.

Mediante la aplicación del modelo matemático de la sección 4.3.7 se obtuvo la clasificación de consenso que se muestra en la Tabla C.1 en el apéndice de esta tesis. En este resultado no se consideraron las variaciones realizadas, solamente se tomaron los clasificaciones de los 6 métodos multicriterio de la literatura de [35]. La clasificación de consenso obtenida sin variaciones se denotará como  $Z_1$  mientras que la clasificación de consenso obtenida con variaciones se denotará como  $Z_2$

La proporción de artículos se fijó entre los niveles  $\alpha$  y  $\beta$  de cada categoría  $k_i$  como se muestran en la Tabla 5.5. En la Tabla 5.6, también vemos que la cantidad de artículos por cada categoría fue similar a la de los métodos multicriterio de la literatura [35], esto se debe a la restricción de las proporciones acotadas por  $\alpha$  y  $\beta$ .

**Tabla 5.5** – Cantidad de artículos en el consenso  $Z_1$  de los datos de la literatura sin realizar variaciones.

	$k_1$	$k_2$	$k_3$
$\alpha$	0.05	0.20	0.50
$\beta$	0.20	0.30	0.80
<b>Cantidad</b>	6	14	27
<b>Porcentaje</b>	12.77	29.79	57.45

Los datos de la Tabla 5.6 muestra que la clasificación de consenso obtenida mediante la aplicación del modelo matemático se encuentra cerca de los métodos 5 y 6 en la categoría A con un 12.77% de artículos para la categoría B el consenso que se obtuvo está cerca de los métodos 1,2,3 y 4 con un 29.79% del total de artículos, por último para la categoría C

**Tabla 5.6** – Cantidad de artículos en cada categoría de los datos de la literatura [35].

	$k_1$		$k_1$		$k_1$	
	Cantidad	Porcentaje	Cantidad	Porcentaje	Cantidad	Porcentaje
$M_1$	10	21.28	14	29.79	23	48.94
$M_2$	10	21.28	14	29.79	23	48.94
$M_3$	10	21.28	14	29.79	23	48.94
$M_4$	10	21.28	14	29.79	23	48.94
$M_5$	5	10.64	26	55.32	16	34.04
$M_6$	5	10.64	11	23.40	31	65.96
$Z_1$	6	12.77	14	29.79	27	57.45

el consenso  $Z_1$  obtuvo un 57.45% de los artículos lo cual lo coloca cerca entre los métodos 1,2,3,4 y 5. De acuerdo a los resultados el consenso comparte información con todos los métodos por lo que en una categoría el consenso está en mayor acuerdo con unos métodos y con otros métodos en otra categoría. Reforzando la idea de que es una clasificación que busca centralizarse como la idea expuesta en la sección 4.2.

### 5.1.5 CLASIFICACIÓN DE CONSENSO PARA LOS DATOS DE LA LITERATURA CON VARIACIONES.

Una vez determinada la manera de realizar las variaciones con los esquemas de movimientos uno, dos, tres y seis a la vez, se procede a aplicar la ecuación (4.2) para obtener el conjunto de soluciones con el menor número de discrepancias y posteriormente se aplicaron los pasos descritos en la sección 4.6.2. Las variaciones que se obtuvieron para cada movimiento se indican en la Tabla 5.3. En esta sección nos referimos a la clasificación de consenso con variaciones como  $Z_2$ ; los artículos por categoría de la clasificación de consenso  $Z_2$  puede consultarse en la Tabla C.2 en la sección de apéndices de esta tesis.

De la Tabla 5.7 se observa que la clasificación de consenso  $Z_2$  está entre los métodos 4 y 5, denotados como  $M_4$  y  $M_5$  respectivamente lo que nos da una idea que el consenso busca centralizarse con respecto a las seis métodos. Podemos notar que en este caso la clasificación  $Z_2$  no coincide con ninguna de las particiones originales con lo que se refuerza

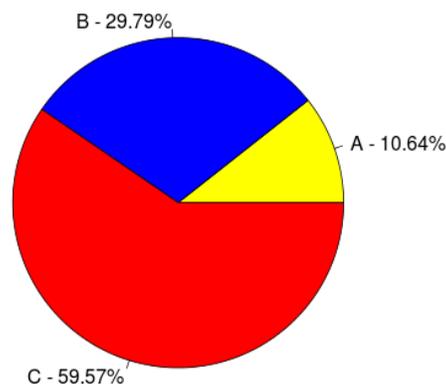
**Tabla 5.7** – Resultados del consenso  $Z_2$  obtenido mediante la realización de variaciones para los datos de la literatura [35].

	$k_1$		$k_2$		$k_3$	
	Cantidad	Porcentaje	Cantidad	Porcentaje	Cantidad	Porcentaje
$M_1$	10	21.28	14	29.79	23	48.94
$M_2$	10	21.28	14	29.79	23	48.94
$M_3$	10	21.28	14	29.79	23	48.94
$M_4$	10	21.28	14	29.79	23	48.94
$M_5$	5	10.64	26	55.32	16	34.04
$M_6$	5	10.64	11	23.40	31	65.96
$Z_2$	5	10.64	14	29.79	28	59.57

la idea de la partición central propuesta en la ecuación (4.1), de esta manera la búsqueda de la partición de consenso de los datos de la literatura (Tabla A.1) puede estar asociada con la partición central que se ha mencionado en la literatura de [73] y no con la partición medoide.

De acuerdo a los resultados presentados en la Tabla 5.7 observamos que el resultado obtenido en el consenso nombrado como  $Z_2$  es satisfactorio con respecto a la regla empírica de Pareto ya que el 10.64 % de artículos están en la categoría A ( $k_1$ ) y el 89.36 % restante se reparte en las categorías B y C (ver figura 5.1).

**Figura 5.1** – Porcentaje de los artículos en cada categoría para la clasificación de consenso con variaciones con los datos tomados de [35].



## 5.2 DATOS TOMADOS DE UN CASO DE ESTUDIO REAL.

Para la realización de este trabajo se utilizaron los datos de un caso real tomados de [7] en donde se contempló una muestra de 100 artículos, sin embargo se eliminaron todos aquellos artículos con información incompleta, dando como resultado un conjunto de datos compuesto por 57 artículos, de los cuales 4 artículos son materia prima y 3 son material nuevo.

Para estos datos también se contó con la clasificación de los 57 artículos dadas por expertos, algunos artículos requirieron consideraciones especiales para su clasificación. La clasificación dada por los expertos se denotará a partir de este momento como  $Z_0$ .

### 5.2.1 DESCRIPCIÓN DE LOS DATOS.

Los datos tomados de [7] se componen de la siguiente manera:

- Los criterios de clasificación fueron el uso anual en dinero (ADU), costo unitario, tiempo de entrega y criticidad.
- Las unidades en el tiempo de entrega se convirtieron a semanas debido a que la información proporcionada por la empresa era de días.
- La criticidad para cada método está dada en una escala en la que 1 significa que el artículo es muy crítico, 0.50 es moderadamente crítico y 0.01 no es crítico, siguiendo las recomendaciones de [33]
- Para la aplicación del método propuesto por [114] se determinó la importancia de los criterios (ADU, costo unitario, tiempo de entrega y criticidad) así como la normalización de los valores para tener una escala homogénea entre 0 y 1.

Los datos mostrados en [7] fueron el objetivo de un estudio para llevar a cabo una clasificación de consenso. En el trabajo de [7] se aplican los métodos multicriterio de [64, 114, 124, 161] (Tabla B.1) para luego obtener una clasificación de consenso a través

de un método heurístico basado en los enfoques denominados “pesimista” y “optimista”, en la clasificación hecha por los cuatro métodos antes mencionados también se observan discrepancias en la clasificación de los artículos considerados por lo que se hace hincapié en el desarrollo de una metodología para obtener un consenso a partir de las clasificaciones previamente dadas. Esta situación es la misma que se manifiesta en la observación de los resultados presentados en el trabajo de [35] en donde también existen discrepancias, aunque como se había comentado en las sección 3.1, estas discrepancias pueden ser inducidas fuertemente por las preferencias del tomador de decisiones.

**Tabla 5.8** – Artículos por categoría de acuerdo a los métodos usados en [7] para obtener un consenso.

	$k_1$		$k_1$		$k_1$	
	Cantidad	Porcentaje	Cantidad	Porcentaje	Cantidad	Porcentaje
$M_1$	4	7.02	22	38.60	31	54.39
$M_2$	8	14.04	9	15.79	40	70.18
$M_3$	17	29.82	10	17.54	30	52.63
$M_4$	8	14.04	9	15.79	40	70.18

### 5.2.2 DIFICULTAD DE LA CLASIFICACIÓN DE LOS ARTÍCULOS.

Los datos proporcionados por [7] se clasificaron en grupos de acuerdo a su facilidad y dificultad para establecer una clasificación única de acuerdo a los resultados proporcionados por cuatro métodos multicriterio. El ordenamiento de estos grupos se hizo en base a la frecuencia con la que aparecieron en cada categoría según los métodos multicriterio aplicados. Dentro de estos artículos la ordenación se hizo desde los artículos más fáciles hasta los artículos más difíciles de clasificar (esto es, dar una clasificación única).

En el conjunto de los artículos más fáciles de clasificar aparecen los artículos que en los cuatro métodos fueron clasificados bajo la misma categoría, en el conjunto de los artículos fáciles de clasificar están los artículos que en 3 de los cuatro métodos multicriterio

aplicados aparecieron en la misma categoría, en el conjunto de los artículos regularmente fáciles de clasificar aparecen los artículos que aparecieron clasificados en la misma categoría solamente en dos ocasiones, por último dentro de los artículos difíciles de clasificar tenemos a los que aparecieron clasificados con la misma categoría en dos de los cuatro métodos multicriterio mientras que los restantes dos métodos multicriterio aparecen clasificados en otra categoría, para los artículos muy difíciles de clasificar ocurre la misma observación de los artículos difíciles de clasificar. Sin embargo, la diferencia en este conjunto de artículos radica en que las categorías son totalmente opuestas, esto quiere decir que en dos métodos multicriterio estos artículos aparecieron clasificados con categoría “A” y en los otros dos métodos multicriterio restantes aparecieron clasificados como categoría “C”; como se puede observar, el control que se ejerce sobre un artículo categoría “A” es más estricta que el control sobre un artículo categoría “C”. Los resultados de la ordenación de los artículos de acuerdo a su facilidad y dificultad de clasificación son mostrados en la Tabla 5.9.

**Tabla 5.9** – Artículos fáciles y difíciles de clasificar para los datos del caso de estudio [7].

																Total	
Muy Fáciles	7	8	13	15	19	20	21	22	30	32	33	36	37	40	41	49	16
Fáciles	1	2	4	11	16	24	25	26	27	31	34	35	39	42	46	51	16
Regularmente Fáciles	9	14	17	18	23	29	38	44	48	52	53	55	56	57			14
Difíciles	3	5	6	28	43	45	47	50	54								9
Muy Difíciles	10	12															2

Por esta razón, la motivación para la aplicación de la metodología propuesta en esta tesis es la obtención de una clasificación de consenso ante posibles variaciones en los parámetros de entrada con el fin de asegurar que la solución final que se entrega es la que mejor representa a un conjunto de soluciones previamente entregadas por diferentes métodos multicriterio considerando posibles errores en la clasificación de un artículo, así como, descubrir cuál sería la verdadera clasificación de un conjunto de artículos bajo el análisis ABC multicriterio.

### 5.2.3 GENERACIÓN DE VARIACIONES PARA LOS DATOS DEL CASO DE ESTUDIO.

Después de realizar las variaciones como se planteó en la sección 4, se obtuvieron tres resultados que corresponden a las variaciones con uno, dos y cuatro movimientos a la vez como se muestra en la Tabla 5.10. En esta Tabla podemos observar que el valor mínimo de las funciones objetivo de todas las variaciones es 78, mientras que el valor máximo es 84 por lo que esperamos encontrar el consenso alrededor de esos valores de la función objetivo.

Para la obtención de las variaciones bajo el esquema propuesto en la sección 4.5 el tiempo de ejecución es bastante razonable, siendo en todos los casos menos de 2 segundos.

**Tabla 5.10** – Número de variaciones obtenidas para los datos del caso de estudio.

mov.	No.variaciones	función objetivo	
		min	max
1	278	81	83
2	159	80	84
4	96	78	82

Una vez realizadas las variaciones sobre la matriz de datos originales del caso de estudio se hizo el ordenamiento de acuerdo al valor de la función objetivo para obtener los conjuntos con el mínimo valor en la función objetivo. Así, se obtuvieron 112 particiones del primer conjunto de 278 variaciones, 37 del conjunto de 159 variaciones y 2 de 96 variaciones.

Estas particiones, se procesaron de acuerdo a la ecuación (4.2), excepto las 2 particiones de las 96 variaciones ya que constituían un conjunto muy pequeño. Así, para la aplicación del modelo matemático se consideraron al final 4 particiones de las que se obtuvo el consenso con los porcentajes  $\alpha_k$  y  $\beta_k$  expuestos en la Tabla 5.12. De esta manera se obtuvo la clasificación de consenso para el caso de estudio con los porcentajes

de artículos por categoría mostrados en la Tabla 5.15, esta clasificación se puede consultar en la Tabla D.2 en la sección de apéndices de esta tesis.

#### 5.2.4 TRABAJOS PREVIOS PARA LA CLASIFICACIÓN DE CONSENSO DE LOS DATOS DEL CASO DE ESTUDIO.

En la metodología propuesta por [7] se sugiere primero seleccionar los criterios según los cuales se realizará la clasificación, estos criterios deben ser aquellos con mayor relevancia para el caso de aplicación o según las necesidades de la empresa. En la aplicación de este método se fija el número de criterios en 4. Posteriormente se determina el conjunto de cuatro métodos de clasificación multicriterio a emplearse y obtener para cada uno de los métodos una clasificación basada en el método ABC. Finalmente se aplica el método de clasificación robusta que deriva una clasificación única y la cual es una representación de las preferencias de cada tomador de decisiones y que además tiene el menor número de discrepancias respecto a las clasificaciones obtenidas por cada método multicriterio. Los resultados de las proporciones de los artículos por cada categoría de esta metodología se muestran en la Tabla 5.11.

El método de clasificación robusta se basa en una heurística que se lleva a cabo de la siguiente manera:

1. Se separan los productos en fáciles o difíciles de clasificar.
2. Los casos fáciles (máximo dos categorías asignadas) son clasificados empleando la regla de mayoría simple o el método de [64].
3. Los casos difíciles de clasificar (tres categorías asignadas) son clasificados empleando la heurística. Inicialmente se clasifica cada producto empleando dos enfoques, uno optimista y otro pesimista y luego se aplica el método de [64] para obtener la clasificación final. Como solo tenemos tres categorías, estos casos solo tienen lugar cuando las clasificaciones obtenidas siguen uno de los tres patrones siguientes:

- a) Dos criterios asignan la categoría A, otro asigna la categoría B y el restante asigna la categoría C.
- b) Dos criterios asignan la categoría B, otro asigna la categoría A, y el que resta asigna la categoría C.
- c) Dos criterios asignan la categoría C, otro asigna la categoría A, y el restante asigna la categoría B.

La heurística optimista considera que de las dos categorías asignadas por un único criterio la que tiene una relevancia más baja ha sido asignada por error y la substituye por la categoría inmediata superior en la jerarquía preferencial. Mientras que la heurística pesimista, considera que de las dos categorías asignadas por un único criterio la que resulta más relevante ha sido asignada por error y la substituye por la categoría inmediata inferior en la jerarquía preferencial. Como resultado de este proceso se reduce el número de categorías asignadas a 2, lo que convierte el caso en fácil de clasificar aplicando la regla de mayoría simple o el método de [64].

En el trabajo de [7] también se expone un método para obtener una clasificación de consenso basado una relación de preferencias difusas de grupo [61]. Esta propuesta trata de obtener decisiones de consenso en grupo en situaciones de clasificación o evaluación.

De acuerdo a [61] en un problema de clasificación se tiene un universo de objetos  $U$  y un conjunto de miembros  $G$ . Existe un conjunto finito de categorías de evaluación  $C_t = \{C_1, \dots, C_M\}$ . Un objeto  $x \in U$  es evaluado por el  $j$ -ésimo decisor en la categoría  $C_{kj} \in C_t$ . El problema es identificar un consenso de grupo razonable  $C_g \in C_t$ .

En el trabajo de [7] fue necesario realizar un ranking de preferencias sobre la asignación de cada artículo en base a la clasificación obtenida en cada método, siendo la primera categoría la más preferida y la última la menos preferida. La proporción de artículos de esta metodología se visualizan en la Tabla 5.11 y en secciones posteriores estas soluciones se denotarán como  $Z_3$  y  $Z_4$  respectivamente. Los resultados de estas clasificaciones de consenso se pueden consultar en la Tabla B.2 que se encuentra en la sección de apéndices de esta tesis.

**Tabla 5.11** – Porcentajes obtenidos en el consenso para los datos del caso de estudio mediante los métodos de [7] y [61].

	$k_1$		$k_2$		$k_3$	
	Cantidad	Porcentaje	Cantidad	Porcentaje	Cantidad	Porcentaje
Avila Et al [7]	10	17.54	6	10.53	41	71.93
Fernandez y Olmedo [61]	3	5.26	9	15.79	31	54.39
Expertos	9	15.79	12	21.05	36	63.16

### 5.2.5 CLASIFICACIÓN DE CONSENSO SIN VARIACIONES PARA LOS DATOS DEL CASO DE ESTUDIO.

La metodología propuesta en esta tesis se aplicó a los datos de [7] sin variaciones y con variaciones en la matriz de datos original (la clasificación entregada por cada método multicriterio ABC). Los porcentajes para cada categoría se fijaron dentro de los rangos mostrados en la Tabla 5.12 de acuerdo a los porcentajes recomendados en la literatura [35, 38, 96]. De aquí en adelante se denotará a la clasificación de consenso sin variaciones realizadas sobre la matriz de clasificaciones multicriterio como  $Z_1$  para el caso de variaciones realizadas la clasificación de consenso se denotará como  $Z_2$ , al consenso obtenido mediante la metodología de [7] como  $Z_3$  y al consenso mediante la metodología de [61] como  $Z_4$

**Tabla 5.12** – Porcentajes mínimos y máximos aceptables para cada categoría  $k_i, i = 1, 2, 3$ .

	$\alpha$	$\beta$
$k_1$	0.05	0.20
$k_2$	0.20	0.35
$k_3$	0.50	0.80

Mediante la aplicación del modelo matemático sin realizar la variación en la matriz de clasificaciones dadas por diferentes métodos multicriterio, se obtuvieron las siguientes

proporciones de artículos: (I) 12.28 % de artículos en categoría “A”, (II) 21.05 % de artículos en categoría “B” y (III) 66.67 % de artículos en categoría “C”, (ver Tabla 5.13).

**Tabla 5.13** – Resumen de las proporciones de artículos por cada categoría  $k_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  sin realizar variaciones en el caso de estudio [7].

$Z_1$	$k_1$	$k_2$	$k_3$
<b>Cantidad</b>	7	12	38
<b>Porcentaje</b>	12.28	21.05	66.67

Los resultados del consenso para el caso de estudio sin realizar variaciones ( $Z_1$ ) se contrastan en la Tabla 5.14 con los resultados de la aplicación de cuatro métodos multi-criterio denotados como  $M_1, M_2, M_3, M_4$  usados en [7]; con la clasificación de consenso usando el método [7] ( $Z_3$ ), la clasificación de consenso usando el método de [61] ( $Z_4$ ) y las opiniones emitidas por los expertos ( $Z_0$ ).

**Tabla 5.14** – Comparación de los resultados del consenso obtenido para los datos del caso de estudio sin realizar variaciones.

	$k_1$		$k_2$		$k_3$	
	Cantidad	Porcentaje	Cantidad	Porcentaje	Cantidad	Porcentaje
$M_1$	4	7.02	22	38.60	31	54.39
$M_2$	8	14.04	9	15.79	40	70.18
$M_3$	17	29.82	10	17.54	30	52.63
$M_4$	8	14.04	9	15.79	40	70.18
$Z_1$	7	12.28	12	21.05	38	66.67
$Z_3$	10	17.54	6	10.53	41	71.93
$Z_4$	3	5.26	9	15.79	31	54.39
$Z_0$	9	15.79	12	21.05	36	63.16

En la Tabla 5.14 se nota que para el método de Fernández y Olmedo [61] (denotado en la Tabla como  $Z_4$ ) el número total de artículos no corresponde a los 57 artículos mencionados para el caso de estudio, ésto es debido a que el método presenta inconsistencias en la clasificación de algunos artículos al no poder establecer una clasificación única.

### 5.2.6 CLASIFICACIÓN DE CONSENSO CON VARIACIONES PARA LOS DATOS DEL CASO DE ESTUDIO.

De acuerdo a las variaciones generadas (sección 5.2.3), los resultados de la clasificación de consenso se muestran en la Tabla 5.15. Comparando los resultados de la clasificación de consenso usando variaciones, vemos que los el porcentaje de artículos dentro de cada categoría se mantiene dentro de niveles aceptables, ver Tabla 5.16.

**Tabla 5.15** – Resumen de las proporciones de artículos obtenidas mediante la metodología de consenso propuesta en esta tesis por cada categoría  $k_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  con variaciones para el caso de estudio de [7].

$Z_2$	$k_1$	$k_2$	$k_3$
<b>Cantidad</b>	3	13	41
<b>Porcentaje</b>	5.26	22.81	71.93

**Tabla 5.16** – Comparación de los resultados del consenso obtenido con la metodología de esta tesis para los datos del caso de estudio con variaciones.

	$k_1$		$k_2$		$k_3$	
	Cantidad	Porcentaje	Cantidad	Porcentaje	Cantidad	Porcentaje
$M_1$	4	7.02	22	38.60	31	54.39
$M_2$	8	14.04	9	15.79	40	70.18
$M_3$	17	29.82	10	17.54	30	52.63
$M_4$	8	14.04	9	15.79	40	70.18
$Z_2$	3	5.26	13	22.81	41	71.93
$Z_3$	10	17.54	6	10.53	41	71.93
$Z_4$	3	5.26	9	15.79	31	54.39
$Z_0$	9	15.79	12	21.05	36	63.16

### 5.3 COMPARACIONES ENTRE CONSENSO OBTENIDO SIN VARIACIONES Y CON VARIACIONES

De acuerdo a los resultados mostrados en las Tablas 5.13 y Tabla 5.15, se observa que las proporciones de los artículos son similares, solo difieren en la categoría “A” y “C” en un artículo mientras que la proporción para la categoría “B” es la misma en ambos resultados. Sin embargo, haciendo una revisión sobre los artículos que están en cada categoría encontramos que hay diferencias en el número de artículos que aparecen en la misma categoría, estas diferencias se muestran en la Tabla 5.17. Así vemos que, para la categoría “A”, los resultados coinciden solamente en un artículo, esto quiere decir que solamente un artículo apareció en la categoría “A” en ambas soluciones (sin variaciones y con variaciones); el número de artículos que aparecieron clasificados como categoría “B” en ambas soluciones fueron 7 y para la categoría “C” el número de artículos clasificados bajo la misma categoría fue de 36, siendo esta categoría la más consistente en ambas soluciones.

**Tabla 5.17** – Número de artículos que aparecen en ambas soluciones por cada categoría  $k_i, i = 1, 2, 3$  para el caso de estudio.

	$Z_1 \cap Z_2$	$Z_1$	$Z_2$
$k_1$	<b>1</b>	7	3
$k_2$	<b>7</b>	12	13
$k_3$	<b>36</b>	38	41
Total	44		

## 5.4 COMPARACIÓN DE RESULTADOS DEL CASO DE ESTUDIO OBTENIDO CON LA METODOLOGÍA PROPUESTA

En la Tabla 5.18 se muestra el número de artículos que estuvieron clasificados en la misma categoría para la metodología propuesta en esta tesis (sin variaciones y con variaciones) y la metodología de [7] en comparación con la clasificación de los expertos.

De la Tabla 5.18 observamos que el número de artículos que se clasificaron en la misma categoría con respecto a la clasificación de expertos fue de 39 artículos sin realizar variaciones, mientras que el número de artículos en la misma categoría para el caso de las variaciones fue de 41. La metodología de [7] mostró mayor número de artículos clasificados en la misma categoría con respecto a la clasificación de los expertos.

Aunque el método de [7] muestra una leve mejora en el número de artículos clasificados bajo la misma categoría, el método de consenso con variaciones muestra una solución aceptable ya que es el segundo que muestra mayor acuerdo con la clasificación dada por los expertos.

**Tabla 5.18** – Artículos que están en la misma categoría en los consensos y en la clasificación de los expertos.

	$k_1$	$k_2$	$k_3$	Total
$Z_3 \cap Z_0$	6	2	35	43
$Z_2 \cap Z_0$	1	5	35	41
$Z_1 \cap Z_0$	4	3	32	39
$Z_4 \cap Z_0$	2	2	27	31

Para los casos en los que no existe un acuerdo se puede pensar que son artículos que carecen de información concisa que permita establecer una categoría; para estos casos se recomienda recurrir a la consulta de los expertos para realizar la clasificación final. Lo que se debe resaltar es que con una solución como la que se ofrece en la metodología

propuesta en esta tesis es facilitar la toma de decisiones de tal manera que el administrador o el tomador de decisiones solo se concentre en los artículos más discordantes y difíciles de clasificar ya que para los artículos fáciles existe una fuerte evidencia de su clasificación; así, se puede pensar que la clasificación que se da para los artículos fáciles es de alguna forma la verdadera clasificación que en un principio se desconoce y provoca ciertas discrepancias entre la aplicación de diversos métodos multicriterio por las variaciones quizá en las preferencias de los tomadores de decisiones. La falta de experiencia de algún tomador de decisiones también se puede ver beneficiada por esta metodología ya que se le estaría entregando una solución bastante confiable para asistirlo en sus primeras decisiones de tal manera que su confianza incremente y la incertidumbre disminuya significativamente.

Un punto desfavorable para esta metodología es que quizá para un conjunto de datos más grande, más de 20,000 artículos, no sea práctica usarla ya que para una instancia de 20000 artículos que se generó con clasificaciones para cada artículo basándose en la frecuencia reportada en el caso de la literatura (6 métodos, 47 artículos, 3 categorías), el tiempo para encontrar la clasificación con la mínima discrepancia entre las clasificaciones originales fue de 2909.8 segundos, aproximadamente 49 minutos, por lo que para las variaciones generadas se puede esperar un tiempo similar que lo convierte en un problema poco tratable.

## 5.5 CONCLUSIONES.

En este capítulo se expusieron los resultados de la experimentación numérica con dos conjuntos de datos, uno corresponde a la literatura de [35] y el otro conjunto de datos corresponden a un caso de estudio mostrado en [7]. Para cada caso se presentaron las variaciones generadas y se aplicó la metodología del capítulo 4.

Para el caso de los datos tomados de la literatura se observa que la solución propuesta por la metodología no coincide con ninguna de las clasificaciones originales, con lo que se refuerza la idea de la partición central propuesta en [73] mostrando una similitud con nuestro problema; de este modelo, trabajos como los de [73] pueden servir para elaborar

un trabajo posterior a éste e incrementar la calidad de las soluciones mostradas hasta este momento.

Los resultados del caso de estudio mostraron un resultado aceptable, aunque no fue el mejor, se posicionó en segundo lugar de los cuatro consensos mostrados, solo después del consenso de [7]. Estos resultados se midieron con respecto al número de artículos que coincidían en cada categoría con la clasificación dada por los expertos.

La ventaja de esta metodología es que puede disminuir el tiempo de respuesta de un tomador de decisiones para concentrar su atención en artículos más difíciles de clasificar. También se pretende dar un soporte confiable al tomador de decisiones poco experimentado para incrementar su confianza en el proceso de toma de decisiones.

Una desventaja es que para un conjunto de datos más grande, alrededor de 20,000 artículos, esta metodología necesitará algunas modificaciones ya que el tiempo de resolución puede llegar a ser muy grande, ésto se apoya con la resolución de una instancia de 20,000 artículos con 6 métodos y 3 artículos para la que el tiempo de solución fue de 49 minutos.

## CAPÍTULO 6

# CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

---

En esta tesis se abordó el el problema de obtener una clasificación única que mejor represente al conjunto de clasificaciones (resultados) obtenidos por varios métodos multicriterio para el análisis ABC en inventarios.

El análisis ABC para la administración de los inventarios ha sido ampliamente usado en la práctica debido a su facilidad de aplicación, sin embargo ha recibido críticas debido a que tradicionalmente se ha trabajado considerando un solo criterio que es el uso anual en dinero (ADU). Debido a estas críticas, diversos investigadores en el área de inventarios, han propuesto el uso de más criterios simultáneamente para conseguir una clasificación integral que considere más de dos criterios a la vez.

El uso de más de un criterio para realizar las clasificación de artículos en inventario, bajo el método ABC, ha hecho que estos problemas sean el foco de atención para los investigadores en el área multicriterio por lo que se ha acuñado el término de “análisis ABC multicriterio” para referirse a esta clase de problemas.

Sin embargo el uso de la metodología multicriterio para el análisis ABC también ha puesto de manifiesto inconsistencia en los resultados obtenidos, ya que en la literatura se encuentran discrepancias entre los resultados que se obtienen por la aplicación de varias metodologías ABC multicriterio a un mismo conjunto de artículos. Estas discrepancias pueden llegar a poner en duda la veracidad de los resultados así como la confusión sobre qué método será conveniente elegir; se sabe que en esta era de globalización las compañías buscan mejorar su competitividad al buscar soluciones confiables que se basen en un

esquema de ahorros en tiempo y dinero, muchas veces (quizá la mayoría de las veces) estos esquemas se encuentran en conflicto, recurriendo al detrimento del tiempo para conseguir mayor rentabilidad, o viceversa.

Dentro de estos esquemas de ahorro en tiempo y dinero, la sugerencia de un método que garantice una solución confiable para que la toma de decisiones sea rápida con una alta rentabilidad, es de mucha importancia. Por lo tanto, la motivación de este trabajo es brindar una solución que contemple posibles errores de algún método ABC multicriterio en la clasificación de un artículo; de esta manera, el tomador de decisiones puede centrar su atención en los artículos más difíciles de clasificar sin tener que pensar en las causas que generan discrepancias entre diversos métodos aplicados previamente, ya que se está garantizando que aquellos artículos que son fáciles de clasificar son robustos en el sentido de que se han considerado dentro de amplio conjunto de casos posibles de variaciones (errores de clasificación).

## 6.1 CONCLUSIONES

Los siguientes párrafos resumen las conclusiones a las que se llegaron durante la realización de este trabajo.

1. Se enfatiza en que la idea no es poner en detrimento algún método multicriterio, si no por el contrario, se promueve la inclusión de más métodos acompañados de una metodología que proponga un consenso para garantizar una solución integral. Esto quiere decir que una buena solución se puede conseguir a través del uso de consenso para fortalecer cada solución individual y no provocar dudas en el tomador de decisiones por ver discrepancias en varios métodos de solución propuestos.
2. Los resultados obtenidos a través de los experimentos numéricos mostraron resultados adecuados al entregar soluciones que se mantenían dentro de las proporciones de la regla empírica de Pareto. Además, los resultados refuerzan la idea de la parti-

ción central [73] por lo que resultaría útil profundizar en métodos asociados con la partición central para incluirlos en la metodología como un trabajo futuro.

3. La calidad de las soluciones se midieron en función del número de discrepancias con respecto a la opinión emitida por los expertos, de esta manera la solución obtenida mediante la aplicación de variaciones queda posicionada en segundo lugar dentro de un conjunto de cuatro soluciones de consenso, el primer lugar lo ocupa la solución de consenso propuesta por [7].
4. Al utilizar una metodología como la nuestra para representar una única solución que sea confiable, también se realiza una aportación para justificar el uso de metodologías de consenso en problemas que se presentan en el sector industrial como los inventarios. En la revisión de la literatura se encuentra que el uso de métodos para encontrar un consenso entre varias soluciones principalmente se da en el campo de la biología, que es precisamente en esta área en donde surge una de las motivaciones más fuertes para desarrollar métodos numéricos para establecer una clasificación confiable de los organismos. Estas ideas posteriormente se retomaron para incursionar en campos como minería de datos, reconocimiento de patrones, computación distribuida, segmentación de mercado ,por mencionar algunas.
5. Otra aportación de este trabajo es brindar un soporte a los decisores poco experimentados para proponer una solución rápida y de buena calidad.
6. También se propone esta solución como un clasificación de referencia para la inclusión de un nuevo método, midiendo la similitud de una nueva clasificación multicriterio con la solución de la metodología de consenso y tener una idea de la calidad de la nueva metodología multicriterio propuesta.

## 6.2 TRABAJO FUTURO

El trabajo abordado en esta tesis se ha limitado únicamente a un conjunto reducido de artículos debido a que este conjunto de datos reportados en la literatura fueron los que

iniciaron la motivación para este trabajo. Por esta razón, una de las siguientes direcciones de la investigación es trabajar con un conjunto de artículos más grande.

Cuando se trabaja con instancias más grandes, por ejemplo 20,000 artículos la metodología propuesta no es adecuada ya que el tiempo computacional es prohibitivo. Así, bajo el supuesto de que se trabaje con un conjunto de artículos mucho mayor da lugar a que se experimente con adaptaciones de los métodos de consenso expuestos en la literatura principalmente los que se aplican para el problema de comités de agrupamientos. Mediante la aplicación de la metodología de comités de agrupamientos (clustering ensembles) se puede experimentar con los siguientes métodos para encontrar una función de consenso:

1. Función basada en co-asociación.
2. Función basada en métodos de votación.
3. Información Mutua.
4. Particionamiento de hipergrafos

También sería interesante encausar una investigación para encontrar una solución de consenso que sea exactamente una de las soluciones dadas por uno de los métodos multicriterio, esto es el equivalente de encontrar la partición “medoide” [73].

Debido a que en esta tesis se usó el enfoque de optimización, también se puede pensar en aplicar otros enfoques (constructivo o axiomático) como los propuestos por [9].

Para este trabajo solo se consideraron tres categorías, sin embargo la inclusión de una cuarta categoría para la clasificación puede ser conveniente para diseñar una estrategia de administración de inventarios más flexible.

Otro aspecto a considerar para un trabajo futuro es trabajar con grados de pertenencia de un artículo a una categoría de clasificación, de esta manera se estaría trabajando con métodos de consenso difusos que permitirían la incorporación de estos grados de pertenencia.

Además de experimentar con otras funciones de consenso también se puede experimentar con otras medidas de distancia como: 1) el índice Rand, 2) la medida de Jaccard extendida o 3) la distancia Minkowski

Dentro de las posibles extensiones para el problema abordado en esta tesis también se propone el siguiente modelo teórico que toma en consideración otro objetivo que se centra en minimizar las discrepancias entre el número de artículos en cada categoría  $k$  de cada variación  $s$  y la clasificación de consenso. El modelo matemático teórico se muestra a continuación, comenzando por las funciones objetivo:

$$\min \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} |z_{ik} - a_{ijks}| \quad s \in S \quad (6.1)$$

$$\min \left| \left( \sum_{i \in I} z_{ik} \right) - C_{ks} \right| \quad k \in K, s \in S \quad (6.2)$$

restricciones:

$$\sum_{k \in K} z_{ik} = 1 \quad i \in I \quad (6.3)$$

$$\alpha_{tps} \cdot \left( \frac{C_{ts}}{C_{ps}} - 1 \right) \cdot \sum_{i \in I} z_{ip} \leq \sum_{i \in I} z_{it} \quad t, p \in K, s \in S \quad (6.4)$$

$$\beta_{tps} \cdot \left( \frac{C_{ts}}{C_{ps}} + 1 \right) \cdot \sum_{i \in I} z_{ip} \geq \sum_{i \in I} z_{it} \quad t, p \in K, s \in S \quad (6.5)$$

$$z \in \{0, 1\}^{|I| \times |K|} \quad (6.6)$$

La ecuación (6.1) son las funciones objetivo que buscan minimizar la cantidad de discrepancias respecto a las clasificaciones dadas en cada variación  $s$ . La ecuación (6.2) son funciones objetivo que buscan la minimización de las diferencias entre la clase asignada  $k$  del artículo  $i$  y el cardinal de las clases  $k$  de las clasificaciones de cada variación  $s$ . La ecuación (6.3) es una restricción que asegura que se asigne una sola categoría  $k$  a un artículo  $i$ . La ecuación (6.5) y la ecuación (6.4) son restricciones para que las proporciones de los cardinales de cada categoría  $k$  se encuentren entre ciertos porcentajes  $\alpha$  y  $\beta$  entre cada variación  $s$ , esto es para que los cardinales de cada categoría  $k$  de cada variación  $s$  mantengan una similitud a través de un porcentaje  $\alpha$  y  $\beta$ . Por último la ecuación (6.6) indica el dominio de las variables de decisión.

## APÉNDICE A

# DATOS TOMADOS DE LA LITERATURA

---

En la tabla A.1 se muestran las discrepancias en los resultados reportados por seis métodos multicriterio. Los datos fueron extraídos del trabajo de [35]. El método 1 corresponde a [64], el método 2 corresponde a [124], el método 3 corresponde a [114], el método 4 corresponde a [161] y por último los métodos 4 y 5 corresponden al trabajo de [33].

**Tabla A.1** – Tabla de resultados obtenidos por seis métodos multicriterio para el análisis ABC [35]

Ítem	Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6
1	A	B	A	A	A	A
2	A	C	A	A	A	A
3	A	C	A	A	A	A
4	C	A	A	C	C	C
5	B	C	A	B	B	C
6	C	C	A	C	B	C
7	C	C	B	C	B	C
8	C	C	B	B	B	C

---

<b>Ítem</b>	Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6
9	A	C	A	A	A	A
10	B	C	A	A	B	B
11	B	C	C	C	B	B
12	B	C	B	B	B	C
13	A	C	A	A	A	A
14	B	A	B	A	B	C
15	A	A	C	C	B	B
16	C	A	C	C	B	C
17	B	B	C	C	B	C
18	A	A	B	A	B	B
19	B	A	B	B	B	C
20	B	B	C	B	B	C
21	A	B	C	C	B	B
22	B	B	C	B	B	C
23	A	B	B	B	B	B
24	A	C	C	C	B	B
25	C	C	C	C	C	C
26	C	C	C	C	C	C
27	C	B	C	C	C	C
28	C	A	B	A	B	C
29	B	A	A	A	B	B
30	C	C	C	C	C	C
31	B	B	B	B	B	C

---

---

<b>Ítem</b>	Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6
32	B	C	C	C	B	B
33	C	B	B	B	C	C
34	C	A	B	B	C	C
35	C	C	C	C	C	C
36	B	C	C	C	B	B
37	C	B	C	B	C	C
38	C	C	C	C	B	C
39	C	B	B	B	C	C
40	C	B	B	B	B	C
41	C	C	C	C	C	C
42	C	C	C	C	C	C
43	C	B	C	C	C	C
44	C	C	C	C	C	C
45	B	A	B	B	B	B
46	C	C	C	C	C	C
47	C	B	C	C	C	C

---

## APÉNDICE B

# DATOS DEL CASO DE ESTUDIO

---

Los métodos que se usaron en el trabajo de [7] para obtener una clasificación de consenso se muestran en la tabla B.1, en ésta tabla el método 1 corresponde a [64], el método 2 corresponde a [114], el método 3 corresponde a [124] y el método 4 corresponde a [161].

**Tabla B.1** – Datos usados para el caso de estudio.

Ítem	Método 1	Método 2	Método 3	Método 4
$x_1$	B	C	C	C
$x_2$	A	A	A	B
$x_5$	B	A	A	B
$x_6$	B	C	C	C
$x_7$	B	B	A	A
$x_8$	B	B	A	A
$x_9$	C	C	C	C
$x_{11}$	C	C	C	C
$x_{12}$	C	C	A	B

---

<b>Ítem</b>	<b>Método 1</b>	<b>Método 2</b>	<b>Método 3</b>	<b>Método 4</b>
$x_{14}$	C	C	A	A
$x_{15}$	C	C	B	C
$x_{16}$	C	C	A	A
$x_{18}$	C	C	C	C
$x_{19}$	A	B	C	C
$x_{20}$	C	C	C	C
$x_{21}$	B	C	C	C
$x_{22}$	C	C	A	B
$x_{23}$	A	A	B	C
$x_{28}$	C	C	C	C
$x_{29}$	C	C	C	C
$x_{31}$	C	C	C	C
$x_{32}$	C	C	C	C
$x_{33}$	A	A	B	C
$x_{38}$	C	C	B	C
$x_{40}$	C	C	B	C
$x_{41}$	C	C	B	C
$x_{42}$	B	C	C	C
$x_{45}$	B	B	C	C
$x_{46}$	B	C	A	A
$x_{47}$	C	C	C	C
$x_{50}$	C	C	B	C
$x_{51}$	C	C	C	C

---

---

<b>Ítem</b>	<b>Método 1</b>	<b>Método 2</b>	<b>Método 3</b>	<b>Método 4</b>
<i>x</i> <sub>53</sub>	C	C	C	C
<i>x</i> <sub>56</sub>	B	C	C	C
<i>x</i> <sub>59</sub>	B	C	C	C
<i>x</i> <sub>61</sub>	C	C	C	C
<i>x</i> <sub>63</sub>	C	C	C	C
<i>x</i> <sub>68</sub>	C	B	A	A
<i>x</i> <sub>69</sub>	B	C	C	C
<i>x</i> <sub>70</sub>	C	C	C	C
<i>x</i> <sub>73</sub>	C	C	C	C
<i>x</i> <sub>75</sub>	C	C	B	C
<i>x</i> <sub>76</sub>	C	B	B	C
<i>x</i> <sub>77</sub>	C	C	A	B
<i>x</i> <sub>79</sub>	B	A	A	B
<i>x</i> <sub>80</sub>	B	C	C	C
<i>x</i> <sub>83</sub>	B	B	C	C
<i>x</i> <sub>84</sub>	B	C	A	B
<i>x</i> <sub>85</sub>	C	C	C	C
<i>x</i> <sub>87</sub>	B	A	A	B
<i>x</i> <sub>89</sub>	B	C	C	C
<i>x</i> <sub>90</sub>	C	B	A	A
<i>x</i> <sub>94</sub>	B	C	A	B
<i>x</i> <sub>95</sub>	B	B	C	C
<i>x</i> <sub>98</sub>	B	C	A	A

---

Ítem	Método 1	Método 2	Método 3	Método 4
$x_{99}$	C	A	B	C
$x_{100}$	B	A	C	C

## B.1 CLASIFICACIÓN DE EXPERTOS

. En la tabla B.2 se presentan las clasificaciones de los expertos para los datos del caso de estudio, los artículos marcados con \* indican que esos artículos requirieron consideraciones especiales para su clasificación. Se muestran también las clasificaciones dadas por los métodos de [7] y [61].

**Tabla B.2** – Clasificaciones de los artículos del caso de estudio por parte de los expertos.

Ítem	Fernández y Olmedo [61]	Avila Et. al. [7]	Expertos
$x_1$	C	C	C
$x_2$	A	A	A
$x_5$	A o B	A	B
$x_6$	C	C	C
$x_7$	B	A	A*
$x_8$	B	B	B*
$x_9$	C	C	C
$x_{11}$	C	C	C
$x_{12}$	A o B o C	C	B
$x_{14}$	A o B o C	B	B*

Ítem	Fernández y Olmedo [61]	Avila Et. al. [7]	Expertos
$x_{15}$	C	C	B
$x_{16}$	A o B o C	B	C
$x_{18}$	C	C	C
$x_{19}$	B o C	C	C
$x_{20}$	C	C	C
$x_{21}$	C	C	B
$x_{22}$	B	C	C
$x_{23}$	B	A	B
$x_{28}$	C	C	C
$x_{29}$	C	C	C
$x_{31}$	C	C	C
$x_{32}$	C	C	C
$x_{33}$	B	A	A*
$x_{38}$	C	C	C
$x_{40}$	C	C	C
$x_{41}$	C	C	C
$x_{42}$	C	C	B
$x_{45}$	B	C	C
$x_{46}$	A o B	A	A*
$x_{47}$	C	C	C
$x_{50}$	C	C	C
$x_{51}$	C	C	C
$x_{53}$	C	C	C

Ítem	Fernández y Olmedo [61]	Avila Et. al. [7]	Expertos
x56	C	C	B*
x59	C	C	C
x61	C	C	C
x63	C	C	C
x68	A	A	A*
x69	C	C	C
x70	C	C	C
x73	C	C	C
x75	C	C	C
x76	B o C	C	C
x77	B	C	C
x79	A o B	B	A
x80	C	C	C
x83	B o C	C	B
x84	B	B	A*
x85	C	C	C
x87	A o B	A	A
x89	C	C	C
x90	A	A	B*
x94	B	B	A*
x95	B o C	C	C
x98	A o B	A	B*
x99	A o B o C	C	C

---

<b>Ítem</b>	Fernández y Olmedo [61]	Avila Et. al. [7]	Expertos
$x_{100}$	B o C	C	C

---

## APÉNDICE C

# CLASIFICACIONES DE CONSENSO PARA LOS DATOS DE LA LITERATURA

---

### C.1 SIN VARIACIONES

En la tabla C.1 se muestra la clasificación de consenso obtenida para los datos del caso de estudio sin realizar variaciones. Los artículos aparecen agrupados por categoría  $k_i, i = 1, 2, 3$ .

**Tabla C.1** – Consenso de la literatura sin variaciones.

$k_1$	$k_2$	$k_3$
1	5	4
2	8	6
3	10	7
9	12	11
13	14	15
18	19	16

$k_1$	$k_2$	$k_3$
20	17	
21	24	
22	25	
23	26	
29	27	
31	28	
40	30	
45	32	
	33	
	34	
	35	
	36	
	37	
	38	
	39	
	41	
	42	
	43	
	44	
	46	
	47	

## C.2 CON VARIACIONES

En la tabla C.2 se muestra la clasificación de consenso obtenida para los datos del caso de estudio con variaciones. Los artículos aparecen agrupados por categoría  $k_i, i = 1, 2, 3$ .

**Tabla C.2** – Consenso de los datos de la literatura con variaciones.

$k_1$	$k_2$	$k_3$
1	10	4
2	12	5
3	14	6
9	15	7
13	18	8
	19	11
	20	16
	21	17
	22	24
	23	25
	28	26
	29	27
	40	30
	45	31
		32
		33
		34
		35
		36

$k_1$	$k_2$	$k_3$
		37
		38
		39
		41
		42
		43
		44
		46
		47

---

## APÉNDICE D

# CLASIFICACIONES DE CONSENSO PARA EL CASO DE ESTUDIO

---

### D.1 SIN VARIACIONES

En la tabla D.1 se muestra la clasificación de consenso obtenida para los datos del caso de estudio sin realizar variaciones. Los artículos aparecen agrupados por categoría  $k_i, i = 1, 2, 3$ .

**Tabla D.1** – Consenso del caso de estudio sin variaciones.

$k_1$	$k_2$	$k_3$
2	3	1
18	5	4
23	6	7
29	28	8
38	43	9
52	45	10

---

$k_1$	$k_2$	$k_3$
55	47	11
	48	12
	50	13
	53	14
	54	15
	57	16
		17
		19
		20
		21
		22
		24
		25
		26
		27
		30
		31
		32
		33
		34
		35
		36
		37

---

---

$k_1$	$k_2$	$k_3$
		39
		40
		41
		42
		44
		46
		49
		51
		56

---

## D.2 CON VARIACIONES

En la tabla D.2 se muestra la clasificación de consenso obtenida para los datos del caso de estudio con variaciones. Los artículos aparecen agrupados por categoría  $k_i, i = 1, 2, 3$ .

**Tabla D.2** – Consenso del caso de estudio con variaciones.

---

$k_1$	$k_2$	$k_3$
2	3	1
10	5	4
12	6	7
	18	8
	23	9
	29	11

---

---

$k_1$	$k_2$	$k_3$
	38	13
	45	14
	48	15
	50	16
	52	17
	53	19
	55	20
		21
		22
		24
		25
		26
		27
		28
		30
		31
		32
		33
		34
		35
		36
		37
		39

---

---

$k_1$	$k_2$	$k_3$
		40
		41
		42
		43
		44
		46
		47
		49
		51
		54
		56
		57

---

## APÉNDICE E

# VARIACIONES PARA LOS DATOS TOMADOS DE LA LITERATURA

---

A continuación se muestran breves ejemplos de las variaciones generadas con dos, tres y hasta seis movimientos a la vez para los datos tomados de la literatura de [35]. Para los datos del caso de estudio los ejemplos aplican de la misma forma.

### E.1 GENERACIÓN DE VARIACIONES CON DOS MOVIMIENTOS A LA VEZ

En esta sección se ejemplifican tres variaciones con dos movimientos a la vez. Siguiendo el algoritmo 4.1 para el cambio de etiqueta, obtenemos en este caso una variación realizando dos movimientos sobre una fila hasta terminar con todos los elementos de esa fila (artículo a clasificar) y luego seguir con la siguiente fila (siguiente artículo). En el ejemplo de la tabla E.1 se muestran tres variaciones a partir de la matriz original, en donde se nota por ejemplo, que la variación 1 se compone de la siguiente secuencia en el elemento  $a_{11}$ , se inicia con una etiqueta A y luego se cambia a una etiqueta B; para el elemento  $a_{12}$  se inicia con una etiqueta B, luego se cambia a una etiqueta A. Para la variación 2 de este ejemplo se puede observar que el elemento  $a_{11}$  sigue con la etiqueta B pero ahora el elemento  $a_{12}$  se cambia a etiqueta C y es solo después de esta variación que se repite el procedimiento para los siguientes dos elementos en la fila, o sea los elementos  $a_{13}$  y  $a_{14}$ .

**Tabla E.1** – Variaciones con dos movimientos a la vez

(a) Matriz Original							(b) Variación 1						
Ítem	Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	Ítem	Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6
1	A	B	A	A	A	A	1	<b>B</b>	<b>A</b>	A	A	A	A
2	A	C	A	A	A	A	2	A	C	A	A	A	A
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
46	C	C	C	C	C	C	46	C	C	C	C	C	C
47	C	B	C	C	C	C	47	C	B	C	C	C	C

(c) Variación 2							(d) Variación 3						
Ítem	Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	Ítem	Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6
1	<b>B</b>	<b>C</b>	A	A	A	A	1	A	B	<b>B</b>	<b>B</b>	A	A
2	A	C	A	A	A	A	2	A	C	A	A	A	A
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
46	C	C	C	C	C	C	46	C	C	C	C	C	C
47	C	B	C	C	C	C	47	C	B	C	C	C	C

## E.2 GENERACIÓN DE VARIACIONES CON TRES MOVIMIENTOS A LA VEZ

Para la generación de éstos movimientos se sigue el mismo procedimiento descrito en las sección anterior (E.1) solo que en esta ocasión los cambios se realizan tomando tres elementos al mismo tiempo como se puede ver en la tabla E.2. En cada uno de los ejemplos se ha resaltado cada par o trío de elementos  $a_{ij}$  para visualizar fácilmente cómo se realiza cada variación.

## E.3 GENERACIÓN DE VARIACIONES CON SEIS MOVIMIENTOS A LA VEZ

Por último, en esta sección ilustramos como se realizan las variaciones tomando en cuenta seis elementos  $a_{ij}$ , que representa en este caso toda una fila. Una vez realizado un cambio en las etiquetas si no existe un elemento que requiera dos cambios (elementos etiquetados como B) se procesa inmediatamente la siguiente fila dejando las etiquetas originales de la fila que se abandona. La tabla E.3 muestra el seguimiento de tres variaciones

**Tabla E.2** – Variaciones con tres movimientos a la vez

(a) Matriz Original							(b) Variación 1						
Ítem	Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	Ítem	Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6
1	A	B	A	A	A	A	1	<b>B</b>	<b>A</b>	<b>B</b>	A	A	A
2	A	C	A	A	A	A	2	A	C	A	A	A	A
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
46	C	C	C	C	C	C	46	C	C	C	C	C	C
47	C	B	C	C	C	C	47	C	B	C	C	C	C

(c) Variación 2							(d) Variación 3						
Ítem	Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	Ítem	Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6
1	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>B</b>	A	A	A	1	A	B	A	<b>B</b>	<b>B</b>	<b>B</b>
2	A	C	A	A	A	A	2	A	C	A	A	A	A
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
46	C	C	C	C	C	C	46	C	C	C	C	C	C
47	C	B	C	C	C	C	47	C	B	C	C	C	C

tomando seis elementos  $a_{ij}$  al mismo tiempo; puede observarse que la variación 1 y 2 difieren únicamente en el elemento  $a_{12}$ , esto es debido a que los elementos etiquetados como B requieren dos movimientos y únicamente se procesa la siguiente fila hasta que se han realizado los cambios de etiqueta permisibles.

**Tabla E.3** – Variaciones con seis movimientos a la vez

(a) Matriz Original							(b) Variación 1						
Ítem	Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	Ítem	Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6
1	A	B	A	A	A	A	1	<b>B</b>	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>B</b>	<b>B</b>	<b>B</b>
2	A	C	A	A	A	A	2	A	C	A	A	A	A
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
46	C	C	C	C	C	C	46	C	C	C	C	C	C
47	C	B	C	C	C	C	47	C	B	C	C	C	C

(c) Variación 2							(d) Variación 3						
Ítem	Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	Ítem	Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6
1	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>B</b>	<b>B</b>	<b>B</b>	<b>B</b>	1	A	B	A	A	A	A
2	A	C	A	A	A	A	2	<b>B</b>	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>B</b>	<b>B</b>	<b>B</b>
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
46	C	C	C	C	C	C	46	C	C	C	C	C	C
47	C	B	C	C	C	C	47	C	B	C	C	C	C

# BIBLIOGRAFÍA

---

- [1] *GNU Linear Programming Kit versión 4.43.*
- [2] ADAMS, E., «Consensus techniques and the comparison of taxonomic trees.», *Syst. Zool.*, **21**, págs. 390–397, 1972.
- [3] ADIDA, E. y G. PERAKIS, «A robust optimization approach to dynamic pricing and inventory control with no backorders», *Mathematical Programming*, **107**(1), págs. 97–129, 2006.
- [4] AGUIRRE, H. y K. TANAKA, «Adaptive  $\epsilon$ -Ranking on many-objective problems», *Evolutionary Intelligence*, **2**(4), págs. 183–206, 2009.
- [5] ALONSO, S., E. HERRERA-VIEDMA, F. CHICLANA y F. HERRERA, «A web based consensus support system for group decision making problems and incomplete preferences», *Information Sciences*, **180**(23), págs. 4477–4495, 2010.
- [6] ANDREWS, R. L., M. J. BRUSCO y I. S. CURRIM, «Amalgamation of partitions from multiple segmentation bases: A comparison of non-model-based and model-based methods», *European Journal of Operational Research*, **201**(2), págs. 608 – 618, 1 March 2010.
- [7] AVILA-TORRES, P., F. LOPEZ-IRARRAGORRI y R. OLMEDO, «Clasificación Multicriterio Robusta de Inventarios», en G. Treviño-Garza, L. Cardenas-Barran y I. Chio-Posada (editores), *II Encuentro Iberoamericano de Investigación Operativa y Ciencias Administrativas*, ITESM, págs. 240–254, 2010.

- [8] AYAD, H. G. y M. S. KAMEL, «On voting-based consensus of cluster ensembles», *Pattern Recognition*, **43**(5), págs. 1943 – 1953, 2010.
- [9] BARTHÉLEMY, J., B. LECLERC y B. MONJARDET, «On the use of ordered sets in problems of comparison and consensus of classifications.», *Journal of Classification.*, **3**, págs. 187–224, 1986.
- [10] BEN-TAL, A., L. E. GHAOUI y A. NEMIROVSKI, *Robust Optimization*, Princeton Series in Applied Mathematics, 2009.
- [11] BEN-TAL, A., B. GOLANY, A. NEMIROVSKI y J. VIAL, «Retailer-supplier flexible commitments contracts: a robust optimization approach», *Manufacturing & Service Operations Management*, **7**(3), págs. 248–271, 2005.
- [12] BEN-TAL, A. y A. NEMIROVSKI, «Robust solutions of uncertain linear programs», *Operations Research Letters*, **25**, págs. 1 – 13, 1999.
- [13] BEN-TAL, A. y A. NEMIROVSKI, «Robust Optimization – Methodology and Applications», *Mathematical Programming*, **92**(3), págs. 453–480, 2002.
- [14] BENEDIKTSSON, J. y P. SWAIN, «Consensus theoretic classification methods.», *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics.*, **22**, págs. 688–704, 1992.
- [15] BERMAN, P., B. DASGUPTA, M.-Y. KAO y J. WANG, «On constructing an optimal consensus clustering from multiple clusterings», *Information Processing Letters*, **104**, págs. 137 – 145, 2007.
- [16] BERTSIMAS, D., D. B. BROWN y C. CARAMANIS, «Theory and applications of Robust Optimization», *SIAM Rev.*, **53**(3), págs. 464–501, 2011.
- [17] BERTSIMAS, D. y R. SHIODA, «Classification and Regression via Integer Optimization», *OPERATIONS RESEARCH*, **55**(2), págs. 252 – 271, 2007.
- [18] BERTSIMAS, D. y A. THIELE, «A robust optimization approach to supply chain management», *Integer programming and combinatorial optimization*, págs. 145–156, 2004.

- [19] BERTSIMAS, D. y A. THIELE, «Robust and data-driven optimization: modern decision-making under uncertainty», *INFORMS Tutorials in Operations Research: Models, Methods, and Applications for Innovative Decision Making*, 2006.
- [20] BERTSIMAS, D. y A. THIELE, «A robust optimization approach to inventory theory», *Operations Research*, págs. 150–168, 2006.
- [21] BERTSIMAS, D. y J. N. TSITSIKLIS, *Introduction to Linear Optimization*, Athena Scientific, 1997.
- [22] BHATTACHARYA, A., B. SARKAR y S. K. MUKHERJEE, «Distance-based consensus method for ABC analysis», *International Journal of Production Research*, **45**(15), págs. 3405 – 3420, 2007.
- [23] BOCK, K. W. D., K. COUSSEMENT y D. V. DEN POEL, «Ensemble classification based on generalized additive models», *Computational Statistics and Data Analysis*, **54**(6), págs. 1535 – 1546, 1 June 2010.
- [24] BORIAH, S., V. CHANDOLA y V. KUMAR, «Similarity measures for categorical data: A comparative evaluation», en *Proceedings of 2008 SIAM Data Mining Conference*, tomo 30, pág. 3, 2008.
- [25] BOROUSHAKI, S. y J. MALCZEWSKI, «Measuring consensus for collaborative decision-making: A GIS-based approach», *Computers, Environment and Urban Systems*, **34**(4), págs. 322–332, 2010.
- [26] BOUYSSOU, D., T. MARCHANT, M. PIRLOT y A. TSOUKIAS, *Evaluation and Decision Model Models with Multiple Criteria*, Springer, 2006.
- [27] BOYD, S. y L. VANDENBERGHE, *Convex optimization*, Cambridge University Press, 2004.
- [28] BROWN, G., J. WYATT, R. HARRIS y X. YAO, «Diversity Creation Methods: A Survey and Categorisation», *Journal of Information Fusion*, **6**(1), pág. 2005, 2005.

- [29] ÇAKIR, O. y M. S. CANBOLAT, «A web-based decision support system for multi-criteria inventory classification using fuzzy AHP methodology», *Expert Systems with Applications*, **35**(3), págs. 1367 – 1378, 2008.
- [30] ÇELEBI, D., D. BAYRAKTAR y D. AYKAÇ, «Multi Criteria Classification for Spare Parts Inventory», en *38th Computer and Industrial Engineering Conference*, 2008.
- [31] CHEN, J., «Peer-estimation for multiple criteria ABC inventory classification», *Computers and Operations Research*, **38**, págs. 1784–1791, 2011.
- [32] CHEN, Y., D. KILGOUR y K. HIPEL, «A Flexible Multiple Criteria Sorting Method with Application in Inventory Management», **2**, págs. 954–959, 2006.
- [33] CHEN, Y., K. LI, D. KILGOUR y K. HIPEL, «A case-based distance model for multiple criteria ABC analysis», *Computers and Operations Research*, **35**, págs. 776–796, 2008.
- [34] CHEN, Y., K. LI, J. LEVY, K. HIPEL y D. KILGOUR, «A Rough Set Approach to Multiple Criteria ABC Analysis», en J. Peters y A. Skowron (editores), *Transactions on Rough Sets VIII, Lecture Notes in Computer Science*, tomo 5084, Springer Berlin / Heidelberg, págs. 35–52, 2008.
- [35] CHEN, Y., K. LI y S. LIU, «A Comparative Study on Multicriteria ABC Analysis in Inventory Management», en *In Proceedings of the 2008 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics.*, tomo 32, Singapore, págs. 3280–3285, 2008.
- [36] CHEN, Z. y W. YANG, «A new multiple attribute group decision making method in intuitionistic fuzzy setting», *Applied Mathematical Modelling*, 2011.
- [37] CHICLANA, F., F. MATA, S. ALONSO, E. HERRERA-VIEDMA y L. MARTINEZ, «Group Decision Making: From Consistency to Consensus», *Modeling Decisions for Artificial Intelligence*, págs. 80–91, 2007.

- [38] CHU, C., G. LIANG y C. LIAO, «Controlling inventory by combining ABC analysis and fuzzy classification», *Computers and Industrial Engineering*, **55**, págs. 841–851, 2008.
- [39] CHVÁTAL, V., *Linear Programming*, W. H. Freeman Company, 1983.
- [40] COELHO, A. L. V., E. FERNANDES y K. FACELI, «Multi-objective design of hierarchical consensus functions for clustering ensembles via genetic programming», *Decision Support Systems*, **51**(4), págs. 794 – 809, 2011.
- [41] COELLO, C. y R. BECERRA, «Evolutionary multiobjective optimization in materials science and engineering», *Materials and manufacturing processes*, **24**(2), págs. 119–129, 2009.
- [42] COELLO, C., G. LAMONT y D. VAN, *Evolutionary Algorithms for Solving Multi-Objective Problems*, Springer, 2007.
- [43] COELLO COELLO, C., «Evolutionary multi-objective optimization: a historical view of the field», *Computational Intelligence Magazine, IEEE*, **1**(1), págs. 28–36, 2006.
- [44] COELLO COELLO, C., «Evolutionary multi-objective optimization: some current research trends and topics that remain to be explored», *Frontiers of Computer Science in China*, **3**(1), págs. 18–30, 2009.
- [45] COHEN, M. A. y R. N. ERNST, «Multi-item classification and generic inventory stock control policies», *Production and Inventory Management Journal*, **29**(3), págs. 6–8, 1998.
- [46] COLLETE, Y. y P. SIARRY, *Multiobjective Optimization. Principles and Case Studies.*, Springer, 2003.
- [47] CORMEN, T., C. LEISERSON, R. RIVEST y C. STEIN, *Introduction to Algorithms*, segunda edición, MIT Press and McGraw Hill, 2001.

- [48] CORNE, D. y J. KNOWLES, «Techniques for highly multiobjective optimisation: some nondominated points are better than others», en *Proceedings of the 9th annual conference on Genetic and evolutionary computation*, ACM, págs. 773–780, 2007.
- [49] DA COSTA, J. y P. RAO, «Central partition for a partition-distance and strong pattern graph», *REVSTAT–Statistical Journal*, **2**(2), págs. 127–143, 2004.
- [50] DANTZIG, G. B. y M. N. THAPA, *Linear Programming 1: Introduction*, Springer Series in Operation Research, 1997.
- [51] DAY, W. y F. MCMORRIS, «A formalization of consensus index methods.», *Bulletin of Mathematical Biology.*, **47**(2), págs. 215–229, 1985.
- [52] DEB, K., «Current trends in evolutionary multi-objective optimization», *International Journal for Simulation and Multidisciplinary Design Optimization*, **1**(1), págs. 1–8, 2007.
- [53] DELAGE, E. y Y. YE, «Distributionally robust optimization under moment uncertainty with application to data-driven problems», *Operations Research*, **58**(3), págs. 595–612, 2010.
- [54] DICKIE, H., «ABC inventory analysis shoots for dollars, not pennies.», *Factory Management and Maintenance.*, **109**, págs. 92–94, 1951.
- [55] DOUMPOS, M. y C. ZOPOUNIDIS, *Multicriteria Decision Aid Classification Methods*, Kluwer Academic, 2002.
- [56] DZEROSKI, S. y B. ZENKO, «Is Combining Classifiers Better than Selecting the Best One?», en *Machine learning-international workshop then conference-*, págs. 123 – 130, 2002.
- [57] EHRGOTT, M., *Multicriteria Optimization.*, Springer, 2005.
- [58] FARINA, M. y P. AMATO, «On the optimal solution definition for many-criteria optimization problems», en *Fuzzy Information Processing Society, 2002. Proceedings. NAFIPS. 2002 Annual Meeting of the North American*, IEEE, págs. 233–238, 2002.

- [59] FEDRIZZI, M., M. FEDRIZZI, R. PEREIRA y M. BRUNELLI, «The dynamics of consensus in group decision making: investigating the pairwise interactions between fuzzy preferences», *Preferences and Decisions*, págs. 159–182, 2010.
- [60] FERNANDEZ, E. y R. OLMEDO, «An agent model based on ideas of concordance and discordance for group ranking problems», *Decision Support Systems*, **39**, págs. 429–443, 2005.
- [61] FERNANDEZ, E. y R. OLMEDO, «Evaluación y clasificación en grupos empleando relaciones de preferencia borrosas», *Revista Electrónica & Gestão*, **2(1)**, págs. 16–35, 2007.
- [62] FLEMING, P., R. PURSHOUSE y R. LYGOE, «Many-objective optimization: An engineering design perspective», en *Evolutionary Multi-Criterion Optimization*, Springer, págs. 14–32, 2005.
- [63] FLORES, B., D. OLSON y K. DORAI, «Management of multicriteria inventory classification», *Mathl. Comput. Modelling*, **16**, págs. 71–82, 1992.
- [64] FLORES, B. y D. WHYBARK, «Multiple criteria ABC analysis», *International Journal of Operations and Production Management*, **6**, págs. 38–46, 1986.
- [65] FLORES, B. y D. WHYBARK, «Implementing multiple criteria ABC analysis», *Journal of Operations Management*, **7**, págs. 79–84, 1987.
- [66] FU, C. y S. YANG, «The group consensus based evidential reasoning approach for multiple attributive group decision analysis», *European Journal of Operational Research*, **206(3)**, págs. 601–608, 2010.
- [67] FU, C. y S. YANG, «An attribute weight based feedback model for multiple attributive group decision analysis problems with group consensus requirements in evidential reasoning context», *European Journal of Operational Research*, 2011.
- [68] GAREY, M. y D. JOHNSON, *Computers and intractability*, tomo 174, Freeman San Francisco, CA, 1979.

- [69] GHAEMI, R., M. N. SULAIMAN, H. IBRAHIM y N. MUSTAPHA, «A Survey: Clustering Ensembles Techniques», *World Academy of Science, Engineering and Technology*, **50**, págs. 636–645, 2009.
- [70] GOH, J. y M. SIM, «Distributionally Robust Optimization and Its Tractable Approximations», *OPERATIONS RESEARCH*, **58**(4), págs. 902 – 917, 2010.
- [71] GOH, J. y M. SIM, «Robust Optimization Made Easy with ROME», *OPERATIONS RESEARCH*, **59**(4), págs. 973 – 985, 2011.
- [72] GORDON, A., «A review of hierarchical classification.», *Journal of the Royal Statistical Society. Series A(General)*, **150**, págs. 119–137, 1987.
- [73] GORDON, A. y M. VICHI, «Partitions of partitions», *Journal of Classification*, **15**(2), págs. 265–285, 1998.
- [74] GUÉNOCHE, A., «Consensus of partitions: A constructive approach», *Advances in Data Analysis and Classification*, (5), págs. 215–229, 2011.
- [75] GUÉNOCHE, A., «Making decisions in multi partitioning», *Algorithmic Decision Theory*, págs. 82–95, 2011.
- [76] GUVENIR, H. A. y E. EREL, «Multicriteria inventory classification using a genetic algorithm», *European Journal of Operational Research*, **105** (1), págs. 29–37, February 1998.
- [77] HADI-VENCHEH, A., «An improvement to multiple criteria ABC inventory classification», *European Journal of Operational Research*, **201**, págs. 962–965, 2010.
- [78] HADI-VENCHEH, A. y A. MOHAMADGHADEM, «A fuzzy AHP-DEA approach for multiple criteria ABC inventory classification», *Expert Systems with Applications*, **38**, págs. 3346–3352, 2011.
- [79] HAJIMIRAGHA, A., C. CANIZARES, M. FOWLER, S. MOAZENI y A. ELKAMEL, «A Robust Optimization Approach for Planning the Transition to Plug-in Hybrid Electric Vehicles», *Power Systems, IEEE Transactions on*, (99), págs. 1–11, 2010.

- [80] HE, Z., X. XU y S. DENG, «A cluster ensemble method for clustering categorical data», *Information Fusion*, **6**, págs. 143 – 151, 2005.
- [81] HU, X. y I. YOO, «Cluster ensemble and its applications in gene expression analysis», en *Proceedings of the second conference on Asia-Pacific bioinformatics-Volume 29*, Australian Computer Society, Inc., págs. 297–302, 2004.
- [82] HUBERT, L. y P. ARABIE, «Comparing partitions.», *Journal of Classification.*, **2**, págs. 193–218, 1985.
- [83] HUGHES, E. J., «Evolutionary many-objective optimisation: many once or one many?», en *Proc. IEEE Congress Evolutionary Computation*, tomo 1, págs. 222–227, 2005.
- [84] HUGHES, E. J., «Fitness Assignment Methods for Many-Objective Problems», en J. Knowles, D. Corne, K. Deb y D. R. Chair (editores), *Multiobjective Problem Solving from Nature*, Natural Computing Series, Springer Berlin Heidelberg, págs. 307–329, 2008.
- [85] ISHIBUCHI, H. y Y. NOJIMA, «Optimization of scalarizing functions through evolutionary multiobjective optimization», en *Evolutionary Multi-Criterion Optimization*, Springer, págs. 51–65, 2007.
- [86] ISHIBUCHI, H., N. TSUKAMOTO y Y. NOJIMA, «Evolutionary many-objective optimization: A short review», en *Evolutionary Computation, 2008. CEC 2008.(IEEE World Congress on Computational Intelligence). IEEE Congress on*, IEEE, págs. 2419–2426, 2008.
- [87] JAMSHIDI, H. y A. JAIN, «Multi-Criteria ABC Inventory Classification: With Exponential Smoothing Weights», *Journal of Global Business Issues*, **2**(1), págs. 61–67, 2008.
- [88] JANAK, S. L., X. LIN y C. A. FLOUDAS, «A new robust optimization approach for scheduling under uncertainty», *Computers and Chemical Engineering*, **31**(3), págs. 171 – 195, 2007.

- [89] JURAN, J. M., *Juran's quality handbook*, McGraw-Hill Professional, 1998.
- [90] KABIR, G. y M. A. A. HASIN, «Comparative analysis of AHP and fuzzy AHP models for multicriteria inventory classification», *International Journal of Fuzzy Logic Systems*, **1**(1), 2011.
- [91] KABIR, G. y M. A. A. HASIN, «Multiple criteria inventory classification using fuzzy analytic hierarchy process», *International Journal of Industrial Engineering Computations*, **3**, págs. 123 – 132, 2012.
- [92] KANG, Z., L. KANG, X. ZOU, M. LIU, C. LI, M. YANG, Y. LI, Y. CHEN y S. ZENG, «A new evolutionary decision theory for many-objective optimization problems», *Advances in Computation and Intelligence*, págs. 1–11, 2007.
- [93] KÖPPEN, M. y K. YOSHIDA, «Many-objective particle swarm optimization by gradual leader selection», *Adaptive and Natural Computing Algorithms*, págs. 323–331, 2007.
- [94] KÖPPEN, M. y K. YOSHIDA, «Substitute distance assignments in NSGA-II for handling many-objective optimization problems», en *Evolutionary Multi-Criterion Optimization*, Springer, págs. 727–741, 2007.
- [95] KORPELA, J. y M. TUOMININ, «Inventory forecasting with a multiple criteria decision tool», *International Journal of Operational Economics*, **45**, págs. 159–158, 1996.
- [96] LEI, Q., J. CHEN y Q. ZHOU, «Multiple criteria inventory classification based on principal components analysis and neural network», *Advances in Neural Networks–ISNN 2005*, págs. 981–981, 2005.
- [97] LIIV, I., «Inventory classification enhancement with demand associations», en *2006 IEEE International Conference on Service Operations and Logistics, and Informatics*, IEEE, págs. 18–22, 2006.

- [98] LU, Z., Y. PENG y H. IP, «Combining multiple clusterings using fast simulated annealing», *Pattern Recognition Letters*, **32**(15), págs. 1956 – 1961, 1 November 2011.
- [99] LUTS, J., F. OJEDA, R. V. DE PLAS, B. D. MOOR, S. V. HUFFEL y J. A. K. SUYKENS, «A tutorial on support vector machine-based methods for classification problems in chemometrics», *Analytica Chimica Acta*, **665**(2), págs. 129 – 145, 30 April 2010.
- [100] MARLER, R. y J. ARORA, «Survey of multi-objective optimization methods for engineering», *Structural and multidisciplinary optimization*, **26**(6), págs. 369–395, 2004.
- [101] MARTÍ OROSA, L., *Scalable multi-objective optimization*, Tesis Doctoral, Universidad Carlos III de Madrid, 2011.
- [102] MARTINEZ-PANERO, M., «Approaches to consensus: The state of the art», en *Proceedings of the XIV Spanish Conference on Fuzzy Technologies and Logic (ESTYLF08)*, págs. 469–476, 2008.
- [103] MASSON, M. y T. DENOEU, «Ensemble clustering in the belief functions framework», *International Journal of Approximate Reasoning*, **52**(1), págs. 92 – 109, 2011.
- [104] MIMAROGLU, S. y E. ERDIL, «Combining multiple clusterings using similarity graph», *Pattern Recognition*, **44**(3), págs. 694 – 703, 1 March 2011.
- [105] MIMAROGLU, S. y A. YAGCI, «A binary method for fast computation of inter and intra cluster similarities for combining multiple clusterings», en *Proceedings of the 2nd International Conference on Interaction Sciences: Information Technology, Culture and Human*, ACM, págs. 452–456, 2009.
- [106] MOHAMMADITABAR, D., S. H. GHODSYPOUR y C. O'BRIEN, «Inventory control system design by integrating inventory classification and policy selection», *International Journal of Production Economics*, (424), págs. 1 – 5, 2010.

- [107] MONTALVAO, J. y J. CANUTO, «Clustering ensembles and space discretization - A new regard toward diversity and consensus», *Pattern Recognition Letters*, **31**(15), págs. 2415 – 2424, 1 November 2010.
- [108] MORÁN HERRERA, W. D. y H. GOMES COSTA, «Una forma de clasificación multicriterio - ABC», *Revista Pesquisa e Desenvolvimento Engenharia de Produção*, **4**, págs. 55–66, 2005.
- [109] MURINO, L., C. ANGELINI, I. D. FEIS, G. RAICONI y R. TAGLIAFERRI, «Beyond classical consensus clustering: The least squares approach to multiple solutions», *Pattern Recognition Letters*, **32**(12), págs. 1604 – 1612, 1 September 2011.
- [110] NAHMIA, S., *Análisis de la producción y las operaciones.*, McGraw-Hill Interamericana, 2007.
- [111] NAIR, R., R. AGGARWAL y D. KHANNA, «Methods of Formal Consensus in Classification/Diagnostic Criteria and Guideline Development», *Semin Arthritis Rheum*, **41**(2), págs. 95 – 105, 2010.
- [112] NEUMANN, D. y V. NORTON, JR., «Clustering and isolation in the consensus problem for partitions.», *Journal of Classification.*, **3**, págs. 281–297, 1986.
- [113] NEUMANN, D. y V. NORTON, JR., «On lattice consensus methods.», *Journal of Classification.*, **3**, págs. 225–255, 1986.
- [114] NG, W., «A simple classifier for multiple criteria ABC analysis», *European Journal of Operational Research*, **177**, págs. 344–353, 2007.
- [115] NGUYEN, N. T., «Consensus system for solving conflicts in distributed systems», *Information Sciences*, **147**, págs. 91 – 122, 2002.
- [116] OPITZ, D. y R. MACLIN, «Popular Ensemble Methods: An Empirical Study», *Journal of Artificial Intelligence Research*, **11**, págs. 169 – 198, 1999.
- [117] PARADA GUTIÉRREZ, O., «Un enfoque multicriterio para la toma de decisiones en la gestión de inventarios.», *Cuadernos de Administración*, **22**, págs. 169–187, 2009.

- [118] PARDALOS, P. M. y O. E. KUNDAKCIOGLU, «Classification via mathematical programming: Survey», *Appl. Comput. Math.*, **1**(1), págs. 23 – 35, 2009.
- [119] PARETO, V., *Manual de Economía Política*, Atalaya, 1946.
- [120] PARTOVI, F. Y. y M. ANANDARAJAN, «Classifying inventory using an artificial neural network approach», *Computers and Industrial Engineering*, **41**, págs. 389–404, 2002.
- [121] PARTOVI, F. Y. y J. BURTON, «Using the Analytic Hierarchy Process for ABC Analysis», *International Journal of Operations & Production Management*, **13**, págs. 29 – 44, 1993.
- [122] POLIKAR, R., «Ensamble based systems in decision making», *IEEE Circuits and Systems Magazine*, **6**(3), págs. 21–45, 2006.
- [123] PURSHOUSE, R. y P. FLEMING, «Evolutionary many-objective optimisation: An exploratory analysis», en *Evolutionary Computation, 2003. CEC'03. The 2003 Congress on*, tomo 3, IEEE, págs. 2066–2073, 2003.
- [124] RAMANATHAN, R., «ABC inventory classification with multiple-criteria using weighted linear optimization», *Computers and Operations Research*, **33**, págs. 695–700, 2006.
- [125] REZAEI, J., «A fuzzy model for multi-criteria inventory classification», *6th International Conference on Analysis of Manufacturing Systems. AMS 2007*, 2007.
- [126] ROKACH, L., «Ensemble-based classifiers», *Artif Intell Rev*, **33**, págs. 1 – 39, 2010.
- [127] ROKACH, L. y O. MAIMON, *Data mining and knowledge discovery handbook*, capítulo Clustering methods, Springer, págs. 321–352, 2005.
- [128] SAATY, T., «Decision making - the Analytic Hierarchy and Network Processes (AHP/ANP)», *Journal of Systems Science and Systems Engineering*, **13**, págs. 1–35, 2004.

- [129] SAATY, T. L., «Decision making with the analytic hierarchy process», *Int. J. Services Sciences*, **1**(1), págs. 83 – 98, 2008.
- [130] SEVILLANO, X., F. ALÍAS y J. C. SOCORÓ, «Positional and confidence voting-based consensus functions for fuzzy cluster ensembles», *Fuzzy Sets and Systems*, **2**, págs. 1 – 32, 2011.
- [131] SHI, L., L. XI, X. MA, M. WENG y X. HU, «A novel ensemble algorithm for biomedical classification based on Ant Colony Optimization», *Applied Soft Computing Journal*, **11**(8), págs. 5674 – 5683, 2011.
- [132] SILVER, E., D. PYKE y R. PETERSON, *Inventory Management and Production Planning and Scheduling*, tercera edición, Wiley, 1998.
- [133] ŠIMUNOVIĆ, K., T. DRAGANJAC y G. ŠIMUNOVIĆ, «Application of different quantitative techniques to inventory classification», *Strojarstvo*, **51**(4), págs. 313–321, 2009.
- [134] SINGH, H., A. ISAACS, T. RAY y W. SMITH, «A study on the performance of substitute distance based approaches for evolutionary many objective optimization», *Simulated Evolution and Learning*, págs. 401–410, 2008.
- [135] SIPPER, D. y R. L. BULFIN, JR., *Planeación y Control de la Producción*, McGraw-Hill Interamericana Editores, 1998.
- [136] SNEATH, P. y R. SOKAL, *Numerical taxonomy: The principles and practice of numerical classification.*, San Francisco: W.H. Freeman., 1973.
- [137] STEINLEY, D., «Properties of the Hubert-Arabie adjusted Rand index.», *Psychological Methods*, **9**, págs. 386–396, 2004.
- [138] STINEBRICKNER, R., «s-Consensus trees and indices.», *Bulletin of Mathematical Biology*, **46**, págs. 923–935, 1984.

- [139] STREHL, A. y J. GHOSH, «Cluster Ensembles - A Knowledge Reuse Framework for Combining Multiple Partitions», *Journal of Machine Learning Research*, **3**, págs. 583 – 617, 2002.
- [140] T'KINDT, V. y J.-C. BILLAUT, *Multicriteria Scheduling*, segunda edición, Springer, 2006.
- [141] TOPCHY, A., A. JAIN y W. PUNCH, «Clustering ensembles: Models of Consensus and Weak Partitions», en *Proceedings of the 3rd IEEE International Conference on Data Mining*, págs. 331–338, 2003.
- [142] TRIANTAPHYLLOU, E., B. SHU, S. NIETO SANCHEZ y T. RAY, *Multicriteria Decision Making: An Operation Research Approach*, tomo 15, Jhon Wiley & Sons, 1998.
- [143] TSAI, C. y S. YEH, «A multiple objective particle swarm optimization approach for inventory classification», *International Journal of Production Economics*, **114**(2), págs. 656–666, 2008.
- [144] TUMER, K. y A. K. AGOGINO, «Ensemble clustering with voting active clusters», *Pattern Recognition Letters*, **29**, págs. 1947 – 1953, 2008.
- [145] VEGA-PONS, S., J. CORREA-MORRIS y J. RUIZ-SHULCLOPER, «Weighted partition consensus via kernels», *Pattern Recognition*, **43**(8), págs. 2712 – 2724, 2010.
- [146] VELDHUIZEN, D. y G. LAMONT, «Multiobjective evolutionary algorithms: Analyzing the state-of-the-art», *Evolutionary computation*, **8**(2), págs. 125–147, 2000.
- [147] ŠIMUNOVIĆ, K., G. ŠIMUNOVIĆ y T. ŠARIĆ, «Application of artificial neural networks to multiple criteria inventory classification», *Journal for Theory and Application in Mechanical Engineering*, **51**(4), págs. 313–321, 2009.
- [148] WAGNER, T., N. BEUME y B. NAUJOKS, «Pareto-, aggregation-, and indicator-based methods in many-objective optimization», en *Evolutionary Multi-Criterion Optimization*, Springer, págs. 742–756, 2007.

- [149] WANG, J., P. NESKOVIC y L. N. COOPER, «Improving nearest neighbor rule with a simple adaptive distance measure», *Pattern Recognition Letters*, **28**, págs. 207 – 213, 2007.
- [150] WEINGESSEL, A., E. DIMITRIADOU y K. HORNIK, «An Ensemble Method for Clustering», *Working Papers*, 2003.
- [151] WICKRAMASINGHE, U. y X. LI, «Using a distance metric to guide PSO algorithms for many-objective optimization», en *Proceedings of the 11th Annual conference on Genetic and Evolutionary Computation*, ACM, págs. 667–674, 2009.
- [152] WU, J., Q. CAO y J. ZHANG, «An ILOWG operator based group decision making method and its application to evaluate the supplier criteria», *Mathematical and Computer Modelling*, 2011.
- [153] XIA, R., C. ZONG y S. LI, «Ensemble of feature sets and classification algorithms for sentiment classification», *Information Sciences*, **181**(6), págs. 1138 – 1152, 15 March 2011.
- [154] XIAO, Y., R. ZHANG y I. KAKU, «A new approach of inventory classification based on loss profit», *Expert Systems with Applications*, **38**, págs. 9382–9391, 2011.
- [155] XU, G. y L. G. PAPAGEORGIOU, «A mixed integer optimisation model for data classification», *Computers & Industrial Engineering*, **56**(4), págs. 1205 – 1215, 2009.
- [156] YU, C. y H. LI, «A robust optimization model for stochastic logistic problems», *International Journal of Production Economics*, **64**(1), págs. 385–397, 2000.
- [157] YU, L. y K. LAI, «A distance-based group decision-making methodology for multi-person multi-criteria emergency decision support», *Decision Support Systems*, **51**(2), págs. 307–315, 2011.
- [158] YU, M., «Multi-criteria ABC analysis using artificial-intelligence-based classification techniques», *Expert Systems with Applications*, **38**, págs. 3416–3421, 2011.

- [159] ZHANG, G., Y. DONG y Y. XU, «Linear optimization modeling of consistency issues in group decision making based on fuzzy preference relations», *Expert Systems With Applications*, **39**(3), págs. 2415 – 2420, 15 February 2012.
- [160] ZHANG, Y., X. DENG, Y. LI *et al.*, «E-commerce security assessment under group decision making», *Journal of Information and Computational Science*, **8**(1), págs. 7–15, 2011.
- [161] ZHOU, P. y L. FAN, «A note on multi-criteria ABC inventory classification», *European Journal of Operational Research*, **182**, págs. 1488–1491, 2007.
- [162] ZOPOUNIDIS, C. y M. DOUMPOS, «Multi-criteria decision aid in financial decision making: methodologies and literature review», *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, **11**(4-5), págs. 167–186, 2002.
- [163] ZOPOUNIDIS, C. y M. DOUMPOS, «Multicriteria classification and sorting methods: A literature review», *European Journal of Operational Research*, **138**, págs. 229–246, 2002.

# FICHA AUTOBIOGRÁFICA

---

Rafael Torres Escobar

Candidato para el grado de Maestría en Ciencias  
en Ingeniería de Sistemas

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

Tesis:

## CLASIFICACIÓN DE CONSENSO DERIVADA DE MÉTODOS MULTICRITERIO APLICADOS AL ANÁLISIS ABC DE INVENTARIOS

Nací el 28 de abril de 1984 en el municipio de Arriaga en el Estado de Chiapas. Soy el segundo hijo del matrimonio del Sr. Reynaldo Torres Gómez y la Sra. Julieta Escobar Ramírez. Cursé mis estudios de Licenciatura en Ingeniería Industrial en el Instituto Tecnológico de Tuxtla Gutiérrez de 2002 al 2006. En el año 2006, antes de iniciar el último semestre de la carrera, participé en un Verano de la Investigación Científica de la Academia Mexicana de Ciencias en el Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingeniería de la Universidad de Guadalajara. La experiencia de participar en un Verano de la Investigación Científica me motivó para cursar una maestría de tiempo completo, sin embargo antes de continuar con la maestría, decidí incorporarme al ambiente laboral involucrándome con el Sistema de Gestión de la Calidad ISO 9001 en el Consejo Estatal de Seguridad Pública del

---

Estado de Chiapas en donde, siendo jefe del área de Calidad, se consiguió la certificación del sitio Tapachula bajo la norma ISO 9001:2000. Posteriormente tuve la oportunidad de laborar en el programa de Educación a Distancia del Instituto Tecnológico de Tuxtla Gutiérrez. Así, en el año 2010 ingresé al Posgrado de Ingeniería de Sistemas de la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica en la Universidad Autónoma de Nuevo para cursar mis estudios de Maestría en Ciencias en Ingeniería de Sistemas.