Modelos aleatorios discretos en el continuo de la relatividad especial

Javier Almaguer Martínez

Universidad Autónoma de Nuevo León
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

30 de Enero de 2015

Resumen

La modelación matemática basada en principios físicos es una tarea que presenta retos interesantes. Algunas de los principios más importantes de la física son expresados mediante ecuaciones diferenciales. La solución de estas ecuaciones son campos escalares continuos, piense por ejemplo en las ecuaciones de onda y difusión. Sin embargo se sabe que la materia, además de ser intrínsecamente discreta, posee estados de movimiento que han de ser compatibles con los postulados del espacio-tiempo relativista. Un modelo aleatorio discreto representa un punto de partida para llevar a cabo la transición de lo discreto al continuo sin sacrificar los principios relativistas.

Dualidad

Discreto $\leftrightsquigarrow$ Continuo

Dualidad cuántica

Partícula $\leftrightsquigarrow$ Onda

Ecuación de Schrödinger

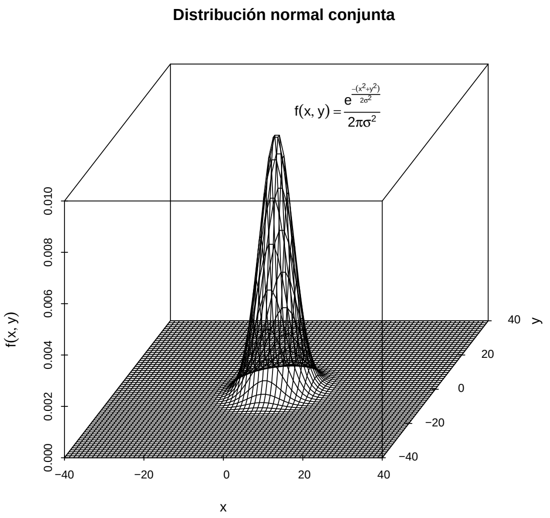
Ejemplo. La ecuación fundamental de la mecánica cuántica

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t,x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(t,x) + V(x)\Psi(t,x)$$

Partícula $\leftrightsquigarrow$ Campo de Probabilidad

$$\Psi^*(t,x)\Psi(t,x)dx = \mid \Psi(t,x) \mid^2 dx = P(t,x)dx$$

Partícula libre Gaussiana, $V(x) = 0$



Incertidumbre⇜⇝Fluctuación

$$\langle Q(x,p)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(t,x) Q\left(x, \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}\right) \Psi(t,x) dx$$

$$\Delta Q = \sqrt{\langle (Q - \langle Q\rangle)^2\rangle}$$

Regreso a lo discreto $\leftrightsquigarrow$ Principio de incertidumbre de Heisenberg

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

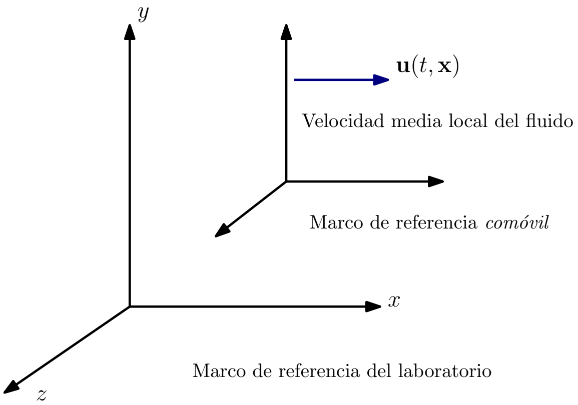
Mecánica del continuo ⇒ Ecuaciones diferenciales

Ejemplo. En dinámica de fluidos, la *conservación de la materia* se expresa mediante la *ecuación de continuidad*:

$$\frac{\partial n(t,\mathbf{x})}{\partial t} + \nabla \cdot [n(t,\mathbf{x})\mathbf{u}] = 0$$

$\mathbf{J}(\mathbf{t},\mathbf{x}) = n(t,\mathbf{x})\mathbf{u}(t,\mathbf{x}) =$ Flujo de partículas
$n(t,\mathbf{x}) =$ densidad del número de partículas
$\mathbf{u}(t,\mathbf{x}) =$ velocidad promedio de las partículas en un elemento de volumen d^3x centrado en $\mathbf{x}$ al tiempo t.

Sistemas de referencia



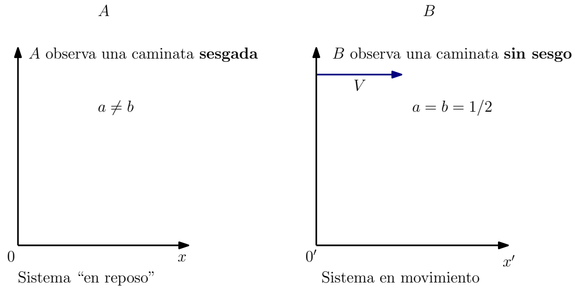
Mecánica discreta $\Rightarrow$ Ecuaciones en diferencias finitas, relaciones de recurrencia, mapas discretos

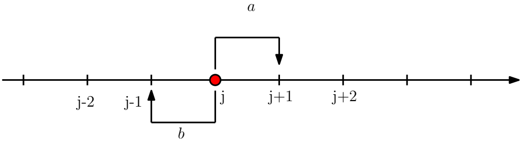
Qué es lo correcto?

Mecánica discreta $\approx$ Mecánica continua?

Mecánica continua $\approx$ Mecánica discreta?

Un paseo aleatorio en el espacio-tiempo





Relación de recurrencia

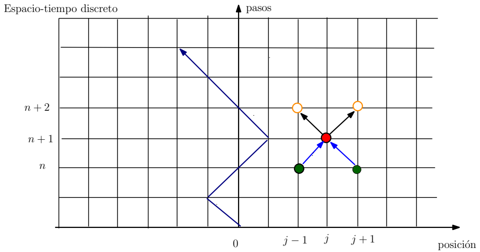
$$P_{n+1}(j) = aP_n(j-1) + bP_n(j+1)$$

Variables discretas

$n \rightarrow$ número de pasos o transiciones: $\{n = 0, 1, 2, \cdots\}$

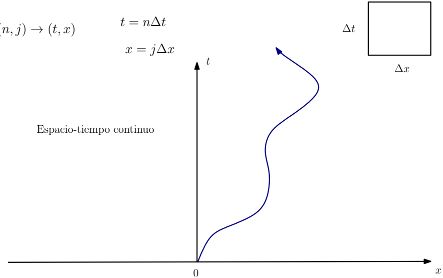
$j \rightarrow$ posición de la partícula: $\{j = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$

Ley de escalamiento



$(n,j) \to (t,x)$ $\quad t = n\Delta t$

$x = j\Delta x$



Observador A: Ecuación de difusión con "drift"

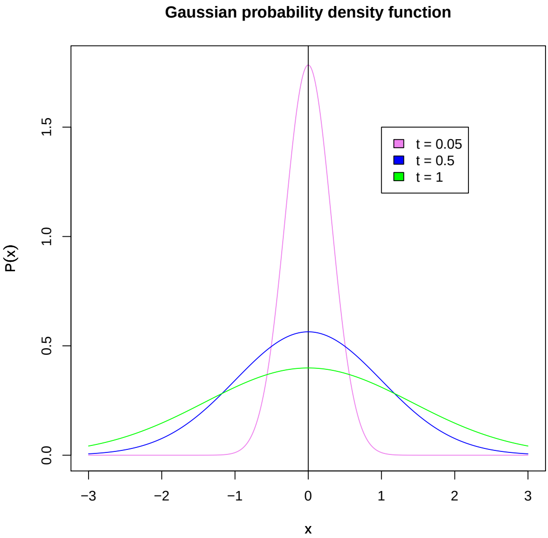
$$\frac{\partial P(t,x)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 P(t,x)}{\partial x} - V\frac{\partial P(t,x)}{\partial x}$$

$$D = \lim_{\Delta t, \Delta x \to 0}\left[\frac{1}{2}\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}\right]$$

$$V = \lim_{\Delta t, \Delta x \to 0}\left[(a-b)\frac{\Delta x}{\Delta t}\right]$$

$$a \approx b$$

Para el obseravdor B: Difusión pura ($V = 0$)



Espacio-tiempo relativista: Transformaciones de Lorentz

$$t' = \gamma_v \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) \; ; \quad x' = \gamma_v \left(x - vt \right) \; ; \quad y' = y \; ; \quad z' = z$$

$$\gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Difusión no covariante relativista

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial P'}{\partial t'} - v\frac{\partial P'}{\partial x'} &= D\left[\nabla^2 P' + (\gamma_v - 1)\frac{\partial^2 P'}{\partial x'^2}\right] \\
&- \frac{v}{c^2}\gamma_v D\left[2\frac{\partial^2 P'}{\partial t' \partial x'} - \frac{v}{c^2} + \frac{\partial^2 P'}{\partial t'^2}\right]
\end{aligned}
$$

Modelo de Kac-Goldstein

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P_+}{\partial t} + v\frac{\partial P_+}{\partial x} &= \mu(P_- - P_+) \\
\frac{\partial P_-}{\partial t} - v\frac{\partial P_-}{\partial x} &= \mu(P_+ - P_-)
\end{aligned}$$

Ecuación de onda disipativa

$$\frac{\partial^2 P(t,x)}{\partial t^2} + \frac{1}{T}\frac{\partial P(t,x)}{\partial t} = v^2\frac{\partial^2 P(t,x)}{\partial x^2}$$

Conexión cuántico-difusiva

(MOSTRAR TABLA)

Referencias

1. Wall, Frederick T., *Discrete mechanics and special relativistic random walks*, Proc. Natl. Acad. Sci, 85 (1988) 2884-2888.
2. Almaguer, J. and Larralde, H., *A relativistically covariant random walk*, J. Stat. Mech. (2007) P08019-1-P08019-11.
3. Dunkel, Jörn and Hänggi, Peter, *Relativistic Brownian motion*, Physics Reports 471 (2009) 1-73.
4. David J. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics*, Pearson Prentice Hall, Second Edition, USA, 2005.
5. Richard L. Liboff, *KINETIC THEORY. Classical, Quantum, and Relativistic Descriptions*, Prentice Hall, USA, 1990.

"THIS IS THE END"

Gracias por su atención!