UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSTGRADO

Técnicas Matemáticas Lineales con Aplicación a la Docencia

TESIS

EN OPCION AL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS DE LA ADMINISTRACION CON ESPECIALIDAD EN INVESTIGACION DE OPERACIONES

PRESENTA

Carlos Bernardo Garza Treviño

SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N. L. JULIO DE 1995

TECNICAS MATEMATICAS LINEALES CON APLICACION A LA DOCENCIA

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSTGRADO

Técnicas Matemáticas Lineales con Aplicación a la Docencia

TESIS

EN OPCION AL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS DE LA ADMINISTRACION CON ESPECIALIDAD EN INVESTIGACION DE OPERACIONES

PRESENTA

Carlos Bernardo Garza Treviño

SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N. L. JULIO DE 1995

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

División de Estudios de Post-Grado

Técnicas Matemáticas Lineales con Aplicación a la Docencia

Tesis

En opción al grado de Maestro en Ciencias de la Administración con especialidad en Investigación de Operaciones

Que presenta:

Carlos Bernardo Garza Treviño

San Nicolás de los Garza, N.L.

Julio de 1995.

Índice

CARTA DE ACEPTACIÓN DE TESIS

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POST-GRADO

Los miembros del comité de tesis, recomendamos que la presente tesis realizada por el Ing. Carlos Bernardo Garza Treviño, sea aceptada como opción para obtener el grado de Maestro en Ciencias de la Administración con la especialidad en Investigación de Operaciones.

El Comité de Tesis

Asesor
M.C. Marco Antonio Méndez Cavazos.

Coasesor
M.A. Liborio A. Manjarrez Santos

Coasesor
M.C. Alfredo Mata Briseño.

División de Estudios de Postgrado
M.C. David Antonio Oliva Alvarez

San Nicolás de los Garza, N.L. Julio de 1995.

PRÓLOGO

Prólogo

Al tomar la decisión de escribir esta tesis, pensé en desarrollar una nueva técnica que pudiera servir como apoyo didáctico en algunos de los temas de la materia de optimización, misma que es impartida a los estudiantes de la carrera de Ingeniero Administrador de Sistemas en nuestra facultad, y alentado por mi asesor, nos dimos a la tarea de procurar desarrollar ésta nueva técnica para la solución de problemas lineales, que fuera aplicable en clase frente a nuestros alumnos tratando de que los problemas planteados fueran de una rápida solución al estarlos resolviendo en el pizarrón de clases.

A lo antes considerado habría que sumarle que en la actualidad la función administrativa, camina a la par de la cada vez mayor globalización de la economía mundial. Aquí en México la apertura de un mercado común entre los países de Canadá, Estados Unidos y México, obliga a nuestros productores a tomar medidas que conlleven a optimizar los recursos con que cuentan y realizar los ajustes necesarios a fin de lograr una administración más competitiva, más moderna y que garantice la buena marcha de sus negocios, siempre en busca de lograr el máximo beneficio que promete el Tratado de Libre Comercio de Norte América.

Los productores y comerciantes que estén decididos a sobrevivir deberán asumir los retos que el T.L.C. impone, donde los movimientos constantes del mercado y los nuevos sistemas de producción así como las nuevas tecnologías, dejan de lado a los mercados tradicionales, los enfoques convencionales sobre técnicas y soluciones de las décadas pasadas tienen poco que ofrecer pues a menudo estas técnicas han sido desarrolladas para resolver problemas estáticos y no dinámicos que son a los cuales deberán enfrentarse nuestros productores y comerciantes ante la apertura comercial de norteamérica; además de depender cada vez en mayor medida de las computadoras y de los métodos cuantitativos, para formar modelos de empresas que eficienticen los inumerables y complejos problemas de la administración y las finanzas.

Por último, deseo agradecer el valioso apoyo y colaboración de mi asesor, M.C. Marco Antonio Méndez Cavazos, Sub-director de Post-Grado y catedrático de la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de nuestra universidad, que aparte de haberme asesorado con sus valiosos conocimientos en la realización de esta tesis, me ha distinguido con su amistad.

Ing. Carlos Bernardo Garza Treviño
San Nicolás de los Garza, N.L. Julio de 1995.

CAPÍTULO 1).- INTRODUCCIÓN.

I).- Introducción.

La programación matemática, es quizá el área más desarrollada de la investigación de operaciones, la cual cubre tópicos tales como: Programación Lineal, Programación Entera, Programación de Redes, etc. Así como algunas variantes de éstas, tal es el caso de la Programación por Metas, sin embargo en la presente tesis solo abordaremos el tópico de Programación Lineal, puesto que el objetivo general de la tesis es el desarrollar técnicas matemáticas lineales con aplicación a la docencia.

Para alcanzar el *objetivo anterior*, se utilizó el Método Montante aplicado al Método Simplex para la solución de problemas lineales, lo que dió como resultado una nueva técnica matemática de rápida solución de problemas.

Es necesario aclarar que la aplicación de esta técnica ha sido diseñada para resolver en forma rápida ejemplos típicos de clases, es decir que fue desarrollada con fines aplicables hacia la docencia, por lo que su aplicación en problemas reales pudiera tener algunas limitaciones.

Nuestra meta como profesores y autores, es la de proporcionar a nuestros alumnos y lectores una variada gama de técnicas de solución de los distintos problemas, así como la buena comprensión de éstas, buscando siempre que dicha comprensión sea en forma sencilla, todo ello con la finalidad de lograr sus aprendizajes.

En el capítulo II abordaremos el tema de planteamiento de problemas lineales, realizando algunos ejemplos que ayuden a su comprensión, en el capítulo III, daremos solución a problemas lineales, utilizando el método gráfico incluyendo la solución de un problema de tres dimensiones, en el capítulo IV veremos la nueva técnica que decidimos llamar Simplex Newx ya que puesto que es una variante del método simplex, en el capítulo V, abordamos el método de penalización del simplex newx, para concluir en el capítulo VI con el método Dual, además incluimos un apéndice de convexidad.

I.1).-Tipos de modelos Matemáticos.

Para tratar de dar una idea de los diferentes tipos de modelos matemáticos definiremos algunos aquí, sin embargo la primer clasificación que debemos de hacer es diferenciar un modelo cualitativo de uno cuantitativo, aunque la mayoría de las empresas sus problemas casi por regla general son planteados en su inicio en forma cualitativa, éstos generalmente desencadenan en el punto que son convertidos en modelos cuantitativos, sin que con esto se pueda pensar que todos los modelos cualitativos pueden ser interpretados en modelos cuantitativos, ya que existe una gran gama de problemas por los cuales no pueden ser cuantificados con exactitud como por ejemplo; variables que no son conocidas, técnicas inapropiadas de medición, relaciones especiales que nos son desconocidas, etc. Sin embargo con el empleo de técnicas como el análisis lógico, métodos de ordenamiento, téoria de decisiones, la probabilidad y la estadística, etc. pueden ayudarnos para hacer que nuestros modelos cualitativos, puedan ser expresados en modelos cuntitativos, a continuación daremos una breve definición de algunos diferentes modelos que nos podemos encontrar:

Modelos cuantitativos.- Son aquellos en los que insertamos símbolos queriendo representar variables, o constantes.

Modelos cualitativos.- Son aquellos en que la representación del modelo solo expresan las cualidades o propiedades de los elementos o componentes.

Modelos probabilísticos.- Son aquellos que se basan en las probabilidades y en las estadísticas, es decir que se ocupan de las incertidumbres.

Modelos determinísticos.- Son aquellos que contienen valores reales y no deben de contener ninguna consideración probabilística.

Modelos descriptivos.- Se dice que un modelo es descriptivo, cuando es construido sencillamente como una descripción matemática de una condición del mundo real, los cuales con usados para poder aprender más sobre el problema del cual se ocupa.

Modelos de optimización.- Son aquellos que tienen como objetivo dar una respuesta óptima, del problema planteado.

Modelos estáticos.- Son los modelos que se ocupan de determinar una respuesta para una serie especial de condiciones fijas, que probablemente no cambiarán significativamente en el corto plazo.

Modelos dinámicos.- Estos están sujetos al factor tiempo, que desempeña un papel esencial en las secuencias de las decisiones, independientemente de cuales hayan sido las decisiones anteriores, el modelo dinámico nos permite encontrar soluciones óptimas para los períodos que quedan todavía en el futuro.

Modelos de simulación.- La simulación es un modelo que comprende cálculos secuenciales, donde puedan reproducirse el funcionamiento del problema o del sistema a gran escala, en muchos casos donde ocurren relaciones complejas, tanto de naturaleza predecible como de naturaleza aleatoria.

Para acabar, mencionaré que las condiciones del mercado ya están dadas, queda a las universidades del país tanto públicas como privadas, asumir el reto y preparar al estudiante con las mejores herramientas para lograr una verdadera competencia de este mercado en los albores del nuevo siglo, que deberá tender cada vez más hacia la especialización, y con un mayor apoyo de las computadoras y de los métodos cuantitativos para lograrlo, recuerdo el probervio chino que dice "**cuando tengas que recorrer una distancia de muchos kilómetros es buen inicio con el primer paso**".

CAPÍTULO II).- PLANTEAMINETO DE PROBLEMAS LINEALES.

II).- Planteamientos de problemas lineales.

II.1).- Introducción.

En la actualidad no existe ninguna formula que seguir, para el buen planteamiento de los problemas de programación lineal en su representación matemática, sin embargo, aquí trataremos de establecer un procedimiento lógico recomendado para tal efecto, acompañado de un buen número de ejemplos, donde seguiremos paso a paso el desarrollo de los mismos. Se pretende en este capítulo realizar el primer paso para la obtención de una solución a los problemas lineales, que es la formulación matemática de los mismos, recuerde que un problema bien planteado es un problema medio resuelto.

Después de haber recopilado y clasificado la información del problema podemos continuar con los siguientes pasos lógicos:

El primer paso lógico, es la interpretación de cuales serán nuestras variables de decisión del problema, con las cuales vamos a trabajar y de las cuales debemos obtener la solución óptima, siendo de suma importancia su buena interpretación de estas variables de decisión, las cuales debemos definir, antes de continuar con los siguientes pasos.

El segundo paso lógico, es la formulación de la función objetivo, la cual estará dada por la contribución a la función objetivo de cada variable de decisión, además ésta será de maximizar o minimizar según sea el contexto de nuestro problema planteado, de esta manera estaremos formando nuestra función objetivo, una vez encontradas las contribuciones habrá que igualar ésta a una nueva variable a la que llamaremos Z, que va a representar a la ganancia o el costo de nuestra función objetivo.

El tercer paso lógico, es la identificación de los recursos con los que contamos o necesidades que debemos de satisfacer, de esto dependerá si nuestra restricción es una igualdad ($=$), desigualdad de menor o igual que ($\leq$), o una desigualdad de mayor o igual que ($\geq$), pudiendo presentarse casos en que estas desigualdades sean de mayor que ($>$), menor que ($<$) o aproximadamente igual que ($\approx$), esto dependerá del planteamiento del problema que se nos presente.

El cuarto paso lógico, es formular las restricciones, para lo cual hay que buscar los coeficientes tecnológicos que formarán las restricciones, es decir, cuantas unidades del recurso debemos emplear para cada variable de decisión.

Y como quinto y último paso lógico, es la interpretación de las restricciones de no negatividad, esto en caso de que deban de existir.

Los pasos lógicos mencionados, sólo son una guía recomendada a seguir, sin que con ello se pretenda establecer una regla de procedimiento para la formulación del problema lineal.

II.2).- Planteamiento de un problema lineal.

Veamos estos pasos lógicos con un ejemplo.

Ejemplo:

El señor Juan Reyna, un vendedor de la compañía Cintas Adhesivas, debe decidir como asignar sus esfuerzos entre los diferentes tipos de clientes de su territorio. El puede visitar distribuidores mayoristas y clientes que compran al menudeo. Una visita a un distribuidor mayorista le produce $150.00, pero la visita promedio dura 2 horas y debe recorrer 10 kilómetros en promedio. En una visita a un cliente que compra al menudeo le vende $340.00, y se requiere de unas 3 horas por visita y recorrer 20 kilómetros en promedio. Juan viaja trabajando como máximo 800 kilómetros por semana en su carro y desea trabajar no más de 40 horas en el mismo período de tiempo. Se nos pide realizar un modelo de programación lineal para el señor Juan Reyna.

Sigamos los pasos lógicos recomendados anteriormente para formular el problema del señor Juan Reyna.

El primer paso es identificar nuestras variables de decisión, estoy seguro de que usted ya las identificó, claro está que nuestras variables serán la cantidad de visitas a realizar a cada tipo de cliente, definámoslas ahora como:

$X_1 =$ Cantidad de visitas a realizar a distribudores mayoristas.

$X_2 =$ Cantidad de visitas a realizar a clientes que compran al menudeo.

Una vez definidas nuestras variables de decisión, podemos establecer nuestra función objetivo (que es el siguiente paso lógico recomendado), el problema nos dice que a Juan le produce $150.00, por cada visita a un distribuidor mayorista, y $340.00 por cada visita a clientes que compran al menudeo, así es que nuestra función objetivo aunque no se especifica, pero basándonos en la premisa de racionalidad económica sabemos que debemos maximizar la ganancia que obtiene en las visitas a sus clientes, así es que nuestra función objetivo es:

$$\text{Maximizar } Z = 150X_1 + 340X_2$$

Ahora, el siguiente paso es identificar los recursos con los que contamos y éstos son básicamente dos, para este problema (a los cuales les llamaremos restricciones). El primer recurso es el tiempo del señor Reyna, que no está dispuesto a trabajar más de 40 horas en el período de tiempo, y el segundo recurso se refiere a la cantidad de kilómetros que tiene que recorrer con su carro, y del cual no está dispuesto a que exceda de los 800 kilómetros en el mismo período de tiempo, de aquí se desprende que ambas restricciones serán desigualdades del tipo de menor o igual que ($\leq$).

El siguiente paso lógico, es la identificación de los coeficientes tecnológicos que en este caso es el tiempo que emplea para la visita con los distribuidores mayoristas que requiere de un tiempo de 2 horas, así como para las visitas a clientes que compran al menudeo que es de 3 horas, de la misma manera para los kilómetros que tiene que recorrer en cada visita, los cuales son 10 kilómetros para los distribuidores mayoristas, y 20 kilómetros para los clientes de menudeo, quedándonos dos restricciones que son:

$$2X_1 + 3X_2 \leq 40 \quad \text{(restricción del tiempo de Juan)}$$

$$10X_1 + 20X_2 \leq 800 \quad \text{(restricción de kilómetros a recorrer)}$$

Así el quinto y último paso lógico es la definición de la existencia o no de las restricciones de no negatividad, que en este caso, si deben de existir puesto que no se pueden realizar cantidades negativas de visitas a los clientes, y dado esto, entonces estas restricciones nos quedarían como $X1 \geq 0$; y $X2 \geq 0$.

En resumen la formulación matemática nos quedaría como:

$$\text{Maximizar } Z = 150X_1 + 340X_2$$

$$\text{Sujeto a:} \quad 2X_1 + 3X_2 \leq 40$$

$$10X_1 + 20X_2 \leq 800$$

$$\text{para:} \quad X_1 \geq 0; \text{ y } X_2 \geq 0;$$

Una vez que se ha formulado matemáticamente el problema lineal, lo único que nos resta es resolverlo.

Veamos ahora otro ejemplo:

Cierta compañia tiene tres plantas, una en Monterrey, otra en Laredo, y una más en Reynosa, las cuales disponen de cierta capacidad de producción diaria. Las tres pueden fabricar un determinado producto y la gerencia ha decidido usar esta capacidad. El producto puede hacerse en tres clases, el de lujo, el típico y el económico, éstos contibuirán con una ganacia neta de \$3.25, \$2.80, y \$2.25 respectivamente. Las plantas de Monterrey, Laredo y Reynosa tienen capacidad de mano de obra y equipo para producir 760, 940 y 510 unidades diarias cada una, sin importar la clase del producto o la combinación lineal de las distintas clases del producto que se pidan. Sin embargo, la cantidad de espacio disponible para producir el nuevo producto, impone una limitación para dicha producción. Se cuenta con 13,600, 12,320 y 7,300 metros cuadrados de espacio en las plantas de Monterrey, Laredo y Reynosa respectivamente para este producto.

Cada unidad del producto clase de lujo, típico y económico, que se produce requiere 18, 13 y 10 metros cuadrados para su producción, respectivamente.

Los pronósticos de mercado indican que se puede vender como máximo 700, 1,600 y 850 unidades diarias, correspondientes a las clases de lujo, típico y económico respectivamente. El gerente quiere saber cuántas unidades de cada clase debe producir en cada una de las plantas para maximizar su ganancia.

Se nos pide que formulemos un modelo de programación lineal, para este problema.

Como primer paso es la identificación de las variables de decisión, las cuales son:

$X_1 =$ Cantidad a producir del producto de lujo en la planta de Monterrey.

$X_2 =$ Cantidad a producir del producto típico en la planta de Monterrey.

$X_3 =$ Cantidad a producir del producto económico en la planta de Monterrey.

$X_4 =$ Cantidad a producir del producto de lujo en la planta de Laredo.

$X_5 =$ Cantidad a producir del producto típico en la planta de Laredo.

$X_6 =$ Cantidad a producir del producto económico en la planta de Laredo.

$X_7 =$ Cantidad a producir del producto de lujo en la planta de Reynosa.

$X_8 =$ Cantidad a producir del producto típico en la planta de Reynosa.

$X_9 =$ Cantidad a producir del producto económico en la planta de Reynosa.

Como segundo paso es establecer nuestra función objetivo, dado que el gerente desea maximizar la ganancia que obtendría, con la producción de este nuevo producto, nuestra función objetivo quedaría como:

$$\text{Max. } Z = 3.25X_1 + 2.80X_2 + 2.25X_3 + 3.25X_4 + 2.80X_5 + 2.25X_6 + 3.25X_7 + 2.80X_8 + 2.25X_9$$

El tercer paso es encontrar los recursos con los que contamos (es decir nuestras restricciones), se nos dice en el problema que disponemos de una capacidad en cada planta, y que podemos producir en la planta de Monterrey la cantidad de 760 unidades de cualquier clase del producto o cualquier combinación lineal de éstas, así, para la planta de Laredo cuya capacidad disponible es de 940 unidades de este producto o su combinación lineal de las distintas clases y en la planta de Reynosa su capacidad es de 510 unidades. Sin embargo existe la limitante de espacio de producción en cada planta las cuales son, 13,600 m^2 en la planta de Monterrey, 12,320 m^2 en la planta de Laredo y 7,300 m^2 en la planta de Reynosa. También en base a los pronósticos del mercado, se nos informa que tendremos una demanda diaria máxima de 700 unidades del producto clase de lujo, 1,600 unidades para el producto de clase típico y 850 unidades para el producto de clase económico.

Como siguiente paso, hay que identificar los coeficientes tecnológicos de producción, espacio y demanda de estos productos. Tomando en cuenta que estos productos se pueden producir en cualquiera de las plantas o cualquier combinación lineal de éstos, dado esto debemos entender que los coeficientes tecnológicos de nuestras restricciones de producción serán la unidad.

En las restricciones de espacio de producción tenemos que se requieren de 18m^2 para el producto clase de lujo, 13m^2 para el producto clase típico y 10m^2 para el producto clase econónico. Y por último, los pronósticos de mercado, procurando satisfacer las demandas de los tres productos. Estos componentes tecnológicos nos darían las restricciones a las que esta sujeto el problema, en las de producción no podemos producir más de la capacidad disponible, con esto sabemos que estas restricciones serán desigualdades del tipo de menor o igual que ($\leq$), así mismo en las restricciones de espacio físico de producción también no podemos exceder del espacio disponible en cada planta, esto quiere decir que estas restricciones también serán desigualdades del tipo de menor o igual que ($\leq$), en las restricciones de las demandas de los productos que nos han sido pronosticadas, y como no se nos indica si debemos manejar inventarios, así como tampoco se indica algún compromiso de venta, las restricciones serán desigualdades también del tipo de menor o igual que ($\leq$), así tendremos la oportunidad de producir el máximo posible de venta o menor en caso de que así nos sea favorable.

Respresentándolas en forma matemática nos quedarían como:

$X_1 + X_2 + X_3 \leq 760$ (capacidad de producción adicional en la planta de Monterrey).

$X_4 + X_5 + X_6 \leq 940$ (capacidad de producción adicional en la planta de Laredo).

$X_7 + X_8 + X_9 \leq 510$ (capacidad de producción adicional en la planta de Reynosa).

$18X_1 + 13X_2 + 10X_3 \leq 13{,}600$ (espacio físico disponible en la planta de Monterrey).

$18X_4 + 13X_5 + 10X_6 \leq 12{,}320$ (espacio físico disponible en la planta de Laredo).

$18X_7 + 13X_8 + 10X_9 \leq 7{,}300$ (espacio físico disponible en la planta de Reynosa).

$X_1 + X_4 + X_7 \leq 700$ (demanda pronosticada para el producto de lujo).

$X_2 + X_5 + X_8 \leq 1{,}600$ (demanda pronosticada para el producto típico).

$X_3 + X_6 + X_9 \leq 850$ (demanda pronosticada para el producto económico).

Como quinto paso, es determinar la existencia o no de las restricciones de no negatividad que en este caso sí deben de existir ya que podemos producir o dejar de producir el producto pero no podemos producir cantidades negativas del mismo.

En resumen nuestro modelo matemático para este problema nos quedaría como:

$$\text{Max. } Z = 3.25X_1 + 2.80X_2 + 2.25X_3 + 3.25X_4 + 2.80X_5 + 2.25X_6 + 3.25X_7 + 2.80X_8 + 2.25X_9$$

Sujeto a: $X_1 + X_2 + X_3 \leq 760$

$X_4 + X_5 + X_6 \leq 940$

$X_7 + X_8 + X_9 \leq 510$

$18X_1 + 13X_2 + 10X_3 \leq 13{,}600$

$18X_4 + 13X_5 + 10X_6 \leq 12{,}320$

$18X_7 + 13X_8 + 10X_9 \leq 7{,}300$

$X_1 + X_4 + X_7 \leq 700$

$X_2 + X_5 + X_8 \leq 1{,}600$

$X_3 + X_6 + X_9 \leq 850$

$X_i \geq 0$ para $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Ahora veamos un ejemplo más:

La compañía Electric Production, Inc., manufactura aparatos eléctricos y de refrigeración tiene cuatro departamentos principales: el de partes eléctricas, el de partes mecánicas, el de ensamble y el de inspección final, dicha compañía elabora dos productos, que son: reguladores de voltaje y refrigeradores.

Las capacidades mensuales de los departamentos son las siguientes:

Departamentos	*Capacidad para Reguladores de Voltaje*		*Capacidad para Refrigeradores*
Partes Eléctricas	4,500	ó	1,500
Partes Mecánicas	8,000	ó	1,000
Ensamble	4,000	ó	2,000
Inspección Final	9,000	ó	3,000

También pueden elaborarse los productos (en cada departamento) cualquier combinación lineal dentro de los límites establecidos.

La contribución del regulador de voltaje es de $30 cada uno, la contribución del refrigerador es de $500 cada uno. El proceso de elaboración de cualquiera de los productos requiere pasar a traves de los cuatro departamentos de la compañia. Suponiendo que la compañia puede vender cualquier cantidad de los dos productos, hay que determinar un modelo de programación lineal que maximice las utilidades de esta compañia.

Primero, hay que definir nuestras variables de decisión las cuales serán:

$X_1 =$ Cantidad de reguladores de voltaje a producir.

$X_2 =$ Cantidad de refrigeradores a producir.

Segundo, determinar cuál sera nuestra función objetivo, ya que X_1 es la cantidad de reguladores de voltaje a producir y que nos proporciona una utilidad por unidad de \$30, y por otro lado X_2 es la cantidad de refrigeradores a producir y éstos nos proporciona una utilidad por unidad de \$500, en base a estos datos, formularemos nuestra función objetivo, la cual es:

$$\text{Maximizar } Z = 30X_1 + 500X_2$$

Tercero, podemos producir 4,500 reguladores o 1,500 refrigeradores, en el departamento de partes eléctricas o cualquier combinación lineal de ellos, es decir que tenemos una relación de 3 reguladores por 1 refrigerador, en el departamento de partes mecánicas podemos producir 8,000 reguladores o 1,000 refrigeradores o cualquier combinación lineal de ellos, teniendo una relación de 8 reguladores por 1 refrigerador, en el departamento de ensamble tenemos capacidad para ensamblar 4,000 reguladores o 2,000 refrigeradores o cualquier combinación lineal de ellos, encontrando que existe una relación de 2 reguladores por 1 refrigerador, así para el departamento de inspección final en el cuál tenemos que podemos inspeccionar 9,000 reguladores o 3,000 refrigeradores, con esto tenemos una relación de 3 reguladores por 1 refrigerador.

Cuarto, determinar los componentes tecnológicos, que en este caso son las relaciones que se acaban de describir en el párrafo anterior, en el departamento de partes eléctricas, podemos producir partes eléctricas para 3 reguladores por 1 conjunto de partes eléctricas para refrigeradores, teniendo como limitante, 4,500 reguladores de voltaje o 1,500 refrigeradores, la relación puede ser planteada en base a cualquiea de estos límites, por ejemplo, si escogemos el límite de reguladores de voltaje nuestra restricción quedaría como $X_1 + 3X_2 \leq 4{,}500$; o si deseamos escoger el límite de refrigeradores nuestra restricción quedaría como $1/3X_1 + X_2 \leq 1{,}500$; observese que en ambos casos obtendríamos los mismos resultados al buscar los puntos de cruce con los ejes tanto para X_1 como para X_2. Por ejemplo en la primer restricción planteada, si $X_2 = 0$; $X_1 = 4{,}500$; y si $X_1 = 0$; $X_2 = 1{,}500$, del mismo modo para la segunda restricción planteada si $X_2 = 0$; $X_1 = 4{,}500$; y si $X_1 = 0$; $X_2 = 1{,}500$. Recuerde que estas restricciones son para solo un departamento, así es que debemos escoger una de éstas, y solamente tendremos una restricción por cada departamento que tengamos en nuestra compañía, por lo que tendremos las siguientes restricciones:

$1/3X_1 + X_2 \leq 1{,}500$ (restricción del departamento de partes eléctricas).

$1/8X_1 + X_2 \leq 1{,}000$ (restricción del departamento de partes mecánicas).

$1/2X_1 + X_2 \leq 2{,}000$ (restricción del departamento de ensambles).

$1/3X_1 + X_2 \leq 3{,}000$ (restricción del departamento de inspección final).

El quinto paso es agregar las restricciones de no negatividad, siendo éstas:

$$X_1 \geq 0;\ \text{y}\ X_2 \geq 0$$

En resumen, el modelo de programación lineal para este problema es:

$$\text{Maximizar } Z = 30X_1 + 500X_2$$

$$\begin{aligned} \text{Sujeto a: } & 1/3X_1 + X_2 \le 1{,}500 \\ & 1/8X_1 + X_2 \le 1{,}000 \\ & 1/2X_1 + X_2 \le 2{,}000 \\ & 1/3X_1 + X_2 \le 3{,}000 \\ & X_1 \ge 0;\ \text{y}\ X_2 \ge 0. \end{aligned}$$

Pudiendo, haberse planteado también de esta siguiente manera:

$$\text{Maximizar } Z = 30X_1 + 500X_2$$

$$\begin{aligned} \text{Sujeto a: } & X_1 + 3X_2 \le 4{,}500 \\ & X_1 + 8X_2 \le 8{,}000 \\ & X_1 + 2X_2 \le 4{,}000 \\ & X_1 + 3X_2 \le 9{,}000 \\ & X_1 \ge 0;\ \text{y}\ X_2 \ge 0. \end{aligned}$$

Veremos ahora el planteamiento de un problema de minimización.

En una granja se crían conejos para la venta de su carne y piel y se desea determinar qué cantidades de los distintos tipos de alimentos se debe dar a cada conejo a fin de cumplir ciertos requisitos nutricionales a un costo mínimo. Se cuentan con tres tipos de alimentos que son detallados en la siguiente tabla, así como se dan las unidades de cada clase de ingrediente nutritivo básico contenido en un kilogramo de cada tipo de alimento, junto con los requisitos mínimos nutricionales diarios y los costos de dichos alimentos.

Ingrediente nutritivo básico.	*Kilogramo del Alimento 1*	*Kilogramo del Alimento 2*	*Kilogramo de l Alimento 3*	*Requerimiento mínimo diario.*
Carbohidratos	80	15	35	230
Proteínas	35	85	50	200
Vitaminas	12	21	63	154
Costo en centavos	50	47	30	

Se nos pide que formulemos un modelo matemático, para este problema de programación lineal, a fin de minimzar el costo de alimentación de los conejos.

Como primer paso es la definición de nuestras variables de decisión las cuales serán:

$X_1 =$ Cantidad de kilogramos del alimento 1.

$X_2 =$ Cantidad de kilogramos del alimento 2.

$X_3 =$ Cantidad de kilogramos del alimento 3.

El siguiente paso es la formulación de la función objetivo, encontrando en la tabla los costos por kilogramo de los alimentos 1, 2, y 3, lo cual hace que nos quede la función objetivo como:

$$\text{Minimizar } Z = 50X_1 + 47X_2 + 30X_3$$

El paso que sigue es determinar cuales son los requerimientos nutricionales mínimos a satisfacer, estos se encuentran en la tabla, los cuales son 230 unidades de carbohidratos, 200 unidades de proteínas y 154 unidades de vitaminas. Ya que los requerimientos son mínimos a satisfacer, entonces podemos determinar que nuestras restricciones serán desigualdades del tipo de mayor o igual que ($\geq$).

El cuarto paso es la determinación de los componentes tecnológicos que aportan cada alimento, también encontrados en la tabla, quedando las restricciones como sigue:

$$80X_1 + 15X_2 + 35X_3 \geq 230 \text{ (restricción de carbohidratos)}$$

$$35X_1 + 85X_2 + 50X_3 \geq 200 \text{ (restricción de proteínas)}$$

$$12X_1 + 21X_2 + 63X_3 \geq 154 \text{ (restricción de vitaminas).}$$

Y por último se agregan las restricciones de no negatividad, $X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$, y $X_3 \geq 0$.

Representando la formulación del problema lineal en su forma canónica nos queda de la siguiente manera:

$$\text{Minimizar } Z = 50X_1 + 47X_2 + 35X_3$$

$$\text{Sujeto a: } 80X_1 + 15X_2 + 35X_3 \geq 230$$

$$35X_1 + 85X_2 + 50X_3 \geq 200$$

$$12X_1 + 21X_2 + 63X_3 \geq 154$$

$$X_1 \geq 0;\ X_2 \geq 0;\ y\ X_3 \geq 0.$$

Un ejemplo más:

La compañía Especies del Oriente, S.A. de C.V., actualmente tiene un suministro limitado de dos ingredientes secretos que importa de China, los cuales son utilizados en la producción de dos condimentos que elabora, el channis y el mezquis. Especies del Oriente usa estos dos ingredientes secretos a los que llamaremos **Secreto 1** y **Secreto 2,** para producir ya sea el channis o el mezquis. Su departamento de mercadeo nos ha hecho llegar el informe de que aunque la empresa puede vender todo el channis que se produce, en el mezquis sólo existe una demanda máximo de 1,350 botellas por período. Los ingredientes secretos que no sean utilizados podrán ser vendidos a \$10.35 el kilo del ingrediente **Secreto 1,** y a \$8.15 el kilo del ingrdiente **Secreto 2.** La siguiente tabla nos presenta los datos de las mezclas de los ingredientes secretos, para la fabricación de los productos así como las demandas, utilidades y disponibilidad de ingredientes de los productos, se nos pide que elaboremos un modelo lineal para maximizar las ganancias de la compañía.

Datos en kilos por botella				
Condimento	*Secreto 1 en kilos por botella*	*Secreto 2 en kilos por botella*	*Demanda en botellas / mes*	*Utilidad por botella en \$.*
Channis	.500	.450	Toda cantidad	23.50
Mezquis	.250	.700	1,350	22.50
Disponibilidad (kilos/mes)	10,000	9,500		

Nuestras variables de decisión.

X_1 = Cantidad de botellas a producir del Channis.

X_2 = Cantidad de botellas a producir del Mezquis.

Quedándonos en primera instancia nuestro modelo lineal como:

$$\text{Maximizar } Z = 23.50X_1 + 22.50X_2$$

$$\text{Sujeto a: } .500X_1 + .250X_2 \leq 10{,}000$$

$$.450X_1 + .700X_2 \leq 8{,}500$$

$$X_1 \leq 1{,}350$$

$$X_1 \geq 0;\ X_2 \geq 0.$$

Sin embargo, como en este problema en particular nos indica que el sobrante puede ser vendido y así obtener una ganancia extra, debemos de modificar nuestro modelo lineal introduciendo unas nuevas variables que llamaremos de holgura, es decir, aquella cantidad de los ingredientes **Secreto 1** y **Secreto 2**, que no haya sido utilizada.

H_1 = Cantidad de kilos NO utilizados del ingrediente **Secreto 1**.

H_2 = Cantidad de kilos NO utilizados del ingrediente **Secreto 2**.

Puesto que la primer restricción del modelo se refiere a la utilización del ingrediente **Secreto 1**, habrá necesidad de modificarla es decir pasará de ser una desigualdad en una igualdad introduciendo la nueva variable H_1, y se tendrá que hacer lo mismo para la segunda de las retricciones puesto que representa la utilización del ingrediente **Secreto 2** introduciendo para esta restricción la variable H_2.

Modificando aquellas restricciones que son referidas a estos dos ingredientes nos quedan de la siguiente manera.

$.500X_1 + .250X_2 + H_1 = 10{,}000$ H_1 tomará el complemento a la igualdad.

$.450X_1 + .700X_2 + H_2 = 8{,}500$ H_2 tomará el complemento a la igualdad.

Además, también hay que modificar nuestra función objetivo, agregándole a nuestras ganancias las contribuciones que nos dejan la venta de los sobrantes de estos ingredientes, que son de $10.35 por cada kilo del ingrediente **Secreto 1** y de $8.15 por cada kilo del ingrediente **Secreto 2**.

Al hacer lo anterior, nuestra nueva función objetivo nos quedará como:

$$\text{Maximizar } Z = 23.50X_1 + 22.50X_2 + 10.35H_1 + 8.15H_2$$

Quedándonos finalmente nuestro modelo lineal de la siguiente manera:

$$\text{Maximizar } Z = 23.50X_1 + 22.50X_2 + 10.35H_1 + 8.15H_2$$

Sujeto a: $.500X_1 + .250X_2 + H1 = 10{,}000$

$.450X_1 + .700X_2 + H2 = 8{,}500$

$X_1 \leq 1{,}350$

$X_1 \geq 0$; $X_2 \geq 0$; $H1 \geq 0$; y $H2 \geq 0$.

II.3).- Problemas de ejercicio.

1).- Problema de planeación financiera. Manuel García, es un corredor de bolsa de una firma de inversiones personales, la cual maneja la cartera de valores de cierto número de inversionistas del país. El nuevo cliente que a Manuel le han asignado le ha pedido que le maneje una cartera de inversión por $670,000. Manuel le sugiere al cliente limitar su cartera a una combinación de las tres acciones que se muestran en la siguiente tabla, lo cual acepta de buen grado el cliente y éste detalla las cantidades máximas que debe invertir Manuel, en cada una de las acciones que él le ha sugerido.

Acción	Precio por Acción	Unidad anual estimada por acción	Máxima inversión posible.
Cimex.	$45	$10	$450,000.
Teimex.	$18	$ 4	$250,000.
Petrabonos.	$20	$ 4	$300,000.

Formule un modelo de P.L. para determinar cuántas acciones de cada clase debería comprar Manuel García para que maximice el beneficio total anual estimado de su cliente.

2.- Problema de mezclas alimenticias. Mario Can, es el gerente de la firma Perros Contentos, S.A. de C.V., la cual proporciona albergues para perros. Ellos producen un alimento para perros, llamado CresiCan y se hace mezclando dos productos de soya para obtener un **alimento para perros balanceado.** Los datos que se dan en la siguiente tabla, son los productos de soya utilizados para obtener el CresiCan.

Alimento para perros balanceado.			
Productos de soya.	Costo por kilos	% de proteínas por kilo	% de grasas por kilo
Tipo A1.	$1.60	55 %	15 %
Tipo A2.	$1.15	32 %	26 %

Si Mario desea asegurarse de que cada uno de los perros reciba al menos 0.560 kilos de proteínas y 0.210 kilos de grasa diariamente, ¿Cuál sería la mezcla de los productos de soya para obtener el CresiCan a un costo mínimo?, formule el modelo lineal.

3.- *Problema de mezcla para fertilizantes.* Florencio Jardines, es el superitendente de edificaciones y jardines de la Univesidad Autónoma de Nuevo Léon, y está planeando poner fertilizante al pasto en el área de la Rectoría a la entrada de la primavera. El pasto necesita el producto Básico 1, nitrógeno y potasio al menos en las cantidades dadas en la siguiente tabla.

Requerimientos totales del pasto.	
Mineral.	Cantidad mínima en kilos.
Básico 1.	15
Nitrógeno	9
Potasio.	10

En el mercado Florencio puede obtener tres tipos de fertilizantes comerciales, y en la siguiente tabla se da el análisis y los precios de cada uno de ellos.

Características de los fertilizantes (por cada 1,000 Kilos).				
Fertilizante	Contenido de básico 1 (en kilos)	Contenido de nitrógeno (en kilos)	Contenido de potasio (en kilos)	Precio por tonelada.
Tipo A1.	35	15	15	$20
Tipo A2.	20	10	20	$18
Tipo A3.	15	15	15	$17

Florencio puede comprar todo el fertilizante que desee de cada tipo y hacer la mezcla antes de aplicarlo al jardín. Formule un modelo de P.L. para determinar cuánto debe de comprar de cada fertilizante para satisfacer los requerimientos a un costo mínimo.

4.- *Problema de presupuestación de capital.* Una Casa de Bolsa tiene que elegir entre cuatro proyectos que compiten por un presupuesto de inversión fija de $3,500,000. En la tabla se muestra la inversión neta y los rendimientos estimados de cada proyecto.

Proyectos a invertir:			
Proyecto	*Inversión*	*Rendimientos Estimados*	*Riesgo*
Locales en Valle Oriente	$2,500,000	$3,500,000	8
Viviendas de nivel alto	$2,140,000	$3,200,000	8
Edificios de oficinas	$1,750,000	$2,650,000	4
Viviendas de nivel medio	$2,520,000	$3,150,000	2

A cada uno de estos proyectos se le pueden asignar fondos en cualquier cantidad fraccional, menor o igual al 100% del proyecto. La Casa de Bolsa requiere de un rendimiento mínimo del 35% y desea que el riesgo sea mínimo. Suponiendo que el riesgo es acumulativo. Por ejemplo el riesgo de asignar fondos para viviendas de nivel alto en un 30% y para edificio de oficinas en un 70% será $(0.3)(8) + (0.7)(4) = 5.20$.

Se nos pide que elaboremos un modelo de programación lineal, donde las variables de decisión sean las fracciones a asignar del presupuesto de cada proyecto que se debe llevar a cabo.

5.- *Problema de planeación de cartera.* La CaBos es una compañía de inversiones, ella cuenta actualmente con 10 millones de nuevos pesos en efectivo para invertir. Su objetivo es tratar de maximizar los rendimientos que se esperan obtener en el próximo año. La compañía tiene como política, el análisis de cuatro posibles inversiones las cuales estan resumidas en la siguiente tabla.

Resumen de posibilidades de inversión:		
Posibles inversiones	Réditos esperados en (%)	Inversión máxima permisible en millones
Cetes	18	$5
Papel bursátil	16	$8
Mesa de dinero	22	$3
Bonos bancarios	19	$3

Además la compañía ha establecido que por lo menos el 35% de los fondos deberá ser colocado en papel bursátil y en bonos bancarios, y no más del 50% en la mesa de dinero y Cetes. Y se deben de colocar completamente los 10 millones de pesos disponibles. Formulese un modelo de programación lineal que diga cuánto dinero invertir en cada posibilidad de inversión.

6.- Una cadena comercial opera los 7 días de la semana. A las cajeras de la cadena se les contrata para trabajar periodos de 6 horas diarias. En el contrato colectivo del sindicato se especifica que cada cajera debe de trabajar 5 días consecutivos y después tener derecho a 2 días consecutivos de descanso. Cada cajera recibe el mismo sueldo semanal. En la tabla se presentan las necesidades de contratación de cajeras por cada día de la semana.

Necesidades de contratación de cajeras a la semana:	
Día de la semana	Número mínimo de horas de cajeras necesario
Lunes	120
Martes	250
Miércoles	400
Jueves	350
Viernes	750
Sábado	830
Domingo	210

Supóngase que este ciclo de necesidades se repite en forma indefinida y no toma en cuenta el hecho de que el número cajeras debe que ser un número entero. La gerencia desea encontrar un modelo lineal de empleo que satisfaga las necesidades a un costo mínimo.

7.- *Un problema de produción.* La Compañía Caber, Inc. Embotella y vende dos productos químicos. La compañía obtiene una utilidad de $0.25 por unidad del producto químico 'X', y $0.24 por unidad del producto químico 'Y', que se vendan. Los tiempos de embotellado, etiquetado y empacado, que se requieren para los productos en cada uno de los tres departamentos de producción se sintetizan en la siguiente tabla.

Datos de producción de la compañía Caber de los minutos necesarios de producción para cada producto en los distintos departamentos.

Departamento	Producto 'X'	Producto 'Y'
Embotellado	1	2
Etiquetado	1	3
Empacado	2	3

Los encargados de los departamentos productivos, han estimado que durante el próximo mes estarán disponibles las siguientes horas de trabajo: 800 horas en el departamento de embotellado; 600 en el departamento de etiquetado, y 2,000 horas en el departamento de empaques. Suponiendo que la compañía desea que se maximicen las ganancias, formule el modelo de programación lineal para el problema.

8.- *Un problema de fabricación.* Armando Meza, tiene un pequeño taller de ebanistería. El fabrica tres clases diferentes de mesas, la de lujo, la típica, y la económica. Cada clase de mesa requiere de una ciera catidad de tiempo para su corte de las distintas piezas, su montaje, y pintura. Armando puede vender la totalidad de las unidades que produce. Por cierto, la mesa típica se puede vender a algunos clientes sin pintar. El nos ha proporcionado sus datos en la siguiente tabla, y nos ha pedido que le formulemos un modelo de programación lineal, para que le ayudemos a determinar la cantidad que debe de producir de las distintas clases de mesas que fabrica con el fin de que se maximicen sus ganancias.

Datos en horas por unidad				
Clases de Mesas.	Corte	Ensamblado	Pintura	Utilidad por mesa en $.
Mesa de lujo	3	7	5	60
Mesa típica	1.5	3.2	3	35
Mesa típica (sin pintar)	1.5	3.2	0	23
Mesa económica	1	2	1.5	15
Capacidad (Horas/mes).	250	330	250	

CAPÍTULO III).- SOLUCIÓN DE PROBLEMAS POR EL MÉTODO GRÁFICO.

III).- Solución de problemas por el método gráfico.

III.1).- Requerimientos de un problema de programación lineal.

Antes de profundizar sobre este tema, es necesario que hablemos un poco sobre que es la programación lineal, ésta ha sido una metodología de mucha importancia y de un gran alcance en la toma de decisiones, cuya filosofía principal se basa en *tratar de asignar ciertas clases de recursos limitados a las demandas competitivas en forma óptima*, para esto se requiere establecer una premisa fundamental, la cual supone que cualquier consumidor tratará siempre de conseguir el mayor beneficio por su dinero, al igual que la acción de los hombres de negocios, cuyo objetivo principal es conseguir la mayor cantidad de utilidades posibles. A esta premisa se le llama de *Racionalidad Económica.*

En la actividad empresarial se cuenta con valiosos recursos, que generalizando los podríamos enmarcar en tres grupos principales, y estos son: el *Recurso Humano, el Espacio Físico de Producción y el Capital con el que se dispone.*

Por *Recurso Humano*, hablamos del tiempo que el trabajador debe invertir para la realización de un trabajo o la elaboración de un producto específico, así como la cantidad de personas de las cuales en determinado momento podemos disponer. Es decir, cuántas horas y cuántos trabajadores.

Cuando hablamos del *Espacio Físico*, nos referimos al lugar físicamente donde se llevará a efecto la producción, puesto que ningún empresario tendría la osadía de emplear parques o calles como lugar para ponerse a producir, así como ningún agricultor se pondría a sembrar en carreteras ni terreno que no le perteneciera.

Como tercer elemento para lograr la producción, nos referimos al *Capital*, este último recurso es el más amplio de todos, pues va desde el mismo dinero necesario para adquirir materia prima e insumos, hasta la infraestructura y tecnología que se requiere para lograr la producción.

Pues bien, estos recursos que acabamos de definir, no se encuentran en cantidades ilimitadas en la actividad empresarial, más bien son recursos escasos, a los cuales hay que manejar de manera óptima a fin de cumplir con los objetivos de cada empresa, y como mencionamos anteriormente, es tratar de obtener el máximo beneficio, mediante la aplicación de herramientas administrativas, siendo una de éstas la *Programación Lineal.*

Quizá, la mejor manera de definir la programación lineal, sea la examinación del adjetivo *Lineal*, que describe una relación entre dos o más variables que son directamente proporcionales, es decir, que un aumento porcentual de un recurso, producirá el mismo aumento porcentual en el resultado, dando por descontado la existencia de los rendimientos decrecientes. Finalmente como *Programación* podremos entender que es una serie de técnicas matemáticas utilizadas y secuenciales con el fin de lograr un objetivo que es obtener la mejor solución, empleando los recursos limitados de una empresa o persona.

En resumen podríamos concluir que programación lineal es una técnica matemática para determinar la mejor asignación de los recursos limitados de una empresa o persona, con el objeto de buscar el máximo beneficio.

III.2).- Método Gráfico.

Aquí nos ocuparemos de la intersección de líneas y planos para obtener un enfoque de dos y tres dimensiones, cuando tratemos problemas de tres dimensiones, es de suma importancia la interpretación de los planos puesto que dada su naturaleza y la abstracción de los mismos, dificultan la tarea tanto del dibujante como del que interpreta la solución de estos. De aquí se desprende que podemos dar respuesta a problemas de una, dos y tres variables que significarían cada una de ellas las dimensiones que tratemos. Hasta ahora no hemos mencionado los problemas unidimensionales, es decir, de una variable, ya que su solución es trivial.

Existen cuatro pasos básicos, para la solución gráfica de la programación lineal, *el primero* es formular el modelo matemático que está dado por una función objetivo, y una o más restricciones, ya sean ecuaciones o desigualdades, ya que estos deben cumplir casi siempre con un máximo o mínimo en sus requerimientos, *el Segundo* paso es expresar en forma gráfica las restricciones del problema, delimitando las áreas que cumplan con éstas, *el Tercer* paso básico es trazar la función objetivo en la gráfica con una utilidad supuesta arbitrariamente a fin de conocer su pendiente y de ahí buscar la solución óptima, y como *Cuarto* y último paso es encontrar la solución de problema, en el método gráfico, recomendando hace uso de simultáneas para encontrar los valores precisos en los cruces de las ecuaciones graficadas y que forman el punto óptimo de solución.

Para continuar con la explicación del *Método Gráfico* y a fin de relacionar los puntos básicos mencionados emplearemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo Prototipo del *Método Gráfico*

Supóngase que una persona acaba de heredar N$6,000.00 y que desea invertirlos. Al oír esta noticia dos amigos distintos le ofrecen la oportunidad de participar como socio en dos negocios, cada uno planteado por cada amigo. En ambos casos, la inversión significa dedicar un poco de tiempo el siguiente verano, al igual que invertir efectivo. Con el primer amigo al convertirse en socio *completo* tendría que invertir N$5,000.00 y 400 horas, y la ganancia estimada (ignorando el valor de su tiempo) sería de N$4,500.00. Las cifras correspondientes a la proposición del segundo amigo son N$4,000.00 y 500 horas, con una ganancia estimada de N$4,500.00 (ignorando el valor de su tiempo). Sin embargo, ambos amigos son flexibles y le permitirían entrar en el negocio con cualquier fracción de la sociedad; la participación en las utilidades sería proporcional a esta fracción.

Como de todas maneras, esta persona está buscando un trabajo interesante para el verano (600 horas a lo más), ha decidido participar en una o ambas propuestas, con la combinación que maximice la ganancia total estimada. Es necesario resolver el problema de obtener la mejor combinación.

III.3).- Formulación como un problema de programación lineal.

Para formular un modelo matemático (de programación lineal) para este problema, lo primero que hay que definir son nuestras variables que vamos a usar, sea X_1 como la participación proporcional del negocio con el primer amigo y X_2 como la participación proporcional del negocio con el segundo amigo y sea Z la utilidad total que resulte del período. Entonces, X_1 y X_2 son las *variables de decisión* del modelo y el objetivo es escoger sus valores de manera que se *maximice* la ganancia.

$$Z = 4{,}500X_1 + 4{,}500X_2$$

La cuál estará sujeta a las restricciones impuestas por los amigos. De aquí se desprende la primera de éstas, que es la restricción de la aportación de capital, en el negocio del primer amigo tendría que hacer una inversión de N$5,000.00, mientras que en el negocio del segundo amigo haría una inversión de N$4,000.00, esto con una participación del 100% para ambos negocios, dada la flexibilidad que le dan los amigos el podría invertir una parte proporcional en cada negocio, y como solo dispone de N$6,000.00. Matemáticamente, esta restricción se expresa mediante una desigualdad que sería:

$$5{,}000X_1 + 4{,}000X_2 \leq 6{,}000$$

La otra restricción a la cuál queda sujeto, es la del tiempo de trabajo que tendrá que destinar también en forma proporcional, en el negocio del primer amigo deberá destinar 400 horas de su tiempo y en el negocio del segundo amigo serían 500 horas de trabajo, mientras que él solo está dispuesto a invertir de su tiempo un máximo de 600 horas, para expresar esta restricción en forma matemática también es una desigualdad, puesto que él, establece un máximo de horas que tiene disponible, quedándonos esta restricción como:

$$400X_1 + 500X_2 \leq 600$$

Además, la participación proporcional para X_1 y X_2 en uno o en ambos negocios podrá existir o no, pero nunca tomará valores negativos, ya que un valor negativo en cualquiera de las variables X_1 y X_2 podría hacer válida la expresión pero no tendría un significado real puesto que podemos participar o no en el negocio, pero nunca nuestra participación podrá ser con valor negativo. Con esto debemos introducir dos restricciones más al problema lineal que es la garantía de no negatividad, quedándonos estas restricciones como:

$$X_1 \geq 0; \text{ y } X_2 \geq 0;$$

Para resumir, en el lenguaje matemático de programación lineal, el problema consiste en seleccionar valores de X_1 y X_2 para:

$$\text{Maximizar } Z = 4{,}500X_1 + 4{,}500X_2$$

$$\text{Sujeta a las restricciones: } 5{,}000X_1 + 4{,}000X_2 \leq 6{,}000$$

$$400X_1 + 500X_2 \leq 600$$

y las restricciones de no negatividad que se definieron anteriormente

$$X_1 \geq 0; \; X_2 \geq 0.$$

III.4).- Solución Gráfica.

Este problema solo tiene dos variables de decisión y por lo tanto tendrá solo dos dimensiones y es susceptible de resolverse por el método gráfico. El procedimiento para resolverlo es la construcción de un gráfica, cuyos ejes serán X_1 y X_2, es importante hacer notar que las restricciones $X_1 \geq 0$, y $X_2 \geq 0$, son las restricciones de no negatividad (en caso de existir), la explicación para éstas es que debemos trabajar solo con valores positivos o ceros, ya que no tendría explicación el hecho de tener valores negativos, por ejemplo, si X_1 tomará el valor de $-3/4$ y X_2 el valor de cero, y estos los sustituyéramos en la restricción dos que es la de horas a trabajar en el negocio, su resultado cumpliría con la desigualdad, ya que $400(-3/4) + 500(0) \leq 600$; daría como resultado $-300 < 600$; siendo cierta la desigualdad, pero no tendría ningún significado real la variable X_1, puesto que en esta restricción, se trata de invertir tiempo en el negocio del amigo, la interpretación para X_2 sería que no invertiría nada de tiempo y por ende no participaría del negocio, en cambio con la variable de decisión X_1, que toma un valor de $-3/4$, la interpretación sería que lejos de invertir tiempo en el negocio le quitaría tiempo al negocio, y está fuera de toda lógica ya que podemos emplear o no nuestro tiempo pero un valor negativo no podemos interpretarlo.

En resumen, normalmente las variables de decisión en programación lineal, deben tomar valores positivos o ceros, salvo en casos muy específicos si podrán tomar valores negativos, como por ejemplo si nuestras variables de decisión tratara de temperaturas para la congelación de algún alimento con valores inferiores a los cero grados, entonces si pudieran tomar estos valores negativos.

Una vez aclaradas las restricciones de no negatividad y a su existencia, esto nos exigen que los valores reales de X_1, y X_2, deberán estar en el cuadrante de los valores no negativos.

El siguiente paso es realizar la gráfica a escala, y graficar las desigualdades llevándolas a su máximo límite permisible esto es, llevarlas a la igualdad, una vez hecho esto se despejan los valores para X_1 y X_2 en los cruces de los ejes es decir:

$$5{,}000X_1 + 4{,}000X_2 \leq 6{,}000 \text{ (restricción original en forma de desigualdad)}$$

$$\text{se transforma en } 5{,}000X_1 + 4{,}000X_2 = 6{,}000 \text{ (nótese que es llevada a su máximo límite)}$$

Ahora se obtiene el valor en donde se cruza la recta con el eje de X_1;

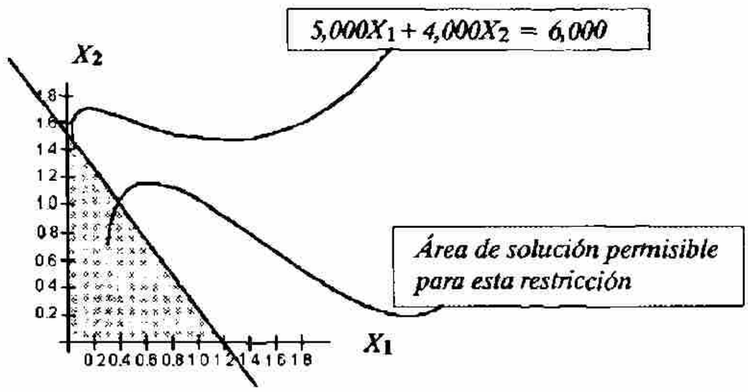
$$\text{Si } X_2 = 0 \text{ entonces } 5{,}000X_1 + (0) = 6{,}000$$

$$\text{por lo tanto } X_1 = 6{,}000 / 5{,}000 \text{ esto es } X_1 = 1.2$$

Del mismo modo se saca el valor para el cruce de la recta en el eje de X_2;

$$\text{Si } X_1 = 0 \text{ entonces } (0) + 4{,}000X_2 = 6{,}000$$
$$\text{por lo tanto } X_2 = 6{,}000 / 4{,}000 \text{ esto es } X_2 = 1.5$$

Graficándose esta recta nos quedaría:



Nótese que cualquier valor en el primer cuadrante, que se encuentre fuera de el área sombreada no cumpliría con esta restricción, por ejemplo si X_1 tomara el valor de 1.8 y X_2 el valor de 0.4 y los llevamos a la restricción original nos quedaría $5{,}000(1.8) + 4{,}000(0.4) \leq 6{,}000$ quedando $10{,}600 \leq 6{,}000$ siendo falsa esta aseveración, los valores negativos aunque si cumplen con la desigualdad no tienen ningún singnificado real puesto que supondrián que lejos de invertir dinero en el negocio del amigo le quitaría dinero a éste, por ejemplo si $X_1 = 0.8$ y $X_2 = -0.4$ al evaluarlo en la restricción nos quedaría $2{,}400 < 6{,}000$ y esta aseveración es cierta, sin embargo supone que invertiría el .80 de la propuesta hecha por el primer amigo pero *menos* .40 en el negocio del segundo amigo y este valor negativo se interpretaría como una menos inversión (o pedimento de un préstamo), lo cuál no ha sido la propuesta de este amigo, en resumen podemos concluir que cualquier punto que esté fuera de esta área sombreada invalidaría el resultado en la desigualdad.

Ahora graficaremos la siguiente restricción que es:

$$400X_1 + 500X_2 \leq 600 \text{ (restricción original en forma de desigualdad)}$$
$$\text{se transforma en } 400X_1 + 500X_2 = 600 \text{ (nótese que es llevada a su máximo límite)}$$

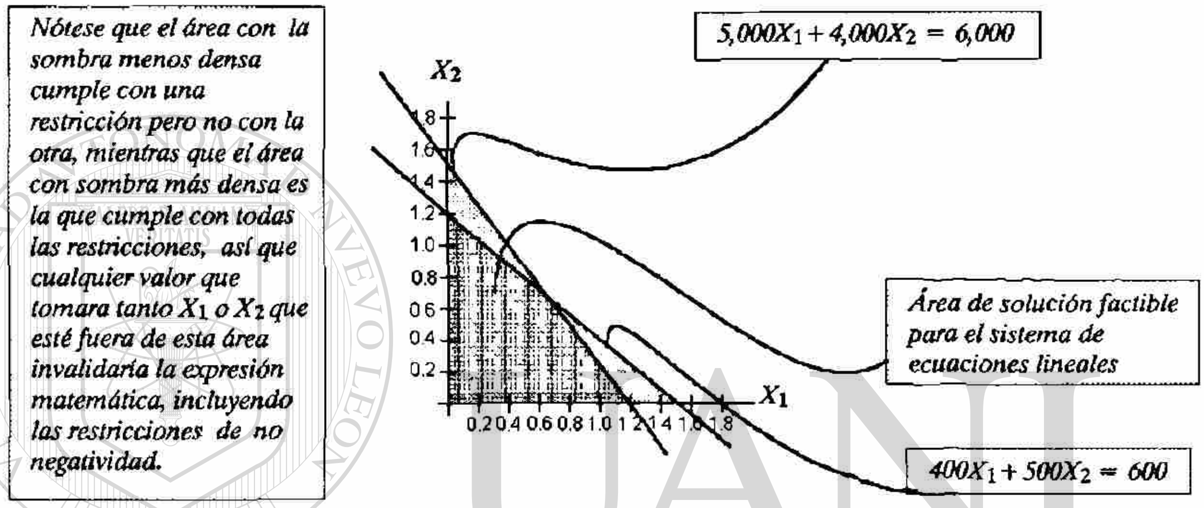
Aquí se obtiene el valor en donde se cruza la recta con el eje de X_1;

$$\text{Si } X_2 = 0 \text{ entonces } 400X_1 + (0) = 600$$
$$\text{por lo tanto } X_1 = 600 / 400 \text{ esto es } X_1 = 1.5$$

Del mismo modo se saca el valor para el cruce de la recta en el eje de X_2;

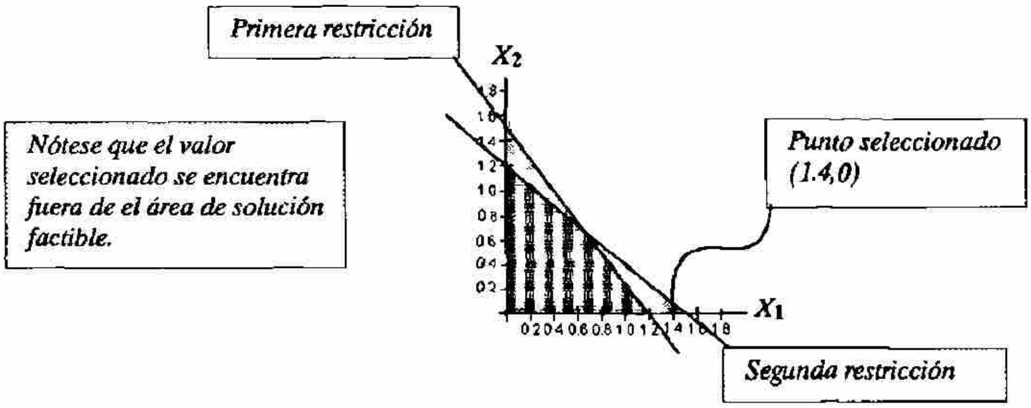
$$\text{Si } X_1 = 0 \text{ entonces } (0) + 500X_2 = 600$$
$$\text{por lo tanto } X_2 = 600 / 500 \text{ esto es } X_2 = 1.2$$

Graficándose esta recta nos quedaría:



Definiremos como área de solución factible a todas aquellas combinaciones de puntos para X_1, y X_2 que cumplen con todas las restricciones del sistema lineal, y cualquier valor que se encuentre fuera del área de solución factible no proporcionaría una solución real, por ejemplo si X_1 tomara el valor de 1.4, no satisface la primer restricción aunque si cumpliría con la segunda restricción, y con esto el valor de 1.4 para X_1 queda fuera de la solución factible del modelo lineal.

$$X_1 = 1.4; \text{ y } X_2 = 0$$
$$\text{Primera restricción:} \quad 5,000(1.4) + 4,000(0) \leq 6,000$$
$$7,000 \leq 6,000 \text{ Falso.}$$
$$\text{Segunda restricción:} \quad 400(1.4) + 500(0) \leq 600$$
$$560 \leq 600 \text{ Cierto.}$$



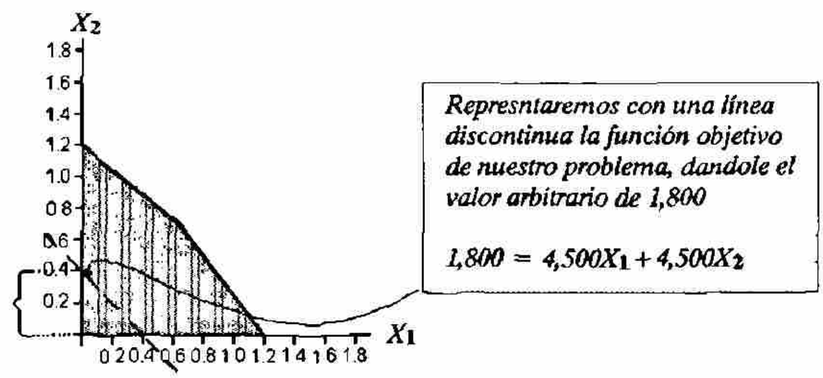
Como puede apreciarse en la gráfica de la página anterior cualquier valor que se encuentre fuera de la zona con sombra más densa no cumpliría con las restricciones, a esta zona de la que ya hablamos anteriormente se le llama área de solución factible, puesto que cualquier combinación de valores que se encuentren dentro de esta área es factible de realizarce, ya que cumplirían con todas las restricciones del problema, más sin embargo debemos buscar aquella solución que nos proporcione el máximo beneficio y para ello es necesario graficar la función objeto del problema que es maximizar $Z = 4{,}500X_1 + 4{,}500X_2$, dado que para poderla graficar la igualdad tiene que ser un valor escalar, al cual daremos un valor arbitrario, por ejemplo 1,800 esto nos generaría una nueva ecuación que sería:

$$1{,}800 = 4{,}500X_1 + 4{,}500X_2$$

Encontramos los valores en los cruces de los ejes de X_1, y X_2 de la misma forma que lo hicimos para las restricciones quedándonos que:

$$X_1 = 0.4; \text{ y } X_2 = 0.4$$

Una vez graficado nos quedaría:



Como se puede ver en la gráfica la recta de la función objetivo pasa por el área de solución factible y cualquier combinación de puntos de X_1 y X_2 seleccionados que toquen la recta de la función objetivo y dentro del área de solución factible nos proporcionaría una utilidad de N$1,800, sin embargo no es la solución óptima ya que podemos apreciar en la gráfica que la recta de la función objetivo está muy por debajo de los límites del área de solución factible que nos proporcionan el máximo beneficio, como veremos a continuación.

Para encontrar la máxima utilidad veamos primero el siguiente análisis.

$$\text{Si } Z = C_1X_1 + C_2X_2 \quad \text{(donde } C_i\text{, son las contribuciones de la función objetivo)}$$

despejando X_2 no quedaría

$$X_2 = -(C_1 / C_2)X_1 + Z / C_2$$

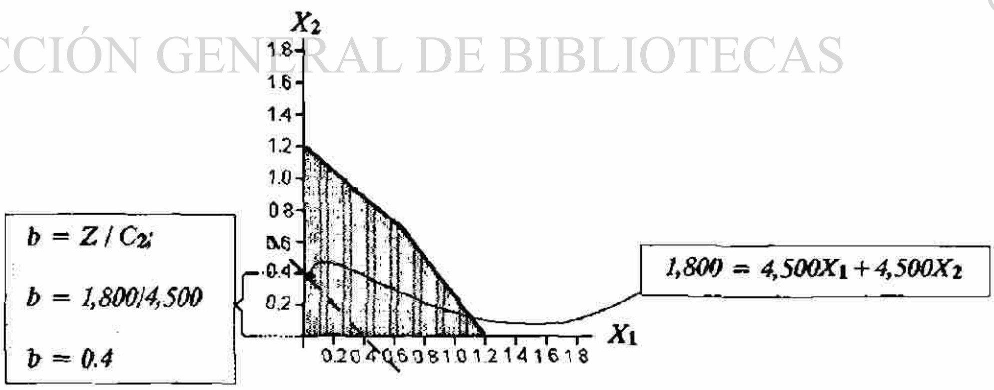
Si X_1 representa el eje de X, y X_2 representa el eje de la Y, esto lo podríamos comparar con la forma canónica de una ecuación lineal como:

$$Y = mX + b \quad \text{de aquí resalta que}$$

$$m = -(C_1 / C_2); \text{ y } b = Z / C_2;$$

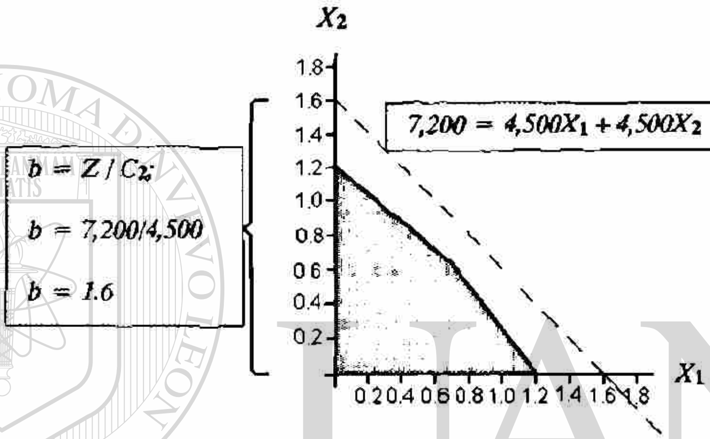
Por lo tanto la pendiente (m) en la recta de la función objetivo será siempre la relación de dos constantes y por concecuencia, $Z = C_2b$ siendo b para cualquier recta es la distancia medida sobre el eje Y desde el origen al punto de corte de la recta con ese eje.

Veamos esto en la siguiente gráfica, para tener una mayor comprensión



Como se puede ver en la gráfica el valor de b, está dado por la relación proporcional de Z / C_2 o bien $Z = C_2b$, entre más grande sea b, mayor será nuestra utilidad. Ya que el problema que nos ocupa es de maximizar la ganancia de nuestro amigo, y para encontrarlo debemos desplazar esta recta cuya pendiente es constante hacia arriba con el fin de encontrar el último punto que toque el desplazamiento de la función objetivo, y que se encuentre dentro del área de solución factible, logrando que la constante *b*, sea la mayor posible, claro está debemos de cuidar que nuestra recta Z, no salga completamente del área de solución factible.

Haciendo *b* más grande:



Como se aprecia en la gráfica *b* aumentó en cuatro veces su valor lo cual representa un gran incremento en la ganancia ya que pasó de N$1,800 a N$7,200, pero no podemos aspirar a obtener dicha ganancia dado que la recta de Z no toca ningún punto del área de solución factible, es decir, se encuentra fuera de esta área de solución factible y por lo tanto debemos desplazarla hacia abajo. Para hacerlo podemos tomar una regla y desplazarla hasta que toque el primer punto que sería el óptimo, una vez hecho esto hay que evaluar las ecuaciones que se cruzan y forman el punto, para dar respuesta al problema obteniendo la solución y recomendando hacer simultáneas con estas ecuaciones a fin de conocer los valores de X_1 y X_2 en sus ejes correspondientes.

Recomendando hacer simultáneas para obtener una precisión de los valores de X_1, y X_2, con la ecuación uno y dos que son las que forman el punto óptimo al cruzarse estas, nos queda la solución del problema como sigue:

$$5{,}000X_1 + 4{,}000X_2 = 6{,}000 \quad \text{(se multiplica por -4)}$$
$$400X_1 + 500X_2 = 600 \quad \text{(se multiplica por 50)}$$

quedándonos:

$$-20{,}000X_1 - 16{,}000X_2 = -24{,}000$$
$$20{,}000X_1 + 25{,}000X_2 = 30{,}000$$

dando como resultado:

$$0X_1 + 9{,}000X_2 = 6{,}000$$

despejando X_2; nos da $X_2 = 2/3$

sustituyendo este valor en la primer ecuación original:

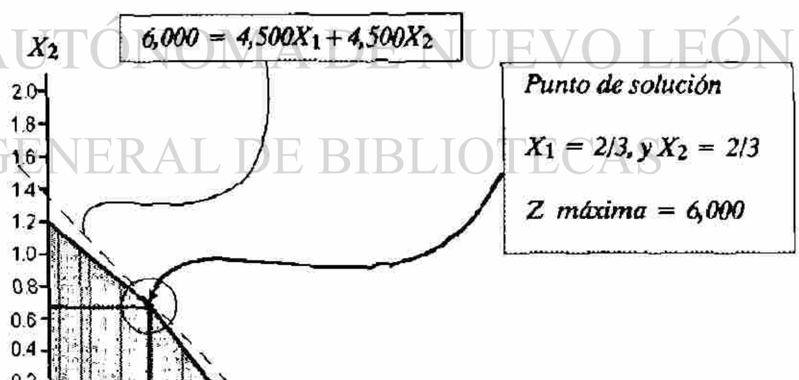
$$5{,}000X_1 + 4{,}000(2/3) = 6{,}000$$

despejando X_1; nos queda $X_1 = 2/3$

Estos valores de $X_1 = 2/3$; y $X_2 = 2/3$, representan el punto óptimo del problema y que lo forman el cruce de la ecuación uno y dos, ahora habrá que sustituir éstos en la función objetivo para encontrar el valor de Z que será la máxima ganancia:

$$Z = 4{,}500(2/3) + 4{,}500(2/3)$$
$$Z = 6{,}000$$

Viéndolo en forma gráfica:



El lector se preguntará, ¿no sería más sencillo hacer las simultáneas desde un principio, y así obtener la solución del problema?. La respuesta es que las simultáneas se resuelven una vez que sabemos cual es el punto óptimo, ya que si la pendiente del problema anterior hubiese sido más vertical o más horizontal podría llegar a salir por otro vértice del área de solución factible.

III.5).- Problema de tres dimensiones para resolverse por el método gráfico.

Ahora trataremos un problema de tres variables de decisión, que como ya se nencionó anteriormente representa hacer planos, para esto tomaremos el siguiente ejemplo:

$$\text{Maximizar } Z = 4X_1 + 3X_2 + 6X_3$$

Sujeto a las restricciones

$$3X_1 + X_2 + 3X_3 \leq 30$$
$$2X_1 + 2X_2 + 3X_3 \leq 40$$

y restricciones de no negatividad

$$X_1 \geq 0;\ X_2 \geq 0,\ X_3 \geq 0$$

El primer paso es la formulción del modelo matemático el cuál se encuentra arriba de estas líneas.

El segundo paso es trazar las restricciones en una gráfica tridimensional, ya que contamos con tres variables en nuestro problema y cada una de éstas representa un eje distinto, la primer restricción:

$$3X_1 + X_2 + 3X_3 \leq 30$$

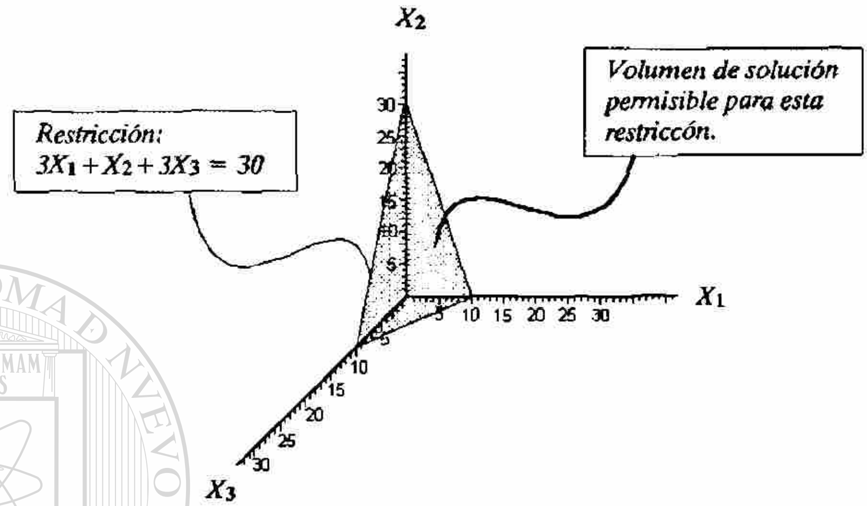
Es llevada a su máximo límite que es la igualdad y nos queda como:

$$3X_1 + X_2 + 3X_3 = 30$$

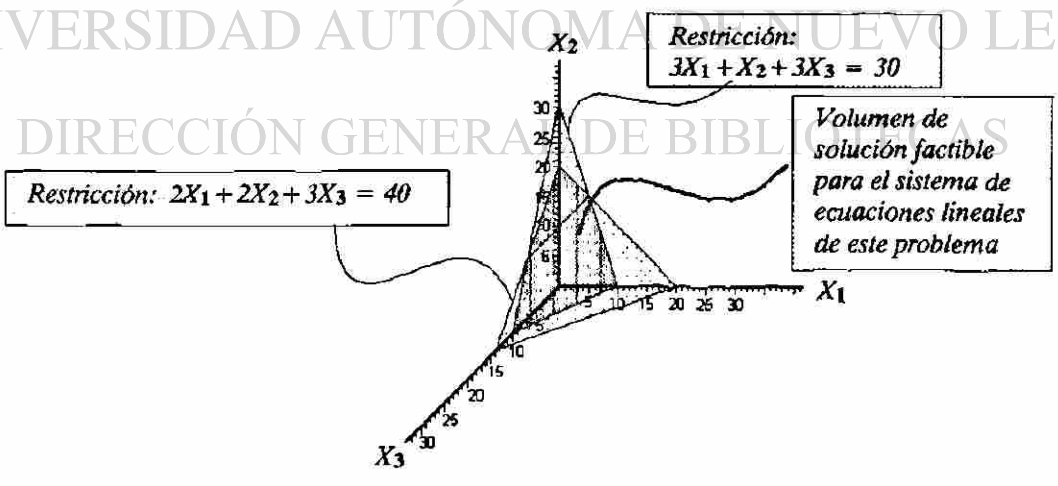
buscarmos los valores donde se cruzan las restricciones con los ejes de x_1, x_2, y x_3:

$$\text{haciendo } X_2 = 0;\ \text{y } X_3 = 0$$
$$3X_1 + (0) + 3(0) = 30 \text{ obtenemos que } X_1 = 10$$
$$\text{ahora } X_1 = 0;\ \text{y } X_3 = 0$$
$$3(0) + X_2 + 3(0) = 30 \text{ obtenemos que } X_2 = 30$$
$$\text{así con } X_1 = 0;\ \text{y } X_2 = 0$$
$$3(0) + (0) + 3X_3 = 30 \text{ obtenemos que } X_3 = 10$$

Recuerde que estamos trabajando con tres dimensiones, y por lo tanto, ahora las restricciones representan planos no rectas como es el caso cuando tenemos solo dos dimensiones o dos variables de decisión, veamos la gráfica, del plano de la primera restricción.



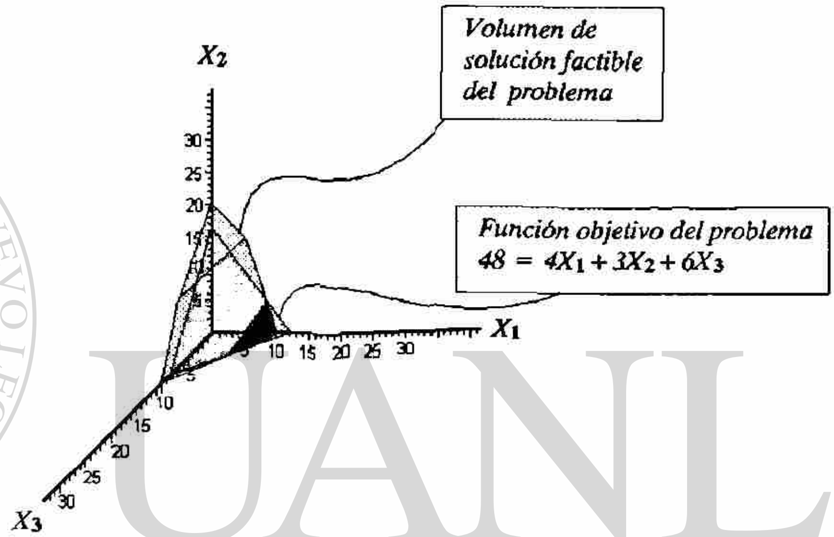
Nótese que en la gráfica, la parte sombreada representa un volumén, cuya figura geométrica tiene sus límites en el plano que forma la restricción y los ejes de X_1, X_2, y X_3, puesto que existen en el problema las restricciones de no negatividad, pasando a la segunda restricción encontramos los puntos que cruzan con los ejes en $X_1 = 20$, $X_2 = 20$, y $X_3 = 13.33$ graficando esta restricción quedaría como se muestra en la siguiente figura:



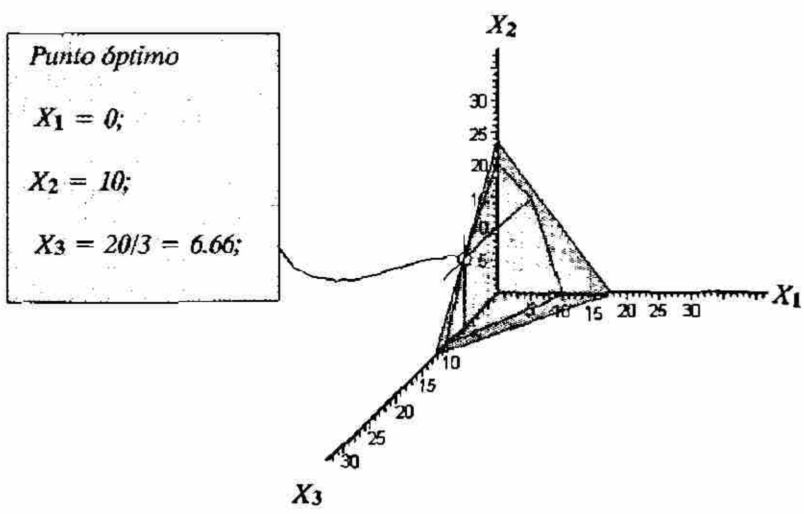
En la figura el sombreado más denso, representa el volumén de la solución factible para este problema, y el siguiente paso será graficar el plano de la función objetivo, para hacer esto es necesario dar un valor arbitrario a la función objetivo a fin de poder obtener los valores de las variables dondé cruzan con los ejes de X_1, X_2, y X_3, para hacer lo anterior habrá que darle un valor arbitrario a **Z**, que en éste caso le daremos el de 48, quedandonos como:

$$48 = 4X_1 + 3X_2 + 6X_3$$

Haciendo $X_2 = 0$; y $X_3 = 0$, entonces $X_1 = 12$; así mismo, para $X_1 = 0$; y $X_3 = 0$, encontramos que $X_2 = 16$, y así de igual forma con $X_1 = 0$; y $X_2 = 0$; por lo que $X_3 = 8$; graficando este plano en la figura de tres dimensiones, nos queda de la siguiente manera:



Como en nuestro problema debemos de maximizar, habrá que desplazar el plano de la función objetivo haciaendola crecer lo más posible, dentro de los limites del volumén de solución factible, y así poder encontrar nuestra solución óptima en el último vértice que toca el plano de la función Z, como se muestra en la figura.



Como se aprecia en la gráfica, el punto óptimo se encuentra en el cruce de los siguientes planos: limitados por los ejes de X_2; y X_3, (esto quiere decir que en el resultado el valor de $X_1=0$); con el método gráfico, la solución es a escala, se recomienda hacer simultáneas para encontrar los valores precisos, en este caso para X_2; y X_3, ya que sabemos que X_1 será cero.

Ya que $X_1=0$; entonces podemos espresar el sistema de ecuaciones lineales como:

$$3(0)+X_2+3X_3 = 30;$$

$$2(0)+2X_2+3X_3 = 40$$

quedando:

$$X_2+3X_3 = 30; \text{ multiplicando por } (-1)$$

$$2X_2+3X_3 = 40$$

esto es $-X_2-3X_3 = -30$

$$2X_2+3X_3 = 40$$

de aquí nos queda que $X_2 = 10$; y sustituyendo en la primera ecuación, tenemos que $X_3 = 20/3$.

Ahora solo nos resta sustituir los valores de X_1; X_2; y X_3 en la función objetivo para encontrar el valor de Z que será la óptima.

$$Z \text{ máxima} = 4(0)+3(10)+6(20/3)$$

$$Z \text{ máxima} = 70$$

Una vez resuelto nuestro problema de tres dimensiones, y recalcando que cada variable de decisión representa una dimensión, así como cada restricción un plano, conociendo esto es impensable que por el método gráfico podamos dar respuesta a problemas con más de tres variables de decisión

III.6).- Ejemplos con características diversas.

En este punto abordaremos casos especiales del método gráfico, ya que no todos los problemas tienen solución, algunos otros tienen solución multiple.

Ejemplo: *Problema con solución cuando se presenta una igualdad.*

Considérese el siguiente problema.

Maximizar $Z = 2X_1 + 3X_2$

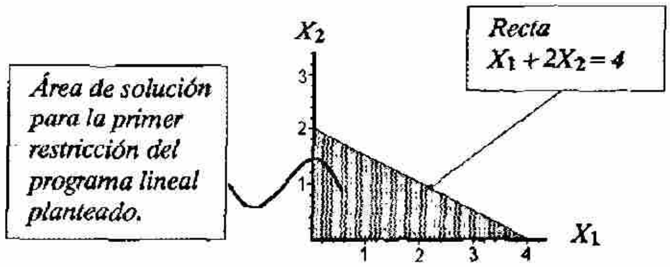
sujeto a: $X_1 + 2X_2 \leq 4$

$X_1 + X_2 = 3$ (nótese que es una igualdad)

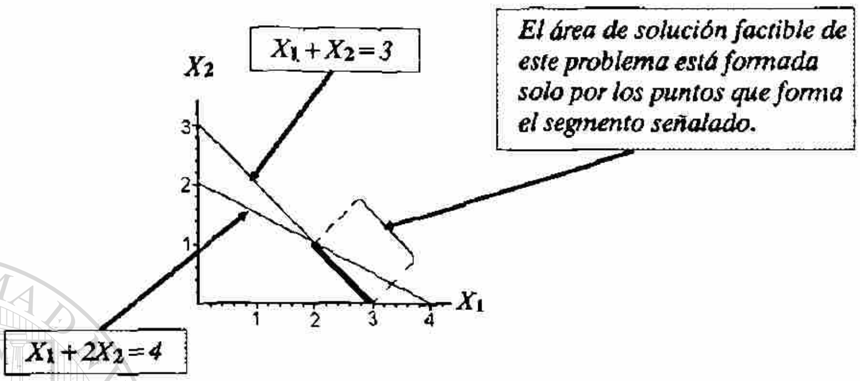
para: $X_1 \geq 0$; y $X_2 \geq 0$.

para obtener la gráfica haremos que la restricción; $X_1 + 2X_2 \leq 4$ (restricción original en forma de desigualdad), sea transformada en $X_1 + 2X_2 = 4$ (nótese que es llevada a su máximo límite).

De aquí obtenemos que en $X_2 = 0$; $X_1 = 4$ y en $X_1 = 0$; $X_2 = 2$, que son los valores donde se cruza la recta de la desigualdad con los ejes de X_1 y X_2, y dado que la desigualdad original es de menor que cualquier combinación de puntos que se encuentren bajo la recta serán de solución para ésta, como se muestra en la gráfica.

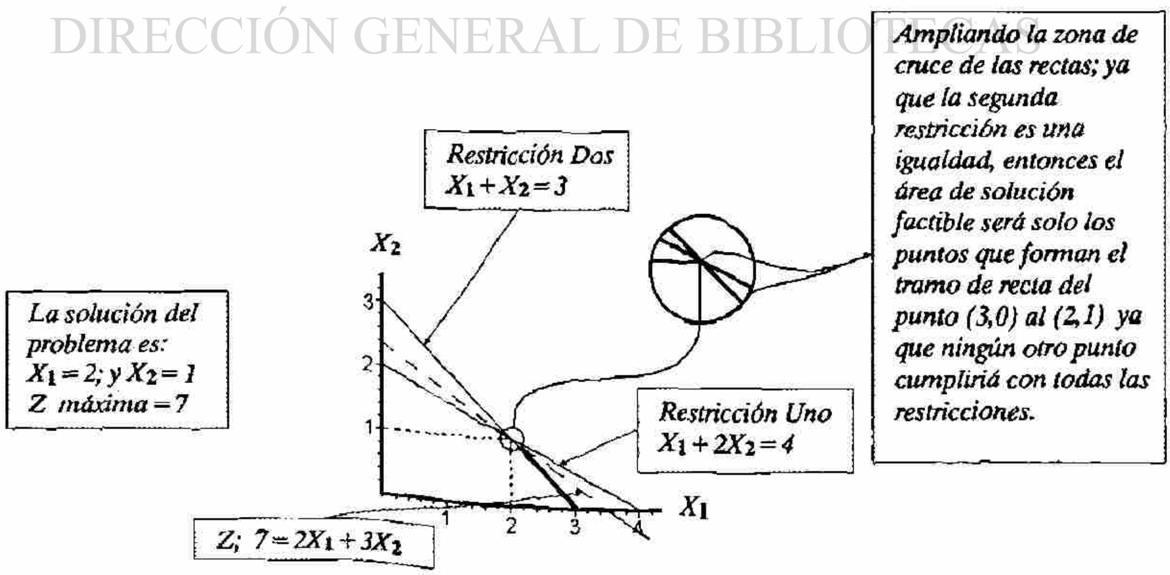


Ahora haremos lo mismo con la siguiente restricción obteniendo los valores de cruce en los ejes de X_1 y X_2 los cuales fueron de en $X_2 = 0$; $X_1 = 3$ y en $X_1 = 0$; $X_2 = 3$, y graficandolos nos quedan de la siguiente manera:



Como se podrá apreciar en la gráfica, no existe el área sombreada característica de la región de solución factible, puesto que al ser la segunda restricción una igualdad invalida tanto el área por arriba de la segunda recta, así como por abajo de ésta, quedando solo un segmento como región de solución factible el cual se encuentra señalado en la gráfica.

El siguiente paso es graficar la función objetivo y tratar de maximizar el problema, para realizarlo primero hay que dar un valor arbitrario a Z para encontrar los valores en los cruces tanto para X_1 como para X_2, y despues tratar de hacer que crezca el valor de b que es la distancia medida sobre el eje de X_2, y como ya sabemos entre más grande sea el valor de *'b'* mayor será nuestra ganancia.



Como se aprecia en la parte ampliada, de la gráfica de la página anterior, el punto óptimo se encuentra en $X_1 = 2$ y $X_2 = 1$, obteniendo una ganancia máxima de 7 unidades de dinero, aunque aparente ser típico su caracterísitica especial, es que, el área de solución factible, está formada por los puntos que forman la recta $X_1 + X_2 = 3$, del punto de cruce hacia abajo, es decir, la parte de esta recta que se encuentra por abajo de la recta $X_1 + 2X_2 = 4$, esto se debe a que la seguna restricción es una igualdad y los únicos puntos que pueden cumplir con ella.

Veamos ahora este otro caso en el que el área de solución es un conjunto vacio, es decir, que no se encuentra ningún punto que satisfaga al sistema de ecuaciones lineales.

Ejemplo: *Problema sin solución.*

Considérese el siguiente problema:

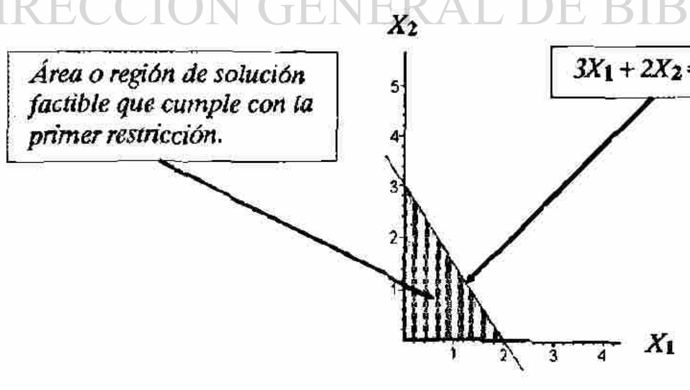
$$\text{Maximizar } Z = 3X_1 + 4X_2$$

$$\text{sujeto a: } 3X_1 + 2X_2 \leq 6;$$

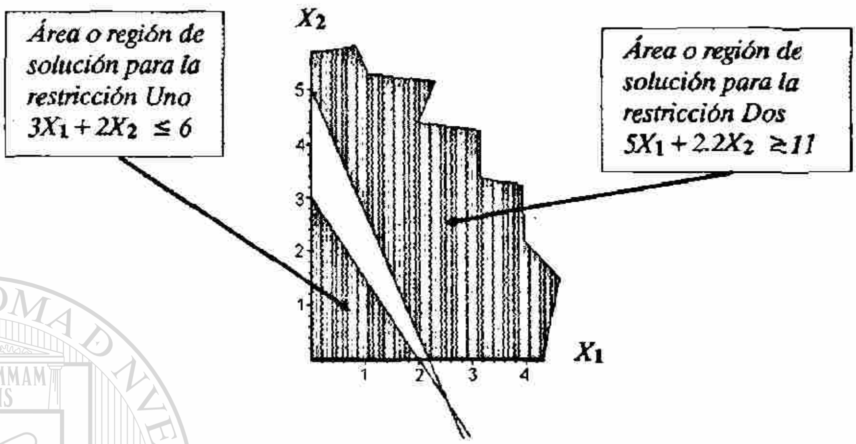
$$5X_1 + 2.2X_2 \geq 11$$

$$\text{para: } X_1 \geq 0; \text{ y } X_2 \geq 0$$

Obteniendo los puntos de cruce con los ejes de X_1 y X_2, en la restricción uno, para encontrar los valores en los cruces de los ejes de X_1 y X_2, hay que hacer que $X_2 = 0$; para encontrar que $X_1 = 2$; y haciendo que $X_1 = 0$; encontramos que $X_2 = 3$, graficando esta restricción:



Del mismo modo pero para la restricción número dos encontramos que si $X_2 = 0$; entonces $X_1 = 2.2$; y si $X_1 = 0$; entonces $X_2 = 5$, graficando ambas restricciones.



Como puede apreciarse, al graficar la segunda restricción el área o región factible para ésta elimina la región de solución de la primer restricción, dado que se presentan las restricciones de no negatividad, tanto para X_1, como para X_2, entonces el área o región de solución factible es un conjunto vacío, y por lo tanto al no haber al menos una combinación de valores para X_1 y X_2 que satisfagan al conjunto de restricciones al mismo tiempo, entonces el problema es considerado *sin solución.*

Analicemos ahora el siguiente problema: *Problema de minimización.*

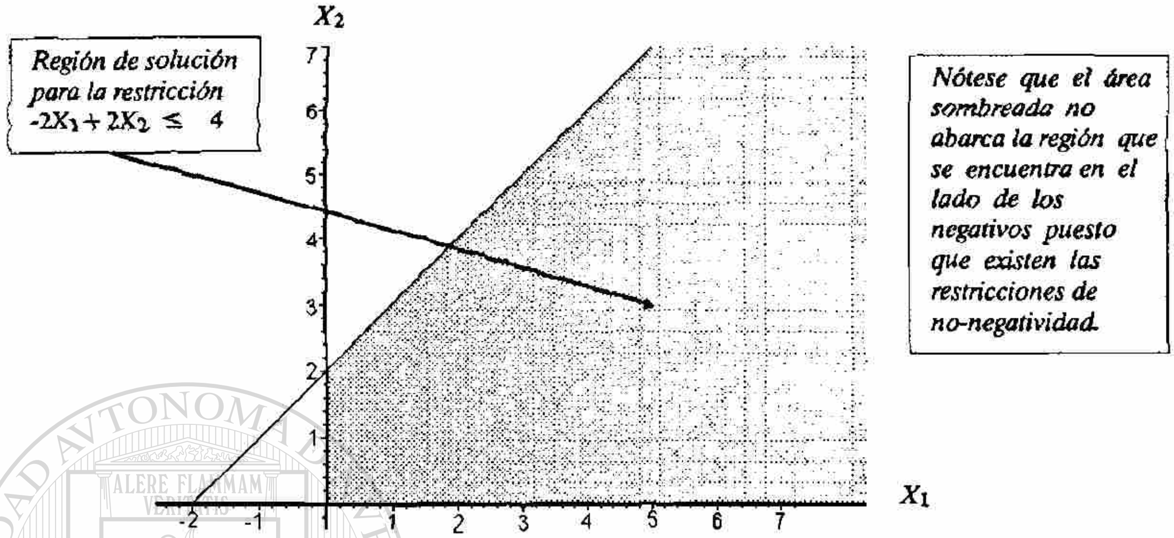
$$\text{Minimizar } Z = 8X_1 + 8X_2$$

$$\begin{aligned} \text{sujeto a: } -2X_1 + 2X_2 &\leq 4 \\ X_1 \qquad &\leq 3 \\ 3X_1 + 4X_2 &\geq 12 \\ 3.5X_1 + 3X_2 &\leq 21 \end{aligned}$$

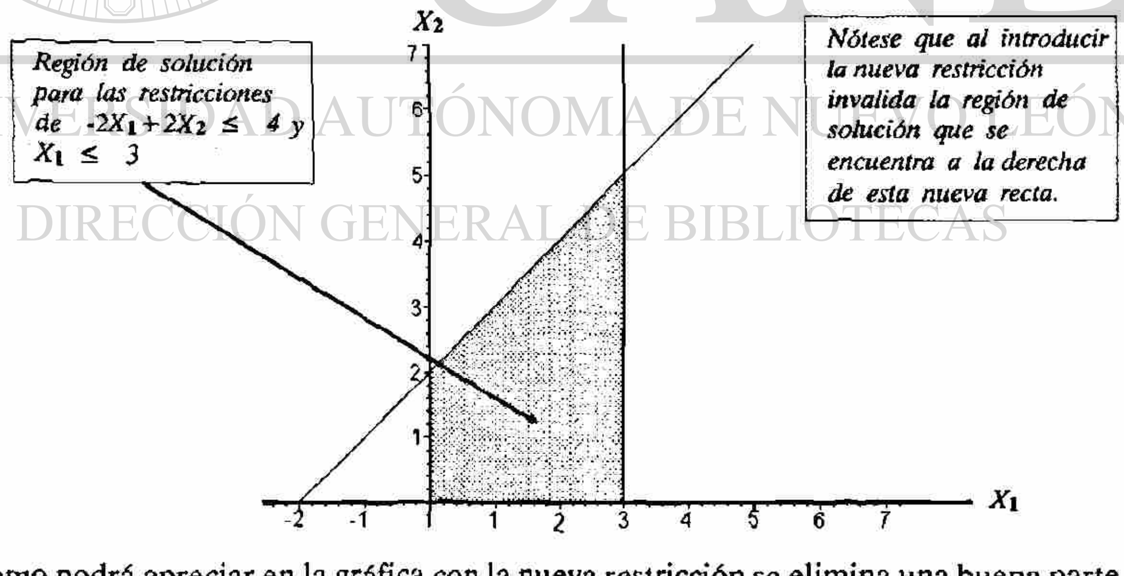
$$\text{para: } X_1 \geq 0; \text{ y } X_2 \geq 0.$$

Llevando las restricciones a su máximo límite que es la igualdad y obteniendo los valores de cruce con los ejes para la primer restricción los cuales son en $X_2 = 0$; $X_1 = -2$; y en $X_1 = 0$; $X_2 = 2$; y una vez graficado nos queda como se muestra en la próxima gráfica.

Una vez graficada la restricción, podrá usted apreciar que el área o región de la solución factible es toda la combinación de puntos que se encuentren a la derecha de la recta, teniendo solo como límite la recta misma así como los ejes de X_1 y X_2.

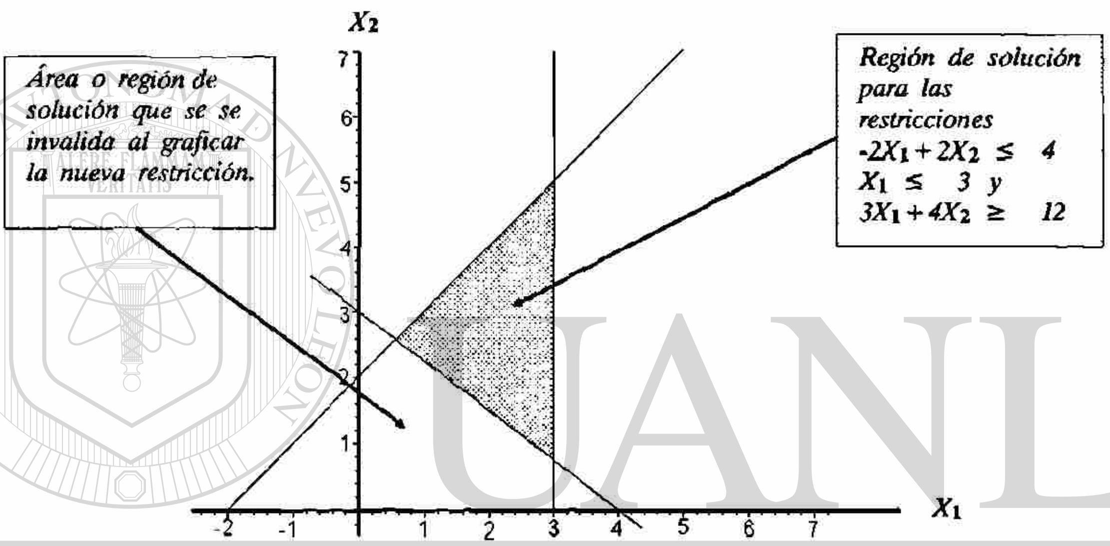


Ahora graficamos la segunda restricción cuyo único cruce es con el eje de X_1 y se presenta en $X_1=3$; $X_2=0$.

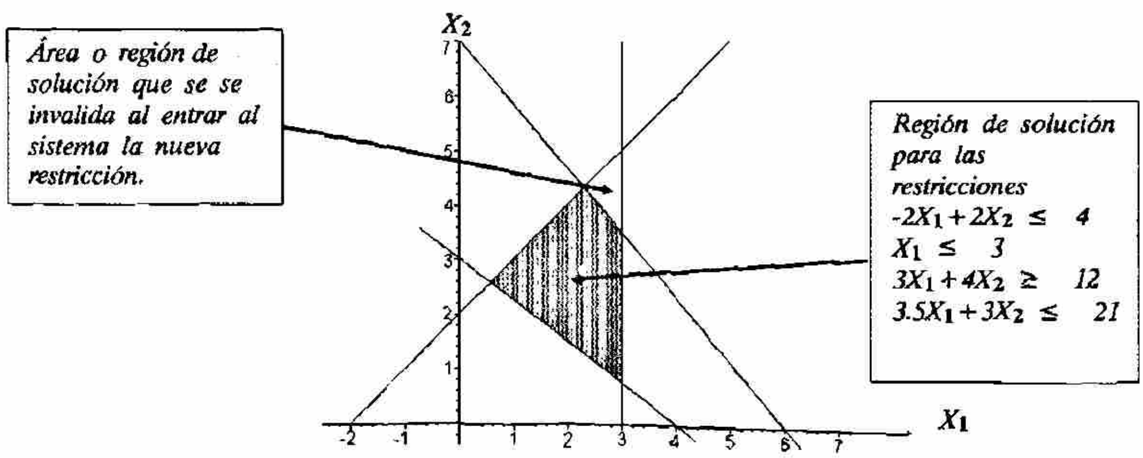


Como podrá apreciar en la gráfica con la nueva restricción se elimina una buena parte de la área o región de la solución factible, puesto que la desigualdad a la que hacemos referencia es del tipo de menor o igual que (≤) y por lo tanto todos los valores que se encuentren por abajo de dicha recta serán de solución factible, teniendo en consideración el límite puesto por la primer restricción y las restricciones de no-negatividad cuyo límite es el eje mismo tanto para X_1, como para X_2.

De igual forma introducimos a la gráfica la tercera de las restricciones en la que se obtuvieron los valores de cruce en los ejes de $X_1 = 4; X_2 = 0$, y en $X_2 = 3; X_1 = 0$, quedando la gráfica como se indica:

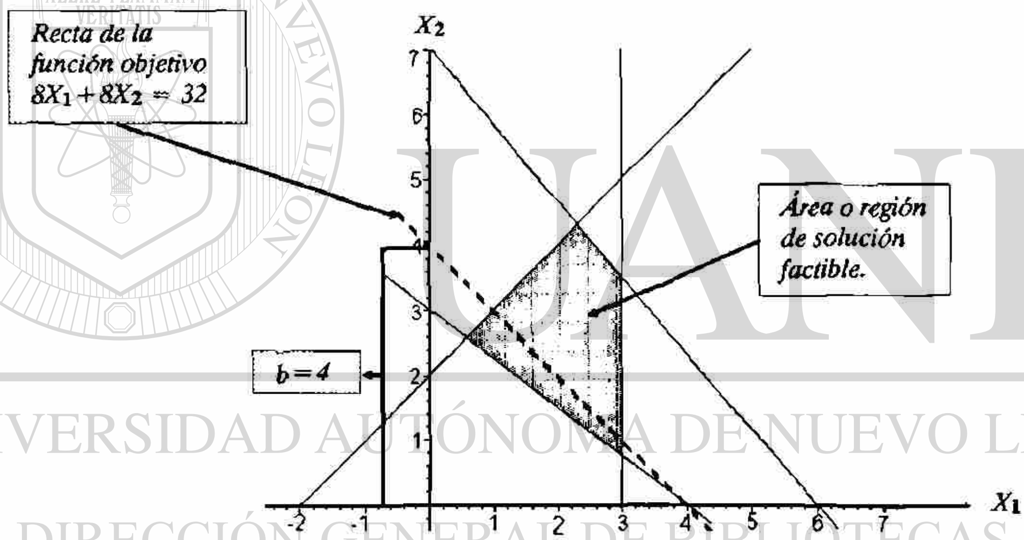


Observese que la región que se encuentra por abajo de la nueva restricción fue eliminada puesto que solo la combinación de puntos que se encuentren por arriba de ella pordrán ser factibles de solución dado que esta nueva restricción es del tipo de mayor o igual que (≥). Ahora graficaremos la última restricción de nuestro sistema de ecuaciones lineales, la cual tiene como valores de cruce con los ejes en $X_1 = 6; X_2 = 0$ y en $X_2 = 7; X_1 = 0$, quedando la gráfica así:

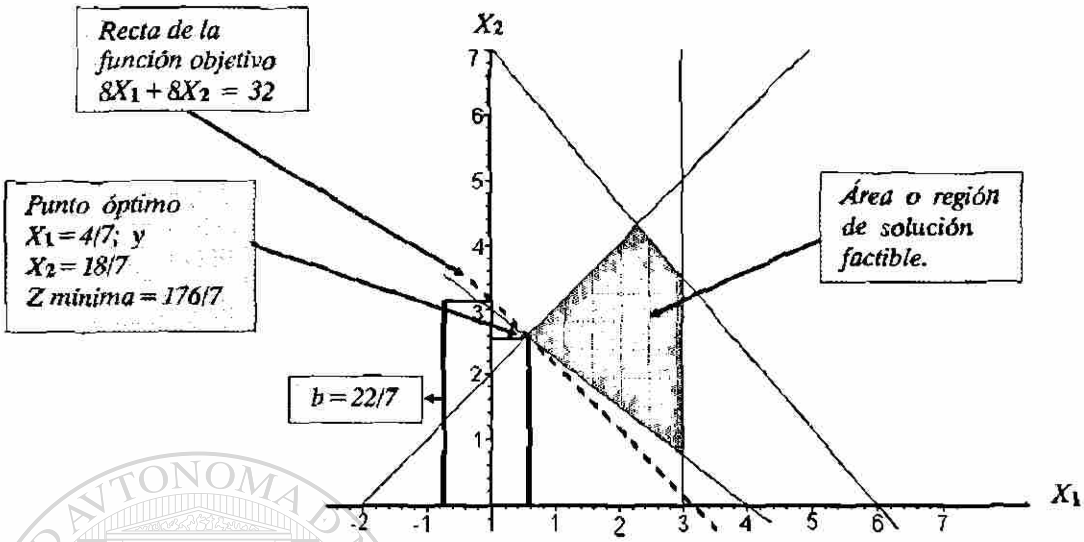


Como se aprecia en la gráfica de la página anterior, la nueva restricción también elimina una parte de la región de solución la cual está señalada.

Ahora nos resta graficar la función objetivo de nuestro problema, como anteriormente se mencionó habrá que darle un valor arbitrario a la variable Z, esto con el fin de poder obtener los valores de cruce con los ejes tanto para X_1 como para X_2, y poder conocer la pendiente de ésta y así obtener el valor de *b* que como recordamos es la distancia medida en el eje de X_2, desde el origen al punto de corte de éste con la recta en cuestión y que en problemas de maximización el valor de *b* deberá ser lo más grande posible, mientras que en los problemas de minimización que es el caso que nos ocupa el valor de *b* deberá ser lo más pequeño posible sin salirse completamente de la región factible de solución, démosle un valor de 32 a la variable Z quedando como $8X_1 + 8X_2 = 32$, tenemos que $X_1 = 4; X_2 = 0$ y en $X_2 = 4; X_1 = 0$, veamos la gráfica:



Apreciando la recta de la función objetivo, observamos que el valor de '*b*' es de 4, y que la recta de dicha función es suseptible de optimizarse aun más, es decir podemos hacer que disminuya el valor de b puesto que nuestro problema es de minimizar lo más posible, ya que la función objetivo está tocando varios punto de la región de la solución factible y cualquier combinación de puntos que estén en esta recta nos dará un valor de $Z = 32$, que como se aprecia no es la más óptima, ahora lo que habrá que hacer es desplazar dicha recta hacia abajo para que el valor de b disminuya y así obtener el valor de Z menor, sin que la recta de la función objetivo salga completamente de la región de la solución factible, veamos la siguiente gráfica.



Al desplazar la recta de la función objetivo hacia abajo, tratando de minimizar el valor de Z encontramos el punto óptimo en $X_1 = 4/7$; y $X_2 = 18/7$, cuya recta de la función objetivo toca un solo punto de la región de la solución y por lo tanto hemos dado respuesta a este problema en forma gráfica, cuyo valor mínimo de Z es de 176/7.

Ejemplo: *Problema con solución múltiple.*

Utilizando el ejemplo anterior y cambiando la función objetivo.

$$\text{Minimizar } Z = 6X_1 + 8X_2$$

$$\text{sujeto a: } -2X_1 + 2X_2 \leq 4$$

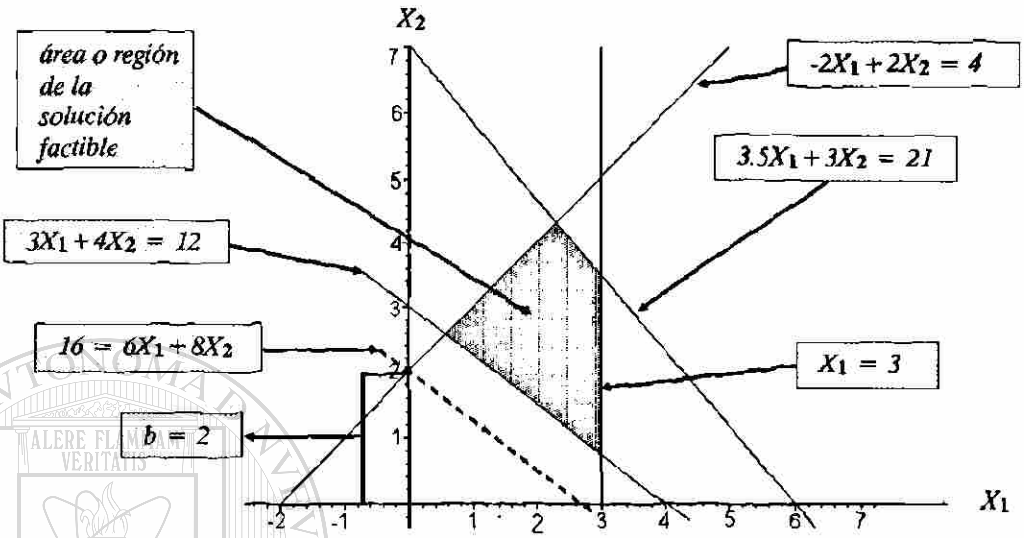
$$X_1 \leq 3$$

$$3X_1 + 4X_2 \geq 12$$

$$3.5X_1 + 3X_2 \leq 21$$

$$\text{para: } X_1 \geq 0; \text{ y } X_2 \geq 0.$$

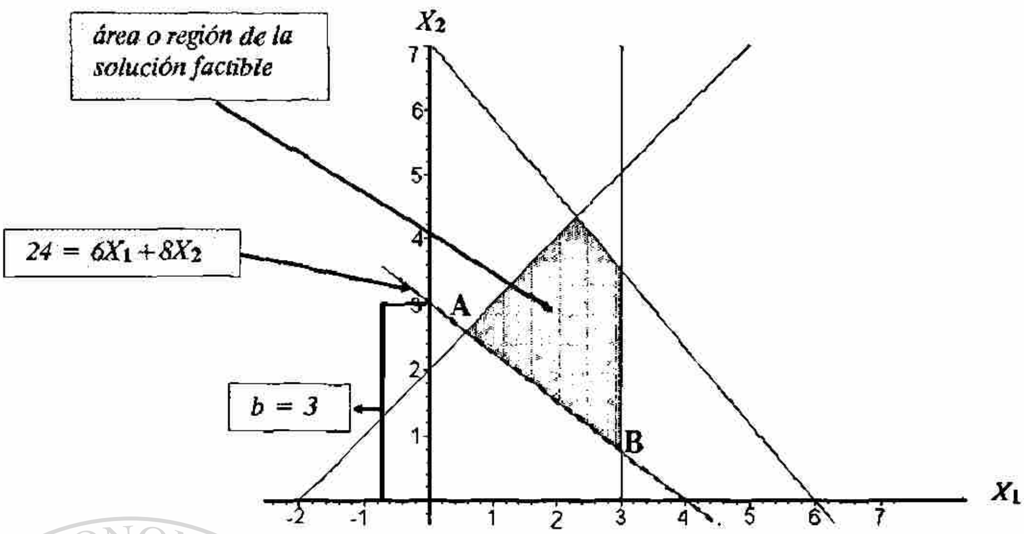
Obtenemos los puntos de cruce en los ejes y encontramos que para la primer restricción los valores son; $X_1 = -2$ $X_2 = 0$; y $X_2 = 2$; $X_1 = 0$, del mismo modo para la restricción dos cuyos valores son $X_1 = 3$, y X_2 no aparece por lo tanto llega al infinito, en la restricción tres, los valores para X_1 y X_2 son 4 y 3 respectivamente, así para la cuarta y última restricción cuyos valores son para $X_1 = 6$, y para $X_2 = 7$ y dándole un valor arbitrario a Z de 16, graficando el conjunto de restricciones y la función objetivo tenemos la siguiente gráfica.



Como podrá apreciar el valor arbitrario de Z=16 hace que la recta de la función objetivo pase por abajo de la región de la solución del problema, y aunque b es pequeña, no presenta una solución factible real dado que como ya hemos mencionado la recta de la función objetivo no toca ningun punto de la solución, y por lo tanto debemos desplazar dicha recta de Z hasta hacerla que toque la región de la solución factible, aunque el valor de b tenga que crecer, como sabemos nuestro problema es de minimización de esta función objetivo, y deberíamos tratar que el valor de b sea el menor posible dentro de lo factible, es decir el primer punto que toque.

Debemos de recordar que en los problemas de minimización buscamos siempre que sea el costo menor, ya que casi siempre las contribuciones de la función objetivo representan un costo, y que nuestra tarea es reducir lo más posible cumpliendo con los requerimientos de las desigualdades que se nos plantean, sabiendo de antemano que algo nos debe de costar y que deseamos que sea lo menor posible sin salirnos del contexto de necesidades las cuales son expresadas por las ecuaciones del modelo lineal.

Desplazando la recta de la función objetivo hacia la región de la solución obtenemos la siguiente gráfica.



Apréciese que en la gráfica no se da un punto de solución óptima, puesto que la función objetivo es paralela a la restricción número tres, y todos los puntos que se encuentran en el segmento formado por el tramo de la recta entre los puntos **A** y **B**, son de solución óptima, cuando esto sucede se dice que el problema tiene *solución múltiple.* Esto es debido a que cuando desplazamos la recta **Z** hacia la región de la solución, no fue un solo punto el que tocó ésta, sino la totalidad de los puntos dentro del segmento **A** y **B**, haciendo que cualquiera de los puntos de este segmento sean de solución óptima, reportando el menor costo, por ejemplo, tenemos que el punto **A** está formado por $X_1 = 4/7$; y $X_2 = 18/7$, sustituyendo estos valores en la función objetivo, el valor de Z mínima es de 24 unidades de dinero, haciendo lo mismo para el punto **B** que está formado por $X_1 = 3$; y $X_2 = 3/4$, sustituyendo éstos en la función objetivo, el valor de Z mínima es también de 24 unidades de dinero, lo cuál nos indica que cualquier combinación de puntos sobre este segmento nos dará el mismo resultado que es el valor mínimo de Z.

Ahora veamos este siguiente ejemplo: *Problemas con solución ilimitada.*

$$\text{Maximizar } Z = 2X_1 + 3X_2$$

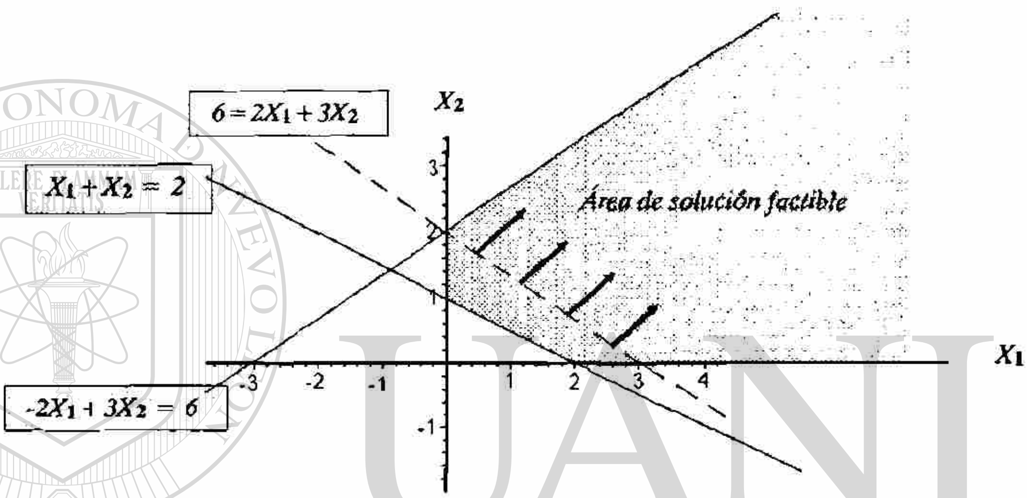
$$\text{sujeto a: } X_1 + 2X_2 \geq 2$$

$$-2X_1 + 3X_2 \leq 6$$

$$\text{para: } X_1 \geq 0; \text{ y } X_2 \geq 0.$$

Obteniendo los valores en los cruces de los ejes para X_1, y X_2; en la primer restricción si $X_2=0$, entonces $X_1=2$; haciendo $X_1=0$, entonces $X_2=1$; de la misma manera para la segunda restricción si $X_2=0$, entonces $X_1=-3$; y si $X_1=0$ entonces $X_2=2$; graficando estas restricciones, así como la función objetivo dándole un valor de 6, obtenemos que $X_1=3$ y $X_2=2$.

Una vez graficado nos queda:

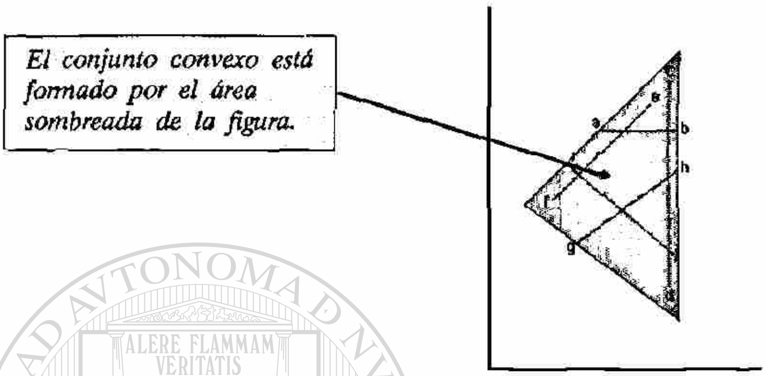


Apreciando la gráfica, nos encontramos que el área de solución factible tiende al infinito, y la recta de la función objetivo, al desplazarla para tratar de buscar el valor de b más grande posible así como alcanzar el último punto de la región de solución factible, se irá hasta el infinito, en estos casos se dice que el problema tiene *solución ilimitada,* puesto que el área o región de solución factible no tiene límite máximo.

Para finalizar podemos mencionar que toda solución factible de un problema de programación lineal esta conprendida dentro de un conjunto convexo, y su solución óptima será encontrada en los límites de dicho conjunto convexo, incluyendo siempre al menos un vértice.

Definición.- Un **conjunto convexo** es una colección de puntos tales que, para cada par de puntos de la colección, el segmento rectilíneo completo que une estos dos puntos también forman parte de dicha colección.

Ejemplo de un conjunto convexo.



Definición.- El **segmento rectilíneo** que une cualquiera dos puntos $(X_1', X_2', X_3',..., X_m')$ y $(X_1'', X_2'', X_3'',...., X_m'')$ es la colección de puntos

$$(X_1,X_2,X_3,...,X_m)=[\alpha X_1''+(1-\alpha)X_1', \alpha X_2''+(1-\alpha)X_2', \alpha X_3''+(1-\alpha)X_3',...., \alpha X_m''+(1-\alpha)X_m']$$

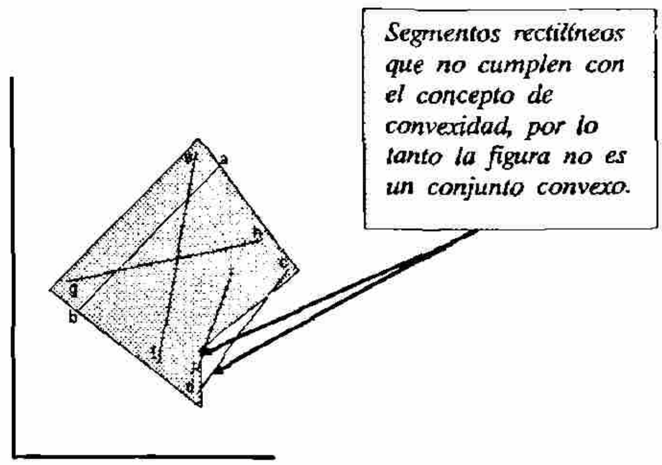
tales que $0 \leq \alpha \leq 1$.

Un segmento rectilíneo, en un espacio de *m*-dimensiones, puede ser generalizado en un ejemplo de tres dimensiones, supongamos que tenemos los puntos $(X_1', X_2', X_3') = (3,2,6)$, y $(X_1'', X_2'', X_3'') = (9,5,10)$; entonces el segmento rectilíneo que los une es la colección de puntos.

$$(X_1, X_2, X_3) = [9\alpha + 3(1-\alpha), 5\alpha + 2(1-\alpha), 10\alpha + 6(1-\alpha)],$$

Para cualquier valor de $0 \leq \alpha \leq 1$.

Ejemplo de un conjunto no convexo.



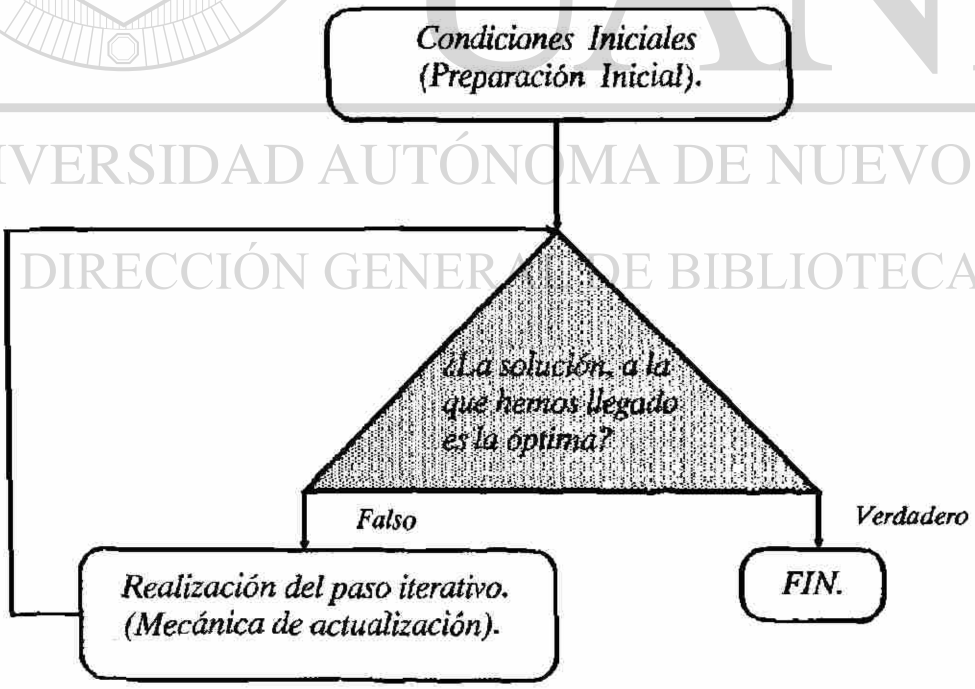
CAPÍTULO IV).- MÉTODO SIMPLEX NEWX.

IV).- El Método Simplex Newx.

IV.1).- Introducción.

Empezaremos por hacer un reconocimiento al señor George Dantzig, que en el año de 1947, desarrolló el algorítmo general para resolver problemas de programación lineal llamado método simplex, que ha probado ser un método extraordinariamente eficiente, para resolver problemas de programación lineal, sin importar el número de variables de decisión básicas que se tengan, el método siempre encontrará la solución óptima, (en caso de que esta exista).

Un algorítmo es un proceso iterativo de solución, es decir que es un proceso sistemático y repetitivo, hasta que es obtenida la solución óptima que es el resultado deseado, dichos algorítmos requieren de ciertas condiciones iniciales, cierta mecánica de actualización (iteración), así como criterios para determinar si se ha alcanzado la solución del problema, veamos en el siguiente diagrama de flujo la representación de un algorítmo en su forma general.



En el método simplex, como en la mayoría, de los algorítmos en la investigación de operaciones, la solución a la cual hacemos referencia con la pregunta en el diagrama de flujo es en sí, una regla de detención, lo cual nos indica que hemos encontrado la solución óptima del problema.

El lector recordará, que en el capítulo del método gráfico, fue abordo el tema de convexidad, y ahí se enuncio, que toda solución factible de un problema de programación lineal debe estar contenida dentro de un conjunto convexo, y su solución óptima (en caso de que exista) estará formada en los límites o vértices de dicho conjunto convexo.

Pues bien, el método simplex es un procedimiento algebraico que estará evaluando los vértices de la figura geométrica formada por las restricciones del problema, aunque en problemas de más de tres dimensiones no podamos comprender el concepto de figura geométrica, el método aun así, evaluará los vértices que formen estas restricciones y cada iteración del método contendrá una solución de nuestro sistema de ecuaciones lineales, buscando siempre el vértice que optimice nuestra función objetivo, haciendo la prueba de optimidad en cada uno de estos vértices y brincando de un vértice a otro hasta que sea hayado el vértice óptimo que será nuestra solución óptima.

Con el fin de ilustrar los conceptos geométricos generales emplearemos un ejemplo de dos variables de decisión, que previamente haya sido resuelto por el método gráfico, y posteriormente daremos respuesta por el método simplex, para que el lector pueda ir reforzando el concepto de solución factible en un vértice.

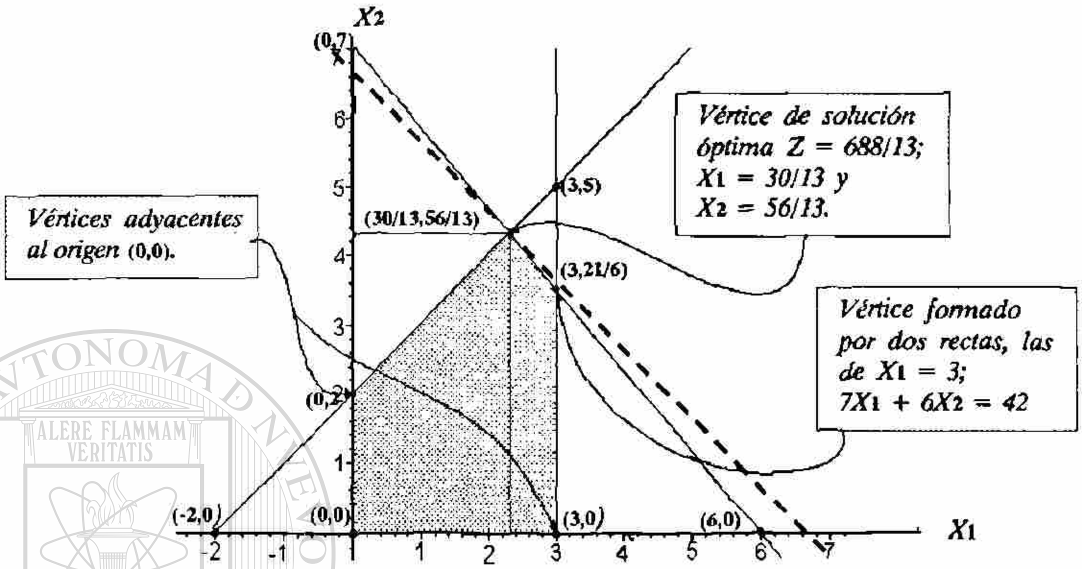
Ejemplo:

$$\text{Maximizar } Z = 8X_1 + 8X_2$$

$$\begin{aligned} \text{Sujeto a: } -2X_1 + 2X_2 &\leq 4 \\ X_1 \qquad\quad &\leq 3 \\ 7X_1 + 6X_2 &\leq 42 \end{aligned}$$

$$\text{Para: } X_1 \geq 0; \text{ y } X_2 \geq 0.$$

Graficado nos queda de la siguiente manera:



Como se puede apreciar en la gráfica los vértices factibles de solución son los puntos (0,0), (3,0), (3,21/6), (30/13,56/13), (0,2). También se tienen vértices **no factibles** que son (6,0), (3,5), (0,7), (-2,0), ya que estos vértices se encuentran fuera de la región factible, y por lo tanto no forman parte de la solución, de aquí se desprende en forma natural el concepto de solución factible en un vértice.

Vértices adyacentes, son aquellos que están conectados a otros vértices factibles (es decir que toquen la región de solución) unidos por un segmento de línea de solución, por ejemplo el vétice (0,0) es adyacente a los vértices (0,2) y (3,0) de la gráfica.

Este concepto de solución factible en un vértice, tiene sus fundamentos en las siguientes dos premisas;

Primero.- Que el problema tenga al menos una o más soluciones.

Segundo.- Que la región de solución factible este comprendida dentro de un conjunto convexo.

Así mismo, la solución factible en un vértice además de cumplir con las premisas antes descritas también debe de tener las propiedades, que se describen en el siguiente punto.

IV.2).- Propiedades de las soluciones factibles en un vértice.

Primero.- Que exista una solución óptima, y en caso de tener solución múltiple (más de una solución óptima), entonces deberá tener por lo menos dos vértices adyacentes de solución óptima.

Segundo.- La existencia de un número finito de vértices adyacentes formado por el conjunto convexo.

Tercero.- Si la solución en un vértice es igual o mayor (según la pendiente de la función objetivo) que las soluciones en sus vértices adyacentes, entonces habremos encontrado el vértice óptimo y por lo tanto su solución.

Mecánica del método simplex. El algorítmo del método simplex, requiere de que el problema se encuentre en su forma canónica, es decir:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Maximizar } Z = cx, \\ \text{Sujeto a:} \\ \qquad Ax \leq b \text{ y } x \geq 0.\end{array}}$$

Que es la representación matemática del módelo lineal, la cual ya describimos en el capítulo de planteamiento de problemas. Dado de que el método simplex es un procedimiento algebraico, nos es conveniente trabajar con igualdad y dejar de un lado las desigualdades, para hacerlo debemos introducir una nueva variable a nuestra desigualdad que tomará el complemento a la igualdad, veamos el ejemplo.

$$\text{Maximizar } Z = 8X_1 + 8X_2$$

$$\text{Sujeto a: } -2X_1 + 2X_2 \leq 4$$

$$X_1 \leq 3$$

$$7X_1 + 6X_2 \leq 42$$

$$\text{Para: } X_1 \geq 0; \text{ y } X_2 \geq 0$$

Para poder ejemplificar tomaremos la primera restricción de nuestro ejemplo que es una desigualdad y la debemos convertir en una igualdad, para esto es necesario introducir una nueva variable a la que llamaremos de holgura, qudandonos como se muestra.

$$\text{Si. } -2X_1 + 2X_2 = 4 - H_1$$

$$\text{Para. } H_1 \geq 0.$$

El valor de la variable de holgura H_1, deberá ser un valor positivo, es decir, mayor o igual que cero, y representará el valor complementario para la igualdad. Por ejemplo si las variables X_1 y X_2 tomarán un valor de 0, tendríamos lo siguiente:

$$-2(0) + 2(0) = 4 - H_1$$

$$0 = 4 - H_1$$

$$\text{por lo que. } H_1 = 4;$$

Pasando la variable de holgura H_1 a la izquierda de la igualdad nos quedaría escrita de la siguiente forma:

$$-2X_1 + 2X_2 + H_1 = 4$$

Ahora, es necesario que conviertamos las demás restricciónes de desigualdad en igualdades, de la misma forma que lo hicimos con la primera restricción, una vez hecho lo anterior *nuestro modelo lineal nos quedaría como:*

$$\text{Maximizar } Z = 8X_1 + 8X_2 + 0H_1 + 0H_2 + 0H_3$$

$$\text{Sujeto a: } -2X_1 + 2X_2 + H_1 = 4$$

$$X_1 + H_2 = 3$$

$$7X_1 + 6X_2 + H_3 = 42$$

$$\text{Para: } X_1 \geq 0; X_2 \geq 0; H_1 \geq 0; H_2 \geq 0; H_3 \geq 0.$$

Es necesario, hacer notar que las variables de holgura han entrado a la función objetivo sin ninguna contribución, esto es debido a que no se nos ha proporcionado información adicional al respecto en este problema. Sin embargo, debemos de acarar que en problemas reales éstas hoguras si tienen una repercusión real en la función objetivo pues pueden proporcionar una utilidad adicional o representar un costo a nuestra utilidad.

Para aclarar lo anterior, debemos de recordar que cada restricción de nuestro problema representa un recurso importante para nosotros, supongamos por ejemplo que la restricción dos (original) la cual es $X_1 \leq 3$, y que representará, la materia prima disponible para producir el producto X_1 y por lo tanto tenemos como máximo 3 unidades de materia prima para producir el producto de X_1, y el no utilizar dicha materia prima (valor que tomaría la variable de holgura H_2) implicaría tener en el almacén ésta, quizá con un costo de almacenaje, si se mensionará ésto, y se nos proporcionará el costo de dicho almacenaje, entonces debemos de castigar con este costo a la función objetivo de nuestro problema, suponiendo que nuestro costo sea de 6 pesos por cada unidad de materia prima que no utilizaramos, entonces debemos respresntar esto en nuestra función objetivo, donde sea el castigo un costo de 6 nuevos pesos por cada H_2 que se tenga lo que implicaría que nuestra función objetivo nos quedará como:

$$\text{Maximizar } Z = 8X_1 + 8X_2 + 0H_1 - 6H_2 + 0H_3$$

Nótese el cambio del signo en H_2, puesto que en una función de utilidades como lo es la de nuestro ejemplo, un costo siempre se interpretara como una (menos) utilidad, y visceversa, en una función objetivo de costos una utilidad será interpretada como un (menos) costo.

Por otro lado, si se nos mencionará (para el mismo ejemplo), que la materia prima no utilizada (representada por H_2) puede ser vendida a un cliente obteniendo con ello una utilidad adicional de 10 nuevos pesos por unidad, entonces nuestra función objetivo nos quedaría de la siguiente forma:

$$\text{Maximizar } Z = 8X_1 + 8X_2 + 0H_1 + 10H_2 + 0H_3$$

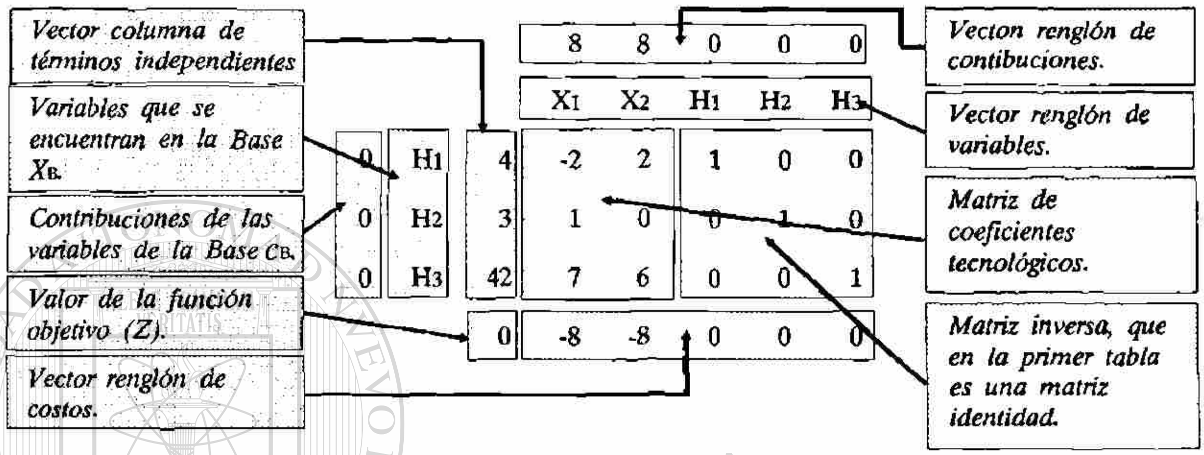
Nótese que ahora la contribución de la variable H_2 entra a la función objetivo con signo positivo puesto, que la materia prima no utilizada puede ser vendida a un cliente contibuyendo con esto maximizar nuestra utilidad.

Una vez que aclarado lo anterior, podemos definir la variables de holgura.

Definición.- La variable de holgura, es el artíficio matemático de intoducir una nueva variable a cualquier desigualdad con el fin de convertir a ésta en una igualdad, y el valor tomado por la nueva variable será el complemento o excedente (holgura o superfluo) a la igualdad, dondé el signo que esta deberá tomar sera en función del tipo de desigualdad que estemos tratando, así por ejemplo en caso de que la desigualdad sea del tipo de menor o igual que ($\leq$) la variable de holgura entrará en la desigualdad con signo positivo para ser convertida en una igualdad, y en caso de que la desigualdad sea del tipo de mayor o igual que ($\geq$) el signo de la variable sera negativo.

El siguiente paso en la preparación inicial del método simplex, que es la formulación de la primer tabla, y que contendrá la primer solución básica factible, al estar evaluando el primer vértice que será el origen mismo.

Forma de preparción de la tabla inicial.



El vector renglón de contribuciones, se forma con los coeficientes de las variables que tenemos en la función objetivo, al igual que el vector renglón de variables, que se forma por las variables de la función objetivo.

La matriz de coeficientes tecnológicos, es formada por los coeficientes de las restricciones del problema, de la misma forma la matriz inversa (que en el caso de la primer tabla es una matriz identidad) esta formada por los coeficientes de las variables de holgura, que son introducidas en las restricciones cuando las desigualdades son transformadas de en las igualdades.

El vector columna de términos independientes, se forma con los recursos que disponemos, que en este caso es de para la restricción uno 4, en la restricción dos es de 3, y en la restricción tres es de 42.

El vector de variables básicas, es el formado por las variables que se encuentran en la Base de la tabla, y estará dado por los vectores columnas de la matriz identidad, por ejemplo, sabemos que el vector columna de la variable H_1 en el su primer elemento hay un (1) entonces esa variable H_1 debe de estar en la Base ocupando la primer posición de la misma forma para el vector columna de la variable H_2, y H_3, además se coloca a su izquierda la contribución de esta variable.

El valor de la función objetivo (Z), estrá dado por la sumatoria de la multiplicación de la contibución de las variables básica por el elemento correspondiente del vector de términos independientes, es decir, $Z = \Sigma_{i=1}{}^{n}(c_{Bi}\,\mathbf{b}_i)$.

El vector renglón de costos, es también llamado renglón índice, puesto que en este renglón será donde se nos indica cuando hay que parar el método por haber encontrado a la solución óptima del problema, en la primer tabla debe de ser calculado por nosotros, haciendo la sumatoria de multiplicación de las contribuciones de las variables básicas por los elementos correspondientes de la columna, menos la contribución original de la variable de la columna, es decir, $\mathbf{co}_j = \left[\,\Sigma_{i=1}{}^{n}(c_{Bi}\,\mathbf{a}_{ji})\right] - \mathbf{c}_j$.

Así es como queda formada nuestra primer tabla, teniendo las variables H_1, H_2 y H_3 como la Base inicial en su primer tabla.

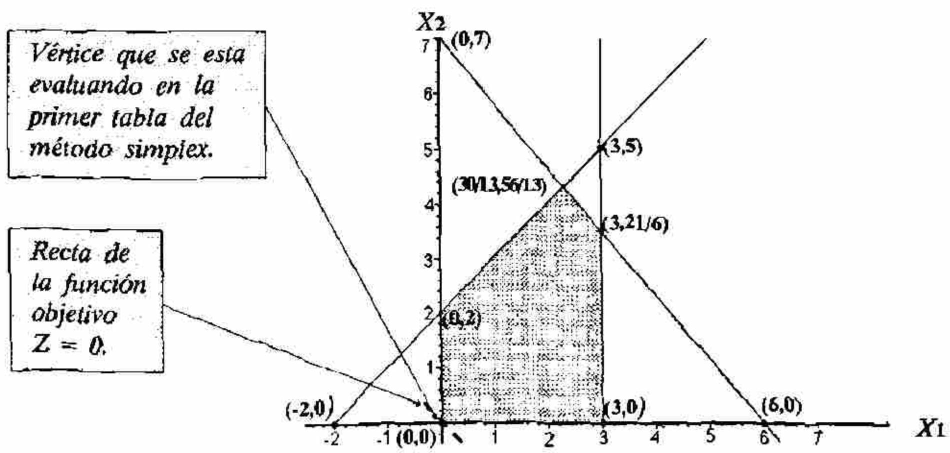
Variables que se encuentran en la Base en esta tabla. (Nótese, la correspondencia con los vectóres columnas de la matriz identidad).

			8	8	0	0	0
			X_1	X_2	H_1	H_2	H_3
0	H_1	4	-2	2	1	0	0
0	H_2	3	1	0	0	1	0
0	H_3	42	7	6	0	0	1
		0	-8	-8	0	0	0

Vectóres columnas que forman la matriz identidad.

Valores de la variables $H_1 = 4$; $H_2 = 3$; $H_3 = 42$; $X_1 = 0$; $X_2 = 0$; y $Z = 0$.

Cabe hacer notar aquí, que nuestras variables de decisión X_1 y X_2, no se encuentran en la Base de la tabla, y cuando esto sucede quiere decir que no tienen ningún valor, es decir su valor es de cero (0), tanto para X_1 como para X_2, por lo que el vértice que se esta evaluando



en ésta tabla es el origen ($X_1=0, X_2=0$), y las variables de holgura (que son las que se encuentran en la Base) tomarán los valores correspondientes del vector de términos independientes, como se muestra en la figura anterior, que corresponde a la gáfica de las restricciones de nuestro problema.

Hasta aquí, hemos terminado con el primer paso del algorítmo algebraico del método simplex, el cual es la preparación de la tabla inicial de nuestro problema, el siguiente paso es hacer la prueba de optimidad, *utilizando una regla de detención*, consistiendo ésta en identificar en el renglón índice de la tabla, la existencia de elementos negativos (para problemas de maximización o positivos para problemas de minimización), si encontramos un elemento negativo (para este caso que es de maximización) entonces debemos de seguir el método con el paso siguiente que es la **mecánica de actualización**, si ya no hubierá elementos negativos (para éste caso de maximización) en el renglón índice, ésto nos indicaría que hemos encontrado el vértice más óptimo, y ahí pararíamos el método, puesto que habremos encontrado la solución óptima del problema, en el problema que estamos tratando si se encuentrán elementos negativos y por consiguiente debemos de continuar con el siguiente paso de actualización.

La mecánica de actualización, consiste primeramente en seleccionar el elemento más negativo del renglón índice, y marcamos a esta columna como nuestra columna clave, de esta iteración.

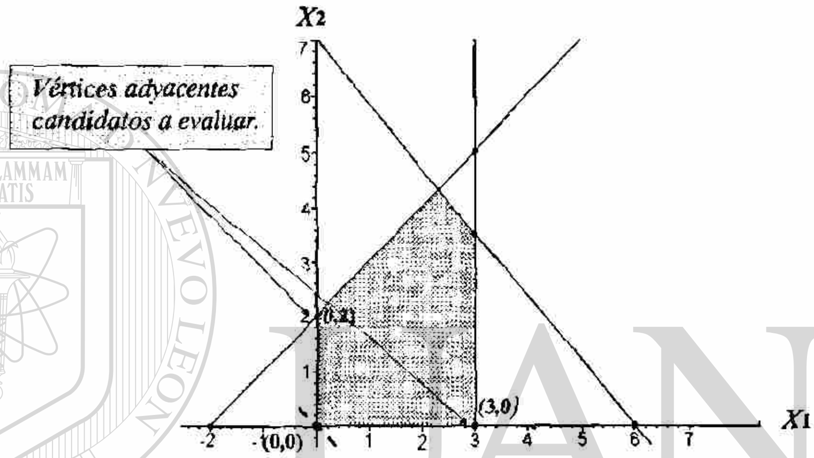
Encontremos la columna clave de la tabla.

Columna clave de nuestra tabla.

			8	8	0	0	0
			X_1	X_2	H_1	H_2	H_3
0	H_1	4	-2	2	1	0	0
0	H_2	3	1	0	0	1	0
0	H_3	42	7	6	0	0	1
		0	-8	-8	0	0	0

En esta tabla, hemos encontrado en el renglón índice que dos de sus elementos tienen un valor negativo de 8 por lo que se presenta un empate, cuando llega a suceder ésto en el renglón índice, entonces se seleccionará uno de los elementos empatados arbitraríamente, y así determinaremos cúal será nuestra columna clave.

Analicemos un poco el significado de escoger la columna clave, en cada elemento del renglón índice nos indica lo que estaríamos dejando de ganar en caso de no ser seleccionado éste (al ser negativo, pues en caso de ser positivo debemos de interpretarlo a la inversa, es decir, dejar lo que ya hemos ganado), además usted notará que a cada elemento del renglón índice le corresponde una variable de nuestro problema, y esta es la que corresponde en el vector renglón de variables en la tabla, es decir, escogemos el más negativo porque es el que más contribuye con nuestra función objetivo, así mismo nos indica sobre que eje debemos buscar nuestro nuevo vértice para evaluarlo, veamos la gráfica.



Como hemos mencionado, a cada elemento del renglón índice le corresponde una variable del problema, y cuando escogimos la columna clave, también hemos determinado que será la variable de X_1 la que debe de entrar a la nueva Base, además indirectamente escogimos el eje sobre el cual debemos de evaluar los puntos dondé se cruzan las restricciones con éste eje.

El siguiente paso es determinar cual será nuestro renglón clave de la tabla, para determinarlo debemos de hacer la división de los elementos del vector de términos independientes entre los elementos correspondientes al vector de la columna clave, exceptuando hacer la división entre ceros o valores negativos (que se encuentren en la columna clave, sólo podrá ser validad la división entre elementos negativos cuando las restricciones de no negatividad de nuestro problema no existan), por otro lado, se invalidan las divisiones entre ceros, ya que como sabemos cualquier división entre cero, nos daría un valor no determinado.

Para nuestro problema, procedemos a hacer las divisiones: $r_1 = 4/-2$ (esta división **no debe de tomarse encuenta**, puesto que en este problema **si** existen las restricciones de no negatividad), $r_2 = 3/1 = 3$; y $r_3 = 42/7 = 6$, por lo que encontramos el menor cociente en el correspondiente al reglon 2.

Columna clave.

Rwnglon clave.

			8	8	0	0	0
			X_1	X_2	H_1	H_2	H_3
0	H_1	4	-2	2	1	0	0
0	H_2	3	1	0	0	1	0
0	H_3	42	7	6	0	0	1
		0	-8	-8	0	0	0

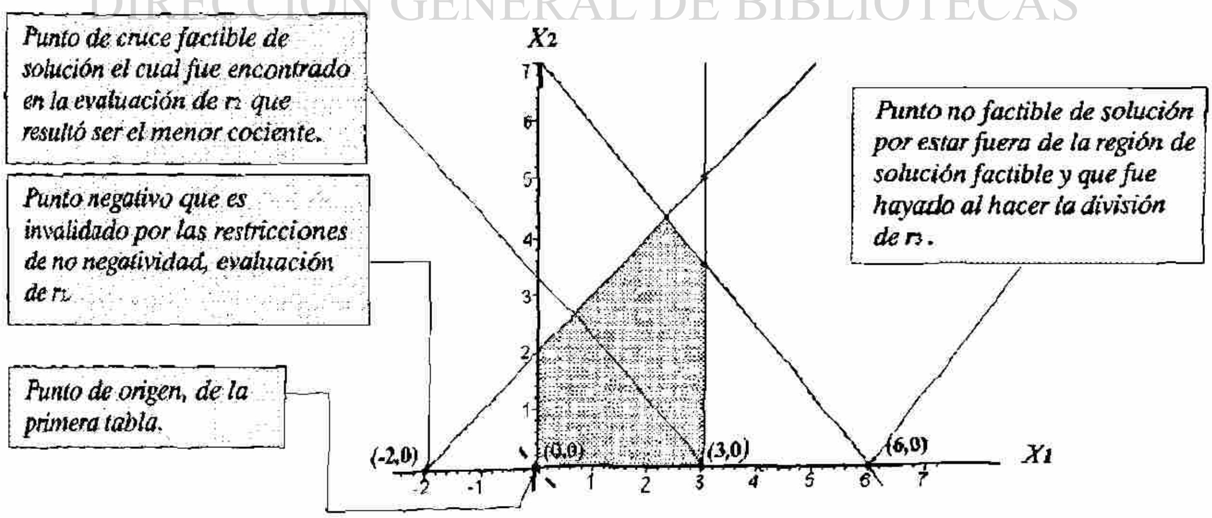
r_1 = División NO válida.

r_2 = 3/1 = 3. Menor.

r_3 = 42/7 = 6.

Ya con anterioridad habiamos dicho que nuestra columna clave representa a la variable X_1, así el renglón 2 que es nuestro renglón clave representa a la variable H_2; con esto hemos determinado que la variable H_2 es la que debe de salir de la Base, para que X_1 ocupe su lugar en la nueva Base de la tabla.

Preguntemonos, **porque escoger el renglón clave de esta manera**, la razón es que debemos de movernos hacia vértices o puntos factibles de solución, y al estar haciendo las divisiones del vector de términos independientes entre los correspondientes del vector de la columna clave, estamos, encontrando los puntos donde se cruzan las restricciónes con el eje de la variable que fué seleccionada al escoger la columna clave, siendo en esta iteración la variable de X_1, que ya señalamos que es la que debe de entrar a la nueva Base de la tabla, escogemos el *menor* porque es una garantía de que el punto que estamos seleccionando cumple con las demás restricciones, no hay que olvidar que nuestro problema es planteado en desigualdades, y que como un paso inicial para resolverlo es convertir las desigualdades en igualdades, pero ello no nos exime de cumplir con las restricciones originales, veamos lo explicado en la siguiente gráfica:



El elemento de intersección del renglón clave y la columna clave se le conocerá como el pivote actual, como pivote anterior en el caso de la primer tabla será la unidad (1), así mismo al pasar a la siguiente tabla, el pivote actual pasa a ser el pivote anterior, y asi susecivamente hasta encontrar la tabla final.

Número clave de la tabla. Al que llamaremos Pivote Actual.

La columna clave representa la variable que debe entrar a la nueva Base de la tabla.

			8	8	0	0	0
			X_1	X_2	H_1	H_2	H_3
0	H_1	4	-2	2	1	0	0
0	H_2	3	1	0	0	1	0
0	H_3	42	7	6	0	0	1
		0	-8	-8	0	0	0

El renglon clave representa la variable que debe de salir de la Base de la tabla.

El pivote anterior en la primer tabla será la unidad (1).

Tabla Original del problema; donde j = 1.

Para actualizar los elementos de la nueva tabla se hará de la siguiente forma, **todo el renglón clave pasa a la siguiente tabla igual**, solo cambiando los elementos correspondientes formados por los vectores de variables en la nueva Base, así como, el elemento de la contribución original de dicha variable que entra a la nueva Base, recuerde que cuando se selecciona la columna clave estamos determinando la variable que debe de entrar a la nueva Base del problema, de la misma forma al seleccionar el renglón clave estamos determinando la variable que debe de salir de la Base del problema. Además, hay que transformar todos los elementos de la columna clave en ceros, con excepción del pivote actual, el cual al formar parte de el renglón clave pasa exactamente igual, como se presenta en la siguiente tabla.

Todo el renglon clave pasa igual a la nueva tabla, sólo debemos de cambiar la variable que debe de entra a la nueva Base, incluida su contribución original.

			8	8	0	0	0
			X_1	X_2	H_1	H_2	H_3
0	H_1		0				
8	X_1	3	1	0	0	1	0
0	H_3		0				
			0				

Primera actualización de la tabla; donde j = 2.

El siguiente paso, es transformar los demás elementos de la tabla nueva, utilizando la tabla anterior y aplicando la siguiente formula:

$$E.N. = [(E.A.)(P.Act.) - (E.C.C.C.)(E.C.R.C.)] \,/\, P.Ant.$$

Donde:

E.N. = Elemento Nuevo.
E.A. = Elemento Antiguo.
P.Act. = Pivote Actual.
E.C.C.C. = Elemento correspondiente de la columna clave.
E.C.R.C. = Elemento correspondiente del renglón clave.
P.Ant. = Pivote anterior.

E.A. = Elemento Antiguo.

Pivote Anterior = P.Act.$_{(j-1)}$, para $j > 1$, para el caso de $j = 1$, el pivote será la unidad (1).

E.C.C.C. = Elemento Correspondiente de la Columna Clave.

E.C.R.C. = Elemento Correspondiente del Renglón Clave.

P.Act. = Pivote Actual.

			8	8	0	0	0
			X_1	X_2	H_1	H_2	H_3
0	H_1	4	-2	2	1	0	0
0	H_2	3	1	0	0	1	0
0	H_3	42	7	6	0	0	1
		0	-8	-8	0	0	0

Tabla Original del problema; donde j = 1

Elemento Nuevo actualizado.

$E.N. = [(4)(1)-(-2)(3)]/1$

$E.N. = 10$.

			8	8	0	0	0
			X_1	X_2	H_1	H_2	H_3
0	H_1	10	0				
8	X_1	3	1	0	0	1	0
0	H_3		0				
			0				

Primera actualización de la tabla; donde j = 2.

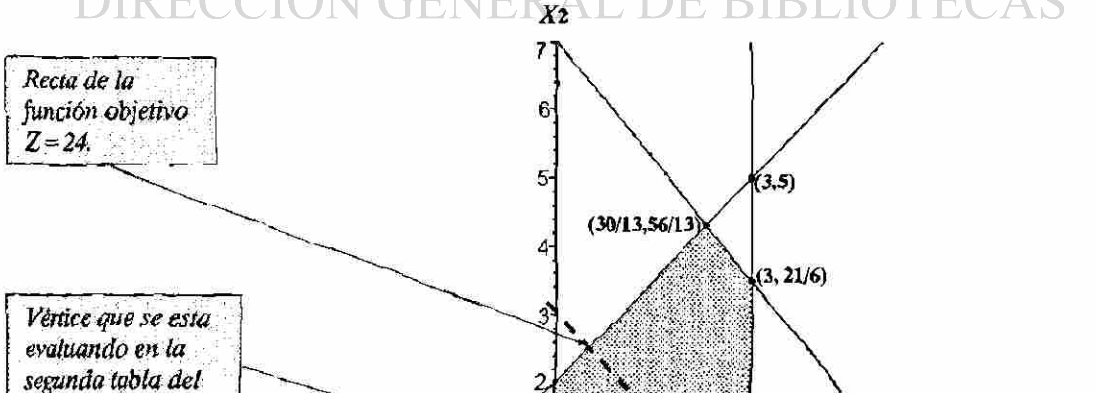
Para actualizar el nuevo elemento, poniendo como ejemplo el que se escuentra especificado en la tabla anterior, sería: Elemento nuevo = [(1)(4)-(-2)(3)]/1 = 10. (la división fue entre (1), dado que *j = 1* por lo que el pivote anterior es igual a la unidad, esto ocurrirá siempre cuando paratamos en la tabla origina (primera tabla del problema)), una vez que hemos actualizado el nuevo elemento, este deberá siempre ocupar el mismo lugar del elemento antiguo, como se ve en la siguiente tabla.

Se procede a actualizar los demás elementos de la tabla quedandonos.

			8	8	0	0	0
			X_1	X_2	H_1	H_2	H_3
0	H_1	10	0	2	1	2	0
8	X_1	3	1	0	0	1	0
0	H_3	21	0	6	0	-7	1
		24	0	-8	0	8	0

Primera actualización de la tabla; donde j = 2.

Como puede ser apreciado en la tabla anterior, las variables que se encuentran en la Base son: H_1, X_1 y H_3, las cuales tomarán los valores que le corresponden en el vector de términos independientes, con un desfasamiento, para encontrar los valores reales hay que dividir estos elementos entre el pivote actual, que para este caso es también la unidad, así es que los valores quedan como; $X_1 = (10/1) = 10$; $H_1 = (3/1) = 3$; $H_3 = (21/1) = 21$; y el valor de $Z = (24/1) = 24$. Recuerde que las variables que no aparezcan en la Base seran toman el valor de cero. Veamos en la gráfica, el punto que hemos evaluando.



Como puede apreciarse en la gráfica, el punto que ahora nos toca evaluar es el punto (3,0), y al desplazar la recta de la función objetivo a ese punto tendremos una utilidad de 24, (hasta aquí, hemos terminado con la mecánica de actualización del método) ahora hay que aplicar el criterio de detención del problema, y al ver en la tabla anterior del método simplex podemos observar en el renglón índice, que aun hay un elemento negativo de -8, que corresponde a la variable de X_2, y por lo tanto debemos de seguir el método en su paso iterativo, puesto que no hemos alcanzado el punto óptimo del problema (como se menciono, habremos encontrado la solución óptima sólo cuando en nuestro renglón índice existan elementos positivos o ceros), el elemento del renglón íindice de -8 nos índica que X_2 es la variable que debe entrar a la nueva Base, y por ello debemos de escogerla como columna clave de esta nueva tabla, así mismo, hay que hacer la división de los elementos de vector de términos independientes entre los elementos correspondientes de la columna clave, con excepción de la división entre ceros y valores negativos, y el cociente donde resulte el menor se escogerá como renglón clave. haciendo las divisiones encontramos que $r_1 = (10/2) = 5$; $r_2 =$ se invalida ya que la división es entre un cero; $r_3 = (21/6) = 3.5$, por lo que se escoge el renglón que ocupa la tercer posición de la tabla como renglón clave, (observe en la gráfica anterior, los valores que encontramos al dividir los elementos de los términos independientes entre los correspondientes de la columna clave que corresponde a X_2, siguiendo este eje encontrara que el punto formado por $(X_1,X_2) = (3,5)$ no es vértice factible de solución mientras que el punto $(X_1,X_2) = (3,21/6)$ si es un vértice factible), veamos la tabla.

Columna clave.

				8	8	0	0	0	
				X_1	X_2	H_1	H_2	H_3	
	0	H_1	10	0	2	1	2	0	$r_1 = 10/2$
	8	X_1	3	1	0	0	1	0	r_2 = División no válida.
Renglón clave	0	H_3	21	0	6	0	-7	1	$r_3 = 21/6$ Menor.
			24	0	-8	0	8	0	

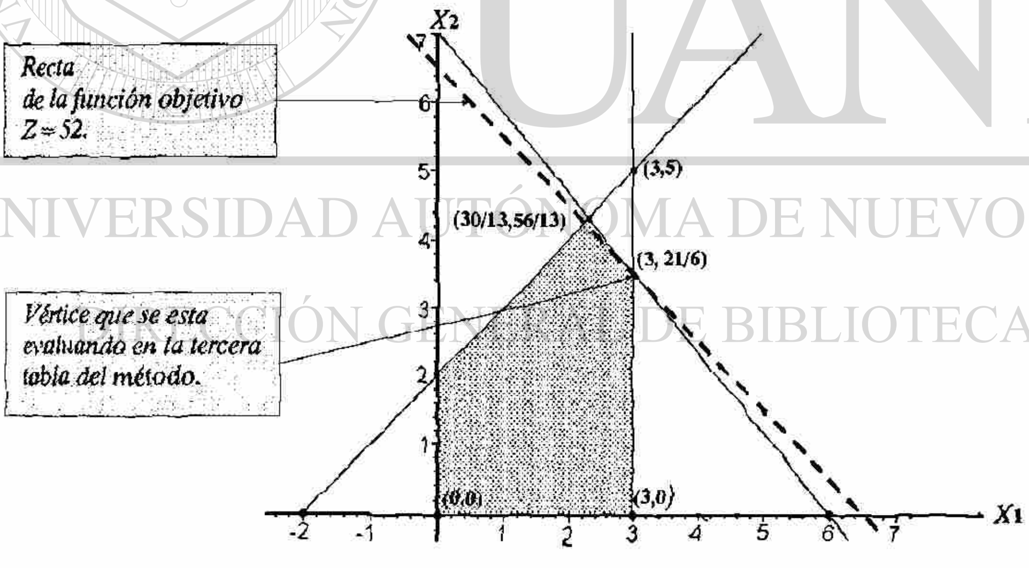
Primera actualización de la tabla; donde $j = 2$.

Ahora hay que seguir con la mecánica de actualización, que consiste en pasar todo el renglón clave exactamente igual a la siguiente tabla, los elementos de la columna clave se transforman en ceros con excepción del número clave (pivote actual), puesto que pasa igual ya que pertenece al renglón clave, los demás elementos se transforman según la formula antes descritas. Al hacer esto obtenemos la tabla que se muestra a continuación.

			8	8	0	0	0
			X_1	X_2	H_1	H_2	H_3
0	H_1	18	0	0	6	26	-2
8	X_1	18	6	0	0	6	0
8	X_2	21	0	6	0	-7	1
		312	0	0	0	-8	8

Segunda actualización de la tabla; donde $j = 3$.

La solución en esta tabla, considerando el desfasamiento, (es decir, dividir los elementos del término independiente entre el pivote actual de la tabla) encontramos que $H_1 = (18/6) = 3$; $X_1 = (18/6) = 3$; y $X_2 = (21/6) = 3.5$; y el valor de $Z = (312/6) = 52$, como ya se mensiono las variables que no aparescan en la Base, se consideran como cero, veamos la gráfica y analicemos que vértice fue encontrado.



Nótese como el valor de Z va en aumento de una tabla a otra, con esto sabemos que en el método cada iteración realizada, se acerca cada vez más al punto óptimo, que es la solución final que nosotros esperamos. En la tabla anterior usted ya habrá notado que en el renglón índice aparece aun un elemento negativo por lo que debemos continuar con la siguiente iteración, dado que estamos maximizando, el método se deberá detener cuando en el renglón índice todos los elementos sean positivos o ceros.

Ahora en la tabla debemos de escoger el elemento negativo que se presenta bajo la variable de H_2, la cual será nuestra columna clave y que es la variable que debe de entrar a la nueva Base del problema, y determinar cual de las variables que se encuentran en la actual Base debe de salir de ella, haciendo la división de los elementos del vector de términos independientes, entre sus correspondientes de la columna clave, y el cociente que resulte ser el menor se seleccionará como renglón clave, realizemos esto en la tabla:

Columna clave.

Renglón clave

			8	8	0	0	0	
			X_1	X_2	H_1	H_2	H_3	
0	H_1	18	0	0	6	26	-2	*r_1 = 18/26 Menor.*
8	X_1	18	6	0	0	6	0	*r_2 = 18/6 = 3*
8	X_2	21	0	6	0	-7	1	*r_3 = División no válida.*
		312	0	0	0	-8	8	

Segunda actualización de la tabla; donde j = 3.

Continuando con la mecánica de actualización de la tabla, como anteriormente fue detallado la nueva tabla nos quedaría como:

			8	8	0	0	0
			X_1	X_2	H_1	H_2	H_3
0	H_2	18	0	0	6	26	-2
8	X_1	60	26	0	-6	0	2
8	X_2	112	0	26	7	0	2
		1376	0	0	8	0	32

Tercera actualización de la tabla; donde j = 4.

Al ya no aparecer elementos negativos en el renglón índice, nos indica que hemos encontrado la solución óptima del problema, y dado al desfasamiento de la tabla solo nos resta dividir toda la tabla entre el pivote actual que es 26, quedandonos la tabla como se muestra a continuación.

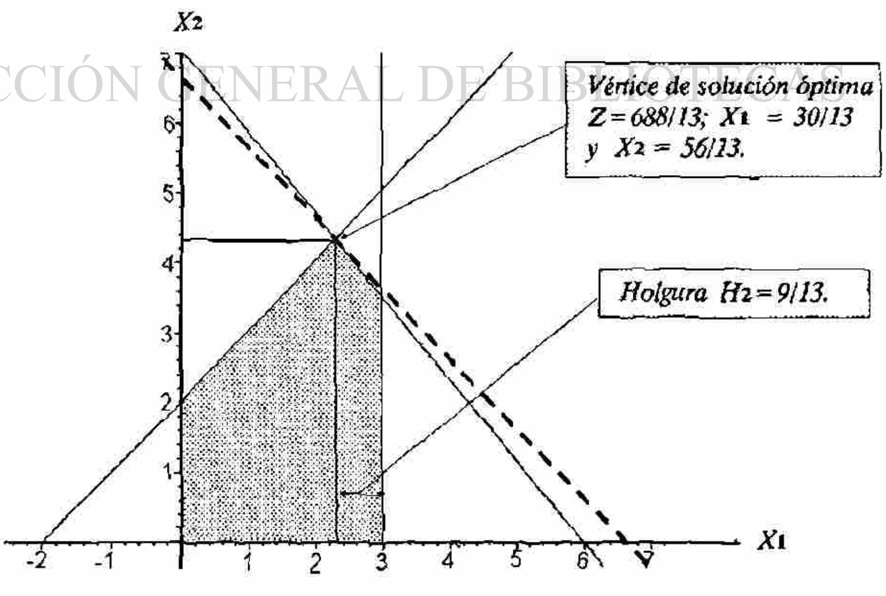
			8	8	0	0	0
			X_1	X_2	H_1	H_2	H_3
0	H_2	9/13	0	0	3/13	1	-1/13
8	X_1	30/13	1	0	-3/13	0	1/13
8	X_2	56/13	0	1	7/26	0	1/13
		688/13	0	0	4/13	0	16/13

Solución óptima de la tabla; donde $j = 3$.

Bien pues la solución óptima, es encontrada en el vector de variables en la Base, y que tomarán los valores correspondientes del vector columna de términos independientes, recordando que las variables que no aparecen en la Base deben de considerarse como cero, siendo la solución óptima como;

$$X_1 = 30/13;\ \ X_2 = 56/13;\ \ H_1 = 0;\ \ H_2 = 9/13;\ \ H_3 = 0;$$
$$Z \text{ máxima} = 688/13.$$

Ahora veamos de nuevo la gráfica para comprobar el vértice que fue evaluado en esta última tabla del problema.



Cabe hacer notar aquí, como el valor de la holgura de H_2 esta representada en la gráfica problema, y el vértice que evaluamos en la última tabla es el que maximiza nuestra función etivo.

Recordemos los pasos a seguir para el desarrollo del método simplex.

Primero.- Preparar las condiciones iniciales del problema, (convertir las desigualdades en .aldades, agregando las variables de holgura necesarias).

Segundo.- Evaluar la condición de parar el método o seguir, (que en el renglón índice ya 10 existan elementos negativos, para cuando estemos maximizando, o elementos positivos para cuando estemos minimizando) y seguir con el tercer paso en caso de ser falsa la condición, en caso de ser verdadera habremos encontrado la solución óptima.

Tercero.- En caso de seguir con el método realizar la mecánica de actualización, para formar nuestra nueva tabla, (escojer la columna clave, determinar el renglón clave, y hacer toda la actualización de la tabla nueva segun la formula), y regresar al paso anterior.

Veamos otro ejemplo.

$$\text{Maximizar } Z = 4X_1 + 3X_2 + 6X_3$$

$$\text{Sujeto a: } 3X_1 + X_2 + 3X_3 \leq 30$$

$$2X_1 + 2X_2 + 3X_3 \leq 40$$

$$\text{para: } X_1 \geq 0; \; X_2 \geq 0; \; y \; X_3 \geq 0.$$

El paso inicial es convertir, las desigualdades en igualdades, para hacerlo hay que introducir las nuevas variables de holgura, con lo cual nos queda de la siguiente manera:

$$\text{Maximizar } Z = 4X_1 + 3X_2 + 6X_3 + 0H_1 + 0H_2$$

$$\text{Sujeto a: } 3X_1 + X_2 + 3X_3 + H_1 = 30$$

$$2X_1 + 2X_2 + 3X_3 + H_2 = 40$$

$$\text{para: } X_1 \geq 0; \; X_2 \geq 0; \; y \; X_3 \geq 0.$$

Aquí temenos la tabla inicial del problema, y como usted podra ver en el renglón índice aparecen varios valores negativos, y como ya sabemos debemos de escoger el más negativo de ellos para determinar la variable que debe de entrar a la nueva Base de la tabla, así mismo, hay que determinar cual es la variable que debe de salir de dicha Base, y lo determinamos haciendo la división de los elementos del término independientes entre sus correspondientes de la columna clave y el menor cociente que resulte será la variable que debe de salir de la Base, y además hay que actualizar toda la tabla quedandonos como:

			4	3	6	0	0
			X_1	X_2	X_3	H_1	H_2
0	H_1	30	3	1	3	1	0
0	H_2	40	2	2	3	0	1
		0	-4	-3	-6	0	0

Tabla Original del problema; donde j = 1

Una vez que se ha determinado la variable que entra y sale de la Base, se procede a hacer la actualización de toda la tabla utilizando la fórmula del Elemento Nuevo, y esta nos queda de la siguiente manera.

			4	3	6	0	0
			X_1	X_2	X_3	H_1	H_2
6	X_3	30	3	1	3	1	0
0	H_2	30	-3	3	0	-3	3
		180	6	-3	0	6	0

Primera actualización del problema; donde j = 2.

Como aun se presentan elementos con valores negativos en el renglón índice, debemos de continuar con el paso iterativo del modelo, escogiendo las variable que entra y sale de la Base del problema, teniendo al siguiente tabla.

			4	3	6	0	0
			X1	X2	X3	H1	H2
6	X3	30	3	1	3	1	0
0	H2	30	-3	3	0	-3	3
		180	6	-3	0	6	0

Primera actualización del problema; donde j = 2.

Continuando con la mecánica de actualización del modelo obtenemos la siguiente tabla ya actualizada:

			4	3	6	0	0
			X1	X2	X3	H1	H2
6	X3	20	4	0	3	2	-1
3	X2	30	-3	3	0	-3	3
		210	3	0	0	3	3

Segunda actualización del problema; donde j = 3.

Al ya no encontrase elementos con valor negativo en el renglón índice de la tabla con lo cual nos indica que ya hemos encontrado la solución óptima del problema, solo nos resta dividir toda la tabla final entre el pivote actual, para evitar el desfasamiento y encontrar los valores de las variables que optimizan nuestro problema lineal, dicha tabla nos queda de la siguiente manera:

			4	3	6	0	0
			X1	X2	X3	H1	H2
6	X3	20/3	4/3	0	1	2/3	-1/3
3	X2	10	-1	1	0	-1	1
		70	1	0	0	1	1

Tercera actualización del problema; donde j = 3.

Cuyo resultado final es:

$$X_1 = 0; \quad X_2 = 10; \quad X_3 = 20/3; \quad H_1 = 0; \text{ y } H_2 = 0,$$
$$Z \text{ máxima} = 70.$$

Este modelo tiene como finalidad la rápida solución de los problema lineales con aplicación hacia la pedagogía ya que al estar transformando las tablas usan todos los valores de los elementos en cantidades enteras, claro esta que también partiendo de coeficientes enteros, puesto que si se parte de valores fraccionarios los valores que se obtengan podrán ser también fraccionarios, este modelo además es recomendado cuando tengamos que resolver problemas sin el apoyo de microcomputadoras, ya que la obtención de los elementos nuevos de las tablas son de fácil solución.

IV.3).- Resumen del método simplex.

¿Cómo se determina que variable debe entrar a la solución en cada tabla?, el criterio para seleccionar la variable básica que entra a la solución debe ser escogida buscando en el renglón índice el valor más negativo, (cuando se esté maximizando, y lo contrario, es decir, el valor más positivo cuando nuestro problema se trate de minimizar) y seleccionarlo como la columna que será la variable que debe entrar a ser la variable básica de la nueva tabla, la lógica de esto es que los valores que aparecen en el renglón índice nos indican las cantidades que estaríamos dejando de ganar por cada unidad en caso de no seleccionar dicha variable (para problemas de maximización y en problemas de minimización, lo que dejaríamos de ahorrarnos si no seleccionamos el valor más positivo), y como en cualquier caso lo que se busca es la optimización del resultado, (que sea lo más grande o el más pequeño posible valor de Z, para maximización o minimización respectivamente), al seleccionar el valor en el renglón índice estamos escogiendo nuestra columna clave en la tabla, pudiendo darse el caso de que algunos valores sean iguales, es decir, que haya un empate al tratar de escoger el más negativo o positivo de los valores en el renglón índice, cuando se presente este caso, es indistinta la variable que sea escogida, puesto que cualquiera de ellas contribuirá con las mismas cantidades para la optimización del problema. Para finalizar recordemos que se elige como variable básica entrante la que tiene el coeficiente mayor, ya que es la que hace que Z se incremente a la tasa más rápida.

¿Cómo determinar cuál variable debe salir de la base?, esto debe hacerse una vez que se haya determinado cuál de las variables debe entrar a la base y tomando esta como columna clave, se procede a hacer la división con los elementos del vector de términos independientes entre los elementos correspondientes de la columna clave, cuidando no hacer divisiones entre valores de cero o negativos, y de las divisiones permitidas aquella que resulte menor se escogerá como el renglón clave que será la variable que deba salir de la base, la lógica de esto es determinar cuántas o cuántos productos o unidades se pueden producir con la nueva variable, que garanticen estar dentro de la solución factible del problema, se eliminan las divisiones entre cero ya que esta división nos daría un valor indeterminado, ni tampoco la división entre valores negativos, puesto que debemos garantizar resultados que sean positivos, y al hacer divisiones entre valores negativos no cumpliríamos con las restricciónes de no negatividad, para una mayor comprensión veamos que sucede cuando escogemos el renglón clave. Supongamos que tenemos como columna clave la variable X_2 que es la que entrará a formar parte de la base, y que deseamos determinar cuál variable debe salir, y nuestras restricciones son:

$$X_1 \leq 12$$
$$X_1 + 3X_2 \leq 45$$
$$2X_1 + X_2 \leq 30$$

Las variable actuales supongamos que fueran H_1, H_2, H_3, es decir, las variables de holgura del problema, en la primera tabla y los valores de estas en el vector de términos independientes serían 12, 45 y 30 respectivamente, como suponemos que la variable a entrar sería X_2, el vector columna sería de:

$$\begin{matrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{matrix}$$

y el vector de términos independientes:

$$\begin{matrix} H_1 & 12 \\ H_2 & 45 \\ H_3 & 30 \end{matrix}$$

La división sería de:

12/0	(invalidado por ser un valor indeterminado)
45/3	(15 el valor menor y por lo tanto debe salir de la base la variable H_2)
30/1	(30)

Se preguntará el lector, pero esto es lo explicado anteriormente, sin embargo esto quiere decir que el valor de la variable X_2 puede tomar como máximo el de 15, pues si tomara el otro valor de 30 cumpliría con la tercera de las restricciones pero no con la segunda, en el caso de primer restricción no sabríamos cuánto producir de X_2 puesto que no aparece en el sistema de desigualdades, veamoslo llevando estos valores a ellas.

para $X_2 = 30$ y $X_1 = 0$, ya que aún no aparece en la base del problema.

$(0) < 12$	(si cumple)
$(0) + 3(30) < 45$	(no cumple)
$2(0) + (30) < 30$	(si cumple)

Como se aprecia el valor de 30 solo cumpliría para la primera y tercera restricción pero no para la segunda, ahora hagamos lo mismo pero para el valor de 15, que fue el resultado de la división del término independiente que ocupa la segunda posición entre su elemento correspondiente en la columna clave.

para $X_2 = 15$ y $X_1 = 0$, ya que aun no aparece en la base del problema.

$(0) < 12$	(si cumple)
$(0) + 3(15) < 45$	(si cumple)
$2(0) + (15) < 30$	(si cumple)

Aquí podemos apreciar que el valor más pequeño que en este caso fue el de 15 cumpliría con todo el sistema de ecuaciones, y por lo tanto es el que se debe escoger para garantizar con la variable que debe entrar a la base tenga un valor que cumpla con dicho requisito, en resumen, siempre debemos escoger el menor cociente que resulte de la división del término independiente entre los elementos correspondientes del vector de la columna clave a fin de garantizar que cumpla con las restricciones del modelo lineal.

¿Qué pasa si existiera un empate al estar escogiendo el renglón clave?. En caso de que en dos o más divisiones se presentara un empate, habria que hacer un analisis con los vectores que forman la matriz inversa, haciendo tambien la división del término independiente entre los elementos correspondientes de estos vectores (solo entre los elementos que se presentara el empate), empezando por el primer vector columna de la matriz inversa, permitiendose hacerse la división entre valores negativos, no haci entre los valores de cero puesto que significarian cantidades fuera de nuestro alcance, y donde se presentara el menor valor, ese renglón se escogeria como renglón clave, es decir, ahi se escogeria la variable que debe de salir de la base, en caso de que despues de esta evaluación persistiera el empate, se continuaria haciendo el mismo análisis con el siguiente vector de la matriz inversa, y así hasta que se rompiera el empate, si se agotaran todos los vectores de la matriz inversa y continuara el empate de los renglones, se procederia a hacer el mismo analisis pero ahora con los vectores columnas de la matriz de coeficientes tecnologicos, empesando con el primer vector y así en forma susesiva hasta romper el empate, en caso de persistir el empate, despues de haber analizado los vectores de la matriz inversa y los vectores de matriz de coeficientes tecnológicos, en ese orden, se escogera el que menos contibuya a la función objetivo, es decir, aquel renglón que en el vector columna de contribuciones tenga el menor valor, (solo en los renglones que se presente el empate) y *por último* en caso de que también existiera empate, se procede a escoger cualquier renglón al azar, haciendo uso de esta última alternativa solo en caso de que no se pudiera romper el empate con los argumentos anteriores.

¿Como sabemos cuando hemos encontrado la solución óptima?. Para determinar si fue encontrada la solución óptima, sera indicado en el renglón índice de la tabla, al no existir valores negativos en dicho renglón habremos llegado a la solución óptima, y a la solución del problema lineal, recuerde que los valores de este renglón índice deben tener valores positivos o ceros cuando estemos máximizando y valores negativos o ceros cuando estemos minimizando el problema, el numero de valores de cero debe ser igual al número de variables en la base del problema, en caso de que existan un número mayor de ceros en el renglón índice que variables en la base, entonces se dice que el problema tiene *solución múltiple*, es decir, que puden existir otros resultados con el mismo valor de Z óptima.

¿Como sabremos cuando un problema no tiene solución?. Cuando al encontrar la solución óptima, el resultado presentara valores no reales como por ejemplo valores negativos en la solución, u otros valores que no tengan explicación lógica se dira que el problema no tiene solución, sin embargo también pueden presentase otro tipos de casos que nos indiquen que el problema no tiene solución.

¿Cuáles problemas se nos pueden presentar utilizando este método nuevo para encontrar la solución, con valores a enteros?. Un requisito para la solución en valores enteros en las tablas, es que debemos de partir de problemas con coeficientes que sean con valores enteros, existiendo, el inconveniente de que los valores enteros se pueden desbordar, tomando valores muy grandes, sin embargo como se mensiono con anterioridad, el método fue hecho con fines pedagogicos, para una solución rápida en el salon de clases, el problema de que se puedan hacer valores muy grandes, existe también en el método simplex comvensional pero con valores mucho muy pequeños, asi es que no lo podemos considerar como un inconveniente.

En resumen, el método que acabamos de presentar se considera como un modelo matemático para la enzeñanza, ya que reduce en forma significativa el tiempo que el maestro dedica al pizarron en la solución de ejemplos prototipos de enseñanza.

CAPÍTULO V).- MÉTODO DE LA "M" GRANDE.

V).- Método de la "M" grande.

El método de la M grande, puede también ser llamado de penalización.

Hasta aquí sólo hemos tratado las variables de holgura, y que el lector ya debe de dominar, ya que dichas variables son introducidas al sistema de ecuaciones lineales, para satisfacer la transformación de las desigualdades en igualdades, a la vez que forman la matriz identidad de la primera tabla. Ahora trataremos otro tipo de variables que también deben de ser introducidas al modelo lineal, a éstas les llamaremos variables ficticias que tienen la función exclusiva de formar la parte identidad en la primer tabla del modelo, ya que su aparición en el modelo sirve solo para formar la matriz inversa de la primer tabla (matriz identidad), y deben de aparcer en las restricciones cuando sean de igualdad (=) o desigualdades del tipo de mayor o igual que (≥).

La variable ficticia pude ser definida como un artificio matemático para la solución del problema lineal. Cuando tenemos desigualdades del tipo de menor o igual que (≤), sabemos que debemos intoducir una variable de holgura positiva al romper la desigualdad puesto que esta tomará el valor complementario a la igualdad, sin embargo cuando nuestra desigualdad sea del tipo de mayor o igual que (≥), entonces la variable de holgura tomaría un valor negativo el cual no puede ser espresado en la solución final del problema, puesto que existen generalmente las restricciones de no negatividad que también alcanzan a las variables de holgura, así es que a dicha variable debe de ser considerada con signo positivo al romper las desigualdades en igualdades, veamos el ejemplo siguiente:

Ejemplo:

$$3X_1 \geq 18$$

Para esta restricción sencilla cualquier valor de X_1 que sea mayor o igual que 6 cumplirá con la desigualdad, y al tratar nosotros de transformar esta desigualdad en igulada, es decir $3X_1 = 18$, el único valor que satisface a dicha iguladad es el valor de 6, sin embargo no podemos olvidar que nuestra restricción original fue tratado como una desigualdad y si dieramos a ésta un valor digamos de $X_1 = 8$ sí satisface a la desigualdad puesto que es del tipo de mayor o igual que, pero no haci la igualdad, por lo que debemos de agregar una variable de holgura o superflua a dicha igualdad lo que nos quedaría como $3X_1 = 18 + H_1$, que al pasar ésta variable al lado izquierdo de la igualdad nos quedaría como $3X_1 - H_1 = 18$, así no nos preocupariamos por el valor que tomará la variable X_1 puesto que la variable H_1 tomará el exedente a la igualdad, como sería el caso de que $X_1 = 8$, llevado este valor a nuestra nueva ecuación tendriamos $3(8) - H_1 = 18$, es decir, $24 - H_1 = 18$; así mismo $-H_1 = 18 - 24$ nos queda que $-H_1 = -6$; se multiplica en ambos lado por (-1) y obtenemos que $H_1 = 6$, así es que nuestra desigualdad una vez que haya sido transformada en igualdad debe de ser expresada como:

$$3X_1 - H_1 = 18$$

En el capítulo anterior, se abordo el concepto de la variable de holgura, y recordando se menciona que además de servir para que absorviera el valor faltante (en restricciones de $\leq$) o que tome el valor excedente (en restricciones de $\geq$) a la igualdad, éstas variables de holgura o superfluas también forman la parte de la matriz inversa de la tabla (matriz identidad en la primer tabla), estos es posible sólo cuando nuestras restricciones son del tipo de menor o igual que ($\leq$) puesto que ahí si entran a la ecuación con coeficiente positivo, mientras que en las desigualdades del tipo de mayor o igual que ($\geq$) entran a la ecuación con coeficientes negativos, y el lector comprenderá que no podemos formar una matriz identidad (en la primer tabla) con coeficientes negativos es decir de (-1) en la diagonal principal, pues ésto haría que perdiera su condición para formar una matriz identidad, aclarado esto entonces es menester de introducir a nuestras ecuaciones una nueva variable que será la variable a la que llamaremos ficticia, y su finalidad es sólo la de formar la parte identidad de nuestro modelo matemático, y claro está que su coeficiente sera positivo y de uno (+1), como se muestra en el ejemplo.

$$3X_1 - H_1 + F_1 = 18$$

Para el caso de que tengamos restricciones que son igualdades, por lo que en ningún momento tendremos ni complementos o excesos, puesto que no se trata de desigualdades sino de un igualdad como restricción original, no aparecerá la variable de holgura o superflua, sin embargo tenemos la necesidad de formar la parte de la matriz inversa de la tabla (matriz identidad en la primer tabla del problema), entonces bastará con introducir sólo la variable ficitcia a la ecuación, como se muestra en el siguiente ejemplo.

$$4X_1 + 6X_2 = 24 \text{ (Restricción original)}$$

A esta restricción original solo se agrega a élla, la variable ficticia con un coeficiente positivo de uno (+1), y nos queda como:

$$4X_1 + 6X_2 + F_1 = 24$$

Donde la nueva variable F_1 representa la variable ficticia de esta restricción, y que no tiene ningún significado real en el problema, repitiendo que sólo entra al sistema de ecuaciones para satisfacer la necesidad de formar la matriz inversa (matriz identidad en la primer tabla) del problema, dado que estas variables ficticias no tienen una interpretación real en la solución y que también deben de estar representadas en la función objetivo del problema lineal, se debe de castigar o penalizar con un costo alto en dicha función objetivo, y para garantizar esto utilizaremos la variable M como contribución a dichas variables en nuestra función objetivo, cuyo valor sera demasiado grande, y en problemas de maximizar debe de entrar con signo negativo y en problemas de minimización con signo positivo, puesto que esto presupone un costo para ambos casos.

Con justa razón el lector se preguntará, qué no hubiera sido más sencillo haber introducido solo la variable de holgura con signo positivo en el rompimiento de la desigualdad y que formará la matriz identidad al mismo tiempo, y que en el ejemplo anterior en vez de haber tomado el valor de 6 tomaría el valor de -6. En primera instancia ésto podría ser posible, pero no hay que olvidar que el método esta diseñado para maneja las restricciones de no negatividad, lo cual incluye a las variables de holgura ya que estas si forman parte de la solución final, por lo tanto no nos permitiriá un valor negativo en la solución óptima.

Para mayor comprención del método de la M grande, utilizaremos el siguiente ejemplo:

$$\text{Minimizar } Z = 3X_1 + 5X_2$$

$$\text{Sujeta a: } X_1 \leq 4$$

$$2X_2 = 12$$

$$3X_1 + 2X_2 \geq 18$$

$$\text{Para: } X_1 \geq 0.$$

Como primer paso hay que romper las desigualdades, ya que la segunda restricción es una igualdad, esta se verá tranformada solo introduciendo una variable ficticia, puesto que no habrá la variable de holgura dado que se trata presisamente de un igualdad.

La primer restricción cambia de $X_1 \leq 4$ a $X_1 + H_1 = 4$ (como es del tipo de menor o igual que ($\leq$) solo se introduce una variable de holgura positiva).

La segunda restricción cambia de $2X_2 = 12$ a $2X_2 + F_1 = 12$ (sólo se agrega la variable ficticia dado que es una igualdad y que formará la matriz inversa ya mensionada).

La tercer restricción se transforma de $3X_1 + 2X_2 \geq 18$ en $3X_1 + 2X_2 - H_2 + F_2 = 18$ (se agregaron la variable de holgura o superflua con signo negativo que tomará el valor excedente a la igualdad y la variable ficticia con signo positivo para su fin antes detallado).

La función objetivo del problema también se transforma quedandonos ahora como.

$$\text{Minimizar } Z = 3X_1 + 5X_2 + 0H_1 + 0H_2 + M F_1 + M F_2.$$

Nótese que la contribución de las variables ficticias es de $+M$ que debe de ser interpretado como un valor demasiado grande, dado de que el método tratará de eliminimar de la Base a aquellas variables cuyo costo sea mayor, y dado que las variables ficticias solo entran en el problema como un artíficio matemático, sin tener una explicación lógica en el resultado, pero debemos procurar que salgan de la Base lo mas rápido posible, y la forma de lograrlo es a traves del método es castigando o penalizando con un costo demasiado alto en la función objetivo a dichas variables ficticias, así es que el lector debe de interpretar este valor de $+M$ como un costo demasiado alto comparado con las demás contribuciones de la función objetivo, quedandonos nuestro sistema de ecuaciones como:

$$\text{Minimizar } Z = 3X_1 + 5X_2 + 0H_1 + 0H_2 + M F_1 + M F_2.$$

$$\text{Sujeto a: } X_1 + H_1 = 4$$

$$2X_2 + F_1 = 12$$

$$3X_1 + 2X_2 - H_2 + F_2 = 18$$

$$\text{Para: } X_i \geq 0;\ H_i \geq 0.$$

El siguiente paso es formar la primera tabla, y calcular el renglón índice como se explico en el capítulo anterior, sólo que ahora debemos de tomar encuenta la contribuciones de las variables ficticias, que son representadas con la variable de $+M$.

Una vez formada la tabla y calculado el renglón índice dicha tabla nos queda de la siguiente manera.

			3	5	0	0	$+M$	$+M$
			X_1	X_2	H_1	H_2	F_1	F_2
0	H_1	4	1	0	1	0	0	0
$+M$	F_1	12	0	2	0	0	1	0
$+M$	F_2	18	3	2	0	-1	0	1
		$30M$	3M -3	4M -5	0	-M	0	0

Recuerde que estamos minimizando (que es lo inverso a la maximización) y por ello hemos escogido la variable de X_2, ya que es el valor más positivo en el renglón índice y debemos de parar el método cuando todos los valores en dicho renglón índice, sean valores negativos o ceros. Haciendo la evaluación para determinar la variable que debe de salir de la base encontramos que es la variable F_1, ya que al hacer la división del elemento independiente entre el elemento correspondiente de la columna clave es de 6 siendo este el menor, y por lo tanto es el que debemos de escoger como renglón clave, tal como se muestra en la tabla.

			3	5	0	0	$+M$	$+M$
			X_1	X_2	H_1	H_2	F_1	F_2
0	H_1	4	1	0	1	0	0	0
$+M$	F_1	12	0	2	0	0	1	0
$+M$	F_2	18	3	2	0	-1	0	1
		$30M$	$3M-3$	$4M-5$	0	$-M$	0	0

Como es nuestra primer tabla, el pivote anterior será la unidad, mientras que nuestro pivote actual es el elemento de intersección de la columna clave y el renglón clave, y debemos de proceder a hacer las tranformaciones de los nuevos elementos de la tabla, según la formula ya vista en el capítulo anterior que es:

E.N. = [(E.A.)(P.Act.)-(E.C.C.C.)(E.C.R.C.)] / P.Ant.

Donde:
E.N. = Elemento Nuevo.
E.A. = Elemento Antiguo.
P.Act. = Pivote Actual.
E.C.C.C. = Elemento correspondiente de la columna clave.
E.C.R.C. = Elemento correspondiente del renglón clave.
P.Ant. = Pivote anterior.

Ya transformada la tabla nos queda como:

			3	5	0	0	$+M$	$+M$
			X_1	X_2	H_1	H_2	F_1	F_2
0	H_1	8	2	0	2	0	0	0
5	X_2	12	0	2	0	0	1	0
$+M$	F_2	12	6	0	0	-2	-2	2
		$12M+60$	6M-6	0	0	-2M	$-4M+5$	0

Como aun en nuestro renglón índice, existe un valor positivo, por lo tanto hay que seguir con el paso iterativo del método, esto es escogiendo la columna donde se presenta este valor positivo como columna calve y determinando el renglón clave, haciendo la división de los elementos del término independiente entre los correspondientes de la columna clave y donde se presente el menor cociente se escogera como renglón clave, recuerde no son validas las divisiones entre ceros y negativos, presentandose el menor cociente en el tercer renglón.

Columna clave, lo que indica que la variable X_1 debe de entrar a la Base.

			3	5	0	0	$+M$	$+M$
			X_1	X_2	H_1	H_2	F_1	F_2
0	H_1	8	2	0	2	0	0	0
5	X_2	12	0	2	0	0	1	0
$+M$	F_2	12	6	0	0	-2	-2	2
		$12M+60$	6M-6	0	0	-2M	$-4M+5$	0

Renglón clave F_2 es la variable que debe salir de la Base.

Realizando de nuevo las tranformaciones de los nuevos elementos de la tabla.

			3	5	0	0	$+M$	$+M$
			X_1	X_2	H_1	H_2	F_1	F_2
0	H_1	12	0	0	6	2	2	-2
5	X_2	36	0	6	0	0	3	0
3	X_1	12	6	0	0	-2	-2	2
		216	0	0	0	-6	$-6M+9$	$-6M+6$

Como en el renglón índice ya no encontramos elementos con valores positivos, sabemos que hemos llegado al solución del problema, y sólo nos resta dividir todos los elementos de la tabla óptima entre el pivote anterior para obtener la solución del problema, quedandonos la tabla como:

Solución óptima:

Z mínima = 36

$X_1 = 2$

$X_2 = 6$

$H_1 = 2$

$H_2 = 0.$

			3	5	0	0	$+M$	$+M$
			X_1	X_2	H_1	H_2	F_1	F_2
0	H_1	2	0	0	1	1/3	1/3	-1/3
5	X_2	6	0	1	0	0	1/2	0
3	X_1	2	1	0	0	-1/3	-1/3	1/3
		36	0	0	0	-1	$-M+3/2$	$-M+1$

Hay que considerar que las variables ficticias no forman parte de la solución, y que solo fueron agregadas al sistema de ecuaciones lineales para completar la matriz identidad de la primer tabla, por lo tanto no se deben de considerar como parte de la solución óptima.

Realizemos otro sencillo ejemplo:

La Compañía Comestibles de Calidad debe producir 12,000 kilos un producto secreto con una mezcla especial para un cliente. La mezcla se compone de los ingredientes X_1, X_2, y X_3. el ingrediente de X_1 tiene un costo de 6 nuevos pesos el kilo, el ingrediente de X_2 su costo es de 8 nuevos pesos el kilo, y el ingrediente X_3 su costo es de 9 nuevos pesos el kilo. No pueden usarse más de 3,200 kilos del ingrediente de X_1 y por lo menos deberán usarse 1,700 kilos del ingrediente X_2. Además se requieren por lo menos de 2,100 kilos del ingrediente X_3.

Calcúlese el número de kilos de cada ingrediente que habrá que emplear, a fin de reducir al *mínimo el costo total de los* 12,000 *kilos de la mezcla solicitada.*

Una vez formulado el modelo lineal de nuestro problema, nos queda de la siguiente manera:

$$\text{Minimizar } Z = 6X_1 + 8X_2 + 9X_3$$

$$\text{Sujeto a: } X_1 + X_2 + X_3 = 12{,}000$$

$$X_1 \leq 3{,}200$$

$$X_2 \geq 1{,}700$$

$$X_3 \geq 2{,}100$$

$$\text{Para: } X_i \geq 0.$$

Al romper las desigualdades, anexando las variables de holgura y ficticias que sean necesarias, el cual es el primer paso para solución del problema por el método, estas desigualdaes nos quedarían como:

$$X_1 + X_2 + X_3 + F_1 = 12{,}000$$

$$X_1 + H_1 = 3{,}200$$

$$X_2 - H_2 + F_2 = 1{,}700$$

$$X_3 - H_3 + F_3 = 2{,}100$$

$$X_i \geq 0.$$

Además la función objetivo se transforma con los nuevos coeficientes de las contribuciones le las variables que han sido anexadas a las desigualdades, con el fin de transformarlas en gualdades, y esta nos queda de las siguiente forma.

$$\text{Minimizar } Z = 6X_1 + 8X_2 + 9X_3 + 0H_1 + 0H_2 + 0H_3 + MF_1 + MF_2 + MF_3$$

Una vez tranformada la función objetivo, entonces se procede a realizar la primera tabla del método, a fin de dar respuesta al problema lineal, esta nos queda de la siguiente forma:

			6	8	9	0	0	0	$+M$	$+M$	$+M$
			X_1	X_2	X_3	H_1	H_2	H_3	F_1	F_2	F_3
$+M$	F_1	12,000	1	1	1	0	0	0	1	0	0
0	H_1	3,200	1	0	0	1	0	0	0	0	0
$+M$	F_2	1,700	0	1	0	0	-1	0	0	1	0
$+M$	F_3	2,100	0	0	1	0	0	-1	0	0	1
		$15{,}800M$	M-6	$2M$-8	$2M$-9	0	$-M$	$-M$	0	0	0

Seleccionamos el elemento con valor más positivo del renglón índice (ya que estamos minimizando el problema) y se escoge la columna como columna clave, siendo la variable X_2 la que debe entrar a la nueva Base de problema, la determinación del renglón clave es el menor cociente de la división de los elementos del vector de términos independientes entre los elementos correspondientes de la columna clave (a excepción de la división entre ceros y valores negativos), resultando el menor la división en r_3 con la división de 1,700/1; que es el renglón que ocupa la tercera posición, el cual es seleccionado como renglón clave, lo que quiere decir que la variable F_2 es la que debe de salir de la Base del problema, veamos la tabla.

Columna clave, Variable que entra a la nueva Base.

			6	8	9	0	0	0	$+M$	$+M$	$+M$
			X_1	X_2	X_3	H_1	H_2	H_3	F_1	F_2	F_3
$+M$	F_1	12,000	1	1	1	0	0	0	1	0	0
0	H_1	3,200	1	0	0	1	0	0	0	0	0
$+M$	F_2	1,700	0	1	0	0	-1	0	0	1	0
$+M$	F_3	2,100	0	0	1	0	0	-1	0	0	1
		$15{,}800M$	M-6	$2M$-8	$2M$-9	0	$-M$	$-M$	0	0	0

Renglón clave, Variable que sale de la nueva Base

Para la actualización de la nueva tabla, se recuerda que los pasos son, el renglón clave pasa exactamente igual, sólo cambiando la variable que salió por la variable que debe de entrar a la Base, incluyendo su contribución original que es colocada a la izquierda de la variable que acaba de entrar a la nueva Base, los elementos de la comuna clave se transforman en ceros, con excepción del pivote, el cual conserva su valor actual puesto que también es un elemento del renglón clave, los demás elementos de la tabla se transforman con la formula del método que fue explicada anteriormente, y que es:

E.N. = [(E.A.)(P.Act.)-(E.C.C.C.)(E.C.R.C.)] / P.Ant.

Donde:
E.N. = Elemento Nuevo.
E.A. = Elemento Antiguo.
P.Act. = Pivote Actual.
E.C.C.C. = Elemento correspondiente de la columna clave.
E.C.R.C. = Elemento correspondiente del renglón clave.
P.Ant. = Pivote anterior.

Recuerde que como es la primer tabla el pivote anterior sera la unidad, quedando la nueva tabla como:

			6	8	9	0	0	0	$+M$	$+M$	$+M$
			X_1	X_2	X_3	H_1	H_2	H_3	F_1	F_2	F_3
$+M$	F_1	10,300	1	0	1	0	1	0	1	-1	0
0	H_1	3,200	1	0	0	1	0	0	0	0	0
8	X_2	1,700	0	1	0	0	-1	0	0	1	0
$+M$	F_3	2,100	0	0	1	0	0	-1	0	0	1
		$12{,}400M + 13{,}600$	M-6	0	$2M$-9	0	M-8	$-M$	0	$-2M+8$	0

Como aun hay elementos positivos en el renglón índice, debemos de continuar con nuestro problema en el paso iterativo, hasta alcanzar la solución óptima que se presentará cuando en el renglón índice todos los elementos sean ceros o negativos ya que nuestro problema es de minimización, escogemos de nuevo la variable que debe de entrar a la Base y se determina cual es la variable que debe de salir y se actualiza de nuevo la tabla, y así sucesivamente hasta encontrar la solución óptima del problema, se detallan todas las tablas del problema las cuales son:

La tabla una vez actualizada nos queda así:

			6	8	9	0	0	0	$+M$	$+M$	$+M$
			X_1	X_2	X_3	H_1	H_2	H_3	F_1	F_2	F_3
$+M$	F_1	8,200	1	0	0	0	1	1	1	-1	-1
0	H_1	3,200	1	0	0	1	0	0	0	0	0
8	X_2	1,700	0	1	0	0	-1	0	0	1	0
9	X_3	2,100	0	0	1	0	0	-1	0	0	1
		$8{,}200M$ $+32{,}500$	M-6	0	0	0	M-8	M-9	0	$-2M+8$	$-2M+9$

La siguiente tabla ya actualizada nos queda:

			6	8	9	0	0	0	$+M$	$+M$	$+M$
			X_1	X_2	X_3	H_1	H_2	H_3	F_1	F_2	F_3
$+M$	F_1	5,000	0	0	0	-1	1	1	1	-1	-1
6	X_1	3,200	1	0	0	1	0	0	0	0	0
8	X_2	1,700	0	1	0	0	-1	0	0	1	0
9	X_3	2,100	0	0	1	0	0	-1	0	0	1
		$5{,}000M$ $+51{,}700$	0	0	0	$-M+6$	M-8	M-9	0	$-2M+8$	$-2M+9$

Tabla óptima:

			6	8	9	0	0	0	+M	+M	+M
			X_1	X_2	X_3	H_1	H_2	H_3	F_1	F_2	F_3
0	H_2	5,000	0	0	0	-1	1	1	1	-1	-1
6	X_1	3,200	1	0	0	1	0	0	0	0	0
8	X_2	6,700	0	1	0	-1	0	1	1	1	0
9	X_3	2,100	0	0	1	0	0	-1	0	0	1
		91,700	0	0	0	-2	0	-1	-M+8	-M	-M

Tabla óptima, puesto que el pivote anterior fue el uno (1), y por lo tanto no existe desfasamiento quedandonos nuestra tabla óptima completamente igual, por lo que la solución óprima es:.

La Solución óptima, Z mínima = 91,700; X_1 = 3,200; X_2 = 6,700; X3 = 2,100; H_1 = 0; H_2 = 5,000; H_3 = 0; *recordando que las variables ficticias no aparecen en la solución dado que sólo fueron* utilizadas por el modelo para formar la parte identidad en la tabla inicial, esto como un artificio matemático.

CAPÍTULO VI).- MÉTODO DUAL.

VI).- Método Dual.

En el método que abordamos en el capítulo anterior debemos llamarlo desde ahora como primal, ya que aparejado con el desarrollo inicial de la programación lineal, fue fantastico descubrir y comprobar que existe lau dualidad. Este conocimiento revelo que asociado a todo problema lineal, existe otro problema lineal llamado dual, y esta dualidad cobra mucha inportancia sobre el análisi de sensibilidad, y además esta variante del método tiene como finalidad, ayudar en la solución de problemas, en los que su estructura matemática cuenten con un buen número de restricciones y que sean pocas las variables de decisión, en dicho problema, como ya sabemos por cada restricción del problema debemos introducir al menos una nueva variable ya sea de holgura y/o ficticia, y por ende nuestro problema debido a esto tendremos un vector columna por cada nueva variable que adicionemos pudiendo hacerce demasiado grande nuestras tablas.

Problema lineal primal.
Maximizar $Z = \mathbf{cx}$
Sujeto a:
$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$
y
$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$

Problema lineal dual.
Minimizar $Z = \mathbf{yb}$
Sujeto a:
$\mathbf{yA} \geq \mathbf{c}$
y
$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}.$

Usando las formas de representación canónicas de los problemas lineales, mostraremos la lualidad que existen en ellas.

Donde la variable **y** del problema lineal dual, la conoceremos como variable dual.

Plantearemos la dualidad escogiendo el problema del vendedor Juan Reyna, el cual fue descrito en el capítulo de planteamientos de problema, y que en su forma lineal era:

$$\text{Maximizar } Z = 150X_1 + 340X_2$$

$$\text{Sujeto a: } 2X_1 + 3X_2 \leq 40$$

$$10X_1 + 20X_2 \leq 800$$

$$\text{Para: } X_1 \geq 0;\ X_2 \geq 0.$$

La representación canónica del método primal nos queda de la siguiente forma:

$$\text{Maximizar } Z = [150, 320] \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \end{vmatrix}$$

$$\text{Sujeto a: } \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 10 & 20 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \end{vmatrix} \leq \begin{vmatrix} 40 \\ 80 \end{vmatrix}$$

$$\text{Para: } \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \end{vmatrix} \geq \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Mientras que la representación canónica del planteamiento Dual es:

$$\text{Minimizar } G = [Y_1, Y_2] \begin{vmatrix} 40 \\ 80 \end{vmatrix}$$

$$\text{Sujeto a: } [Y_1, Y_2] \begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 3 & 20 \end{vmatrix} \geq [150, 340]$$

$$[Y_1, Y_2] \geq [0, 0]$$

Enumeraremos, paso por paso el desarrollo del método Dual, utilizando el problema antes descrito.

$$\text{Maximizar } Z = 150X_1 + 340X_2$$

$$\text{Sujeto a: } 2X_1 + 3X_2 \leq 40$$

$$10X_1 + 20X_2 \leq 800$$

$$\text{Para: } X_1 \geq 0;\ X_2 \geq 0.$$

1).- El primer paso es asociar una nueva variable que llamaremos Dual a cada una de las restricciones del problema quedando como:

$$2X_1 + 3X_2 \leq 40 \quad Y_1$$

$$10X_1 + 20X_2 \leq 800 \quad Y_2$$

2).- Hacer que estas variables Duales, pasen como el vector renglón de variables, tal como si se fuera a escribir la primer tabla del método Primal.

$$Y_1 \quad Y_2$$

3).- Sobre estas colocar la transpuesta del vector columna de términos independientes, pasandolo como vector renglón de contribuciones.

$$\begin{array}{cc} 40 & 800 \\ Y_1 & Y_2 \end{array}$$

4).- Hacer la transpuesta de la matriz de coeficientes tecnológicos, y colocarla bajo el vector correspondiente de las nuevas variables Duales del nuevo problema, es decir, los vectores columnas pasan como vectores renglón.

$$\begin{array}{cc} 40 & 800 \\ Y_1 & Y_2 \\ 2 & 10 \\ 3 & 20 \end{array}$$

5).- Se hace la transpuesta del vector renglón de contribuciones y pasa como vector columna de términos independientes.

$$\begin{array}{ccc} 40 & 800 & \\ Y_1 & Y_2 & \\ 2 & 10 & 150 \\ 3 & 20 & 350 \end{array}$$

6).- Las desigualdades se invierten, de menor o igual que (≤) pasan como mayor o igual que (≥).

40	800	
Y_1	Y_2	
2	10	≥ 150
3	20	≥ 350

7).- Hay también necesidad de cambiar la función objetivo original recuerde que si estamos maximizando, ahora habrá que minimizar, y visceversa.

Maximizar Z = Minimizar G.

8).- Apartir de este punto en adelante se utiliza el método, tal y como fue explicado con anterioridad resolver el problema, con la salvedad de que la solución óptima se encontrara en el renglón índice de la tabla final, lo cual se ampliara la explicación en su momento ahora hagamos la tabla inicial, del método agregando tantas variables a las restricciones como si se tratara del Primal.

			40	800	0	0	$+M$	$+M$
			Y_1	Y_2	H_1	H_2	F_1	F_2
$+M$	F_1	150	2	10	-1	0	1	0
$+M$	F_2	340	3	20	0	-1	0	1
		$490M$	$5M-40$	$30M-800$	$-M$	$-M$	0	0

Como podrá usted notar el procedimiento de aquí en adelante se debe de tratar como si no ubiera diferencia del método simplex Primal, tomando en consideración que ahora estaremos minimizando, en vez de maximizar.

Haciendo la actualización de la primer tabla.

			40	800	0	0	$+M$	$+M$
			Y_1	Y_2	H_1	H_2	F_1	F_2
800	Y_2	150	2	10	-1	0	1	0
$+M$	F_2	400	-10	0	20	-10	-20	10
		$490M$ $+120{,}000$	$-10M$ $+1{,}200$	0	$20M$ -800	$-10M$	$-30M$ $+800$	0

La siguiente tabla queda de la siguiente manera:

			40	800	0	0	$+M$	$+M$
			Y_1	Y_2	H_1	H_2	F_1	F_2
800	Y_2	340	3	20	0	-1	0	1
0	H_1	400	-10	0	20	-10	-20	10
		272,000	1,600	0	0	-800	$-20M$	$-20M$ $+800$

Como aun hay valores positivos en el renglón índice, debemos de seguir con el paso iterativo de las tablas, hasta que todos los valores del renglón índice sean negativos, puesto que estamos minimizando, haciendo esto nos queda la siguiente tabla.

			40	800	0	0	$+M$	$+M$
			Y_1	Y_2	H_1	H_2	F_1	F_2
40	Y_1	340	3	20	0	-1	0	1
0	H_1	230	0	10	3	-2	-3	2
		13,600	0	-1,600	0	-40	$-3M$	$-3M$ $+40$

Finalmente, al encontrar la tabla óptima solo nos resta hacer la división de todos los elementos de esta tabla entre el pivote de la tabla anterior que fue un tres, y haci encontrar la solución óptima del problema.

Resultado: Bajo

$Y_1 = |H_1| = 0;$
$Y_2 = |H_2| = 1{,}600/3;$
$H_1 = |X_1| = 0;$
$H_2 = |X_2| = 40/3;$

G Mínima = |Z Máxima.|

Z Máxima = 13,600/3.

			40	800	0	0	$+M$	$+M$
			Y_1	Y_2	H_1	H_2	F_1	F_2
40	Y_1	340/3	1	20/3	0	-1/3	0	1/3
0	H_1	230/3	0	10/3	1	-2/3	-1	2/3
		13,600/3	0	-1,600/3	0	-40/3	$-M$	$-M + 40/3$

La interpretación del resultado ahora estará dada por el renglón índice, como usted ya habrá notado tenemos en dicho renglón solo valores negativos, y dadas las variables de no negatividad, esto quedaría sin solución si estuvieramos utilizando el método simplex Primal, sin embargo para este caso de la dualidad, debemos de tomar los valores absolutos como resultado óptimo.

Este método Dual, se recomienda que sea aplicado cuando en nuestro problema Primal existan un buen número de restricciones y pocas variables de dicisión, como pudiera ser el siguiente ejemplo.

$$\text{Maximizar } Z = 4X1 + 6X2$$

$$\text{Sujeto a: } -6X_1 + 2X_2 \leq 4$$

$$4X_1 + 2X_2 \leq 44$$

$$8X_1 - 2X_2 \leq 20$$

$$-2X_1 + 4X_2 \leq 28$$

$$\text{Para: } X_1 \geq 0 \text{ y } X_2 \geq 0.$$

Siguiendo los pasos antes mensionados, y haciendo las transformaciones necesarias del planteamiento en su forma Dual, nuestro problema queda planteado de la siguiente manera:

$$\text{Minimizar } G = 4Y_1 + 44Y_2 + 20Y_3 + 28Y_4$$

$$\text{Sujeto a: } -6Y_1 + 4Y_2 + 8Y_3 - 2Y_4 \geq 4$$

$$2Y_1 + 2Y_2 - 2Y_3 + 4Y_4 \geq 6$$

$$\text{Para: } Y_1 \geq 0, Y_2 \geq 0, Y_3 \geq 0, Y_4 \geq 0.$$

Rompiendo las desigualdades, y tratando de aquí en adelante el problema por el método descrito, hasta obtener la solución óptima del problema, presntamos de la tabla inicial hasta la tabla óptima.

Tabla inicial, Primera iteración:

			4	44	20	28	0	0	+*M*	+M
			Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	H1	H_2	F_1	F_2
+*M*	F_1	4	-6	4	8	-2	-1	0	1	0
+*M*	F_2	6	2	2	-2	4	0	-1	0	1
		10*M*	-4*M*-4	6*M*-44	6*M*-20	2*M*-28	-*M*	-*M*	0	0

Segunda tabla, Segunda iteración:

			4	44	20	28	0	0	+*M*	+M
			Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	H1	H_2	F_1	F_2
20	Y_3	4	-6	4	8	-2	-1	0	1	0
+*M*	F_2	56	4	24	0	28	-2	-8	2	1
		56*M* +80	4*M* - 152	24*M* - 272	0	28*M* -264	-2*M* -20	-8*M*	-6*M* +20	0

Tercera tabla, Tabla óptima:

			4	44	20	28	0	0	$+M$	$+M$
			Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	H1	H_2	F_1	F_2
20	Y_3	28	-20	20	28	0	-4	-2	4	2
28	Y_4	56	4	24	0	28	-2	-8	2	8
		2,128	-400	-160	0	0	-136	-264	$-28M$ $+136$	$-28M$ $+264$

Solo resta dividir toda la tabla entre el pivote anterior, para obtener la solución del problema.

Resultado: Bajo

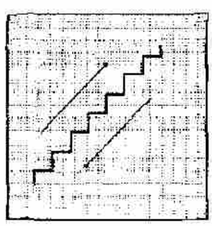
$Y_1 = |H_1| = 100/7$;
$Y_2 = |H_2| = 40/7$;
$Y_3 = |H_3| = 0$;
$Y_4 = |H_4| = 0$;
$H_1 = |X_1| = 34/7$;
$H_2 = |X_2| = 66/7$;

G Mínima = |Z Máxima.|

Z Máxima = 532/7.

			4	44	20	28	0	0	$+M$	$+M$
			Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	H1	H_2	F_1	F_2
20	Y_3	1	-5/7	5/7	1	0	-1/7	-1/14	1/7	1/14
28	Y_4	2	1/7	6/7	0	1	-1/14	-2/7	1/14	2/7
		532/7	-100/7	-40/7	0	0	-34/7	-66/7	$-M$ $+34/7$	$-M$ $+66/7$

La siguiente figura, da la idea fundamental de la Dualidad,



El dibujo de la página anterior el cual representa una escalera, con una flecha acendente por arriba de ella y una flecha descendiente por abajo, lo que representan la dualidad, si el lector diera vuelta al dibujo, es decir lo pusiera de cabeza, seguiria contemplando la misma figura, es decir una escalera con una flecha ascendente por arriba y una descendente por abajo, así es la dualidad en la función objetivo de los problemas con respecto a la dualidad, lo que es una maximización en el modelo primal es una minimización en su dualidad, y visceversa lo que es una minimización en el primal es una maximización en su dualidad, y ambos al final llegaran al mismo significado como en el caso de la figura, que aun traponiendo el dibujo, sigue representanso lo mismo para efectos prácticos.

Los ejemplos que abordamos, fueron de maximizar, y ambos todas las desigualdades eran del mismo tipo de menor o igual que ($\leq$), en el primal, cuando sucede esto se le llama simético, veamos un ejemplo más cuando no hay simetría es decir problemas asimétricos.

$$\text{Minimizar } Z = 60X_1 + 15X_2$$

$$\text{Sujeto a: } 5X_1 + 2X_2 \leq 80$$

$$X_1 + 2X_2 \geq 10$$

$$X_1 \leq 8$$

$$X_1 + X_2 \geq 8$$

$$\text{Para: } X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0.$$

Como usted podra ver tenemos desigualdades del tipo de ($\leq$) y ($\geq$), lo cual nos proporciona un modelo asimétrico, y para poder resolverlo por el método Dual, lo primero que hay que hacer, es volverlo simétrico el modelo lineal, es decir, hay que convertir todas las restricciones del problema en desigualdades del mismo tipo (todas de $\geq$ o todas de $\leq$) utilizando las equivalencias de las desigualdades

Una de las principales equivalencias establece que una desigualdad de cualquier tipo es multiplicada por un valor negativo (-1) en ambos lados de la igualdad el sentido de la desigualdad debe de invertise, por ejemplo. Si $X_1 \leq 2$, se multiplica en ambos lados de la desigualdad por un (-1), tendríamos la nueva desigualdad expresada como $-X_1 \geq -2$.

Convirtiendo nuestro problema que es asimétrico en simétrico, nos queda de la siguiente manera:

$$\text{Minimizar } Z = 60X_1 + 15X_2$$

$$\text{Sujeto a: } -5X_1 - 2X_2 \geq -80$$

$$X_1 + 2X_2 \geq 10$$

$$-X_1 \geq -8$$

$$X_1 + X_2 \geq 8$$

$$\text{Para: } X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0.$$

Ahora, ya planteado en esta forma se procede a plantearse con su dualidad, quedando como:

$$\text{Maximizar } G = -80Y_1 + 10Y_2 - 8Y_3 + 8Y_4$$

$$\text{Sujeto a: } -5Y_1 + Y_2 - Y_3 + Y_4 \leq 60$$

$$-2Y_1 + 2Y_2 + Y_4 \leq 15$$

$$\text{Para: } Y_1 \geq 0;\ Y_2 \geq 0;\ Y_3 \geq 0;\ Y_4 \geq 0.$$

Ahora solo nos resta resolverlo por el método Dual, presentaremos tabla por tabla hasta obtener la solución del problema.

Tabla inicial, Primera iteración.

			-80	10	-8	8	0	0
			Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	H_1	H_2
0	H_1	60	-5	1	-1	1	1	0
0	H_2	15	-2	2	0	1	0	1
		0	80	-10	8	-8	0	0

Segunda tabla, Segunda iteración.

			-80	10	-8	8	0	0
			Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	H_1	H_2
0	H_1	105	-8	0	-2	1	2	-1
10	Y_2	15	-2	2	0	1	0	1
		150	140	0	16	-6	0	10

Tabla óptima, Solución.

			-80	10	-8	8	0	0
			Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	H_1	H_2
0	H_1	45	-3	-1	-1	0	1	-1
8	Y_4	15	-2	2	0	1	0	1
		120	64	6	8	0	0	8
		Z Mínima	H_1	H_2	H_3	H_4	X_1	X_2

La solución del problema, como ya sabemos esta desfasada, sin embargo en este caso el pivote anterior es de uno, por lo que queda igual la solución, G Máxima = Z Minima = 120; $X_1 = 0$, $X_2 = 8$, $H_1 = 64$, $H_2 = 6$, $H_3 = 8$ y $H_4 = 0$.

APÉNDICE I).- CONVEXIDAD.

Apéndice 1.- Convexidad.

Con suma frecuencia el concepto de convexidad, es usado en la investigación de operaciones, así es que en este tema abordaremos este concepto, cuya primera instancia es definir que es una función convexa, así como que es una función cóncava.

Nota. Aquí trazaremos funciones no lineales para una mayor comprensión de los conceptos de convexidad, recordando que solo se presentan como ejemplos de funciones, sin cambiar el contenido de este libro que trata solo de funciones lineales.

Definición.- Una función de una variable $f(x)$, es una función convexa si, para cada par de valores, por ejemplo, x' y x'',

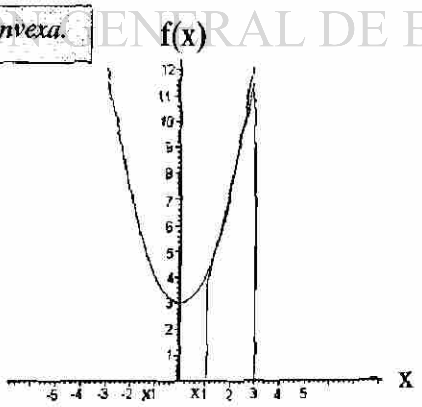
$$f[\alpha x'' + (1-\alpha)x'] \leq \alpha f(x'') + (1-\alpha)f(x')$$

para todos los valores de α tales que $0 \leq \alpha \leq 1$. Ésta es una función estrictamente convexa si ($\leq$) puede sustituirse por ($<$). Es una función cóncava (o estrictamente cóncava) si esta afirmación se cumple cuando se reemplaza ($\leq$) por ($\geq$) (o por $>$).

Expliquemos lo anteriormente dicho, viendo unas gráficas, a fin de que el lector pueda identificar las funciónes cóncavas y convexas de las que no lo son y que se logre una mayor comprención de estos términos.

Gráfica de una función convexa.

Ejemplo de una función convexa.



La función que se presenta en la página anterior es convexa dado que para todo valor de α la siguiente ecuación se cumple.

$$f[\alpha x'' + (1-\alpha\ )x'] \leq \alpha f(x'') + (1-\alpha\ )f(x')$$

Cabe hacer notar como el signo de ($\leq$) que se presenta en la ecuación.

La función presentada en la gráfica es $f(x) = x^2 + 3$; recuerde que $0 \leq \alpha \leq 1$, así hagamos que $\alpha = 0.5$, sustituyendo los valores de $x' = 1$ y $x'' = 3$; en la función original tenemos que f y $f(x'') = 12$, llevando estos valores a la ecuación, en su interpretación geométrica, tenemos;

$$f\ [0.5(3) + (1\text{-}0.5)1\ ] \leq \quad 0.5(12) + (1\text{-}0.5)4$$
$$f\ (2) \leq \quad 8$$

$f(2) = 7$ por lo tanto $f(2) \leq\ 8$; y se demuestra que es una función convexa. O mejor dicho la función es **estrictamente convexa** ya que podemos expresar el resultado como $7 < 8$, [nótese el cambio del signo ($\leq$) por ($<$)].

Para ser más precisos, si $f(x)$ posee una segunda derivada en cada punto, entonces $f(x)$ es convexa si $d^2 f(x)/dx^2 \geq\ 0$, para todos los valores de x. De forma análoga, $f(x)$ es cóncava cuando $d^2 f(x)/dx^2 \leq\ 0$. veamoslo para el ejemplo anterior.

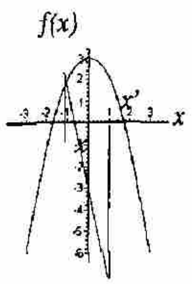
$$f(x) = x^2 + 3$$
$$df(x)/dx = 2x$$
$$d^2 f(x)/dx^2 = 2, \text{ por lo tanto } d^2 f(x)/dx^2 \geq 0.$$

Al igual que en su interpretación geométrica, en su comprobación matemática, podemos decir que la función es **estrictamente convexa** ya que la derivada también puede ser expresada como: $d^2 f(x)/dx2 > 0$

Una vez comprobado que es una función convexa, tanto en su forma gráfica así como utilizando la segunda derivada, pasemos a mostrar y comprobar una función cóncava.

Gráfica de una función cóncava.

Ejemplo de una función cóncava



Esta función es cóncava dado que, para todo valor de α, la siguiente ecuación es cierta.

$$f[\alpha x'' + (1-\alpha)x'] \geq \alpha f(x'') + (1-\alpha)f(x')$$

Cabe hacer notar como el signo de ($\geq$) que se presenta en la ecuación.

La función que se presenta en la gráfica es $f(x) = -x^2 + 3$; demosle un valor de α de 0.7, sustituyendo los valores de $x' = 1$ y $x'' = 3$; en la función original tenemos que $f(x') = 2$ y $f(x'') = -6$, llevando estos valores a la ecuación, para su interpretación geométrica, tenemos;

$$f\,[0.7(3) + (1-0.7)1\,] \geq 0.7(-6) + (1-0.7)2$$
$$f\,(2.4) \geq -3.6$$

$f\,(2) = -2.76$ por lo tanto $-2.76 \geq -3.6$ y queda demostrado que es una función cóncava. O mejor dicho la función es **estrictamente cóncava** ya que podemos expresar el resultado como $-2.76 > -3.6$, [nótese el cambio del signo ($\geq$) por ($>$)].

Con mayor precisión, si $f(x)$ posee una segunda derivada en cada punto, entonces $f(x)$ es cóncava si $d^2 f(x)/dx^2 \leq 0$, para todos los valores de x, como fue definido con anterioridad.

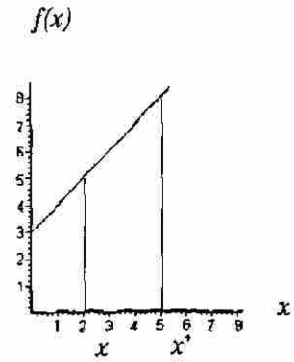
$$f(x) = -x^2 + 3$$
$$df(x)/dx = -2x$$
$$d^2 f(x)/dx^2 = -2, \text{ por lo tanto } d^2 f(x)/dx^2 \leq 0.$$

Al igual que en su interpretación geométrica, en su comprobación matemática, podemos lecir que la función es **estrictamente cóncava** ya que la derivada también puede ser expresada omo: $d^2 f(x)/dx2 < 0$.

Se puede asumir que una función es tanto convexa como cóncava cuando el segmento rectilíneo, que une los puntos de x' y x'', forma parte de la función, y esto se da en funciones lineales, esto quiere decir que la segunda derivada de la $f''(x) = 0$, es decir, $d^2 f(x)/dx^2 = 0$, de la misma forma cuando su interpretación gráfica en vez de ser una desigualdad se convierte en igualdad.

La siguiente gráfica es de una función que es tanto convexa como cóncava.

Ejemplo de una función que es tanto convexa como cóncava



La función de la gráfica anterior es convexa y cóncava dado que para cualquier valor de α, la ecuación siguiente es verdadera.

$$f[\alpha x'' + (1-\alpha)x'] = \alpha f(x'') + (1-\alpha)f(x')$$

Cabe hacer notar como el signo de (=) que se presenta en la ecuación.

Como anteriormente se definieron las funciones convexas y cóncavas, dicha función será estrictamente cóncava o convexa siempre y cuando la desigualdades de (≥) o (≤) se conviertan en (>) o (<) en las ecuaciones antes descritas en cada ejemplo de las gráfica, y cuando dichas ecuaciones son llevadas a su máximo límite que es la igualdad estas serán tanto cóncavas y convexas al mismo tiempo, como en el ejemplo de la gráfica anterior.

Ahora demostremos, que $f(x)$, es una función tanto convexa como cóncava a la vez, sea $f(x) = x+3$, y los valores de $x' = 2$, y $x'' = 5$, sabemos que $f(x') = 5$, y $f(x'') = 8$, los aplicamos a la ecuación para su interpretación geométrica con un valor de $\alpha = 0.6$.

$$f[0.6(5) + (1\text{-}0.6)2] = 0.6(8) + (1\text{-}0.6)5$$

$$f(3.8) = 6.8$$

$f(3.8) = 6.8$ por lo tanto, la función $f(x) = x+3$, puede ser interpretada tanto como convexa y cóncava a su vez, puesto que el segmento rectilíneo analizado de x' y x'' forma parte de la función misma.

De igual forma si analizamos, la segunda derivada de la función nos quedaría como:

$$f(x) = x + 3.$$

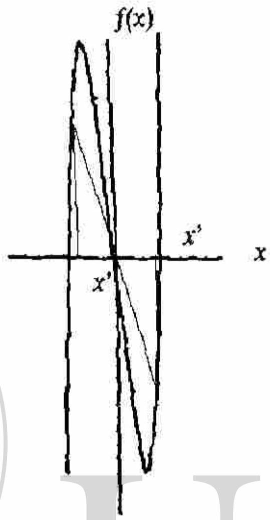
$$df(x)/dx = 1$$

$$d^2 f(x)/dx^2 = 0, \text{ por lo tanto } d^2 f(x)/dx^2 = 0.$$

Y por lo tanto, queda demostrado que si es una función que es convexa y cóncava a la vez, para cualquier valor de x.

Ahora, nos toca analizar cuando una función que no es convexa ni cóncava. Veamos la siguiente función $f(x) = x^3 - 12x$, en su forma gráfica:

Ejemplo de una función no convexa ni cóncava



Como podrá apreciar el lector, en la gráfica las ecuaciónes antes descritas, sólo cumplirián con una parte del segmento rectilíneo, es decir solo serián verdaderas en una parte, y para poder definir la $f(x)$, como convexa o cóncava, es necesario que sea verdaderas las ecuaciones para todo valor de α. Por lo tanto esta función no es convexa ni cóncava.

Ya que estamos hablando del segmento rectilíneo, definamoslo ahora.

Definición.- El **segmento rectilíneo** que une cualquiera dos puntos $(X_1', X_2', X_3', \ldots, X_m')$ y $(X_1'', X_2'', X_3'', \ldots, X_m'')$ es la colección de puntos

$$(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_m) = [\alpha X_1'' + (1-\alpha) X_1', \alpha X_2'' + (1-\alpha) X_2', \alpha X_3'' + (1-\alpha) X_3', \ldots, \alpha X_m'' + (1-\alpha) X_m']$$

tales que $0 \leq \alpha \leq 1$.

Un segmento rectilíneo, en un espacio de m-dimensiones, puede ser generalizado en un ejemplo de tres dimiensiones, supongamos que tenemos los puntos $(X_1', X_2', X_3') = (3,2,6)$, y $(X_1'', X_2'', X_3'') = (9,5,10)$; entonces el segmento rectilíneo que los une es la colección de puntos

$$(X_1, X_2, X_3) = [9\alpha + 3(1-\alpha), 5\alpha + 2(1-\alpha), 10\alpha + 6(1-\alpha)],$$

en donde $0 \leq \alpha \leq 1$.

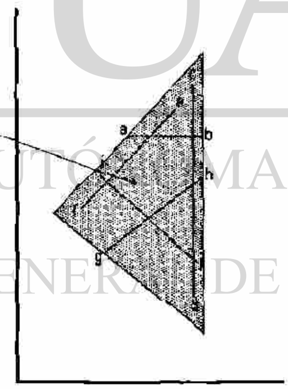
Una vez que se han definido los conceptos anteriores, estamos preparados para definir el concepto relacionado de **conjunto convexo**. Así, si $f(X_1, X_2, X_3, ..., X_m)$ es una función convexa, los puntos que se encuentren por arriba de la función e inclusive los puntos formados por la función misma, formarán un conjunto convexo. De igual forma, si $f(X_1, X_2, X_3, ..., X_m)$ es una función cóncava, los puntos que se encuentren por abajo de la función, incluyendo los puntos que forman la función misma, también será un **conjunto convexo.**

Así pues, los conjuntos convexos, estarán formados por todos los puntos que forman una función convexa o que esten por arriba de dicha función, así como aquellos puntos que formen una función cóncava o que se encuentren por abajo de dicha función serán considerados como un conjunto convexo, para ser un poco más precisos lo definiremos como:

Definición.- Un **conjunto convexo** es una colección de puntos tales que, para cada par de puntos de la colección, el segmento rectilíneo completo que une estos dos puntos también forman parte de dicha colección.

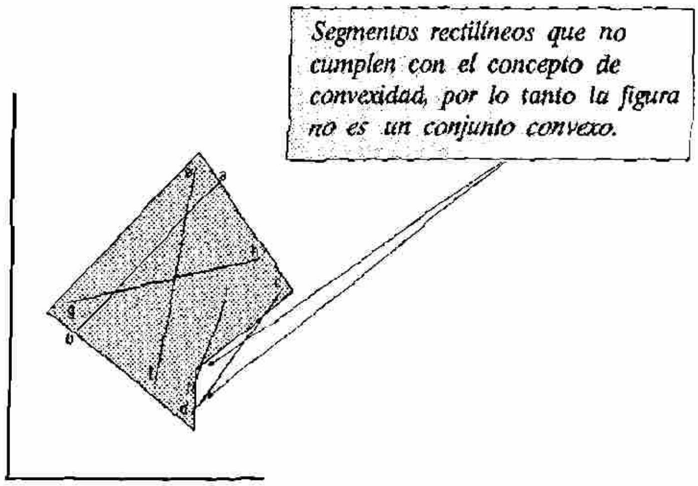
Aqui se presenta una figura de un conjunto convexo.

El conjunto convexo esta formado por el área sombreada de la figura.



Cabe hacer notar que en esta gráfica, cualquier colección de puntos que unen los segmentos rectilíneos, marcados en ella, absolutamente todos se encuentran dentro del conjunto convexo.

Ahora veamos una figura que no es convexo.



Es necesario hacer notar que no todos los segmentos rectilíneos, se encuentran contenidos dentro del área sombreada, y por ello no se puede considerar a la figura como un conjunto convexo.

Para finalizar enunciaremos el siguiente teorema de programación lineal.

Toda solución factible de un problema de programación lineal deberá estar contenida dentro de un conjunto convexo, y su solución óptima será encontrada en los límites o vértices de dicho conjunto convexo, incluyendo siempre al menos un vértice.

BIBLIOGRAFÍA.

Bibligrafía

Autor: Charles A. Gallagher & Hugh J. Watson.
Métodos cuantitativos para la toma de decisiones.
Editorial: Mc. Graw-Hill
Fecha de publicación: 1982.

Autor: Frederick S. Hillier & Gerald J. Lieberman.
Introducción a la investigación de operaciones.
Editorial: Mc Graw-Hill
Fecha de publicación: 1989.

Autor: Herbert Moskowitz & Gordon P. Wrught.
Investigación de operaciones.
Editorial: Prentice Hall PHH.
Fecha de publicación: 1985.

Autor: James E. Shamblin & G. T. Stevens.
Investigación de operaciones.
Editorial: Mc Graw-Hill
Fecha de publicación: 1975.