

**UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON**  
**FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA**  
**Y ELECTRICA**



**DISEÑO DE ALGORITMOS DE CONTROL**  
**PARA SISTEMAS MULTIMAQUINA**

**TESIS**

**PARA OBTENER EL GRADO DE**  
**MAESTRO EN CIENCIAS DE LA INGENIERIA ELECTRICA**  
**CON ESPECIALIDAD EN CONTROL**

**PRESENTA**

**FRANCISCO HUMBERTO FLORENZANO LARA**

**SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N. L.**

**ENERO DEL 2002**



TM

25853

.M2

FIME

2002

F5



1020147048

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA  
Y ELECTRICA



DISEÑO DE ALGORITMOS DE CONTROL  
PARA SISTEMAS MULTIMAQUINA

# TESIS

PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRO EN CIENCIAS DE LA INGENIERIA ELECTRICA  
CON ESPECIALIDAD EN CONTROL

PRESENTA

FRANCISCO HUMBERTO FLORENZANO LARA

SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N. L.

ENERO DEL 2002

0150-97660

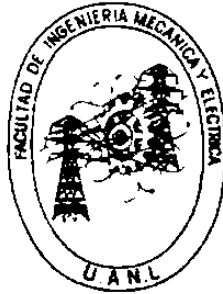
TM  
25853  
.M2  
FINE  
2002  
F5



FONDO  
TESIS

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEON**

**FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA  
Y ELECTRICA**



**DISEÑO DE ALGORITMOS DE CONTROL  
PARA SISTEMAS MULTIMAQUINA**

**TESIS**

**PARA OBTENER EL GRADO DE**

**MAESTRO EN CIENCIAS DE LA INGENIERIA ELECTRICA CON  
ESPECIALIDAD EN CONTROL**

**PRESENTA**

**FRANCISCO HUMBERTO FLORENZANO LARA**

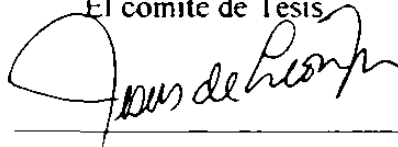
**SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N.L.**

**ENERO DEL 2002**

**UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON**  
**FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA**  
**DIVISION DE ESTUDIOS DE POSTGRADO**

Los miembros del comite de tesis recomendamos que la tesis **“DISEÑO DE ALGORITMOS DE CONTROL PARA SISTEMAS MULTIMAQUINA”** realizada por Francisco Humberto Florenzano Lara sea aceptada para su defensa como opción al Grado de Maestro en Ciencias de la Ingenieria Electrica con especialidad en Control

El comite de Tesis



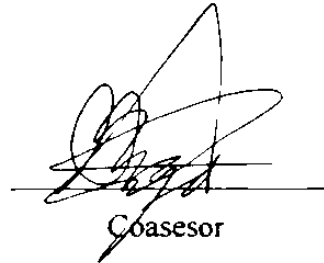
Asesor

Dr Jesus de Leon Morales



Coasesor

Dr Salvador Acha Daza



Coasesor

Dr Rene Galindo Orozco



Vo Bo

M C Roberto Villarreal Garza

Division de Estudios de Postgrado

# Dedicatoria

A Dios por darme la oportunidad de vivir y por permitirme dar un paso mas en mi carrera.

A mis padres Humberto Florenzano y Rosa Lara por creer en mi y apoyarme siempre.

A mis Hermanas Giannia y Erika Florenzano

Al Dr Jesus de Leon por creer en mi y por su apoyo y confianza

A mis amigos Saul Rodriguez, Oliverio Anaya, Huemak Rivera, Irma Valadez y Angeles Carrera

A Carmen Torre por ser muy especial en mi vida

Enero del 2002



# Agradecimientos

Al CONACYT por su apoyo economico en la beca credito y el proyecto 26498-A titulado "Diseño de Algoritmos de Control para Sistemas Multimaquina"

Al Dr Rene Galindo y al Dr Salvador Acha por sus valiosos comentarios y sugerencias

A todos los profesores del Programa Doctoral especialmente al Dr Jesus de Leon, al Dr Joaquin Collado Moctezuma, al Dr Krishna K Busawon, al Dr Juan M Ramirez Arredondo, al Dr Mikhail V Basin, al Dr Oscar Leonel Chacon Mondragon, y al Dr Ernesto Vazquez Martinez

A todos mis compañeros del DIE, Angeles Carrera, Irma Valadez, Cesar Guerra, Gustavo Perez, David Diaz, Oscar Huerta, Mario Villanueva

# Resumen

## Diseño de Algoritmos de Control para Sistemas Multimáquina

Publicación No. \_\_\_\_\_

Francisco Humberto Florenzano Lara  
Universidad Autónoma de Nuevo León  
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica  
Profesor Asesor: Dr. Jesús de León Morales  
Diciembre, 2001

En este trabajo se presentan técnicas de control no lineal las cuales son aplicadas a diferentes sistemas eléctricos de potencia. El primer sistema corresponde a un generador síncrono conectado a una barra infinita. El segundo sistema representa un modelo multimáquina propuesto por la IEEE, el cual consta de tres generadores conectados a nueve nodos. Finalmente, un sistema reducido de la red eléctrica de Baja California Norte es considerado.

Para el primer sistema, se hace uso del método de la Variedad Integral para reducir el modelo del generador de quinto orden a un modelo de tercer orden, mediante el cual es utilizado para diseñar los controladores. Estos controladores, se aplican al modelo de quinto orden.

Un esquema de control basado en la Aproximación de Álgebra Diferencial a Modos Deslizantes y su extensión al caso multivariable es presentado. Además, se realiza un estudio comparativo entre las técnicas Retroalimentación Linealizante, Modos Deslizantes y el esquema propuesto, las cuales son aplicadas a un generador síncrono conectado a una barra infinita representado por un modelo de quinto orden.

Por otra parte, se realiza una comparación entre la técnica de Retroalimentación Linealizante y la técnica propuesta para el caso multimáquina utilizando los sistemas de la IEEE y el de Baja California Norte.

Finalmente se presentan resultados en simulación para mostrar la eficiencia de los diferentes esquemas de control obtenidos a partir de los sistemas eléctricos de potencia considerados.

# Notación

$\in$	Pertenece a
$ $	Tal que
$ \cdot _p$	Norma $p$
$\lambda_{\min}$	Valor singular mínimo
$\lambda_{\max}$	Valor singular máximo
$\mathbb{R}$	Conjunto de los números reales
$\mathbb{R}^n$	Espacio vectorial de dimensión $n$ con componentes reales
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Campo de las matrices de dimensión $n \times m$ con componentes reales
$A^T$	Matriz transpuesta $A$
$A^{-1}$	Matriz inversa de $A$
$L'_{\mathfrak{h}}$	Derivada de Lie
$ad_{\mathfrak{g}}$	Corchete de Lie

# Índice

## **1) Introducción**

1 1) Organización de la Tesis	2
-------------------------------	---

## **2) Modelo del Generador Síncrono**

2 1) Suposiciones Básicas de Modelado	4
2 2) Ecuaciones de Park	5
2 3) Dinámica de Movimiento	7
2 4) Modelo Simplificado solo con Excitación	8
2 5) Modelo del Generador Síncrono Conectado a una Barra Infinita	11
2 6) Modelo del Generador Síncrono para el Sistema Multi-Máquina	15

## **3) Reducción del Modelo del Generador Síncrono - Bus Infinito**

3 1) Variedad y Variedad Integral	20
3 2) Modelo del Generador Síncrono de Tercer Orden	21
3 3) Conclusiones	23

## **4) Controladores**

4 1) Controladores para Sistemas de una Entrada y una Salida	24
4 1 1) Linealización Exacta Vía Retroalimentación	25
4 1 2) Álgebra Diferencial	27
4 1 3) Modos Deslizantes	28
4 1 4) Aproximación por Álgebra Diferencial a Modos Deslizantes	30

4.2) Controladores para Sistemas Multientradas, Multisalidas	34
4 2 1) Retroalimentacion Linealizante	34
4.2 1 1) Problema de Linealizacion Exacta del Espacio de Estado	35
4 2 2) Enfoque por Algebra Diferencial y Modos Deslizantes	38
<b>5) Aplicaciones a Sistemas Eléctricos de Potencia</b>	
5 1) Aplicacion al Generador Sincrono Conectado a una Barra Infinita	43
5 1 1) Controlador Basado en Retroalimentacion Linealizante	44
5 1 2) Controlador basado en Algebra Diferencial	46
5 1 3) Controlador basado en Modos Deslizantes	49
5 1 4) Controlador basado en la Aprox. por Algebra Diferencial a Modos Deslizantes	52
5 1 5) Conclusiones	54
5 2) Aplicacion al Sistema Multimaquina	57
5 2 1) Sistema Multimaquina de Tres Generadores y Nueve Nodos	57
5 2 1 1) Retroalimentacion Linealizante	61
5 2 1 2) Enfoque por Álgebra Diferencial y Modos Deslizantes	68
5 2 2) Sistema de Generacion de Baja California	74
5 2 2 1) Equivalente del Generador	75
5 2 2 2) Reduccion del Numero de Nodos	76
5 2 2 3) Desarrollo de Ecuaciones	77
5 2 2 4) Retroalimentacion Linealizante	78
5 2 2 5) Enfoque por Algebra Diferencial y Modos Deslizantes	83
5.2 3) Conclusiones	87
<b>Conclusiones y Trabajos Futuros</b>	89
<b>Apéndice A</b>	90
<b>Referencias</b>	93

# Índice de Figuras

Figura 2 1	Representacion del Circuito de una Maquina Sincrona	5
Figura 2 2	Devanados de la Maquina despues de la Transformacion de Park	6
Figura 2 3.	Generador Sincrono - Barra Infinita	11
Figura 2 4	Generador Sincrono - Barra Infinita Simplificado	12
Figura 5 1	Generador Sincrono - Barra Infinita Simplificado	43
Figura 5 2	Señal de salida del Generador Sincrono conectado a una Barra Infinita, (Retroalimentacion y Algebra Diferencial)	48
Figura 5 3	Señal de Control para el Generador Sincrono conectado a una Barra Infinita, (Retroalimentacion y Algebra Diferencial)	49
Figura 5 4	Señal de salida del Generador Sincrono conectado a una Barra Infinita, (Modos Deslizantes)	51
Figura 5 5	Señal de Control para el Generador Sincrono conectado a una Barra Infinita, (Modos Deslizantes)	51
Figura 5 6	Señal de salida del Generador Sincrono conectado a una Barra Infinita, (Aproximacion por Algebra Diferencial a Modos Deslizantes)	53
Figura 5 6 1	Señal de salida del Generador Sincrono conectado a una Barra Infinita, (Aproximacion por Algebra Diferencial a Modos Deslizantes)	55
Figura 5 7	Señal de Control para el Generador Sincrono conectado a una Barra Infinita, (Aproximacion por Algebra Diferencial a Modos Deslizantes)	53
Figura 5 7 1	Señal de Control para el Generador Sincrono conectado a una Barra Infinita, (Aproximacion por Algebra Diferencial a Modos Deslizantes)	55
Figura 5 8	Grafica Comparativa de las Señales de salida del Generador Sincrono conectado a una Barra Infinita	54
Figura 5 9	Sistema Multimaquina de 3 Generadores y 9 Nodos	57
Figura 5 10	Sistema Multimaquina de 3 Generadores y 3 Nodos	59



Figura 5 11 Señales de Salida para el Sistema Multimaquina, (Retroalimentacion Linealizante)	66
Figura 5 12 Velocidad Angular del Sistema Multimaquina, (Retroalimentacion Linealizante)	67
Figura 5 13 Voltaje Interno Transitorio del Sistema Multimaquina, (Retroalimentacion Linealizante)	67
Figura 5 14 Señales de Control para el Sistema Multimaquina, (Retroalimentacion Linealizante)	68
Figura 5 15 Señales de Salida para el Sistema Multimaquina, (Enfoque por Algebra Diferencial y Modos Deslizantes)	72
Figura 5 16 Velocidad Angular del Sistema Multimaquina, (Enfoque por Algebra Diferencial y Modos Deslizantes)	72
Figura 5 17 Voltaje Interno Transitorio del Sistema Multimaquina (Enfoque por Algebra Diferencial y Modos Deslizantes)	73
Figura 5 18 Señales de Control para el Sistema Multimaquina, (Enfoque por Algebra Diferencial y Modos Deslizantes)	73
Figura 5 19 Red electrica. con tres generadores y tres cargas	74
Figura 5 20 Equivalente del generador	75
Figura 5 21 Red equivalente	77
Figura 5 22 Señales de Salida del Sistema Multimaquina de Baja California, (Retroalimentacion Linealizante)	81
Figura 5 23 Velocidad Angular del Sistema Multimaquina de Baja California, (Retroalimentacion Linealizante)	81
Figura 5 24 Voltaje Interno Transitorio del Sistema Multimaquina de Baja California, (Retroalimentacion Linealizante)	82
Figura 5 25 Señales de Control para el Sistema Multimaquina de Baja California, (Retroalimentacion Linealizante)	82

Figura 5 26	Señales de Salida del Sistema Multimaquina de Baja California. (Enfoque por Algebra Diferencial y Modos Deslizantes)	86
Figura 5 27	Velocidad Angular del Sistema Multimaquina de Baja California, (Enfoque por Algebra Diferencial y Modos Deslizantes)	86
Figura 5 28	Voltaje Interno Transitorio del Sistema Multimaquina de Baja California, (Enfoque por Algebra Diferencial y Modos Deslizantes)	87
Figura 5 29	Señales de Control del Sistema Multimaquina de Baja California. (Enfoque por Algebra Diferencial y Modos Deslizantes)	87

# Índice de Tablas

Tabla 5 1	Parametros del Generador Sincrono	43
Tabla 5 2	Parametros de los Generadores Sincronos (Sistema Multimaquina IEEE)	58
Tabla 5 3	Valores de la matriz de admitancia nodal, $Y_{Nodal}$ (Sistema Multimaquina IEEE)	58
Tabla 5 4	Parametros de la matriz de la admitancia nodal, $Y_{Nodal}$ (Sistema Multimaquina IEEE)	59
Tabla 5 5	Parametros de los Generadores Sincronos (Sistema Multimaquina de Baja California Norte)	74
Tabla 5 6	Parametros de la matriz de admitancia nodal, $Y_{Nodal}$ (Sistema Multimaquina de Baja California Norte)	77

# Capítulo 1

## Introducción

La gran demanda de energía eléctrica tanto en el ambiente industrial como en el doméstico, ha requerido de mejores índices en cuanto a suministro y calidad de energía se refiere. Las constantes variaciones en el suministro de voltaje son en parte debidas a que los sistemas de generación de energía eléctrica son susceptibles a perturbaciones. Por esta razón, ha surgido la necesidad de diseñar sistemas de control sofisticados para poder mantener una generación de energía eléctrica constante. Las perturbaciones pueden ser desde un corto circuito en la red eléctrica, hasta una descarga atmosférica producida por una nube cargada sobre las líneas de transmisión, o una falla en uno de los generadores perteneciente al mismo sistema eléctrico.

Problemas como los mencionados pueden causar disturbios al sistema de generación, por ejemplo, en el caso de que un generador llegue a fallar, si no se cuenta con un buen sistema de control que sea capaz de descentralizar al sistema, es decir, que permita que cada generador sea controlado de manera independiente aun cuando estos estén interconectados entre sí, el nivel de energía producido se reduciría considerablemente, de ahí que esta tesis está enfocada al diseño de controladores para este tipo de sistemas. Los controladores permitirán mantener constante el voltaje en terminales del generador en base a la variación del campo magnético producido por el devanado de campo de cada generador.

Los controladores diseñados en esta tesis, están basados en las técnicas de Retroalimentación Linealizante, Álgebra Diferencial, Modos Deslizantes, Aproximación por Álgebra Diferencial a Modos Deslizantes para el caso de un Generador conectado a una Barra Infinita, Retroalimentación Linealizante y el Enfoque por Álgebra Diferencial y Modos Deslizantes para un Sistema Multimaquina.

Los Sistemas de Control No Lineal considerados son modelados por ecuaciones diferenciales ordinarias de dimension finita de la forma

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

$$y = h(x)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  denota el estado,  $x_0$  denota la condicion inicial  $u \in \mathbb{R}^m$  denota la entrada de control,  $y \in \mathbb{R}^s$  denota el vector de salida,  $f, g$  son campos  $h$  es una funcion suave, es decir una funcion continuamente diferenciable. Cuando  $m = s = 1$  se dice que el sistema es de *Una Entrada Una Salida*, cuando se habla de sistemas Multivariables se refiere a  $m = 1$  (*Multi Entradas*), o  $s > 1$  (*Multi Salidas*)

## 1.1 Organización de la Tesis

El Capitulo 2 de esta tesis esta enfocado al estudio del Generador Sincrono, donde se dan las suposiciones basicas de modelado de la maquina sincrona y se deduce un modelo de quinto orden del generador sincrono conectado a una barra infinita y un modelo de tercer orden del generador sincrono para el sistema multimaquina

En el Capitulo 3 se estudia el metodo de La Variedad Integral la cual es utilizada para la reduccion exacta del modelo de quinto orden del generador sincrono a un modelo de tercer orden, mediante este procedimiento se obtienen los algoritmos de control de una manera mas sencilla, los cuales son aplicados al modelo original

El Capitulo 4 esta enfocado al estudio de las diferentes tecnicas de control aplicadas para la obtencion de los algoritmos de control, para el sistema de una entrada, una salida (SISO) se comienza con la tecnica de Linealizacion Exacta Via Retroalimentacion de Estado, continuando con Algebra Diferencial, Modos deslizantes, Aproximacion por Algebra Diferencial a Modos Deslizantes. Para el sistema multientradas multisalidas (MIMO) solo se analizaron dos tecnicas, Retroalimentacion Linealizante y Enfoque por Algebra Diferencial y Modos Deslizantes

El Capitulo 5 presenta la aplicacion de las tecnicas de control estudiadas en el Capitulo 4, es decir, para el caso SISO, se obtendran los algoritmos de control para el Sistema del Generador Sincrono

conectado a una Barra Infinita aplicando cada una de las técnicas antes mencionadas. En el caso MIMO, se presentan dos ejemplos, el primero es un Sistema Multimaquina del WSCC (Western System Coordinating Council) de Tres Generadores y Nueve Nodos con tres cargas aplicadas en los nodos intermedios (Copyright 1977 Electrical Power Research Institute EPRI EL-0484 Power System Dynamic Analysis Phase I) (ver 21)0, y el segundo ejemplo está basado en el Sistema de Generación de Energía Eléctrica de Baja California, para estos dos ejemplos se obtienen los algoritmos de control por ambas técnicas ya mencionadas, los cuales permiten el control de cada generador por separado, es decir, cada controlador actúa de manera independiente evitando así que las perturbaciones que afectan a un generador no afecten al resto de generadores conectados a la red eléctrica.

Para finalizar, se presentan las conclusiones y las recomendaciones para trabajos futuros en esta área.



# Capítulo 2

## Modelo del Generador Síncrono

En este capítulo se presenta el modelo de la máquina síncrona que será utilizado posteriormente.

### 2.1 Suposiciones Básicas de Modelado

El modelo de la máquina síncrona se obtiene a partir del esquema básico de la Figura 2.1. El circuito del estator consiste de tres fases cada una representada con una bobina de armadura con voltajes  $v_a, v_b, v_c$  y corrientes  $i_a, i_b, i_c$ , respectivamente, donde el sentido corresponde a la condición de un generador que entrega potencia al sistema (ver [7]).

El grado de complejidad del modelo está relacionado con el número de circuitos del rotor que se consideran, y que depende del tipo de fenómenos a estudiar. Por lo general, se utiliza una representación con cuatro devanados para máquinas con rotor de polos lisos, los cuales son usualmente utilizados en turbinas de vapor, y tres devanados para máquinas con rotor de polos salientes que son utilizados en turbinas hidráulicas. Los circuitos del rotor están localizados a lo largo de los ejes directo y cuadratura, respectivamente. El eje directo o eje  $d$  coincide con el eje del devanado de campo (o excitación), denotado por  $f d$ . El eje cuadratura o eje  $q$  se encuentra a 90 grados adelante sobre la dirección de rotación como se muestra en la Figura 2.1. Los devanados  $1d$  y  $1q$  son los devanados de amortiguamiento en los ejes  $d$  y  $q$  respectivamente, los cuales son permanentemente cortocircuitados, mientras el devanado  $2q$  se toma para representar las corrientes parasitas en la máquina de polos lisos. En el devanado de campo el voltaje y la corriente son denotadas por  $v_{fd}$  e  $i_{fd}$ , respectivamente, y están orientados como se muestra en la Figura 2.1. Los otros devanados del rotor están cortocircuitados permanentemente. Esto es usualmente asumiendo que el campo magnético producido por un devanado tiene una distribución senoidal a lo largo del entrehierro de la máquina. Bajo estas suposiciones, y despreciando los efectos de magnetización transversal en el acero, dos devanados con ejes perpendiculares no están magnéticamente acoplados.

El movimiento del rotor está caracterizado por el ángulo eléctrico  $\theta_r$ , entre el eje directo del rotor y el eje de la armadura fase  $a$ , como se muestra en la Figura 2.1. Cuando la máquina gira a velocidad

nominal, se tiene:

$$\theta_r = \omega_0 t + \theta_r^0,$$

donde  $\theta_r^0$  es la posición inicial del rotor y  $\omega_0$  es la frecuencia angular nominal en  $rad/seg$ ; relacionando la frecuencia nominal  $f$  para una máquina de dos polos a través de:

$$\omega_0 = 2\pi f.$$

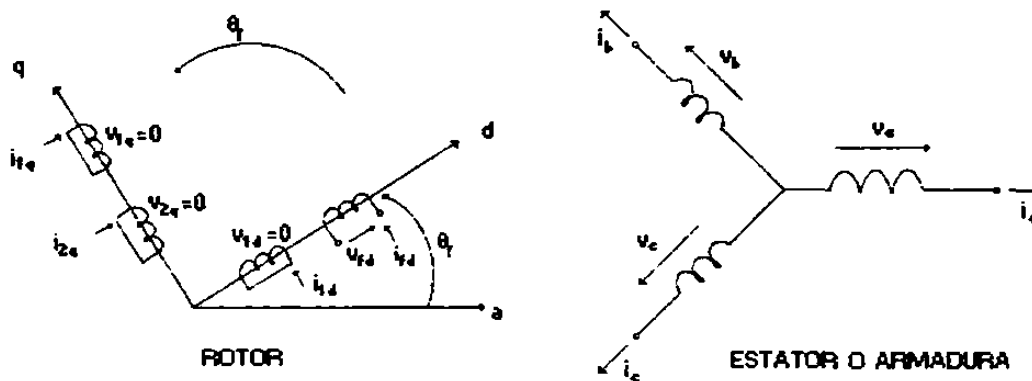


Figura 2.1: Representación del Circuito de una Máquina Síncrona

En la siguiente sección se presentan las ecuaciones de Park, las cuales se utilizan para transformar el sistema  $a, b, c$  en  $d, q, o$ .

## 2.2 Ecuaciones de Park

Una herramienta matemática esencial para el estudio de máquinas síncronas es la Transformación de Park. Esta transformación, entre otras que es posible utilizar, consiste en reemplazar los devanados  $a, b, c$  por tres devanados ficticios llamados  $d, q, o$ . Los devanados  $d$  y  $q$  rotan junto con el rotor de la máquina, con el devanado  $d$  alineado a lo largo del eje directo, como se muestra en la Figura 2.2.

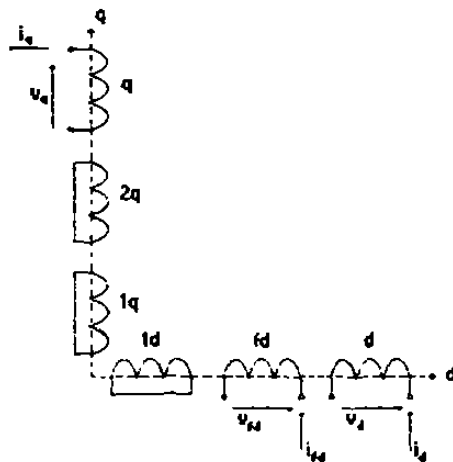


Figura 2.2: Devanados de la Máquina después de la Transformación de Park

- Asumiendo que, operando en estado estable, las corrientes directas en los devanados  $d$  y  $q$  corresponden a las corrientes en las tres fases balanceadas  $a, b, c$ , ambos circuitos producen un campo magnético rotando a la velocidad sincrónica.
- El devanado  $o$  no será considerado en este estudio, ya que solo se trabajará bajo condiciones balanceadas, donde  $i_a + i_b + i_c = 0$ , y la corriente  $i_o$ , asociada con las componentes simétricas

$$i_o = \frac{1}{3} (i_a + i_b + i_c) = 0.$$

La ventaja principal de la Transformación de Park es que todos los devanados equivalentes están fijos uno con respecto al otro, como se muestra en la Figura 2.2, y se puede seleccionar una forma que resulta en una misma inductancia mutua. Las Ecuaciones de Park, relativas a los voltajes del estator, tienen la forma:

$$v_d = -R_a i_d - \dot{\theta}_r \Psi_q + \dot{\Psi}_d \quad (2.1)$$

$$v_q = -R_a i_q + \dot{\theta}_r \Psi_d + \dot{\Psi}_q \quad (2.2)$$

$$v_o = -R_a i_o + \dot{\Psi}_o \quad (2.3)$$

donde  $v_d$  es el voltaje del devanado  $d$ ,  $v_q$  es el voltaje del devanado  $q$ ,  $i_d$  es la corriente del devanado  $d$ ,  $i_q$  es la corriente del devanado  $q$ ,  $\Psi_d$  es el flujo de enlace del devanado  $d$ ,  $\Psi_q$  es el flujo de enlace del devanado  $q$ ,  $\Psi_o$  es el flujo de enlace del devanado  $o$ ,  $\dot{\theta}_r$  es la velocidad angular eléctrica y  $R_a$  la resistencia de armadura.

Los términos  $\dot{\theta}_r \cdot \Psi_d$  y  $\dot{\theta}_r \cdot \Psi_q$  son llamados "voltajes de velocidad," y además resultan del campo

rotatorio,  $\dot{\Psi}_d$  y  $\dot{\Psi}_q$ , los cuales están referidos como voltajes de transformación.

Los circuitos del rotor son descritos por las relaciones básicas

$$v_{fd} = R_{fd}i_{fd} + \dot{\Psi}_{fd}. \quad (2.4)$$

$$0 = R_{1d}i_{1d} + \dot{\Psi}_{1d}, \quad (2.5)$$

$$0 = R_{1q}i_{1q} + \dot{\Psi}_{1q}, \quad (2.6)$$

$$0 = R_{2q}i_{2q} + \dot{\Psi}_{2q}. \quad (2.7)$$

donde  $R_{fd}$  es la resistencia del circuito de campo,  $\Psi_{fd}$  es el flujo de enlace de campo, y en forma similar para los otros circuitos.

Después de aplicar la Transformación de Park, los devanados de la máquina se representan como se muestra en la Figura 2.2.

En la siguiente sección se introduce la ecuación de oscilación, la cual es la base para el análisis de los modelos utilizados.

## 2.3 Dinámica de Movimiento

Para el análisis de estabilidad es más conveniente referenciar la posición del rotor a una referencia que gira sincronamente. Se define el ángulo del rotor  $\delta$  (en *rad*) como el ángulo eléctrico entre el eje en cuadratura de la máquina y la referencia sincrónica:

$$\delta = \theta_r - \omega_0 t.$$

Cuando es expresada en términos de  $\delta$  y en por unidad con respecto a las cantidades base de la máquina, la ecuación de oscilación queda de la siguiente manera

$$\frac{2H}{\omega_0} \ddot{\delta} = T_m - T_e,$$

donde  $H$  es la constante de inercia (en segundos),  $T_m$  es el par mecánico producido por la turbina,  $T_e$  es el par electromagnético del generador.

Para compensar el efecto de amortiguamiento, se introduce un término de amortiguamiento  $D \dot{\delta}$  en la ecuación de oscilación. Haciendo las siguientes suposiciones:

- La resistencia de armadura, la cual es muy pequeña, es despreciada
- La saturación magnética es despreciada, debido a los entrehierros principalmente.
- Asumiendo una velocidad constante igual a la nominal y despreciando la resistencia de armadura, el par electromagnético en por unidad es igual a la potencia trifásica  $P$  producida por la máquina, mientras que el par mecánico en por unidad es igual a la potencia mecánica  $P_m$ , entonces se reescribe la ecuación de oscilación como:

$$\frac{2H}{\omega_0} \ddot{\delta} + \frac{D}{\omega_0} \dot{\delta} = P_m - P, \quad (2.8)$$

donde  $D$  es el coeficiente de amortiguamiento en por unidad.

En la siguiente sección se presentan las ecuaciones utilizadas para la definición de los modelos matemáticos de la máquina sincrónica.

## 2.4 Modelo Simplificado sólo con Excitación

Debido a que en estado estable no hay dinámica en los flujos de la máquina las derivadas de los enlaces de flujo son consideradas cero, y tomando la resistencia de armadura igual a cero, las ecuaciones del estator (2.1), (2.2), se reescriben como

$$v_d = -\omega_0 \Psi_q, \quad (2.9)$$

$$v_q = \omega_0 \Psi_d, \quad (2.10)$$

mientras que en los tres devanados restantes, los enlaces de flujo están relacionados con las corrientes a través de las ecuaciones

$$\Psi_d = -L_d i_d + L_{ad} i_{fd}, \quad (2.11)$$

$$\Psi_q = -L_q i_q, \quad (2.12)$$

$$\Psi_{fd} = -L_{ad} i_d + L_{fd} i_{fd}, \quad (2.13)$$

donde  $L_d$  es la inductancia propia del devanado  $d$ ,  $L_q$  es la inductancia propia del devanado  $q$ ,  $L_{fd}$  es la inductancia propia del devanado de campo, y  $L_{ad}$  es la inductancia mutua entre ambos devanados.

Sustituyendo  $\Psi_q$  en  $v_d$  y  $\Psi_d$  en  $v_q$ , obtenemos

$$v_d = -\omega_0 \Psi_q = -\omega_0 (-L_q i_q) = \omega_0 L_q i_q.$$

$$\begin{aligned} v_q &= \omega_0 \Psi_d = \omega_0(-L_d i_d + L_{ad} i_{fd}) = -\omega_0 L_d i_d + \omega_0 L_{ad} i_{fd}, \\ v_d &= X_q i_q, \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$v_q = -X_d i_d + E_q, \quad (2.15)$$

donde  $X_d = \omega_0 L_d$  y  $X_q = \omega_0 L_q$  son las reactancias sincronas de los ejes directo y cuadratura, respectivamente, y

$$E_q = \omega_0 L_{ad} i_{fd}. \quad (2.16)$$

Bajo condiciones sin carga,  $i_d = i_q = 0$  y  $v_q = E_q$ , por lo tanto,  $E_q$  es la fuerza electromotriz en vacío o voltaje de circuito abierto.

Cuando ocurre un cambio en el generador, es decir, aumenta la carga, disminuye la velocidad de la turbina, etc. las variables,  $i_d$ ,  $i_q$ ,  $\Psi_d$ , y  $\Psi_q$ , cambian pero se debe reflejar el hecho de que los voltajes de transformación fueron despreciados. De la ecuación (2.4), se puede observar que los enlaces de flujo del campo  $\Psi_{fd}$  no pueden cambiar instantáneamente. Como se puede observar de la ecuación (2.13), ya que  $\Psi_{fd}$  es constante e  $i_d$  está cambiando bruscamente, el cambio en la corriente en el eje directo  $i_d$  ocasiona que la corriente de campo  $i_{fd}$  también cambie rápidamente. En la máquina real una componente de la corriente de campo es inducida, la cual garantiza la continuidad del flujo magnético; debido a que éste flujo es proporcional a  $i_{fd}$ , la fuerza electromotriz  $E_q$  también cambia rápidamente y bruscamente en el modelo simplificado cuando los voltajes de transformación son despreciados. Como  $E_q$  está cambiando, es más apropiado expresar las ecuaciones de la máquina en términos de la fem proporcional al enlace de flujo de campo.

Para este propósito, se introduce la fem:

$$E'_q = \omega_0 \frac{L_{ad}}{L_{fd}} \Psi_{fd} \quad (2.17)$$

igualmente, la reactancia transitoria del eje directo, se tiene

$$X'_d = \omega_0 L'_d = \omega_0 \left( L_d - \frac{L_{ad}^2}{L_{fd}} \right).$$

Usando (2.13) para expresar  $i_{fd}$  en términos de  $\Psi_{fd}$  e  $i_d$ , y sustituyendo en (2.11) y (2.10)



sucesivamente, obtenemos

$$\begin{aligned}
 \Psi_{fd} &= -L_{ad}i_d + L_{fd}i_{fd}, \\
 i_{fd} &= \frac{\Psi_{fd} + L_{ad}i_d}{L_{fd}}, \\
 \Psi_d &= -L_d i_d + L_{ad}i_{fd} = -L_d i_d + L_{ad}\left(\frac{\Psi_{fd} + L_{ad}i_d}{L_{fd}}\right), \\
 \Psi_d &= -L_d i_d + \frac{L_{ad}}{L_{fd}}\Psi_{fd} + \frac{L_{ad}^2}{L_{fd}}i_d, \\
 v_q &= \omega_0 \Psi_d = \omega_0\left(-L_d i_d + \frac{L_{ad}}{L_{fd}}\Psi_{fd} + \frac{L_{ad}^2}{L_{fd}}i_d\right), \\
 v_q &= -\omega_0\left(L_d - \frac{L_{ad}^2}{L_{fd}}\right)i_d + \omega_0 \frac{L_{ad}}{L_{fd}}\Psi_{fd}, \\
 v_q &= -X'_d i_d + E'_q, \tag{2.18}
 \end{aligned}$$

donde  $E'_q$  es la fem detrás de la reactancia transitoria. La relación entre  $E_q$  y  $E'_q$  se obtiene a partir de las ecuaciones (2.15) y (2.18) como sigue

$$\begin{aligned}
 v_q &= -X_d i_d + E_q = -X'_d i_d + E'_q, \\
 E_q &= (X_d - X'_d)i_d + E'_q.
 \end{aligned}$$

Además, podemos obtener la dinámica de  $E'_q$  de la siguiente manera

$$\dot{E}'_q = \omega_0 \frac{L_{ad}}{L_{fd}} \dot{\Psi}_{fd}.$$

Utilizando (2.4), se tiene que

$$\begin{aligned}
 \dot{\Psi}_{fd} &= v_{fd} - R_{fd}i_{fd}, \\
 \dot{E}'_q &= \omega_0 \frac{L_{ad}}{L_{fd}}(v_{fd} - R_{fd}i_{fd}) = \frac{\omega_0 L_{ad} R_{fd}}{L_{fd}} \left( \frac{v_{fd}}{R_{fd}} - i_{fd} \right).
 \end{aligned}$$

Definiendo

$$\begin{aligned}
 T'_{d0} &= \frac{L_{fd}}{R_{fd}}, \\
 E_f &= \omega_0 \frac{L_{ad}}{R_{fd}} v_{fd}, \\
 E_q &= \omega_0 L_{ad} i_{fd}.
 \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\dot{E}'_q &= \omega_0 L_{ad} \frac{R_{fd}}{L_{fd}} \left( \frac{v_{fd}}{R_{fd}} - i_{fd} \right) = \frac{\omega_0 L_{ad}}{T_{d0}} \left( \frac{v_{fd}}{R_{fd}} - i_{fd} \right), \\ \dot{E}'_q &= \frac{1}{T_{d0}} \left( \omega_0 \frac{L_{ad}}{R_{fd}} v_{fd} - \omega_0 L_{ad} i_{fd} \right), \\ \dot{E}'_q &= \frac{1}{T_{d0}} (E_f - E_q).\end{aligned}\quad (2.19)$$

En la sección siguiente, se obtiene el modelo del generador síncrono conectado a una barra infinita.

## 2.5 Modelo del Generador Síncrono Conectado a una Barra Infinita

En esta sección se obtendrá un modelo de Quinto Orden para el Generador Síncrono conectado a una barra infinita, utilizando algunas de las ecuaciones obtenidas en las secciones anteriores.

Considerando el circuito mostrado en la Figura 2.3, el cual es un esquema del generador síncrono conectado a una barra-infinita a través de una línea representada por una resistencia  $\bar{R}_e$  y una reactancia  $\bar{X}_e$  externas.

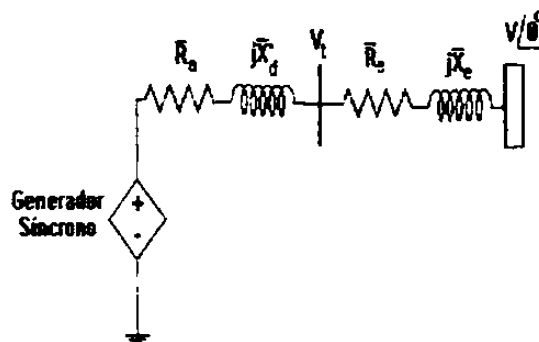


Figura 2.3: Generador Síncrono - Barra Infinita

Para simplificar el análisis, se suman la resistencia y la reactancia externa  $\bar{R}_e$  y  $j \bar{X}_e$  con la resistencia y reactancia de armadura  $\bar{R}_a$  y  $\bar{X}'_d$  respectivamente dejándolas expresadas en términos de  $R_a$  y  $X'_d$  como se muestra en la Figura 2.4.

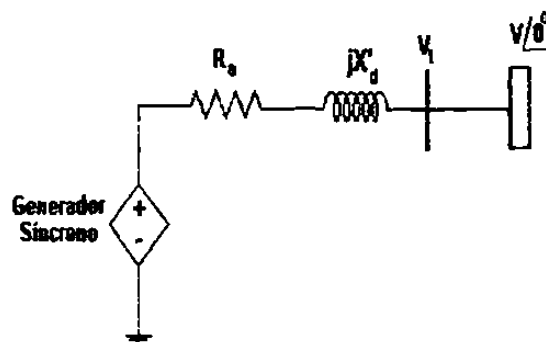


Figura 2.4: Generador Síncrono - Barra Infinita Simplificado

Como se puede observar en la Figura 2.4, el voltaje en terminales se considera que es el voltaje de la barra infinita, esto es

$$V_{\infty}.$$

Expresando el voltaje en terminales (ver [8]) en terminos de  $v_d$  y  $v_q$ , obtenemos

$$v_d = V_{\infty} \sin(\delta), \quad (2.20)$$

$$v_q = V_{\infty} \cos(\delta). \quad (2.21)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.20) y (2.21) en (2.1) y (2.2), respectivamente, y despejando las derivadas de los flujos, resulta que

$$\dot{\Psi}_d = R_a i_d + \omega \Psi_q + V_{\infty} \sin(\delta), \quad (2.22)$$

$$\dot{\Psi}_q = R_a i_q - \omega \Psi_d + V_{\infty} \cos(\delta). \quad (2.23)$$

A partir de la ecuación (2.13) se despeja  $i_{fd}$ , y se sustituye en la ecuación (2.11). De la ecuación resultante, se despeja  $i_d$ , dando como resultado

$$i_d = -\frac{\Psi_d}{L'_d} + \frac{L_{ad}}{L'_d L_{fd}} \Psi_{fd}. \quad (2.24)$$

donde

$$L'_d = L_d - \frac{L_{ad}^2}{L_{fd}}.$$

Ahora, multiplicando ambos lados de la ecuación (2.24) por  $\frac{1}{\omega_0}$ , obtenemos

$$i_d = -\frac{\omega_0}{X'_d} \Psi_d + \frac{1}{X'_d} E'_q.$$

Entonces, sustituyendo la ecuación anterior en (2.22) y dividiendo entre la velocidad base  $\omega_0$ , obtenemos la dinámica de los enlaces dedije  $d$  expresada en (pu)

$$\frac{1}{\omega_0} \dot{\Psi}_d = -\frac{R_a}{X'_d} \Psi_d + \frac{R_a}{X'_d} E'_q + \frac{\omega}{\omega_0} \Psi_q + V_\infty \sin(\delta).$$

Despejando  $i_q$  de la ecuación (2.12), la cual a su vez se sustituye en (2.23) y dividiendo entre el voltaje base, obtenemos la dinámica de los enlaces de flujo en  $q$  expresada en (pu)

$$\frac{1}{\omega_0} \dot{\Psi}_q = -\frac{R_a}{X_q} \Psi_q - \frac{\omega}{\omega_0} \Psi_d + V_\infty \cos(\delta).$$

Ahora bien, para obtener la dinámica del voltaje interno transitorio, en las ecuaciones (2.15) y (2.18) se sustituye la ecuación (2.24), de modo que

$$\begin{aligned} v_q &= \frac{X_d}{L'_d} \Psi_d - \frac{X_d L_{ad}}{L'_d L_{fd}} \Psi_{fd} + E_q, \\ v'_q &= \frac{X'_d}{L'_d} \Psi_d - \frac{X'_d L_{ad}}{L'_d L_{fd}} \Psi_{fd} + E'_q = \frac{X'_d}{L'_d} \Psi_d. \end{aligned}$$

Al igualar las ecuaciones anteriores, se despeja  $E_q$ , y de la ecuación resultante se multiplica ambos lados por  $\frac{1}{\omega_0}$ , para obtener finalmente

$$E_q = -\omega_0 \left( \frac{X_d - X'_d}{X'_d} \right) \Psi_d + \frac{X_d}{X'_d} E'_q.$$

Ahora, sustituyendo la ecuación anterior en (2.19) y dividiendo entre el voltaje base, obtenemos la dinámica del voltaje interno transitorio en (pu)

$$T'_{d0} \dot{E}'_q = E_f + \left( \frac{X_d - X'_d}{X'_d} \right) \Psi_d - \frac{X_d}{X'_d} E'_q.$$

Para obtener las ecuaciones electromecánicas, partimos de las ecuaciones descritas en la sección de Dinámica de Movimiento, donde el ángulo  $\delta$  está dado por

$$\delta = \theta_r - \omega_0 t.$$

y la ecuación de oscilación expresada en (pu)

$$\frac{2H}{\omega_0} \ddot{\delta} = T_m - T_e. \quad (2.25)$$

Derivando el ángulo  $\delta$  con respecto al tiempo, se obtiene la siguiente expresión

$$\dot{\delta} = \omega - \omega_0.$$

Para encontrar el par eléctrico  $T_e$  expresado en (pu), partimos de la definición de potencia eléctrica  $P_e$  expresada en (pu)

$$P_e = v_d i_d + v_q i_q.$$

Sustituyendo (2.9) y (2.10) en la ecuación anterior, resulta que

$$P_e = -\omega_0 \Psi_q i_d + \omega_0 \Psi_d i_q.$$

Despejando  $i_q$  de la ecuación (2.12) y utilizando la ecuación (2.24), en la ecuación anterior, da como resultado

$$P_e = \omega_0 \frac{1}{L'_d} \Psi_d \Psi_q - \frac{\omega_0 L_{ad}}{L'_d L'_{fd}} \Psi_{fd} \Psi_q - \omega_0 \frac{1}{L_q} \Psi_d \Psi_q.$$

Debido a que la ecuación está expresada en (pu) y considerando que

$$P_e(\text{pu}) \approx T_e(\text{pu}),$$

$$L(\text{pu}) \approx X(\text{pu}),$$

$$\omega_0(\text{pu}) \approx 1,$$

se tiene que

$$T_e = - \left( \frac{1}{X_q} - \frac{1}{X'_d} \right) \Psi_d \Psi_q - \frac{1}{X'_d} E'_q \Psi_q.$$

Entonces, sustituyendo la expresión de par eléctrico  $T_e$  en (2.25), obtenemos la dinámica de la velocidad angular expresada en (pu)

$$\frac{2H}{\omega_0} \dot{\omega} = T_m + \left( \frac{1}{X_q} - \frac{1}{X'_d} \right) \Psi_d \Psi_q + \frac{1}{X'_d} E'_q \Psi_q.$$

Finalmente, agrupando las 5 expresiones dinámicas del generador obtenidas anteriormente, y definiendo  $M = \frac{2H}{\omega_0}$ , un Modelo de Quinto Orden del Generador Sincrono conectado a una Barra

Infinita expresado en (pu) (ver [2]) es el siguiente

$$\begin{aligned}
 \dot{\delta} &= \omega - \omega_0, \\
 M \dot{\omega} &= T_m + \left( \frac{1}{X_q} - \frac{1}{X'_d} \right) \Psi_d \Psi_q + \frac{1}{X'_d} E'_q \Psi_q, \\
 T'_{d0} \dot{E}'_q &= E_f + \left( \frac{X_d - X'_d}{X'_d} \right) \Psi_d - \frac{X_d}{X'_d} E'_q, \\
 \frac{1}{\omega_0} \dot{\Psi}_d &= -\frac{R_a}{X'_d} \Psi_d + \frac{R_a}{X'_d} E'_q + \frac{\omega}{\omega_0} \Psi_q + V_\infty \sin(\delta), \\
 \frac{1}{\omega_0} \dot{\Psi}_q &= -\frac{R_a}{X_q} \Psi_q - \frac{\omega}{\omega_0} \Psi_d + V_\infty \cos(\delta).
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

## 2.6 Modelo del Generador Síncrono para el Sistema Multi-Máquina

Para obtener el modelo del generador síncrono para el sistema multimáquina, comenzamos definiendo el ángulo del rotor para cada máquina  $i$  donde  $i = 1, \dots, n$  (ver [7] )

$$\delta_i = \theta_{ri} - \omega_0 t.$$

se tiene que

$$\dot{\delta}_i = \dot{\theta}_{ri} - \omega_0 \triangleq \omega_i - \omega_0.$$

donde  $\omega_i$  es la velocidad angular del rotor,  $\omega_0$  es la velocidad síncrona en *rad/seg*.

Ahora, derivando la velocidad angular del rotor, se obtiene

$$\dot{\omega}_i = \ddot{\delta}_i,$$

entonces, la ecuación de oscilación queda expresada como

$$\frac{2H_i}{\omega_0} \ddot{\delta}_i + \frac{D_i}{\omega_0} \dot{\delta}_i = P_{m_i} - P_{e_i},$$

donde  $H_i$  es la constante de inercia en segundos,  $D_i$  es la constante de amortiguamiento en *seg/rad*,  $P_{m_i}$  potencia mecánica de entrada en por unidad la cual se considera constante,  $P_{e_i}$  potencia eléctrica de salida en P.U.,  $\delta_i$  el ángulo del rotor con respecto a una referencia de la armadura rotando



síncronamente expresado en radianes, y  $\omega_0$  la velocidad angular nominal en *rad/seg* para la máquina *i*.

Sustituyendo la primera y segunda derivada del ángulo en la ecuación de oscilación obtenemos

$$\frac{2H_i}{\omega_0} \dot{\omega}_i + \frac{D_i}{\omega_0} (\omega_i - \omega_0) = P_{m_i} - P_i,$$

$$\dot{\omega}_i = \frac{\omega_0}{2H_i} (P_{m_i} - P_i) - \frac{D_i}{2H_i} (\omega_i - \omega_0).$$

Definiendo  $M_i = 2H_i$ , obtenemos el modelo simplificado de tercer orden del generador síncrono para el sistema multimáquina

$$\dot{\delta}_i = \omega_i - \omega_0,$$

$$\dot{\omega}_i = \frac{\omega_0}{M_i} (P_{m_i} - P_i) - \frac{D_i}{M_i} (\omega_i - \omega_0),$$

$$\dot{E}'_{q_i} = \frac{1}{T'_{d0_i}} (E_{f_i} - E_{q_i}).$$

Ahora, para obtener la Potencia Eléctrica  $P_i$  (ver [9]), se define

$$P_i = \text{Re} [E'_{q_i} \angle \delta_i I_{d_i}^*]$$

$$I_{d_i}^* = Y_{ij}^* E'_{q_i}$$

$$Y_{ij}^* = G_{ij} - jB_{ij}$$

$$E'_{q_i} = |E'_{q_i}| \angle \delta_i$$

$$E'_{q_i}^* = |E'_{q_i}| \angle -\delta_i$$

donde  $I_{d_i}^*$  es el conjugado de la corriente en el eje directo,  $E'_{q_i}$  el voltaje interno transitorio en el eje de cuadratura,  $E'_{q_i}^*$  el conjugado del voltaje interno transitorio en el eje de cuadratura,  $Y_{ij}^*$  la admitancia compleja conjugada,  $G_{ij}$  es la conductancia y  $B_{ij}$  la susceptancia, haciendo las operaciones adecuadas obtenemos la expresión analítica de la Potencia Eléctrica para el sistema multimáquina

$$P_i = \text{Re} [E'_{q_i} \angle \delta_i \sum_{j=1}^n Y_{ij}^* E'_{q_j} \angle -\delta_j].$$

$$\begin{aligned}
P_i &= \operatorname{Re} \left[ E'_q \angle \delta_i \sum_{j=1}^n (G_{ij} - jB_{ij}) E'_q \angle -\delta_j \right], \\
&= \operatorname{Re} \left[ E'_q \sum_{j=1}^n (G_{ij} - jB_{ij}) E'_q \angle \delta_i - \delta_j \right], \\
\delta_{ij} &= \delta_i - \delta_j, \\
E'_q E'_q \angle \delta_{ij} &= E'_q E'_q (\cos(\delta_{ij}) + j \sin(\delta_{ij})), \\
P_i &= \operatorname{Re} \left[ \sum_{j=1}^n E'_q E'_q (\cos(\delta_{ij}) + j \sin(\delta_{ij})) (G_{ij} - jB_{ij}) \right], \\
P_i &= E_q'^2 G_{ii} + \sum_{j=1, j \neq i}^n \left( E'_q E'_q B_{ij} \sin(\delta_{ij}) + E'_q E'_q G_{ij} \cos(\delta_{ij}) \right),
\end{aligned}$$

Para el caso del Voltaje Interno  $E_q$ , se definen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}
E_q &= (X_{d1} - X'_d) I_{d1} + E'_q, \\
I_{d1} &= Y_{ij} E'_q, \\
E'_q &= |E'_q| \angle \delta_v.
\end{aligned}$$

donde  $I_{d1}$  es la corriente en el eje directo,  $Y_{ij}$  la admitancia y  $E'_q$  el voltaje interno transitorio en el eje cuadratura, realizando las operaciones adecuadas obtenemos

$$\begin{aligned}
I_{d1} &= \operatorname{Im} \left[ \sum_{j=1}^n E'_q \angle \delta_j Y_{ij} \right], \\
Y_{ij} &= -Y_{ij}, \quad i \neq j, \\
I_{d1} &= \operatorname{Im} \left[ E'_q \angle \delta_i Y_{ii} - \sum_{j=1, j \neq i}^n E'_q \angle \delta_j Y_{ij} \right], \\
I_{d1} &= \operatorname{Im} \left[ E'_q \angle \delta_{ii} (G_{ii} + jB_{ii}) - \sum_{j=1, j \neq i}^n E'_q \angle \delta_{ij} (G_{ij} + jB_{ij}) \right], \\
I_{d1} &= \operatorname{Im} \left[ E'_q (\cos(0) + j \sin(0)) (G_{ii} + jB_{ii}) \right] \\
&\quad - \operatorname{Im} \left[ \sum_{j=1, j \neq i}^n E'_q (\cos(\delta_{ij}) + j \sin(\delta_{ij})) (G_{ij} + jB_{ij}) \right], \\
I_{d1} &= E'_q B_{ii} - \sum_{j=1, j \neq i}^n \left( E'_q B_{ij} \cos(\delta_{ij}) + E'_q G_{ij} \sin(\delta_{ij}) \right).
\end{aligned}$$

y sustituyendo  $I_{d1}$  en la ecuación de  $E_q$ , obtenemos la expresión analítica del Voltaje Interno para el sistema multimáquina

$$E_q = E'_q + (X_{d1} - X'_d) \left( E'_q B_{ii} - \sum_{j=1, j \neq i}^n \left( E'_q B_{ij} \cos(\delta_{ij}) + E'_q G_{ij} \sin(\delta_{ij}) \right) \right).$$

donde

$$\delta_{ij} = \delta_i - \delta_j.$$

Ahora, juntando la ecuaciones obtenidas anteriormente tenemos el modelo matemático de tercer orden del generador sincrono, el cual es el siguiente:

$$\begin{aligned}\dot{\delta}_i &= \omega_i - \omega_0, \\ \dot{\omega}_i &= \frac{\omega_0}{M_i}(P_{m_i} - P_i) - \frac{D_i}{M_i}(\omega_i - \omega_0), \\ \dot{E}'_{q_i} &= \frac{1}{T'_{d0_i}}(E_{f_i} - E_{q_i}).\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}P_i &= E_{q_i}'^2 G_{ii} + \sum_{j=1, j \neq i}^n (E_{q_i}' E_{q_j}' B_{ij} \sin(\delta_{ij}) + E_{q_i}' E_{q_j}' G_{ij} \cos(\delta_{ij})) \\ E_{q_i} &= E_{q_i}' + (X_{d_i} - X_{d_i}') \left( E_{q_i}' B_{ii} - \sum_{j=1, j \neq i}^n (E_{q_j}' B_{ij} \cos(\delta_{ij}) + E_{q_j}' G_{ij} \sin(\delta_{ij})) \right) \\ \delta_{ij} &= \delta_i - \delta_j\end{aligned}$$

El modelo matemático obtenido en esta sección será utilizado para la representación de un Sistema de Tres Generadores y Nueve Nodos, y en base a él se obtendrán las ecuaciones de control las cuales nos permitirán mantener constante el voltaje en terminales de cada generador; la misma representación se hará para el sistema multimáquina de Baja California.

# Capítulo 3

## Reducción del Modelo del Generador Síncrono - Barra Infinita

En este capítulo, mediante el método de la variedad integral se busca reducir el modelo de quinto orden a un modelo de tercer orden, el cual será utilizado para diseñar los algoritmos de control, que posteriormente serán aplicados en el modelo de quinto orden.

### 3.1 Variedad y Variedad Integral

Suponga que  $X$  es algún subconjunto que pertenece al espacio Euclidiano  $\mathbb{R}^n$ . Entonces  $X$  es una *variedad de dimensión  $k$*  si ésta es localmente difeomórfica a  $\mathbb{R}^k$ , es decir, cada punto  $x$  posee una vecindad  $V$  en  $X$  la cual es difeomórfica a un conjunto abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^k$  (ver [12]). Ejemplos de variedades son el círculo unitario

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

el cual es una *variedad de dimensión 1* en  $\mathbb{R}^2$ , y la esfera unitaria

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$$

la cual es una *variedad de dimensión  $(n-1)$*  en  $\mathbb{R}^n$ .

Para definir una variedad integral, introducimos un modelo dinámico multi-dimensional de la forma

$$\frac{dx}{dt} = f(x, z), \quad x(0) = x^0; \quad (3.1)$$

$$\frac{dz}{dt} = g(x, z), \quad z(0) = z^0. \quad (3.2)$$

Una variedad integral de  $z$  como una función de  $x$  es una variedad

$$z = h(x),$$

la cual satisface la ecuación diferencial de  $z$ . De este modo,  $h(x)$  es una variedad integral de (3.1)-

(3.2), si ésta satisface la siguiente ecuación

$$\frac{\partial h}{\partial x} f(x, h) = g(x, h).$$

- Si las condiciones iniciales de  $x$  y  $z$  se encuentran sobre la variedad  $z^0 = h(x^0)$ , entonces la variedad integral es una solución exacta de la ecuación diferencial (3.2), y el siguiente modelo de orden reducido es exacto (ver [1]):

$$\frac{dx}{dt} = f(x, h(x)), \quad x(0) = x^0.$$

### 3.2 Modelo del Generador Síncrono de Tercer Orden

Ahora, utilizando el método de la variedad integral, un modelo de tercer orden del generador síncrono, el cual incluye la resistencia de armadura  $R_a$ , puede ser obtenido a partir del modelo de quinto orden (ver 2.26), como se muestra a continuación.

Haciendo el siguiente cambio de variables

$$x_1 = \delta, \quad x_2 = \omega, \quad x_3 = E'_q, \quad z_1 = \Psi_d, \quad z_2 = \Psi_q.$$

el sistema en las nuevas coordenadas está descrito por

$$\dot{x}_1 = x_2 - \omega_0,$$

$$\dot{x}_2 = \frac{T_m}{M} + \left( \frac{X'_d - X_q}{M X_q X'_d} \right) z_1 z_2 + \frac{1}{M X'_d} x_3 z_2, \quad (3.3)$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{X_d}{T'_{do} X'_d} x_3 + \left( \frac{X_d - X'_d}{T'_{do} X'_d} \right) z_1 + \frac{1}{T'_{do}} E_{fd}. \quad (3.4)$$

$$\dot{z}_1 = -\frac{\omega_0 R_a}{X'_d} z_1 + x_2 z_2 + \frac{\omega_0 R_a}{X'_d} x_3 + V_\infty \omega_0 \sin(x_1),$$

$$\dot{z}_2 = -x_2 z_1 - \frac{\omega_0 R_a}{X_q} z_2 + V_\infty \omega_0 \cos(x_1),$$

donde

$$f(x, z) = \begin{pmatrix} x_2 - \omega_0 \\ \frac{T_m}{M} + \left( \frac{X'_d - X_q}{MX_q X'_d} \right) z_1 z_2 + \frac{1}{MX'_d} x_3 z_2 \\ -\frac{X_d}{T'_{do} X'_d} x_3 + \left( \frac{X_d - X'_d}{T'_{do} X'_d} \right) z_1 + \frac{1}{T'_{do}} E_{fd} \end{pmatrix}.$$

$$g(x, z) = \begin{pmatrix} -\frac{\omega_0 R_a}{X'_d} z_1 + x_2 z_2 + \frac{\omega_0 R_a}{X'_d} x_3 + V_\infty \omega_0 \sin(x_1) \\ -x_2 z_1 - \frac{\omega_0 R_a}{X_q} z_2 + V_\infty \omega_0 \cos(x_1) \end{pmatrix}.$$

Puesto que solo nos interesan las variables  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$ , observamos que existe una variedad integral de la forma

$$z_1 = h_1(x_1, x_2, x_3),$$

$$z_2 = h_2(x_1, x_2, x_3).$$

Esta variedad integral, la cual es de dimensión dos, tiene que satisfacer las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} & \frac{\partial h_1}{\partial x_1} (x_2 - \omega_0) + \frac{\partial h_1}{\partial x_2} f_2(x) + \frac{\partial h_1}{\partial x_3} f_3(x) \\ &= -\frac{\omega_0 R_a}{X'_d} h_1 + x_2 h_2 + \frac{\omega_0 R_a}{X'_d} x_3 + V_\infty \omega_0 \sin(x_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial h_2}{\partial x_1} (x_2 - \omega_0) + \frac{\partial h_2}{\partial x_2} f_2(x) + \frac{\partial h_2}{\partial x_3} f_3(x) \\ &= -x_2 h_1 - \frac{\omega_0 R_a}{X_q} h_2 + V_\infty \omega_0 \cos(x_1). \end{aligned}$$

- Asumiendo que  $h_1$  y  $h_2$  son independientes de  $x_2$

Igualando los coeficientes de las ecuaciones en  $x_2$  y  $\omega_0$ , y utilizando la hipótesis anterior se obtiene

$$\frac{\partial h_1}{\partial x_1} = h_2: \quad \frac{\partial h_1}{\partial x_1} = \frac{R_a}{X'_d} h_1 - \frac{R_a}{X'_d} x_3 - V_\infty \sin(x_1).$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial x_1} = -h_1: \quad \frac{\partial h_2}{\partial x_1} = \frac{R_a}{X_q} h_2 - V_\infty \cos(x_1).$$

Reemplazando las expresiones apropiadas de las derivadas parciales, se obtiene la siguiente

solución

$$h_1 = \frac{R_a^2}{\bar{D}} x_3 + \frac{R_a X_d' V_\infty}{\bar{D}} \sin(x_1) + \frac{X_d' X_q V_\infty}{\bar{D}} \cos(x_1). \quad (3.5)$$

$$h_2 = -\frac{R_a X_q}{\bar{D}} x_3 - \frac{X_d' X_q V_\infty}{\bar{D}} \sin(x_1) + \frac{R_a X_q V_\infty}{\bar{D}} \cos(x_1). \quad (3.6)$$

donde  $\bar{D} = (X_d' X_q + R_a^2)$ .

Sustituyendo las ecuaciones (3.5) y (3.6) en (3.3) y (3.4), se obtiene el modelo reducido del generador síncrono, el cual está dado por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 - \omega_0, \\ \dot{x}_2 &= m_1 - m_2 x_3^2 + m_3 x_3 \cos(x_1) - m_4 x_3 \sin(x_1) \\ &\quad - m_5 (R_a \sin(x_1) + X_q \cos(x_1)) (X_d' \sin(x_1) - R_a \cos(x_1)), \\ \dot{x}_3 &= -m_6 x_3 + m_7 \sin(x_1) + m_8 \cos(x_1) + m_9 E_{fd}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde las  $m_i$ ,  $i = 1, \dots, 9$  están dadas por las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{T_m}{M}; \quad m_2 = \frac{R_a (R_a^2 + X_q^2)}{M \bar{D}^2}; \quad m_3 = \frac{R_a V_\infty (R_a^2 - X_d' X_q + 2X_q^2)}{M \bar{D}^2}; \\ m_4 &= \frac{V_\infty (2R_a^2 X_d' - R_a^2 X_q + X_d' X_q^2)}{M \bar{D}^2}; \quad m_5 = \frac{V_\infty^2 (X_d' - X_q)}{M \bar{D}^2}; \quad m_6 = \frac{R_a^2 + X_d X_q}{T_{do}' \bar{D}}; \\ m_7 &= \frac{(X_d - X_d') R_a V_\infty}{T_{do}' \bar{D}}; \quad m_8 = \frac{(X_d - X_d') X_q V_\infty}{T_{do}' \bar{D}}; \quad m_9 = \frac{1}{T_{do}'}. \end{aligned}$$

Cuando las condiciones iniciales de  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $x_1$ , y  $x_3$ , no satisfacen las ecuaciones (3.5) y (3.6), entonces existe una extensión del método de la variedad integral que permite introducir estas variables, cuando estas se encuentran fuera de la variedad [1].

### 3.3 Conclusiones

En éste capítulo se obtuvo una reducción del modelo del generador síncrono de quinto orden, la cual se utilizará para obtener las ecuaciones de control para los sistemas de un solo generador conectado a una barra-infinita de una manera más sencilla y eficiente.



# Capítulo 4

## Diseño de Controladores

### 4.1 Controladores para sistemas de una entrada y una salida

En este Capítulo se presentará el diseño de controladores para el control del generador síncrono. Técnicas de diseño basadas en la geometría diferencial, álgebra diferencial, modos deslizantes, backstepping, pasividad y combinaciones de estas técnicas serán estudiadas en este capítulo. Para llevar a cabo lo anterior es necesario demostrar que el modelo reducido del generador síncrono es controlable.

Haciendo uso del siguiente resultado [3].

**Teorema 4.1** *El sistema dado por*

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

*El problema de linealización exacta del espacio de estado está resuelto cerca del punto  $x^0$  (es decir, existe una función de salida  $\lambda(x)$  para la cual el sistema tiene grado relativo  $n$  en  $x^0$ ) si y solo si se satisfacen las siguientes condiciones:*

- (1) La matriz  $[g(x^0) \text{ ad}_f g(x^0) \dots \text{ ad}_f^{n-2} g(x^0) \text{ ad}_f^{n-1} g(x^0)]$  tiene rango  $n$ ,*
- (2) La distribución  $D = \text{span}\{g, \text{ad}_f g, \dots, \text{ad}_f^{n-2} g\}$  es involutiva cerca de  $x^0$ .*

□

Es fácil verificar que el modelo de tercer orden es de retroalimentación linealizable alrededor del punto de equilibrio  $x^0$ .

A continuación se presentan las técnicas de control consideradas.

#### 4.1.1 Linealización Exacta Vía Retroalimentación.

Considere la siguiente clase de sistemas no lineales afines en el control [3] una entrada-una salida (SISO)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{4.1}$$

donde  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}$ ,  $f, g$  campos y  $h$  una función suave.

Suponiendo que el sistema no lineal es de grado relativo  $n$ , en algún punto  $x = x^0$ . Entonces un control de retroalimentación linealizante de estado estático para esta clase de sistemas está dado por

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v$$

donde  $v$  es una referencia de entrada externa y  $\beta(x) \neq 0$ .

Tomando el siguiente cambio de coordenadas

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \vdots \\ \phi_n(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h(x) \end{bmatrix}$$

donde

$$z_i = \phi_i(x) = L_f^{i-1} h(x), \quad 1 \leq i \leq n,$$

resulta que el sistema descrito en las nuevas coordenadas está dado por

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-1} &= z_n \\ \dot{z}_n &= b(z) + a(z)u\end{aligned}$$

con  $z = (z_1, \dots, z_n)^T$ .

Seleccionando la siguiente ley de control de retroalimentación de estado

$$u = \frac{1}{a(z)}(-b(z) + v)$$

el cual existe y está bien definido en una vecindad de  $z^0$ . El sistema en lazo cerrado está gobernado por las ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-1} &= z_n \\ \dot{z}_n &= v\end{aligned}$$

el cual es lineal y controlable.

Expresando el control en coordenadas originales, resulta de la forma

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{n-1} h(x)}(-L_f^n h(x) + v)$$

donde el control auxiliar  $v$  está dado por

$$v = -\sum_{i=1}^n a_{i-1} e_i, \quad (4.0a)$$

y el error de seguimiento  $e_i$  tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned}e_1(x) &= z_1 - y_r(t), \quad e_2(x) = z_2 - y_r^{(1)}(t), \dots \\ e_n(x) &= z_n - y_r^{(n-1)}(t),\end{aligned} \quad (4.0b)$$

donde  $y_r$  es la señal de referencia.

### 4.1.2 Álgebra Diferencial

Para una clase de sistemas no lineales de una entrada-una salida ([6], [5])

$$\dot{x} = f(x, u)$$

$$y = h(x).$$

Bajo la suposición que  $f$  y  $h$  son suaves, existe una transformación de coordenadas de estado dependiente de la entradas de la forma

$$z = \Phi(x, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha-1)})$$

la cual transforma el sistema en

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= -L(z, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}) \\ y &= z_1. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Además, se considera que la variable de salida  $y$  también califica como un elemento diferencial primitivo (ver [6]).

La dinámica cero está definida como el sistema autónomo

$$\rho = -L(0, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}) = 0.$$

Por otra parte, definiendo el error de seguimiento como (4.0b), la dinámica del error de seguimiento está dada por

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= e_3 \\ &\vdots \\ \dot{e}_{n-1} &= e_n \end{aligned}$$

$$\dot{e}_n = -L(z, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}) - y_r^{(n)} = v,$$

donde  $-L(z, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)})$  contiene las no linealidades del sistema, y de la cual se obtendrá la ecuación de control  $u$ , donde el control auxiliar  $v$  está dado como (4.0a).

### 4.1.3 Modos Deslizantes

Considere un sistema linealizable entrada-salida (ver sección 4.1.1) representado en la forma normal [4]

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{r-1} &= z_r \\ \dot{z}_r &= \frac{1}{\beta(x, z)} [u - \alpha(x, z)] \\ \dot{x} &= f_0(x, z) \\ y &= z_1 \end{aligned}$$

donde la entrada  $u$  y la salida  $y$  son variables escalares,  $z = [z_1, \dots, z_n]^T \in R^n$ , y definiendo las  $n - r$  componentes de  $z$  como  $x \in R^{n-r}$ . Asumiendo que  $\alpha$  y  $\beta$  son conocidas y  $\beta(x, z) \neq 0 \forall (x, z) \in R^n$ .

El objetivo es diseñar un control de retroalimentación de estado tal que la salida  $y$  siga asintóticamente a la señal de referencia  $y_r(t)$ . Asumiendo que  $y_r(t)$  y sus siguientes derivadas hasta la  $r$ -ésima derivada son continuas y acotadas. Entonces, definiendo el error de seguimiento

$$\begin{aligned} e_1(x) &= z_1 - y_r(t), \quad e_2(x) = z_2 - y_r^{(1)}(t), \dots \\ e_r(x) &= z_r - y_r^{(r-1)}(t). \end{aligned}$$

La dinámica del error de seguimiento está dada por

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= e_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ \dot{e}_{r-1} &= e_r \\ \dot{e}_r &= \frac{1}{\beta(x, z)} [u - \alpha(x, z)] - y_r^{(r)}. \end{aligned}$$

El objetivo ahora es diseñar un control de retroalimentación de estado que asegure que el error de seguimiento  $e = [e_1, \dots, e_r]^T$  es acotado y  $e(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Las cotas de  $e$  asegurarán que  $z$  este acotado, debido a que  $y_r$  y sus derivadas están acotadas. Comenzando con el sistema

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= e_3 \\ & \vdots \\ \dot{e}_{r-1} &= e_r \end{aligned}$$

donde  $e_r$  es visto como la variable de control. Ahora, se diseñará  $e_r$  tal que asegure la convergencia de  $e_1, \dots, e_{r-1}$ . Para este sistema lineal, podemos llevar a cabo lo anterior por medio del control lineal

$$e_r = -(k_1 e_1 + \dots + k_{r-1} e_{r-1})$$

donde  $k_1$  a  $k_{r-1}$  son seleccionadas tal que el polinomio  $\lambda^{r-1} + k_{r-1} \lambda^{r-2} + \dots + k_1$  es Hurwitz. Entonces, la variedad deslizante se puede escoger como sigue

$$s = e_r + k_1 e_1 + \dots + k_{r-1} e_{r-1} = 0$$

y derivando la variedad con respecto al tiempo, se tiene

$$\dot{s} = \frac{1}{\beta(x, z)} [u - \alpha(x, z)] - y_r^{(r)} + k_1 e_2 + \dots + k_{r-1} e_r$$

donde se obtiene un control equivalente  $u_{eq}$  para cancelar las no linealidades de la ecuación anterior, la cual está dada por

$$u_{eq} = (y_r^{(r)} - k_1 e_2 - \dots - k_{r-1} e_r) \beta(x, z) + \alpha(x, z)$$

con  $u = u_{eq} + \beta(x, z)v$ , el cual es el control para el sistema, y el control auxiliar  $v$  es de la forma

$$v = - \sum_{i=1}^n a_{i-1} e_i.$$

#### 4.1.4 Aproximación por Álgebra Diferencial a Modos Deslizantes

En esta sección, se considera la clase de sistemas linealizables de entrada-salida (4.1), y combinando la técnica de modos deslizantes con la del álgebra diferencial, se construirá una ley de control.

Considere la función coordenada  $\sigma$  como una superficie deslizante auxiliar, la cual está expresada en coordenadas transformadas (ver [6])

$$\sigma(z) = \left( \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i e_i \right) + e_n$$

donde el conjunto de coeficientes  $\gamma_i$ , es tal que el polinomio

$$p(\lambda) = \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i \lambda^{i-1} + \lambda^{n-1}$$

es Hurwitz y cuyo error de seguimiento está dado como (4.0b), y la dinámica del error

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= e_3 \\ &\vdots \\ \dot{e}_{n-1} &= e_n \\ \dot{e}_n &= -L(z, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}) - y_r^{(n)} \end{aligned} = Ae + B \left\{ -L(z, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}) - y_r^{(n)} \right\}$$

donde la dinámica deslizante sobre  $\sigma$  esta dada por

$$\dot{\sigma} = -W \text{sign}(\sigma)$$

y  $W$  es una constante positiva.

Ahora, tomando en cuenta lo anterior podemos formular el siguiente teorema:

**Teorema 4.2** Para la clase de sistemas linealizables entrada-salida, Una Entrada-Una Salida (ver 4.1), y definiendo una superficie deslizante en base al error de seguimiento

$$\sigma(e) = \tilde{k} e$$

tal que

$$\tilde{k} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times n},$$

$$e = \text{col} \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_{n-1} & e_n \end{pmatrix},$$

donde las  $k$  son escogidas de un polinomio Hurwitz de orden  $n - 1$  y el control  $u$  es una solución de

$$-L(z, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}) = -ke + \dot{\sigma}(e),$$

donde

$$k = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 & \dots & k_{n-1} \end{bmatrix}.$$

y

$$\dot{\sigma}(e) = -W \tanh(\sigma(e)),$$

donde  $W > 0$ . Entonces, el origen del sistema (4.1) es localmente asintóticamente estable.

**Prueba:** Sea  $\sigma$  la superficie deslizante de la forma

$$\sigma(e) = \tilde{k} e$$

donde la derivada con respecto al tiempo está dada por

$$\dot{\sigma}(e) = ke - L(z, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}). \quad (4.2)$$

Definiendo

$$\dot{\sigma}(e) = -W \tanh(\sigma(e)) \approx -\frac{W}{\sqrt{1 + \sigma^2(e)}} \sigma(e)$$

y definiendo  $\rho$  como sigue

$$\rho = \frac{W}{\sqrt{1 + \sigma^2(e)}},$$



la cual es una constante positiva, tenemos que

$$\dot{\sigma}(e) \approx -\rho\sigma(e) = -\rho \tilde{k} e. \quad (4.3)$$

Ahora, sustituyendo (4.3) en (4.2) y despejando  $L(z, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)})$ , tenemos

$$L(z, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}) = ke + \rho \tilde{k} e.$$

Como el segundo término del lado derecho de la ecuación anterior es estable, sólo se agrega un término de alta ganancia al primer término del lado derecho  $\Omega_\xi$  para garantizar la estabilidad del sistema, de la siguiente forma

$$L(z, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}) = k\Omega_\xi e + \rho \tilde{k} e,$$

donde

$$\Omega_\xi = \text{diag}(\xi^n, \dots, \xi) \in \mathbb{R}^{n \times n}; \quad \xi \geq 1.$$

Sustituyendo  $L(z, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)})$  en el sistema linealizado, resulta que

$$\dot{e} = Ae + BL(z, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)})$$

o en forma equivalente

$$\dot{e} = (A + Bk\Omega_\xi)e + \rho B \tilde{k} e.$$

Ahora, haciendo el siguiente cambio de variable

$$\tilde{e} = \Omega_\xi e.$$

se tiene

$$\dot{\tilde{e}} = \Omega_\xi (A + Bk\Omega_\xi) \Omega_\xi^{-1} \tilde{e} + \rho \Omega_\xi B \tilde{k} \Omega_\xi^{-1} \tilde{e}$$

donde las siguientes relaciones se cumplen

$$\Omega_\xi A \Omega_\xi^{-1} = \xi A: \quad \Omega_\xi B = \xi B: \quad \Omega_\xi B \tilde{k} \Omega_\xi^{-1} = M$$

$$\dot{\tilde{e}} = \xi (A + Bk) \tilde{e} + \rho M \tilde{e}$$

Para probar la estabilidad del sistema, se propone una función candidata de Lyapunov de la

siguiente forma

$$V = \frac{1}{2}\sigma^2(\tilde{e}) + \tilde{e}^T P \tilde{e}$$

$$\dot{V} = -\rho\sigma^2(\tilde{e}) + \xi \tilde{e}^T \left[ (A + Bk)^T P + P(A + Bk) \right] \tilde{e} + \rho \tilde{e}^T (M^T P + PM) \tilde{e}$$

definiendo  $Q$  y  $F$

$$(A + Bk)^T P + P(A + Bk) = -Q, \quad F = M^T P + PM.$$

Reescribiendo la función  $\dot{V}$  como

$$\dot{V} = -\rho\sigma^2(\tilde{e}) - \xi \tilde{e}^T Q \tilde{e} + \rho \tilde{e}^T F \tilde{e}.$$

resulta que

$$\dot{V} \leq -\rho \tilde{e}^T \tilde{k} \tilde{k}^T \tilde{e} - \xi \lambda_{\min}(Q) \tilde{e}^T \tilde{e} + \rho \lambda_{\max}(F) \tilde{e}^T \tilde{e}$$

donde  $\lambda_{\min}(Q)$  y  $\lambda_{\max}(F)$  son el valor singular mínimo de  $Q$  y máximo de  $F$ , respectivamente.

Ahora, reagrupando terminos, se tiene que

$$\dot{V} \leq -\left(\rho \|\tilde{k}\|^2 + \xi \lambda_{\min}(Q) - \rho \lambda_{\max}(F)\right) \|\tilde{e}\|^2.$$

Definiendo  $\mu$  como sigue

$$\mu = \rho \|\tilde{k}\|^2 + \xi \lambda_{\min}(Q) - \rho \lambda_{\max}(F) > 0$$

Entonces la siguiente desigualdad se debe de satisfacer

$$\xi > \frac{-\rho \left( \|\tilde{k}\|^2 - \lambda_{\max}(F) \right)}{\lambda_{\min}(Q)}$$

para poder asegurar que

$$\dot{V} \leq -\mu \|\tilde{e}\|^2$$

■

## 4.2 Controladores para Sistemas Multientradas, Multisalidas

En esta sección, se pretende diseñar un control que sea robusto ante incertidumbres paramétricas, y que estabilice al sistema multimáquina, manteniendo el voltaje en terminales de cada generador constante.

### 4.2.1 Retroalimentación Linealizante

Se considera el siguiente sistema no lineal multivariable descrito en espacio de estado de la siguiente manera [3]

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i \quad (4.7)$$

$$y_1 = h_1(x) \\ \vdots \quad (4.8)$$

$$y_m = h_m(x)$$

en el cual  $f(x)$ ,  $g_1(x), \dots, g_m(x)$  son campos vectoriales suaves y  $h_1(x), \dots, h_m(x)$ , funciones suaves, definidas sobre un conjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ . Por conveniencia, estas ecuaciones serán reescritas en una forma condensada

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

$$y = h(x)$$

donde

$$u = \text{col}(u_1 \dots u_m),$$

$$y = \text{col}(y_1 \dots y_m),$$

y

$$g(x) = [g_1(x) \dots g_m(x)].$$

$$h(x) = \text{col}(h_1(x), \dots, h_m(x)).$$

donde las  $g_i(x)$  son columnas y forman una  $n \times m$ -matriz y  $h(x)$  es un  $m$ -vector

El punto de partida para el análisis es una versión multivariable apropiada de la noción de grado relativo, la cual describe la clase de sistemas no lineales multivariables.

**Definición 4.1** La función  $f(h)$  es llamada la Derivada de Lie de la función  $h$  a lo largo del campo vectorial  $f$ , si  $f$  es un campo vectorial suave sobre  $U$  y  $h$  es una función suave sobre  $U$ ; entonces  $f(h)$  es la función suave sobre  $U$  definida por

$$f(h)(p) = \sum_{i=1}^n f_i(p) \left( \frac{\partial h}{\partial x_i} \right) (p)$$

la cual es usualmente denotada por  $L_f h$ .

**Definición 4.2** Un sistema no lineal multivariable de la forma (4.7) – (4.8) tiene grado relativo  $\{r_1, \dots, r_m\}$  en el punto  $x^0$  si

(i)

$$L_{g_j} L_f^k h_i(x) = 0$$

para todo  $1 \leq j \leq m$ , para todo  $1 \leq i \leq m$  para toda  $k < r_i - 1$ , y para toda  $x$  en una vecindad de  $x^0$ ,

(ii) la matriz  $m \times m$

$$A(x) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1(x) \\ L_{g_1} L_f^{r_2-1} h_2(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_2-1} h_2(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ L_{g_1} L_f^{r_m-1} h_m(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m(x) \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

es no singular en  $x = x^0$ .

#### 4.2.1.1 Problema de Linealización Exacta del Espacio de Estado

Considere un sistema no lineal con grado relativo  $\{r_1, \dots, r_m\}$  en  $x^0$  y suponga que la suma  $r = r_1 + r_2 + \dots + r_m$  es igual a la dimensión  $n$  del espacio de estado. Si éste es el caso, el conjunto de funciones

$$\phi_k^i(x) = L_f^{k-1} h_i(x), \quad \text{para } 1 \leq k \leq r_i, 1 \leq i \leq m;$$

definen completamente una transformación local de coordenadas en  $x^0$ . El sistema en las nuevas

coordenadas está descrito por  $m$  conjuntos de ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_{r_i-1} &= \xi_{r_i} \\ \dot{\xi}_{r_i} &= b_i(\xi) + \sum_{j=1}^m a_{ij}(\xi)u_j(t)\end{aligned}$$

para  $1 \leq i \leq m$ .

Ahora, se hace notar que en una vecindad del punto  $\xi^0 = \Phi^{-1}(x^0)$  la matriz  $A(\xi)$  es no singular, y además la ecuación

$$v = b(\xi) + A(\xi)u$$

donde  $v \in \mathbb{R}^m$ ; puede ser resuelta para  $u$ . Para resolver estas ecuaciones en términos de la entrada  $u$ , se tiene la siguiente retroalimentación de estado

$$u = A^{-1}(\xi) [-b(\xi) + v].$$

Ahora, aplicando esta retroalimentación de estado al sistema original, resulta un sistema caracterizado por los  $m$  conjuntos de ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_{r_i-1} &= \xi_{r_i} \\ \dot{\xi}_{r_i} &= v_i\end{aligned}$$

para  $1 \leq i \leq m$ , el cual es claramente lineal y controlable.

Las condiciones para que el sistema tenga grado relativo  $\{r_1, \dots, r_m\}$  en  $x^0$ , (para algunas funciones de salida escogidas  $h_1(x), \dots, h_m(x)$ ) y que  $r_1 + r_2 + \dots + r_m = n$ , implica la existencia de una transformación de coordenadas y una retroalimentación de estado, definida localmente alrededor de  $x^0$ , la cual resuelve el Problema de Linealización Exacta del Espacio de Estado. Note que, en términos de la descripción original del sistema, la *retroalimentación linealizante* tiene

la forma

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v;$$

con  $\alpha(x)$  y  $\beta(x)$  dadas por

$$\alpha(x) = -A^{-1}(x)b(x), \quad \beta(x) = A^{-1}(x);$$

con  $A(x)$  como (4.9) y  $b(x)$  dada de la siguiente manera

$$b(x) = \begin{bmatrix} L_f^{r_1} h_1(x) \\ L_f^{r_2} h_2(x) \\ \dots \\ L_f^{r_m} h_m(x) \end{bmatrix}$$

Ahora, en el siguiente lema se muestra que las condiciones citadas anteriormente, son también necesarias.

**Lema 4.1** *Suponga que la matriz  $g(x^0)$  tiene rango  $m$ . Entonces, el Problema de Linealización Exacta en el Espacio de Estado es resuelto si y sólo si existe una vecindad  $U$  de  $x^0$  y  $m$  funciones evaluadas realmente  $h_1(x), \dots, h_m(x)$  definidas sobre  $U$ , tal que el sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned}$$

*tiene algún grado relativo  $\{r_1, \dots, r_m\}$  en  $x^0$  y  $r_1 + r_2 + \dots + r_m = n$ .*

□

## 4.2.2 Enfoque por Álgebra Diferencial y Modos Deslizantes

En esta sección se presenta una propuesta de solución basada en Álgebra Diferencial y Modos Deslizantes para obtener las ecuaciones de control que estabilicen al sistema multimáquina.

Considere la clase de sistemas no lineales multientradas-multisalidas,

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^n g_i(x).$$

Suponga que los campos  $f$  y  $g_i$  son suaves, entonces existe una transformación de coordenadas de estado dependiente de las entradas

$$z = \Phi \left( x, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha-1)} \right)$$

la cual transforma el sistema original en

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= z_{n-i}, \text{ donde } i = 1, \dots, (q-n) \\ \dot{z}_{q-n-j} &= -L_j(z, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}), \text{ donde } j = 1, \dots, n \\ y_k &= z_k, \text{ donde } k = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (4.10)$$

donde  $n$  es el número de generadores,  $m = m_1 = m_2 = \dots = m_n$  es el orden de cada generador y  $q = m_1 + m_2 + \dots + m_n$  es el orden del sistema total.

Definiendo el error de seguimiento como

$$\begin{aligned} e_i(x) &= z_i - y_{r_i}(t), \text{ donde } i = 1, \dots, n \\ e_{kn-j}(x) &= z_{kn-j} - y_{r_j}^{(k)}(t), \text{ donde para cada valor de } k = 1, \dots, m-1, j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

donde  $y_{r_1}(t), \dots, y_{r_n}(t)$  son las señales de referencia. Entonces, la dinámica del error de seguimiento está dada por

$$\begin{aligned} \dot{e}_i &= e_{n-i}, \text{ donde } i = 1, \dots, (q-n) \\ \dot{e}_{q-n-j} &= -L_j(z, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}) - y_{r_j}^{(m)}, \text{ donde } j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

donde  $n$  es el número de subsistemas y  $q$  es el orden del sistema total.

**Teorema 4.3** Considere la clase de sistemas, linealizables entrada-salida, multientradas-multisalidas (4.10). Sea una superficie deslizante basada en el error de seguimiento

$$\sigma(e) = \begin{bmatrix} \sigma_1(e) \\ \vdots \\ \sigma_n(e) \end{bmatrix} = \tilde{K} e \in \mathbb{R}^{n \times 1},$$

tal que,

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} k_n^1 & k_n^2 & \dots & k_n^{m-1} & I \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times q},$$

$$e = \text{col} \left( e_1 \ e_2 \ \dots \ e_{q-1} \ e_q \right) \in \mathbb{R}^{1 \times q},$$

y

$$k_n^1 = \text{diag}(k_{(1,1)}, k_{(2,1)}, \dots, k_{(n,1)}) \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

$$k_n^2 = \text{diag}(k_{(1,2)}, k_{(2,2)}, \dots, k_{(n,2)}) \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

$$\vdots$$

$$k_n^{m-1} = \text{diag}(k_{(1,(m-1))}, k_{(2,(m-1))}, \dots, k_{(n,(m-1))}) \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

donde  $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , las  $k$  son escogidas de polinomios Hurwitz de orden  $m-1$  respectivamente, y los controles  $u_1, u_2, \dots, u_n$  (donde  $u_i$  es el control para cada máquina) son solución de:

$$-L(z, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}) = \begin{bmatrix} -L_1(z, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}) \\ \vdots \\ -L_n(z, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}) \end{bmatrix} = -Ke + \dot{\sigma}(e) \in \mathbb{R}^{n \times 1},$$

tal que

$$K = \begin{bmatrix} 0 & k_n^1 & k_n^2 & \dots & k_n^{m-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times q},$$

$$\dot{\sigma}(e) = \begin{bmatrix} -W_1 \tanh(\sigma_1(e)) \\ \vdots \\ -W_n \tanh(\sigma_n(e)) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}.$$

donde  $W_1, \dots, W_n$  son constantes positivas y  $0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Entonces, el origen del sistema (4.10) es



localmente asintóticamente estable.

**Prueba:** Considere la siguiente superficie deslizante

$$\sigma(e) = \text{col}(\sigma_1(e), \dots, \sigma_n(e)) = \tilde{K} e$$

cuya dinámica está dada por

$$\dot{\sigma}(e) = Ke - L(z, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}). \quad (4.11)$$

Definiendo

$$\dot{\sigma}(e) = \begin{bmatrix} -W_1 \tanh(\sigma_1(e)) \\ \vdots \\ -W_n \tanh(\sigma_n(e)) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -\frac{W_1}{\sqrt{1-\sigma_1(e)^2}} \sigma_1(e) \\ \vdots \\ -\frac{W_n}{\sqrt{1-\sigma_n(e)^2}} \sigma_n(e) \end{bmatrix}$$

donde las  $W_i$  son constantes positivas.

Definiendo

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{W_1}{\sqrt{1+\sigma_1(e)^2}} \\ &\vdots \\ \rho_n &= \frac{W_n}{\sqrt{1+\sigma_n(e)^2}} \end{aligned}$$

donde las  $\rho_i$  son variables positivas, tenemos que

$$\dot{\sigma}(e) \approx - \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \rho_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1(e) \\ \vdots \\ \sigma_n(e) \end{bmatrix} = -\rho \sigma(e) = -\rho \tilde{K} e \in \mathbb{R}^{n \times 1}, \quad (4.12)$$

donde la matriz  $\rho \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Sustituyendo (4.12) en (4.11) y despejando  $L(z, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)})$ , se tiene que

$$L(z, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}) = Ke + \rho \tilde{K} e.$$

Ahora, para garantizar la estabilidad del sistema, se agregan dos términos de alta ganancia a la ecuación anterior,  $\Gamma_\xi$  y  $\Omega_\xi$  de la forma siguiente

$$L(z, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}) = \Gamma_\xi K \Omega_\xi e + \rho \tilde{K} e$$

donde

$$\Omega_\xi = \text{diag} (\xi^q, \xi^{q-1}, \dots, \xi^2, \xi) \in \mathbb{R}^{q \times q}; \xi \geq 1$$

$$\Gamma_\xi = \text{diag} (1, \xi, \xi^2, \dots, \xi^{n-1}) \in \mathbb{R}^{n \times n}; \xi \geq 1$$

Sustituyendo  $L(z, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)})$  en el sistema linealizado, resulta que

$$\dot{\bar{e}} = Ae + BL(z, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)})$$

$$\dot{\bar{e}} = (A + B\Gamma_\xi K\Omega_\xi)e + B\rho \tilde{K} e.$$

Ahora, haciendo el siguiente cambio de variables

$$\tilde{e} = \Omega_\xi e$$

se tiene

$$\dot{\tilde{e}} = \Omega_\xi (A + B\Gamma_\xi K\Omega_\xi) \Omega_\xi^{-1} \tilde{e} + \Omega_\xi B\rho \tilde{K} \Omega_\xi^{-1} \tilde{e}$$

donde las siguientes relaciones se cumplen

$$\Omega_\xi A\Omega_\xi^{-1} = \xi^n A; \Omega_\xi B\Gamma_\xi = \xi^n B; \Omega_\xi B\rho \tilde{K} \Omega_\xi^{-1} = M$$

$$\dot{\tilde{e}} = \xi^n (A + BK) \tilde{e} + M \tilde{e}.$$

Para probar la estabilidad del sistema, se propone una función candidata de Lyapunov de la siguiente forma

$$V = \frac{1}{2} \sigma(\tilde{e})^T \rho^{-1} \sigma(\tilde{e}) + \tilde{e}^T P \tilde{e}$$

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \left( \dot{\sigma}(\tilde{e})^T \rho^{-1} \sigma(\tilde{e}) + \sigma(\tilde{e})^T \rho^{-1} \dot{\sigma}(\tilde{e}) \right) + \dot{\tilde{e}}^T P \tilde{e} + \tilde{e}^T P \dot{\tilde{e}}$$

Substituyendo las expresiones apropiadas, se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\frac{1}{2} \left( \tilde{e}^T \tilde{K}^T \rho^T \rho^{-1} \tilde{K} \tilde{e} + \tilde{e}^T \tilde{K}^T \rho^{-1} \rho \tilde{K} \tilde{e} \right) \\ &\quad + \left( \xi^n \tilde{e}^T (A + BK)^T + \tilde{e}^T M^T \right) P \tilde{e} + \tilde{e}^T P \left( \xi^n (A + BK) \tilde{e} + M \tilde{e} \right) \end{aligned}$$

$$\dot{V} = -\tilde{e}^T \tilde{K}^T \tilde{K} \tilde{e} + \xi^n \tilde{e}^T \left( (A + BK)^T P + P(A + BK) \right) \tilde{e} + \tilde{e}^T (M^T P + PM) \tilde{e}$$

definiendo

$$(A + BK)^T P + P(A + BK) = -Q, \quad M^T P + PM = F$$

Sustituyendo las expresiones adecuadas en  $\dot{V}$ , se tiene

$$\dot{V} = -\tilde{e}^T \tilde{K}^T \tilde{K} \tilde{e} - \xi^n \tilde{e}^T Q \tilde{e} + \tilde{e}^T F \tilde{e}$$

$$\dot{V} \leq -\|\tilde{K}\|^2 \|\tilde{e}\|^2 - \xi^n \lambda_{\min}(Q) \|\tilde{e}\|^2 + \lambda_{\max}(F) \|\tilde{e}\|^2$$

Reagrupando los términos apropiados, se tiene que

$$\dot{V} \leq -\left(\|\tilde{K}\|^2 + \xi^n \lambda_{\min}(Q) - \lambda_{\max}(F)\right) \|\tilde{e}\|^2$$

y definiendo  $\mu$  como sigue

$$\mu = \|\tilde{K}\|^2 + \xi^n \lambda_{\min}(Q) - \lambda_{\max}(F) > 0$$

de modo que la siguiente desigualdad se satisface

$$\xi > \left( \frac{-\|\tilde{K}\|^2 + \lambda_{\max}(F)}{\lambda_{\min}(Q)} \right)^{\frac{1}{n}}$$

Entonces, se asegura que

$$\dot{V} \leq -\mu \|\tilde{e}\|^2$$

Esto termina la demostración. ■

# Capítulo 5

## Aplicaciones a Sistemas Eléctricos de Potencia

### 5.1 Aplicación al Generador Síncrono Conectado a una Barra Infinita

En esta sección se presentan los controladores basados en el modelo reducido del Generador Síncrono conectado a una Barra Infinita (tercer orden), el cual fue introducido en el Capítulo 3. Los controles diseñados están basados en las técnicas de Retroalimentación Linealizante, Álgebra Diferencial, Modos Deslizantes y Aproximación por Álgebra Diferencial a Modos Deslizantes, los cuales son aplicados al modelo de Quinto Orden del Generador Síncrono obtenido en el Capítulo 2, el cual está representado por la Figura 5.1 y cuyos parámetros se muestran en la Tabla 5.1.

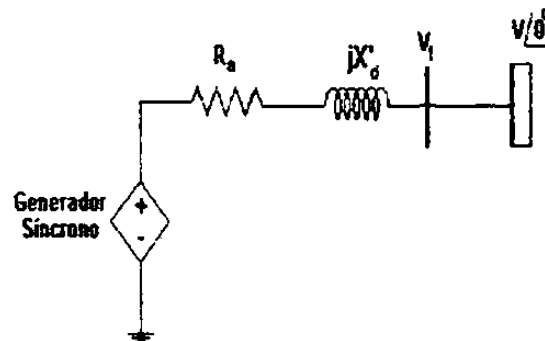


Figura 5.1: Generador Síncrono - Barra Infinita Simplificado

Tabla 5.1: Parámetros del Generador Síncrono

Parámetro	Unidad	Valor Nominal	Valor de Prueba	Valor de Prueba	Valor de Prueba	Valor de Prueba	Valor de Prueba	Valor de Prueba
$R_a$	$\Omega$	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001
$X_d'$	$\Omega$	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
$X_q'$	$\Omega$	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
$X_d$	$\Omega$	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
$X_q$	$\Omega$	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
$T_d'$	s	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
$T_d$	s	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
$T_q'$	s	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
$T_q$	s	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
$T_e$	s	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
$T_m$	s	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
$T_{m0}$	s	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
$T_{m1}$	s	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
$T_{m2}$	s	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
$T_{m3}$	s	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
$T_{m4}$	s	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
$T_{m5}$	s	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
$T_{m6}$	s	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
$T_{m7}$	s	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
$T_{m8}$	s	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
$T_{m9}$	s	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
$T_{m10}$	s	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05

### 5.1.1 Controlador basado en la Retroalimentación Linealizante

A partir del modelo reducido de un Generador Síncrono conectado a un Barra Infinita dado por la ecuación (3.7), el cual está representado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}$$

donde

$$f(x) = \begin{pmatrix} (x_2 - \omega_0) \\ (m_1 - m_2 x_3^2 + m_3 x_3 \cos(x_1) - m_4 x_3 \sin(x_1) + \\ -m_5 (R_a \sin(x_1) + X_q \cos(x_1)) (X_d' \sin(x_1) - R_a \cos(x_1))) \\ (-m_6 x_3 + m_7 \sin(x_1) + m_8 \cos(x_1)) \end{pmatrix}$$

$$g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m_9 \end{pmatrix}$$

se determinará la ley de control con retroalimentación linealizante. Haciendo un cambio de coordenadas de la siguiente forma

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ L_f^2 h(x) \end{bmatrix}$$

resulta que el sistema descrito en las nuevas coordenadas está dado por

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ \dot{z}_3 &= b(z) + a(z)u\end{aligned}$$

donde  $a(z)$  y  $b(z)$  en coordenadas originales están descritas por

$$\begin{aligned}a(z) &= a(\Phi(x)) = L_g L_f^2 h(x) \\ b(z) &= b(\Phi(x)) = L_f^3 h(x).\end{aligned}$$

Ahora, igualando la última ecuación del sistema anterior a un control auxiliar  $v$ ,

$$\dot{z}_3 = b(z) + a(z)u = v$$

y despejando  $u$ , se obtiene el control con retroalimentación linealizante en las coordenadas originales

$$u = \frac{-b(\Phi(x)) + v}{a(\Phi(x))} = \frac{-L_f^3 h(x) + v}{L_g L_f^2 h(x)}$$

donde

$$\begin{aligned} h(x) &= x_1 \\ L_f h(x) &= x_2 - \omega_0 \\ L_f^2 h(x) &= m_1 - m_2 x_3^2 + m_3 x_3 \cos(x_1) - m_4 x_3 \sin(x_1) + \\ &\quad - m_5 (R_a \sin(x_1) + X_q \cos(x_1)) (X'_d \sin(x_1) - R_a \cos(x_1)) \\ L_f^3 h(x) &= (-m_3 x_3 \sin(x_1) - m_4 x_3 \cos(x_1) - m_5 R_a (X'_d + X_q) \sin(2x_1) + \\ &\quad + m_5 (R_a^2 - X_q X'_d) \cos(2x_1)) * (x_2 - \omega_0) + (-2m_2 x_3 + m_3 \cos(x_1) + \\ &\quad - m_4 \sin(x_1)) * (-m_6 x_3 + m_7 \sin(x_1) + m_8 \cos(x_1)) \\ L_g L_f^2 h(x) &= m_9 (-2m_2 x_3 + m_3 \cos(x_1) - m_4 \sin(x_1)) \end{aligned}$$

el control es el siguiente

$$\begin{aligned} u &= \left\{ -[(-2m_2 x_3 + m_3 \cos(x_1) - m_4 \sin(x_1)) * (-m_6 x_3 + m_7 \sin(x_1) + m_8 \cos(x_1)) + \right. \\ &\quad + (-m_3 x_3 \sin(x_1) - m_4 x_3 \cos(x_1) - m_5 R_a (X'_d + X_q) \sin(2x_1) + \\ &\quad + m_5 (R_a^2 - X_q X'_d) \cos(2x_1)) * (x_2 - \omega_0)] + v \left. \right\} \times \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{m_9 (-2m_2 x_3 + m_3 \cos(x_1) - m_4 \sin(x_1))} \right\} \end{aligned}$$

y el control auxiliar en términos del error de seguimiento

$$\begin{aligned} e_1 &= h(x) - y_r \\ e_2 &= L_f h(x) - \dot{y}_r \\ e_3 &= L_f^2 h(x) - y_r^{(2)} \end{aligned}$$

es de la forma

$$v = - \sum_{i=1}^3 a_{i-1} e_i$$

donde los coeficientes  $a_0, a_1, a_2$  son seleccionados de un polinomio Hurwitz de tercer orden, esto es,

$$\lambda^3 + 24\lambda^2 + 191\lambda + 504$$

$$v = -504e_1 - 191e_2 - 24e_3 \quad (5.1a)$$

y la referencia  $y_r$  cambia de valor respecto al tiempo usando las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} & \text{if } t > 15, \text{ then } y_r = .1; \\ & \text{else } y_r = .3; \text{ end} \end{aligned}$$

### 5.1.2 Controlador basado en Álgebra Diferencial

Considerando el modelo del generador síncrono dado en (3.7), y haciendo un cambio de coordenadas de la siguiente manera

$$z = \Phi(x, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha-1)})$$

donde las derivadas sucesivas de la salida están dadas por

$$\begin{aligned}
 y &= x_1 = z_1 \\
 \dot{y} &= x_2 - \omega_0 = z_2 \\
 y^{(2)} &= m_1 - m_2 x_3^2 + m_3 x_3 \cos(x_1) - m_4 x_3 \sin(x_1) + \\
 &\quad -m_5 (R_a \sin(x_1) + X_q \cos(x_1)) (X'_d \sin(x_1) - R_a \cos(x_1)) \\
 y^{(2)} &= z_3 \\
 y^{(3)} &= (-2m_2 x_3 + m_3 \cos(x_1) - m_4 \sin(x_1)) \times (-m_6 x_3 + m_7 \sin(x_1) + \\
 &\quad + m_8 \cos(x_1) + m_9 u) + (-m_3 x_3 \sin(x_1) - m_4 x_3 \cos(x_1) + \\
 &\quad -m_5 R_a (X'_d + X_q) \sin(2x_1) + m_5 (R_a^2 - X_q X'_d) \cos(2x_1)) \times (x_2 - \omega_0) \\
 y^{(3)} &= -L(z, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)})
 \end{aligned}$$

el cual transforma el sistema en

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1 &= z_2 \\
 \dot{z}_2 &= z_3 \\
 \dot{z}_3 &= -L(z, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}).
 \end{aligned}$$

donde  $-L(z, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)})$  contiene las no linealidades del sistema. Ahora, resolviendo la ecuación diferencial

$$-L(z, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}) = v,$$

el control  $u$  es el siguiente

$$\begin{aligned}
 u &= \left\{ -[(-2m_2 x_3 + m_3 \cos(x_1) - m_4 \sin(x_1)) \times (-m_6 x_3 + m_7 \sin(x_1) + m_8 \cos(x_1)) + \right. \\
 &\quad + (-m_3 x_3 \sin(x_1) - m_4 x_3 \cos(x_1) - m_5 R_a (X'_d + X_q) \sin(2x_1) + \\
 &\quad + m_5 (R_a^2 - X_q X'_d) \cos(2x_1)) \times (x_2 - \omega_0)] + v \left. \right\} \times \\
 &\quad \times \left\{ \frac{1}{m_9 (-2m_2 x_3 + m_3 \cos(x_1) - m_4 \sin(x_1))} \right\}
 \end{aligned}$$

donde el control auxiliar  $v$  está dado como en la ecuación (5.1a). El error de seguimiento es el



siguiente

$$\begin{aligned} e_1 &= y - y_r \\ e_2 &= \dot{y} - \dot{y}_r \\ e_3 &= y^{(2)} - y_r^{(2)} \end{aligned}$$

y la referencia  $y_r$  está dada como en (5.1b).

Debido a que el modelo de generador síncrono tiene grado relativo {3}, las ecuaciones de control obtenidas por ambas técnicas resultaron ser iguales.

A continuación se presentan los resultados de simulación de los controladores basados en Retroalimentación Linealizante y Álgebra Diferencial;

Como se puede observar en la Figura 5.2, la señal de salida sigue adecuadamente a la señal de referencia pero de manera oscilatoria, esto se debe al efecto de la resistencia de armadura, las cuales se irán atenuando hasta desaparecer.

En el caso de despreciar la resistencia de armadura, estas oscilaciones no se presentan

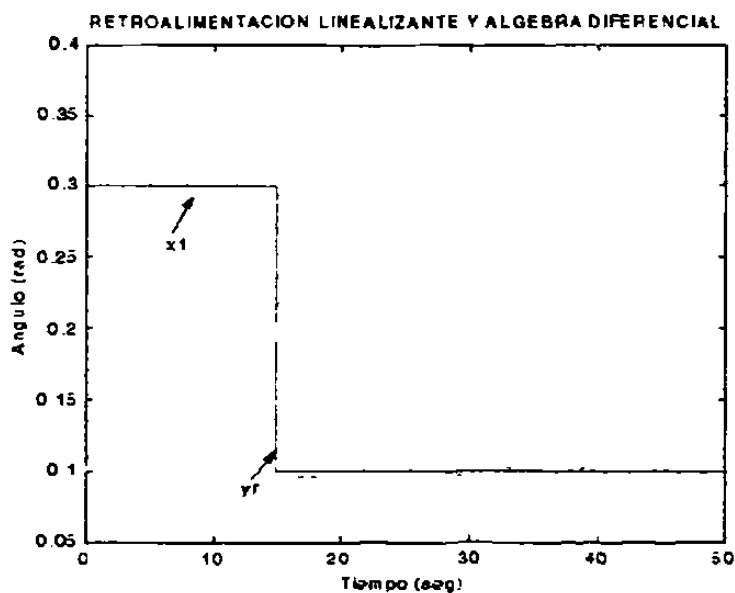


Figura 5.2, Señal de salida del Generador Síncrono conectado a una Barra Infinita

Por otra parte, la señal de control mostrada en la Figura 5.3, presenta sobrepasos elevados durante los cambios de referencia y par mecánico.

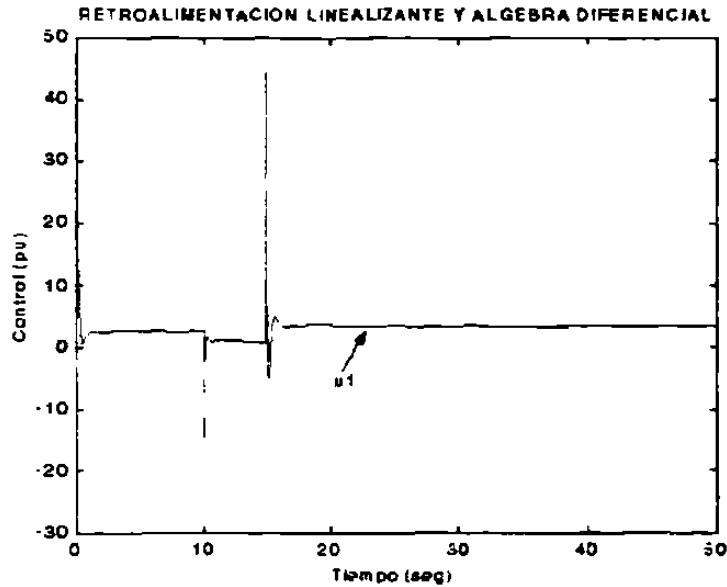


Figura 5.3, Señal de Control para el Generador Síncrono conectado a una Barra Infinita

### 5.1.3 Controlador basado en Modos Deslizantes

Considerando el modelo del generador síncrono, y haciendo un cambio de coordenadas similar al utilizado en el método Retroalimentación Linealizante, el sistema queda descrito de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ \dot{z}_3 &= \frac{1}{\beta(x, z)} [u - \alpha(x, z)]\end{aligned}$$

Definiendo el error de seguimiento como sigue

$$\begin{aligned}e_1 &= h(x) - y_r \\ e_2 &= L_f h(x) - \dot{y}_r \\ e_3 &= L_f^2 h(x) - y_r^{(2)}\end{aligned}$$

cuya dinámica está dada de la siguiente forma

$$\dot{e}_1 = e_2$$

$$\begin{aligned}\dot{e}_2 &= e_3 \\ \dot{e}_3 &= \frac{1}{\beta(x, z)} [u_{eq} - \alpha(x, z)] - y_r^{(3)}.\end{aligned}$$

En seguida, seleccionando una variedad deslizante de la siguiente forma

$$s = e_3 + k_1 e_1 + k_2 e_2 = 0$$

donde  $k_1, k_2$  son seleccionadas del siguiente polinomio Hurwitz de segundo orden  $\lambda^2 + 3\lambda + 2$ .

Derivando la variedad deslizante con respecto al tiempo

$$\dot{s} = \frac{1}{\beta(x, z)} [u_{eq} - \alpha(x, z)] - y_r^{(3)} + k_1 e_2 + k_2 e_3 = 0$$

y despejando el control equivalente  $u_{eq}$ , se obtiene

$$u_{eq} = (y_r^{(3)} - k_1 e_2 - k_2 e_3) \beta(x, z) + \alpha(x, z)$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  están dada por las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}\alpha(x, z) &= -\frac{L_f^3 h(x)}{L_g L_f^2 h(x)} \\ \beta(x, z) &= \frac{1}{L_g L_f^2 h(x)}\end{aligned}$$

Finalmente, el control  $u$ , en coordenadas originales, es de la siguiente forma

$$\begin{aligned}u &= u_{eq} + \beta(x, z)v \\ u &= \{(y_r^{(3)} - k_1 e_2 - k_2 e_3) - [(-2m_2 x_3 + m_3 \cos(x_1) - m_4 \sin(x_1)) \times (-m_6 x_3 + \\ &\quad + m_7 \sin(x_1) + m_8 \cos(x_1)) + (-m_3 x_3 \sin(x_1) - m_4 x_3 \cos(x_1) + \\ &\quad - m_5 R_a (X_d' + X_q) \sin(2x_1) + m_5 (R_a^2 - X_q X_d') \cos(2x_1)) \times (x_2 - \omega_0)] + v\} \times \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{m_9 (-2m_2 x_3 + m_3 \cos(x_1) - m_4 \sin(x_1))} \right\}.\end{aligned}$$

De manera similar el control auxiliar  $v$  esta dado por la ecuación (5.1a) y la referencia  $y_r$  por (5.1b).

Ya obtenida la ecuación de control, podemos presentar ahora los resultados en simulación.

Como se puede observar en los resultados de simulación en la Figura 5.4, la señal de salida sigue a la señal de referencia de manera correcta.

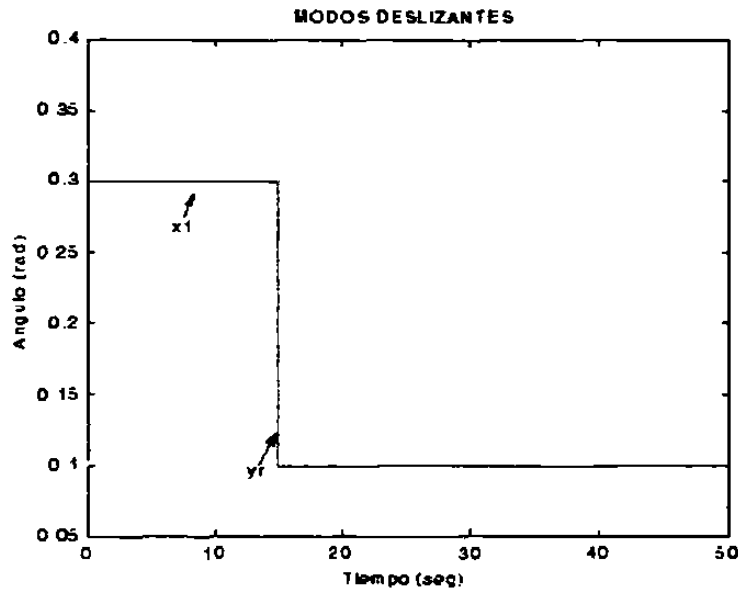


Figura 5.4: Señal de salida del Generador Síncrono conectado a una Barra Infinita

Observando la señal de control mostrada en la Figura 5.5, ésta requiere de menor energía que en el caso de Retroalimentación Linealizante y Algebra Diferencial, para poder lograr que la señal de salida alcance a la referencia.

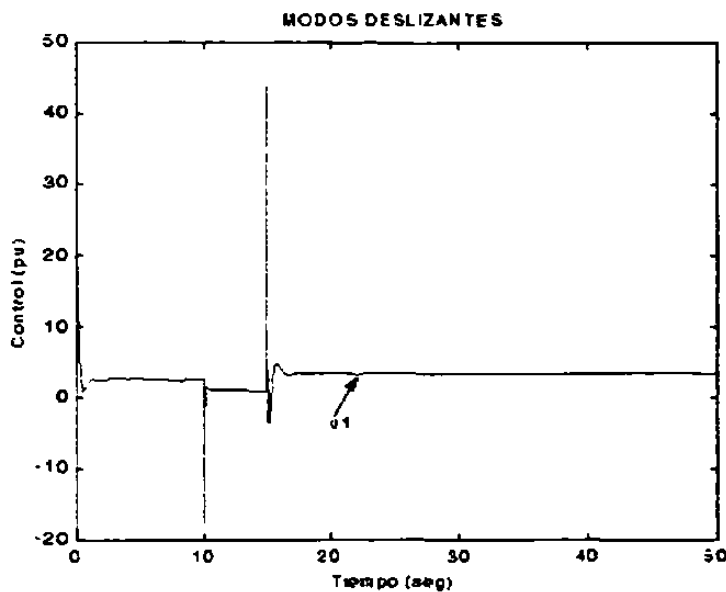


Figura 5.5: Señal de Control para el Generador Síncrono conectado a una Barra Infinita

### 5.1.4 Control basado en la Aproximación por Álgebra Diferencial a Modos Deslizantes

Mediante un cambio de coordenadas, similar al utilizado con el método basado en Álgebra Diferencial, el modelo del generador síncrono queda descrito de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ \dot{z}_3 &= -L(z, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}).\end{aligned}$$

Definiendo las componentes del vector del error de seguimiento

$$\begin{aligned}e_1 &= y - y_r \\ e_2 &= \dot{y} - \dot{y}_r \\ e_3 &= y^{(2)} - y_r^{(2)}\end{aligned}$$

donde la referencia  $y_r$  está dada por (5.1b); ahora, se propone una superficie deslizante de la siguiente forma

$$\sigma(z) = k_1 e_1 + k_2 e_2 + e_3$$

donde  $k_1$  y  $k_2$  son seleccionadas a partir del polinomio Hurwitz de segundo orden  $\lambda^2 + 3\lambda + 2$ . Además, imponiendo una dinámica deslizante sobre la superficie  $\sigma(z)$  de la siguiente forma

$$\dot{\sigma}(z) = -W \text{sign}(\sigma(z)).$$

donde  $W$  es una constante positiva. Entonces, en base a la Proposición 1 del Capítulo 4, se tiene

$$-L(z, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}) = -\sum_{i=1}^3 a_{i-1} e_i - W \text{sign}(\sigma(z)).$$

Despejando el control  $u$ , se obtiene

$$\begin{aligned}u &= \{ -[(-2m_2 x_3 + m_3 \cos(x_1) - m_4 \sin(x_1)) \times (-m_6 x_3 + m_7 \sin(x_1) + m_8 \cos(x_1)) + \\ &\quad + (-m_3 x_3 \sin(x_1) - m_4 x_3 \cos(x_1) - m_5 R_a (X'_d + X_q) \sin(2x_1) + \\ &\quad + m_5 (R_a^2 - X_q X'_d) \cos(2x_1)) \times (x_2 - \omega_0)] - 504e_1 - 191e_2 - 24e_3 + \end{aligned}$$

$$-W \operatorname{sign}(k_1 e_1 + k_2 e_2 + e_3) \times \left\{ \frac{1}{m_0(-2m_2 x_3 + m_3 \cos(x_1) - m_4 \sin(x_1))} \right\}$$

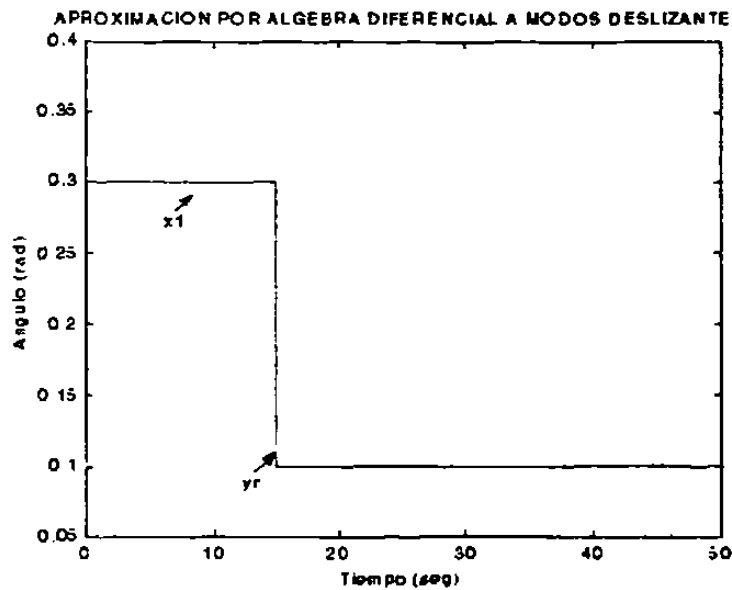


Figura 5.6: Señal de salida del Generador Sincrono conectado a una Barra Infinita

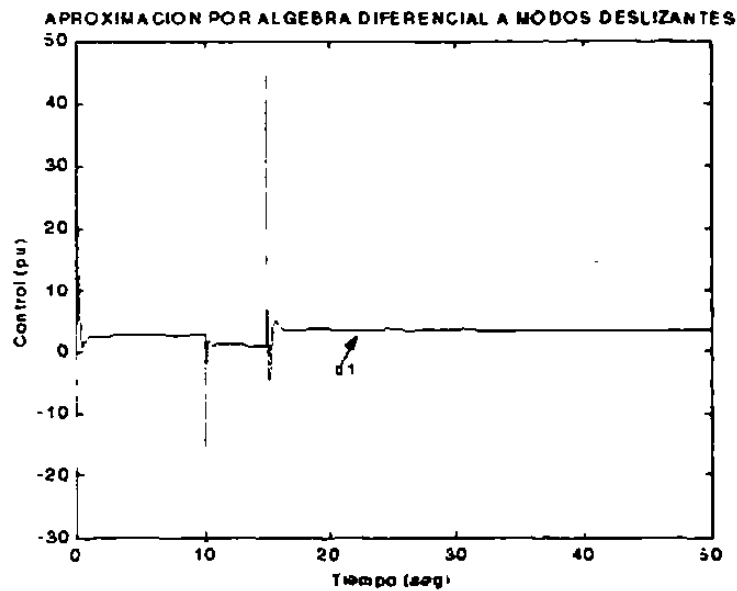


Figura 5.7: Señal de Control para el Generador Sincrono conectado a una Barra Infinita

En la Figura 5.6 se puede observar que la salida sigue a la referencia en forma correcta aunque

con pequeñas oscilaciones al igual que con los controladores ya antes mencionados.

La señal de control se puede observar en la Figura 5.7, y como se muestra, la señal de control requiere de un poco más de energía que en los casos anteriores para permitir que la señal de salida alcance a la referencia en forma correcta.

### 5.1.5 Conclusiones

En el diseño de los controladores basados en las técnicas de Retroalimentación Linealizante, Álgebra Diferencial, Modos Deslizantes, y Aproximación por Álgebra Diferencial a Modos Deslizantes, aplicadas al modelo del Generador Síncrono conectado a una Barra Infinita, primero se pudo observar que los controladores basados en Retroalimentación Linealizante y Álgebra Diferencial fueron exactamente iguales, esto es debido a que el sistema tiene grado relativo completo, es decir, el grado relativo del sistema es  $\{3\}$ , igual al orden del mismo. Observando los resultados en simulación obtenidos en base a estas cuatro técnicas, y como se puede observar en la gráfica comparativa mostrada en la Figura 5.8.

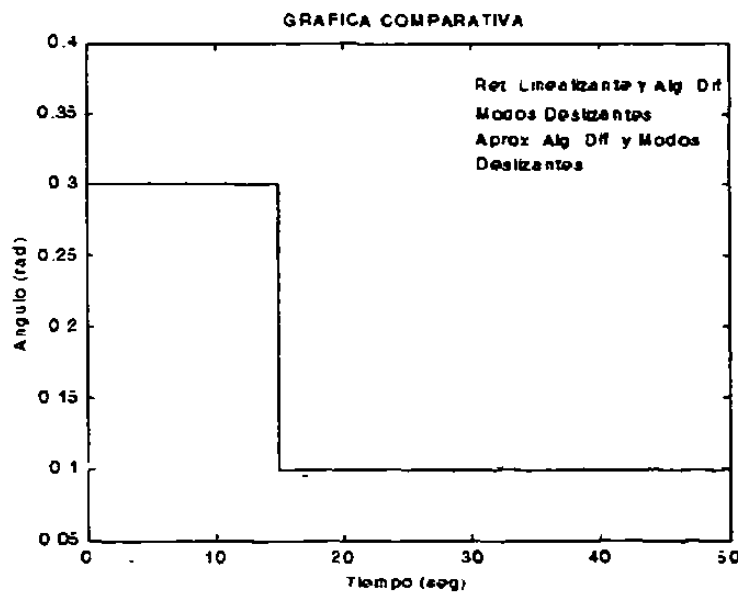


Figura 5.8: Gráfica Comparativa de las Señales de salida del Generador Síncrono conectado a una Barra Infinita

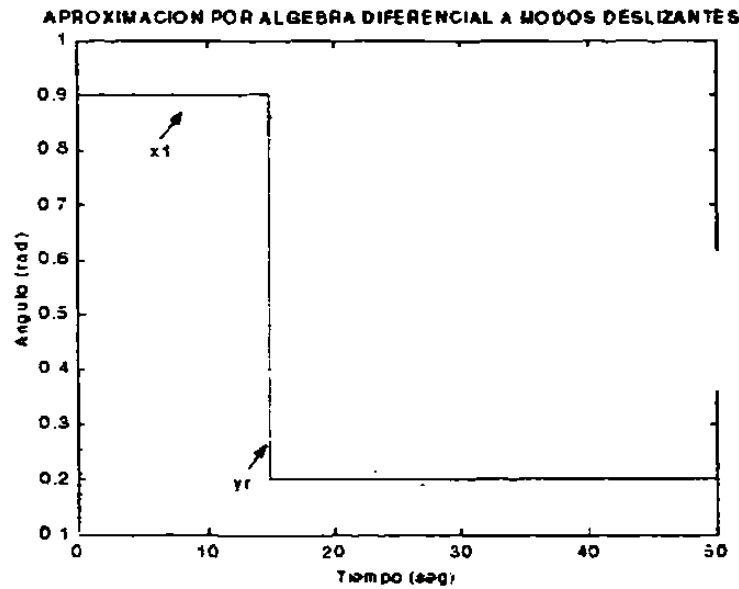


Figura 5.6\_1: Señal de salida del Generador Síncrono conectado a una Barra Infinita

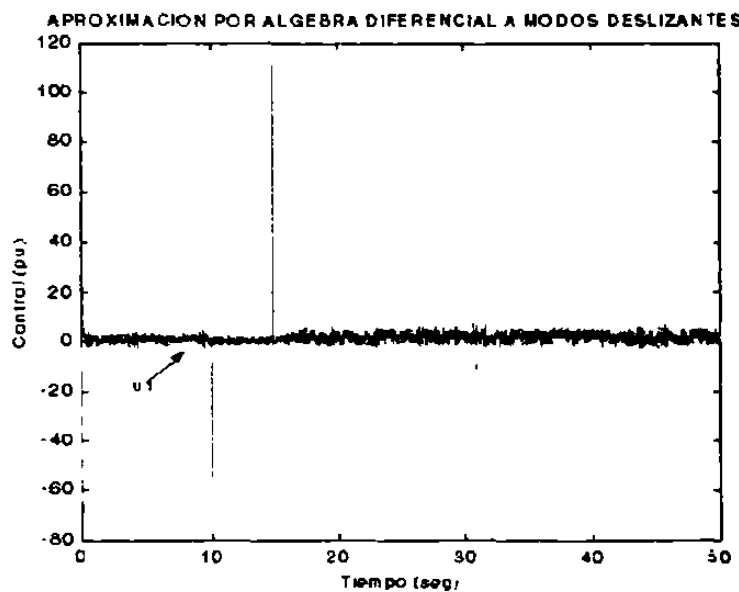


Figura 5.7\_1: Señal de Control para el Generador Síncrono conectado a una Barra Infinita

Cabe mencionar que las simulaciones anteriores fueron realizadas variando el par mecánico de 1 a 0.5 a los 10 segundos de haber iniciado la simulación. Como se puede apreciar en la Figura 5.8, los controladores diseñados respondieron adecuadamente ante esta variación paramétrica.

Las salidas siguen adecuadamente a la referencia, en los tres casos, la única diferencia



encontrada es en la energía requerida para lograrlo, el controlador basado en Modos Deslizantes (ver Figura 5.5) es el que ocupó menor energía en los primeros instantes de tiempo. En esta aplicación, el controlador basado en la Aproximación por Álgebra Diferencial a Modos Deslizantes (ver Figura 5.7) es el que nos ofrece una ventaja mayor sobre los otros controladores, ya que podemos variar el parámetro  $W$  para ajustar el controlador para que funcione adecuadamente. Esta ventaja se ve reflejada en las Figuras 5.6.1 y 5.7.1 donde al efectuar un cambio de referencia hasta 0.9, el único controlador que pudo responder a este cambio fue el de Aproximación por Álgebra Diferencial a Modos Deslizantes, en el momento en que se cambió el valor de  $W$  a 300.

Como se puede observar en la Figura 5.7.1, la señal de control ocupó aun más energía pero fue el único que pudo alcanzar a la referencia.

## 5.2 Aplicación al Sistema Multimáquina

### 5.2.1 Sistema Multimáquina de Tres Generadores y Nueve Nodos

Considere un sistema multimáquina de 3 generadores y 9 nodos como el que se muestra en la Figura 5.9, cuyos parámetros se muestran en la Tabla 5.2. Para obtener la representación dinámica de este sistema, es necesario determinar la matriz de admitancias  $Y_{total}$ , cuyos valores se muestran en la Tabla 5.3, y también es necesario reducir el número de nodos del sistema, de tal manera que el número de nodos sea igual al número de generadores ya que el modelo toma en cuenta las admitancias que hay entre generador y nodo y entre nodo y nodo de los generadores, por tal motivo si se desea tomar en cuenta todos los parámetros de la red, es necesario aplicar la reducción de nodos

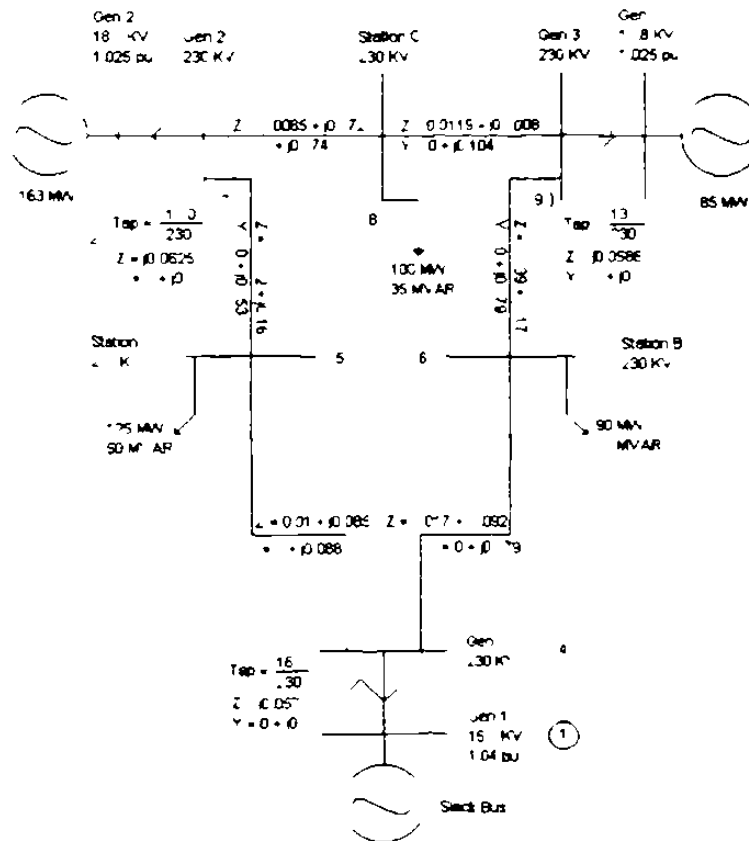


Figura 5.9 Sistema Multimáquina de 3 Generadores y 9 Nodos

Tabla 5.2 Parámetros de los Generadores Sincronos


Tabla 5.3: Valores de la Matriz de admitancia nodal  $Y_{nodal}$ 

$$\begin{pmatrix}
 0 - j8.4459 & 0 & 0 & 0 + j8.4459 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & j5.4855 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & j4.1684 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 + j8.4459 & 0 & 0 & 0 & 3.3074 & j30.3937 & 1.3652 + j11.6041 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1.3652 + j11.6041 & 3.8129 & j17.8423 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1.9422 + j10.5107 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 + j5.4855 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.1876 + j5.9751 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 + j4.1684 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \\
 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 + j5.4855 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 + j4.1684 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1.9422 + j10.5107 & 0 \\
 0 & 1.1876 + j5.9751 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 4.1012 & j16.1333 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.2820 + j5.5882 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 2.8047 & j24.9311 & 1.6171 + j13.6980 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -1.6171 + j13.6980 & 3.7410 & j23.6423 & 1.1551 + j9.7843 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1.2820 + j5.5882 & 0 & 1.1551 + j9.7843 & 2.4371 & j19.2574 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix}$$

Esto se puede llevar a cabo utilizando el método de reducción de nodos de Kron (ver Apéndice A), el cual reduce el sistema como se muestra en la siguiente Figura 5.10 y sus valores de la  $Y_{nodal}$

reducida se muestran en la Tabla 5.4.

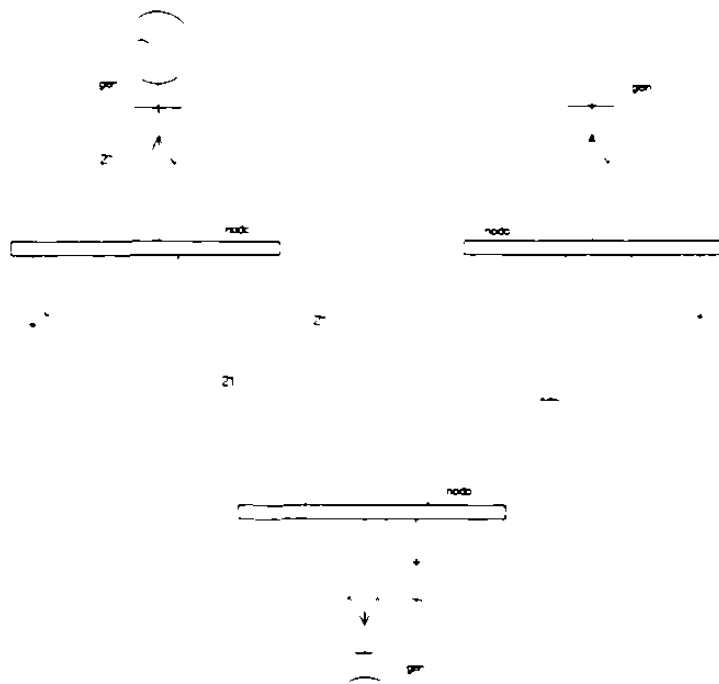


Figura 5.10 Sistema Multimaquina de 3 Generadores y 3 Nodos

Tabla 5.4 Parametros de la Matriz de admitancia nodal  $Y_{nodal}$

$$\begin{pmatrix} 0.8452 - j2.9880 & 0.2869 + j1.5131 & 0.2095 + j1.2257 \\ 0.2869 + j1.5131 & 0.4199 - j2.7238 & 0.2132 + j1.0880 \\ 0.2095 + j1.2257 & 0.2132 + j1.0880 & 0.2769 - j2.3681 \end{pmatrix}$$

Considerando el modelo obtenido en el capítulo 2 para el sistema multimaquina, y efectuando el siguiente cambio de variable

$$\begin{aligned} x_1 &= \delta_1, x_2 = \delta_2, x_3 = \delta_3, x_4 = \omega_1, x_5 = \omega_2, x_6 = \omega_3, x_7 = E_{q1}, x_8 = E_{q2}, x_9 = E_{q3}, \\ u_1 &= E_f, u_2 = E_{f2}, u_3 = E_r \end{aligned}$$

entonces, el sistema multimaquina tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{3-i} - \omega_0 \\ \dot{x}_{3-i} &= \frac{\omega_0}{2H} (P_m - P_i) - \frac{D_i}{2H} (x_{3-i} - \omega_0) \\ \dot{x}_{6-i} &= \frac{1}{T_{d_i}} (u_i - E_q) \end{aligned} \quad (5.4a)$$

donde  $i = 1, \dots, 3$

$$\begin{aligned} P_1 &= x_2^2 G_{11} + x_7 x_8 (B_{12} \sin(x_1 - x_2) + G_{12} \cos(x_1 - x_2)) \\ &\quad + x_7 x_9 (B_{13} \sin(x_1 - x_3) + G_{13} \cos(x_1 - x_3)) \\ P_2 &= x_8^2 G_{22} + x_8 x_7 (B_{21} \sin(x_2 - x_1) + G_{21} \cos(x_2 - x_1)) \\ &\quad + x_8 x_9 (B_{23} \sin(x_2 - x_3) + G_{23} \cos(x_2 - x_3)) \\ P_3 &= x_9^2 G_{33} + x_9 x_7 (B_{31} \sin(x_3 - x_1) + G_{31} \cos(x_3 - x_1)) \\ &\quad + x_9 x_8 (B_{32} \sin(x_3 - x_2) + G_{32} \cos(x_3 - x_2)) \\ E_q &= x_7 + (X_{d1} - X'_{d1}) [x_8 B_{12} \cos(x_1 - x_2) + G_{12} \sin(x_1 - x_2)] \\ &\quad + (X_{d1} - X'_{d1}) [x_9 (B_{13} \cos(x_1 - x_3) + G_{13} \sin(x_1 - x_3))] \\ E_{q2} &= x_8 + (X_{d2} - X'_{d2}) [x_7 B_{21} \cos(x_2 - x_1) + G_{21} \sin(x_2 - x_1)] \\ &\quad + (X_{d2} - X'_{d2}) [x_9 (B_{23} \cos(x_2 - x_3) + G_{23} \sin(x_2 - x_3))] \\ E_{q3} &= x_9 + (X_{d3} - X'_{d3}) [x_7 B_{31} \cos(x_3 - x_1) + G_{31} \sin(x_3 - x_1)] \\ &\quad + (X_{d3} - X'_{d3}) [x_8 (B_{32} \cos(x_3 - x_2) + G_{32} \sin(x_3 - x_2))] \end{aligned} \quad (5.4b)$$

### 5.2.1.1 Retroalimentación Linealizante

A partir del sistema multimaquina mostrado en la Figura (5.9), el cual esta representado por las ecuaciones (5.4a) y (5.4b), donde (5.4a) se reescribe de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_4 - \omega_0 \\
 \dot{x}_2 &= x_5 - \omega_0 \\
 \dot{x}_3 &= x_6 - \omega_0 \\
 \dot{x}_4 &= a_1(P_{m1} - P_1) - a_2(x_4 - \omega_0) \\
 \dot{x}_5 &= b_1(P_{m2} - P_2) - b_2(x_5 - \omega_0) \\
 \dot{x}_6 &= c_1(P_{m3} - P_3) - c_2(x_6 - \omega_0) \\
 \dot{x}_7 &= a_3(u_1 - E_q) \\
 \dot{x}_8 &= b_3(u_2 - E_{q2}) \\
 \dot{x}_9 &= c_3(u_3 - E_{q3})
 \end{aligned}$$

donde  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, y c_3$  estan dadas por

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{\omega_0}{2H_1}, & a_2 &= \frac{D_1}{2H_1}, & a_3 &= \frac{1}{T_{d01}} \\
 b_1 &= \frac{\omega_0}{2H_2}, & b_2 &= \frac{D_2}{2H_2}, & b_3 &= \frac{1}{T_{d02}} \\
 c_1 &= \frac{\omega_0}{2H_3}, & c_2 &= \frac{D_3}{2H_3}, & c_3 &= \frac{1}{T_{d03}}
 \end{aligned}$$

el cual se representa en forma compacta como

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x) u_i$$

donde el campo  $f(x)$  esta dado por

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_4 & \omega_0 \\ x_5 & \omega_0 \\ x_6 & \omega_0 \\ a_1(P_{m_1} & P_1) & a_2 x_4 & \omega_0 \\ b_1(P_{m_2} & P_2) & b_2 x_5 & \omega_0 \\ c_1(P_{m_3} & P_3) & c_2 x_6 & \omega_0 \\ a_3 E_{q_1} \\ b E_{q_2} \\ c_3 E_{q_3} \end{pmatrix}$$

y  $g_1(x)$ ,  $g_2(x)$ , y  $g_3(x)$ , tienen la siguiente forma

$$g_1(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ a_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad g_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad g_3(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Para poder comprobar que el sistema tiene grado relativo  $\{3, 3, 3\}$  es necesario determinar la matriz de desacoplamiento  $A(x)$ , la cual tiene la siguiente forma

$$A(x) = \begin{bmatrix} L_g L_f^2 h_1(x) & L_{g_2} L_f^2 h_1(x) & L_{g_3} L_f^2 h_1(x) \\ L_{g_1} L_f^2 h_2(x) & L_{g_2} L_f^2 h_2(x) & L_{g_3} L_f^2 h_2(x) \\ L_g L_f^2 h_3(x) & L_{g_2} L_f^2 h_3(x) & L_{g_3} L_f^2 h_3(x) \end{bmatrix}$$

donde

$$L_{g_1} L_f^2 h_1(x) = 2a a_3 x - G_{11} \quad a_1 a_2 x_4 (B_{12} \sin(x_1 - x_2) + G_{12} (\cos(x_1 - x_2)))$$

$$\begin{aligned}
& -a_1 a_3 x_9 (B_{13} \sin(x_1 - x_3) + G_{13} \cos(x_1 - x_3)) \\
L_{g_1} L_f^2 h_1(x) & \triangleq \eta_1 \\
L_{g_1} L_f^2 h_2(x) & = b_1 a_3 x_8 (B_{21} \sin(x_2 - x_1) + G_{21} \cos(x_2 - x_1)) \quad \eta_2 \\
L_{g_1} L_f^2 h_3(x) & = -c_1 a_3 x_9 (B_{31} \sin(x_3 - x_1) + G_{31} \cos(x_3 - x_1)) \quad \eta_3 \\
L_{g_2} L_f^2 h_1(x) & = -a_1 b_3 x_7 (B_{12} \sin(x_1 - x_2) + G_{12} \cos(x_1 - x_2)) \quad \gamma_1 \\
L_{g_2} L_f^2 h_2(x) & = 2b_1 b_3 x_8 G_{22} - b_1 b_3 x_7 (B_{21} \sin(x_2 - x_1) + G_{21} \cos(x_2 - x_1)) \\
& \quad b_1 b_3 x_9 (B_{23} \sin(x_2 - x_3) + G_{23} \cos(x_2 - x_3)) \\
L_{g_2} L_f^2 h_3(x) & \triangleq \gamma_2 \\
L_{g_3} L_f^2 h_1(x) & = c_1 b_3 x_9 (B_{12} \sin(x_1 - x_2) + G_{12} \cos(x_1 - x_2)) \quad \gamma_3 \\
L_{g_3} L_f^2 h_2(x) & = a_1 c_3 x_7 (B_{13} \sin(x_1 - x_3) + G_{13} \cos(x_1 - x_3)) \quad \rho_1 \\
L_{g_3} L_f^2 h_3(x) & = b_1 c_3 x_8 (B_{23} \sin(x_2 - x_3) + G_{23} \cos(x_2 - x_3)) \quad \rho_2 \\
L_{g_3} L_f^2 h_3(x) & = 2c_1 c_3 x_9 G_{33} - c_1 c_3 x_7 (B_{31} \sin(x_3 - x_1) + G_{31} \cos(x_3 - x_1)) \\
& \quad c_1 c_3 x_8 (B_{32} \sin(x_3 - x_2) + G_{32} \cos(x_3 - x_2)) \\
L_{g_3} L_f^2 h_3(x) & \triangleq \rho_3
\end{aligned}$$

Entonces la matriz  $A(x)$  esta dada por

$$A(x) = \begin{bmatrix} \eta_1 & \gamma_1 & \rho_1 \\ \eta_2 & \gamma_2 & \rho_2 \\ \eta_3 & \gamma_3 & \rho_3 \end{bmatrix}$$

Ahora, calculando el determinante de  $A(x)$ , se tiene

$$\det(A(x)) = \eta_1(\gamma_2 \rho_3 - \rho_2 \gamma_3) - \eta_2(\gamma_1 \rho_3 - \rho_1 \gamma_3) + \eta_3(\gamma_1 \rho_2 - \rho_1 \gamma_2)$$

el cual es diferente de cero. Por lo tanto, la matriz  $A(x)$  es invertible, esto implica que el sistema se puede representar por tres subsistemas lineales independientes, mediante una ley de control desacoplante linealizante

Ahora, para determinar el control para el sistema multimaquina de la forma

$$\dot{u} = \alpha(x) + \beta(x)u$$



donde

$$\begin{aligned} a(x) &= A^{-1}(x)b(x) \\ \beta(x) &= A^{-1}(x). \end{aligned}$$

se invierte la matriz  $A(x)$ , la cual tiene la siguiente forma

$$A^{-1}(x) = \begin{bmatrix} \gamma_2 \rho_3 & \rho_2 \gamma_3 & (\eta_2 \rho_3 & \rho_2 \eta_3 & \eta_2 \gamma_3 & \gamma_2 \eta_3) \\ (\gamma_1 \rho_3 & \rho_1 \gamma_3) & \eta_1 \rho_3 & \rho_1 \eta_3 & (\eta_1 \gamma_3 & \gamma_1 \eta_3) \\ \gamma_1 \rho_2 & \rho_1 \gamma_2 & \eta_1 \rho_2 & \rho_1 \eta_2 & \eta_1 \gamma_2 & \gamma_1 \eta_2 \end{bmatrix} \frac{1}{\det(A(x))}$$

Ahora, se procede a determinar el vector  $b(x)$ , el cual esta dado por

$$b(x) = \begin{bmatrix} L_f^3 h_1(x) \\ L_f^3 h_2(x) \\ L_f^3 h_3(x) \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} L_f^3 h_1(x) &= -a_1 x_7 x_8 (B_{12} \cos(x_1 - x_2) - G_{12} \sin(x_1 - x_2)) (x_4 = 0) \\ &\quad + a_1 x_7 x_9 (B_{13} \cos(x_1 - x_3) - G_{13} \sin(x_1 - x_3)) (x_4 = 0) \\ &\quad + a_1 x_7 x_2 (B_{12} \cos(x_1 - x_2) - G_{12} \sin(x_1 - x_2)) (x_4 = 0) \\ &\quad + a_1 x_7 x_9 (B_{13} \cos(x_1 - x_3) - G_{13} \sin(x_1 - x_3)) (x_6 = 0) \\ &\quad + a_2 a_1 (P_{m_1} - P_1) + a_2^2 (x_4 = 0) \\ &\quad + a_3 a_1 \{ 2x_7 G_{11} - x_8 (B_{12} \sin(x_1 - x_2) + G_{12} \cos(x_1 - x_2)) \} E_q \\ &\quad + a_3 a_1 x_9 (B_{13} \sin(x_1 - x_3) + G_{13} \cos(x_1 - x_3)) E_{q_1} \\ &\quad + a_1 x_7 b_3 (B_{12} \sin(x_1 - x_2) + G_{12} \cos(x_1 - x_2)) E_q \\ &\quad + a_1 x_7 c_3 (B_{13} \sin(x_1 - x_3) + G_{13} \cos(x_1 - x_3)) E_{q_1} \\ L_f^3 h_2(x) &= b_1 x_8 x_7 (B_{21} \cos(x_2 - x_1) + G_{21} \sin(x_2 - x_1)) (x_4 = 0) \\ &\quad + b_1 x_8 x_9 (B_{23} \cos(x_2 - x_3) + G_{23} \sin(x_2 - x_3)) (x_6 = 0) \\ &\quad + b_1 x_8 x_7 (B_{21} \cos(x_2 - x_1) + G_{21} \sin(x_2 - x_1)) (x_4 = 0) \\ &\quad - b_1 x_8 x_9 (B_{23} \cos(x_2 - x_3) + G_{23} \sin(x_2 - x_3)) (x_6 = 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -b_1 b_2 (P_{m_2} - P_2) + b_2^2 (x_5 - \omega_0) \\
& + b_1 x_8 a_3 (B_{21} \sin(x_2 - x_1) + G_{21} \cos(x_2 - x_1)) E_{q_1} \\
& + b_1 x_8 c_3 (B_{23} \sin(x_2 - x_3) + G_{23} \cos(x_2 - x_3)) E_{q_3} \\
& + b_3 b_1 \{ 2x_8 G_{22} + x_7 (B_{21} \sin(x_2 - x_1) + G_{21} \cos(x_2 - x_1)) \} E_{q_2} \\
& + b_3 b_1 x_9 (B_{23} \sin(x_2 - x_3) + G_{23} \cos(x_2 - x_3)) E_{q_2} \\
L_f^3 h_3(x) = & -c_1 x_9 x_7 (-B_{31} \cos(x_3 - x_1) + G_{31} \sin(x_3 - x_1)) (x_4 - \omega_0) \\
& -c_1 x_9 x_8 (-B_{32} \cos(x_3 - x_2) + G_{32} \sin(x_3 - x_2)) (x_5 - \omega_0) \\
& -c_1 x_9 x_7 (B_{31} \cos(x_3 - x_1) - G_{31} \sin(x_3 - x_1)) (x_6 - \omega_0) \\
& -c_1 x_9 x_8 (B_{32} \cos(x_3 - x_2) - G_{32} \sin(x_3 - x_2)) (x_6 - \omega_0) \\
& -c_1 c_2 (P_{m_3} - P_3) + c_2^2 (x_6 - \omega_0) \\
& + c_1 x_9 a_3 (B_{31} \sin(x_3 - x_1) + G_{31} \cos(x_3 - x_1)) E_{q_1} \\
& + c_1 x_9 b_3 (B_{32} \sin(x_3 - x_2) + G_{32} \cos(x_3 - x_2)) E_{q_2} \\
& + c_3 c_1 \{ 2x_9 G_{33} + x_7 (B_{31} \sin(x_3 - x_1) + G_{31} \cos(x_3 - x_1)) \} E_{q_3} \\
& + c_3 c_1 x_8 (B_{32} \sin(x_3 - x_2) + G_{32} \cos(x_3 - x_2)) E_{q_3}
\end{aligned}$$

Finalmente,  $v$  es el control de seguimiento, el cual tiene la siguiente forma

$$v = - \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_{11}e_1 - k_{12}e_4 - k_{13}e_7 \\ -k_{21}e_2 - k_{22}e_5 - k_{23}e_8 \\ -k_{31}e_3 - k_{32}e_6 - k_{33}e_9 \end{pmatrix}$$

donde las  $k_{i_j}$  son seleccionados a partir de polinomios Hurwitz de tercer orden, donde las componentes del vector de error de seguimiento están definidas como

$$\begin{aligned}
e_1 &= x_1 - y_{r_1} \\
e_2 &= x_2 - y_{r_2} \\
e_3 &= x_3 - y_{r_3} \\
e_4 &= x_4 - \omega_0 - \dot{y}_{r_1} \\
e_5 &= x_5 - \omega_0 - \dot{y}_{r_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e_6 &= x_6 - \omega_0 - \dot{y}_{r3} \\
 e_7 &= a_1(P_{m1} - P_1) - a_2(x_4 - \omega_0) - \ddot{y}_{r1} \\
 e_8 &= b_1(P_{m2} - P_2) - b_2(x_5 - \omega_0) - \ddot{y}_{r2} \\
 e_9 &= c_1(P_{m3} - P_3) - c_2(x_6 - \omega_0) - \ddot{y}_{r3}
 \end{aligned}$$

Reemplazando las expresiones adecuadas, obtenemos las ecuaciones de control para cada generador.

Ahora bien, observando la Figura 5.11, podemos darnos cuenta que cada señal de salida de los generadores, sigue adecuadamente a su referencia. Este comportamiento se puede apreciar en la gráfica. Cuando ocurre un cambio en alguna variable de un generador, ésta variación afecta a las otras variables del resto de los generadores, debido a la interconexión de los generadores a través de la red eléctrica.

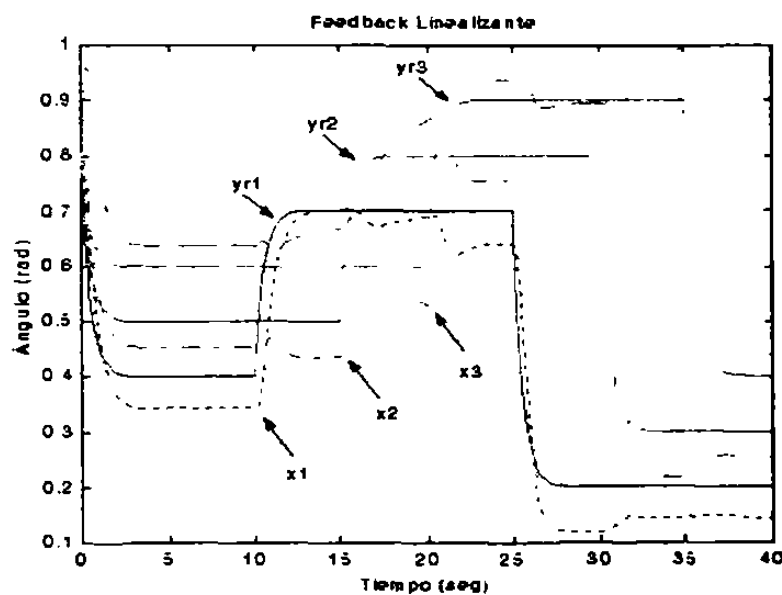


Figura 5.11: Señales de Salida para el Sistema Multimáquina

Estos cambios de referencia, también se ven reflejados en la velocidad angular de cada generador, así como en el voltaje interno transitorio de los mismos, como se puede observar en las Figuras 5.12 y 5.13.

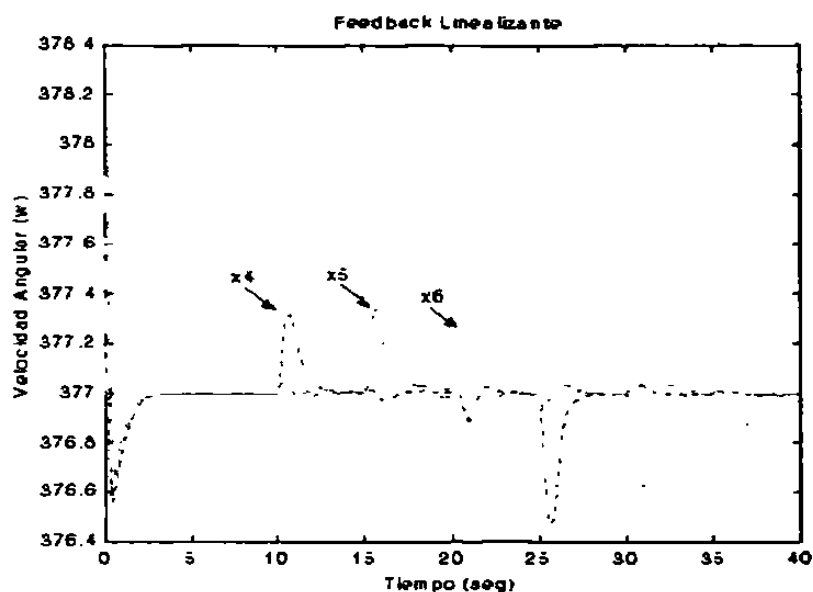


Figura 5.12: Velocidad Angular del Sistema Multimáquina

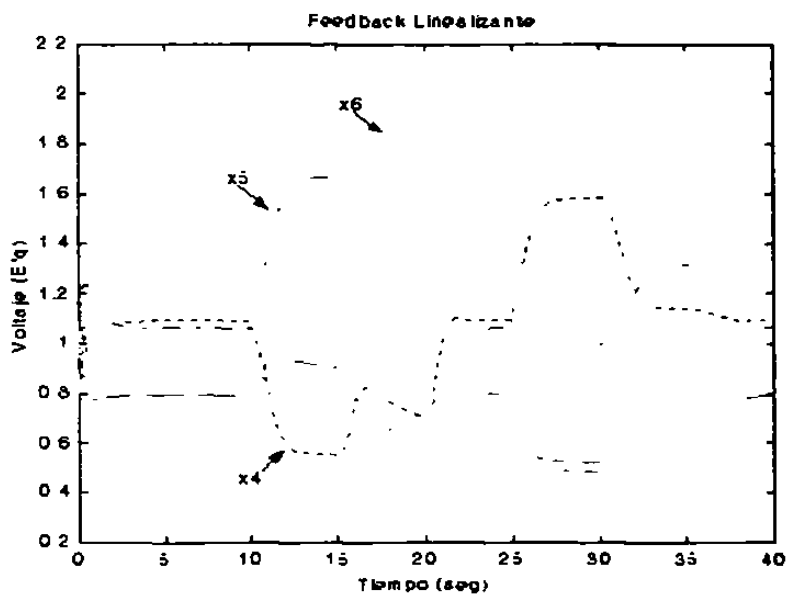


Figura 5.13: Voltaje Interno Transitorio del Sistema Multimáquina

A continuación, en la Figura 5.14, se presentan las señales de los controladores, como se puede observar, la señal de control para el generador 1, es la que requiere de mayor energía.

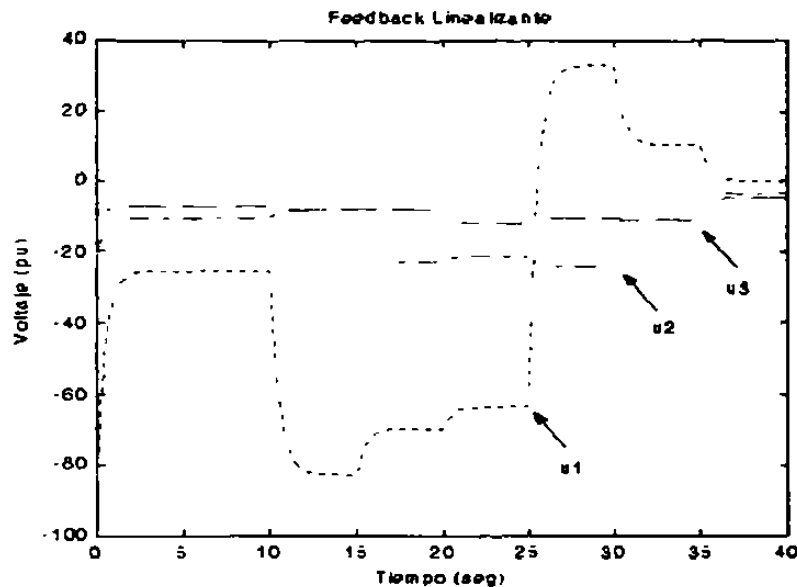


Figura 5.14: Señales de Control para el Sistema Multimáquina

### 5.2.1.2 Enfoque por Álgebra Diferencial y Modos Deslizantes

Para obtener las ecuaciones de control para el sistema multimáquina con base en el enfoque por álgebra diferencial y modos deslizantes, es necesario derivar la salida de cada subsistema el mismo número de veces que el orden de los mismos, esto es, cada salida se derivará tres veces. Puesto que este sistema tiene grado relativo  $\{3, 3, 3\}$ , en la tercer derivada de cada salida aparecerá la variable de control de cada generador.

Efectuando un cambio de coordenadas de la siguiente manera

$$\begin{aligned} z_i &= x_i, \text{ donde } i = 1, \dots, 3 \\ \dot{z}_j &= z_{3-j}, \text{ donde } j = 1, \dots, 6 \\ \dot{z}_{6-i} &= L_i(x, u) \end{aligned}$$

donde las salidas son

$$y_i = x_i = z_i, \text{ donde } i = 1, \dots, 3$$

Ahora, se procede a obtener las derivadas de las salidas como sigue

$$y_1^{(1)} = x_4 - \omega_0 = z_4$$

$$\begin{aligned}
y_2^{(1)} &= x_5 - \omega_0 = z_5 \\
y_3^{(1)} &= x_6 - \omega_0 = z_6 \\
y_1^{(2)} &= a_1(P_{m_1} - P_1) - a_2(x_4 - \omega_0) = z_7 \\
y_2^{(2)} &= b_1(P_{m_2} - P_2) - b_2(x_5 - \omega_0) = z_8 \\
y_3^{(2)} &= c_1(P_{m_3} - P_3) - c_2(x_6 - \omega_0) = z_9 \\
y_1^{(3)} &= -a_2a_1P_{m_1} + a_2^2(x_4 - \omega_0) + a_2a_1P_1 - 2a_1a_3G_{11}x_7(u_1 - E_{q_1}) \\
&\quad - a_1a_3(u_1 - E_{q_1})x_8 [B_{12} \sin(x_1 - x_2) + G_{12} \cos(x_1 - x_2)] \\
&\quad - a_1b_3(u_2 - E_{q_2})x_7 [B_{12} \sin(x_1 - x_2) + G_{12} \cos(x_1 - x_2)] \\
&\quad - a_1x_7x_8(x_4 - x_5) [B_{12} \cos(x_1 - x_2) - G_{12} \sin(x_1 - x_2)] \\
&\quad - a_1a_3(u_1 - E_{q_1})x_9 [B_{13} \sin(x_1 - x_3) + G_{13} \cos(x_1 - x_3)] \\
&\quad - a_1c_3(u_3 - E_{q_3})x_7 [B_{13} \sin(x_1 - x_3) + G_{13} \cos(x_1 - x_3)] \\
&\quad - a_1x_7x_9(x_4 - x_6) [B_{13} \cos(x_1 - x_3) - G_{13} \sin(x_1 - x_3)] \\
&\quad y_1^{(3)} \triangleq L_1(x, u) \\
y_2^{(3)} &= -b_2b_1P_{m_2} + b_2^2(x_5 - \omega_0) + b_2b_1P_2 - 2b_1b_3G_{22}x_8(u_2 - E_{q_2}) \\
&\quad - b_1b_3(u_2 - E_{q_2})x_7 [B_{21} \sin(x_2 - x_1) + G_{21} \cos(x_2 - x_1)] \\
&\quad - b_1a_3(u_1 - E_{q_1})x_8 [B_{21} \sin(x_2 - x_1) + G_{21} \cos(x_2 - x_1)] \\
&\quad - b_1x_8x_7(x_5 - x_4) [B_{21} \cos(x_2 - x_1) - G_{21} \sin(x_2 - x_1)] \\
&\quad - b_1b_3(u_2 - E_{q_2})x_9 [B_{23} \sin(x_2 - x_3) + G_{23} \cos(x_2 - x_3)] \\
&\quad - b_1c_3(u_3 - E_{q_3})x_8 [B_{23} \sin(x_2 - x_3) + G_{23} \cos(x_2 - x_3)] \\
&\quad - b_1x_8x_9(x_5 - x_6) [B_{23} \cos(x_2 - x_3) - G_{23} \sin(x_2 - x_3)] \\
&\quad y_2^{(3)} \triangleq L_2(x, u) \\
y_3^{(3)} &= -c_2c_1P_{m_3} + c_2^2(x_6 - \omega_0) + c_2c_1P_3 - 2c_1c_3G_{33}x_9(u_3 - E_{q_3}) \\
&\quad - c_1c_3(u_3 - E_{q_3})x_7 [B_{31} \sin(x_3 - x_1) + G_{31} \cos(x_3 - x_1)] \\
&\quad - c_1a_3(u_1 - E_{q_1})x_9 [B_{31} \sin(x_3 - x_1) + G_{31} \cos(x_3 - x_1)] \\
&\quad - c_1x_9x_7(x_6 - x_4) [B_{31} \cos(x_3 - x_1) - G_{31} \sin(x_3 - x_1)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -c_1 c_3 (u_3 - E_{q3}) x_8 [B_{32} \sin(x_3 - x_2) + G_{32} \cos(x_3 - x_2)] \\
& -c_1 b_3 (u_2 - E_{q2}) x_9 [B_{32} \sin(x_3 - x_2) + G_{32} \cos(x_3 - x_2)] \\
& -c_1 x_9 x_8 (x_6 - x_5) [B_{32} \cos(x_3 - x_2) - G_{32} \sin(x_3 - x_2)] \\
& y_3^{(3)} \triangleq L_3(x, u)
\end{aligned}$$

Una vez obtenidas las derivadas de las salidas, se definirán las ecuaciones para el error de seguimiento

$$\begin{aligned}
e_i &= z_i - y_{r_i}, \text{ donde } i = 1 \dots 3 \\
e_{3-i} &= z_{3-i} - \dot{y}_{r_i} \\
e_{6-i} &= z_{6-i} - \ddot{y}_{r_i}
\end{aligned}$$

cuya dinámica está dada por

$$\begin{aligned}
\dot{e}_i &= e_{3+i}, \text{ donde } i = 1 \dots 6 \\
\dot{e}_{6-j} &= L_j(x, u) - y_{r_j}^{(3)}, \text{ donde } j = 1 \dots 3
\end{aligned}$$

Ahora, se propone una superficie deslizante de la siguiente manera

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11}e_1 + k_{12}e_4 + e_7 \\ k_{21}e_2 + k_{22}e_5 + e_8 \\ k_{31}e_3 + k_{32}e_6 + e_9 \end{pmatrix}$$

donde los  $k_{i,j}$  son seleccionados a partir de polinomios Hurwitz de segundo orden. A continuación, se deriva la superficie deslizante con respecto al tiempo

$$\begin{aligned}
\dot{\sigma}_1 &= k_{11}e_4 + k_{12}e_7 + L_1(x, u) - y_{r_1}^{(3)} \\
\dot{\sigma}_2 &= k_{21}e_5 + k_{22}e_8 + L_2(x, u) - y_{r_2}^{(3)} \\
\dot{\sigma}_3 &= k_{31}e_6 + k_{32}e_9 + L_3(x, u) - y_{r_3}^{(3)}.
\end{aligned}$$

Despejando  $L(x, u)$ , se obtiene

$$\begin{aligned}
L_1(x, u) &= \dot{\sigma}_1 - k_{11}e_4 - k_{12}e_7 + y_{r_1}^{(3)} \\
L_2(x, u) &= \dot{\sigma}_2 - k_{21}e_5 - k_{22}e_8 + y_{r_2}^{(3)} \\
L_3(x, u) &= \dot{\sigma}_3 - k_{31}e_6 - k_{32}e_9 + y_{r_3}^{(3)}
\end{aligned} \tag{5.5}$$

donde

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_1 &= -W_1 \tanh(\sigma_1) \\ \dot{\sigma}_2 &= -W_2 \tanh(\sigma_2) \\ \dot{\sigma}_3 &= -W_3 \tanh(\sigma_3)\end{aligned}$$

Denotando por  $\alpha$  a los términos independientes, por  $\eta$  a los términos que dependen de  $u_1$ , por  $\gamma$  a los que dependen de  $u_2$ , y por  $\rho$  a los que dependen de  $u_3$ . Así, de esta manera, reescribimos los términos de  $L(x, u)$  de la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} L_1(x, u) \\ L_2(x, u) \\ L_3(x, u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_1 & \gamma_1 & \rho_1 \\ \eta_2 & \gamma_2 & \rho_2 \\ \eta_3 & \gamma_3 & \rho_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

Igualando las ecuaciones (5.5) y (5.6) y despejando de éstas los controles  $(u_1, u_2, u_3)$ , se obtiene

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 & \gamma_1 & \rho_1 \\ \eta_2 & \gamma_2 & \rho_2 \\ \eta_3 & \gamma_3 & \rho_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -W_1 \tanh(\sigma_1) - k_{11}e_4 - k_{12}e_7 - \alpha_1 + y_{r1}^{(3)} \\ -W_2 \tanh(\sigma_2) - k_{21}e_5 - k_{22}e_8 - \alpha_2 + y_{r2}^{(3)} \\ -W_3 \tanh(\sigma_3) - k_{31}e_6 - k_{32}e_9 - \alpha_3 + y_{r3}^{(3)} \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{pmatrix} \eta_1 & \gamma_1 & \rho_1 \\ \eta_2 & \gamma_2 & \rho_2 \\ \eta_3 & \gamma_3 & \rho_3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma_2\rho_3 - \rho_2\gamma_3 & -(\eta_2\rho_3 - \rho_2\eta_3) & \eta_2\gamma_3 - \gamma_2\eta_3 \\ -(\gamma_1\rho_3 - \rho_1\gamma_3) & \eta_1\rho_3 - \rho_1\eta_3 & -(\eta_1\gamma_3 - \gamma_1\eta_3) \\ \gamma_1\rho_2 - \rho_1\gamma_2 & -(\eta_1\rho_2 - \rho_1\eta_2) & \eta_1\gamma_2 - \gamma_1\eta_2 \end{pmatrix} \frac{1}{\Delta}$$

y

$$\Delta = \eta_1(\gamma_2\rho_3 - \rho_2\gamma_3) - \eta_2(\gamma_1\rho_3 - \rho_1\gamma_3) + \eta_3(\gamma_1\rho_2 - \rho_1\gamma_2)$$

Con las sustituciones adecuadas, se obtienen las ecuaciones de control para cada generador.

Como se puede observar en la Figura 5.15, las señales de salida siguen correctamente a sus referencias, y de una manera mejor que las obtenidas mediante la aplicación de la Retroalimentación Linealizante. Se puede observar que los cambios de referencia de un generador alcanzan a afectar a los otros generadores con menor intensidad que en el caso de la Retroalimentación Linealizante.



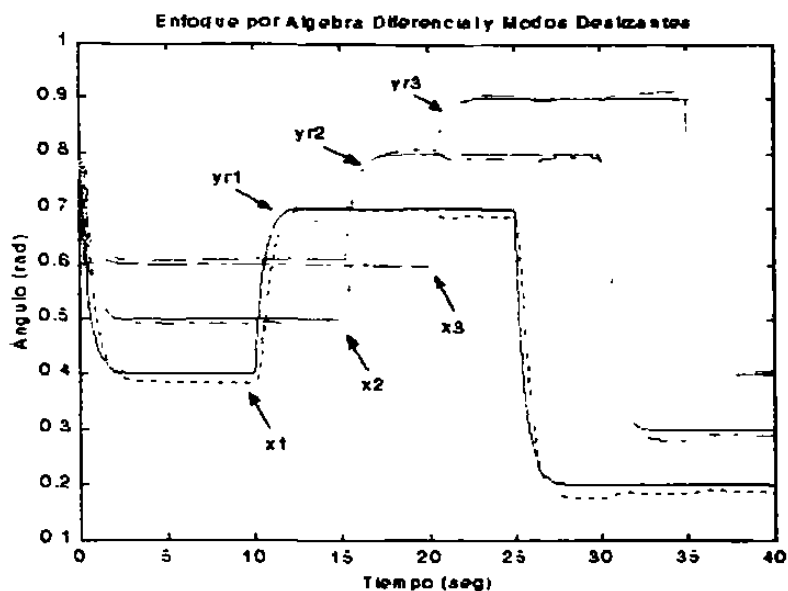


Figura 5.15: Señales de Salida para el Sistema Multimáquina

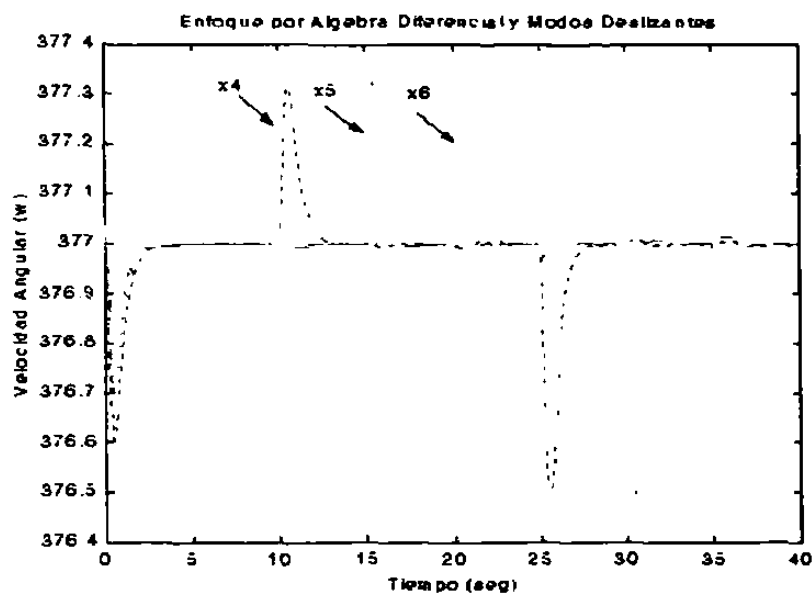


Figura 5.16: Velocidad Angular del Sistema Multimáquina

En la Figura 5.16 se muestran las variaciones de la velocidad angular de cada generador ante los cambios de referencia aplicados al sistema, las cuales como se puede observar no son mayores a 0.8 radianes/seg. En la Figura 5.17, observamos las variaciones en el voltaje interno transitorio de cada generador, en el cual se puede observar, que ante cambios positivos en la referencia, éste

disminuye, y ante cambios negativos, éste aumenta.

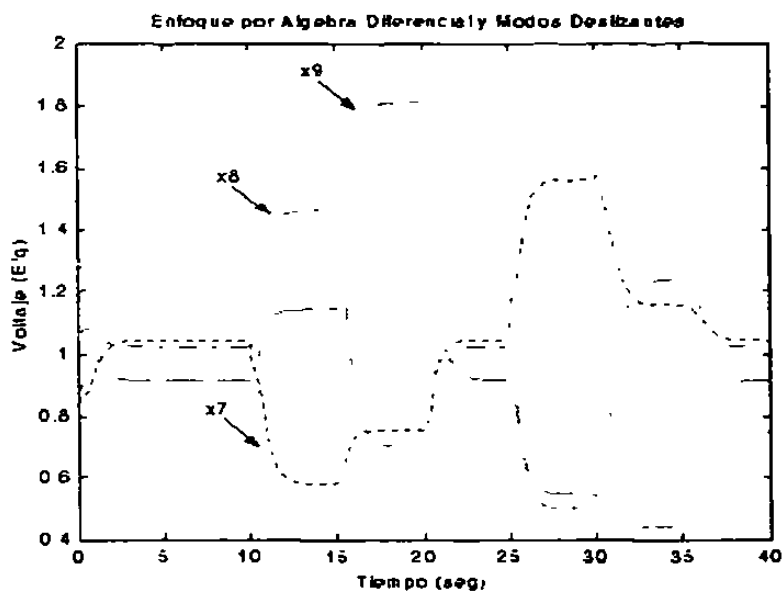


Figura 5.17: Voltaje Transitorio Interno del Sistema Multimáquina

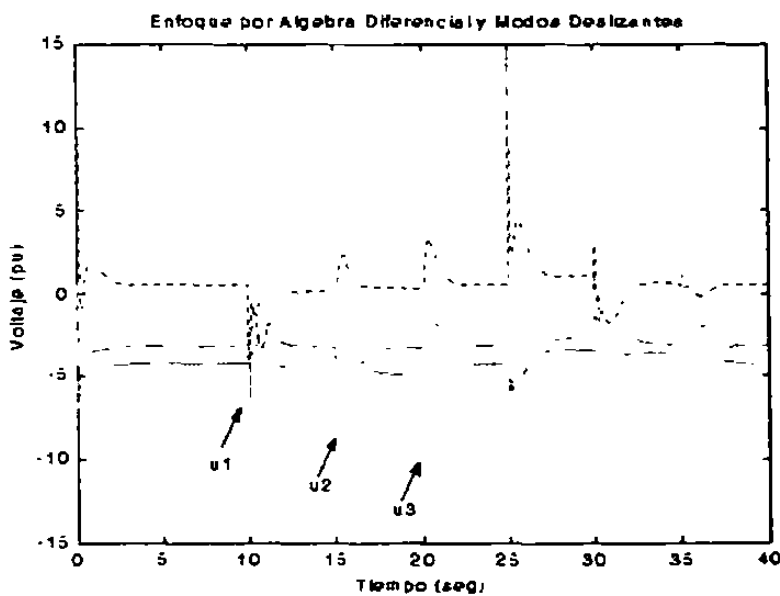


Figura 5.18: Señales de Control para el Sistema Multimáquina

Por otra parte, las señales de control mostradas en la Figura 5.18, requieren menor cantidad de energía para lograr que las salidas alcancen a sus referencias.

## 5.2.2 Sistema de Generación de Baja California

En esta sección se tratará el problema de control de la red eléctrica del sistema de generación de Baja California. Este sistema está conectado a la red eléctrica de los Estados Unidos y sólo cuenta con un generador importante por sus acciones de control del lado Mexicano. Se hace notar que esta red eléctrica está aislada de la red eléctrica nacional.

Ahora se obtendrán las ecuaciones de control que estabilicen al sistema mostrado en la Figura 5.19 y cuyos parámetros de los generadores se muestran en la Tabla 5.5. Utilizando el método de reducción de nodos de Kron, se podrá representar al sistema de tal forma que sólo contenga un generador por cada nodo.

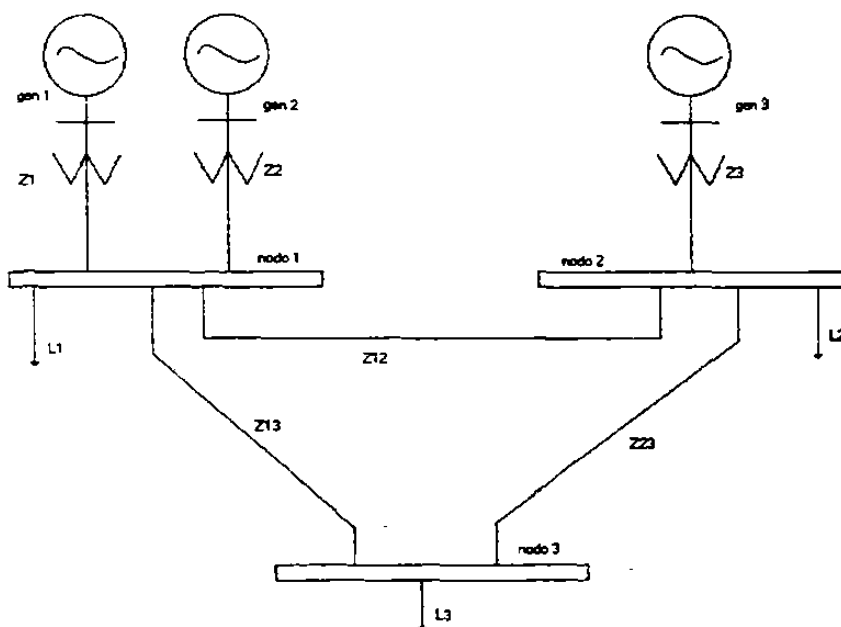


Figura 5.19: Red eléctrica, con tres generadores y tres cargas

Tabla 5.5: Parámetros de los Generadores Síncronos

$DG$	$H$ (seg)	$X_d$ (pu)	$X_d'$ (pu)	$T_{d0}$ (seg)	$D$ (pu)	$F_w$ (pu)	$-C$ (rad/seg)
1	11.56	0.5311	0.0931	7.6	0	1	377
2	15.10	0.0077	0.1107	5	9	1	377

Puesto que el generador 1 y el generador 2 representan máquinas iguales y se encuentran en

paralelo, entonces se puede obtener una representación equivalente entre ellos.

Por otra parte, el nodo 3 con su carga puede ser expresado en función del nodo 1 y 2 con sus respectivas cargas, es decir, obtener un equivalente de la red de la siguiente manera:

### 5.2.2.1 Equivalente del Generador

Utilizando la ecuación de oscilación

$$\sum_{i=1}^2 \frac{2H_i}{\omega_0} \ddot{\delta}_i = \sum_{i=1}^2 (P_{m_i} - P_i)$$

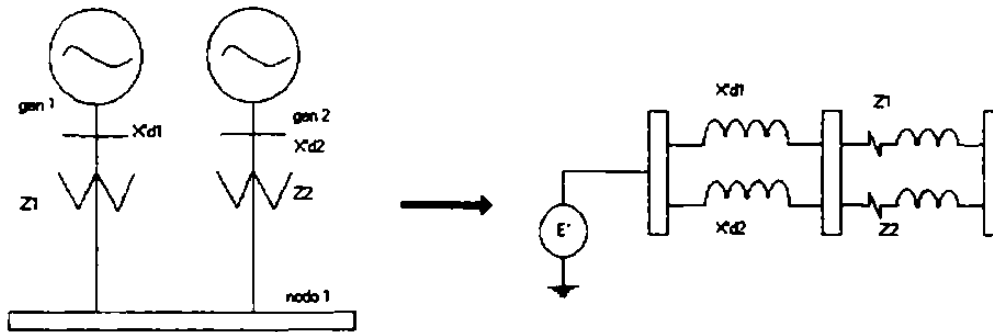


Figura 5.20: Equivalente del generador

En el sistema, las reactancias e impedancias  $X_d$ ,  $X'_d$ ,  $Z$  se encuentran en paralelo. La constante de amortiguamiento  $D$ , y la constante de tiempo en estado transitorio  $T'_{d0}$  se mantienen constantes. Las potencias mecánicas  $P_m$  de cada generador se suman, lo mismo sucede con las constantes de inercia  $H$  de cada máquina. Entonces, se obtiene un equivalente de cada una de las variables del generador de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} Z_e &= (Z_1^{-1} + Z_2^{-1})^{-1} \\ X_{de} &= (X_{d1}^{-1} + X_{d2}^{-1})^{-1} \\ X'_{de} &= (X'_{d1}{}^{-1} + X'_{d2}{}^{-1})^{-1} \\ D_e &= D_1 = D_2 \\ T'_{d0e} &= T'_{d01} = T'_{d02} \\ P_{me} &= P_{m1} + P_{m2} \end{aligned}$$

$$H_e = H_1 + H_2$$

### 5.2.2.2 Reducción del Número de Nodos

Puesto que el nodo 3 no contiene generador podemos expresarlo en función de los nodos 1 y 2, tomando en cuenta sus cargas y utilizando la reducción de nodos de Kron. Para llevar a cabo esta reducción, es necesario obtener la matriz de admitancias nodales,  $Y$  Nodal de la red eléctrica que se desea reducir, la cual tiene la siguiente forma

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{bmatrix}.$$

Ahora, a partir de la ecuación de corriente nodal,

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}$$

se obtiene la reducción de nodos de la siguiente manera.

De la ecuación

$$I_3 = Y_{3,1}V_1 + Y_{3,2}V_2 + Y_{3,3}V_3.$$

La corriente  $I_3$  inyectada por fuente es cero y ésta es la corriente del nodo que será eliminado. De esta ecuación se despeja el voltaje del nodo a eliminar,  $V_3$ ,

$$V_3 = -Y_{3,3}^{-1}Y_{3,1}V_1 - Y_{3,3}^{-1}Y_{3,2}V_2$$

el cual será sustituido en las ecuaciones para  $I_1, I_2$  así se obtiene la matriz de admitancias reducida la cual tiene la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} - Y_{13}Y_{33}^{-1}Y_{31} & Y_{12} - Y_{13}Y_{33}^{-1}Y_{32} \\ Y_{21} - Y_{23}Y_{33}^{-1}Y_{31} & Y_{22} - Y_{23}Y_{33}^{-1}Y_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}.$$

De ésta forma, la red reducida queda como se muestra en la Figura 5.21 y los parámetros de la matriz de admintacia nodal  $Y_{Nodal}$  se muestran en la Tabla 5.6.

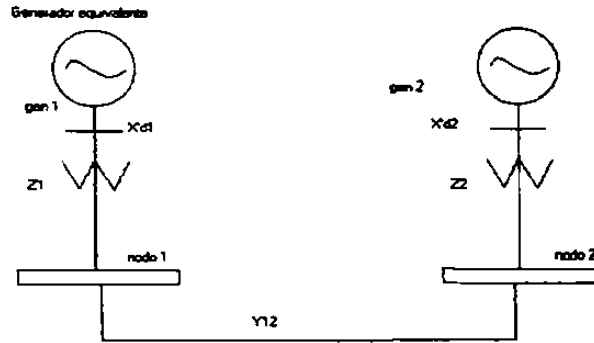


Figura 5.21: Red equivalente

Tabla 5.6: Parámetros de la matriz de admitancia nodal  $Y_{Nodal}$ 

$$\begin{pmatrix} 1.0919 - j26.4963 & -1.7026 + j18.4271 \\ -1.7026 + j18.4271 & 6.9151 - j929.4400 \end{pmatrix}$$

### 5.2.2.3 Desarrollo de Ecuaciones

Con el siguiente cambio de variable

$$x_1 = \delta_1, x_2 = \delta_2, x_3 = \omega_1, x_4 = \omega_2, x_5 = E'_{q1}, x_6 = E'_{q2}, E_{f1} = u_1, E_{f2} = u_2$$

el sistema queda de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{2-i} - \omega_0, \text{ donde } i = 1 \dots 2 \\ \dot{x}_{2-i} &= -\frac{D_i}{M_i}(x_{2-i} - \omega_0) + \frac{\omega_0}{M_i}(P_{m_i} - P_i) \\ \dot{x}_{4-i} &= \frac{1}{T_{d0_i}}(u_i - E_{q_i}) \end{aligned} \quad (5.7a)$$

donde

$$\begin{aligned} P_1 &= x_5^2 G_{11} + x_5 x_6 (B_{12} \sin(x_1 - x_2) + G_{12} \cos(x_1 - x_2)) \\ P_2 &= x_6^2 G_{22} + x_5 x_6 (B_{21} \sin(x_2 - x_1) + G_{21} \cos(x_2 - x_1)) \\ E_{q1} &= x_5 + (X_{d1} - X'_{d1})(x_5 B_{11} - x_6 (B_{12} \cos(x_1 - x_2) + G_{12} \sin(x_1 - x_2))) \\ E_{q2} &= x_6 + (X_{d2} - X'_{d2})(x_6 B_{22} - x_5 (B_{21} \cos(x_2 - x_1) + G_{21} \sin(x_2 - x_1))) \end{aligned} \quad (5.7b)$$

### 5.2.2.4 Retroalimentación Linealizante

Para el sistema multimáquina mostrado en la Figura (5.19), el cual está representado por

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_3 - \omega_0 \\ \dot{x}_2 &= x_4 - \omega_0 \\ \dot{x}_3 &= -a_1(x_3 - \omega_0) + a_2(P_{m1} - P_1) \\ \dot{x}_4 &= -b_1(x_4 - \omega_0) + b_2(P_{m2} - P_2) \\ \dot{x}_5 &= a_3(u_1 - E_{q1}) \\ \dot{x}_6 &= b_3(u_2 - E_{q2})\end{aligned}$$

donde  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2,$  y  $b_3$  están dadas por

$$\begin{aligned}a_1 &= \frac{D_1}{M_1}, & a_2 &= \frac{\omega_0}{M_1}, & a_3 &= \frac{1}{T_{d01}} \\ b_1 &= \frac{D_2}{M_2}, & b_2 &= \frac{\omega_0}{M_2}, & b_3 &= \frac{1}{T_{d02}}\end{aligned}$$

el campo  $f(x)$  es

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_3 - \omega_0 \\ x_4 - \omega_0 \\ a_1(P_{m1} - P_1) - a_2(x_3 - \omega_0) \\ b_1(P_{m2} - P_2) - b_2(x_4 - \omega_0) \\ -a_3E_{q1} \\ -b_3E_{q2} \end{pmatrix}$$

$g_1(x), g_2(x)$ , son de la siguiente forma

$$g_1(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ a_3 \\ 0 \end{pmatrix} : \quad g_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_3 \end{pmatrix} :$$

Para comprobar que el sistema tiene grado relativo  $\{3, 3\}$ , es necesario determinar la matriz  $A(x)$ , la cual tiene la siguiente forma

$$A(x) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^2 h_1(x) & L_{g_2} L_f^2 h_1(x) \\ L_{g_1} L_f^2 h_2(x) & L_{g_2} L_f^2 h_2(x) \end{bmatrix}$$

donde:

$$L_{g_1} L_f^2 h_1(x) = -2a_2 a_3 x_5 G_{11} - a_2 a_3 x_6 (B_{12} \sin(x_1 - x_2) + G_{12} \cos(x_1 - x_2))$$

$$L_{g_1} L_f^2 h_1(x) \triangleq \eta_1$$

$$L_{g_1} L_f^2 h_2(x) = -b_2 a_3 x_6 (B_{21} \sin(x_2 - x_1) + G_{21} \cos(x_2 - x_1)) \triangleq \eta_2$$

$$L_{g_2} L_f^2 h_1(x) = -a_2 b_3 x_5 (B_{12} \sin(x_1 - x_2) + G_{12} \cos(x_1 - x_2)) \triangleq \gamma_1$$

$$L_{g_2} L_f^2 h_2(x) = -2b_2 b_3 x_6 G_{22} - b_2 b_3 x_5 (B_{21} \sin(x_2 - x_1) + G_{21} \cos(x_2 - x_1))$$

$$L_{g_2} L_f^2 h_2(x) \triangleq \gamma_2$$

Entonces, se tiene

$$A(x) = \begin{bmatrix} \eta_1 & \gamma_1 \\ \eta_2 & \gamma_2 \end{bmatrix}.$$

Ahora, calculando el determinante de  $A(x)$ , resulta que

$$\det(A(x)) = \eta_1 \gamma_2 - \gamma_1 \eta_2$$

el cual es diferente de cero. Por lo tanto, la matriz  $A(x)$  es invertible, esto implica que el sistema tiene grado relativo  $\{3, 3\}$ .

Ahora, se diseñará el control para el sistema multimáquina de la forma

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v$$

donde

$$\alpha(x) = -A^{-1}(x)b(x)$$

$$\beta(x) = A^{-1}(x).$$



Invirtiendo la matriz  $A(x)$ ,

$$A^{-1}(x) = \begin{bmatrix} \gamma_2 & -\gamma_1 \\ -\eta_2 & \eta_1 \end{bmatrix} \frac{1}{\det(A(x))}$$

Determinando  $b(x)$ , el cual está dada por

$$b(x) = \begin{bmatrix} L_f^3 h_1(x) \\ L_f^3 h_2(x) \end{bmatrix}$$

donde:

$$\begin{aligned} L_f^3 h_1(x) &= -a_2 x_5 x_6 (B_{12} \cos(x_1 - x_2) - G_{12} \sin(x_1 - x_2))(x_3 - \omega_0) \\ &\quad + a_2 x_5 x_6 (B_{12} \cos(x_1 - x_2) - G_{12} \sin(x_1 - x_2))(x_4 - \omega_0) \\ &\quad + a_1^2 (x_3 - \omega_0) - a_1 a_2 (P_{m_1} - P_1) \\ &\quad + a_3 E_{q_1} (2a_2 x_5 G_{11} + a_2 x_6 (B_{12} \sin(x_1 - x_2) + G_{12} \cos(x_1 - x_2))) \\ &\quad + b_3 a_2 x_5 E_{q_2} (B_{12} \sin(x_1 - x_2) + G_{12} \cos(x_1 - x_2)) \\ L_f^3 h_2(x) &= b_2 x_5 x_6 (B_{21} \cos(x_2 - x_1) - G_{21} \sin(x_2 - x_1))(x_3 - \omega_0) \\ &\quad - b_2 x_5 x_6 (B_{21} \cos(x_2 - x_1) - G_{21} \sin(x_2 - x_1))(x_4 - \omega_0) \\ &\quad + b_1^2 (x_4 - \omega_0) - b_1 b_2 (P_{m_2} - P_2) \\ &\quad + a_3 b_2 x_6 E_{q_1} (B_{21} \sin(x_2 - x_1) + G_{21} \cos(x_2 - x_1)) \\ &\quad + b_3 E_{q_2} (2b_2 x_6 G_{22} + b_2 x_5 (B_{21} \sin(x_2 - x_1) + G_{21} \cos(x_2 - x_1))) \end{aligned}$$

Finalmente,  $v$  es el control auxiliar que tiene la siguiente forma

$$v = - \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_{11}e_1 - k_{12}e_3 - k_{13}e_5 \\ -k_{21}e_2 - k_{22}e_4 - k_{23}e_6 \end{pmatrix}$$

donde las  $k_{ij}$  son seleccionadas de polinomios Hurwitz de tercer orden y las ecuaciones de las componentes del error de seguimiento son las siguientes

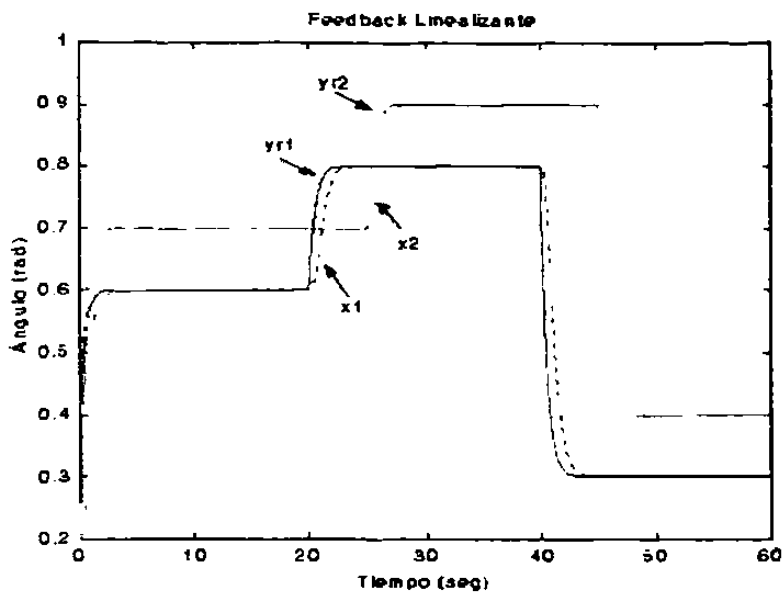


Figura 5.22: Señales de Salida del Sistema Multimáquina de Baja California

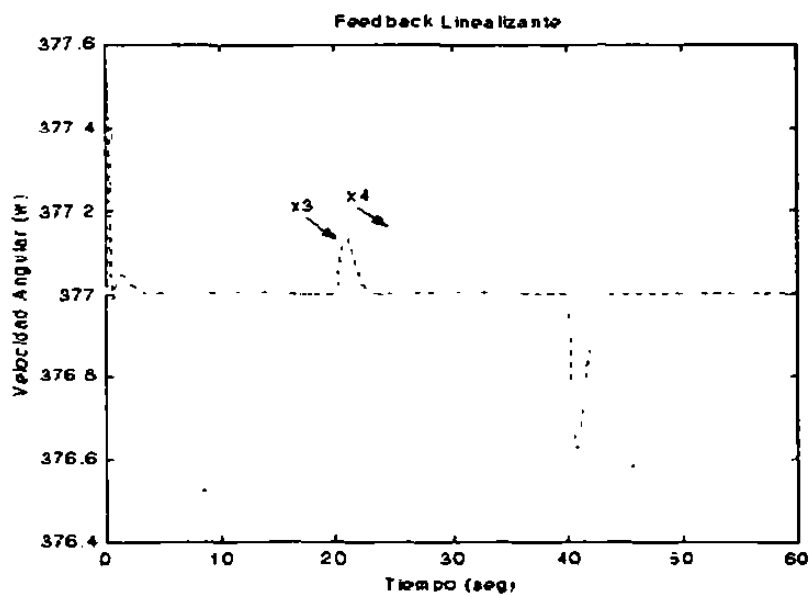


Figura 5.23: Velocidad Angular del Sistema Multimáquina de Baja California

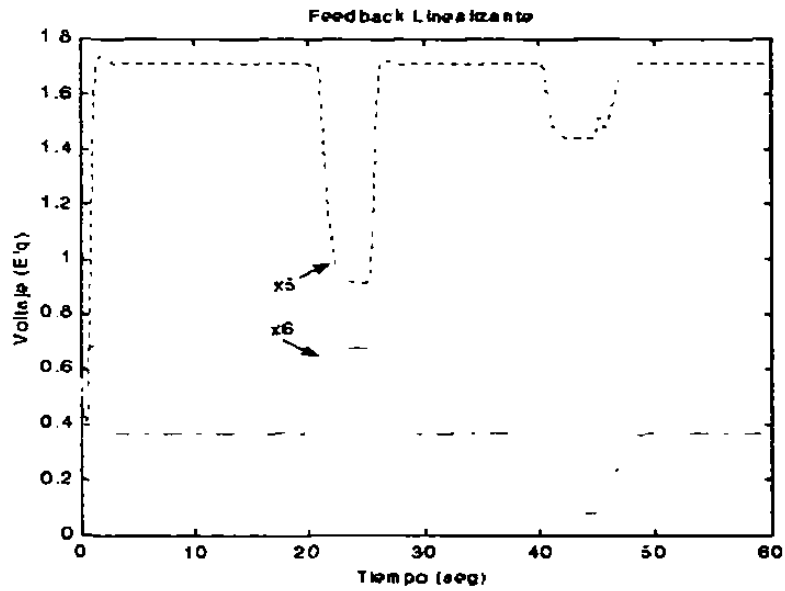


Figura 5.24: Voltaje Interno Transitorio del Sistema Multimáquina de Baja California

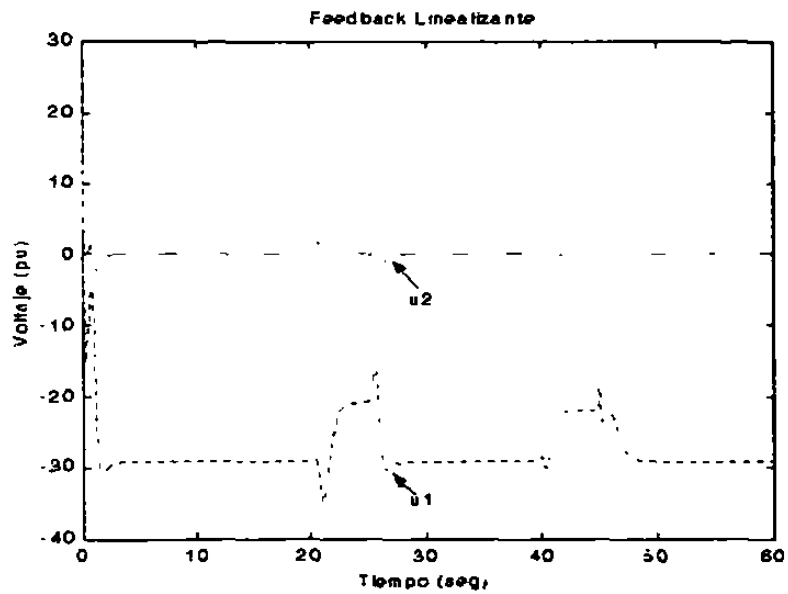


Figura 5.25: Señales de Control para el Sistema Multimáquina de Baja California

$$\begin{aligned}
 e_1 &= x_1 - y_{r1} \\
 e_2 &= x_2 - y_{r2} \\
 e_3 &= x_3 - \omega_0 - \dot{y}_{r1} \\
 e_4 &= x_4 - \omega_0 - \dot{y}_{r2} \\
 e_5 &= a_1(P_{m1} - P_1) - a_2(x_3 - \omega_0) - \ddot{y}_{r1} \\
 e_6 &= b_1(P_{m2} - P_2) - b_2(x_4 - \omega_0) - \ddot{y}_{r2}
 \end{aligned}$$

A continuación, se presentan los resultados en simulación para este ejemplo. En la Figura 5.22, se muestran las salidas y sus referencias.

En la Figura 5.23, se muestra la velocidad angular de cada generador, y en la Figura 5.24, se muestra el voltaje interno transitorio para éste sistema.

En la Figura 5.25, se presentan las señales de control.

### 5.2.2.5 Enfoque por Álgebra Diferencial y Modos Deslizantes

Para el diseño del control para este sistema mediante el enfoque por álgebra diferencial y modos deslizantes, se define un cambio de coordenadas de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 z_i &= x_i, \text{ donde } i = 1, \dots, 2 \\
 \dot{z}_j &= z_{2+j}, \text{ donde } j = 1, \dots, 4 \\
 \dot{z}_{4+i} &= L_i(x, u)
 \end{aligned}$$

donde las salidas son

$$y_i = x_i = z_i, \text{ donde } i = 1, \dots, 2$$

Derivando hasta el tercer orden las salidas, se obtiene

$$\begin{aligned}
 y_1^{(1)} &= x_3 - \omega_0 = z_3 \\
 y_2^{(1)} &= x_4 - \omega_0 = z_4 \\
 y_1^{(2)} &= -a_1(x_3 - \omega_0) + a_2(P_{m1} - P_1) = z_5 \\
 y_2^{(2)} &= -b_1(x_4 - \omega_0) + b_2(P_{m2} - P_2) = z_6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_1^{(3)} &= a_1^2(x_3 - \omega_0) - a_1 a_2 (P_{m_1} - P_1) - 2a_2 a_3 x_5 G_{11}(u_1 - E_{q_1}) \\
&\quad - a_2 a_3 x_6 (u_1 - E_{q_1})(B_{12} \sin(x_1 - x_2) + G_{12} \cos(x_1 - x_2)) \\
&\quad - a_2 b_3 x_5 (u_2 - E_{q_2})(B_{12} \sin(x_1 - x_2) + G_{12} \cos(x_1 - x_2)) \\
&\quad - a_2 x_5 x_6 (x_3 - x_4)(B_{12} \cos(x_1 - x_2) - G_{12} \sin(x_1 - x_2)) \\
&\quad y_1^{(3)} \triangleq L_1(x, u) \\
y_2^{(3)} &= b_1^2(x_4 - \omega_0) - b_1 b_2 (P_{m_2} - P_2) - 2b_2 b_3 x_6 G_{22}(u_2 - E_{q_2}) \\
&\quad - b_2 a_3 x_6 (u_1 - E_{q_1})(B_{21} \sin(x_2 - x_1) + G_{21} \cos(x_2 - x_1)) \\
&\quad - b_2 b_3 x_5 (u_2 - E_{q_2})(B_{21} \sin(x_2 - x_1) + G_{21} \cos(x_2 - x_1)) \\
&\quad - b_2 x_5 x_6 (x_4 - x_3)(B_{21} \cos(x_2 - x_1) - G_{21} \sin(x_2 - x_1)) \\
&\quad y_2^{(3)} \triangleq L_2(x, u)
\end{aligned}$$

Una vez obtenidas las derivadas de las salidas, se definirán las ecuaciones de las componentes del vector del error de seguimiento

$$\begin{aligned}
e_i &= z_i - y_{r_i}, \text{ donde } i = 1 \dots 2 \\
e_{2+i} &= z_{2+i} - \dot{y}_{r_i} \\
e_{4+i} &= z_{4+i} - \ddot{y}_{r_i}
\end{aligned}$$

cuya dinámica está dada por

$$\begin{aligned}
\dot{e}_i &= e_{2+i}, \text{ donde } i = 1 \dots 2 \\
\dot{e}_{4+j} &= L_j(x, u) - y_{r_j}^{(3)}, \text{ donde } j = 1 \dots 2
\end{aligned}$$

Ahora, se propone una superficie deslizante de la siguiente manera

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11}e_1 + k_{12}e_3 + e_5 \\ k_{21}e_2 + k_{22}e_4 + e_6 \end{pmatrix}$$

donde las  $k_{ij}$  son seleccionadas de polinomios Hurwitz de segundo orden. Derivando la superficie deslizante con respecto al tiempo

$$\begin{aligned}
\dot{\sigma}_1 &= k_{11}e_3 + k_{12}e_5 + L_1(x, u) - y_{r_1}^{(3)} \\
\dot{\sigma}_2 &= k_{21}e_4 + k_{22}e_6 + L_2(x, u) - y_{r_2}^{(3)}
\end{aligned}$$

despejando las componentes del vector  $L(x, u)$ , se obtiene que

$$\begin{aligned} L_1(x, u) &= \dot{\sigma}_1 - k_{11}e_3 - k_{12}e_5 + y_{r1}^{(3)} \\ L_2(x, u) &= \dot{\sigma}_2 - k_{21}e_4 - k_{22}e_6 + y_{r2}^{(3)} \end{aligned} \quad (5.8)$$

donde

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_1 &= -W_1 \tanh(\sigma_1) \\ \dot{\sigma}_2 &= -W_2 \tanh(\sigma_2) \end{aligned}$$

Denotando por  $\alpha$  a los términos independientes, por  $\eta$  a los términos que dependen de  $u_1$ , y por  $\gamma$  a los que dependen de  $u_2$ , para poder así, reescribir los términos de  $L(x, u)$ ,

$$\begin{pmatrix} L_1(x, u) \\ L_2(x, u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_1 & \gamma_1 \\ \eta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

Igualando las ecuaciones (5.8) y (5.9), y despejando los controles  $(u_1, u_2)$ , se obtiene

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 & \gamma_1 \\ \eta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -W_1 \tanh(\sigma_1) - k_{11}e_3 - k_{12}e_5 - \alpha_1 + y_{r1}^{(3)} \\ -W_2 \tanh(\sigma_2) - k_{21}e_4 - k_{22}e_6 - \alpha_2 + y_{r2}^{(3)} \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{pmatrix} \eta_1 & \gamma_1 \\ \eta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma_2 & -\gamma_1 \\ -\eta_2 & \eta_1 \end{pmatrix} \frac{1}{\Delta}$$

y

$$\Delta = \eta_1\gamma_2 - \gamma_1\eta_2$$

Los resultados de simulación son presentados en la Figura 5.26, Figura 5.27, Figura 5.28 y Figura 5.29.

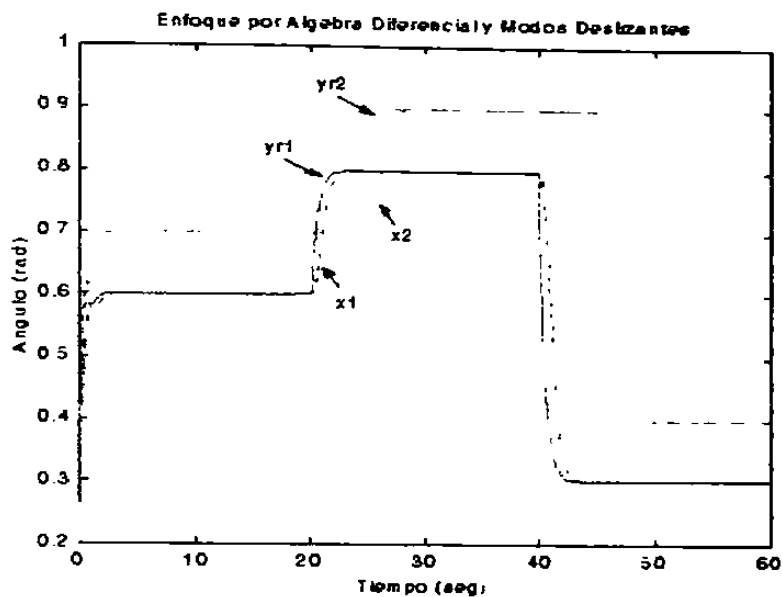


Figura 5.26: Señales de Salida del Sistema Multimáquina de Baja California

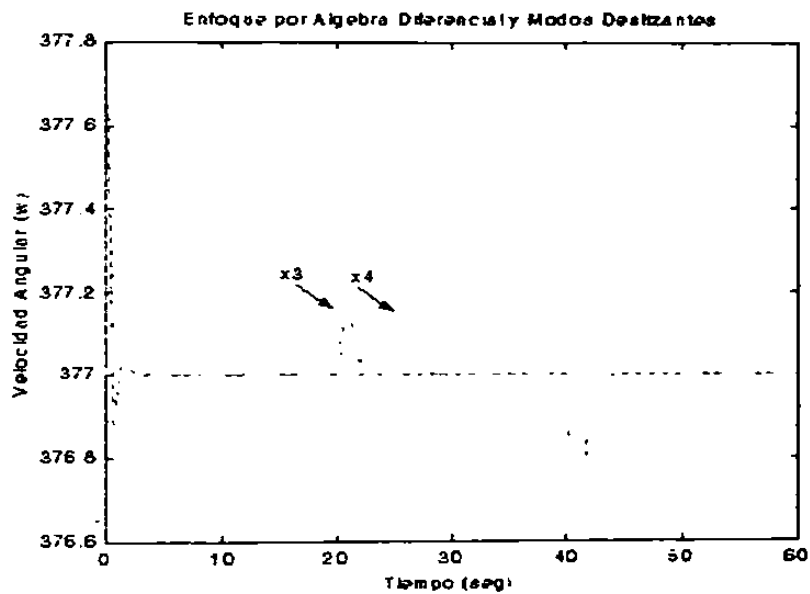


Figura 5.27: Velocidad Angular del Sistema Multimáquina de Baja California

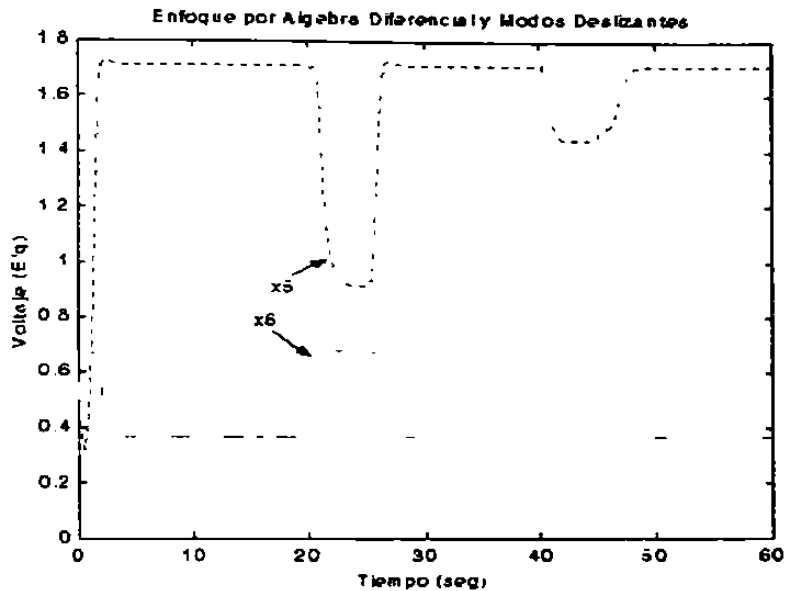


Figura 5.28: Voltaje Interno Transitorio del Sistema Multimáquina de Baja California

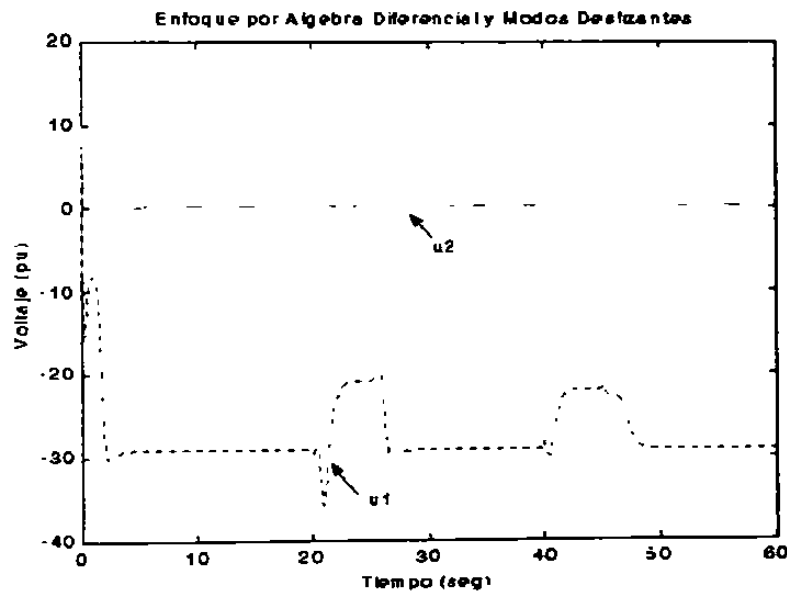


Figura 5.29: Señales de Control del Sistema Multimáquina de Baja California

### 5.2.3 Conclusiones

Para el sistema Multimáquina, se diseñaron controladores basados en las técnicas de Retroalimentación Linealizante, y Enfoque por Álgebra Diferencial combinado con Modos



Deslizantes. Se presentaron dos ejemplos, siendo el primero es un sistema multimaquina de 3 generadores y 9 nodos (ver Figura 5.9), y el segundo representa el sistema reducido de la red de generacion de Baja California, el cual contiene 3 generadores y 3 nodos (ver Figura 5.19). Para poder diseñar los controladores para ambos casos, fue necesario obtener primeramente las matrices de admitancias nodales, las cuales entregan informacion de las lineas que interconectan los nodos y los generadores de cada sistema. Una vez obtenidas las matrices de admitancias nodal, se aplico el metodo de reduccion de nodos de Kron, para poder expresar los sistemas en forma adecuada, para que todos los parametros de cada sistema fueran tomados en cuenta en el diseño de los controladores. A partir de los sistemas reducidos obtenidos, se diseñaron los controladores en base a las dos tecnicas ya mencionadas.

Para el sistema de 3 generadores y nueve nodos, se utilizo el metodo de Retroalimentacion Linealizante, en el cual las salidas siguieron adecuadamente a su referencia. En la señal de control, la energia utilizada no fue mayor a los 40 pu (ver Figuras 5.11 y 5.14). En cambio, utilizando el enfoque por Algebra Diferencial combinado con Modos Deslizantes, las señales de salida siguieron de forma correcta a sus referencias y de mejor manera que las de los controladores basados en Retroalimentacion Linealizante. En las señales de los controles, la energia requerida no es mayor a 15 pu (ver Figuras 5.15 y 5.18). Como se pudo observar en los resultados de simulacion para este sistema, el Enfoque por Algebra Diferencial y Modos Deslizantes resulto responder mejor que la Retroalimentacion Linealizante.

Para el sistema de Baja California, los resultados en simulacion de ambos controladores fueron satisfactorios. Para el controlador basado en Retroalimentacion Linealizante, las salidas siguieron correctamente a sus referencias, y la energia requerida no fue mayor a 30 pu (ver Figuras 5.22 y 5.25). En cambio, para el controlador basado en el Enfoque por Algebra Diferencial y Modos Deslizantes, este respondio de manera similar, solo que la energia utilizada no fue mayor a 20 pu (ver Figuras 5.26 y 5.29). Como se pudo observar en ambos ejemplos, se obtuvo un controlador multivariable basado en la topologia de la red, lo cual permitio controlar eficazmente al sistema.

## Conclusiones y Trabajos Futuros

En esta tesis se presentaron técnicas de control no lineal para tres tipos de sistemas. El primer sistema corresponde a un generador sincrónico conectado a una barra infinita, el cual es un generador con parámetros normales conectado a un sistema robusto, es decir, conectado a otro generador, cuya estabilidad no se ve afectada ante la presencia de cualquier perturbación. El segundo sistema es un modelo multimaquina propuesto por la IEEE, el cual consta de tres generadores conectados a nueve nodos cuyos parámetros corresponden a generadores que son utilizados en la industria eléctrica. El tercero fue un sistema reducido de la red eléctrica de Baja California Norte.

La principal aportación de esta tesis fue la proposición de un esquema de control basado en la Aproximación por Álgebra Diferencial a Modos Deslizantes y su extensión al caso multivariable. Además, se presentó un estudio comparativo entre las técnicas Retroalimentación Linealizante, Modos Deslizantes y el esquema propuesto, las cuales fueron aplicadas al Generador Sincrónico conectado a una Barra Infinita.

Por otra parte, se hizo una comparación entre la técnica de Retroalimentación Linealizante y la técnica propuesta para el caso multimaquina. Resultados en simulación fueron presentados usando los dos sistemas estudiados.

Como trabajos futuros tenemos los siguientes

1. Diseñar esquemas de control basados en Función de Energía (Pasividad)
2. Investigar la robustez de estos esquemas haciendo un análisis más detallado de las posibles incertidumbres o perturbaciones que puedan afectar el sistema
3. Considerar modelos más detallados del Generador Sincrónico que tomen en cuenta los demás elementos que lo componen, por ejemplo la turbina, el primo motor, etc
4. Diseñar esquemas de control que no requieran el uso de observador, y que tomen como única información las variables que actualmente se miden en la industria eléctrica

## Apéndice A

”Método de Reducción de Nodos de Kron”

## Método de Reducción de Nodos de Kron

En los sistemas de generación de energía eléctrica, la cantidad de nodos en el sistema supera por mucho a los generadores conectados a éste sistema multimáquina, debido a esto, los parámetros de la red que se encuentran entre nodos intermedios no afecta de manera directa a los generadores conectados al sistema y por lo cual no es posible obtener un controlador que permita mantener el voltaje en terminales del generador de manera constante. Por ésta razón, es necesario utilizar la reducción de Nodos de Kron, mediante la cual se reducirán los nodos del sistema quedando al final la misma cantidad de nodos que de generadores y los parámetro de los nodos reducidos afectarán de manera directa a los generadores, lo cual permitirá desarrollar un controlador más eficiente.

Para llevar a cabo esta reducción, es necesario obtener la matriz de admitancias  $Y$  de la red eléctrica que se desea reducir, la cual tiene la siguiente forma

$$Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & \cdots & Y_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{n1} & \cdots & Y_{nm} \end{pmatrix}.$$

Ahora, a partir de la ecuación de corriente,

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{1,1} & \cdots & Y_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{n,1} & \cdots & Y_{n,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix}$$

se obtiene la reducción de nodos de la siguiente manera.

De la ecuación

$$I_n = Y_{n,1}V_1 + \cdots + Y_{n,m}V_n.$$

la corriente  $I_n$  es concidera cero ya que ésta es la corriente del nodo que será eliminado, y de ésta misma ecuación se despeja el voltaje del nodo a eliminar  $V_n$ ,

$$V_n = -Y_{n,m}^{-1}Y_{n,1}V_1 - \cdots - Y_{n,m}^{-1}Y_{(n-1),m}V_{n-1}$$

el cual será sustituido en las ecuaciones  $I_1, \dots, I_{n-1}$  para obtener la matriz de admitancias reducida

la cual tiene la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{1,1} - Y_{1,m} Y_{n,m}^{-1} Y_{n,1} & \cdots & Y_{1,(m-1)} - Y_{1,m} Y_{n,m}^{-1} Y_{n,(m-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{(n-1),1} - Y_{(n-1),m} Y_{n,m}^{-1} Y_{n,1} & \cdots & Y_{(n-1),(m-1)} - Y_{(n-1),m} Y_{n,m}^{-1} Y_{n,(m-1)} \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Este procedimiento se repite dependiendo de la cantidad de nodos que se desean eliminar.

## Referencias

- [1] Peter W Sauer and M A Pai, "Power System Dynamics and Stability," Prentice Hall, Upper Saddle River New Jersey 07458, 1998
- [2] S Ahmed-Zaid, L Xu, and S S Jang, "Effects of Stator Transients on Steady-State Stability Regions of Electrical Power Systems," *Electric Machines and Power Systems*, No 25, Pages 153-167, 1997
- [3] Alberto Isidori, "Nonlinear Control Systems," 2nd Edition, Communications and Control Engineering Series, Springer-Verlag Berlin, 1989
- [4] Hassan K Khalil, "Nonlinear System," Second Edition, Upper Saddle, River Prentice Hall, New Jersey 07458 1996
- [5] Rafael Martinez-Guerra and Jesus de Leon -Morales, "Observers for a multi-input multi-output bilinear system class A differential algebraic approach," *J of Math and Computer Modelling*, Vol 20, No 12, pp 125-132, 1994
- [6] Hebertt Sira-Ramirez, "Dynamical Discontinuous Feedback Control of Nonlinear Systems," *Nolcos'92*, Bordeaux, France, 1992
- [7] Thierry Van Cutsem, Costas Vournas, "Voltage Stability of Electric Power Systems," Kluwer, 1998
- [8] P Kundur, "Power System Stability and Control," Mc Graw-Hill, 1994
- [9] M A Pai, "Power System Stability," North-Holland Publishing Company, 1981
- [10] R Sepulchre, M Jankovic and PV Kokotovic, "Constructive Nonlinear Control," Springer, 1997
- [11] Alexandre S Bazanella, Aginaldo S Silva, Petar V Kokotovic, "Lyapunov Design of Excitation Control for Synchronous Machines," *Proc of the 36th IEEE CDC San Diego*
- [12] Victor Guillemin, Alan Pollack, "Differential Topology," Prentice-Hall 1974
- [13] Q Lu Y Sun, Z Xu, T Mochizuki, "Decentralized Nonlinear Optimal Excitation Control," *IEEE Transactions on Power System*, Vol 11 No 4, November 1996

[14] Petar V Kokotovic, Peter W Sauer, "Integral Manifold as a Tool for Reduced-Order Modeling of Nonlinear Systems - A Synchronous Machine Case Study," IEEE Transactions on Circuits and Systems Vol 36, No 3, March 1989

[15] Hebertt Sira Ramirez, "On the Sliding Mode Control of Nonlinear Systems." Systems and Control Letters, Vol 19, No 4, 1992

[16] A G Luk`yanov, "A Block Method of Synthesis of Nonlinear Systems at Sliding Modes " Automation and Remote Control, Vol 59, No 7, 1998

[17] Youyi Wang, Guoxiao Guo and David J Hill, "Robust Decentralized Control of a Class of Nonlinear Systems and Applications to Multimachine Power System Stabilization," Proc of the 36th IEEE CDC San Diego, 8-4, 4 50

[18] Michel Fliess, "Generalized Controller Canonical Forms for Linear and Nonlinear Dynamics," IEEE Transactions on Automatic Control, Vol 35, No 9, September 1990

[19] Alexandre S Bazanella, Aguinaldo S e Silva and Petar V Kokotovic, "Lyapunov Design of Excitation Control for Synchronous Machines," Proc of the 36th IEEE CDC San Diego, 7-1, 10 00

[20] Vadim I Utkin De-Shiou Chen Shahram Zarei and John Miller, "Sliding Mode Observers for Automotive Alternators," Proc of the American Control Conference, San Diego, California, June 1999

[21] "Power System Dynamic Analysis-Phase I." EPRI Report EL-484, Electric Power Research Institute July 1977



