2DO. FORO DE DIVULGACIÓN CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA

Procesos aleatorios en modelación matemática

F. J. Almaguer Martínez
FCFM-UANL
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Universidad Autónoma de Nuevo León
San Nicolás de los Garza, Nuevo León, México

R. Soto-Villalobos
FCT-UANL
Facultad de Ciencias de la Tierra
Universidad Autónoma de Nuevo León
Ex-Hacienda de Guadalupe, Linares, Nuevo León, México

F. G. Benavides-Bravo
ITNL
Instituto Tecnológico de Nuevo León
Guadalupe, Nuevo León, México

Resumen: Repasamos brevemente un modelo simple de caminata aleatoria para modelar el comportamiento colectivo de muchas partículas y el problema asociado con la causalidad de la ecuación de difusión obtenida en el límite difusivo.

Palabras clave: Caminatas aleatorias, Ecuación de Difusión, Relatividad Especial.

Introducción

En sistemas formados por muchas partículas, las interacciones entre los agentes involucrados y el medio ambiente originan dinámicas colectivas a partir de la cual emergen patrones que no son resultado de la simple suma de su comportamiento individual. Este es el paradigma de la no linealidad. Dada la imposibilidad de representar en forma exacta las mismas condiciones iniciales y de obtener con certeza absoluta la trayectoria seguida por cada agente y la futilidad, llegado el caso, de contar con todas y cada una de las ecuaciones diferenciales que describen la dinámica de todo el sistema (aun si fuera posible reconstruir la trayectoria exacta de cada partícula, dicha trayectoria jamás volvería a repetirse, haciendo imposible cualquier predicción), es imperioso utilizar modelos probabilísticos para obtener información valiosa acerca de las propiedades y el comportamiento global, macroscópico, del sistema.

Caminata aleatoria simple

Sin duda, uno de los modelos estocásticos no triviales más simples para modelar fenómenos de transporte es la llamada caminata aleatoria simple [1]. En dicho modelo, una partícula se desplaza en una red unidimensional formada por sitios o nodos igualmente espaciados. Inicialmente la partícula se encuentra en algún sitio de la red y en cada unidad de tiempo se desplaza a cualquiera de sus sitios vecinos: al de la derecha con probabilidad a y al de la izquierda con probabilidad b. La probabilidad de localizar a la partícula en el sitio j, después de $n+1$ pasos o unidades de tiempo, satisface la relación de recurrencia o ecuación maestra

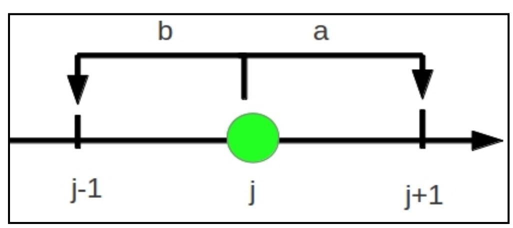

FIGURA 1. Una caminata aleatoria simple: En un instante dado de tiempo una partícula se puede desplazar al sitio $j+1$ con probabilidad a o al sitio $j-1$ con probabilidad b.

$$p_{n+1}(j) = ap_n(j-1) + bp_n(j+1) \qquad (1)$$

La ecuación (1) representa un proceso que evoluciona en el tiempo de acuerdo con una dinámica Markoviana: predecir el estado futuro de un sistema sólo depende de su estado actual.

Límite difusivo

Si la distancia entre los nodos de la red es Δx y el tiempo entre saltos es Δt, la ecuación discreta (1), se puede transformar en una ecuación diferencial parcial en tiempo y espacio continuos mediante las relaciones de escalamiento $t = n\Delta t, x = j\Delta x$ y $p_{n+1}(j \pm 1) = P(t + \Delta t, x \pm \Delta x)$. Un desarrollo de P en serie de Taylor hasta primer orden en t y hasta segundo orden en x transforma (1) en la ecuación de difusión con "*drift*"

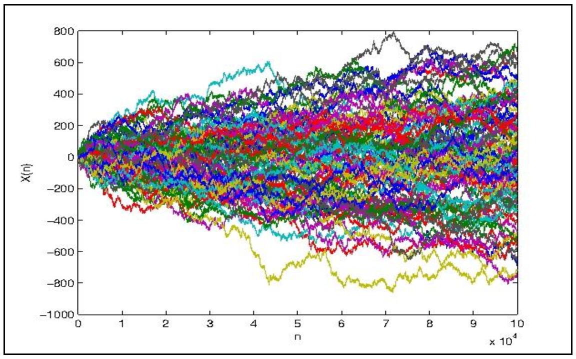

Figura 2. Una simulación de 100 caminatas aleatorias simétricas, $a = b = 0.5$, con 10000 pasos cada una. Observe como el centro de la distribución permanece en cero y el grado de dispersión es del orden de $\sigma \approx \sqrt{10000} = 100$. La dispersión o fluctuación de la posición final $x(n)$ final del promedio en un proceso de difusión típico es $\sigma \approx \sqrt{n}$ o bien $\sigma \approx \sqrt{t}$.

$$\frac{\partial P(t,x)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 P(t,x)}{\partial x^2} - v\frac{\partial P(t,x)}{\partial x} \qquad (2)$$

donde el coeficiente de difusión D y la constante v están dados por $D = \lim_{\Delta t, \Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t}$ y $v = \lim_{\Delta t, \Delta x \to 0} (a-b)\frac{\Delta x}{\Delta t}$. Si $a > b$ se tendrá un movimiento colectivo global a la derecha. A un tiempo dado, la constante D es una medida de la intensidad de las fluctuaciones o dispersión de la partícula con respecto al punto inicial de partida, de hecho, suponiendo como distribución inicial una delta de Dirac $P(0,x) = \delta(x)$ (la partícula con probabilidad 1 se encuentra inicialmente en $x = 0$) la solución de (1), en un sistema de referencia inercial que se mueva a la derecha con la velocidad v, es la densidad de probabilidad Gaussiana

$$P(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{\frac{-x^2}{4Dt}} \qquad (3)$$

con media y varianza dadas por $\langle x \rangle = 0$ y $\sigma^2 \equiv 2Dt$, respectivamente.

Difusión relativista

A pesar de que (2) y (3) en la práctica han sido, y continúan siéndolo, extensamente utilizadas como modelos matemáticos para explicar una enorme diversidad de situaciones fenomenológicas (desde la conducción de calor [2]

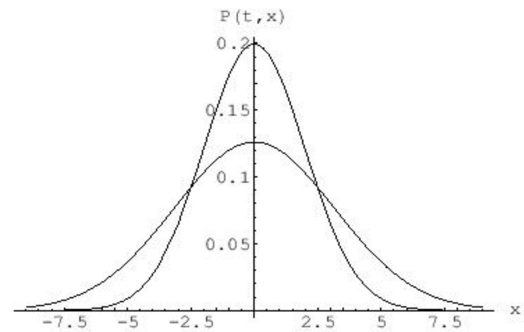

Figura 3. Grafica de la solución Gaussiana (3) con $D = 1$ en dos instantes de tiempo, $t = 2$ (con el máximo más grande en el origen) y $t = 5$.

y el transporte de electrones [3], hasta la difusión de moléculas en membranas biológicas [4]), desde un punto de vista formal, teórico, presentan varias inconsistencias. Una de ellas, de gran interés en física, es la no compatibilidad con los postulados de la relatividad especial: Una ecuación parabólica como (2), y por consiguiente el proceso aleatorio microscópico subyacente (1) que la origina, permite soluciones Gaussianas que no tienen soporte compacto y por lo tanto dejan la puerta abierta a movimientos superlumínicos. Además, la ecuación no es invariante en la forma ante transformaciones de Lorentz. Es decir, un observador inercial S', en el sistema de coordenadas $(t', x' y', z')$, que se mueve con velocidad constante V a la derecha, a lo largo del eje x, del observador inercial S, en el sistema de coordenadas (t, x, y, z), al reescribir (3) en su propio sistema , para modelar y obtener las propiedades de una dinámica difusiva, estará en desacuerdo con lo descrito por el observador S. Y ello por lo siguiente: las mediciones de los dos observadores inerciales están conectadas mediante las ecuaciones de transformación de Lorentz

$$\begin{aligned} x_0' &= \gamma(x_0 - x\beta) \\ x' &= \gamma(x - x_0\beta) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \qquad (4)$$

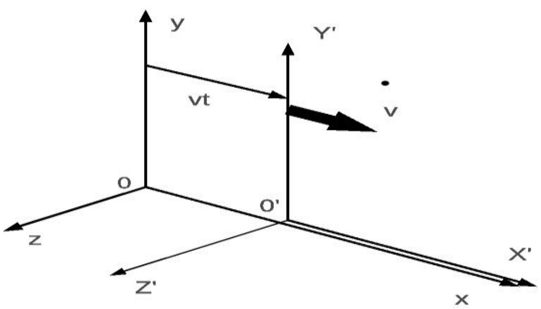

Figura 4. Dos sistemas de referencia inerciales en movimiento relativo con velocidad V a lo largo del eje común $x - x'$.

con el factor de Lorentz definido como $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$ y el "*boost*" a la derecha $\beta = V/c$. De acuerdo con (2) y (4), el observador S' describirá una "difusión" completamente diferente

$$\frac{\partial P'}{\partial t'} - V\frac{\partial P'}{\partial x'} = D\left[\nabla^2 P' + (\gamma - 1)\frac{\partial^2 P'}{\partial x'^2}\right] - \frac{V}{c^2}\gamma D\left[2\frac{\partial^2 P'}{\partial t'\partial x'} - \frac{V}{c^2} + \frac{\partial^2 P'}{\partial t'^2}\right] \qquad (5)$$

Lo anterior es un ejemplo de la inconsistencia en la forma de un modelo de transporte parabólico, como el representado por la ecuación de difusión. En situaciones teórico-experimentales, como las encontradas en física de altas energías y física de plasmas, donde las velocidades de las partículas ya no justifican la aproximación Galileana, es pertinente buscar un marco de modelamiento teórico libre de inconsistencias que incorpore las correcciones relativistas. En un modelo de caminata aleatoria relativista se tiene que tomar en cuenta el hecho de que ahora la partícula esta constreñida a moverse en el interior del cono de luz relativista como consecuencia de que no puede superar la velocidad de la luz, así, su densidad de probabilidad asociada debe de tener un soporte compacto en el interior de una esfera de radio c.

Conclusiones

Existen algunos modelos aleatorios de transporte relativista relativamente recientes [5], [6], [7] sin embargo el problema de modelar sistemas de muchos cuerpos, con dinámicas aleatorias y/o caóticas, que además tomen en cuenta los postulados de la relatividad especial sigue siendo un problema abierto, fundamental, de amplio interés en física y atractivo desde el punto de vista matemático y computacional.

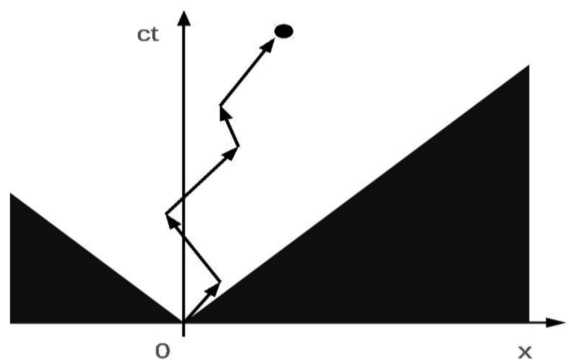

Figura 5. Una partícula en caminata aleatoria en el interior del cono de luz relativista en el plano $ct - x$. Las fronteras de la caja son $ct = x$ y $ct = -x$. Los estados accesibles de la partícula se encuentran en el interior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 < c^2t^2$

Referencias

[1] G. H. Weiss, *Aspects and applications of the random walk*, North-Holland, The Netherlands, 1994.

[2] Liqiu Wang, Xuesheng Zhou, Xiaohao Wei, *Heat Conduction: Mathematical Models and Analytical Solutions*, Springer, Germany, 2010.

[3] V. M. Zhdanov, *Transport Processes in Multicomponent Plasma*, CRC Press, USA, 2002.

[4] Howard C. Berg, Random Walks in Biology, Princeton University Press, USA, 1993.

[5] J. Almaguer, H. Larralde, *A relativistically covariant random walk*, J. Stat. Mech. (2007)P08019.

[6] Relativistic diffusion processes and random walks models, Phys. Rev. D, 75, 043001 (2007).

[7] Alberto Saa, Roberto Venegeroles, Relativistic Weierstrass random walk, arXiv:1007.3314, 2010.

Autores

Francisco Javier Almaguer Martinez

Efectuó estudios de Lic. en Física en la FCFM de la UANL y un Doctorado en Ciencias con especialidad en Física en la UAEM, en Cuernavaca. Actualmente es Profesor-Investigador de Tiempo Completo en la FCFM de la UANL. Es colaborador del Cuerpo Académico *Sistemas Complejos: Teoría y Simulación* de la FCFM. Las LGAC que cultiva son: Física Estadística de Sistemas Complejos, Teoría y Simulación de Procesos Aleatorios.

Email: almagerjavier@gmail.com, Pedro de Alba s/n, Cd. Universitaria, San Nicolás de los Garza, Nuevo León, México.

Roberto Soto Villalobos Realizó estudios de Licenciatura en Matemáticas en la FCFM de la UANL y estudios de Maestría en Ciencias en la FCT de la UANL, actualmente se encuentra realizando estudios de doctorado en Ciencias con Orientación en Matemáticas en la FCFM de la UANL. Pertenece al Cuerpo Académico de *Sistemas Complejos: Teoría y Simulación*. Las LGAC que cultiva son: Modelado matemático y aplicaciones mediante sistemas complejos, Dinámica y equilibrio de sistemas complejos, Búsqueda heurística y fenómenos colectivos. Actualmente, y desde 1997, labora como profesor de Tiempo Completo en la Facultad de Ciencias de la Tierra de la UANL.

Email: robsotov@fct.uanl.mx, roberto.sotovl@uanl.edu.mx, Domicilio conocido, Carretera a Cerro Prieto Km. 8, Ex-Hacienda de Guadalupe, Linares, Nuevo León México.

Francisco Gerardo Benavides Bravo Efectuó estudios de Lic. en Matemáticas en la FCFM de la UANL y de Maestría en Ciencias, en Matemática Educativa, en el CINVESTAV del IPN. Actualmente desarrolla estudios de doctorado en Ciencias con Orientación en Matemáticas en la FCFM de la UANL. Pertenece al Cuerpo Académico *Automatización y Procesos Robóticos* y es colaborador en el Cuerpo Académico de *Sistemas Complejos: Teoría y Simulación*. Las LGAC que cultiva son: Modelado matemático y análisis de heurísticas para sistemas Dinámicos. Es docente adscrito del Instituto Tecnológico de Nuevo León.

Email: fgbenavid@gmail.com, Av. Eloy Cavazos 2001 Col. Tolteca Cd. Guadalupe Nuevo León México.