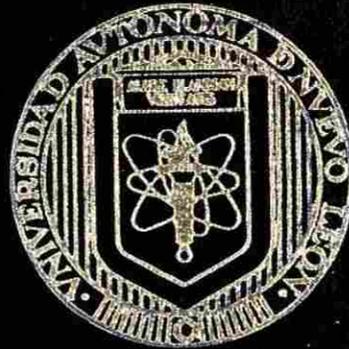


**UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON**

**FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA**



**CONTROL DE ROBOTS CON FLEXIBILIDAD  
EN EL ESLABON**

**TESIS**

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
DOCTOR EN INGENIERIA ELECTRICA**

**PRESENTA:**

**MARTHA ISABEL AGUILERA HERNANDEZ**

**SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N. L. FEBRERO DE 1999**

9

FD  
Z5853  
.M2  
FIME  
1999  
A3

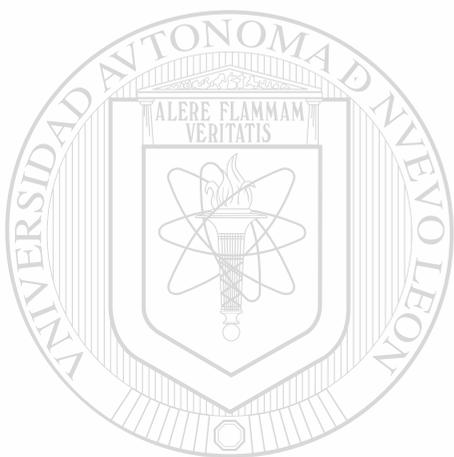
CONTROL DE ROBOTS CON FLEXIBILIDAD

EN EL ESLABON

M.I.A.H.



1020126752



# UANL

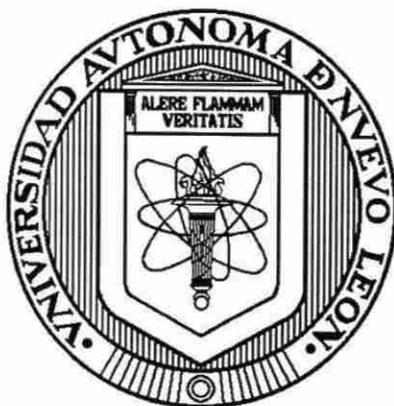
---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON  
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA



CONTROL DE ROBOTS CON FLEXIBILIDAD  
EN EL ESLABÓN

UANL

TESIS

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
DOCTOR EN INGENIERIA ELECTRICA

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS  
PRESENTA:

MARTHA ISABEL AGUILERA HERNANDEZ

San Nicolás de los Garza, N. L.

Febrero de 1999



TD  
258C3  
P 2  
N-  
999  
A3

1 of



# UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



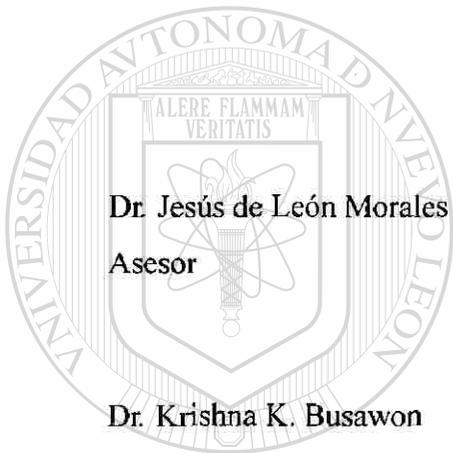
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

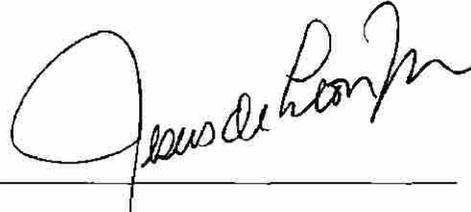


**FONDO  
TESIS**

CONTROL DE ROBOTS CON FLEXIBILIDAD  
EN EL ESLABÓN

Los miembros del comité aprueban la tesis  
de Doctorado de Martha I. Aguilera Hernández



  
\_\_\_\_\_

  
\_\_\_\_\_

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

Dr. Mikhail V. Basin

  
\_\_\_\_\_

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Dr. Salvador Acha Daza

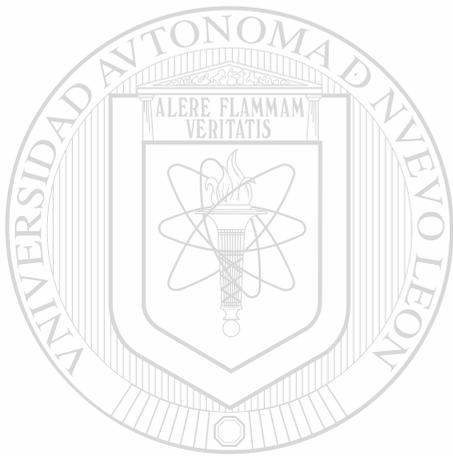
  
\_\_\_\_\_

Dr. Jesús Flores Morfín

  
\_\_\_\_\_

Dedicada a mis Padres:

Francisco Aguilera Aguilar (Finado)  
Isabel Hernández Pérez



Y a mis familiares:

Ramona  
Paco y Familia  
Mike y Familia  
Noe y Familia

UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Con Cariño

## Agradecimientos

Al Dr. Jesús de León Morales, mi asesor, por sus consejos y su preocupación por mi preparación académica, sin la cual no hubiera podido concluir este trabajo de investigación.

Al equipo de profesores que ayudaron en mi formación académica: Dr. Jesús de León Morales, Dr. Joaquín Collado Moctezuma, Dr. Oscar Chacón M., M.C. Guadalupe Cedillo y Dra. Ada Alvarez.

Al Dr. Joaquín Collado, que siempre nos motivó a tener un buen desempeño académico.

Al Dr. Busawon, por sus correcciones, comentarios y sugerencias, que fueron de valiosa ayuda en este trabajo.

Al Dr. Basin y al Dr. Acha, por su disponibilidad para la revisión de este trabajo y por sus excelentes comentarios.

Al Dr. Jesús Flores Morfin, por haber aceptado revisar mi tesis y por su apoyo moral y académico en todo momento.

Al Conacyt por su beca académica.

Al Instituto Tecnológico de Nuevo Laredo, por su apoyo para mi superación académica. Al Departamento de Electrónica y a la División de Estudios de Posgrado, por su confianza y ayuda en todas las situaciones. Quiero hacer mención especial a la Lic. Beatriz Ruiz y al Ing. Jesús Rodríguez por su ayuda en cuestiones administrativas durante mi estancia en Mty. A mis alumnos asesorados de la maestría: Ramón Roque Hdz. y Martín García, que me motivan a ser mejor.

A mis compañeros: Guadalupe Acosta, Daniel Olivares, César Elizondo, Aureliano Esquivel, Gerardo Romero, Hnos. Pérez y Manuel Saucedo con los que pude compartir momentos de alegría y a la vez de preocupación por las tareas académicas.

A los nuevos compañeros: Mario Villanueva, Gustavo Pérez, David Díaz, Francisco Florenzano, Irma Valadez, César Guerra, Ma. de los Angeles Carrera y Oscar Huerta que han mostrado su compañerismo aléntandome siempre en estos últimos meses de preparación.

A mis amigas de Nuevo Laredo: Tere Viveros, Celsa González, Silvia Gómez, Ruth Torres, Margarita González, Angeles Glz., Eva Laurel y Carlota Faz, por hacerme sentir siempre como en casa. A mis amigas de Río Bravo: Martha Elena, Ponchis, Martha Alicia y Graciela, a las de Matamoros: Rossi Arreola, Thelma Rdz. y Gloria Navarro y a las del Grupo de Natación de Mty., que siempre me han brindado su amistad y comprensión.

A la familia Cantú Rodríguez, a la que considero como mi segunda familia, por su apoyo incondicional. Principalmente al Padre Juan Ramón Cantú que, por su valiosa ayuda y consejo, correcciones y comentarios, he podido terminar satisfactoriamente mis etapas de formación académica.

# Resumen

## Control de Robots con flexibilidad en el eslabón

Publicación No. \_\_\_\_\_

Martha Isabel Aguilera Hernández, Dr. en Ingeniería Eléctrica

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

Profesor Asesor: Dr. Jesús de León Morales

Febrero, 1999

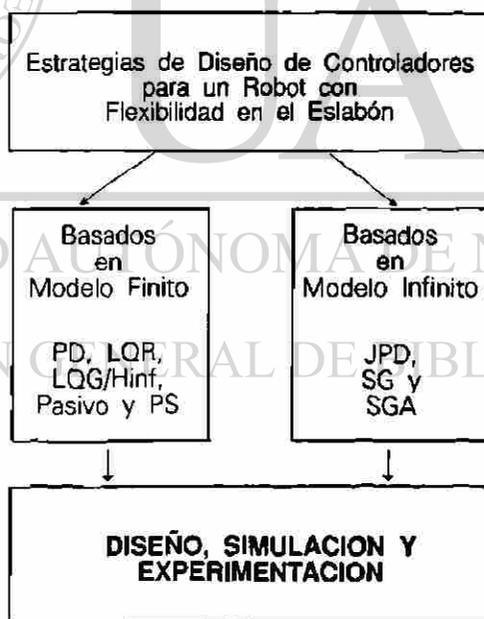
En este trabajo de tesis se presenta un estudio del diseño de algoritmos de control para robots con flexibilidad en el eslabón. El modelo matemático que representa la dinámica del robot se obtiene a partir de la teoría de Euler-Bernoulli y aplicando el principio de Hamilton. Este modelo consiste en un sistema de ecuaciones no lineales integro-diferenciales parciales, esta característica ha hecho que el diseño del control sea un problema complejo.

Las técnicas para el diseño de controladores para los robots flexibles en el eslabón se han diversificado pero se pueden catalogar en dos grandes estrategias: La primera estrategia reduce el modelo original con el fin de obtener un modelo de dimensión finita y, en base a éste, se diseña la ley de control. La segunda estrategia consiste en diseñar directamente del modelo original, el controlador. A esta última se le denomina "basada en modelo infinito".

En este trabajo, se obtuvo el modelo de un robot flexible experimental y se identificaron los parámetros físicos necesarios para el análisis de su comportamiento. Aplicando la primera estrategia, se diseñaron cinco controladores que son el Proporcional-Derivativo(PD), el Regulador Cuadrático Lineal(LQR), el Pasivo, el LQG/ $H_{\infty}$  y uno basado en técnicas de Perturbaciones Singulares(PS). Todos estos controladores se implementaron en el robot experimental.

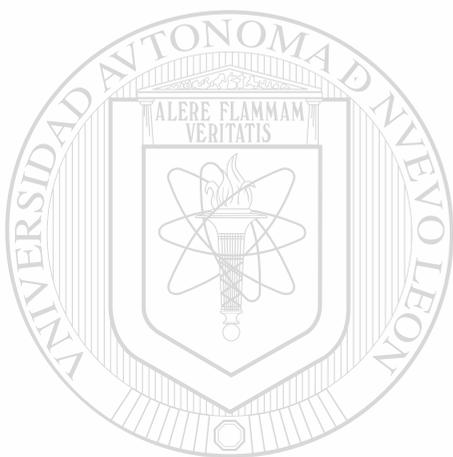
Aplicando la segunda estrategia, se realizó el diseño, simulación y experimentación de tres controladores. Los controladores son el propuesto por Yuan en [81], el de Shifman en [69] y un tercer controlador que es propuesto en este trabajo. El controlador propuesto por Yuan requiere el conocimiento de las variables de la base. Se le ha denominado JPD (Joint PD). El controlador de Shifman, denominado SG, requiere, además de las mediciones de las variables de la base, la medición de una variable agregada que es producto de la medición directa de un strain gage. El tercer controlador, denominado SGA, es similar al obtenido por Shifman, pero en lugar de utilizar la variable agregada, se utiliza una variable auxiliar que representa a la barra dividida por medio de la técnica de elementos finitos. Esta variable auxiliar es una aproximación que se realiza tomando en cuenta las características del material y la posición de la punta, de modo que el controlador sólo requiere retroalimentación de las variables de la base, de la posición de la punta y la variable auxiliar.

El desarrollo de este trabajo se puede resumir en el siguiente diagrama:



Las aportaciones de este trabajo de investigación son: Un análisis experimental que compara el diseño y el estudio de controladores basados en modelos de dimensión finita con los controladores basados en el modelo infinito, con el fin de identificar

las ventajas y viabilidad de aplicación de cada controlador. También se propone un nuevo controlador basado en un modelo de dimensión infinita, se demuestra experimentalmente que este controlador tiene un comportamiento eficiente para su aplicación real a estructuras flexibles.



# UANL

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

# INDICE

<b>RESUMEN</b>	<b>IV</b>
<b>INDICE DE FIGURAS</b>	<b>IX</b>
<b>NOTACION</b>	<b>X</b>

<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
-----------------------	----------

1.1 Motivación	3
----------------	---

1.2 Antecedentes	5
------------------	---

1.2.1 Esquema con Modelos de Dimensión Finita	7
---	---

1.2.2 Esquemas de modelo Infinito	8
-----------------------------------	---

1.3 Contribuciones de este Trabajo	8
------------------------------------	---

1.4 Organización de la Tesis	9
------------------------------	---

<b>2 Modelado del Robot flexible en el eslabón</b>	<b>10</b>
--	-----------

2.1 Derivación del Modelo	10
---------------------------	----

2.2 Teoría de Rayleigh	16
------------------------	----

2.3 Resumen	17
-------------	----

<b>3 Modelo Dimensional Finito</b>	<b>18</b>
------------------------------------	-----------

3.1 Técnica de Modos	18
----------------------	----

3.2 Técnica de Análisis Modal Restringida	21
---	----

3.3 Análisis Modal No Restringido	23
-----------------------------------	----

3.4 Análisis Modal con la Posición de la Punta	26
--	----

3.4.1 Análisis de Funciones de Transferencia	28
--	----

3.4.2 Concepto de Modo	30
------------------------	----

3.5 Modelo de Elemento Finito	33
-------------------------------	----

3.6 Resumen	35
<b>4 Diseño de Controladores</b>	<b>37</b>
4.1 Controladores Basados en Modelos de Dimensión Finita	37
4.1.1 Controlador Proporcional-Derivativo	37
4.1.2 Controlador LQR	38
4.1.3 Controlador LQG/ $H_\infty$	40
4.1.3 Controlador basado en Perturbaciones Singulares	46
4.1.4 Método de Perturbaciones Singulares Modificado	49
4.1.5 Controlador Pasivo	50
4.2 Controladores Basados en el Modelo Infinito	57
4.2.1 Controlador PD en la articulación	57
4.2.2 Controlador utilizando medición directa de un strain gage	58
4.2.3 Controlador con una aproximación numérica del strain gage	62
4.3 Resumen	65
<b>5 Evaluación Experimental</b>	<b>67</b>
5.1 Descripción del Equipo	67
5.2 Proceso de Calibración	68
5.3 Modos del Sistema	69
5.3 Resultados de simulación y Experimentales	71
<b>Conclusiones</b>	<b>78</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>80</b>
<b>Apéndice</b>	<b>86</b>
A Preliminares Matemáticos	86
B Coeficientes para una barra	87
C Teoría de Timoshenko	89
D Medidor de Tensión Resistivo	92
E Especificaciones del Robot Experimental	94
F Programa para obtener el Controlador $H_\infty$	95
G Publicaciones	105

# Indice de Figuras

<b>Figura</b>	<b>Descripción</b>
1.1	Rescate de un satélite
1.2	Sistema tele-operado para endoscopio
1.3	Ejemplo de prótesis
1.4	Robot Flexible para trabajos de pintura
1.5	Efecto Spillover
2.1	Marco de Referencia
2.2	Marco de Referencia en la teoría Euler-Bernoulli
3.1	Grados de Libertad del Elemento Finito
4.1	Configuración de Retroalimentación LQR-Optimo
4.2	Configuración en lazo cerrado
4.3	Respuesta del sistema en lazo abierto con tres modos
4.4	Respuesta con Retroalimentación LQG
4.5	Modelo con Incertidumbre
4.6	Sistema en lazo cerrado en cascada
4.7	Marco de referencia para la variable $w^*(x, t)$
4.8	Sistema en lazo cerrado
4.9	Medición del strain gage en un segmento
4.10	Error en Aproximación
5.1	Esquema del Robot Flexible
5.2	Robot Flexible Experimental
5.3a	Curva de calibración
5.3b	Modos del sistema
<hr/> <b>CONTROLADORES</b>	
5.4	Controlador PD. Deflexión
5.5	Controlador PD. Torque
5.6	Controlador LQR. Deflexión
5.7	Controlador LQR. Torque
5.8	Controlador PS. Deflexión
5.9	Controlador PS. Torque
5.10	Controlador LQG/ $H_\infty$ . Deflexión
5.11	Controlador LQG/ $H_\infty$ . Torque
5.12	Controlador Pasivo. Deflexión
5.13	Controlador Pasivo. Torque
5.14	Controlador JPD. Deflexión
5.15	Controlador JPD. Torque
5.16	Controladores SG y SGA. Deflexión
5.17	Controladores SG y SGA. Torque

## Notación

$l$	Longitud de la Barra
$A_T$	Area transversal
$\rho$	Densidad de masa
$q(x, t)$	Fuerza externa
$w(x, t)$	Deflexión de la barra con respecto al eje fijo
$\varepsilon_{xx}$	Deformación de la barra
$\tau_{xx}$	Esfuerzo
$U$	Energía Potencial
$T$	Energía cinética
$T_h$	Energía cinética del eje
$T_i$	Energía cinética del eslabón
$r$	Radio de curvatura
$\theta$	Angulo de rotación del eje
$x$	Variable Espacial
$I_h$	Inercia del eje
'	Representa diferenciación respecto a $x$
•	Representa diferenciación respecto al tiempo
$z$	Eje perpendicular a $y$
$p$	Posición absoluta de un punto a lo largo del eslabón.
$E$	Módulo de Young
$\tau$	Torque
$\xi$	Frecuencia angular
$z(x, t)$	Desplazamiento total de un punto particular del eslabón
$\phi_n$	$n$ -Modo del sistema
$N$	Número de modos del sistema
$z(l, t)$	Posición de la punta
$q$	Coordenada Generalizada
$u$	Control
$k$	Matriz de Ganancia
$K_F$	Ganancia de retroalimentación
$K_\infty$	Controlador $H_\infty$
$S_{aux}$	Sensitividad
$T_{aux}$	Sensitividad complementaria

# CAPITULO 1

## Introducción

En nuestros días, los sistemas robóticos se han vuelto indispensables en aplicaciones industriales, comerciales y científicas. Este tipo de sistemas se han utilizado para llegar a lugares inaccesibles o riesgosos para el ser humano. A pesar de ser un área de investigación reciente, la robótica ha adquirido un desarrollo importante en los últimos años.

Como ejemplos se tienen los robots utilizados en la industria para automatizar actividades como ensamble, soldadura o trabajos de pintura. En la medicina se utilizan para microcirugías, dispositivos para los discapacitados y transporte de medicamentos. En el espacio exterior para labores de rescate y mantenimiento de satélites. En los depósitos nucleares para el manejo de desechos radioactivos.

El robot generalmente está integrado a un sistema de producción, se distingue de una máquina clásica por su capacidad de ejecutar diferentes tareas, o la misma de diversas maneras y además tiene la capacidad de tomar en cuenta los cambios que se pueden presentar en su entorno. Consiste en una serie de eslabones conectados entre sí por medio de articulaciones o uniones; es reprogramable y sus algoritmos de control dependen de su capacidad sensorial, lo que lo hace ser multifuncional.

Los robots pueden clasificarse en Rígidos, Móviles, y Flexibles. Los robots rígidos son aquellos que se modelan con dinámicas de cuerpo rígido. Generalmente están sujetos a una base y el área de trabajo está restringido por la longitud de sus eslabones y por su configuración. En estos robots, los actuadores requieren de una gran energía para su funcionamiento, están diseñados con estructuras pesadas y levantan poco peso con respecto a su peso nominal.

Los robots móviles están equipados con ruedas, rieles o patas para su movimiento. Los algoritmos de control son complejos, pero pueden abarcar un área de trabajo muy grande. Algunos robots móviles, están equipados con eslabones o brazos que les permiten realizar alguna operación especializada, como recoger muestras.

Los robots flexibles surgen debido a la necesidad de reducción de energía, espacio y

tiempo. En los últimos años se ha visto la importancia de diseñar sistemas robóticos mas ligeros y pequeños con mayor flexibilidad.

Hay dos tipos de flexibilidad que se pueden presentar en los robots flexibles. La flexibilidad en la articulación y la flexibilidad en el eslabón. Los robots presentan flexibilidad en la articulación debido al desplazamiento dinámico que se introduce entre la posición de los actuadores y de los eslabones. Desde el punto de vista del modelado, la deformación elástica que se presenta puede ser caracterizada como *concentrada en la articulación del robot*. Sin embargo, cuando en la deformación se involucran cuerpos con masas mas grandes o largas, esta suposición ya no es válida. Los robots que pertenecen a esta categoría tienen flexibilidad en el eslabón y no pueden reducir el efecto de la flexibilidad a estar concentrada en la articulación [11].

Los robots con flexibilidad en el eslabón son estructuras ligeras, rápidas ó largas que se utilizan para acceder ambientes no-convencionales: como el espacio exterior, los sitios nucleares, los depósitos de basura subterráneos y los laboratorios químicos o biológicos. Se utilizan en donde el combustible, el área, el peso y el tiempo, son restricciones para realizar un trabajo. Presentan una deflexión en el eslabón que no se puede despreciar y esto es resultado de la longitud de los eslabones, la característica del material con el que fueron diseñados o el ambiente en el cual se encuentran.

El modelado de los robots flexibles es el trabajo primordial cuando se diseñan algoritmos de control. Una vez que se tiene a disposición el modelo dinámico, se efectúa un proceso de identificación de parámetros y posteriormente, se realiza una validación experimental. Los análisis tradicionales de los robots manipuladores consideran a todo el mecanismo como rígido. La no-suposición de la rigidez implica que se deben incluir las dinámicas de la flexibilidad, lo que hace que el análisis sea mas complicado y que surjan dificultades al diseñar el control.

Desde el punto de vista del control, los robots flexibles pertenecen a la clase de sistemas mecánicos que tienen más grados de libertad que actuadores. De modo que el diseño de algoritmos de control para estos robots, requiere una estrategia de diseño diferente con respecto a la clase de robots rígidos.

La habilidad para diseñar y experimentar con controladores para estos robots flexibles influye en el desarrollo futuro de la robótica de muchas maneras. Permite la clasificación de los factores que influyen en el desempeño de estas estructuras robóticas flexibles.

## 1.1 Motivación

El estudio, análisis y experimentación de controladores aplicados a las estructuras flexibles constituye un área de constante desarrollo para el investigador actual. Los beneficios que se han obtenidos cuando estas estructuras se aplican a diversas áreas como el espacio exterior, en la medicina y en la industria en general, son indiscutibles.

En el espacio exterior, una aplicación de estos robots es el caso de los rescatadores de satélites (Figura 1.1), los cuales consisten en brazos largos articulados, controlados por una unidad central. En las misiones espaciales futuras se contemplan plataformas y manipuladores espaciales para ensamble y servicio. Esto requiere de antenas y plataformas largas así como arreglos solares. Las estructuras podrían tener entre 50m. a varios kilómetros de longitud. Estas estructuras tendrán poco peso y un gran tamaño lo que resulta en algunos modos estructurales (elásticos) de baja frecuencia y ligeramente amortiguados. Las frecuencias naturales estarán muy cercanas entre sí y algunas otras frecuencias pueden encontrarse en el ancho de banda del controlador. Además, los parámetros de los modos elásticos no se conocerán con exactitud [38]. Estas características hacen de el control de estas estructuras un problema difícil pero debe reconocerse que juega un papel esencial, ya que de él depende el éxito de las misiones espaciales.



Figura 1.1 Rescate de un satélite

Algunas situaciones que se han presentado, permiten ilustrar la necesidad del modelado y del control de estructuras flexibles.

En 1958, el EXPLORER I empezó a fallar después de varias órbitas, a consecuencia de las dinámicas no modeladas de la antena unida a la base principal. Estos efectos no fueron

considerados en el diseño del algoritmo y dispositivo de control [42] . En el MARINER 10 en 1973, el algoritmo de control resultó inoperante cuando apareció el séptimo modo de frecuencia, el cual no había sido tomado en cuenta en el modelado de la estructura flexible.

Otra situación más reciente se presentó en 1989 con el telescopio HUBBLE, donde el problema fue que no se podía controlar el movimiento de los paneles solares, debido a los cambios abruptos de la temperatura, que afectaban las barras que los sujetaban. Este fenómeno conocido como estrés termal, producía un cambio en la flexibilidad de las barras provocando un cambio en la posición de los paneles solares. Este fenómeno no había sido considerado en el modelado. Estos ejemplos muestran que el estudio de estructuras flexibles puede solucionar problemas de diseño y control de dichos sistemas.

Una aplicación de estas estructuras flexibles en la medicina es el uso de endoscopios, utilizado en el estudio de órganos internos del paciente. Estos endoscopios consisten de dedos robóticos en uno de los extremos, los cuales son controlados remotamente mediante un guante articulado por un médico especialista. El médico especialista observa en la pantalla de la computadora los movimientos generados, los cuales son reproducidos por el robot flexible. En este caso el robot flexible requiere de elementos que sean flexibles y de materiales especiales tales que permitan no causar daño al paciente y desplazarse en regiones estrechas. Además, el control de la posición tiene que ser preciso. Este sistema se muestra en la figura 1.2 [68] .

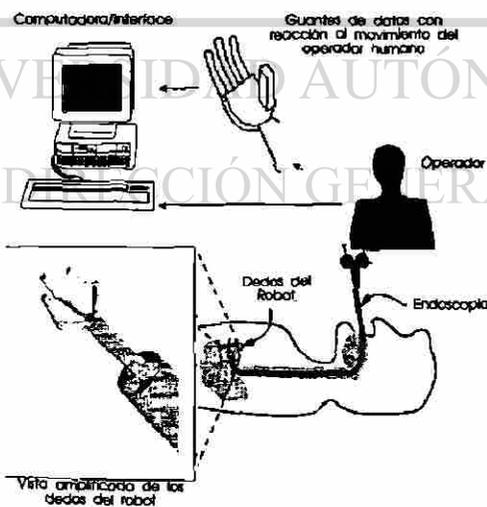


Figura 1.2: Sistema tele-operado para Endoscopio

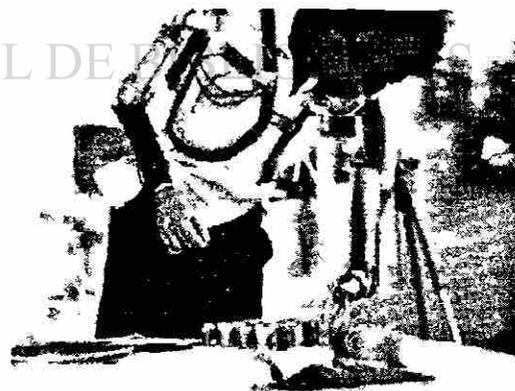


Figura 1.3 Ejemplo de Prótesis.

Otro ejemplo son las prótesis. En este caso, se requieren estructuras ligeras y en cierta

forma flexibles. El análisis del control de estas estructuras permiten encontrar materiales mas apropiados para el diseño de estos dispositivos y permitir que las personas que los utilizan, tengan menos problemas para portar éstos y desarrollar movimientos adecuados [65] , por ejemplo, para sujetar algún objeto como se muestra en la figura 1.3.

En el área industrial, se han implementado unos robots con eslabones flexibles para trabajos de soldadura y de pintura. Como ejemplo, en la figura 1.4, se muestra un robot flexible en trabajos de pintura, en una planta automotriz [65] .

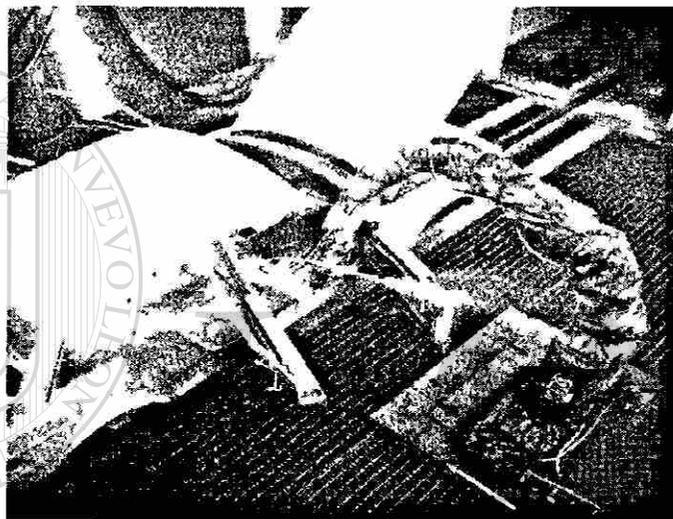


Figura 1.4. Robot flexible para trabajos de pintura.

## 1.2 Antecedentes

El modelo matemático que se obtiene para un robot con flexibilidad en el eslabón, está descrito por un sistema de ecuaciones integro-diferenciales parciales. El modelo es un sistema de parámetros distribuidos. El sistema de ecuaciones integro-diferenciales del robot se puede representar por un sistema de ecuaciones diferenciales parciales (PDE).

Uno de los enfoques para resolver el problema de control de este tipo de sistemas, es el utilizar una versión dimensional finita del sistema PDE. Esto se ha venido realizando en forma práctica ya que el controlador se calcula en base a mediciones y datos tomados de la estructura de dimensión finita. Esta reducción de la dimensión del modelo original se establece tomando en cuenta los modos de frecuencia naturales del eslabón flexible. A mayor número de modos que se tomen en cuenta, mayor será la dimensión del sistema y mayor será la aproximación al sistema original. Sin embargo, el aumento en la dimensión del sistema reducido aumenta

la complejidad del diseño del control.

En la sección anterior, se comentaron casos en que los controladores tuvieron serios problemas de estabilidad por modos de frecuencia no considerados en el modelado. Este tipo de controladores que se basan en modelos de orden reducido, en muchos casos producen el efecto denominado *“spillover” de energía* en los modos de alto orden del sistema (figura 1.5) [38]. La razón es que cuando se implementa un lazo alrededor de los modos controlables, otro lazo de retroalimentación imprevisto se construye también alrededor de los modos truncados. Esta excitación de los modos truncados debido a la entrada y la contribución indeseada de los modos truncados a la salida, se les conoce como *“Spillover del Control”* y *“Spillover de observación”*.

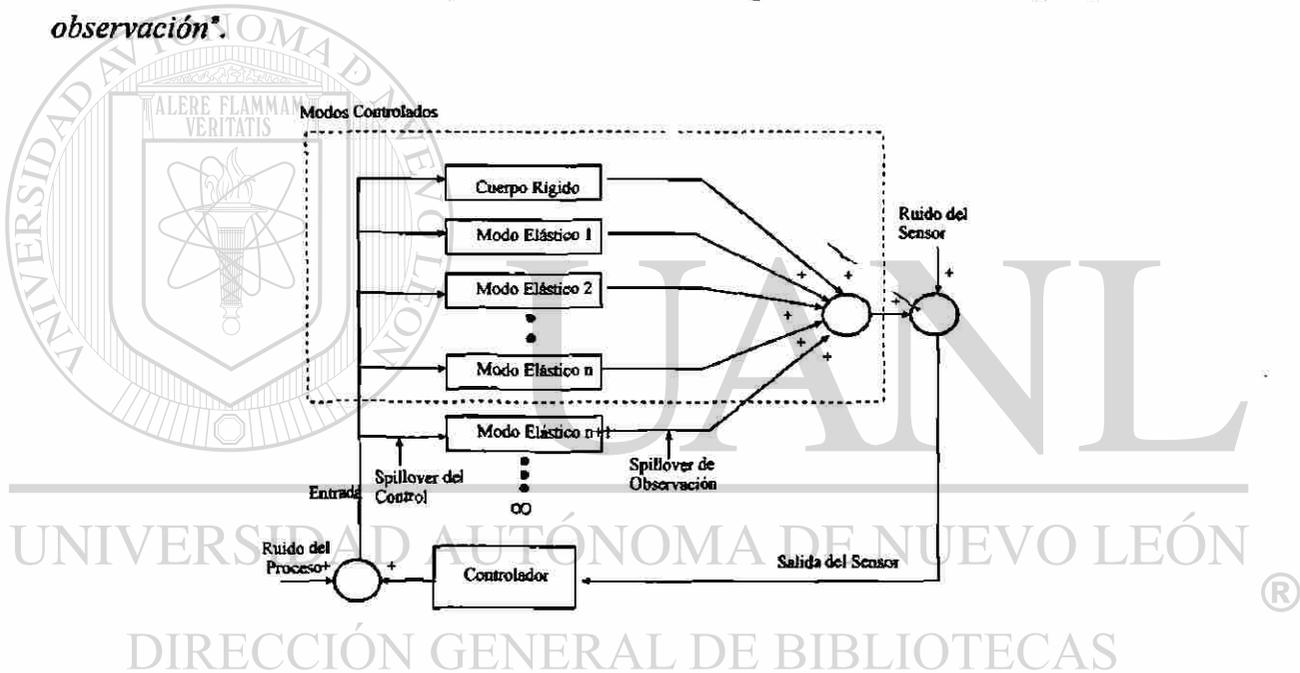


Figura 1.5: Efecto “Spillover”

Es preciso indicar que los controladores deben diseñarse tomando en cuenta que el sistema es de dimensión infinita, de otra manera son en principio cuestionables [42]. Generalmente, los controladores que se diseñan en base a un modelo truncado incluyen filtros pasa-bajos para atenuar la contribución de los modos elásticos. Sin embargo, cuando se tienen estructuras largas, el movimiento elástico es mucho mayor y se presentan serios problemas de control.

Los objetivos de control para obtener exactitud en la posición de la punta en los robots flexibles en el eslabón son una respuesta transitoria rápida y capacidad de rechazo de perturbaciones. El primer objetivo requiere una amortiguación de los errores en la posición de la punta y el segundo, la minimización del error RMS (Root Mean Square).

Hasta el momento se han manejado dos grandes enfoques para el control de los robots con flexibilidad en el eslabón, el primero consiste en obtener del modelo PDE un modelo dimensional finito. Esto se realiza a través de técnicas que utilizan series infinitas las cuales se truncan apropiadamente. Uno de los trabajos iniciales considerado como clásico en el estudio formal del control de robots con flexibilidad en el eslabón por medio de una versión discretizada del modelo es el trabajo de Cannon y Schmitz publicado en 1984 en [10] . En este trabajo la modelización del robot flexible se basó en la teoría de Euler-Bernoulli, se aplicó la técnica de análisis modal para obtener un modelo lineal y a partir de éste, se diseñó un controlador LQG. En la última década se ha incrementado el desarrollo de controladores para aplicarlos a este tipo de estructuras donde generalmente se utiliza el modelo dimensional finito para el diseño del controlador.

El segundo enfoque consiste en el diseño del controlador tomando en cuenta que es un sistema de parámetros distribuidos y por lo tanto trabajar con un sistema de dimensión infinita. A partir del sistema dimensional infinito, diseñar la estrategia de control.

En resumen, las técnicas para el diseño del control para el robot con flexibilidad en el eslabón se pueden dividir en dos grandes esquemas:

Las basadas en esquemas de modelos de dimensión finita y las basadas en esquemas de modelo infinito.

### 1.2.1 Esquema con Modelos de Dimensión Finita

Los esquemas de dimensión finita han sido utilizados bajo la premisa de que la ley de control tiene que ser implementada basándose en las mediciones y datos de un sistema dimensional finito. El esquema comúnmente utilizado es el de truncamiento.

Las técnicas más usuales que se utilizan para obtener un modelo dimensional finito son:

La *Serie Infinita de Modos Asumidos* que representan al modelo original mediante una serie infinita apropiada. Ejemplo de esto son los trabajos de Cannon [10] en 1984, Fukuda [25] en 1985, Hastings y Book [30] en 1987 y Balas [5] en 1994.

La *Serie Infinita de Modos Eigenfunciones* que representan al modelo original mediante una serie infinita apropiada de eigenfunciones. Como ejemplo tenemos el trabajo de Wang y Vidyasagar [77] en 1992.

Las Funciones *Shape* que consisten en un conjunto de funciones completas que representan al modelo original. Como ejemplo tenemos el trabajo de Siciliano y Book [66] en 1988.

Y la técnica de *Elemento Finito* que consiste en el análisis del eslabón dividiéndolo en elementos, los cuales en conjunto representan al modelo original. Como ejemplo tenemos el

trabajo de Aoustin y Glumineau [3] en 1994.

Para el diseño de controladores basados en modelos de dimensión finita se tienen dos esquemas principales. El primer esquema consiste en resolver el problema no lineal de la parte rígida y tratar la dinámica flexible separadamente. Dentro de este enfoque denominado Rígido-Flexible, se encuentran los trabajos de Nicosia, Fukuda, Siciliano y Book.

El segundo esquema es utilizar una versión linealizada del modelo. Dentro de este enfoque podemos encontrar: El LQG que es el “Linear Quadratic Gaussian Control” utilizado por Cannon, y el enfoque de Factorización Estable de Wang.

### **1.2.2 Esquemas de modelo Infinito**

Cuando el controlador se obtiene directamente del modelo PDE, se dice que está basado en un modelo infinito. El trabajo realizado por Shifman [69] en 1990, pone en evidencia la falta de capacidad de los modelos “truncados” de garantizar estabilidad en lazo cerrado, lo que hace resaltar la importancia del estudio del modelo infinito. En [69], Shifman desarrolla un controlador basado en la medición del strain gage colocado en el eslabón flexible. Su método requiere de la información de cuatro variables que son: la posición de la punta, una variable que da la información de todo el eslabón (medida por el strain gage), y sus respectivas derivadas. Para la prueba de estabilidad aplicó la teoría de semigrupos para operadores lineales.

Yuan [82] en 1995, desarrolla un controlador basado solamente en mediciones hechas en la base del robot. La prueba de estabilidad recae en una función de Lyapunov. A este tipo de control se le denomina “Joint Control”, que es un control basado en variables medibles en la articulación. El diseño del controlador se deriva en base a la función de Lyapunov seleccionada.

## **1.3 Contribuciones de este trabajo**

Los estudios que se han realizado con respecto al diseño y a la experimentación de controladores para un robot con flexibilidad en el eslabón, han considerado un modelo dimensional finito. En este trabajo se incluyen los controladores basados en el modelo infinito que permite mostrar las ventajas y viabilidad de su aplicación. Las contribuciones de este trabajo se describen a continuación:

- Obtención del modelo del robot flexible experimental e identificación de los parámetros físicos del mismo.

► Diseño e implementación de los controladores Proporcional-Derivativo (PD), Regulador Cuadrático Lineal (LQR), Pasivo y LQG/ $H_\infty$  que están basados en un modelo dimensional finito. Además, un controlador basado en técnicas de Perturbaciones Singulares (PS)

► Diseño e implementación de dos controladores que están basados en un modelo dimensional infinito. Estos controladores han sido propuestos por Yuan en [82] y por Shifman en [69].

► Se propone un nuevo controlador. Es similar al obtenido por Shifman [69], pero en lugar de utilizar la variable agregada producto de la medición directa del strain gage, la barra se divide por medio de la técnica de elementos finitos para aproximar la información de esta variable. Esta aproximación se realiza tomando en cuenta las características del material y la posición de la punta. Este controlador sólo requiere retroalimentación de las variables de la base, de la posición de la punta y la variable auxiliar. En forma semejante a los demás, se realizó su diseño e implementación.

► Un análisis experimental que compara el diseño y el estudio de controladores basados en modelos de dimensión finita con los controladores basados en el modelo infinito. Esto tiene la finalidad de identificar las ventajas de la implementación y funcionamiento de cada controlador, para su aplicación real.

## 1.4 Organización de la Tesis

Este trabajo de investigación está organizado de la siguiente manera:

**Capítulo 2:** Presenta la derivación del modelo del robot con flexibilidad en el eslabón. Se basa en la teoría Euler-Bernoulli para la caracterización del eslabón. En base al principio de Hamilton, se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales parciales que describen al robot.

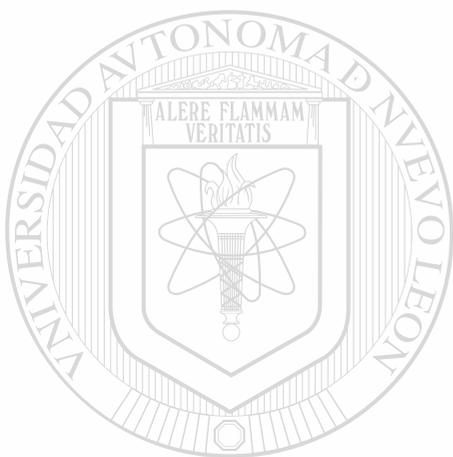
**Capítulo 3:** Se presentan los modelos dimensionales finitos. El primero de ellos se obtiene mediante la técnica análisis modal y el segundo mediante la técnica de elementos finitos. Los dos modelos son semejantes. Se utiliza el modelo obtenido de análisis modal para el diseño de los controladores basados en modelo de dimensión finita.

**Capítulo 4:** Está dividido en dos secciones. En la primera se presenta el diseño de los controladores basados en un modelo de dimensión finita. Los controladores PD, LQR, LQG/ $H_\infty$  y Pasivo se derivan a partir del modelo obtenido mediante la técnica de análisis modal. El controlador PS se obtiene aplicando la técnica de perturbaciones singulares para obtener el modelo de orden reducido. La segunda sección comprende el diseño de los

controladores basados en dimensión infinita.

**Capítulo 5:** Se muestran los resultados obtenidos de la simulación y experimentación de los diferentes esquemas de diseño propuestos en el capítulo 4. Se presenta también el análisis comparativo de los esquemas de diseño.

Finalmente se presentan las conclusiones de esta tesis y se anexa un apéndice que comprende preliminares matemáticos y algunos resultados que ayudan a fundamentar las conclusiones obtenidas. Asimismo en esta sección, se presentan las publicaciones en congresos y revistas relacionadas con este trabajo de tesis.



# UANL

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

# CAPITULO 2

## Modelado del Robot flexible en el eslabón

En este capítulo se presenta la derivación del modelo para el robot con flexibilidad en el eslabón. El modelado se realizó tomando en cuenta las propiedades más relevantes de la estructura articulada y sus principales características dinámicas [11]. El modelo será utilizado tanto en simulación como para experimentación. El robot, considerado para este estudio, consta primordialmente de dos partes: eslabón<sup>1</sup> y la base. En la base se encuentra el actuador<sup>2</sup> que aplica el torque a la estructura. Para el análisis del eslabón, se utiliza la teoría Euler-Bernoulli que considera al eslabón como una barra sujeta a vibraciones laterales. Para la obtención de las ecuaciones del modelo se aplica el Principio de Hamilton. La barra tiene contribución en las energías cinética y potencial del sistema y la base sólo en la energía cinética.

### 2.1 Derivación del Modelo

El robot con flexibilidad en el eslabón de un grado de libertad consiste de un eslabón flexible que está conectado a una base. En la base, se encuentra un motor, el cual aplica un torque al eslabón para moverlo a la posición deseada. El movimiento del eslabón es horizontal, por lo que las fuerzas gravitacionales no son consideradas. El objetivo primordial del control, es que la deflexión sea lo más pequeña posible.

En la figura 2.1, se muestra el marco de referencia utilizado para definir las variables relativas al robot. La longitud del eslabón se denota por  $l$ , el torque por  $\tau$ , la variable en el tiempo por  $t$ , la deflexión del eslabón con respecto al eje neutral por  $w(x, t)$ , la coordenada a través del eje neutral del eslabón por  $x$  y por  $\theta(t)$ , el ángulo de rotación del eje del eslabón con respecto al eje neutral (línea rígida).

El eslabón se caracteriza como una barra sujeta a fuerzas externas distribuidas a través de toda su longitud. Entre las teorías utilizadas en la descripción de las vibraciones de una barra

<sup>1</sup> El eslabón, en el equipo experimental es una barra de 0.914m. de longitud. El material es Aluminio.

<sup>2</sup> En el equipo experimental utilizado para las pruebas de los controladores, el actuador es un motor de corriente directa.

se encuentran la de Euler-Bernoulli, la de Rayleigh y la de Timoshenko. La teoría más simple de vibración lateral es la de Euler-Bernoulli [59] .

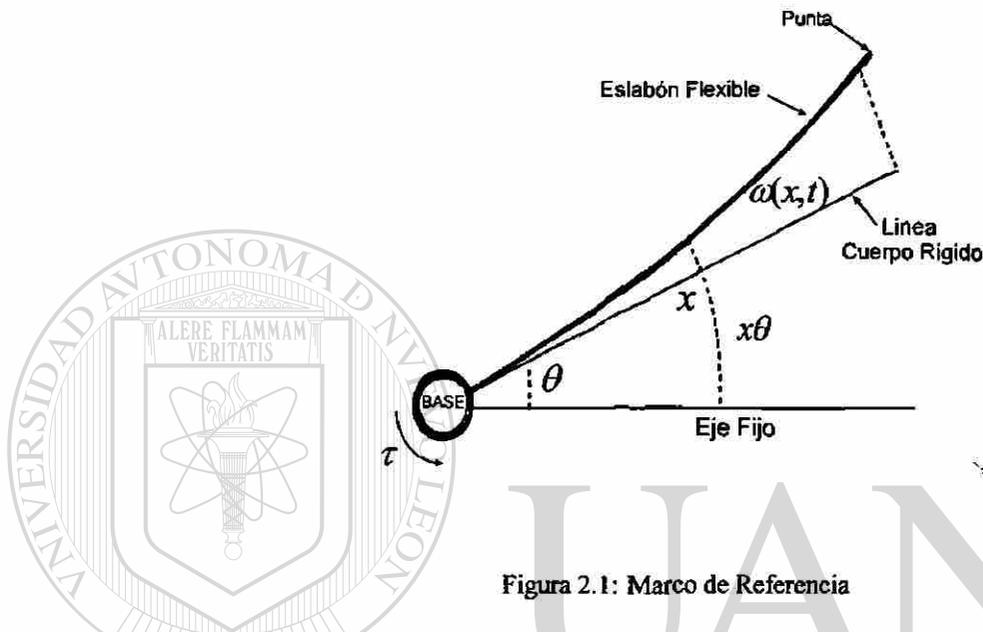


Figura 2.1: Marco de Referencia

En base a la teoría de Euler-Bernoulli se modela el eslabón. En esta teoría, los términos de segundo y alto grado en las variables de deformación se desprecian y se consideran las siguientes hipótesis:

- ◆ El eslabón es una barra con características geométricas uniformes y una distribución de masa uniforme. Esta suposición implica que la deflexión de una sección a través del eslabón es debido solo al doblamiento o deflexión y no a un corte. Además, la contribución de la inercia rotatoria de la sección del eslabón a la energía total es despreciable.

- ◆ El eslabón es flexible en la dirección lateral, sólo las deformaciones elásticas están presentes. Esta suposición está reforzada por la construcción mecánica de un brazo flexible real.

- ◆ Las deformaciones no lineales así como la fricción interna u otras perturbaciones externas son despreciables.

Al aplicar esta teoría, el eslabón es una barra de longitud  $l$  como se muestra en la figura 2.2. El área transversal de la barra se denota por  $A_T$ ,  $\rho$  es la densidad de masa que actúa sobre una fuerza externa  $q(x, t)$  en dirección al eje  $z$ ,  $I_h$  es la inercia del eje y  $E$  es el módulo de Young.

Se asume que la sección del plano a una distancia  $x$  permanece plano inclusive después del curvado y tiene una rotación a través del eje  $y$  dado por la pendiente  $w'$  de la curva elástica. Se pueden entonces definir los desplazamientos de la barra como

$$\begin{aligned} u_x &= -z\omega'(x, t) \\ u_y &= 0 \\ u_z &= \omega(x, t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

La deformación está dada por  $\varepsilon_{xx} = z\omega''(x, t)$ . El esfuerzo está dado por  $\tau_{xz} = -Ez\omega''(x, t)$ .

**Nota 2.1** En las ecuaciones, una coma en la parte superior representan diferenciación respecto a  $x$ , y un punto representa la diferenciación con respecto al tiempo.

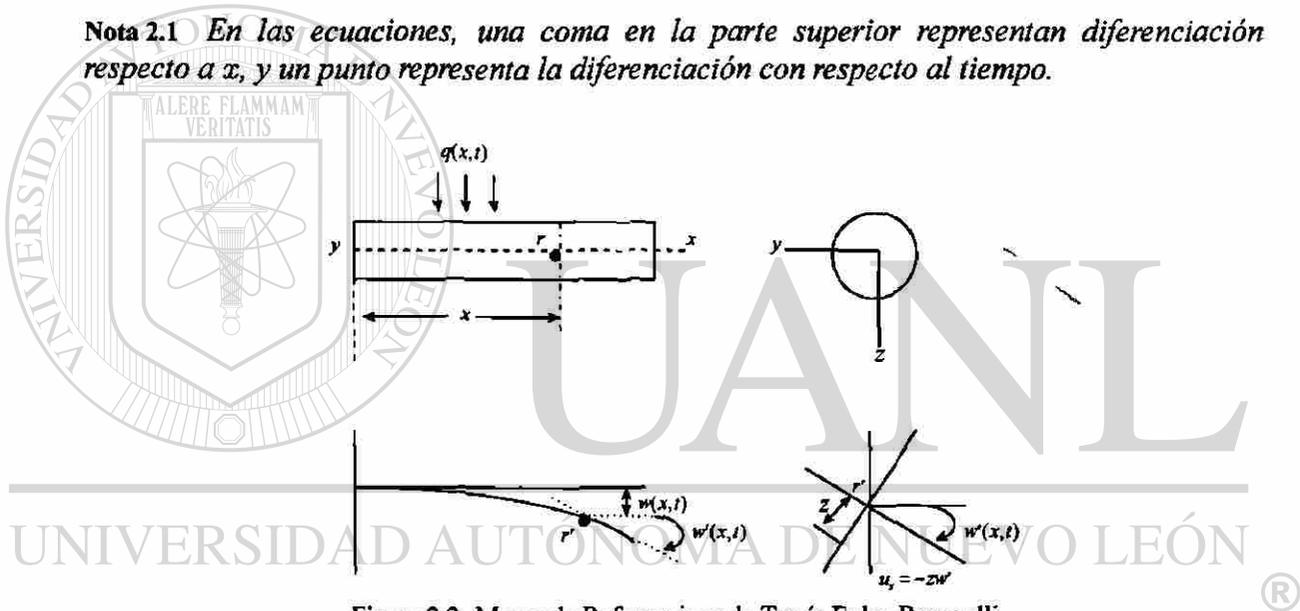


Figura 2.2. Marco de Referencia en la Teoría Euler-Bernoulli

Para aplicar el Principio de Hamilton se requieren las energías cinética y potencial del robot. La primera está constituida por la contribución del eslabón y de la base. La segunda, la energía potencial, depende completamente del eslabón.

La energía potencial (de la deformación) está dada por

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \int_A Ez^2 \omega''(x, t) dA dx = \frac{1}{2} \int_0^l EI (\omega''(x, t))^2 dx \quad (2.2)$$

De la figura 2.1, la posición absoluta de un punto a lo largo del eslabón está descrita por

$$p = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \theta(t) - \omega(x, t) \sin \theta(t) \\ x \sin \theta(t) + \omega(x, t) \cos \theta(t) \end{pmatrix}$$

Ya que el eslabón está sujeto a la base, las siguientes condiciones geométricas de frontera se satisfacen,

$$\omega(0, t) = \omega'(0, t) = 0 \quad (2.3)$$

La energía cinética está dada por

$$T = T_h + T_l$$

donde la energía cinética del eje está dada por

$$T_h = \frac{1}{2} I_h \dot{\theta}(t)^2$$

y la del eslabón, al despreciar la inercia axial debido a  $\dot{u}_x$ , es descrita por

$$\begin{aligned} T_l &= \frac{1}{2} \rho \int_0^l (\dot{p}_x^2 + \dot{p}_y^2) dx \\ &= \frac{1}{2} \rho \int_0^l (x^2 \dot{\theta}(t)^2 + \omega^2(x, t) \dot{\theta}(t)^2 + \dot{\omega}^2(x, t) + 2x \dot{\theta}(t) \dot{\omega}(x, t)) dx \end{aligned} \quad (2.4)$$

Al aplicar el Principio de Hamilton, se tiene

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T(t) - \delta U(t) + \delta W(t)) dt = 0$$

donde  $\delta W(t) = u(t) \delta \theta(t)$  representa el trabajo virtual realizado por el torque.

Para determinar  $\delta T(t)$ , considere la funcional

$$T[\theta(t)] = \int_{t_1}^{t_2} F(t, \theta(t), \dot{\theta}(t))$$

Al aplicar la ecuación general de Euler, se obtiene

$$\delta T(t) = [I_h \dot{\theta} + \rho \int_0^l (x^2 \ddot{\theta}(t) + \omega^2 \ddot{\theta}(t) + x \ddot{\omega}(x, t)) dx] \delta \theta + [\rho \int_0^l (\ddot{\omega}(x, t) + x \ddot{\theta}(t)) dx] \delta \omega \quad (2.5)$$

**Nota 2.2** La deformación  $\omega(x, t)$  se considera muy pequeña con respecto a la longitud del eslabón.  $\omega(x, t) \leq 0.1l$ . Ver artículo Cannon [10].

Al despreciar el término que involucra  $\omega(x, t)^2$ , y al agrupar los términos en  $\delta\theta$ , se obtiene

$$I_h \ddot{\theta} + \rho \int_0^l (x^2 \ddot{\theta}(t) + x \ddot{\omega}(x, t)) dx = u \quad (2.6)$$

A partir de la funcional

$$U[\omega(x, t)] = \frac{1}{2} \int_0^l \omega''(x, t)^2 dx \quad (2.7)$$

se calcula la variación  $\delta U$ , la cual es dada por la expresión

$$\delta U = \int_0^l \omega''(x, t) \delta \omega''(x, t) dx \quad (2.8)$$

Si se integra por partes, resulta que

$$\delta U = \omega''(x, t) \delta \omega'(x, t) \Big|_{0,l} - \int_0^l \omega'''(x, t) \delta \omega'(x, t) dx$$

Al integrar de nuevo por partes, se obtiene

$$\delta U = \omega''(x, t) \delta \omega'(x, t) \Big|_{0,l} - \omega'''(x, t) \delta \omega(x, t) \Big|_{0,l} + \int_0^l \omega''''(x, t) \delta \omega(x, t) dx \quad (2.9)$$

Esta expresión debe anularse en la extremal de la funcional<sup>3</sup>, es decir,

$$\omega''(l, t) = 0; \quad \omega'''(l, t) = 0 \quad (2.10)$$

Al agrupar los términos que involucran  $\delta \omega$ , se obtiene

$$EI \omega''''(x, t) + \rho \ddot{\omega}(x, t) + \rho x \ddot{\theta}(t) = 0 \quad (2.11)$$

Entonces, de las ecuaciones dadas por (2.3), (2.10), (2.6), (2.11), el modelo dinámico que representa al robot flexible en el eslabón está descrito por

<sup>3</sup> La ecuación de Euler-Poisson tiene la forma  $w^{IV} = 0$ , su solución general:  $w = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3$ , contiene cuatro constantes arbitrarias  $C_i$  ( $i = 1..4$ ) y las condiciones de frontera no bastan para determinarlas. Por esto, se calcula la variación de la funcional 2.7, y la expresión resultante se anula en la extremal de la misma funcional.

$$\Sigma_{RFE} : \begin{cases} I_t \ddot{\theta}(t) + \rho \int_0^l x \ddot{\omega}(x, t) dx = u(t) \\ EI \omega''''(x, t) + \rho \ddot{\omega}(x, t) + \rho x \ddot{\theta}(t) = 0 \\ \omega(0, t) = \omega'(0, t) = 0 \\ \omega''(l, t) = \omega'''(l, t) = 0 \end{cases}$$

donde  $I_t = I_h + \rho l^3/3$ , el cual es un modelo integro-diferencial.

Al integrar con respecto al tiempo la segunda ecuación de  $\Sigma_{RFE}$ , y sustituyendo el resultado en la primera ecuación se obtiene

$$\Sigma_{RFET} : \begin{cases} I_h \ddot{\theta}(t) - EI \omega''(0, t) = u(t) \\ EI \omega'''(x, t) + \rho \dot{\omega}(x, t) + \rho x \dot{\theta}(t) = 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

Siendo el modelo  $\Sigma_{RFET}$  un sistema descrito con ecuaciones diferenciales parciales (PDE).

Este sistema será utilizado para derivar modelo de dimensión finita para  $\Sigma_{RFE}$ .

## 2.2 Teoría de Rayleigh

Si en el modelo se incluye el término inercial  $\dot{u}_x$ , entonces se puede considerar la teoría de Rayleigh. El término aparece como consecuencia de la componente de velocidad en la dirección axial. Este efecto adicional es originalmente denominado por Rayleigh como Inercia Rotatoria.

Sea

$$\dot{u}_x = -z \omega'(x, t)$$

el término inercial.

Puesto que la energía cinética de este componente está dada por

$$T_x = \int_0^l \int_A \frac{1}{2} \rho z^2 (\dot{\omega}')^2 dA dx = \int_0^l \frac{1}{2} \rho I (\dot{\omega}')^2 dx$$

Entonces, la energía cinética total del eslabón es dada por

$$T_l = \frac{1}{2} \int_0^l \{ \rho A \dot{\omega}^2 + \rho I (\dot{\omega}')^2 \} dx$$

De modo que al calcular la variación de  $T$ , la segunda ecuación de  $\Sigma_{RFE}$ , se modifica a

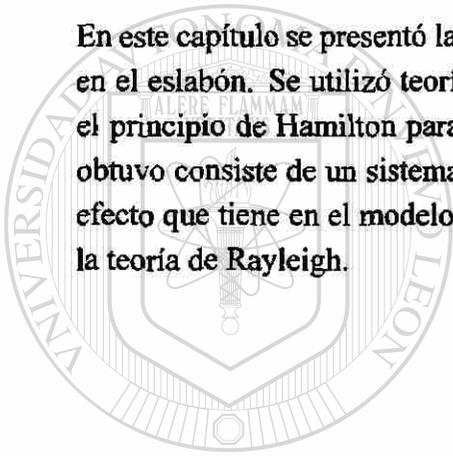
$$EI\omega''''(x,t) - \rho I\ddot{\omega}''(x,t) + \rho A\ddot{\omega}(x,t) = u \quad (2.13)$$

con las condiciones de frontera dadas por

$$EI\omega'' \delta\omega'_{[0,l]} - (EI\omega'''' - \rho I\ddot{\omega}'')\delta\omega_{[0,l]} = 0$$

### 2.3 Resumen

En este capítulo se presentó la derivación del modelo que representa al robot con flexibilidad en el eslabón. Se utilizó teoría Euler-Bernoulli para modelar el eslabón flexible y se aplicó el principio de Hamilton para la obtención de las ecuaciones dinámicas. El modelo que se obtuvo consiste de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales. También se presentó el efecto que tiene en el modelo dinámico la adición de la inercia rotatoria, para esto se utilizó la teoría de Rayleigh.



UANL

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

# CAPITULO 3

## Modelo Dimensional Finito

El sistema descrito por  $\Sigma_{RFET}$  consta de ecuaciones diferenciales parciales. Esta característica representa un sistema de parámetros distribuidos. Uno de los enfoques para resolver el problema de control para este tipo de sistemas, es reducir el sistema  $\Sigma_{RFET}$  a un modelo de dimensión finita. El objetivo de obtener este modelo es el poder aplicar las técnicas de control lineal. En este capítulo se describen tres técnicas para la obtención de un modelo reducido. La primera utiliza la función de transferencia del sistema para calcular los modos, la segunda utiliza el análisis modal que consiste en el cálculo de eigenvalores y de eigenvectores del sistema y la tercera utiliza la técnica de elementos finitos.

### 3.1 Técnica de Modos

Una de las técnicas para obtener un modelo dimensional finito, es la aproximación de la solución del sistema PDE mediante la información de los modos de frecuencia del eslabón (barra). El objetivo de esta sección es obtener la forma de los modos mediante el cálculo de la función de transferencia del sistema. En este desarrollo, se utiliza el sistema de ecuaciones dadas por (2.13) que toma en cuenta la inercia rotatoria. Para obtener la forma de los modos, se busca primeramente una representación más simple para (2.13). Para esto, se hacen las siguientes asignaciones

$$\begin{aligned} \frac{x}{l} &\rightarrow x, & \frac{t}{t_o} &\rightarrow t \\ \frac{E}{E_o} &\rightarrow E, & \frac{I_{yy}}{I_{yyo}} &\rightarrow I \\ \frac{\rho}{\rho_o} &\rightarrow \rho, & \frac{w}{l} &\rightarrow w \\ \frac{q}{q_o} &\rightarrow q, & \frac{I_{yyo}}{A_o l^2} &\rightarrow r_1^2 \end{aligned}$$

donde  $I_{yy}$  es el segundo momento del área transversal y  $t_o$  y  $q_o$  están dados por

$$t_o^2 = \frac{\rho_o A_o l^4}{E_o I_{yyo}}$$

$$q_o = \frac{\rho_o A_o l}{t_o^2} = \frac{E_o I_{yyo}}{l^3}$$

Al aplicar la asignación anterior, la ecuación (2.13) se escribe como

$$M\ddot{w} + Kw = u \quad (3.14)$$

donde el operador<sup>4</sup> de masa está dado por

$$M = \rho A - r_1^2 \partial_x (\rho I \partial_x)$$

y el operador de rigidez es

$$K = \partial_x^2 EI \partial_x^2$$

cuyas condiciones de frontera son

$$(EI \partial_x^2 w) \delta \partial_x w|_{[0,l]} + \{-\partial_x (EI \partial_x^2 w) + r_1 \rho I \partial_x \ddot{w}\} \delta w|_{[0,l]} = 0$$

donde  $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$

Para barras uniformes con los valores originales puestos de valores de referencia, las ecuaciones anteriores se reducen a

$$M = 1 - r_1^2 \partial_x^2$$

$$K = \partial_x^4$$

$$(\partial_x^2 w) \delta \partial_x w|_{[0,l]} + \{-\partial_x^2 w + r_1^2 \partial_x \ddot{w}\} \delta w|_{[0,l]} = 0$$

Para vibraciones libres se tiene que  $w(x, t) = W(x)e^{ipt}$ , entonces (3.14) puede reescribirse como

$$(d_x^4 + r_1^2 d_x^2 p^2 - p^2)W = 0$$

$$(d_x^2 W) \delta d_x W|_{[0,l]} - \{d_x^3 W + r_1^2 d_x p^2 W\} \delta W|_{[0,l]} = 0 \quad (3.15)$$

donde  $d_x = \frac{d}{dx}$  y  $p$  es la frecuencia natural.

Si se asigna  $b = -r_1^2 p^2$  y  $c = p^2$ , las ecuaciones descritas por (3.15), toman la forma

$$(d_x^4 + b d_x^2 - c)W = 0$$

$$(d_x^2 W) \delta d_x W|_{[0,l]} + \{b d_x W - d_x^3 W\} \delta W|_{[0,l]} = 0 \quad (3.16)$$

<sup>4</sup> Dados dos espacios topológicos lineales  $E$  y  $E_1$ , cualquier mapeo  $y = Ox$  ( $x \in E, y \in E_1$ ) de un subconjunto de  $E$  (posiblemente  $E$  mismo) en  $E_1$ , es llamado operador (de  $E$  a  $E_1$ ).

Al obtener la Transformada de Laplace de (2.8), resulta

$$(s^4 - bs^2 - c)\bar{W} = (s^3 - bs)W(0) + s^2W'(0) + sW''(0) + (W'''(0) - bW'(0))$$

Si se definen los siguientes valores positivos, las variables  $b$  y  $c$  están relacionados por las raíces del polinomio característico

$$\begin{aligned} s_1^2 &= \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 4c + b} \\ s_2^2 &= \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 4c - b} \\ p^2 &= \frac{s_1^4}{1 + s_1^2 s_2^2} \end{aligned}$$

y también están relacionadas por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} (s^2 - s_1^2)(s^2 - s_2^2) &= (s^4 - bs^2 - c) = 0 \\ b &= (s_1^2 - s_2^2) \\ c &= (s_1^2 s_2^2) \\ s_1^4 - bs_1^2 - c &= 0 \\ s_2^4 - bs_2^2 - c &= 0 \end{aligned}$$

De modo que la función de transferencia  $T(x)$  del sistema está dada por

$$T(x) = \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{s^4 - bs^2 - c} = \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{(s^2 - s_1^2)(s^2 - s_2^2)}$$

Al calcular la transformada inversa,  $T(x)$  resulta

$$T(x) = \frac{1}{s_1 s_2 (s_1^2 - s_2^2)} (s_2 \sinh s_1 x - s_1 \sin s_2 x)$$

De acuerdo a este resultado, la forma del modo ("modo shape") y sus derivadas pueden ser escritas como

$$\begin{aligned} W &= [(d_x^3 - bd_x)W(0) + d_x^2 W'(0) + d_x W''(0) + \{W'''(0) - bW'(0)\}]T(x) \\ W' &= [cW(0) + d_x^3 W(0) + d_x^2 W''(0) + d_x \{W'''(0) - bW'(0)\}]T(x) \\ W'' &= [cd_x W(0) + (bd_x^2 + c)W'(0) + d_x^3 W''(0) + d_x^2 \{W'''(0) - bW'(0)\}]T(x) \\ W''' - bW' &= [(cd_x^2 - bc)W(0) + cd_x W'(0) + cW''(0) \\ &\quad + (d_x^3 - bd_x)\{W'''(0) - bW'(0)\}]T(x) \end{aligned} \quad (3.17)$$

En el caso del eslabón flexible que es una barra en configuración Fija-Libre ("fixed free"), las condiciones de frontera están dadas por

$$\begin{aligned} W(0) &= 0; & W''(1) &= 0 \\ W'(0) &= 0; & W'''(1) - bW'(1) &= 0 \end{aligned}$$

Al sustituir estas condiciones en (3.17), se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= [cW''(0) + (d_x^3 - bd_x)W'''(0)]T(1) \\ 0 &= [d_x^3W''(0) + d_x^2W'''(0)]T(1) \end{aligned}$$

que puede ser representada en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} cT(1) & (d_x^3 - bd_x)T(1) \\ d_x^3T(1) & d_x^2T(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W''(0) \\ W'''(0) \end{bmatrix} = 0 \quad (3.18)$$

Una solución no trivial se obtiene cuando el determinante de la matriz (3.18) es igual a

$$cT(1)d_x^2T(1) - (d_x^3 - bd_x)T(1)d_x^3T(1) = 0$$

Esto nos lleva a la ecuación de frecuencia dada por

$$\left\{ \frac{s_1^2}{s_2^2} + \frac{s_2^2}{s_1^2} \right\} \cosh s_1 \cos s_2 + \left\{ \frac{s_1}{s_2} + \frac{s_2}{s_1} \right\} \sinh s_1 \sin s_2 + 2 = 0$$

con el modo shape dado por

$$s_1 s_2 (s_1 \sinh s_1 + s_2 \sin s_2) (\cosh s_1 x - \cos s_2 x) - (s_1^2 \cosh s_1 + s_2^2 \cos s_2) (s_2 \sinh s_1 x - s_1 \sin s_2 x)$$

Ahora bien, para el caso de la barra modelada mediante Euler-Bernoulli (sistema  $\Sigma_{RFET}$ ), ésta no considera el término axial, de manera que la ecuación de la frecuencia está dada por

$$\cosh \sqrt{p} \cos \sqrt{p} + 1 = 0$$

y el modo shape está dado por

$$(\sinh \sqrt{p} + \sin \sqrt{p})(\cosh \sqrt{p}x - \cos \sqrt{p}x) - (\cosh \sqrt{p} + \cos \sqrt{p})(\sinh \sqrt{p}x - \sin \sqrt{p}x)$$

donde  $p$  es la frecuencia natural.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

### 3.2 Técnica de Análisis Modal Restringida

Si al sistema  $\Sigma_{RFET}$  se le asigna como entrada  $u(t)$  el valor de cero, se obtiene un sistema homogéneo. Esto permite el cálculo de los eigenvalores y los eigenvectores. En el caso del robot flexible en el eslabón, esto representa las frecuencias de resonancia con sus modos shape respectivos. El análisis modal, denominado restringido, se desarrolla asumiendo  $\theta(t) \equiv 0$  (o  $\dot{\theta}(t) \equiv 0$ ), esto equivale a suponer que el eje rígido tiene inercia infinita y, por lo tanto siempre estará en reposo[11].

Con  $u(t) = 0$ , la segunda ecuación  $\Sigma_{RFET}$ , se convierte en

$$EI\omega''''(x, t) + \rho\ddot{\omega}(x, t) = 0 \quad (3.19)$$

con las mismas condiciones de frontera dadas por las dos últimas ecuaciones de  $\Sigma_{RFE}$ .

Al aplicar el método de separación de variables,  $\omega(x, t)$  puede expresarse como

$$\omega(x, t) = \Psi(x)\eta(t) \quad (3.20)$$

y al sustituir ésta en (3.19), se obtiene

$$\Psi''''(x)\eta(t) + \frac{\rho}{EI}\Psi(x)\ddot{\eta}(t) = 0 \quad (3.21)$$

la cual se puede separar en una ecuación en el tiempo

$$\ddot{\eta}(t) + \xi^2\eta(t) = 0 \quad (3.22)$$

y otra ecuación en el espacio

$$\Psi''''(x) + \frac{\rho}{EI}\xi^2\Psi(x) = 0 \quad (3.23)$$

donde  $\xi^2$  representa el eigenvalor y  $\Psi$  es representa la eigenfunción.

La solución de (3.22) está dada por  $\eta(t) = e^{j\xi t}$ , la cual representa una oscilación armónica no amortiguada en la frecuencia angular  $\xi$ .

Las condiciones de frontera para  $\Sigma_{RFE}$  resultan ser

$$\begin{aligned} \Psi(0) = \Psi'(0) &= 0 \\ \Psi''(l) = \Psi'''(l) &= 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

Siendo  $EI$  una constante y  $\beta^4 = \rho \frac{\xi^2}{EI}$ , la ecuación (3.23) toma la forma

$$\Psi''''(x) + \beta^4\Psi(x) = 0$$

cuya solución general es dada por

$$\Psi = A \cosh \beta x + B \sin h\beta x + C \cos \beta x + D \sin \beta x \quad (3.25)$$

Para determinar los valores de  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , y  $D$ , se utilizan las condiciones de frontera. Al sustituir la condición de límite en  $x = 0$ , es decir  $\Psi(0) = \Psi'(0) = 0$ , en la solución general, se obtiene

$$\begin{aligned} \Psi(0) = A + C &= 0 \\ \Psi'(0) = B + D &= 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

Al sustituir ahora las condiciones en  $x = l$ , es decir,  $\Psi''(l) = \Psi'''(l) = 0$ , junto con la anterior,

en la solución general, se tiene

$$\begin{aligned}\Psi''(l) &= A(\cos \beta l + \cosh \beta l) + B(\sin \beta l + \sinh \beta l) = 0 \\ \Psi'''(l) &= B(\cos \beta l + \cosh \beta l) + A(\sin \beta l - \sinh \beta l) = 0\end{aligned}$$

A partir de estas dos ecuaciones, se obtiene finalmente

$$1 + \cosh \beta l \cos \beta l = 0 \quad (3.27)$$

donde esta ecuación se satisface para un número de valores de  $\beta l$ , correspondientes a cada modo normal de oscilación [73] y además tiene una cantidad contable de soluciones, una frecuencia angular  $\xi = \beta_i^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho}}$ , y un modo  $\Psi_i(x)$ .

Al aplicar las condiciones de frontera dadas por (2.18), la solución general toma la forma

$$\Psi(x) = A(\sin \beta x - \sinh \beta x) + B(\cos \beta x - \cosh \beta x) \quad (3.28)$$

Mediante un proceso de normalización adecuada de la eigenfunción  $\Psi(x)$ , la solución resulta

$$\Psi(x) = \Psi_0 [(\cos \beta l + \cosh \beta l)(\sinh \beta x - \sin \beta x) + (\sin \beta l + \sinh \beta l)(\cos \beta x - \cosh \beta x)] \quad (3.29)$$

donde  $\Psi_0$  es una constante que se determina de la normalización.

### 3.3 Análisis Modal No Restringido

El análisis modal no restringido se obtiene sin hacer la suposición de que  $\theta(t) = 0$  (Figura 2.1). Sea  $\theta(t)$  de la forma

$$\theta(t) = \alpha(t) + k\Gamma(t) \quad (3.30)$$

donde  $\alpha(t)$  describe el movimiento del centro de masa del eslabón y  $\Gamma(t)$  es función del tiempo. La deflexión  $\omega(x, t)$  tiene la forma

$$\omega(x, t) = \Phi(x)\Gamma(t) \quad (3.31)$$

donde  $\Phi(x)$  está en función del espacio. Al sustituir (3.30) y (3.31) en primera ecuación de  $\sum_{RFE}$ , se obtiene

$$I_i \ddot{\alpha} + \ddot{\Gamma}(t) [I_i k + \rho \int_0^l x \Phi(x) dx] = u \quad (3.32)$$

donde  $k$  se puede elegir para que satisfaga

$$I_t k + \rho \int_0^l x \Phi(x) dx = 0 \quad (3.33)$$

con lo cual se garantiza que ninguna perturbación ocurra en el centro de masa, es decir  $\ddot{\alpha} = 0$ .

Al sustituir (3.30) y (3.31) en la segunda ecuación de  $\Sigma_{RFE}$ , resulta

$$EI\Phi'''(x)\Gamma(t) + \rho\Phi(x)\ddot{\Gamma}(t) + \rho x(\ddot{\alpha}(t) + k\ddot{\Gamma}(t)) = 0$$

en la cual, al aplicar el método de separación de variable, se puede describir en tiempo y espacio, como

$$\Phi'''(x) + \frac{\rho\eta^2}{EI}(\Phi(x) + kx) = 0 \quad (3.34)$$

$$\ddot{\Gamma}(t) + \eta^2\Gamma(t) = 0 \quad (3.35)$$

donde  $\eta^2$  es el eigenvalor,  $(\Phi(x) + kx)$  es la eigenfunción y la solución de (3.35) está dada por  $\Gamma(t) = e^{-j\eta t}$  con las condiciones de frontera para  $\Phi(x)$

$$\begin{aligned} \Phi(0) &= \Phi'(0) = 0 \\ \Phi''(l) &= \Phi'''(l) = 0 \end{aligned}$$

Entonces, la solución general para  $\Phi(x)$  tiene la forma

$$\Phi(x) = A \sin(\gamma x) + B \cos(\gamma x) + C \sinh(\gamma x) + D \cosh(\gamma x) \quad (3.36)$$

donde  $x \in [0, l]$ ,  $\gamma^4 = \frac{\rho\eta^2}{EI}$ , y las constantes  $A, B, C, D$  son determinadas a partir de las condiciones de frontera.

Una solución de  $\Phi(x)$  es de la forma

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \Phi_o [(\cos(\gamma l) \sinh(\gamma l) - \sin(\gamma l) \cosh(\gamma l))(\cos(\gamma x) - \cosh(\gamma x)) \\ &+ (1 + \sin(\gamma l) \sinh(\gamma l) + \cos(\gamma l) \cosh(\gamma l))(\sin(\gamma x) - \sinh(\gamma x)) \\ &+ 2(1 + \cos(\gamma l) \cosh(\gamma l))(\sinh(\gamma x) - \sin(\gamma x))] \end{aligned} \quad (3.37)$$

donde  $\Phi_o$  se determina por una condición de normalización y  $\gamma$  debe satisfacer la ecuación característica

$$I_h \gamma^3 (1 + \cos(\gamma l) \cosh(\gamma l)) + \rho (\sin(\gamma l) \cosh(\gamma l) - \cos(\gamma l) \sinh(\gamma l)) = 0 \quad (3.38)$$

Se puede observar que esta ecuación tiene una doble solución en  $\gamma = 0$ , esto se debe al movimiento sin restricción en la base del robot. Si en esta ecuación, la inercia del eje  $I_h$

tiende a infinito, la ecuación característica (3.38), se convierte en (3.27), con  $\gamma = \beta$ . Con esta aproximación, se obtiene el modelo restringido.

Por otra parte, se puede obtener un modelo dimensional finito aproximado utilizando solo un número finito de eigenvalores y eigenvectores. Considerando sólo las primeras  $n_e$  raíces de la solución (3.37), la deformación del eslabón puede expresarse en términos de  $n_e$  modos modelados como sigue

$$\omega(x, t) = \sum_{i=1}^{n_e} \Phi_i(x) \Gamma_i(t) \quad (3.39)$$

$$\theta(t) = \alpha(t) + \sum_{i=1}^{n_e} \Phi'_i(0) \Gamma_i(t) \quad (3.40)$$

Esto permite transformar las ecuaciones  $\Sigma_{RFE}$ , en un conjunto de  $n_e + 1$  ecuaciones diferenciales de segundo orden de la forma

$$\begin{aligned} I_i \ddot{\alpha}(t) &= u(t) \\ \ddot{\Gamma}_i(t) + \eta_i^2 \Gamma_i(t) &= \Phi'_i(0) u(t) \end{aligned} \quad i = 0, \dots, n_e \quad (3.41)$$

las cuales pueden describirse en forma matricial

$$\begin{pmatrix} I_t & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\alpha}(t) \\ \ddot{\Gamma}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \Gamma(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ \Phi'(0) \end{pmatrix} u \quad (3.42)$$

donde los bloques cero y la matriz identidad son de dimensiones apropiadas. La naturaleza desacoplada de estas ecuaciones es una consecuencia de la ortogonalidad de las eigenfunciones  $\Phi'_i(x)$ , además la matriz de rigidez está definida como

$$k = \text{diag}\{\eta_i^2\}$$

Otra representación se puede obtener al hacer las siguientes sustituciones

$$\begin{aligned} I_i \ddot{\alpha} &= u \\ I_i [\ddot{\theta}(t) - \sum_{i=0}^{n_e} \Phi'_i(0) \ddot{\Gamma}_i(t)] &= u \end{aligned}$$

y sustituirla en

$$\begin{aligned} \ddot{\Gamma}(t) + k\Gamma(t) - \Phi'_i(0)u &= 0 \\ \ddot{\Gamma}(t) + k\Gamma(t) - \Phi'_i(0)I_i[\ddot{\theta}(t) - \sum_{i=0}^{n_e} \Phi'_i(0)\ddot{\Gamma}_i(t)] &= 0 \end{aligned}$$

en forma matricial, se obtiene

$$\underbrace{\begin{pmatrix} I_t & -I_t\Phi'(0)^T \\ -I_t\Phi'(0)^T & I + I_t\Phi'(0)\Phi'(0)^T \end{pmatrix}}_M \underbrace{\begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\Gamma} \end{pmatrix}}_Q + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}}_D \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\Gamma} \end{pmatrix}}_Q \quad (3.43)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}}_K \underbrace{\begin{pmatrix} \theta \\ \Gamma \end{pmatrix}}_Q = \underbrace{\begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}}_F u$$

en donde se ha introducido una matriz de amortiguamiento  $D$ , la cual se puede calcular a partir de la matriz de rigidez, o experimentalmente. Esto último, se puede realizar observando el tiempo de caída del sistema, excitado a cada frecuencia de deformación.

En consecuencia, el sistema descrito por (3.43), con  $Q = [\theta \ \Gamma]^T$  tiene la forma

$$M\ddot{Q} + D\dot{Q} + KQ = F \quad (3.44)$$

la cual es semejante a la representación de un robot rígido.

### 3.4 Análisis Modal con la Posición en la Punta

Uno de los elementos primordiales en el diseño del control de robots con eslabones flexibles, es la localización de los sensores y de los actuadores [46]. La razón de esto recae en que una selección apropiada de la posición de los sensores y actuadores conlleva a una optimización del desempeño del sistema en lazo cerrado. Sin embargo, en el caso de los robots con eslabones flexibles, el sensor generalmente se coloca en la posición de la punta para asegurar la retroalimentación de la posición de la herramienta. La medición de la posición de la punta del eslabón flexible, se capta por medios ópticos como una cámara<sup>5</sup> o por algún otro dispositivo.

El objetivo del diseño de un control para los robots flexibles es posicionar la punta en el lugar exacto con la trayectoria y el tiempo deseados.

En esta sección, se presenta el modelo del robot flexible desarrollado en las secciones anteriores, ahora considerando como referencia la posición de la punta, denominada  $z(l, t)$ , en lugar de la deflexión  $\omega(x, t)$ .

El desplazamiento total de un punto particular del eslabón, se define por

$$z(x, t) \triangleq x\theta(t) + \omega(x, t) \quad (3.45)$$

<sup>5</sup> En el caso del robot flexible en el eslabón experimental, el medio óptico que posee es una cámara con una resolución de 0.014 cm. a un metro de distancia.

que representa la longitud del arco medido a través del círculo de radio  $x$ , centrado en el eje más un desplazamiento relativo. Esto se muestra en la figura 2.1. Al hacer la sustitución de (3.45), en la ecuación de  $\sum_{RFET}$ , se obtiene

$$\begin{aligned} EIz''''(x, t) + \rho\ddot{z}(x, t) &= 0 \\ I_h\ddot{\theta}(t) - EIz''(0, t) &= 0 \end{aligned} \quad (3.46)$$

Con las condiciones de frontera dadas por

$$\begin{aligned} z'(0, t) &= \theta(t) \\ z(0, t) = z''(l, t) = z'''(l, t) &= 0 \end{aligned}$$

Si se aplica el método de separación de variables, se tiene

$$z_n = \phi_n(x)q_n(t) \quad (3.47)$$

$$\theta_n = \alpha_n q_n(t) \quad (3.48)$$

donde  $\phi$  es el  $n$ -ésimo modo shape y  $q_n$  es el modo asociado.

Al sustituir  $z_n$  y  $\theta_n$ , en la ecuación (3.46), se obtiene

$$\phi_n''''(x)q_n(t) + \frac{\rho}{EI}\phi_n(x)\ddot{q}_n(t) = 0 \quad (3.49)$$

de las cuales, se puede observar que

$$\begin{aligned} \phi_n''''(x) - \lambda_n^4\phi_n(x) &= 0 \\ \ddot{q}_n(t) + \omega_n^2q_n(t) &= 0 \end{aligned} \quad (3.50)$$

con  $\omega_n^2 = (\frac{EI}{\rho})\lambda_n^4$ , y las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} \phi_n(0) &= 0 \\ \rho\phi_n''(0) + I_h\lambda_n^4\phi_n'(0) &= 0 \\ \phi_n''(l) = \phi_n'''(l) &= 0 \end{aligned}$$

donde  $\alpha_n = \phi_n'(0)$ .

A partir de estas ecuaciones, se puede encontrar una solución mediante un análisis similar al desarrollado anteriormente. Al considerar sólo los primeros  $N$  modos, se obtiene entonces, un sistema de  $N + 1$  ecuaciones lineales, cuya representación de espacio de estado es de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= C^T x(t) \end{aligned} \quad (3.51)$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & \\ & & -\xi_1^2 & -2\zeta\xi_1 & & & \\ & & & & \dots & & \\ & & & & & & \dots & \\ & & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & & -\xi_n^2 & -2\zeta\xi_n \end{bmatrix} \quad B = \frac{1}{I_t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \Phi'_1(0) \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \Phi'_n(0) \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} l & 0 & \Phi_1(0) & 0 & \dots & \Phi_n(0) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Phi'_1(0) & \dots & 0 & \Phi'_n(0) \end{pmatrix}$$

donde el vector de estado es  $x(t) = [q_0 \ \dot{q}_0 \ q_1 \ \dot{q}_1 \ \dots \ q_n \ \dot{q}_n]$  y  $\zeta$ , representa el amortiguamiento del sistema. Los renglones de C representan los variables medibles del sensor. Este modelo lineal es similar al utilizado en la literatura [9] para el control de estructuras espaciales largas.

### 3.4.1 Análisis de Funciones de Transferencia

Los estudios realizados por Lim [46] en 1997, muestran que la selección de la retroalimentación de salida para el sistema del robot flexible, es una pieza clave en el diseño del control. Uno de los enfoques para analizar la estabilidad de un sistema, son los estudios basados en el plano  $s$ , estos esquemas de identificación y control involucran típicamente funciones de transferencia. Las características de las funciones de transferencia dependen de la selección de entrada y salida del sistema. Al utilizar modelos lineales reducidos (truncados) conviene analizar el comportamiento del sistema mediante las funciones de transferencia que se obtienen al seleccionar cierta entrada y salida.

En esta sección, se presentan las funciones de transferencia más comunes del robot flexible con sus respectivas características. Esta sección se basa en el estudio realizado por Barbieri en [8]. Para esto, se considera al sistema lineal dado por  $\Sigma_L$  con el vector  $x(t) = q = [q_0 \ q_1 \ \dots \ q_n]^T$  y  $b = (1/I_t)[\phi'_1 \ \phi'_2 \ \dots \ \phi'_n]^T$ .

#### 3.4.1.1 Angulo del Eje al Torque del Eje

Consideremos que la salida seleccionada del sistema  $\Sigma_L$  está definida por

$$\theta = q_0 + I_t b^T q$$

donde  $q_o$  es el modo rígido. Esta salida representa el ángulo del eje. La función de transferencia  $H_1(s)$  de  $\sum_L$  está dada por

$$H_1(s) = \frac{\theta(s)}{\Gamma(s)} = \frac{1}{I_t s} + \frac{1}{I_t} \sum_{n=1}^N \frac{2 \left[ \phi'_n(0) \right]^2}{(s^2 + \xi_n^2)} \quad (3.52)$$

donde  $\Gamma$  representa al torque,  $\theta$  la salida,  $\xi_n$  es la  $n$ -ésima frecuencia modal y  $N$  es el número de modos.

Esta función de transferencia es un ejemplo de "Sensor/Control Colocado", es decir, que el sensor y el actuador se encuentran localizados en el mismo lugar.

Además,  $H_1(s)$  resulta en un patrón de alternación simple de polos y ceros en el eje imaginario del plano complejo  $s$ . Wang y Vidyasagar [77] demostraron que este patrón implica que la función de transferencia es pasiva y relativamente fácil de estabilizar.

### 3.4.1.2 Posición de la punta al torque del eje

Ahora, consideremos que la salida medible es la posición de la punta  $z(l, t)$ , entonces se tiene que

$$z(l, t) = z_{tip}(t) = l q_o + [ \phi_1(l) \quad \phi_2(l) \quad \dots \quad \phi_N(l) ] q$$

cuya función de transferencia está dada por

$$H_2(s) = \frac{Z_{tip}(s)}{\Gamma(s)} = \frac{l}{I_t s^2} + \frac{1}{I_t} \sum_{n=1}^N \frac{2 \phi_n(l) \phi'_n(0)}{(s^2 + \omega_n^2)} \quad (3.53) \quad \text{®}$$

Esta función es representativa de lo que se llama "Sensor/Control No Colocado". A diferencia de la función de transferencia  $H_1(s)$ , el sensor y el actuador se encuentran localizados en lugares distintos. Por otro lado, resulta que el sistema de fase no-mínima, con ceros en el semiplano derecho.

Como consecuencia de esto se ha requerido el diseño de compensadores. Los casos donde el sensor y el actuador no pueden situarse en el mismo lugar son muy variados, ejemplo de ello son los robots utilizados para la inspección de desechos nucleares.

### 3.4.1.3 Longitud del arco menos la deflexión al torque del eje

Sea  $w^*(l, t)$ , la variable de salida que describe la longitud del arco menos la deflexión total

de la punta y la cual está definida por la siguiente expresión

$$w^*(l, t) = w_{tip}^*(t) = lq_0 - [\phi_n(l) - l\phi_n'(0)]q_n$$

Entonces la función de transferencia del sistema  $\sum_L$  es de la forma

$$H_3(s) = \frac{W_{tip}^*(s)}{\Gamma(s)} = \frac{l}{I_t s^2} + \frac{1}{I_t} \sum_{n=1}^N \frac{\phi_n'(0)[2l\phi_n'(0) - \phi_n(l)]}{(s^2 + \xi_n^2)} \quad (3.54)$$

la cual es de fase mínima. Se caracteriza por mostrar un patrón de pares alternados de polos y ceros en el eje imaginario.

### 3.4.1.4 Posición relativa de la punta al torque del eje

Ahora, consideremos que la salida es la deflexión total de la punta. Esta salida es descrita por

$$y(l, t) = y_{tip}(t) = \sum_{n=1}^N [\phi_n(l) - l\phi_n'(0)]q_n(t)$$

y la función de transferencia de  $\sum_L$  resulta

$$H_4(s) = \frac{Y_{tip}(s)}{\Gamma(s)} = \frac{1}{I_t} \sum_{n=1}^N \frac{\phi_n'(0)[\phi_n(l) - l\phi_n'(0)]}{(s^2 + \xi_n^2)} \quad (3.55)$$

Al igual que  $H_3(s)$  se caracteriza por mostrar un patrón de pares alternados de polos y ceros en el eje imaginario.

En la tabla 1, se muestran, como ejemplo, valores típicos de los polos y ceros de las funciones de transferencia consideradas. Estos valores se obtuvieron utilizando una aproximación de dos modos.

Función de Transferencia	Polos	Ceros
$H_1(s)$ : (3.52)	0; 0; $\pm j12.35$ ; $\pm j49.04$	$\pm j6.02$ ; $\pm j47.76$
$H_2(s)$ : (3.53)	0; 0; $\pm j12.35$ ; $\pm j49.04$	$\pm 9.61$ ; $\pm j72.31$
$H_3(s)$ : (3.54)	0; 0; $\pm j12.35$ ; $\pm j49.04$	$\pm j3.89$ ; $\pm j50.24$
$H_4(s)$ : (3.55)	$\pm j12.35$ ; $\pm j49.04$	$\pm j52.24$

Tabla 1: Ejemplos de polos y ceros de las funciones:  $N = 2$

## 3.4.2 Concepto de Modo

En las secciones anteriores, se presentó el análisis modal con el cual se obtuvo un modelo lineal del robot flexible en el eslabón. Para obtener un modelo de dimensión finita se utilizaron

solamente los primeros  $N$  modos, por lo que se considera necesario analizar hasta qué punto es factible el uso de modos.

Un modo de vibración [34], se refiere al movimiento periódico que es físicamente posible en ausencia de cualquier influencia externa. En este movimiento, el desplazamiento elástico  $w(x, t)$  en la posición  $x$  y el tiempo  $t$  se mueven regulados por la regla de que “todos los desplazamientos pasan a través del cero simultáneamente y todos obtienen su máxima simultáneamente”.

El concepto de modo de vibración es, de hecho, un concepto matemático y se expresa como

$$\omega(x, t) = \Psi(x)\eta(t) \quad (3.56)$$

donde  $\Psi(x)$  se le llama modo shape y  $\eta(t)$  muestra la dependencia del tiempo de los desplazamientos elásticos en todos los puntos de la estructura. Esta expresión es un caso especial de la idea matemática de separación de variables. Como ejemplo se analizó la barra uniforme en el capítulo 2 donde la ecuación diferencial asociada con los desplazamientos laterales está dada por

$$\begin{aligned} EI\omega'''' + \rho\ddot{\omega} &= f(x, t) \\ \omega(0, t) = \omega'(0, t) = \omega''(l, t) = \omega'''(l, t) &= 0 \end{aligned} \quad (3.57)$$

La ecuación diferencial dada por (3.57) tiene modos de la forma (3.56). En teoría, tiene un infinito número de esos modos. La pregunta en cuestión es, si barras reales poseen esta propiedad.

El suposición de que una estructura real tiene un número infinito de modos, es como establecer un absurdo. ¿Cómo puede, una estructura, tener más modos que sus moléculas, o de otro manera, más que las moléculas en el universo conocido?

Generalmente, cuando se dice que una estructura tiene un número infinito de modos, quiere decir que la estructura tiene un número muy grande de modos. Una estructura física no posee un número infinito de modos.

Entonces, la cuestión es ¿Cuántos modos de vibración tiene?. La respuesta mas precisa sería ninguno, sin embargo para propósitos de aproximación matemática, el concepto de modo es muy útil.

La aproximación matemática para la barra es válida para los modos de vibración bajos. Pero para los modos altos, conforme estos aumentan, su manejo matemático se vuelve inapropiado. Para enfatizar esta idea se introduce la siguiente definición.

**DEFINICION 3.1** *El subespacio absurdo asociado con la idealización de una estructura*

*PDE (Ecuaciones Diferenciales Parciales) es el subespacio extendido por todos excepto los primeros billones de modos.*

Todos los modelos estructurales PDE tienen un subespacio absurdo, esto significa que la obtención de modos para una estructura se puede aproximar hasta  $N$  modos, donde  $N$  es tan grande como se desee pero siempre habrá modos más allá de  $N + 1$  que constituyen el subespacio absurdo.

En la práctica, la ventaja del análisis modal es que el analista puede expandir el movimiento general de una estructura, en términos de unos pocos submovimientos importantes. Esta ventaja se perdería si se insiste tomar una infinitud de modos.

Un método clásico para solucionar sistemas PDE similares a (3.57), es expandir la solución en términos de series de funciones que son definidas, examinadas y catalogadas. Usualmente estas funciones no son sencillas de calcular, inclusive las funciones  $\sin$ ,  $\sin h$ ,  $\cos$ ,  $\cosh$ , que proporcionan una solución bien conocida para los modos de vibración de una barra simple, requieren de una sofisticación numérica.

Debido a estas dificultades, a las estructuras complicadas se les divide matemáticamente en pequeños elementos, donde cada uno de éstos es analizado por separado. De esta manera, se pueden extraer los datos numéricos con la precisión requerida y en forma relativamente sencilla. A este método se le denomina de Elemento Finito.

Este método de elemento finito<sup>6</sup> (FEM) es una implementación ingeniosa de un método mas antiguo: el Método de Ritz. Tiene los mismos fundamentos teóricos que el Método de Ritz, en forma particular se conocen las condiciones de convergencia. La solución que se obtiene al utilizar el método FEM es exacta para el modelo PDE solamente. No es exacta para la estructura, ya que el modelo PDE, en sí mismo, no es exacto.

El modelo FEM debe ser visto como un tratamiento numérico del modelo PDE, ya que permiten la obtención de una aproximación numérica bastante precisa del modelo PDE. Si se utiliza el número de elementos apropiados, el error que se presenta, debido al número finito de elementos, siempre puede ser restringido al *subespacio absurdo*.

La *ventaja* del modelo FEM es que, con el análisis estructural es posible realizar los cálculos numéricos para estructuras complicadas. Su *debilidad* está en que nunca puede ser mejor que el modelo PDE, al cual converge.

<sup>6</sup> La búsqueda de una solución exacta a la ecuación diferencial de Euler normalmente es imposible por lo que se requiere una aproximación de la solución. La idea de Rayleigh-Ritz-Galerkin es seleccionar un numero finito de funciones  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  con combinaciones de la forma  $\sum q_j \varphi_j$  y encontrar cual de estas combinaciones es minima. Esta última es la aproximación de Ritz. Los pesos  $q_j$  son determinados por medio de un sistema de  $N$  ecuaciones algebraicas. Entonces, el objetivo consiste en seleccionar las funciones  $\varphi$  tal que la energía potencial pueda calcularse y minimizarse y al mismo tiempo encontrar la aproximación mas apropiada a la solución de la ecuación de Euler.

### 3.5 Modelo de Elemento Finito

En este método, el eslabón o barra flexible, se divide en un número finito de elementos. Estos elementos son apropiados para cuestiones de cálculo y de identificación. Generalmente son triángulos o rectángulos. Entonces para cada elemento ó pieza se seleccionan funciones completas<sup>7</sup>, como ejemplo los polinomios. Las propiedades de cada elemento se analizan, y las propiedades de toda la estructura se obtienen aplicando a cada elemento su aproximación asociada.

Los pasos básicos[72] en el método de elemento finito son: La formulación variacional del problema, la construcción de las funciones polinomiales, el cálculo de la matriz de rigidez y la solución del sistema discreto y por último, la estimación de la exactitud de la aproximación de Ritz final.

El desplazamiento total de un punto en el eslabón flexible [7] , se describe por

$$z(x, t) \triangleq x\theta(t) + \omega(x, t) \quad (3.58)$$

Al aplicar la teoría Euler-Bernoulli, desarrollada en el capítulo 2, resulta que la energía cinética puede ser expresada en términos de  $z(x, t)$  como

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho(\dot{z}(x, t))^2 dx + I_h \dot{\theta}(t)^2 \quad (3.59)$$

Asimismo, la energía potencial puede expresarse como

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EI(z''(x, t))^2 dx \quad (3.60)$$

Además, el trabajo hecho por el torque, es descrito por

$$W = u(t)\theta(t)$$

Ahora bien, al aplicar el Principio de Hamilton, resulta

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - U) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = 0$$

<sup>7</sup> El conjunto de funciones completas son aquellas cuyas combinaciones lineales llenan el espacio de soluciones cuando  $N \rightarrow \infty$ , y por lo tanto el método de Ritz converge.

Al sustituir (3.59) y (3.60), en la ecuación anterior e integrando por partes, resulta

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_0^l (\rho \ddot{z}(x, t) \delta z + EI z''(x, t) \delta z'') dx + I_h \ddot{\theta} \delta \theta - u \delta \theta \right] = 0 \quad (3.61)$$

Por otro lado, el desplazamiento  $z(x, t)$  puede ser discretizado usando la siguiente expansión de elemento finito

$$z(x, t) = \sum_{i=1}^N N_i(x) z_i(t) \quad (3.62)$$

donde  $z_i(t)$  representa la variación de los desplazamientos nodales en el tiempo,  $N$  es el número total de grados de libertad, y  $N_i(x)$  son polinomios hermitianos que satisfacen las condiciones de admisibilidad y que son definidos sobre una fracción de la longitud que constituyen el elemento finito.

Cuando se utiliza la teoría Euler-Bernoulli, el método requiere que para un elemento con nodos en la punta, cada elemento posea dos grados de libertad, una deflexión transversal y una rotación. Esto requiere el uso de funciones de base cúbica[17].

Las funciones Hermitianas de base cúbica, usuales para el intervalo local  $[0 \quad l]$ , son usadas de manera que las funciones shape de los elementos son dadas por

$$\begin{aligned} \phi_1(s) &= 1 - 3s^2 + 2s^3 \\ \phi_2(s) &= I_n(s - 2s^2 + s^3) \\ \phi_3(s) &= 3s^2 - 2s^3 \\ \phi_4(s) &= I_n(s^3 - s^2) \end{aligned}$$

La coordenada local  $s$  está relacionada con la coordenada  $x$  de la barra utilizando la transformación lineal del  $n$ -ésimo elemento, como sigue

$$x = x_{n-1} + I_n s$$

Esta transformación permite que la ecuación (3.62) pueda expresarse en  $N$  elementos. De este modo, la aceleración puede expresarse como

$$\ddot{z}(x, t) = \sum_{i=1}^N N_i(x) \ddot{z}_i(t) \quad (3.63)$$

y la curvatura mediante la ecuación

$$z''(x, t) = \sum_{i=1}^N N_i''(x) z_i(t) \quad (3.64)$$

Ahora, al sustituir (3.62), (3.63) y (3.64) en (3.61), e integrando apropiadamente, se obtiene

$$\begin{bmatrix} M_{hh} & M_{hi} & 0 \\ M_{ih} & M_{ii} & M_{it} \\ 0 & M_{ti} & M_{tt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{z}_h \\ \ddot{z}_i \\ \ddot{z}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{hh} & K_{hi} & 0 \\ K_{ih} & K_{ii} & K_{it} \\ 0 & K_{ti} & K_{tt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_h \\ z_i \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde  $z_h$  se refiere al grado de libertad en el eje, es decir,  $z_h = \theta$ ,  $z_i$  se refiere a los grados de libertad internos, es decir, aquellos entre la punta y el eje, y  $z_t$  se refiere al grado de libertad traslacional en la punta. Las matrices de masa, rigidez, y de amortiguamiento son particionadas con las dimensiones apropiadas.

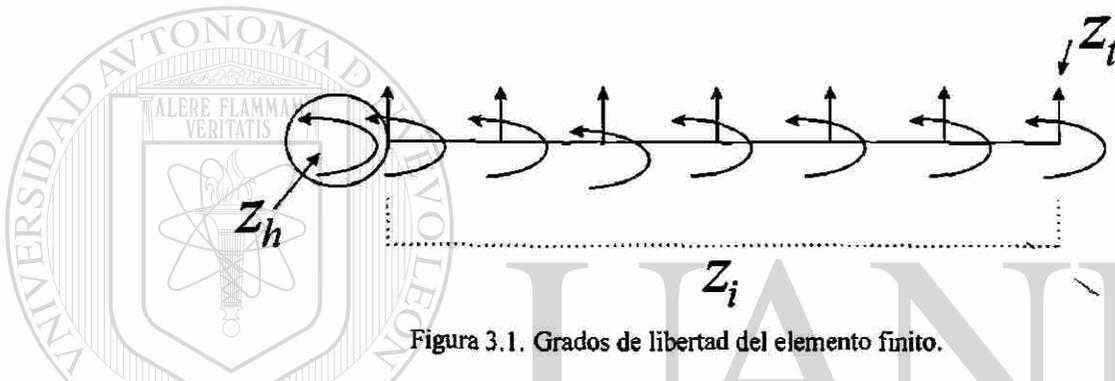


Figura 3.1. Grados de libertad del elemento finito.

Las ecuaciones semidiscretizadas del movimiento de un robot con flexibilidad en el eslabón, pueden entonces, ser expresadas como

$$[M]\{\ddot{Q}\} + [D]\{\dot{Q}\} + [K]\{Q\} = \{F\} \quad (3.65)$$

donde  $[M]$ ,  $[D]$  y  $[K]$  son las matrices de masa global, amortiguamiento, y de rigidez respectivamente.  $\{F\}$  es el vector de fuerzas externas.

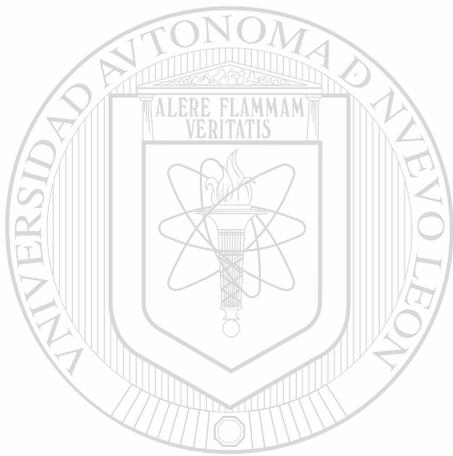
La matriz de amortiguamiento, se puede obtener directamente de las matrices de masa y rigidez para una razón de amortiguamiento dada en términos de la serie de Caughey[7].

De esta manera, la respuesta total del sistema se obtiene mediante los modos de vibración. El sistema dado por (3.65), puede reducirse usando el análisis modal. Con las correspondientes transformaciones, se obtiene un conjunto reducido de ecuaciones, que describen al sistema.

### 3.6 Resumen

En este capítulo se presentaron tres de las técnicas más comunes para obtener un sistema dimensional finito. La primera utiliza una función de transferencia, con la cual se calculan

los eigenvalores del sistema, la segunda utiliza el análisis modal para obtener el cálculo de eigenvalores y eigenvectores y la tercera es la aproximación por medio de elementos que en su conjunto representan una aproximación al eslabón. También se presentaron las funciones de transferencia obtenidas de acuerdo a la selección de la salida. Se hizo un análisis de cada una de ellas para observar sus características. En el siguiente capítulo se podrá apreciar la utilidad de los modelos obtenidos en el diseño de controladores para el robot flexible.



# UANL

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

# CAPITULO 4

## Diseño de Controladores

En este capítulo se presenta el diseño de controladores para el robot con flexibilidad en el eslabón. La primera sección presenta los controladores que se derivan de un modelo de dimensión finita. Cuatro de estos controladores están basados en el modelo lineal obtenido por medio de la técnica de análisis modal presentada en el capítulo anterior. Otro controlador se deriva de un modelo reducido por medio de la técnica de Perturbaciones Singulares. La segunda sección del capítulo se centra en el diseño de tres controladores basados en un modelo infinito, es decir, se derivan directamente del modelo original del robot.

### 4.1 Controladores Basados en Modelos de Dimensión Finita

En esta sección, se presenta el diseño de los controladores que están basados en modelos de dimensión finita. Uno de los modelos es el modelo lineal  $\Sigma_L$ , que se obtuvo por medio de análisis modal en el capítulo anterior. Con este modelo lineal se diseñaron los controladores: Proporcional-Derivativo (PD), el Regulador Cuadrático Lineal (LQR), el Pasivo y el LQG (Linear Quadratic Gaussian)/ $H_\infty$ . Otro modelo de dimensión finita se obtuvo aplicando la técnica de perturbaciones singulares. Este modelo está compuesto de dos subsistemas (generalmente un subsistema representa la parte rígida y el otro la elástica), por lo que el controlador se diseña tomando en cuenta la ley de control para cada subsistema. Se incluye también una modificación de este modelo para la elección de la variables elásticas.

#### 4.1.1 Controlador Proporcional-Derivativo

En la industria, el controlador Proporcional-Derivativo (PD) ha sido aplicado con éxito a los robots rígidos, por lo que se ha extendido su aplicación a los robots flexibles en el eslabón. Como ejemplo, en esta sección se presenta el diseño de un controlador Proporcional-Derivativo para el robot flexible experimental.

En el capítulo anterior, en el análisis de las funciones de transferencia, se pudo observar que cuando se retroalimenta la posición del ángulo del eje, el sistema es de fase mínima.

El controlador proporcional derivativo, se diseña utilizando los datos de el ángulo del eje con sus respectivas derivadas, éste tiene la forma

$$\tau = k_p(\theta_d - \theta) + k_v(\dot{\theta}_d - \dot{\theta})$$

donde  $\theta$  es el ángulo del eje,  $\theta_d$  es el ángulo deseado y  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{\theta}_d$ , sus respectivas derivadas.

Los valores de  $k_p$  y  $k_v$ , se obtuvieron al considerar la mejor sintonización del sistema con la función de transferencia dada por  $H_1(s)$  con tres modos ( $N = 3$ ).

Los valores usados para la experimentación fueron

$$k_p = 1.35 \quad k_v = 0.28$$

Los resultados experimentales se muestran en el capítulo 5, en los cuales se pueden observar severas oscilaciones cuando el robot se posiciona en el punto deseado. Esto muestra que, aunque el robot alcanza su posición deseada, la retroalimentación sólo del ángulo del eje no es suficiente para obtener una buena respuesta del robot. Una extensión de este controlador, a un robot de dos eslabones flexibles, puede hacerse únicamente considerando eslabones independientes.

Una forma de mejorar la respuesta de un controlador PD se presenta en [81], en el cual las ganancias del control no dependen de los parámetros del sistema. Un controlador similar al propuesto por Yigit es presentado en la sección 4.2.1.

#### 4.1.2 Controlador LQR

Los valores de las ganancias para el controlador PD, generalmente no son las óptimas para el sistema. Para esto se puede utilizar un criterio de optimización para el cálculo de las ganancias de control. En esta sección, se presenta el diseño de un controlador que además de considerar como retroalimentación las variables de la base, toma en cuenta las del eslabón flexible. La ley de control resultante utiliza el criterio de optimización LQR para obtener las ganancias del controlador. Las ventajas[24] al aplicar la técnica LQR son:

- ◊ Permite optimización sobre intervalos finitos (El enfoque en dominio de la frecuencia está limitado a intervalos de optimización finita).
- ◊ Es aplicable a sistemas variantes en el tiempo. (El enfoque en dominio de la frecuencia está limitado a sistemas invariantes en el tiempo).
- ◊ Puede manejar sistemas multivariantes.

Para el diseño del controlador se utiliza el sistema lineal descrito por (3.51). En forma

general, la ley de control es descrita por

$$u = -k^T x \quad (4.66)$$

donde  $k$  es una matriz de ganancia, y  $x$  es el vector de estado. El control se determina por medio de una combinación lineal de los estados del sistema. Este lazo de retroalimentación se muestra en la figura 4.1. Los valores que conforman a  $k$  son las ganancias que deben determinarse.

Al sustituir (3.51) en (4.66), se obtiene

$$\dot{x} = (A - Bk^T)x$$

en la cual, el control lineal aplicado, tiene como efecto, el mover los polos del sistema.

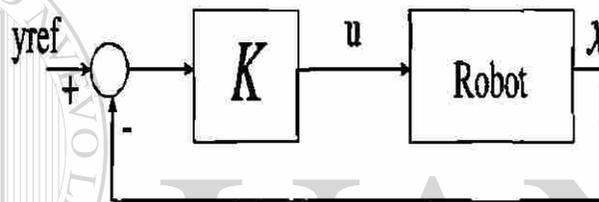


Figura 4.1: Configuración de Retroalimentación LQR-Optimo

Una forma de obtener los valores de  $k$  es aplicando el método de asignación de polos, pero para optimizar este resultado se utiliza el criterio de optimización LQR (Linear Quadratic Regulator). Las matrices de ganancia son obtenidas por el criterio de optimización LQR [24] donde  $Q$  es semidefinida positiva, y  $r$  es definida positiva.

Los valores de la matriz de peso  $Q$ , pueden ser seleccionados de acuerdo con ([4], pag. 350), donde las especificaciones son dadas en términos de la máxima desviación en los estados y señales de control para una perturbación dada.

Si se define la entrada de control como

$$\tau = -k_v(\dot{x} - \dot{x}_d) - k_p(x - x_d)$$

donde  $k_v$  y  $k_p$  son matrices de dimensión  $(1 \times 6)$  (dos modos), que se calculan por el método de optimización. Se requiere el conocimiento de todo el vector de estado. En el diseño experimental de este controlador, el vector  $x$ , se formó con  $\theta$ ,  $\dot{\theta}$ ,  $\omega(l, t)$ ,  $\dot{\omega}(l, t)$ ,  $z(l, t)$  y  $\dot{z}(l, t)$ . Estas variables describen, respectivamente, el ángulo y la velocidad angular del eje, la posición y velocidad de la deflexión, la posición y la velocidad de la punta.

Si se define el error como

$$e = x - x_d$$

donde  $x_d$  es el valor deseado. Se puede aplicar el criterio de optimización

$$O_p = \int_0^{\infty} (e^T Q e + u^T r u) dt \quad (4.67)$$

Los valores utilizados fueron

$$r = 1$$

$$Q = \text{diag}(8, 1, 1, 1, 1, 1)$$

la solución correspondiente, utilizando Matlab, es dada por,

$$k_v = [ 2.8284 \quad 1.4005 \quad 1.3363 ]$$

$$k_p = [ 0.1323 \quad -0.0012 \quad 0.0168 ]$$

En el capítulo 5 se muestran los resultados en simulación y experimentales. Los resultados muestran, que este controlador logra la respuesta deseada del sistema en un menor tiempo que el controlador PD, además no muestran oscilaciones severas. Este método asegura márgenes de ganancia y de fase adecuados.

La ventaja de este controlador con respecto al PD es que permanece insensible a perturbaciones externas. Para una extensión del método a un robot flexible de dos eslabones, el modelo depende de la configuración del robot [3].

#### 4.1.3 Controlador LQG/ $H_{\infty}$

El controlador LQG, ha sido utilizado para el control de estructuras espaciales [10], a pesar de sus propiedades atractivas, tiene la desventaja de que no garantiza márgenes de estabilidad. En la última década, se ha visto el surgimiento de la teoría de control robusto en la forma de control optimal  $H_{\infty}$ . En este contexto, la característica más importante de esta teoría, es la garantía de un margen de estabilidad ante perturbaciones acotadas normadas<sup>8</sup>.

Cuando al sistema lineal  $\sum_L$  de dimensión finita se le retroalimenta la posición de la punta, el sistema resultante es de fase no-mínima y tiene polos ligeramente amortiguados. Uno de los enfoques para diseñar un controlador para este sistema es la técnica LQG combinada con  $H_{\infty}$ . Esta técnica se presentó en [6] donde se diseña un controlador en lazo interno usando la técnica LQG. Este lazo interno introduce suficiente amortiguamiento a los modos flexibles y a la vez condiciones favorables para aplicar  $H_{\infty}$ . Al hacer esto se aumenta el orden del

<sup>8</sup> Esta característica es mas poderosa que la estabilidad en presencia de perturbaciones paramétricas.

controlador, pero en el procedimiento se inicia con un modelo de cuarto orden y el controlador resultante estabiliza a un nuevo sistema de octavo orden.

En la sección 3.4.1 se mostró que la función de transferencia del torque a la punta del robot flexible es dada por

$$\frac{Z_{tip}(s)}{\Gamma(s)} = \frac{1}{I_t s^2} + \frac{1}{I_t} \sum_{n=1}^N \frac{\phi_n(l)\phi_n'(0)}{(s^2 + 2\zeta_n\omega_n s + \omega_n^2)} \quad (4.68)$$

donde  $\zeta$  es el amortiguamiento modal. En la sección 3.4 se obtuvo un modelo<sup>9</sup> de orden  $2(n_e + 1)$ . Claramente puede verse que si se selecciona una aproximación a un modo, se obtiene un sistema de cuarto orden y si se eligen 3 modos se tendrá uno de octavo orden.

Al derivar un modelo dimensional finito lineal, se han considerado suposiciones restrictivas que usualmente no son aplicables para movimientos largos de los manipuladores, lo que ocasiona que se presente incertidumbre en el sistema. Otra característica de los sistemas ligeramente amortiguados es la presencia de polos y ceros muy cerca del eje  $jw$  que hace que el sistema sea mal-condicionado. Las matrices de estado de estos sistemas tienen valores singulares muy alejados entre si, lo que provoca dificultades computacionales en el diseño del controlador.

Este procedimiento busca solventar las dificultades numéricas y la incertidumbre del modelo lineal. El controlador LQG en el lazo interno proporciona amortiguamiento flexural y el controlador  $H_\infty$  en el lazo externo proporciona la estabilidad robusta.

Para eliminar el error de estado estable a una función paso, se incluye una retroalimentación de ganancia constante.

El siguiente esquema muestra la configuración en lazo cerrado del sistema con el controlador LQG,  $H_\infty$  y la ganancia de retroalimentación  $K_F$ .

El doble integrador en el origen, la fase no-mínima y los modos flexibles ligeramente amortiguados hacen al sistema lineal del robot flexible mal-condicionado numéricamente. La aplicación del controlador  $H_\infty$  por si solo no es posible debido a la presencia de polos en el eje imaginario.

<sup>9</sup> Existen algunas otras técnicas de reducción, se tiene la reducción de modelo Hankel (desarrollada por Glover) y la del modelo estocástico balanceado de Green y Safonov [28]. La primera tiene la desventaja de que el modelo reducido es de fase no-mínima, no propio e inestable. Mientras que el modelo original tiene ceros en el semiplano derecho lejos del eje  $jw$ , el modelo reducido tiene los ceros del semiplano derecho muy cerca del eje  $jw$ . Esto deteriora el desempeño en el dominio del tiempo del sistema en lazo cerrado. En la segunda técnica, se requiere que la matriz  $D$  sea de rank completo y además es aplicable para plantas estables (el modelo del robot es de fase no-mínima).

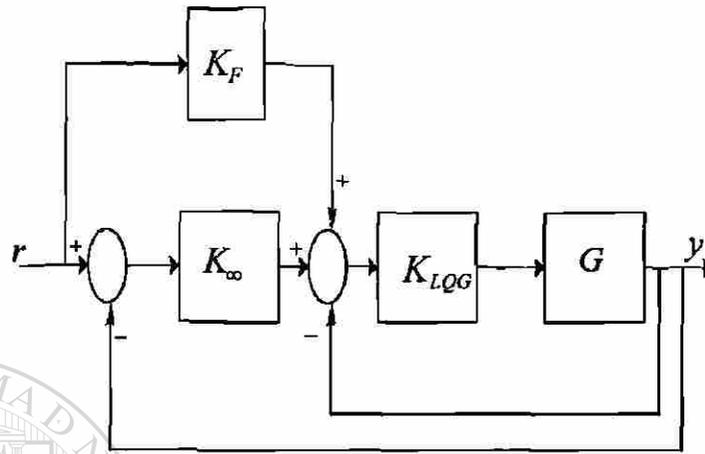


Figura 4.2 Configuración en lazo cerrado.

El algoritmo LQG permite la estabilización del sistema obteniendo ciertos requisitos de desempeño usando retroalimentación de salida. Esto tiene dos propósitos, estabilizar al sistema y volverlo bien-condicionado numéricamente. El controlador LQG se diseña para minimizar el siguiente índice de desempeño

$$J = \int_0^{\infty} [(z' Q z + u' R u)]$$

donde el modelo en espacio de estado está dado por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + w \\ y &= Cx + v \quad z = Cx \end{aligned}$$

donde  $w$  y  $v$  denotan procesos de ruido blanco.

La respuesta en frecuencia del sistema con tres modos en lazo abierto se muestra en la figura 4.3. Los valores de  $w, v, Q, R$  se obtienen mediante prueba y error, empezando con matrices de covariancia arbitrarias. Los pesos de  $Q$  y  $R$  tienen el valor de

$$Q = 0.25 \quad R = 3000$$

y las covarianzas del ruido del proceso y de la medición están dadas por

$$w = 0.1I \quad v = 100$$

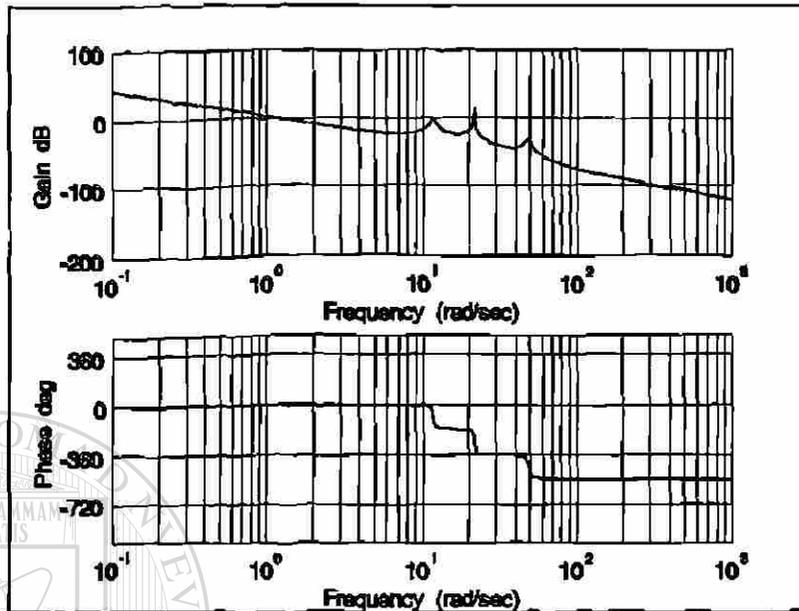


Figura 4.3. Respuesta del sistema en Lazo abierto con tres modos. ↘

A partir de esta información, la función de transferencia del controlador LQG está dada por

$$K_{LQG} = \frac{3.5s^3 + 2.3s^2 + 502.94s + 25.4746}{s^4 + 54.4s^3 + 519.65s^2 + 4934.559s + 4937.7}$$

La respuesta a la función paso se muestra en la figura 4.4. De esta figura se puede observar que la respuesta es lenta y que el sistema en lazo cerrado muestra un comportamiento de estado estable. Pero el sistema obtenido ya es numéricamente condicionado para la aplicación de síntesis de control robusto. Además, agregando una compensación en la retroalimentación se puede llevar a cero el error de estado estable que se presenta a la señal de entrada paso.

La columna vertebral del teorema de pequeñas ganancias es la síntesis de  $H_\infty$  [28]. Aplicando este teorema, si  $T_{zw}$  representa una matriz de una función de transferencia estable de las señales exógenas ( $w$ ) a las variables controladas ( $z$ ) y  $\Delta$  es cualquier perturbación estable<sup>10</sup>, entonces una condición suficiente para estabilidad del sistema en lazo cerrado es

$$\|T_{zw}\|_\infty \|\Delta\|_\infty < 1$$

donde  $\|(\cdot)\|_\infty$  denota la norma infinito y está definida por las matrices función de transferencia

<sup>10</sup> Aplicando el criterio de Nyquist no habrá rodeos del punto  $-1 + j0$ .

$G$  que son analíticas en el semiplano abierto derecho como

$$\|G\|_{\infty} \triangleq \sup_w (\sigma_{\max}(G(j\omega)))$$

donde  $\sigma_{\max}$  denota el valor singular máximo.

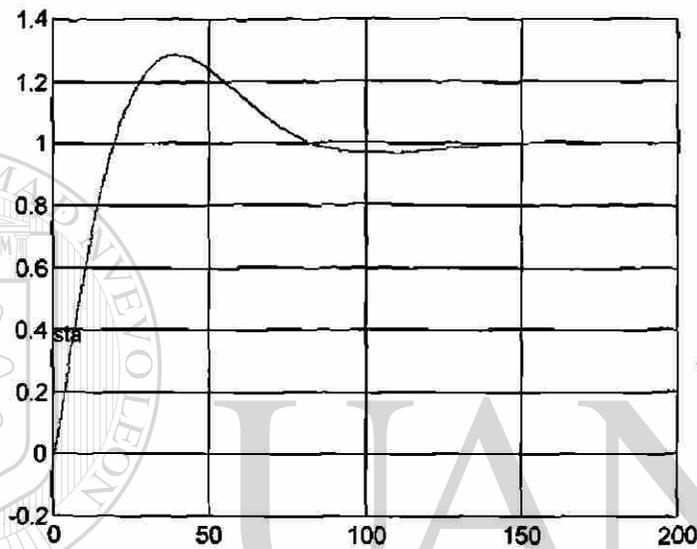


Figura 4.4 Respuesta con retroalimentación LQG.

Como el objetivo en este caso es la atenuación de perturbaciones y la robustez, el controlador está diseñado de modo que minimice la norma de una combinación de las funciones de transferencia de sensibilidad y sensibilidad complementaria, cada una de las cuales es ponderada por un peso determinado. Entonces definiendo la función de transferencia de lazo interno como

$$G_1 = \frac{GK_{LQG}}{1 + GK_{LQG}}$$

Resulta que las funciones de transferencia de sensibilidad y sensibilidad complementaria están dadas por

$$S_{aux} = \frac{1}{1 + G_1 K_{\infty}} \quad T_{aux} = \frac{G_1 K_{\infty}}{1 + G_1 K_{\infty}}$$

Esta formulación tiene la forma de un modelo con incertidumbre multiplicativa como se muestra en la figura 4.5.

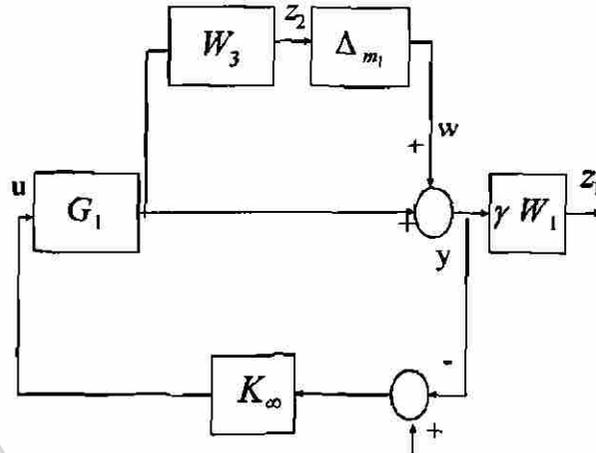


Figura 4.5 Modelo con Incertidumbre

Luego, la función de transferencia de  $\omega$  a  $[z_1, z_2]$  está dada por

$$T_{z\omega} = \begin{pmatrix} \gamma W_1 (I + G_1 K_\infty)^{-1} \\ W_3 G_1 K_\infty (I + G_1 K_\infty)^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma W_1 S_{aux} \\ W_3 (I - S_{aux}) \end{pmatrix}$$

entonces, el objetivo es minimizar

$$\|T_{z\omega}\|_\infty$$

Los pesos  $W_1$  y  $W_3$ , deben reflejar las especificaciones de desempeño y garantizar las especificaciones de margen de estabilidad. Generalmente  $W_1$  es una función de transferencia pasa-bajo  $W_3$  es un filtro pasa alto. Después de cálculos a prueba y error se encontró que una buena elección es dada por

$$W_3 = \frac{44.85s}{s+1} \quad W_1 = \frac{1.1\gamma}{15s+1}$$

El controlador  $H_\infty$  se sintetizó con la ayuda de la rutina *hinf* del toolbox de Control Robusto de Matlab. Esta rutina fue modificada para que aceptara nuevos pesos para la búsqueda de un controlador con mejor desempeño.

La modificación de esta rutina y los resultados obtenidos se muestran en el apéndice E. Los resultados experimentales se muestran en el capítulo 5.

#### 4.1.4 Controlador basado en Perturbaciones Singulares

Un modelo perturbado singularmente de un sistema mecánico [39], es un modelo de espacio de estado en que las derivadas de algunos estados son multiplicados por un parámetro positivo pequeño  $\varepsilon$ , esto es

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = f(t, x, z, \varepsilon), & x \in \mathcal{R}^n \\ \varepsilon \dot{z} = g(t, x, z, \varepsilon), & z \in \mathcal{R}^m \end{cases}$$

donde las funciones  $f$  y  $g$  son continuas y diferenciables en sus argumentos. Si  $\varepsilon \neq 0$ , el sistema es de orden  $n + m$ . Pero si  $\varepsilon = 0$ , la segunda ecuación de  $\Sigma$  se convierte en

$$0 = g(t, x, z, 0) \quad (4.69)$$

por lo que el modelo  $\Sigma$  está en forma estándar si y solo si la ecuación 4.69 tiene  $k \geq 1$  raíces reales, es decir

$$z = h_i(t, x), \quad i = 1, 2, \dots, k$$

esto implica que se tendrá un modelo bien definido de dimensión  $n$  que corresponde a cada raíz de 4.69.

El sistema resultante consiste de

$$\Sigma_p : \begin{cases} \dot{x} = f(t, x, z, 0) & ; n \text{ ecuaciones diferenciales ordinarias} \\ 0 = g(t, x, z, 0) & ; m \text{ ecuaciones algebraicas} \end{cases}$$

en el cual, el orden del sistema se reduce de  $n + m$  a  $n$ .

En el control de los robot flexibles se tiene como objetivo el movimiento de la estructura a la posición deseada y al mismo tiempo estabilizar las vibraciones excitadas. Un método para lograrlo es la aplicación de la técnica de perturbaciones singulares, en el que se reduce el orden del sistema en una manera distinta a la técnica de truncamiento. Esta sección se basa en el trabajo realizado por Siciliano y Book en 1988 en [66].

En este método el sistema se separa en dos subsistemas. Uno se considera "subsistema lento", mientras que el otro se le considera "subsistema rápido". Las variables de estado "rápidas" son las fuerzas elásticas y sus derivadas en el tiempo.

Los dos subsistemas identificados son:

a) Un subsistema "lento" que es del mismo orden que del manipulador rígido.

b) Un subsistema "rápido" en donde las variables de estado lentas juegan el rol de parámetros.

Sea el modelo del robot flexible descrito por

$$M\ddot{q} + D\dot{q} + Kq = F$$

donde las matrices  $M$ ,  $D$ , y  $K$ , están definidas como en (3.42). Este sistema puede reescribirse como

$$M(q, \delta) \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{\delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(q, \dot{q}) \\ f_2(q, \dot{q}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(q, \dot{q}, \delta, \dot{\delta}) \\ g_2(q, \dot{q}, \delta, \dot{\delta}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

donde  $M$  es la matriz de inercia.  $q = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]$  es el vector de variables de estado en la base.  $\delta$  es el vector de variables de deflexión, de orden  $m$ .  $f_1$  y  $f_2$  son los vectores que contienen los términos de fuerzas de gravitación, coriolis y centrífuga.  $g_1, g_2$  son los vectores que representan la interacción entre las variables  $q$  y  $\delta$ .  $K$  es la matriz diagonal de rigidez de la forma  $K = \text{diag}(k_1, \dots, k_m)$ .  $u$  el vector de fuerza aplicada.

Si se define

$$H = M^{-1} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}$$

se puede reescribir (4.70) como

$$\begin{aligned} \ddot{q} &= -H_{11}f_1 - H_{12}f_2 - H_{11}g_1 - H_{12}g_2 - H_{12}K\delta + H_{11}u \\ \ddot{\delta} &= -H_{21}f_1 - H_{22}f_2 - H_{21}g_1 - H_{22}g_2 - H_{22}K\delta + H_{21}u \end{aligned}$$

Este sistema se caracteriza por tener  $n + m$  coordenadas generalizadas. Donde  $n$  es el número de variables de la base y  $m$  es el número de modos usados para describir la deflexión.

Para obtener un modelo de orden reducido, se obtiene un factor escalar común, por ejemplo la constante más pequeña del resorte. Sea  $k_i = k\hat{k}_i, i = 1, \dots, m$ .

Se pueden definir entonces las siguientes variables

$$\begin{aligned} \zeta &= k\hat{K}\delta \\ \hat{K} &= \text{diag}(k_1, \dots, k_m) \end{aligned}$$

Si se define  $\mu = 1/k$ , se obtiene el nuevo modelo

$$\begin{aligned} \ddot{q} &= -H_{11}(q, \mu\zeta)f_1(q, \dot{q}) - H_{12}(q, \mu\zeta)f_2(q, \dot{q}) - H_{11}(q, \mu\zeta)g_1(q, \dot{q}, \mu\zeta, \mu\dot{\delta}) \\ &\quad - H_{12}(q, \mu\zeta)g_2(q, \dot{q}, \mu\zeta, \mu\dot{\delta}) - H_{12}(q, \mu\zeta)\zeta + H_{11}(q, \mu\zeta)u \\ \ddot{\delta} &= -H_{21}(q, \mu\zeta)f_1(q, \dot{q}) - H_{22}(q, \mu\zeta)f_2(q, \dot{q}) - H_{21}(q, \mu\zeta)g_1(q, \dot{q}, \mu\zeta, \mu\dot{\delta}) \\ &\quad - H_{22}(q, \mu\zeta)g_2(q, \dot{q}, \mu\zeta, \mu\dot{\delta}) - H_{22}(q, \mu\zeta)\zeta + H_{21}(q, \mu\zeta)u \end{aligned} \quad (4.71)$$

que es un modelo de perturbaciones singulares para el robot flexible.

Si se elije  $x_1 = q, x_2 = \dot{q}, z_1 = \zeta, z_2 = \epsilon\dot{\zeta}$  con  $\epsilon = \sqrt{\mu}$ , ver [66], se obtiene una representación de estado dada por

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= -H_{11}(x_1, \varepsilon^2 z_1) f_1(x_1, x_2) - H_{12}(x_1, \varepsilon^2 z_1) f_2(x_1, x_2) - H_{11}(x_1, \varepsilon^2 z_1) g_1(x_1, x_2, \varepsilon^2 z_1, \varepsilon z_2) \\
&\quad - H_{12}(x_1, \varepsilon^2 z_1) g_2(x_1, x_2, \varepsilon^2 z_1, \varepsilon z_2) - H_{12}(x_1, \varepsilon^2 z_1) z_1 + H_{11}(x_1, \varepsilon^2 z_1) u \\
\varepsilon \dot{z}_1 &= z_2 \\
\varepsilon \dot{z}_2 &= -H_{21}(x_1, \varepsilon^2 z_1) f_1(x_1, x_2) - H_{22}(x_1, \varepsilon^2 z_1) f_2(x_1, x_2) - H_{21}(x_1, \varepsilon^2 z_1) g_1(x_1, x_2, \varepsilon^2 z_1, \varepsilon z_2) \\
&\quad - H_{22}(x_1, \varepsilon^2 z_1) g_2(x_1, x_2, \varepsilon^2 z_1, \varepsilon z_2) - H_{22}(x_1, \varepsilon^2 z_1) z_1 + H_{21}(x_1, \varepsilon^2 z_1) u
\end{aligned} \tag{4.72}$$

Para obtener el subsistema lento, se aplica  $\varepsilon = 0$ , que corresponde a la dinámica del robot rígido. Para el subsistema rápido, se aplica la constante de tiempo  $\tau = t/\varepsilon$  a (4.72). Para obtener el controlador, se hace una composición de los controles diseñados para ambos subsistemas, lento y rápido.

$$u = u_s + u_f$$

donde  $u_s$  es el control para el subsistema lento y  $u_f$  es el control para el rápido. Sea  $x = [\theta \ \dot{\theta}]^T$ . El control para el subsistema lento se obtuvo de un control lineal como el desarrollado en [11], dado por

$$u_s = \gamma [\ddot{\theta}_d + k_v(\dot{\theta}_d - \dot{\theta}) + k_p(\theta_d - \theta)]$$

donde  $k_p, k_v$  son seleccionadas para mantener la separación en la escala de tiempo entre los subsistemas lento y rápido,  $\gamma$  es una constante dependiente de la matriz de Inercia. Los valores obtenidos fueron:  $k_p = 1.5$ ,  $k_v = 0.56$ .

Para el control del subsistema rápido se tiene

$$u_f = k_{pf} z_1 + k_{vf}(x) z_2$$

Se utilizó la técnica de asignación de polos de sistemas lineales para obtener los valores de  $k_{pf}, k_{vf}$ . Los valores obtenidos fueron  $k_{pf} = -1.56$ ,  $k_{vf} = 0.12$ .

La ley de control implementada en la experimentación está dada por:

$$u = 0.42 [\ddot{\theta}_d + 0.56(\dot{\theta}_d - \dot{\theta}) + 1.5(\theta_d - \theta)] - 1.56\dot{p}_{et} + 0.12p_{et}$$

donde  $p_{et}$  y  $\dot{p}_{et}$  son las variables de la deflexión.

Entre las ventajas de este método, se puede constatar la reducción del orden del modelo. Esto permite resolver el problema de sistemas que tienen menor número de entradas de control que el número de variables controlables. Hay minimización de los cálculos en línea, además, permite su extensión al caso multieslabones.

#### 4.1.5 Método de Perturbaciones Singulares Modificado

El análisis de flexibilidad, usando perturbación singular, se basa en la suposición de que los modos del sistema pueden ser separados en dos grupos distintos: Los modos de frecuencia baja, denominados modos lentos y los modos de alta frecuencia, denominados modos rápidos.

Tradicionalmente el parámetro de perturbación  $\varepsilon$ , usado para el análisis de la flexibilidad, es el inverso de la rigidez del mecanismo flexible o la inversa de la rigidez ajustada por un factor dependiente de la masa. Esto da por resultado, que el sistema reducido sea el rígido. Como éste solo está alejado por medio de una perturbación del sistema completo, se puede manipular sólo flexibilidades pequeñas[68].

El punto de partida para el análisis de perturbaciones es el modelo dinámico

$$M(\Theta, \Psi) \begin{bmatrix} \ddot{\Theta} \\ \ddot{\Psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1(\Theta, \dot{\Theta}, \Psi, \dot{\Psi}) \\ D_2(\Theta, \dot{\Theta}, \Psi, \dot{\Psi}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K\Psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde  $\Theta$  son los ángulos de la junta y las  $\Psi$  son las variables introducidas para modelar la flexibilidad. El término  $K\Psi$  es una medida de flexibilidad. El 0 de la parte derecha de la ecuación denota que las fuerzas/torques no son aplicados directamente a las variables flexibles.

Para llevar a cabo el método de perturbaciones singulares, la suposición que se hace es que las dinámicas del brazo pueden ser particionadas en dinámicas rápidas que son debidas a la flexibilidad y las dinámicas lentas que son debidas a los modos del cuerpo rígido. Para reforzar las dinámicas de alta frecuencia de la flexibilidad, la rigidez del manipulador necesita ser grande. Es por esto, que generalmente se utiliza como parámetro de perturbación el inverso de la rigidez. El sistema reducido es rígido ( $\varepsilon = 0, K \rightarrow \infty$ ). Valores pequeños en el parámetro de perturbación corresponden a sistemas que poseen "pequeña" flexibilidad, es decir, que el análisis presenta resultados útiles para los sistemas cercanos a ser rígidos. Inclusive es dudoso que la separación de variables se justifique particularmente en un movimiento de alta velocidad. La suposición es más cuestionable cuando se considera movimiento restringido del manipulador. Debido a esta restricción, cualquier movimiento de las "variables rígidas" tienen que ser descritas por el movimiento de las "variables flexibles" para mantener la restricción. Es por esto que la separación de frecuencias parece no cumplirse.

Dado que lo que se requiere es modelar flexibilidades grandes en tareas restringidas del robot, Sudipto en [68] propone un enfoque alternativo del análisis de perturbaciones singulares para robots flexibles que son capaces de manejar una flexibilidad significativa.

Considere el sistema lineal, escalar, mecánico

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$$

El factor de amortiguamiento (o razón de amortiguamiento) del sistema es dado por

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

El valor de  $\zeta$  es importante en la determinación de la respuesta transitoria del sistema. Si  $\zeta = 1$ , el sistema es críticamente amortiguado,  $\zeta > 1$ , es sobreamortiguado y  $\zeta < 1$ , es subamortiguado. Se asume que la respuesta transitoria de la barra flexible es la característica más importante en el análisis. Por esto, se debe conservar el valor de  $\zeta$ , entonces el valor de  $c$  tiene la forma

$$c = b\sqrt{m}$$

donde  $b$  es una constante. En este sistema, si la masa del sistema tiende a cero, el sistema responde infinitamente rápido a cualquier entrada. Una forma de elegir el parámetro de perturbación, es

$$\varepsilon^2 = m_{fl}$$

donde  $m_{fl}$  es la masa de los subeslabones flexibles. Los eslabones no tienen que tener la misma masa, sin embargo, se hace la suposición de que la razón de amortiguamiento, se mantiene constante.

#### 4.1.6 Control Pasivo

La noción de pasividad se ha venido utilizando para el análisis de estabilidad de entrada-salida de una clase general de sistemas no lineales interconectados ([77], [11]). Esto se ha motivado por el estudio de la disipación de energía en circuitos eléctricos. En forma general, se dice que un sistema pasivo no puede crear energía.

Se ha demostrado que la función de transferencia entre la posición final y el torque de entrada no puede ser controlado por un controlador PD simple en lazo cerrado porque la función es de fase no mínima. Una condición necesaria mas no suficiente para que la función sea pasiva es que la función de transferencia sea de fase mínima. Una vez que la función de transferencia sea pasiva, el sistema puede ser estabilizado aplicando el siguiente teorema

**TEOREMA 4.1** (Vidyasagar 1995) *Suponga que en un sistema en lazo cerrado en cascada (Figura 4.6), el compensador es estrictamente pasivo con ganancia finita y que la planta es*

pasiva. Entonces el sistema en lazo cerrado es  $L_2$  estable.

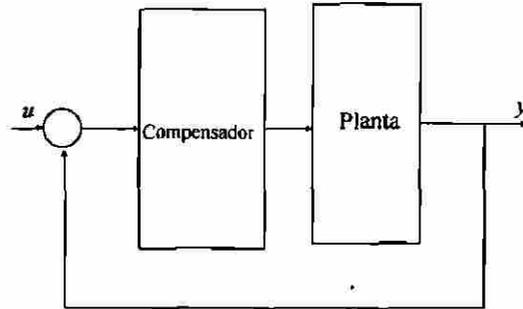


Figura 4.6. Sistema en Lazo Cerrado en cascada

En estudios recientes [77], se ha demostrado que si el eslabón es lo suficientemente rígido, la función de transferencia de la punta con respecto al torque es pasiva. Esto permite, por el teorema de pasividad, diseñar un controlador estrictamente pasivo con ganancia finita. Con esto, se obtiene un sistema  $L_2$ -estable. Para poder diseñar el controlador pasivo, se establecen las siguientes definiciones:

**DEFINICION 4.1** El sistema  $y = F(u)$  es estrictamente pasivo si para todo  $t$  y para todo  $u(t)$ ,

$$\int_0^t y(\tau)u(\tau)d\tau \geq \delta \int_0^t u(\tau)^2 d\tau, \quad \delta > 0 \quad (4.73) \quad \text{®}$$

El sistema es pasivo si  $\delta = 0$ , en la expresión (4.73).

**DEFINICION 4.2** El conjunto  $L_2$ , es el conjunto de todas las funciones medibles  $f : \mathcal{R}_+ \rightarrow \mathcal{R}$  tal que

$$\|f(t)\|_2 = \left( \int_0^\infty |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

**DEFINICION 4.3** El sistema  $y = F(u)$  es  $L_2$  - estable si  $u \in L_2$  implica que  $y \in L_2$ . Si

$$\gamma := \sup \left\{ \frac{\|y\|_2}{\|u\|_2} : u \in L_2, u \neq 0 \right\} < \infty$$

entonces la ganancia del sistema es  $\gamma$ .

**PROPOSICION 4.1** Una función de transferencia  $G(s)$  es estrictamente pasiva si y solo si

$$\operatorname{Re}[G(j\omega)] \geq \delta, \quad \text{and} \quad \delta > 0 \quad \forall \omega \in \mathcal{R}. \quad (4.74)$$

La función de transferencia es pasiva si  $\delta = 0$  en la expresión (4.74).

El objetivo es entonces determinar una representación pasiva del robot flexible de modo que el teorema anterior se pueda utilizar.

En la sección 3.4.1, se presentó la función de transferencia  $H_3(s)$ , la cual tiene como salida, la variable reflejada de la deflexión. Al seleccionar  $\dot{w}^*(l, t)$  como salida, la función de transferencia resultante es dada por

$$sH_3(s) = \frac{sW_{tip}^*(s)}{\Gamma(s)} = \frac{l}{(I_h + I_b)s} + \sum_{n=1}^N \frac{\phi_n'(0)[2l\phi_n'(0) - \phi_n(l)]}{(I_h + I_b)} \frac{s}{(s^2 + \omega_n^2)}$$

la cual es pasiva<sup>11</sup>. Se ha demostrado (Wang y Vidyasagar, 1992) que esta característica se mantiene siempre y cuando  $N$  no sea muy grande y que  $\Omega = I_h/I_b$  sea lo suficientemente pequeña<sup>12</sup>. Si se asume que  $N$  es un número fijo, para el robot con un eslabón flexible se puede garantizar que  $\Omega$  permanezca pequeña haciendo  $I_h$  suficientemente pequeña, pero cuando esto no es posible, la función de transferencia ya no es pasiva.

Rossi en [60] propone una salida modificada, la cual se muestra en la figura 4.6 y es descrita por

$$y(t) = lq(t) - kw^*(l, t)$$

donde  $k$  es un factor entre 0 y 1.

Se utiliza la variable  $k$  ya que eligiendo ésta en forma apropiada, se puede obtener una función de transferencia pasiva inclusive cuando se tiene un valor de inercia muy grande.

La función de transferencia con esta nueva salida es dada por

$$\frac{sW_{tip}^*(s)}{\Gamma(s)} = \frac{l}{(I_h + I_b)s} + \sum_{n=1}^N \frac{((1+k)l\phi_n'^2(0) - k\phi_n'(0)\phi_n(l))}{(I_h + I_b)} \frac{s}{(s^2 + \omega_n^2)}$$

<sup>11</sup> Las funciones de transferencia  $1/s$  y  $s/(s^2 + \omega_i^2)$  son pasivas por la proposición 4.1. Los coeficientes  $\phi_n'(0)[2l\phi_n'(0) - \phi_n(l)]$  son no-negativos por lo que se garantiza que la función de transferencia es pasiva.

<sup>12</sup>  $I_h$  es la inercia del eje e  $I_b$  la del eslabón.

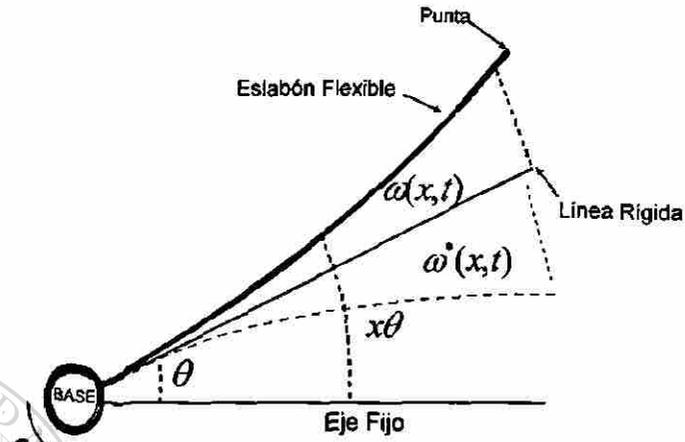


Figura 4.7. Marco de referencia para la variable  $\omega^*(x, t)$ .

el sistema será pasivo si la siguiente condición se cumple

$$((1+k)l\phi_n'^2(0) - k\phi_n'(0)\phi_n(l)) > 0$$

si  $(l\phi_n'^2(0) - \phi_n'(0)\phi_n(l)) < 0$ , entonces

$$0 < k < \frac{-l\phi_n'(0)}{l\phi_n'(0) - \phi_n'(l)}$$

Un compensador posible es de la forma

$$C(s) = \frac{K_p}{s + \epsilon} + K_v$$

donde  $\epsilon$  es una constante positiva pequeña cuya función es hacer que la ganancia del sistema sea finita. La ecuación anterior es estrictamente pasiva ya que

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{K_p}{j\omega + \epsilon} + K_v \right\} = \frac{K_p \epsilon}{\omega^2 + \epsilon^2} > 0, \quad \forall \omega \in \mathcal{R}^+$$

Si la entrada es dada por  $e(t) = y_{ref} - y(t)$ , entonces se tiene que

$$sC(s) = s \left( \frac{K_p}{s + \epsilon} + K_v \right) \approx K_p + K_v s$$

ya que  $\epsilon$  es pequeña. Como el sistema es  $L_2$ -estable con respecto a  $\dot{y}(t)$ , esto implica que  $\dot{y}(t)$  tenderá a  $\dot{y}_{ref}(t)$ . No se puede asumir que  $y(t)$  tienda a  $y_{ref}(t)$ , por lo que en general se

tendrá un error de estado estable.

Los parámetros del compensador se calcularon por medio de la técnica de asignación de polos. En la implementación experimental están dados por  $K_p = 0.546$ ,  $K_v = 0.966$  y  $\epsilon = 0.001$ .

#### 4.1.6.1 Diseño de un Control Pasivo sin Modificación de la Salida

En la sección anterior se diseñó un controlador pasivo que modificaba la salida por medio de una variable  $k$ . En esta sección, se diseña un controlador pasivo mediante retroalimentación estática de estado, sin alterar la salida. Este controlador se propone en [32]. Esto tiene la finalidad de complementar el estudio de controles pasivos para el robot flexible en el eslabón.

Considere un sistema dinámico descrito por ecuaciones de la forma

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .

Sea  $U$  el conjunto de todas las entradas admisibles, consiste de todas las  $\mathbb{R}^m$  funciones continuas a pedazos definidas sobre  $\mathbb{R}$ ,  $\omega$  una función real definida sobre  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$  denominada Supply Rate.

Se asume que  $\forall u \in U$  y  $x \in \mathbb{R}^n$ , la salida

$$y(t) = C\phi(t, x^0, u)$$

con  $x = \phi(t, x^0, u)$  es tal que  $\omega(\delta) = \omega(u(\delta), y(\delta))$  satisface

$$\int_0^t |\omega(\delta)| d\delta < \infty \quad \forall t \geq 0$$

Para la implementación del controlador se presentan las siguientes definiciones y lemas:

**DEFINICION 4.4** El sistema  $\Sigma_1$  con supply rate

$$\omega = \langle u, y \rangle = y^T u$$

se dice ser pasivo si  $\exists$  una función  $C^0$  no negativa  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  que satisface  $V(0) = 0$ , llamada la función storage, tal que  $\forall u \in U$  y  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \geq 0$

$$V(x) - V(x^0) \leq \int_0^t y^T(\delta)u(\delta)d\delta$$

**LEMA 4.1** El sistema  $\Sigma_1$  es pasivo si y solo si  $\exists$  una matriz simétrica definida positiva  $Q$  tal que

$$A^T Q + Q A \leq 0, \quad Q B = C^T$$

Además, la función

$$V(x) = \frac{1}{2} x^T Q x$$

define una función storage cuadrática si y solo si satisface las desigualdades.

**DEFINICION 4.5** Suponga que  $CB$  es no singular. Entonces, el sistema lineal  $\Sigma_1$  es

1.- Fase mínima: Si  $z = 0$  es un equilibrio asintóticamente estable de  $\dot{z} = \theta_1 z$

2.- Fase mínima débil: Si existe una función cuadrática  $W^*(z) = \frac{1}{2} z^T W z$ , con  $W = W^T > 0$ , tal que

$$\theta_1^T W + W \theta_1 \leq 0 \quad (4.75)$$

Para el diseño del control, se utiliza la aproximación dada por (3.51), con dos modos. Típicamente, la variable de salida, a controlar, es el movimiento neto de la punta del eslabón, esto es

$$y_1 = L\theta + \omega(l, t)$$

Sin embargo, el grado relativo es 2 y las correspondientes dinámicas cero son inestables. Por otro lado, si se toma como salida, la velocidad de la posición reflejada de la punta, es decir

$$y_1 = L\dot{\theta} - \dot{\omega}(l, t)$$

el grado relativo es 1 y las correspondientes dinámicas cero son estables. Se puede aplicar entonces, el siguiente teorema de pasividad.

**TEOREMA 4.2** Suponga el sistema lineal  $\Sigma_1$  con  $\text{rank}\{B\} = m$ . Entonces el sistema  $\Sigma_1$  es equivalente por retroalimentación a un sistema pasivo lineal con función storage  $V(x) = \frac{1}{2} x^T Q x$  que es positiva definida, si y solo si  $CB$  es no singular y el sistema es de fase mínima débil.

Al elegir la salida reflejada, como la variable a controlar, se tiene primeramente que  $CB$  es no singular. Como el sistema es de grado relativo 1 es posible hacer el mapeo[35]

$$\eta = T x$$

donde  $T$  es una matriz constante. Se puede entonces implementar la ley de control

$$u = (CB)^{-1}[-\beta_1 \eta - \beta_2 y + v]$$

donde  $v$  es la nueva entrada y  $\beta_1, \beta_2$  son matrices constantes de dimensiones apropiadas, que se obtuvieron en el cambio de coordenadas. Con este control, el sistema  $\Sigma_1$  toma la forma

$$\dot{\eta} = \theta_1 \eta + \theta_2 y + TB(CB)^{-1}v, \quad \dot{y} = v$$

Si se hace el cambio adicional de variable

$$z = \eta - TB(CB)^{-1}y$$

El sistema  $\Sigma_1$ , se convierte

$$\dot{z} = \theta_1 z + \gamma y, \quad \dot{y} = v$$

donde  $\gamma = \theta_1 TB(CB)^{-1} + \theta_2$ .

La transformación al utilizar dos modos, es dada por

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.56 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1.324 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\gamma = \text{col}(-0.2235, -0.5468, 0.3456, 0, 0)$$

$$\theta_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -0.3456 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4996 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4965 \\ -320.18 & 443.23 & 0 & 0 & 0 \\ 2.56 & -5.89 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Con esto, con  $W = I$ , se cumple la desigualdad dada por 4.75.

En las coordenadas originales, el controlador tiene la forma

$$u = Fx + dw$$

donde

$$F = [ 0 \ 0 \ 0 \ -0.01722 \ -42.3503 \ 10.9871 ]$$

$$d = 0.0056, \quad w = 60[e + 10 \int_0^t e(\delta) d\delta], \quad e = y - y_r$$

y  $y_r$  es la salida de referencia. Los resultados del capítulo 5, en los que se refleja el comportamiento de este controlador, muestran que, a pesar de necesitar un menor torque, requiere de más tiempo que los controladores LQR y PS para suprimir la deflexión.

## 4.2 Controladores Basados en el Modelo Infinito

En esta sección, se presenta el diseño de tres controladores que se derivan directamente del modelo original. El primero fue propuesto por Yuan en 1995. El segundo por Shifman en 1990. Y el tercero es propuesto en este trabajo de investigación.

El controlador de Yuan requiere sólo la medición de las variables en la articulación. Es un ejemplo de la obtención de un controlador Proporcional-Derivativo en la articulación, sin linealizar el modelo. Una de las ventajas es que en base a éste se pueden encontrar resultados satisfactorios aún cuando se manejen ángulos de gran tamaño. El control lineal aplicado por Cannon y Schmitz en 1984 y por Fukuda en 1985, utilizó un modelo lineal truncado para obtener uno de dimensión finita. Aunque sus resultados fueron satisfactorios, estos son válidos solo para el control del movimiento de ángulos pequeños.

Shifman en [70], utilizó una variable auxiliar para el desarrollo de su controlador. Esta variable la obtuvo directamente del modelo y la aproxima por medio de un medidor de tensión (strain gage) colocado a lo largo del eslabón. Este controlador está limitado por la necesidad de la medición de la variable auxiliar, el uso del strain gages está limitado por la temperatura, la longitud de la estructura y el acceso para llevar a cabo la calibración. Cuando se trata de ambientes no convencionales en los que se utilizan estructuras largas, como los robots flexibles para inspección de desechos nucleares, el uso de un strain gage es impráctico.

Generalmente, la medición de la posición de la punta y de las variables en la articulación son las únicas variables disponibles para el diseño del control del robot flexible, lo cual no es una tarea fácil. En este trabajo, se propone un controlador que utiliza sólo estas variables en su implementación.

### 4.2.1 Controlador Proporcional-Derivativo en la articulación

En esta sección se diseña un controlador Proporcional-Derivativo en la articulación (Joint PD), derivado directamente de  $\Sigma_{RFET}$ , basándose en técnicas de Lyapunov. El objetivo del diseño de este controlador es el hacer uso directo del modelo original.

Sea la siguiente función, una función candidata de Lyapunov, propuesta en [82].

$$V = T_h + T_l + U + \zeta(T_l + U) + \frac{1}{2}\gamma(\theta - \theta_d)^2 \quad (4.76)$$

y a la vez una función de error con respecto a los estados deseados  $\theta_d$ . Donde  $\theta_d$  representa el ángulo deseado del eje,  $\zeta > -1$  y  $\gamma > 0$  son parámetros de diseño. Es claro que  $V > 0$ ,

$V = 0$  sólo si  $\dot{\theta} = 0$  y  $\theta = \theta_d$ .

Obteniendo la derivada en el tiempo de  $V$ , y mediante cálculos directos resulta

$$\dot{V} = [\tau + \zeta(\tau - I_h \ddot{\theta}) + \gamma(\theta - \theta_d)] \dot{\theta} \quad (4.77)$$

Se puede elegir la entrada de control (el torque) como

$$\tau = \frac{1}{1 + \zeta} [-k\dot{\theta} - \gamma(\theta - \theta_d) + \zeta I_h \ddot{\theta}] \quad (4.78)$$

donde  $k > 0$  es también un parámetro de diseño.

Sustituyendo la entrada de control en (4.77), se obtiene

$$\dot{V} = -k\dot{\theta}^2$$

la cual es negativa semidefinida. Por lo tanto utilizando el Teorema de Estabilidad de Lyapunov, se puede decir que el robot alcanza el estado de equilibrio bajo la acción del control aplicado. Sustituyendo el control  $\tau$  in  $\Sigma_{RFET}$ , se tiene que la ecuación de lazo cerrado es dada por

$$I_h \ddot{\theta} + k\dot{\theta} + \gamma\theta = (1 + \zeta)\omega''(0, t) + \gamma\theta_d$$

Es claro que  $\{\theta = \theta_d, \dot{\theta} = 0\}$  es el único estado de equilibrio del sistema en lazo cerrado. También puede observarse que la función  $V$  sólo se desvanece en el estado de equilibrio deseado, es decir,  $\dot{\theta}$  no puede ser cero hasta que  $V = 0$  se alcance.

Sea

$$S = \{(\theta, \dot{\theta}) : \theta - \theta_d = 0, \dot{\theta} = 0\}$$

el conjunto invariante. Invocando el teorema de La Salle de conjuntos invariantes, se obtiene estabilidad asintótica global del punto deseado.

La ley de control dada por  $\tau$ , no requiere retroalimentación de las variables de deflexión. Esta característica hace a este controlador independiente del modelo utilizado.

#### 4.2.2 Controlador utilizando medición directa de un strain gage

En esta sección, se diseña un controlador al cual se le ha denominado "Controlador SG". La razón de este nombre es que está basado en la medición de una variable auxiliar por medio de un medidor de tensión (strain gage)<sup>13</sup>. El método para el diseño de este controlador fue propuesto por Shifman [70] en 1991, por lo que esta sección está basada en los trabajos: ([69], [70]).

<sup>13</sup> Considere un conductor de área transversal uniforme  $A_T$  y longitud  $L$ , compuesto de un material con resistividad  $\rho$ . La resistencia  $R$

El sistema en lazo cerrado con el controlador se muestra en la figura 4.8.

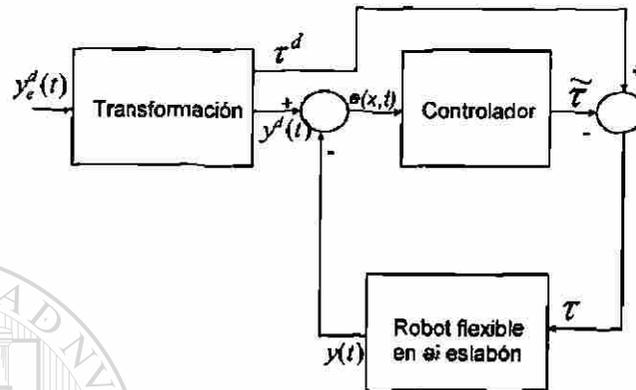


Figura 4.8. Sistema en Lazo Cerrado.

Las trayectorias se definen como los caminos tomados por el eslabón[69] y están en función del espacio y del tiempo. La variable espacial indexa continuamente los puntos a través de la barra. La trayectoria a ser seguida se le denomina "trayectoria deseada", que se asume generada por un sistema idéntico al sistema actual de la barra (con un torque y unas condiciones iniciales diferentes). El problema es forzar el error entre esta trayectoria deseada y la actual a cero. Se asume que la trayectoria deseada es conocida.

Considere la figura 2.1 del capítulo 2. El eslabón tiene densidad de masa uniforme, inercia seccional  $I$ , módulo de Young  $E$  y longitud  $l$ . Opera en un plano horizontal de modo que no hay efectos gravitacionales. Hay un actuador en un extremo de la barra con momento de inercia denotado por  $I_h$ . Se indexan los puntos de la barra por la variable espacial  $x$ , y la variable del tiempo con  $t$ . Esta posición es descrita por la ecuación

$$y(x, t) = x\theta(t) + \omega(x, t) \quad (4.79)$$

del conductor es dada por

$$R = \frac{\rho L}{A_T}$$

Si este conductor es sometido a compresión o a tensión, su resistencia cambiará debido a los cambios dimensionales (longitud y área transversal). La resistencia también cambiará debido a la propiedad de materiales denominada *piezoresistencia*, que indica la dependencia de la resistividad  $\rho$  en las tensiones mecánicas.

Al sustituir esta ecuación en el sistema  $\sum_{RFE}$  se obtiene

$$\rho \ddot{y} + EI y'''' = 0$$

con las condiciones de frontera dadas por

$$\begin{aligned} EI y &|_0 = 0 \\ EI y'' &|_l = 0 \\ EI y'' &|_l = 0 \\ EI y'' &|_0 = -\tau + I_h \ddot{\theta} \end{aligned}$$

correspondiendo a la barra sujeta a la base y sin momento aplicado en el extremo libre.

Si se consideran las siguientes definiciones de variables

$$\begin{aligned} e &= y^d - y \\ \tilde{\tau} &= \tau^d - \tau \\ \tilde{\theta} &= \theta^d - \theta \end{aligned}$$

donde el superíndice  $d$  indica la variable deseada. Al sustituirlas en (4.79), se obtienen

$$\begin{aligned} e &= y^d - x\theta(t) - \omega(x, t) & e &= y^d - y \\ e' &= -\theta(t) - \omega'(x, t) & \dot{e} &= -\dot{y} = -x\dot{\theta}(t) - \dot{\omega}(x, t) \\ e'' &= -\omega''(x, t) & \ddot{e} &= -x\ddot{\theta}(t) - \ddot{\omega}(x, t) \\ e'''' &= -\omega''''(x, t) \end{aligned} \quad (4.80)$$

entonces, la segunda ecuación de  $\sum_{RFE}$  en la términos del error está dada por

$$EI e'''' + \rho \ddot{e} = 0 \quad (4.81) \text{®}$$

con las condiciones de frontera

$$EI e|_0 = 0 \quad EI e'|_l = 0 \quad EI e''|_l = 0 \quad EI e''|_0 = -\tilde{\tau} + I_h \ddot{\tilde{\theta}}$$

Al integrar dos veces la segunda ecuación de (4.81) con respecto a  $x$ , primero de  $x$  a  $l$ , y luego de  $0$  a  $l$ , se obtiene la expresión

$$\tilde{\tau} = \rho \int_0^l \int_{x_1}^l \ddot{e}(x_0) dx_0 dx_1 + I_h \ddot{\tilde{\theta}}$$

de la cual puede notarse que,  $\rho \int_0^l \int_{x_1}^l \ddot{e}(x_0) dx_0 dx_1 + I_h \ddot{\tilde{\theta}}$  puede controlarse debido a que el torque afecta directamente la segunda derivada. Para ser más explícitos en esta observación,

sea

$$X := \rho \int_0^l \int_{x_1}^l e(x_0) dx_0 dx_1 + I_h \ddot{\theta} \quad (4.82)$$

entonces resulta que

$$\bar{\tau} = -c_1 \dot{X} - c_0 X = \ddot{X}$$

con las  $c_i$  constantes, que se pueden seleccionar adecuadamente. De este modo, el sistema en lazo cerrado tiene la forma

$$\ddot{X} + c_1 \dot{X} + c_0 X = 0$$

donde el comportamiento de las  $X$  se determina mediante la elección de las  $c_i$ 's.

Como  $X$  representa todo el movimiento del error de la barra, se diseña una ley de control para  $e$ . Esta ley está dada por

$$\bar{\tau} = c_{10} \dot{X} + c_{11} \dot{\theta} + c_{00} X + c_{01} \ddot{\theta}$$

donde las  $c_{ij} > 0$  son constantes.

Encontrando una relación entre las  $c_{ij}$ , este controlador puede reescribirse como

$$\bar{\tau} = -c_0 (X + c_2 \ddot{\theta}) - c_1 (\dot{X} + c_2 \dot{\theta})$$

donde el valor de la variable  $X$  se puede medir mediante el uso de un medidor de tensión (strain gage).

Los siguientes teoremas, que se encuentran en [70], prueban la estabilidad asintótica y la uniformidad exponencial respectivamente, del sistema (4.81) en lazo cerrado.

**TEOREMA 4.3** *El sistema en lazo cerrado descrito por (4.81), es asintóticamente estable sujeto a condiciones iniciales suaves con sus derivadas de cuarto orden continuas a pedazos.*

**Prueba:** Ver [70].

**TEOREMA 4.4** *El sistema en lazo cerrado descrito por (4.81), es uniformemente exponencialmente estable cuando las condiciones iniciales son suficientemente suaves.*

**Prueba:** Ver [70].

Para el cálculo de la trayectoria, se hace la suposición de que  $y_e^d(t)$  es un polinomio en el tiempo y por lo tanto existe una  $k \geq 0$  tal que  $\frac{d^k}{dt^k} y_e^d = 0$ . Como el torque se puede

fijar a cualquier valor, la trayectoria requiere cumplir la ecuación diferencial 4.81 con sus condiciones de frontera y la trayectoria del efector final dada.

La trayectoria seleccionada  $y^d(t)$  dada  $y_e^d(t)$  está dada por

$$y_e^d(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2$$

entonces

$$y^d(t) = \frac{c_0 + c_1 t + c_2 t^2}{l} x + f(x)g(t)$$

donde

$$f(x) = -\frac{2\rho c_2}{lEI} \frac{x^5}{5!} + a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3, \quad g(t) = 1$$

y las  $a_i$  cumplen las condiciones de frontera siguientes

$$y^d(0, t) = 0$$

$$y^{d'}(l, t) = 0$$

$$y^{d''}(l, t) = 0$$

$$y^d(l) = c_0 + c_1 l + c_2 l^2 = y_e^d(l)$$

Los parámetros  $c_0$  y  $c_1$  determinan como el tiempo promedio del comportamiento del eslabón, esto es de un sistema de segundo orden con  $X$  como la variable. El parámetro  $c_2$  es visto como un término que absorbe parte de la energía vibracional. Es el que varía el torque para absorber esa parte de la energía vibracional. Para la medición de la variable auxiliar (ecuación 4.82) se puede utilizar un medidor de tensión continuo.

Los valores de los parámetros utilizados en simulación, se muestran a continuación:

Parámetro	$c_0$	$c_1$	$c_2$
	80	15	.05

### 4.2.3 Controlador utilizando una aproximación numérica del medidor de tensión

El controlador propuesto por Shifman, presentado en la sección anterior, garantiza estabilidad del sistema en lazo cerrado, pero requiere la medición de la variable agregada dada por (4.82). Shifman propone el uso de un medidor de tensión continuo para el cálculo de esta variable. Otro método consiste en la colocación de pequeños eslabones flexibles en cascada a través de la estructura flexible, cada uno de ellos retroalimenta del anterior de datos referentes a la deflexión[49] ó diseñar un arreglo de medidores de tensión a través del eslabón y hacer la aproximación numéricamente.

Cuando se trabaja en ambientes no convencionales, el diseño de un robot flexible se realiza tomando en cuenta las características del material. Por esta razón, las especificaciones del material se conocen y contienen una proyección del comportamiento de éste en el ambiente en el que va a trabajar.

En esta sección, se presenta el diseño de un controlador que utiliza para su implementación las mediciones de las variables en la articulación y de la punta. Se le ha denominado "Controlador Strain Gage Aproximado (SGA)", ya que se requiere la aproximación numérica de una variable auxiliar. Este controlador tiene una forma similar al controlador de Shifman, pero en lugar de tomar la medición directa de strain gage continuo, lo hace mediante una aproximación numérica.

Como muestra del método, se utilizará la aproximación numérica de un strain gage para un eslabón flexible. El esfuerzo y las tensión está relacionado a la deflexión  $w(x)$  de la barra por

$$\epsilon_{xx} = \frac{z}{\rho} = z \frac{d^2 w}{dx^2}$$

como  $y(x, t) = x\theta(t) + w(x, t)$ , se tiene que el esfuerzo (strain) está dado por

$$\epsilon_{xx} = zw'' = zy''$$

y la tensión es dada por  $\sigma_{xx} = E\epsilon_{xx} = Ezy''$ . También

$$\epsilon_{xx} \approx \frac{l_x - l_o}{l_o} = \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

y  $z$  es la distancia con respecto al eje neutral de la barra al punto de interés.

Como

$$y(x) = x\theta + w(x)$$

la ecuación de la variable auxiliar (4.82), está dada por

$$\int_0^l \int_{x_1}^l y(x_0) dx_0 dx_1 = \frac{1}{3} l^3 \tilde{\theta} - \int_0^l p(x) y''(x) dx$$

donde  $p(x) = \frac{1}{3} l^3 - \frac{1}{2} l^2 x + \frac{1}{6} x^3$ .

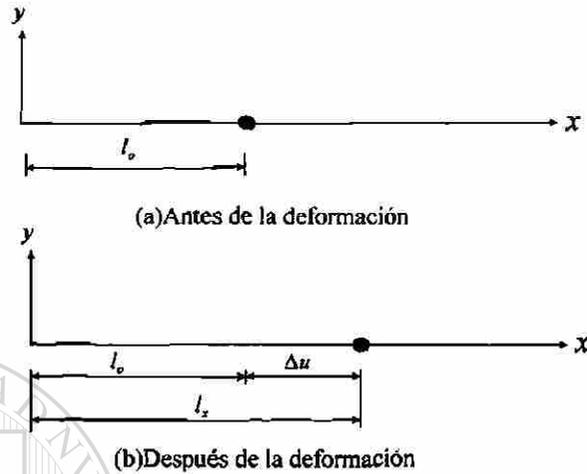


Figura 4.9. Medición del strain gage en un segmento.

Escogiendo como el ancho del strain gage  $W(x) = 1/p(x)$  y sabiendo que

$$d \Delta_R(x) = k \frac{y''(x)}{W(x)} dx$$

obtenemos

$$\frac{1}{k} \int_0^l d \Delta_R(x) = \int_0^l p(x) y''(x) dx$$

Desarrollando la aproximación numérica de la integral del lado derecho de la ecuación anterior, se obtiene un valor para el intervalo de 0 a  $l$ . Hasta este punto, los errores que se presentan, son los errores de por parte del método numérico utilizado y por redondeo. Para mejorar esta aproximación, se utiliza la técnica de elementos finitos para dividir la barra en segmentos iguales, y en cada segmento aplicar la aproximación numérica.

Uno de los datos que se requieren es el dato de la medición de la punta<sup>14</sup>. Aplicando la técnica de elementos finitos, en forma similar a la que se presentó en el capítulo 2, la aproximación numérica en cada segmento de tiempo, en tiempo real está dado por

$$A_s = \frac{1}{3} l^3 \tilde{\theta} + \frac{l^5}{8l_0} - \frac{1}{8} l^4$$

<sup>14</sup> En el robot flexible experimental, esta medición se realiza en tiempo real.

Donde  $l_0$  se considera una cantidad constante igual a la longitud de la barra y la  $l$  es medida en tiempo real durante la trayectoria de la barra a la posición deseada.

Al dividir la barra, tenemos que con 6 segmentos es mas que suficiente para aproximar toda la medición

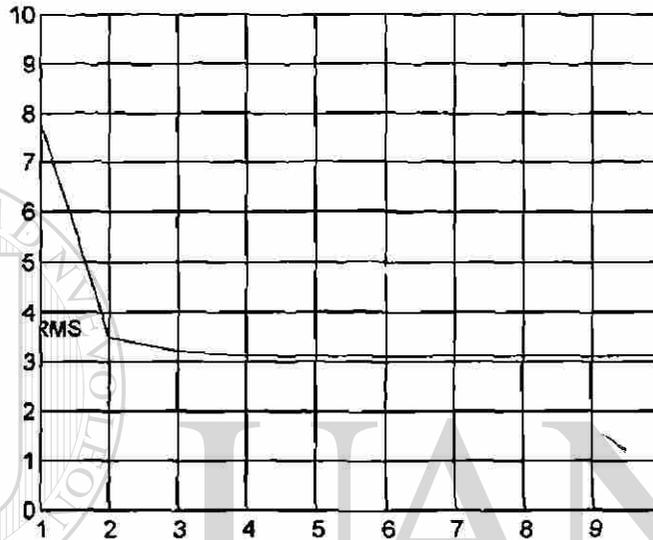


Figura 4.10. Error en aproximación según número de segmentos.

Los valores de los parámetros en la implementación experimental, son los mismos que se utilizaron en la simulación del controlador de Shifman, la razón de esto es comprobar el comportamiento del robot con las variables auxiliares obtenidas de aproximaciones numéricas. Estos parámetros se muestran a continuación:

Parámetro	$c_0$	$c_1$	$c_2$
	80	15	.05

### 4.3 Resumen

En este capítulo se presentaron los controladores diseñados para la evaluación experimental. Cuatro de ellos se diseñaron basándose en el modelo lineal obtenido por análisis modal. Este modelo se truncó a 3 modos para su implementación. Un controlador se diseñó en base a la técnica de perturbaciones singulares. Esta técnica divide al modelo en dos subsistemas, donde como subsistema lento se considera la parte rígida y como subsistema rápido la parte flexible del robot. Tiene como ventaja que la reducción del modelo se obtiene considerando

las constantes elásticas. La principal ventaja de los controladores basados en modelos de dimensión finita es que se pueden aplicar las técnicas de control lineal existentes y diseñar compensadores para suprimir los efectos de los modos altos. Como la supresión de estos modos no es exacta, aun queda mucho camino por investigar para la aplicación de estas técnicas a estructuras flexibles.

La segunda parte del capítulo se concentró en el diseño de controladores basados en un modelo infinito. Se les ha denominado así, ya que se derivan directamente del modelo original por lo que su principal ventaja es que conservan la estructura del modelo. El controlador de Yuan, es un ejemplo de un controlador que requiere sólo las mediciones de las variables en la articulación. La diferencia de éste con el controlador PD basado en modelo finito es que es aplicable para movimientos de ángulos grandes del robot flexible. La forma que tiene el controlador de Shifman, lo hace factible para aplicación real ya que la variable auxiliar se puede obtener de diversas maneras. La forma mas directa es por medio de un strain gage continuo. El controlador que se propone en este trabajo, es un controlador que utiliza las mediciones de las variables en la articulación y de la punta, que son las que generalmente se tienen disponibles en el robot. Requiere también de una variable auxiliar por lo que se llevó a cabo una aproximación numérica y se aplicó la técnica de elementos finitos para su obtención.

Todos estos controladores muestran un nuevo camino en el diseño de controladores para estructuras flexibles.

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

# CAPITULO 5

## Evaluación Experimental

En este capítulo se presentan los resultados experimentales de los controladores diseñados en el capítulo anterior. En forma inicial se presenta la descripción del equipo experimental en el cual se llevaron a cabo las pruebas y se muestran los modos obtenidos de los cálculos de las frecuencias. Finalmente se muestran las gráficas comparativas de los resultados en simulación con los resultados experimentales.

### 5.1 Descripción del Equipo

El esquema de funcionamiento del robot experimental se muestra en la figura 5.1. Este consta de una barra ó eslabón flexible cuyo material es de aluminio, ésta está fija en uno de sus extremos a una base en la que se encuentra un motor de corriente directa. Este motor aplica el torque al eslabón para su movimiento. Montada sobre el motor se encuentra una cámara con resolución de 0.014 cm/pixel, la función de ésta es detectar la posición del led que se encuentra en el otro extremo de la eslabón, en la punta. Esta detección se realiza en tiempo real durante el movimiento del eslabón. Al momento de que la cámara detecta la posición del led, se determina la deflexión de la punta. Estos datos son retroalimentados a una computadora 486 mediante una interface A/D (Análogo/Digital) y D/A (Digital Análogo). La función de la computadora PC 486 es la retroalimentación de datos y diseño del control, donde este control se implementa en lenguaje de programación C.

El equipo experimental del robot flexible en el eslabón con un grado de libertad se muestra en la figura 5.2.

El experimento consiste en realizar movimientos del robot flexible a  $\pm n$  grados con respecto al origen (en este caso el centro, considerando ahí la referencia 0 grados).

Los parámetros del sistema son: Inercia de Cámara  $0.002Kgm^2$ , Longitud del eslabón  $91.4cm$ , Altura del eslabón  $2.54cm$ , Ancho del eslabón  $0.3175cm$ , Masa del eslabón  $0.06Kg$ , Inercia del eslabón  $0.0042Kgm^2$ , Rigidez Flexural  $8Kgm^2/s^2$ , Densidad Lineal  $0.8Kg/m$ . Un cuadro mas detallado de las especificaciones del robot experimental, suministrado por el

distribuidor, se encuentra en el apéndice E.

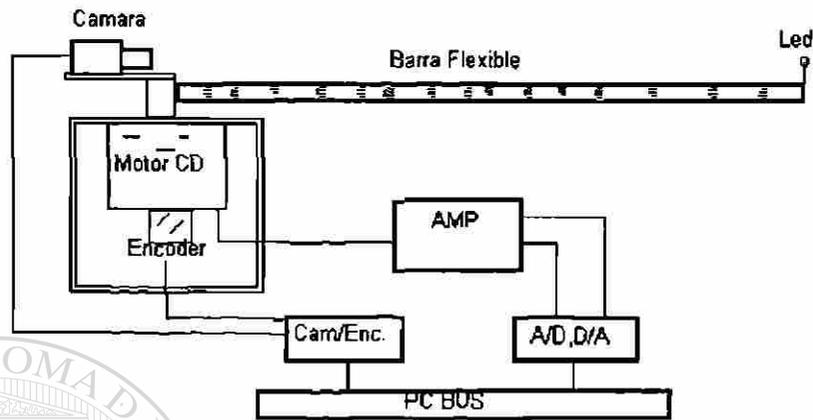


Figura 5.1. Esquema del Robot Flexible

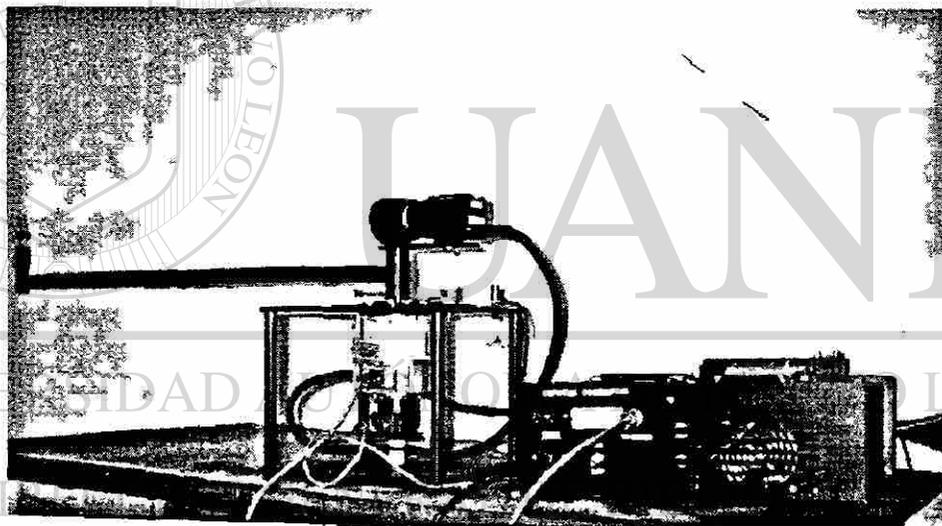


Figura 5.2. Robot Flexible Experimental

## 5.2 Proceso de Calibración

La salida de la cámara es una señal analógica que es proporcional a la deflexión de la fuente de luz relativa al eje central. La ganancia y el offset de la medición son ajustables a través de dos tornillos localizados en la cámara. La salida de la cámara se calibra para obtener la deflexión de la punta, para esto se requiere de un procedimiento para obtener la medición de la cámara en 13 puntos de deflexión equidistantes.

El procedimiento de calibración es el siguiente:

- 1.- Coloque un dispositivo para obtener la primera medición que es en el origen.
- 2.- Corra el programa de calibración para imprimir el voltaje muestreado usando A/D.
- 3.- Ajuste el offset hasta que la medición sea cero cuando la fuente esté en la posición del origen (cero).
- 4.- Mueva ahora a la primera posición equidistante y ajuste la ganancia hasta que el voltaje sea de 1.5 volts.
- 5.- Repita los pasos 4 y 5 hasta que las mediciones formen una línea recta como se muestra en la siguiente gráfica:

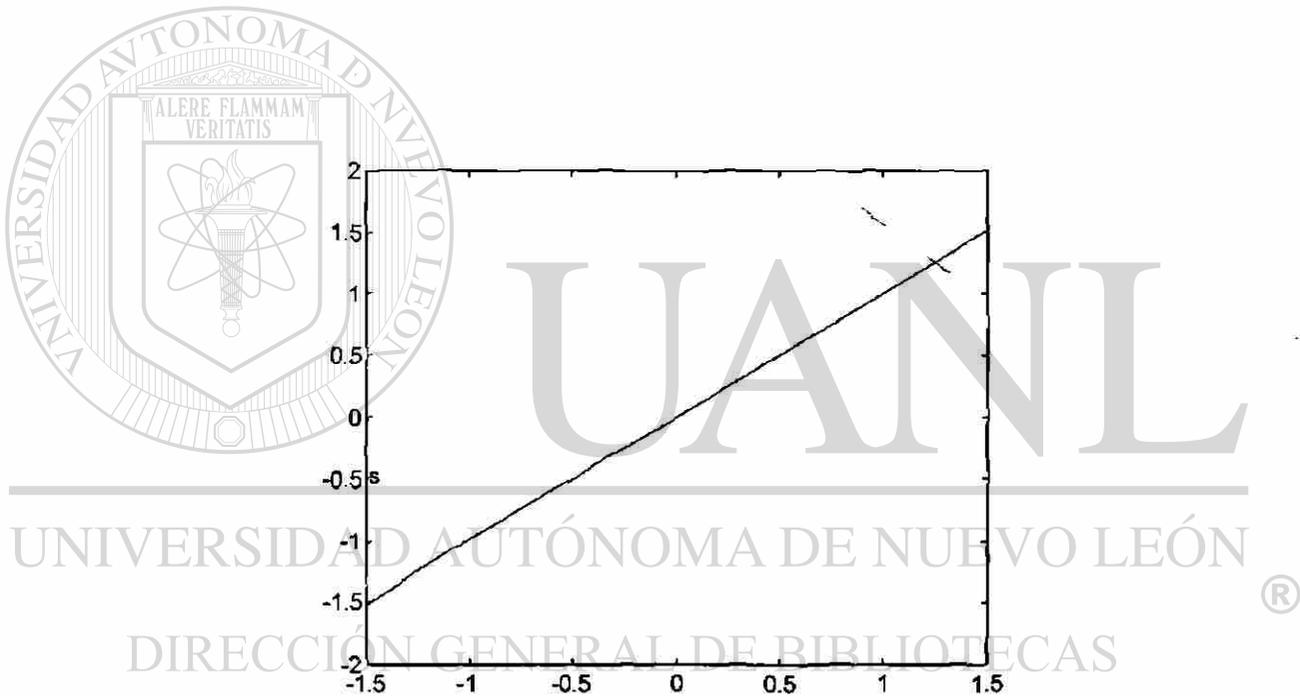


Figura 5.3a. Curva de calibración típica de la posición de la punta vs. voltaje medido.

### 5.3 Modos del Sistema

Para propósitos de simulación y de implementación se utilizaron tres modos. Para su cálculo, se requiere la ecuación dada por (3.27). Esto nos da los valores de los valores de frecuencia.

Se utilizó un algoritmo que se programó en Matlab para calcular estos valores. En la Figura (5.3b) se muestra en forma gráfica, como el algoritmo determina los valores que satisfacen la ecuación.

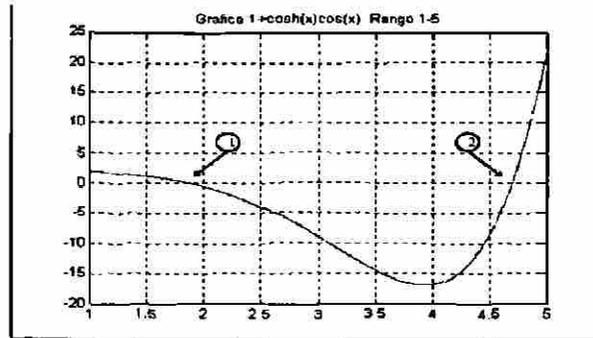


Figura 5.3b. Modos del sistema

La siguiente tabla muestra los modos calculados y los medidos experimentalmente en la estructura de robot flexible:

Modo	Frec. Calc.	Frec. Med.
1	2.11	1.9
2	13.29	13.1
3	37.21	33

Para la obtención de  $\phi'_i(0)$ , se utiliza la siguiente ecuación

$$\gamma_i = \frac{3 I_b}{L \lambda_i I_h}$$

donde  $L = \beta l$  y  $\lambda_i = \beta l / l$ .

Tomando en consideración que de acuerdo a las especificaciones  $I_b = 0.0042$ ,  $I_h = 0.002$ , la ecuación anterior resulta

$$\gamma_i = \frac{3 * 2.1 * l^3}{(\beta l)^6}$$

que corresponde a cada modo de frecuencia. Sustituyendo los valores de  $\beta l$ , que son los modos de frecuencia en la ecuación de solución modal dada por (3.37), se obtiene

Modo	Frecuencia	$\phi'_i(0)$	$\phi'_i(l)$
1	1.9	0.4424	-0.3743
2	13.29	0.000899	-0.6829
3	37.21	0.0000409636	-0.5776

## 5.4 Resultados de simulación y Experimentales

Las siguientes gráficas muestran una comparación de los resultados de simulación (línea Continua) y experimentales (línea punteada) de los controladores diseñados.

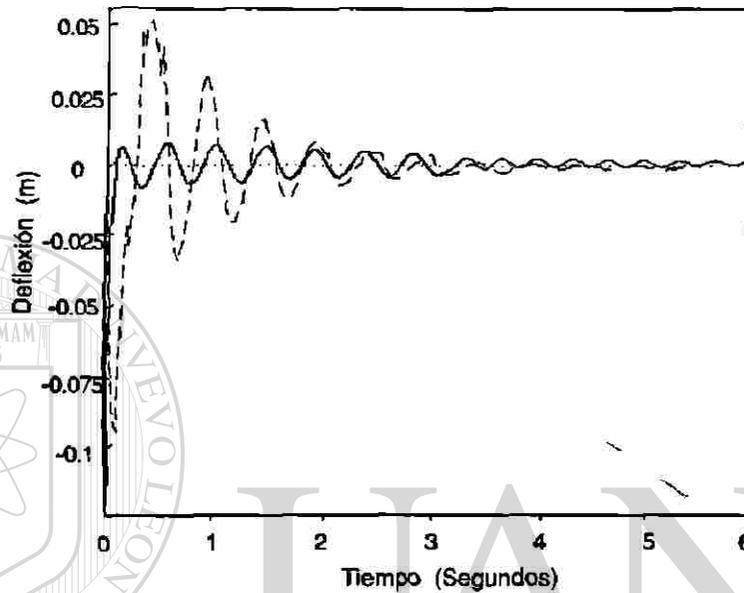


Figura 5.4 Controlador PD. Deflexión.

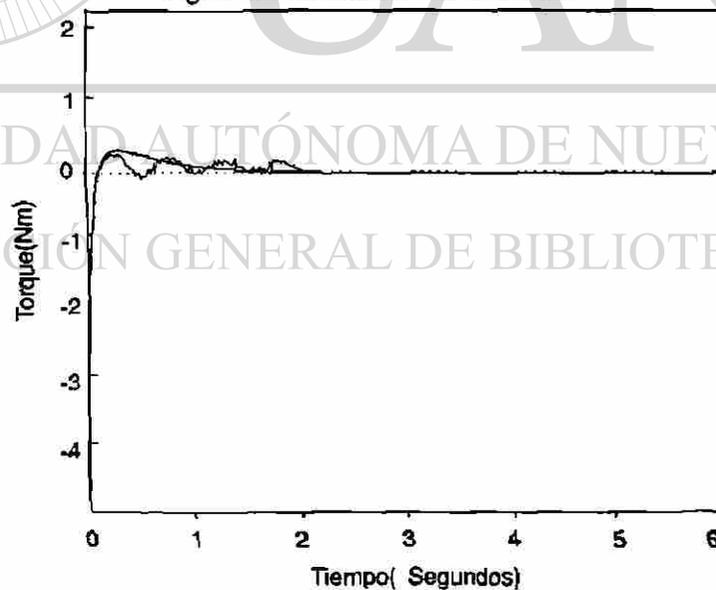


Figura 5.5. Controlador PD. Torque.

El controlador PD, muestra un máximo torque de aproximadamente 1 Nm., pero su respuesta en la deflexión del eslabón es oscilatoria. Hasta después de 5 segundos, la

deflexión es casi nula. Este controlador fue incluido como base de comparación para los otros controladores.

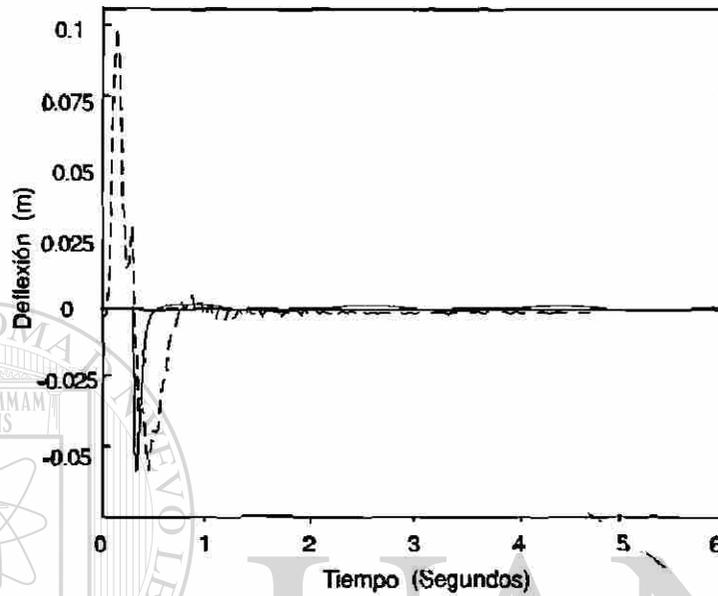


Figura 5.6 Controlador LQR. Deflexión.

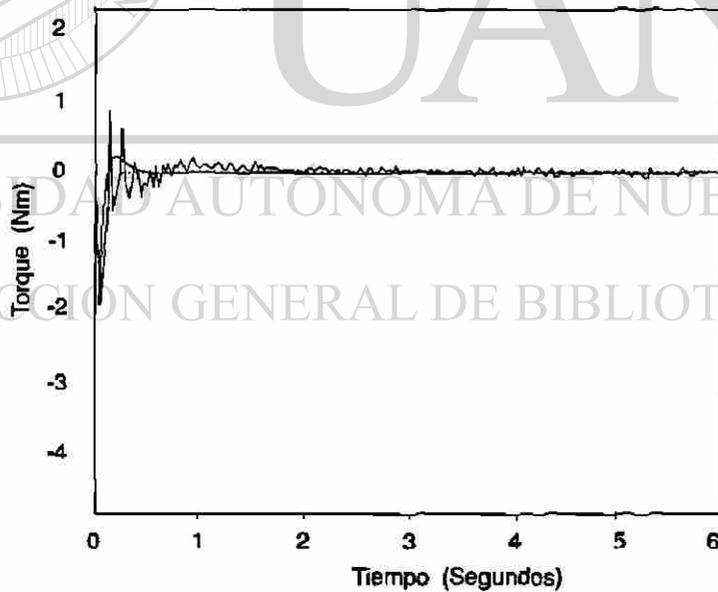


Figura 5.7. Controlador LQR. Torque.

El controlador LQR presenta un máximo torque de aproximadamente 1 Nm., pero su respuesta en la deflexión del eslabón es amortiguada en un tiempo menor que el controlador PD.

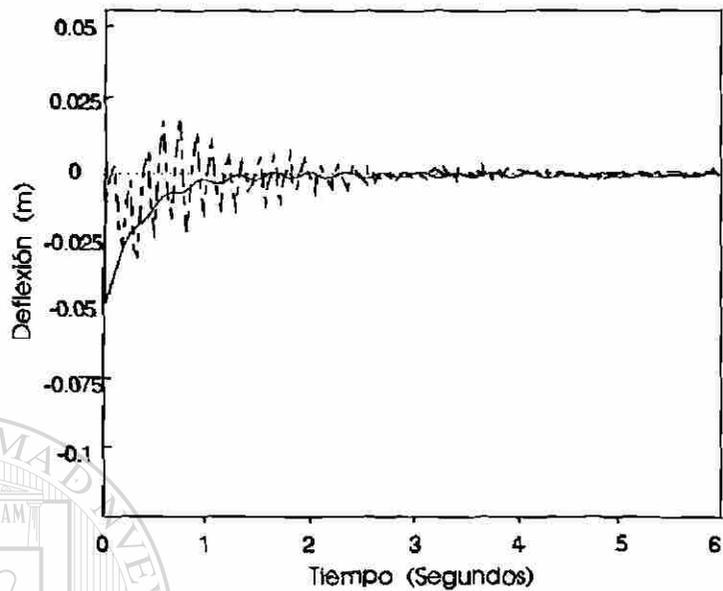


Figura 5.8. Controlador PS. Deflexión.

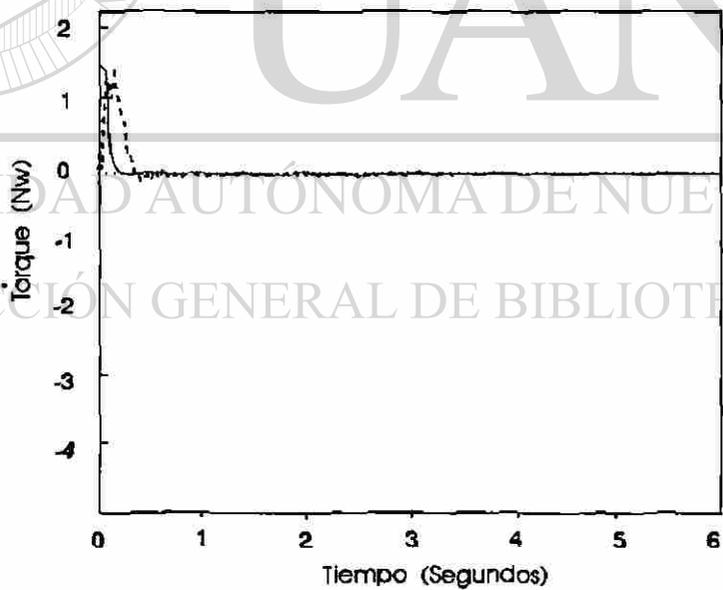


Figura 5.9. Controlador PS. Torque.

Este controlador PS presenta un máximo torque de aproximadamente 1.5 Nm., pero su respuesta en la deflexión del eslabón es amortiguada y en un tiempo menor que el controlador LQR.

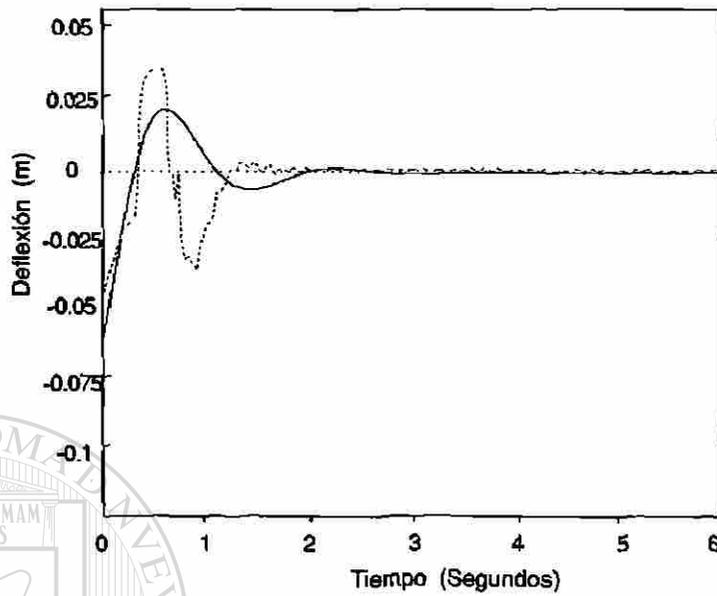


Figura 5.10 Controlador LQG/ $H_{\infty}$  . Deflexión.

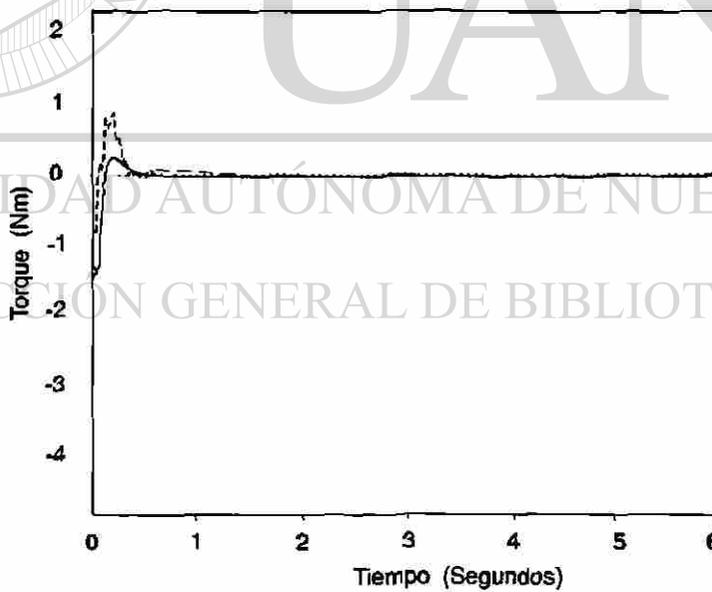


Figura 5.11. Controlador LQG/ $H_{\infty}$ . Torque.

El controlador LQG/ $H_{\infty}$  presenta un máximo torque de aproximadamente 1 Nm., pero su respuesta en la deflexión del eslabón es amortiguada en un tiempo mayor que el controlador PS.

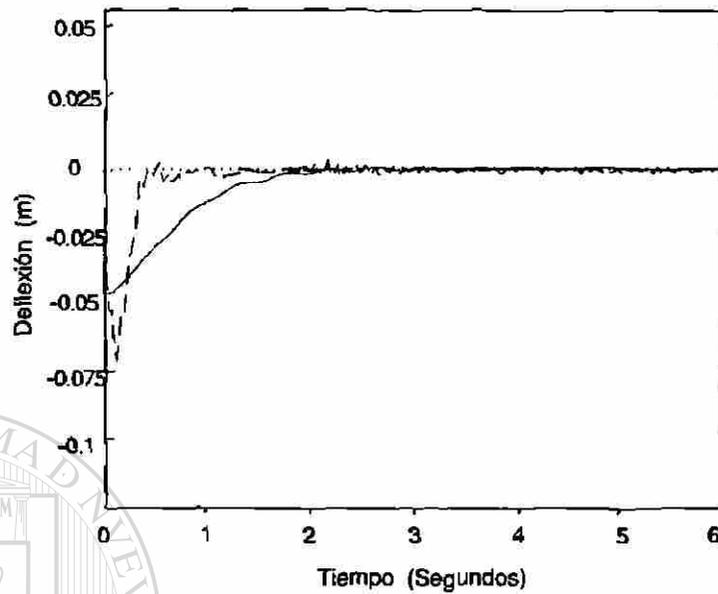


Figura 5.12. Controlador Pasivo. Deflexión.

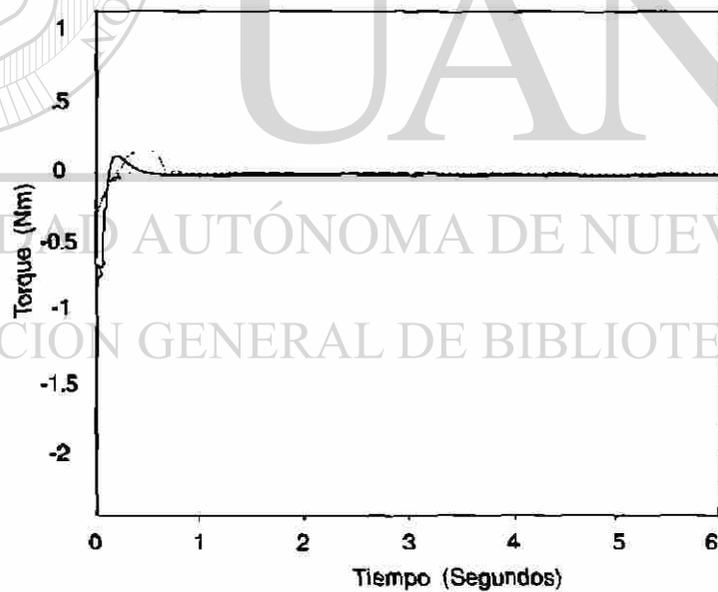


Figura 5.13. Controlador Pasivo. Torque.

El controlador Pasivo presenta un máximo torque de aproximadamente 0.5 Nm. y su respuesta en la deflexión del eslabón es amortiguada en un tiempo semejante al controlador PS. En comparación con la respuesta en deflexión del controlador PS, presenta una máxima deflexión de 0.075 contra 0.05 del controlador PS.

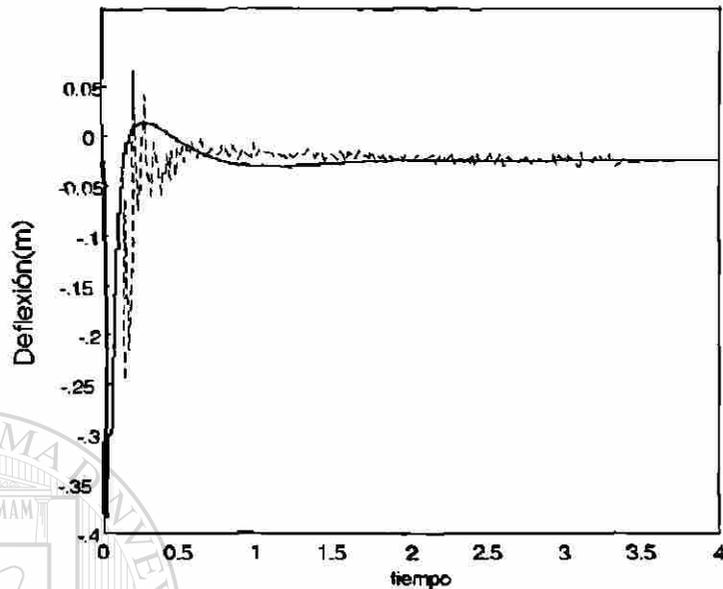


Figura 5.14. Controlador JPD. Deflexión.

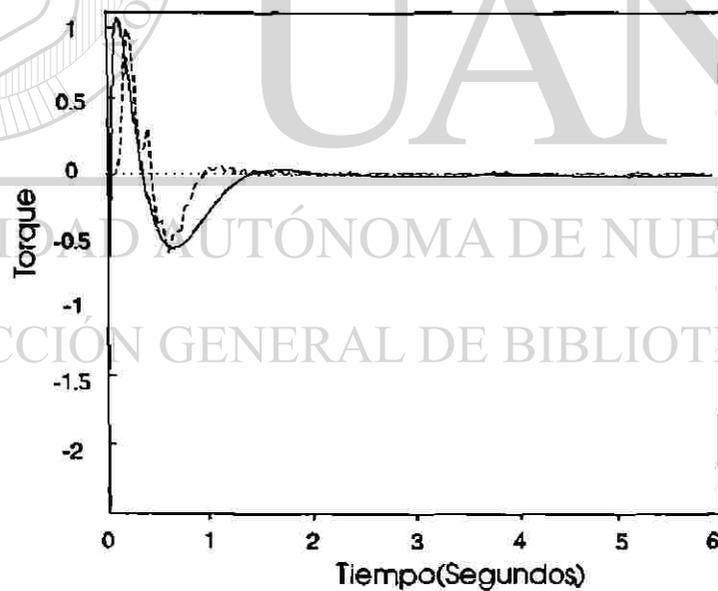


Figura 5.15. Controlador JPD. Torque.

El controlador JPD presenta un máximo torque de aproximadamente 1 Nm. y su respuesta en la deflexión del eslabón es amortiguada en un tiempo semejante al controlador PS. En comparación con la respuesta en deflexión del controlador PS, presenta una máxima deflexión de 0.35 contra 0.05 del controlador PS.

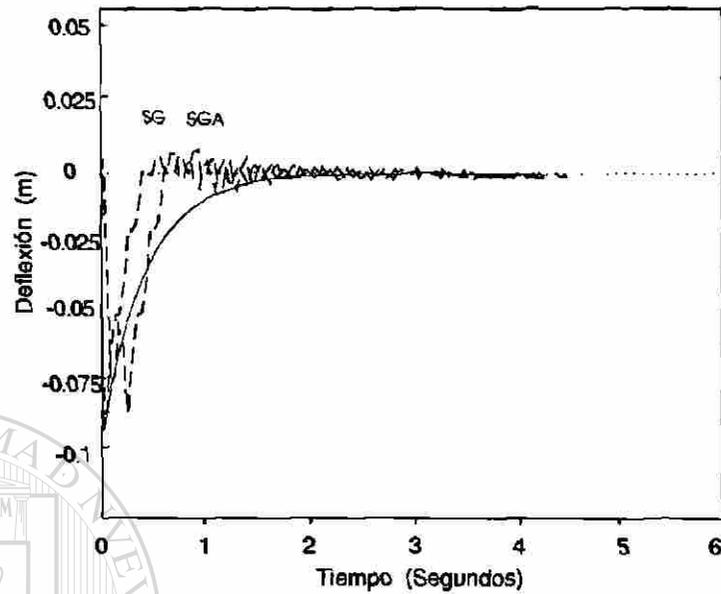


Figura 5.16. Controladores SG y SGA. Deflexión

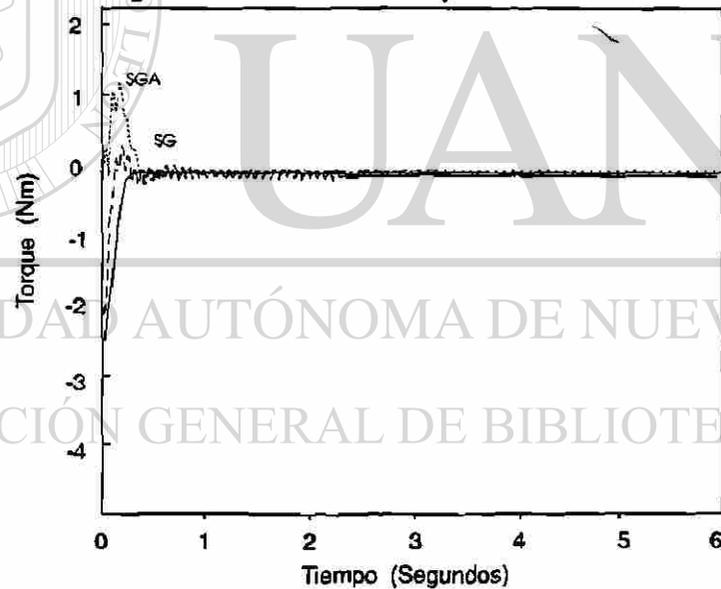


Figura 5.17. Controladores SG y SGA. Torque

El controlador SG presenta un máximo torque de aproximadamente 0.5 Nm. y su respuesta en la deflexión del eslabón es amortiguada en un tiempo semejante al controlador SGA. El controlador SGA muestra un máximo torque de 1 Nm. En comparación con la respuesta en deflexión del controlador PS, muestra una máxima deflexión de 0.07 contra 0.05 del controlador PS, pero la oscilación que se presenta en el controlador SGA es menor.

## Conclusiones

Esta investigación ha tratado de contribuir al análisis del diseño del control de robots flexibles, mediante el estudio de dos estrategias. La primera se centra en el diseño de controladores basados en modelos de dimensión finita. La segunda en el diseño de controladores basados en el modelo PDE, denominado modelo infinito. Como método para demostrar el comportamiento de todos estos controladores, se desarrollaron simulaciones. También se aplicaron los mismos controladores a un robot flexible experimental.

En la primera estrategia, la reducción del orden del modelo PDE se obtuvo por truncamiento y por el método de perturbaciones singulares. Como ejemplo se diseñaron los controladores PD, el LQR, el PS, el LQG/ $H_{\infty}$  y el Pasivo. Los resultados mostraron que:

- ▶ El controlador PD, con sensor/control colocado, no es eficiente en la supresión de las oscilaciones del eslabón.
- ▶ Los controladores LQR, PS y Pasivo, son una alternativa para cuando se tiene sensor/control no colocado. El más eficiente de éstos fue el de perturbaciones singulares, que necesitó un menor tiempo para controlar la deflexión de la punta y presentó menor deflexión.
- ▶ Los resultados cuando se utilizan las técnicas de LQG/ $H_{\infty}$  muestran que la deflexión es amortiguada adecuadamente. Esta respuesta es similar a la observada por el controlador diseñado con técnicas de perturbaciones singulares. El torque requerido es mayor, pero esta desventaja puede anularse encontrando unos valores de peso más adecuados.

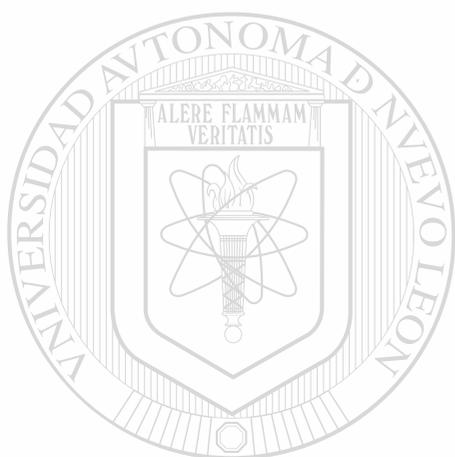
En la segunda estrategia, se diseñaron tres controladores. El primero se retroalimenta sólo de la medición de variables de la base. El segundo utiliza un strain gage para la medición de las variables del eslabón. El tercero se diseñó mediante una aproximación numérica de una variable auxiliar. Esta aproximación se basó en los datos de la posición de la punta.

Los resultados mostraron que:

- ▶ Estos controladores logran suprimir las oscilaciones en un tiempo semejante al de los controladores LQR, PS.
- ▶ En el primer controlador, el torque fue mayor al de los otros dos controladores.
- ▶ El segundo controlador requiere poco torque y su variable de salida es controlada en forma precisa. Sin embargo, el hecho de necesitar un strain gage en su eslabón, lo hace inutilizable en estructuras largas.
- ▶ El tercer controlador es similar al segundo, aunque requiere de un torque mayor. Como se retroalimenta de la medición de la posición de la punta, tiende a ser un opción viable para

el control de estructuras flexibles largas.

El estudio del diseño de robots flexibles sigue en proceso. Las conclusiones emitidas son valiosas para un mejor entendimiento del campo y sirven como punto de partida para trabajos futuros.



# UANL

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

## Bibliografía

- [1] Ahmed S., "Why characterise Flexible Structures" A Radarsat Project Perspective", American Mathematical Society. Vol. 2, 1993.
- [2] Aldridge H., Juang J., "Virtual Passive Controller for Robot Systems Using Joint Torque Sensors", NASA Technical Memorandum 110316. January 1997.
- [3] Aoustin, Chevareau, Glumineau, Moong, "Experimental Results for the End-Effector Control of a single Flexible Robotic Arm", IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol2, No. 4, Dec. 1994.
- [4] Astrom K., Wittenmark B. "Computer Controlled Systems", Prentice Hall, 1990.
- [5] Balas G. Doyle J. "Robustness and Performance Trade-Offs in Control Design for Flexible Structures". IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 2, No. 4, December 1994.
- [6] Banavar R., Dominic P. "An LQG/ $H_{\infty}$  Controller for a Flexible Manipulator". IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol.3, No.4, December 1995.
- [7] Bayo Eduardo, "A Finite-Element Approach to Control the End-Point of a Single-Link Flexible Robot", Journal of Robotics Systems, 4(1), 63-75 (1987).
- [8] Barbieri Enrique, "Single-Input/Single-Output Transfer Functions for a flexible Slewing Link", Journal of Robotics Systems. 10(7), 913-929, 1993.
- [9] Boulet B., Francis B., Hughes P. Hong T., "Uncertainty Modeling and Experiments in  $H_{\infty}$  Control of Large Flexible Space Structures", IEEE Transactions on Control Systems Technology. Vol. 5, No. 5, September 1997.
- [10] Cannon R., Schmitz E., "Initial Experiments on the End-Point Control of a flexible One-Link Robot", The International Journal of Robotics Research, Vol 3, No.3, pp. 62-75, Fall 1984.
- [11] Canudas C. Siciliano B. Bastin G. (Eds) "Theory of Robot Control". Springer Verlag 1996.
- [12] Carusone J., D'Eleuterio G. "Tracking Control for End-Effector Position and Orientation of Structurally Flexible Manipulators", Journal of Robotics Systems 10 (6), 847-870 (1993).
- [13] Curtain R., Pritchard A., "Infinite Dimensional Linear Systems Theory", Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer Verlag, 1978.
- [14] Chalhoub N., Ulsoy A., "Control of a Flexible Robot Arm: Experimental and Theoretical Results", Journal of Dynamics Systems, Measurement and Control, Vol. 109, pp. 299-309.

Dec. 1987

- [15] Chang P. Jayasuriya S. "An Evaluation of Several Controller Synthesis Methodologies Using a Rotating Flexible Beam as a Test Bed", Transactions of the ASME, 360/Vol. 117, September 1995.
- [16] Charles C., Jong S. Leondes C. "Adaptive Control for the Space Station", IEEE Control Systems Magazine, February 1987.
- [17] Chapnik B.V., Heppler G.R., and Aplevich J.D., "Modeling Impact on a One-Link Flexible Robotic Arm", IEEE Transactions on Robotics and Automation, vol 7, pp 479-488, 1991.
- [18] Chedmail P., Glumineau A. Bardiaux J., "Plane Flexible Robot Modelization and Application to the Control of an Elastic Arm", ICAR 87, Versailles, 13-17 October 1987.
- [19] Choi B., Krishnamurthy K., "Unconstrained and Constrained Motion Control of a Planar Two-Link Structurally Flexible Robotic Manipulator" Journal of Robotics Systems 11(6), 557-571 (1994).
- [20] Daafouz J., Garcia G. Bernussou J. "Robust Control of a Flexible Robot Arm Using Quadratic d-Stability Approach". IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 6, No. 4, July 1998.
- [21] Dally J. "Experimental Stress Analysis", Mc. Graw Hill Company, 1987.
- [22] Damaren C., "Modal Properties and Control System Design for Two-Link Flexible Manipulators". The International Journal of Robotics Research. Vol 17, No. 6, June 1998, pp. 667-678.
- [23] Doebelin E., "Measurements Systems", International Student Edition. Mc. Graw Hill, 1975. ®
- [24] Dorato P., Abdallah C., Cerone V. "Linear Quadratic Control. An Introduction". Prentice Hall. 1995.
- [25] Fukuda T., "Flexibility Control of Elastic Robotics Arms", Journal of Robotics Systems, 2 (1), 73-88 (1985).
- [26] Gawronski W. "Balanced Control of Flexible Structures", Lecture Notes in Control and Information Series 211. Springer Verlag 1996.
- [27] Geniele H. Patel R.V: Khorasani K. "End-Point Control of a Flexible-Link Manipulator: Theory and Experiments". IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 5, No. 6, November 1997.
- [28] Green M., Limebeer D., "Linear Robust Control", Prentice Hall, 1996.

- [29] Gross E., Tomizuka M., "Experimental Flexible Beam Tip Tracking Control with a Truncated Series Approximation to Uncancelable Inverse Dynamics", IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 2. No. 4, December 1994.
- [30] Hastings G. Book W. "A Linear Dynamic Model for Flexible Robotic Manipulators", IEEE Control Systems Magazine. February 1987.
- [31] Heppler G.R., "On Dynamic Mass Capture by Flexible Robots", Fields Institute Communications. Vol. 2, 1993.
- [32] Herrera M., Castro R., Glumineau A. "Passivity Based Control for tip position Regulation of a Flexible Link", IASTED International Conference of Robotics. June 14-17,1995, Cancún, México.
- [33] Hu F.L., Ulsoy A.G., "Dynamic Modeling of Constrained Flexible Robots arms for Controller Design", Transactions of the ASME, vol 116, pp 56-65, 1994.
- [34] Hughes Peter C. "Space Structure Vibration Modes, How Many Exist? Which Ones Are Important?", IEEE Control Systems Magazine, Feb. 1987.
- [35] Isidori Alberto. "Nonlinear Control systems". Second Edition, Springer Verlag.
- [36] Jacobs, Kilduff, "Engineering Materials Technology", Prentice Hall Inc., 1985.
- [37] Kelly J., Ydstie E. "Adaptive  $H_{\infty}$  Control with Application to Systems with Structural Flexibility". IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 42, No. 10, October 1997.
- [38] Kelkar A., Joshi S. "Control of Nonlinear Multibody Flexible Space Structures", Lecture Notes in Control and Information Sciences 221. Springer Verlag 1996.
- [39] Khalil H., "Nonlinear Systems", Second Edition, Prentice Hall, 1996
- [40] Konno A., Uchiyama M., Kito Y., Murakami M. "Configuration-Dependent Vibration Controllability of Flexible-Link Manipulators". The International Journal of Robotics Research, Vol. 16, No. 4, August 1997, pp. 567-576.
- [41] Krasnov M.I. , Makarenko G.I., Kiseliiov. A.I., "Cálculo Variacional". Editorial Mir, Moscú, 1976
- [42] Lagnese J.E. , Leugering G, Schmidt E.J.P.G. "Modeling, Analysis and Control of Dynamic Elastic Multi-Link Structures". Ed. Birkhäuser, 1994.
- [43] Lammerts I., Veldpaus F., Van de Molengraaf M., Kok J. "Adaptive Computed Reference Computed Torque Control of Flexible Robots", Journal of Dynamics Systems, Measurement, and Control. March 1995, Vol. 117/31

- [44] Lee S., Mote C., "Vibration Control of an Axially Moving String by Boundary Control", Transactions of the ASME 66/Vol. 118, March 1996.
- [45] Lewis F.L., Vendegrift M. "Flexible Robot Arm Control by a Feedback Linearization/Singular Perturbation Approach", 1050-4729/93, IEEE 1993
- [46] Lim K.B. "A Disturbance Rejection Approach to Actuator and Sensor Placement", NASA Report, NASA-97-jgcdz, 1997.
- [47] Lin J., Lewis F.L. "Enhanced Measurement and Estimation Methodology for Flexible Link Arm Control", Journal of Robotics Systems 11(5), 367-385 (1994)
- [48] Lin J., Lewis F.L. "Improved Measurement / Estimation Technique for Flexible Link Arm Control", CDC 1993. San Antonio Tx., December 1993.
- [49] Love L., Kress R., Jansen J. "Control for a Hydraulically Actuated Flexible-Prismatic Link Robot". IEEE Control Systems. Vol. 18. No. 1, February, 1998.
- [50] Luo Z., Guo B., "Shear Force Feedback Control of a Single-Link Flexible Robot with a Revolute Joint", IEEE Transactions on Automatic Control. Vol. 42, No. 1, January 1997.
- [51] Matsuno F., Murachi T. Sakawa Y., "Feedback Control of Decoupled Bending and Torsional Vibrations of Flexible Beams", Journal of Robotics Systems 11(5) 341-353 (1994)
- [52] Matsuno F., Yamamoto K., "Dynamic Hybrid Position/Force Control of a Two Degree of Freedom Flexible Manipulator", Journal of Robotics Systems 11(5), 355-366 (1994).
- [53] Milford R., Asokanthan S. "Experimental On-Line Frequency Domain Identification and Adaptive Control of a Flexible Slewing Beam", Transactions of the ASME, 58/Vol. 118, March 1996.
- [54] Murray R., Li Z., Sastry S., "A mathematical Introduction to Robotic Manipulation" CRC Press, 1993.
- [55] Oakley C. Cannon Jr. R., "Anatomy of an Experimental Two-Link Flexible Manipulator Under End-Point Control", CH2917-3/90/0000-0507. 1990 IEEE.
- [56] Ower J.C., Van de Vegte J., "Classical Control Design for a Flexible Manipulator: Modeling and Control System Design" IEEE Journal of Robotics and Automation. Vol. RA-3, No. 5, October 1987.
- [57] Qian W., Ma H., "A New Controller Design for a Flexible One-Link Manipulator", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol 37, No. 1, January 1992.
- [58] Quanser C., Apkarian Jacob, "A Comprehensive and Modular Laboratory For Control

*Systems Design and Implementation*". Quanser Consulting 1994

- [59] Rao J.S. *Advanced Theory of Vibration*, Ed. John Wiley and Sons, 1992.
- [60] Rossi M. Wang D. Zuo R., *Issues in the Design of Passive Controllers for Flexible-Link Robots*, The International Journal of Robotics Research, Vol 16, No.4, August 1997, pp. 577-588.
- [61] Rovner D., Cannon Jr. R., *Experiments Toward On-Line Identification and Control of a Very Flexible One-Link Manipulator*, The International Journal of Robotics Research, Vol. 6 No. 4, Winter 1987.
- [62] Singhose W., Pao L., *A Comparison of Input Shaping and Time Optimal Flexible-Body Control*, 1997. MIT.
- [63] Saberi A., Chen B., Sannuti P., *Loop Transfer Recovery: Analysis and Design*, Springer Verlag, 1993.
- [64] Sakawa Y., Matsuno F., Fukushima S. *Modeling and Feedback Control of a Flexible Arm*, Journal of Robotics Systems, 2(4), 453-472 (1985)
- [65] Scott Peter B., *The Robotics Revolution*, Basil Blackwell, 1984.
- [66] Siciliano B., Book W. *A singular perturbation approach to control of Lightweight Flexible Manipulator*, The International Journal of Robotics Research, Vol 7, No. 4, pp. 79-90, 1988.
- [67] Siciliano B., Yuan B., Book W., *Model Reference Adaptive Control of a One Link Flexible Arm*, 25th CDC Athens, Greece, December 1986.
- [68] Sudipto Sur, PHD Thesis *Robotic Manipulation with Flexible Link Fingers*. California Institute of Technology. Pasadena, California, 1997.
- [69] Shifman Jeffrey J., *Lyapunov Functions and the control of the Euler-Bernoulli Beam*, International Journal of Control, vol 57, pp971-990, 1993.
- [70] Shifman J. *The Control Of Flexible Robots*, PHD Thesis, Churchill College., March 1991.
- [71] Skelton R. *Dynamics Systems Control*, John Wiley & Sons, 1988.
- [72] Strang G., *An Analysis of the Finite Element Method*, Prentice Hall, 1973.
- [73] Thomson William T. *Teoría de Vibraciones. Aplicaciones*. Editorial Prentice Hall. Internacional. 1983.
- [74] Torfs D., Vuerinckx R., Swevers J., Schoukens J., *Comparison of Two Feedforward Design Methods Aiming at Accurate Trajectory Tracking of the End Point of a Flexible Robot Arm*, IEEE Transactions on Control Systems Technology. Vol. & No. 1, January 1998.

- [75] Vandegrift M. Lewis F., Zhu S., "Flexible-Link Robot Arm Control by a Feedback Linearization/Singular Perturbation Approach", Journal of Robotics Systems 11(7), 591-603 (1994).
- [76] Vandegrift M., Lewis F. "Improved Reduced-Order Model for Control of Flexible-Link Robots", CDC 1993. San Antonio Tx., December 1993.
- [77] Wang D., Vidyasagar M. "Passive Control of a Stiff Flexible Link", International Journal of Robotics Research. Vol. 11, No. 6, December 1992.
- [78] Wang D. "Comparison of Control Strategies for the Single Flexible Link". 1993 American Mathematical Society, 1069-5265/93
- [79] Wang J. Lu S., Hsu C., "Output Feedback Control of a Flexible Robot Arm", 25th. CDC, Athens, Greece, December 1986.
- [80] Yeung K.S., Chen YP., "Regulation of a One-Link Flexible Robot Arm Using Sliding-Mode Technique", International Journal of Control, 1989, Vol. 49, No. 6, 1965-1978
- [81] Yigit A., "On the stability of PD Control for a two-link Rigid-Flexible Manipulator", Transactions of the ASME, vol 116, pp 208- 215, 1994
- [82] Yuan King, "Regulation of a geometrically exact flexible beam manipulator", Systems & Control Letters 25 (1995) 9-12.
- [83] Yuan K., Hu C., "Nonlinear Modeling and Partial Linearizing Control of a Slewing Timoshenko-Beam", Journal of Dynamics Systems, Measurement and Control. March 1996, Vol. 118/75.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

# Apéndice A

## Preliminares Matemáticos

**DEFINICION 5.1** Una Función continua  $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  es localmente positiva definida si para algún  $\epsilon > 0$  y una función continua estrictamente creciente  $\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$V(0, t) = 0 \quad y \quad V(x, t) \geq \alpha(\|x\|) \quad \forall x \in B_\epsilon, \forall t \geq 0.$$

Una función positiva definida es localmente una función positiva con la condición adicional de que  $\alpha(p) \rightarrow \infty$  como  $p \rightarrow \infty$ .

**DEFINICION 5.2** Una Función decreciente es una función continua  $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  si para algún  $\epsilon > 0$  y alguna función estrictamente creciente  $\beta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$V(x, t) \leq \beta(\|x\|) \quad \forall x \in B_\epsilon, \forall t \geq 0$$

**TEOREMA 5.1** (Teorema de Lyapunov para estabilidad). Considere una función no-negativa  $V(x, t)$ ,  $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  teniendo como derivada a  $\dot{V}$  a través de las trayectorias del sistema

$$\dot{x} = f(x, t) \quad x(t_0) = 0 \quad x \in \mathbb{R}^n$$

entonces,

1) Si  $V$  es positiva definida localmente y  $\dot{V} \leq 0$  localmente en  $x$  para todo  $t$ , entonces el origen del sistema es localmente estable en el sentido de Lyapunov.

2) Si  $V$  es localmente positiva definida y decreciente, y  $-\dot{V}$  es localmente positiva definida, entonces el origen del sistema es uniformemente asintóticamente estable localmente.

3) Si  $V$  es localmente positiva definida y decreciente, y  $-\dot{V}$  es positiva definida, entonces el origen del sistema es globalmente uniformemente asintóticamente estable.

A  $V$  se le denomina función de Lyapunov para el sistema.

**DEFINICION 5.3** (Principio de Invariancia de La Salle). Sea  $V(x)$ ,  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función positiva definida localmente tal que en un conjunto compacto  $\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq c\}$ ,  $\dot{V}(x) \leq 0$ . Definiendo

$$S = \{x \in \Omega_c : \dot{V}(x) = 0\}$$

entonces, como  $t \rightarrow \infty$ , la trayectoria  $s(t, x_0, t_0)$  tiende al conjunto mas grande invariante en  $S$ . En particular si  $S$  contiene solamente al conjunto invariante  $x = 0$ , entonces 0 es asintóticamente estable.

## Apéndice B

### Coeficientes para una barra

Coeficientes para una barra (Long slender rod). Una solución bien conocida a la ecuación (3.57) es

$$u(x, t) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \phi_{\alpha}(x) \eta_{\alpha}(x)$$

donde

$$\ddot{\eta}_{\alpha} + \omega_{\alpha}^2 \eta_{\alpha} = \int_0^l \phi_{\alpha}(x) f(x, t) dx$$

$$\phi_{\alpha} = (\rho l)^{\frac{1}{2}} [\cosh \lambda_{\alpha} \xi - \cos \lambda_{\alpha} \xi] - k_{\alpha} (\sinh \lambda_{\alpha} \xi - \sin \lambda_{\alpha} \xi)$$

$$\lambda_{\alpha} = \frac{\rho \omega_{\alpha}^2 l^4}{EI}; \quad \xi = \frac{x}{l}$$

$$k_{\alpha} = (\sinh \lambda_{\alpha} - \sin \lambda_{\alpha}) / (\cosh \lambda_{\alpha} + \cos \lambda_{\alpha})$$

Las frecuencias naturales son calculadas de la solución numérica de la ecuación trascendental

$$1 + \cos \lambda_{\alpha} \cosh \lambda_{\alpha} = 0$$

Los modos "Shape" de la ecuación (3.57), satisfacen las condiciones de ortogonalidad

$$\int_0^l \phi_{\alpha}(x) \phi_{\beta}(x) dx = 0 \quad \alpha \neq \beta$$

También la ecuación (3.57), satisface la condición de normalización

$$\int_0^l \phi_{\alpha}^2 dm = \rho l \int_0^l \phi_{\alpha}^2 d\xi = 1$$

En vibración libre, la fuerza y el torque en la barra en 0 son:

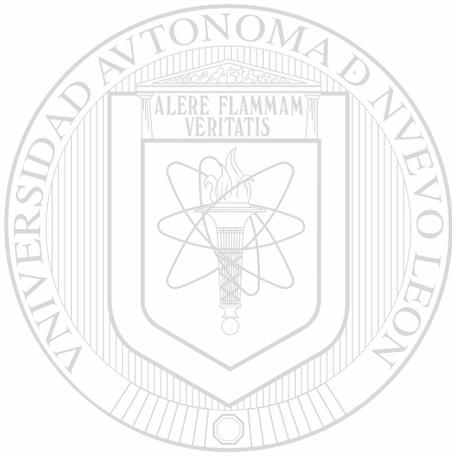
$$F(t) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} p_{\alpha} \ddot{\eta}_{\alpha}$$

$$G(t) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} h_{\alpha} \ddot{\eta}_{\alpha}$$

donde  $p_\alpha$  y  $h_\alpha$  son los coeficientes de la estructura dados por

$$p_\alpha = \int \phi_\alpha dm = \rho l \int_0^l \phi_\alpha d\xi = 2(\rho l)^{\frac{1}{2}} k_\alpha / \lambda_\alpha$$

$$h_\alpha = \int x \phi_\alpha dm = \rho l^2 \int_0^l \xi \phi_\alpha d\xi = 2(\rho l^3)^{\frac{1}{2}} / \lambda_\alpha^2$$



# UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

## Apéndice C

### Teoría de Timoshenko

Como complemento, se describe en esta tesis, la teoría desarrollada por Timoshenko. Esta teoría asume que la deformación de la barra solamente es debida al cortado y que el elemento vertical antes de la deformación permanece vertical después de la deformación y se mueve a una distancia  $w$  en la dirección transversal  $z$ . El campo de desplazamiento es entonces dado por

$$\begin{aligned} u_x &= 0 \\ u_y &= 0 \\ u_z &= w(x, t) \end{aligned}$$

Los elementos tangenciales a la línea central de la barra están sometidos a una rotación  $\beta(x, t)$ , mostrada en la figura 2.3b, que claramente tiene un ángulo de corte  $\psi$ . Las deformaciones correspondientes están dadas por  $\epsilon_{xz} = \frac{1}{2}\omega'$  que en reposo tiene un valor  $\epsilon = 0$ .

El esfuerzo consiste de sólo un componente  $\tau_{xz} = G\omega'$ , donde  $G$  es el módulo de cortado.

Con estos datos se puede continuar para derivar las ecuaciones de la barra sujeta puramente a la fuerza de cortado con un procedimiento similar al anterior. En los casos reales, se sabe que una componente significativa surge durante la deformación, por lo que se analizan los efectos combinados de las componentes por cortado y las componentes dadas en la teoría Euler-Bernoulli.

Se asumen, entonces, los siguientes desplazamientos

$$\begin{aligned} u_x &= -z\psi(x, t) = -z\{\omega' - \beta(x)\} \\ u_y &= 0 \\ u_z &= w(x, t) \end{aligned}$$

La pendiente total de la deflexión de la barra, consiste de dos partes: Una debida al curvado denotada por  $\psi(x)$  y la otra debida al corte denotada por  $\beta(x)$ . El desplazamiento axial de un punto a una distancia  $z$  de la línea central es debido solamente a la pendiente de curvado.

El campo de desplazamiento es entonces dado por

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= -z\psi' \\ \epsilon_{xz} &= \frac{1}{2}(\omega' - \psi) \\ \epsilon &= 0, \text{ en reposo} \end{aligned}$$

Los esfuerzos están dados por

$$\begin{aligned}\tau_{xx} &= -Ez\psi' \\ \tau_{xz} &= k'G(\omega' - \psi) \\ \tau &= 0, \text{ en reposo}\end{aligned}$$

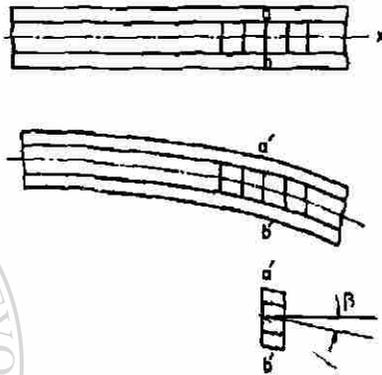
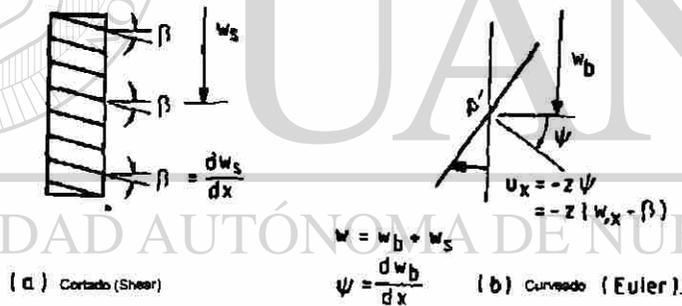


Figura 2.3a. Deflexión de la barra



(a) Cortado (Shear)

$$\psi = \frac{dw_b}{dx}$$

(b) Curvado (Euler).

Figura 2.3b. Curvado y Cortado

La energía potencial es dada por

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \{EI(\psi')^2 + k'AG(\omega' - \psi)^2\} dx$$

La contribución de energía cinética del eslabón, está definida como

$$T_l = \frac{1}{2} \int_0^l (\rho A \dot{\omega}^2 + \rho I \dot{\psi}^2) dx$$

El trabajo realizado por la fuerza externa se denota por

$$\int_0^l q\omega dx$$

Al aplicar el principio de Hamilton, se obtiene

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{1}{2} \int_0^l \{EI(\psi')^2 + k' AG(\omega' - \psi)^2\} dx - \frac{1}{2} \int_0^l (\rho A \dot{\omega}^2 + \rho I \dot{\psi}^2) dx - \int_0^l q\omega dx \right] dt = 0$$

Mediante el cálculo de la variación de esta expresión, se obtienen las ecuaciones diferenciales del eslabón, descritas por

$$\begin{aligned} -\{k' AG(\omega' - \psi)\}' + \rho A \ddot{\omega} &= q \\ -EI\psi'' - k' AG(\omega' - \psi) + \rho I \ddot{\psi} &= 0 \\ k' AG(\omega' - \psi) \delta\omega|_{0,l} &= 0 \\ EI\psi' \delta\omega|_{0,l} &= 0 \end{aligned}$$



# UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

## Apéndice D

### Medidor de Tensión Resistivo

Uno de los dispositivos que se utilizan para la medición de posición en un eslabón, es el medidor de tensión, denominado Strain Gage. En esa sección se presenta un análisis medidor de tensión resistivo, el cual está basado en [23]. Considere un conductor de área transversal uniforme  $A_T$  y longitud  $L$ , compuesto de un material con resistividad  $\rho$ . La resistencia  $R$  del conductor es dada por

$$R = \frac{\rho L}{A_T} \quad (D.1)$$

Si este conductor es sometido a compresión o tensión, su resistencia cambiará debido a los cambios dimensionales (longitud y área transversal). La resistencia también cambiará debido a la propiedad de materiales denominada *piezoresistencia*, que indica la dependencia de la resistividad  $\rho$  en las tensiones mecánicas.

Para encontrar como el cambio, denominado  $dR$ , en  $R$  depende de los parámetros básicos, se deriva la ecuación D.1, lo que resulta

$$dR = \frac{A_T(\rho dL + L d\rho) - \rho L dA_T}{A_T^2} \quad (D.2)$$

Como el volumen es dado por  $V = A_T L$ , al calcular su derivada se obtiene

$$dV = A_T dL + L dA_T$$

la cual es igual a

$$dV = L(1 + \epsilon)A_T(1 - \epsilon\nu)^2 - A_T L \quad (D.3)$$

donde  $\epsilon$  es la tensión unitaria y  $\nu$  es la razón de Poisson. Dado que  $\epsilon$  es pequeña, se puede hacer la siguiente aproximación

$$(1 - \epsilon\nu)^2 \approx 1 - 2\nu\epsilon$$

aplicando la ecuación anterior, D.3 resulta

$$dV = A_T L \epsilon (1 - 2\nu) = A_T dL + L dA_T$$

y como  $\epsilon = \frac{dL}{L}$ , entonces

$$dV = A_T dL (1 - 2\nu) = A_T dL + L dA_T$$

de donde

$$-2\nu A_T dL = L dA_T$$

Al sustituir este resultado en D.2, se obtiene

$$dR = \frac{\rho A_T dL + L A d\rho + 2\nu \rho A_T dL}{A_T^2}$$

y por lo tanto

$$dR = \frac{\rho dL(1 + 2\nu)}{A_T} + \frac{L d\rho}{A_T}$$

Al dividir esta ecuación sobre D.1, resulta

$$\frac{dR}{R} = \frac{dL}{L}(1 + 2\nu) + \frac{d\rho}{\rho}$$

Por lo que el factor de medición, denominado Gage Factor, está dado por

$$\frac{dR/R}{dL/L} = \underbrace{1}_{\text{Cambio en la resistencia debido al cambio de longitud}} + \underbrace{\frac{2\nu}{dL/L}}_{\text{Cambio en la resistencia debido al cambio en el área}} + \underbrace{\frac{d\rho/\rho}{dL/L}}_{\text{Cambio en la resistencia debido al efecto piezoresistivo}}$$

Entonces, si el factor de medición se conoce, la medición de  $dR/R$ , permite la medición de la tensión  $dL/L = \epsilon$ . Este es el principio de un medidor resistivo de tensión.

El término  $\frac{d\rho/\rho}{dL/L}$  también puede ser expresado como  $\pi_1 E$ , donde  $\pi_1$  es el coeficiente longitudinal piezoresistivo y  $E$  es el módulo de elasticidad. La propiedad del material  $\pi_1$  puede ser positivo o negativo. La razón de Poisson está siempre entre 0 y 0.5 para todos los materiales.

# Apéndice E

## Especificaciones del Robot Experimental

Las siguientes especificaciones fueron suministradas por el distribuidor.

Camera	EG&G Reticon Model 1911 KKN, 2048 pixel linear CCD. 13 micrometer per pixel at image end. Resolution when light source is 1 metre away: 0.014cm. (.036in.) per p
Camera/Encoder Board	Eight bit PC bus Quanser Consulting board. Camera scan rate: 3.5 MHz. Led Position sampling rate: 1682Khz. Maximum encoder pulse frequency: 1.75Mhz. Encoder counters: 16 bit.
Lens	Nikon 85mm F1.4
Motor and Encoder	Direct drive PMI permanent magnet DC motor. Peak Torque: 13.4 Nm (118 Lb-in). Stall Torque: 1.22 Nm (10.8 Lb-in) Continuous Stall Current: 7.52 Amps. Cogging Torque: ZERO. Torque Constant: 0.17Nm/Amp (1.5 Lb-in/Amp) Armature resistance: 0.73 Ohm. Encoder Resolution: 0.03 degrees per count
Flexible beam	Anodized aluminum. Width: 2.54cm. Thick: 0.3175 cm. Long: 91.4 cm
Amplifier Module	4 quadrant PWM current mode amplifier. Gain: 2 Amps per volt. Output Current: 10 Amps. 20 Amps peak. Bandwidth: 500 Hz. Deadband: ZERO. Self Protected.
A/D, D/A Board	Eight bit PC Bus Translation DT2811PGH board. 8 differential bipolar input 12 bit A/D. 2 bipolar output 12 bit D/A
Protection	Real time clock, 8 digital inputs, 8 digital outputs. Mechanical limit switches disable the amplifier. Current limiting built in amplifier. Compliant and latching hard stop.

## Apéndice F

### Programa para obtener el Controlador $H_\infty$

En este apéndice se muestra el listado del programa utilizado para obtener el controlador  $H_\infty$ . Al final se muestra el sistema que representa al controlador. %

```
% Programa para obtener controlador H INFINITO
% Modificado por Martha Aguilera.
% Copyright. All Rights Reserved.
%
clc
disp(' ')
disp(' ')
disp(' << #1: Robot Flexible >>')
disp(' ')
disp(' ')
disp(' ')
disp(' _____')
disp(' + / | H-inf | / | | Rob. |')
disp(' ->(X) - - - | Cont- | - - -> | ZOH | - - -> | | - - ->')
disp(' ^- Ts:0.01 | roller| Ts:0.01 | | | fle. | |')
disp(' | sec - - - - sec - - - - |')
disp(' | |')
disp(' | DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS |')
disp(' ')
disp(' ')
disp(' (Presione una tecla para Continuar ...)')
pause
format long e
ceros8 = [-30.6308+19.4495*i -30.6308-19.4495*i 29.9349+21.1595*i 29.9349-21.1595*i -
10.7968 11.1877]';
polos8 = [-0.9678+48.3716*i -0.9678-48.3716*i -.04323+21.611*i -.04323-21.611*i -
.1772+11.811*i -.1772-11.811*i 0 0]';
```

```

[num,den]=zp2tf(ceros8,polos8,1);
[a,b,c,d] = tf2ss(num,den);
clc
disp(' ')
disp(' ')
disp(' Lazo abierto del modelo del robot:')
num
den
disp(' Polos de la planta en lazo abierto:')
polog = roots(den)
disp('Ceros de la planta en lazo abierto ')
zerog=roots(num)
disp(' ')
disp(' ')
disp(' (Presione cualquier tecla para Continuar...)')
pause
clc
disp(' ')
disp(' ')
disp(' << Plano W >>')
disp(' ')
disp(' ')
disp(' Añadir a la planta un Z.O.H y convertirlo al ')
disp(' ')
disp(' plano W- ( periodo de muestreo: 0.01 seg) ....')
disp(' ')
disp(' ')
disp(' _____')
disp(' [az,bz] = c2d(a,b,0.01);
disp(' _____')
[az,bz] = c2d(a,b,0.01);
disp(' [ag,bg,cg,dg] = bilin(az,bz,c,d,-1,'Tustin',0.01);')
disp(' _____')
[ag,bg,cg,dg] = bilin(az,bz,c,d,-1,'Tustin',0.01);

```

```

disp(' ')
disp(' ')
disp(' (Presione cualquier tecla para Continuar...)' )
%pause
clc
disp(' ')
disp(' ')
disp(' --- Calculando la Grafica de Bode de la planta en lazo abierto (en s & w) ---')
w = logspace(-3,5,100);
svg = bode(a,b,c,d,1,w); svg = 20*log10(svg);
svw = bode(ag,bg,cg,dg,1,w); svw = 20*log10(sv);
disp(' ')
disp(' ')
disp(' ')
disp(' ')
disp(' (Presione cualquier tecla para ver la GRAFICA.)')
%pause
semilogx(w,svg,w,svw)
title('SISO Robot Flexible en Lazo Abierto (in s & w domain)')
xlabel('Frequency - Rad/Sec')
ylabel('SV - db')
text(150,-30,'Nyquist Freq.: 100pi')
grid
%pause
clc
%disp(' ')
%disp(' << Especificaciones de Diseño >> ')
%disp(' ')
%disp(' 1). Especific. de Robustez : ancho de banda – 30 r/s')
%disp(' Pesos asociados:')
%disp(' ')
%disp(' -1 50')
%disp(' W3(s) = ——')
%disp(' s')

```

```

%disp(' ')
%disp(' ')
%disp(' 2). Performance Spec.: sensitivity reduction of at least 100:1')
%disp(' up to approx. 1 r/s')
%disp(' Associated Weighting:')
%disp(' ')
%disp(' -1 -1 15s+1')
%disp(' W1(s) = Gam * _____')
%disp(' 10')
%disp(' ')
%disp(' donde "Gam" es de rango 1 -> 1.5')
nuw3i=[1 1];dnw3i=44.8*[1 0];
svw3i = bode(nuw3i,dnw3i,w); svw3i = 20*log10(sv3i);
nuw1i =[1 1/15]; dnw1i=1.1*[0 1/15];
svw1i = bode(nuw1i,dnw1i,w); svw1i = 20*log10(sv1i);
disp(' ')
disp(' ')
disp(' (Presione cualquier tecla para ver la grafica de los pesos ...)')
pause
semilogx(w,svw1i,w,svw3i)
grid
title('MIMO LSS Ejemplo de Diseño. Especificaciones de Diseño')
xlabel('Frequency - Rad/Sec')
ylabel('1/W1 & 1/W3 - db')
text(0.005,-20,'Sensitivity Spec.- 1/W1(s)')
text(100,0,'Robustness Spec.')
text(1000,-10,'1/W3(s)')
pause
clc
disp(' << FORMULACION DEL PROBLEMA >>')
disp(' ')
disp(' Formar una planta aumentada P(s) con las dis funciones de pesos:')
disp(' ')
disp(' 1). W1 que penaliza la señal de error "e"')

```

```

disp(' ')
disp(' 2). W3 que penaliza la salida de la planta "y")
disp(' ')
disp(' y encontrar un controlador estabilizador F(s) tal que la Hinf-norm')
disp(' de TF  $|T_y|$  es mínima y menor que uno, i.e.')
disp(' ')
disp('  $\min |T_y| < 1$ ,')
disp(' F(s) inf')
disp(' ')
disp(' donde ')
disp('  $| -1 |$ ')
disp('  $|T_y| = | \text{Gam} * W1 * (I + GF) | = | \text{Gam} * W1 * S |$ ')
disp('  $| -1 | | W3 * (I - S) |$ ')
disp('  $| W3 * GF * (I + GF) |$ ')
disp(' ')
disp(' ')
disp(' ')
disp(' (Presione cualquier tecla para Continuar...)'
%pause
%clc
disp(' ')
disp(' ')
disp(' << PROCEDIMIENTO DE DISEÑO >>')
disp(' ')
disp(' *****')
disp(' * [Step 1]. Realizar el aumento de la Planta (run AUGTFM or *)')
disp(' * AUGSS.M) *')
disp(' * *')
disp(' * [Step 2]. Balancear la planta aumentada para una mejor *')
disp(' * condicion numerica (run OBALREAL.M) *')
disp(' * *')
disp(' * [Step 3]. Realizar H-inf synthesis (run HINF.M) *')
disp(' * *')
disp(' * [Step 4]. Hacer de nuevo 1 y 2 *')

```

```

disp(' * para una nueva "Gam" -> 1.5 y correr HINFEM *')
disp(' *****')
disp(' ')
disp(' ')
disp(' (Presione cualquier tecla para Continuar..)')
%pause
%clc
disp(' ')
disp(' Introduzca el coeficiente de costo "Gam" -> 1 ')
disp(' ')
disp(' Este valor sirve de base para el diseño ....')
disp(' ')
disp(' _____')
disp(' % Aumento de la planta del actuador:')
disp(' [aw1,bw1,cw1,dw1]=tf2ss(Gam*dnw1i,nuw1i); sysw1=[aw1 bw1;cw1 dw1];')
disp(' [aw3,bw3,cw3,dw3]=tf2ss(dnw3i,nuw3i); sysw3=[aw3,bw3;cw3 dw3];')
disp(' sysw2 = []; sysg = [ag bg;cg dg]; dim = [8 1 0 1];')
disp(' [A,B1,B2,C1,C2,D11,D12,D21,D22]=augss(sydog,sysw1,sysw2,sysw3,dim);')
disp(' _____')
Gam = input(' Introduzca coeficiente "Gam" = ');
[aw1,bw1,cw1,dw1] = tf2ss(Gam*dnw1i,nuw1i); sysw1 = [aw1 bw1;cw1 dw1];
[aw3,bw3,cw3,dw3] = tf2ss(dnw3i,nuw3i); sysw3 = [aw3,bw3;cw3 dw3];
sysw2 = []; sysg = [ag bg;cg dg]; dim = [8 1 0 1];
[A,B1,B2,C1,C2,D11,D12,D21,D22] = augss(sysg,sysw1,sysw2,sysw3,dim);
disp(' ')
disp(' - - - El espacio de estado (A,B1,B2,C1,C2,D11,D12,D21,D22) esta listo para')
disp(' el problema de pequeña ganancia - - -')
disp(' ')
disp(' _____')
disp(' Balanceando la planta para mejor condicion numerica ')
disp(' ...')
disp(' ')
disp(' [aa,bb,cc,mm,tt] = obalreal(A,[B1 B2],[C1:C2]) % Balancing P(s)')
disp(' A = aa; B1 = bb(:,1); B2 = bb(:,2); C1 = cc(1:2,:); C2 = cc(3,:);')

```

```

disp(' _____')
[aa,bb,cc,mm,tt] = obalreal(A,[B1 B2],[C1;C2]);
A = aa; B1 = bb(:,1); B2 = bb(:,2); C1 = cc(1:2,:); C2 = cc(3,:);
disp(' ')
disp(' ')
disp(' (Presione cualquier tecla para Continuar..)')
%pause
%clc
disp(' ')
disp(' ')
disp(' _____')
disp(' hinf % Corriendo script file HINF.M ')
disp(' _____')
hinf
disp(' ')
disp(' ')
disp(' (Presione cualquier tecla para Continuar..)')
pause
pltopt % Preparing singular values for plotting
svwli1 = svwli; hsvs1 = svsv; hsvt1 = svst; hsvtt1 = svtt;
disp(' ')
disp(' ')
disp(' (Presione cualquier tecla para Continuar..)')
%pause
clc
disp(' ')
disp(' ')
disp(' ')
%disp(' After a few iterations, we found a new Gam of 1.5 can push the')
disp(' ')
%disp(' H-inf cost function close to its limit. ')
disp(' ')
disp(' ')
disp(' Introduzca "Gam" -> 1.5, y corra HINF de nuevo .....')

```

```

disp(' ')
disp(' ')
disp(' (Presione cualquier tecla para Continuar...)')
%pause
Gam = input(' Introduzca coeficiente de costo "Gam" = ');
[aw1,bw1,cw1,dw1] = tf2ss(Gam*dnw1i,nuw1i); sysw1 = [aw1 bw1;cw1 dw1];
[A,B1,B2,C1,C2,D11,D12,D21,D22] = augss(sysg,sysw1,sysw2,sysw3,dim);
[aa,bb,cc,mm,tt] = obalreal(A,[B1 B2],[C1;C2]);
A = aa; B1 = bb(:,1); B2 = bb(:,2); C1 = cc(1:2,:); C2 = cc(3,:);
disp(' ')
disp(' ')
disp(' (Presione cualquier tecla para Continuar...)')
pause
hinf
disp(' ')
disp(' ')
disp(' (Presione cualquier tecla para Continuar...)')
pause
pltopt
svw1i2 = svw1i; hsvs2 = svvs; hsvt2 = svt; hsvt2 = svtt;
disp(' ')
disp(' ')
disp(' (Presione una tecla para ver las graficas de comparación ...)')
pause
semilogx(w,svw1i1,w,hsvs1,w,svw1i2,w,hsvs2)
title('H-inf W-Plane Actuator Design - 1/W1 & Sensitivity Func.')
xlabel('Frequency - Rad/Sec')
ylabel('SV - db')
grid
text(0.002,10,'H-inf (Gam = 1) —> H-inf (Gam = 1.5)')
pause
semilogx(w,svw3i,w,hsvt1,w,hsvt2)
title('H-inf W-Plane Actuator Design - 1/W3 & Comp. Sens. Func.')
xlabel('Frequency - Rad/Sec')

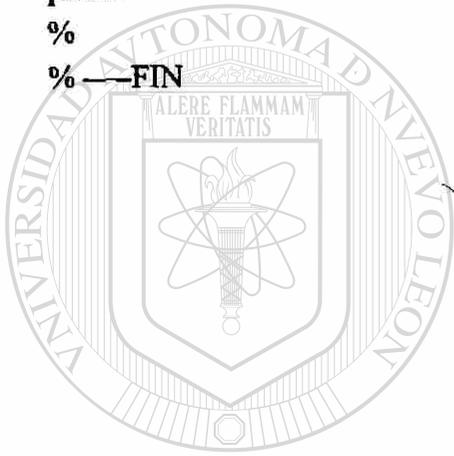
```

```

ylabel('SV - db')
grid
text(0.002,-30,'H-inf (Gam = 1) —> H-inf (Gam = 1.5)')
pause
semilogx(w,hsvt1,w,hsvt2)
title('H-inf W-Plane Actuator Design – Cost function Tylul')
xlabel('Frequency - Rad/Sec')
ylabel('SV - db')
grid
text(0.002,-10,'H-inf (Gam = 1) —> H-inf (Gam = 1.5)')
pause
clc
disp(' ')
disp(' ')
disp(' << H-inf Controller (Gam = 1.5) >>')
disp(' ')
disp(' Polos del Controlador :')
polecp = eig(acp)
disp(' ')
disp(' (Presione cualquier tecla para Continuar..)')
pause
clc
disp(' ')
disp(' Espacio de Estado para el controlador H-inf FINAL:')
disp(' ')
acp
disp(' (Presione cualquier tecla para Continuar..)')
pause
clc
bcp
disp(' (Presione cualquier tecla para Continuar..)')
pause
clc
ccp

```

```
dcp
disp(' (Presione cualquier tecla para Continuar..)')
pause
clc
disp(' ')
disp(' Polos en lazo cerrado TF matrix Tylul:')
poletyu = eig(acl)
disp(' (Presione cualquier tecla para Continuar..)')
pause
%
```



# UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

## Apéndice G

### Publicaciones

En este apéndice se anexan las copias de las siguientes publicaciones realizadas en diferentes congresos y revistas:

M. Aguilera, J. De León. *"Análisis Comparativo de Diferentes Controles Aplicados a un Robot Flexible en el Eslabón"*. Academia Tamaulipeca de Investigación Científica y Tecnológica. Cd. Victoria, Tam. Mayo, 1996.

M. Aguilera, J. De León. *"Diseño de Diferentes Controladores para un Robot Flexible en el Eslabón"*. XVIII Congreso Internacional Académico de Ingeniería Electrónica. Chih.Oct. 1996.

M. Aguilera, J. De León. *"Estudio Comparativo de Diferentes Controles Aplicados a un Robot Flexible en el Eslabón"*. Segunda Conferencia de Ingeniería Eléctrica. CINVESTAV,México. Sept.1996.

M. Aguilera, J. De León. *"Diseño de Diferentes Controladores para un Robot Flexible en el Eslabón"*. Revista SIGMA, Ejemplar 1, 1998. I.T. Nvo. Laredo.

---

M. Aguilera, J. De León. *"Experimental Evaluation of Infinite Model Based Controllers for a Flexible Link Robot"*. Aceptado para publicación en el "International Symposium on Robotics and Automation 98". Saltillo Coah., México. Diciembre de 1998.

M. Aguilera, J. De León. *"Experimental Study of Finite and Infinite Model Based Controllers for a Flexible Link Robot"*. Aceptado para publicación en "Modelling, Identification and Control MIC 99". Innsbruck Austria. Febrero de 1999.

# ANALISIS COMPARATIVO DE DIFERENTES CONTROLES APLICADOS A UN ROBOT FLEXIBLE EN EL ESLABON

Martha I. Aguilera Hernández.  
Instituto Tecnológico de Nvo. Laredo  
Doctorado en Ingeniería Eléctrica  
FIME, Universidad Autónoma de Nvo. León  
Apdo. Postal 137-F  
E-mail:ad917911@gama.fime.uanl.mx  
San Nicolás de los Garza N.L. 66451  
MEXICO

**Abstracto:** Tres tipos de control son aplicados a un robot flexible en el eslabón, para comparar su comportamiento y versatilidad. Los resultados obtenidos se muestran en forma gráfica y se analizan las diferentes posibilidades de cada controlador.

## I. INTRODUCCION

En la actualidad, los robots flexibles tienen una gran importancia dentro del ámbito de la robótica. Como ejemplos, podemos mencionar los brazos largos que se requieren para acceder lugares hostiles como sitios nucleares, espacio, sitios con sustancias químicas, y en el area industrial como robots diseñados con materiales ligeros apropiados para el manejo de herramientas y ensamble, etc.

Recientemente, la aparición de nuevos materiales y el diseño de estructuras robóticas más ligeras y/o largas, ha dado lugar al desarrollo de estrategias de control que minimicen los fenómenos elásticos inclusive en la presencia de perturbaciones.

Con el fin de resolver los problemas de control asociados a estas estructuras, se tienen disponibles diferentes metodologías para diseñar leyes de control, en base a: Modelo de parámetros distribuidos de brazos flexibles (Tarn, Bejcky,1988), Modelo discreto en tiempo y en el espacio (Rattan,Feliu,1992) y un Modelo discreto en el espacio y continuo en el tiempo. Dentro de este último podemos encontrar el análisis Modal (Siciliano, W.J.Book,1988) y el esquema de elemento finito (Chedmail,Michel,1992).

En este artículo, se deriva un modelo matemático de un robot flexible en el eslabón de un grado de libertad, que considera los parámetros físicos del sistema. Se utiliza la teoría Euler-Bernoulli de la barra. Partiendo de un modelo discreto en el espacio y continuo en el tiempo, mediante la técnica de análisis modal, se obtiene un modelo dimensional finito para propósitos de simulación y diseño del control.

Asimismo se muestra un estudio comparativo de estrategias de control, las cuales son aplicadas al robot flexible. Se consideran tres tipos de controladores: el Proporcional-Derivativo (PD), el Linear Quadratic Regulator (LQR) y el de Perturbaciones Singulares (PS). Los tres fueron aplicados al equipo de Robot flexible que consiste de una barra de

aluminio fija en uno de sus extremos a un motor de CD. Montada sobre el motor se encuentra una cámara con resolución de .014 cm/pixel. En el otro extremo de la barra, en la punta, se encuentra un led. La cámara detecta la posición del led y de esta manera se determina la deflexión del elemento terminal. Una interfase entre el equipo del robot y una computadora PC es utilizada para la retroalimentación de datos y control. El modelo y el control es implementado en lenguaje de programación C. Los resultados experimentales obtenidos se muestran en forma gráfica.

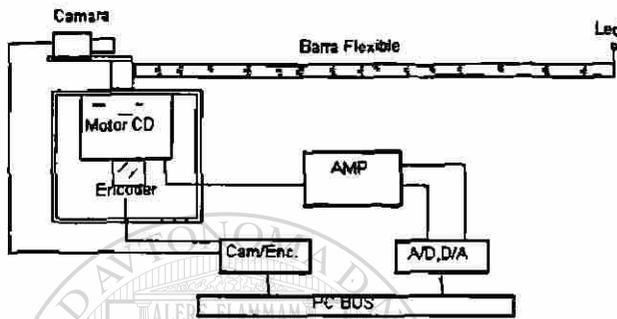


Fig. 1: Robot Flexible Experimental

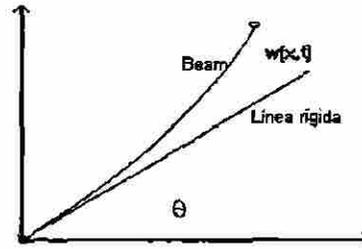


Fig. 2. Marco de referencia

El artículo está organizado de la siguiente manera: La sección I da al introducción. En la sección II, se muestra la derivación del modelo matemático del robot flexible. En la sección III, se muestra el controlador PD, el controlador LQR y el controlador de Perturbaciones Singulares. Finalmente, se muestran las conclusiones del artículo.

## II.- MODELO MATEMATICO MODELADO DE UN BRAZO FLEXIBLE EN EL ESLABON

Para el modelado, se utilizó las ecuaciones de Euler-Bernoulli para una barra. Los términos de segundo y alto grado en las variables de deformación son despreciables. Las hipótesis en las que se basa son: h1) El brazo es una barra con características geométricas uniformes y una distribución de masa uniforme, h2) El brazo es flexible en la dirección lateral, solo las deformaciones elásticas están presentes. h3) Las deformaciones no lineales así como la fricción interna u otras perturbaciones externas son efectos despreciables. Los parámetros de interés son: La densidad lineal ( $\rho$ ), Flexural rigidity ( $EI$ ) y la Longitud del brazo ( $l$ ).

La posición absoluta de un punto a lo largo de la barra (fig. 2) está descrita por:

$$P_x = x \cos \theta_t - w(x, t) \sin \theta_t$$

$$P_y = x \sin \theta_t + w(x, t) \cos \theta_t$$

donde  $w(x, t)$  es la deflexión de la barra con respecto al eje neutral.

Además, dado que la barra está sujeta a la base, se tienen las siguientes condiciones geométricas de frontera  $w(0, t) = w'(0, t) = 0$ .

La energía cinética está dada por:  $T = T_h + T_l$ . Del eje:  $T_h = \frac{1}{2} I_h \dot{\theta}(t)$  y del brazo

donde:  $k$ =Matriz de rigidez ( $n_e \times n_e$ ),  $D$ = amortiguamiento estructural del eslabón. (puede ser calculado en base a la matriz de rigidez o experimentalmente)

## CONTROLADORES

### Controlador PD

Se utiliza la ley de control  $\tau = k_p(\theta_d - \theta) + k_v(\dot{\theta}_d - \dot{\theta})$ . En los resultados experimentales, podemos observar severas oscilaciones cuando el robot se posiciona en el punto deseado. Una extensión de este controlador a un robot de dos eslabones flexibles, puede hacerse únicamente considerando eslabones independientes.

### Controlador LQR

El torque está definido por  $\tau = -k_v(\dot{\theta} - \dot{\theta}_d) - k_p(\theta - \theta_d)$ , donde  $k_v, k_p$  son matrices de ganancia obtenidas por el método LQR. Este método asegura márgenes de ganancia y de fase adecuados. La ventaja de este controlador con respecto al PD es que permanece insensible a perturbaciones externas. Para una extensión a un robot flexible de dos eslabones, el modelo linealizado, depende de la configuración del robot.

### Controlador PS

Este método separa al sistema en dos subsistemas denominados sistema "lento" y sistema "rápido". Se reescribe el sistema como

$$\dot{x}_1 = F(x_1, x_2, u, t, \varepsilon)$$

$$\varepsilon \dot{x}_2 = G(x_1, x_2, u, t, \varepsilon)$$

donde  $x_1$  es la variable lenta y  $x_2$  es la variable rápida.

$$x_1 = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad x_2 = \begin{bmatrix} z \\ \varepsilon z \end{bmatrix} \quad z = k\theta_e$$

donde  $\theta_e$  es medida en el proceso.

El torque viene dado por  $\tau = 5.254(\ddot{\theta}_d - k_v(\dot{\theta} - \dot{\theta}_d)) + .346D + .1324\dot{D} - .3221\theta_B - 2134\dot{\theta}_B$

La principal ventaja de este método es que minimiza los cálculos en línea y permite su extensión al caso multieslabones.

## EXPERIMENTO

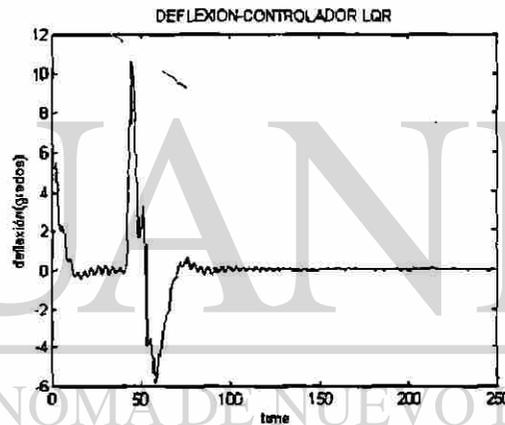
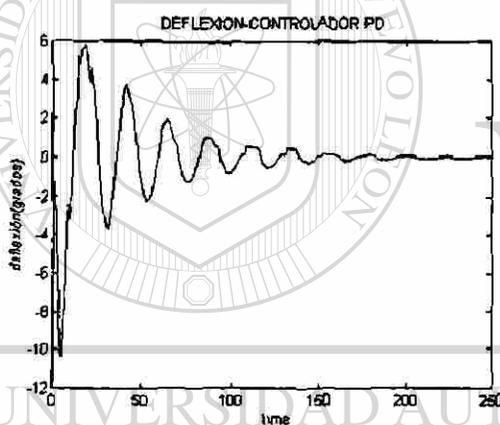
Consiste en realizar movimientos del robot flexible (fig. 1) a  $\pm n$  grados con respecto al origen (en este caso el centro, considerando ahí la referencia 0 grados). Es decir, la

estructura recorre en total  $2n$  grados. En las gráficas mostradas se utilizó  $n = 20$ . Esto ha permitido calcular también repetibilidad y exactitud. Donde estos últimos son parámetros de interés en el estado presente de la investigación.

### PARAMETROS DEL SISTEMA

Inercia de Cámara (Incluyendo Inercia del Motor)	.002 Kgm <sup>2</sup>
Longitud del eslabón	91.4 cm
Altura del eslabón	2.54 cm
Ancho del eslabón	.3175cm
Masa del eslabón	.06 Kg
Inercia del cuerpo rígido del eslabón	.0042 Kgm <sup>2</sup>

### RESULTADOS EXPERIMENTALES



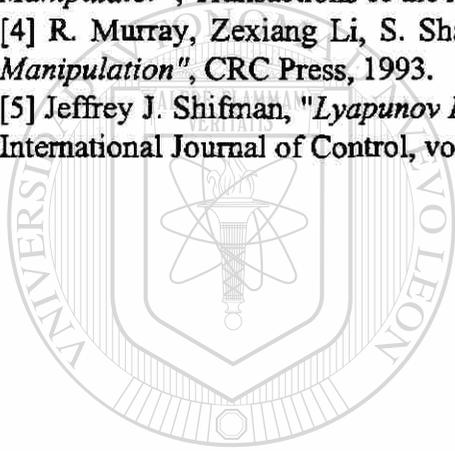
### CONCLUSIONES

En el estado presente, se han analizado 3 controladores, de los cuales el que ha mostrado mejor comportamiento es el de perturbaciones singulares. Se pretende obtener un estudio completo de 2 controladores mas, que son, el de Modos Deslizantes e implementación de

Control Adaptivo. Además de obtener un modelo del robot flexible sin hacer una aproximación finita.

### Referencias

- [1] F.L.Hu, A.G.Ulsoy, " *Dynamic Modeling of Constrained Flexible Robots arms for Controller Design*", Transactions of the ASME, vol 116, pp 56-65, 1994.
- [2] B.V. Chapnik, G.R. Heppler, and J.D. Aplevich, "*Modeling Impact on a One-Link Flexible Robotic Arm*", IEEE Transactions on Robotics and Automation, vol 7, pp 479-488, 1991.
- [3] Ahmet S. Yigit, "*On the stability of PD Control for a two-link Rigid-Flexible Manipulator*", Transactions of the ASME, vol 116, pp 208- 215, 1994
- [4] R. Murray, Zexiang Li, S. Shankar Sastry, "*A mathematical Introduction to Robotic Manipulation*", CRC Press, 1993.
- [5] Jeffrey J. Shifman, "*Lyapunov Functions and the control of the Euler-Bernoulli Beam*", International Journal of Control, vol 57, pp971-990, 1993.



# UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

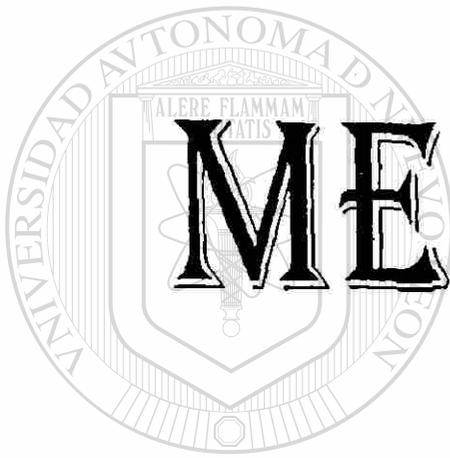


DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

VOLUMEN XVIII

ISSN 1405-2172

XVIII CONGRESO INTERNACIONAL ACADEMICO DE  
INGENIERIA ELECTRONICA



MEMORIA

UANL

ELECTRO '96®

**INSTITUTO TECNOLOGICO DE CHIHUAHUA**  
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACION  
21-25 OCTUBRE 1996

## DISEÑO DE DIFERENTES CONTROLADORES PARA UN ROBOT FLEXIBLE EN EL ESLABON

Martha I. Aguilera Hernández

Jesús de León Morales

Programá Doctoral en Ingeniería Eléctrica  
FIME, Universidad Autónoma de Nvo. León  
Instituto Tecnológico de Nvo. Laredo  
Apdo. Postal 137-F  
San Nicolás de los Garza N.L. 66451, México  
E-mail: ad917911@gama.fime.uanl.mx

**RESUMEN:** *En este artículo se presenta el diseño y experimentación de controladores para un robot flexible en el eslabón de un grado de libertad. Se utiliza la técnica de análisis modal para obtener un modelo dimensional finito que nos permite realizar simulación y diseño del control. Un análisis del comportamiento de los controladores es mostrado y los resultados obtenidos se muestran en forma gráfica.*

### I. INTRODUCCION

En los últimos años se han desarrollado nuevos materiales con la finalidad de obtener incremento de rigidez (inflexibilidad), dureza, fuerza (resistencia a impactos), estabilidad dimensional, resistencia a la corrosión, reducción de deflexión debido a la temperatura, permeabilidad a gases y líquidos, absorción de agua, costos y energía, modificación de propiedades eléctricas, etc.

Estos nuevos materiales han surgido debido al desarrollo de aplicaciones especiales en la industria en general y en el espacio donde se presenta la necesidad de estructuras más ligeras, largas o resistentes en ambientes no convencionales. Como ejemplos, podemos mencionar los brazos largos que se requieren para acceder lugares hostiles como sitios nucleares, espacio, sitios con sustancias químicas, y en el área industrial como robots diseñados con materiales ligeros apropiados para el manejo de herramientas y ensamble, pintado, soldado, etc. La necesidad de controlar estas estructuras en estos ambientes se ha presentado como una función inherente en el desarrollo de las diferentes aplicaciones

Se sabe que si una estructura flexible es controlada colocando un sensor exactamente en el actuador que va a controlar, entonces se obtiene una operación estable. En forma contraria, si se tiene en uno de los extremos de la estructura el actuador y en el otro extremo el sensor, el problema de obtener estabilidad se complica [9,10].

Varios estudios con respecto al control de estas estructuras se han realizado y experimentado (Cannon & Schmitz, 1984, Qian & Ma, 1992) El enfoque es aplicar torque de control a un extremo del robot. Este control se basa en un sensor fijo en el otro extremo (en la punta). Pero una tecnología para utilizar sensores y actuadores en los extremos no se ha desarrollado en su totalidad. Los robots industriales requerirán de este tipo de control, debido a la necesidad de ser más ligeros para obtener una respuesta rápida con poca energía y una gran precisión en la posición del elemento terminal.

Para contribuir experimentalmente en el desarrollo de esta tecnología, el presente artículo muestra el diseño de controladores para un robot con flexibilidad en el eslabón de un grado de libertad (RFE). Se tienen disponibles diferentes metodologías para diseñar leyes de control, en base a: Modelo de parámetros distribuidos de brazos flexibles (Tarn, Bejcky, 1988), Modelo discreto en tiempo y en el espacio (Rattan, Felin, 1992) y un Modelo discreto en el espacio y continuo en el tiempo. Dentro de este último podemos encontrar el análisis Modal (Siciliano, WJ Book, 1988) y el esquema de elemento finito (Chedmail, Michel, 1992)

En este artículo, se deriva un modelo matemático para el RFE que considera los parámetros físicos

del sistema. Se utiliza la teoría Euler-Bernoulli de la barra. Partiendo de un modelo discreto en el espacio y continuo en el tiempo, mediante la técnica de análisis modal, se obtiene un modelo dimensional finito para propósitos de simulación y diseño del control.

Se consideran tres tipos de controladores: el Proporcional-Derivativo (PD), el Linear Quadratic Regulator (LQR) y el de Perturbaciones Singulares (PS). Los tres fueron aplicados al equipo de Robot flexible que es descrito en la sección III. Los resultados experimentales obtenidos se muestran en forma gráfica.

El artículo está organizado de la siguiente manera. La sección I da la introducción. En la sección II, se presenta la derivación del modelo matemático del robot flexible. En la sección III, los controladores PD, LQR y Perturbaciones Singulares así como el experimento práctico son mostrados. Finalmente, se tienen las conclusiones del artículo.

**II.- MODELO MATEMATICO MODELADO DE UN BRAZO FLEXIBLE EN EL ESLABON**

Para el modelado, se utilizó las ecuaciones de Euler-Bernoulli para una barra. Los términos de segundo y alto grado en las variables de deformación son despreciables. Las hipótesis en las que se basa son: h1) El brazo es una barra con características geométricas uniformes y una distribución de masa uniforme, h2) El brazo es flexible en la dirección lateral, solo las deformaciones elásticas están presentes h3) Las deformaciones no lineales así como la fricción interna u otras perturbaciones externas son efectos despreciables. Los parámetros de interés son: La densidad lineal ( $\rho$ ), Flexural rigidity ( $EI$ ), la inercia del eje ( $I_h$ ) y la longitud del brazo ( $l$ ).

La posición absoluta de un punto a lo largo de la barra (figura 1) está descrita por

$$P = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos(\theta(t)) - w(x,t) \sin(\theta(t)) \\ x \sin(\theta(t)) + w(x,t) \cos(\theta(t)) \end{pmatrix}$$

donde  $w(x,t) =$  Deflexión de la barra con respecto al eje neutral

- $t =$  Variable en el tiempo
- $x =$  Coordenada a través del eje neutral de la barra

$\theta(t) =$  Angulo de rotación del eje

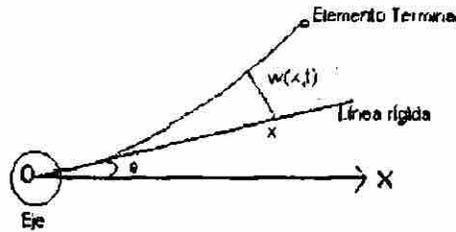


Fig. 1. Marco de referencia

NOTA: En las siguientes ecuaciones una coma en la parte superior representan diferenciación respecto a  $x$ , y un punto representa la diferenciación con respecto al tiempo.

Además, dado que la barra está sujeta a la base, se tienen las siguientes condiciones geométricas de frontera  $w(0,t) = w'(0,t) = 0$ .

La energía cinética está dada por:  $T = T_h + T_b$

Del eje,  $T_h = \frac{1}{2} I_h \dot{\theta}(t)$  y del brazo

$$T_b = \frac{1}{2} \rho \int_0^l (\dot{p}_x^2 + \dot{p}_y^2) dx = \frac{1}{2} \rho \int_0^l (x^2 \dot{\theta}(t)^2 + w^2(x,t) \dot{\theta}(t)^2 + \dot{w}^2(x,t) + 2x \dot{\theta}(t) \dot{w}(x,t)) dx$$

La energía potencial:

$$U = \frac{1}{2} EI \int_0^l (w''(x,t))^2 dx$$

Las ecuaciones del sistema son obtenidas de la condición variacional

$$\int_0^l (\delta T(t) - \delta U(t) + \delta W(t)) dt = 0,$$

donde  $\delta W(t) = u(t) \delta \theta(t)$  es el trabajo virtual realizado por el torque

El modelo dinámico del robot flexible en el eslabón está dado por

$$\sum_{m=0}^{\infty} \begin{cases} I_h \ddot{\theta}(t) + \rho \int_0^l x \ddot{w}(x,t) dx - u(t) \\ EI w''''(x,t) + \rho \ddot{w}(x,t) + j \ddot{\theta}(t) = 0 \\ w(0,t) = w'(0,t) = 0 \\ \dot{w}''(l,t) = \dot{w}'''(l,t) = 0 \end{cases}$$

donde  $j = I_h + \rho l^3 / 3$ . La primera ecuación puede ser atribuida a la dinámica del eje, mientras que la



estrategias para su efectividad, por ejemplo el control utilizando un modelo rígido-flexible. En este trabajo se implementó la ley de control  $\tau = k_p(\theta_d - \theta) + k_v(\dot{\theta}_d - \dot{\theta})$ . Los valores de  $k_p = 1.35$  y  $k_v = 28$  fueron obtenidos de la mejor sintonización del controlador en su respuesta en el tiempo. En los resultados experimentales (figuras 3a, 3b), podemos observar severas oscilaciones cuando el robot se posiciona en el punto deseado. Una extensión de este controlador a un robot de dos eslabones flexibles, puede hacerse únicamente considerando eslabones independientes

**Controlador LQR**

Para aplicar este método se linealizó el modelo aproximado del robot alrededor del punto de equilibrio  $\theta_e = 0$ . La ley de control aplicada está definida por

$$\tau = k_p(\theta - \theta_d) + k_v(\dot{\theta} - \dot{\theta}_d) + \beta_p(p - p_{-1}) + \beta_v(\dot{p} - \dot{p}_{-1})$$

donde  $p_{-1}, \dot{p}_{-1}$  es la posición del elemento terminal (que es actualizada en tiempo real) y  $k_p, k_v, \beta_p, \beta_v$  son matrices de ganancia obtenidas por el criterio de optimización LQR [12].

$$J = \int_0^{\infty} (e^T Q_1 e + \dot{e}^T Q_2 \dot{e} + u^T R u) dt$$

donde  $e = \theta - \theta_d$ ,  $Q_1, Q_2$  son semidefinidas positivas y  $R$  es definida positiva. Utilizando matlab los valores obtenidos fueron

$$k_p = 1.38, k_v = 32, \beta_p = -1, \beta_v = 07$$

Este método asegura márgenes de ganancia y de fase adecuados. La ventaja de este controlador con respecto al PD es que permanece insensible a perturbaciones externas. Las figuras 4a y 4b muestran la respuesta de este controlador. Se aprecia una mejora notable con respecto al controlador PD. Para una extensión a un robot flexible de dos eslabones, el modelo linealizado, depende de la configuración del robot

**Controlador Utilizando el Método de Perturbaciones Singulares**

Este método se basa en la separación del sistema en dos subsistemas, el cual uno se considera "lento" mientras que el otro se considera "rápido". Las variables de estado "rápidas" son las fuerzas

elásticas y sus derivadas en el tiempo. Un sistema de este tipo es una herramienta para reducir el orden del sistema (los robots flexibles pertenecen al conjunto de sistemas que tienen menor número de entradas de control que el número de variables controlables). Los dos sistemas identificados son:

- a) Un subsistema "lento" que es del mismo orden que del manipulador rígido
- b) Un subsistema "rápido" en donde las variables de estado lentas juegan el rol de parámetros

El control para el sistema lento puede ser diseñado por los esquemas conocidos para los robots rígidos.

Usando el procedimiento dado en [7]. El sistema del robot puede representarse

$$\dot{x} = f(t, x, z, u, \varepsilon)$$

$$\varepsilon \dot{z} = g(t, x, z, u, \varepsilon)$$

donde  $x$  es la variable lenta (variables rígidas),  $z$  es el control (torque),  $z$  es la variable rápida (variables elásticas) y

$$x = \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \varepsilon \dot{z}_1 \end{pmatrix}$$

Para obtener el modelo reducido, tomamos  $\varepsilon = 0$  y obtenemos el modelo lento de la forma

$$\dot{x} = f(t, x, z, u, 0)$$

$$0 = g(t, x, z, u, 0)$$

Para el subsistema rápido, con  $\tau = 1/\varepsilon$ , obtenemos

$$\dot{x} = \varepsilon f(x, z_f(\tau) + z, u_f(\tau) + u, \varepsilon)$$

$$\dot{z}_f = g(x, z_f(\tau) + z, u_f(\tau) + u, \varepsilon)$$

El control para el subsistema lento se obtuvo de un control lineal como el desarrollado en [11], dado por

$$u = \gamma[\dot{\theta}_d + k_v(\dot{\theta}_d - \dot{\theta}) + k_p(\theta_d - \theta)]$$

donde  $k_p, k_v$  son seleccionadas para mantener la separación en la escala de tiempo entre los subsistemas lento y rápido,  $\gamma$  es una constante dependiente de la matriz de Inercia. Los valores obtenidos fueron:  $k_p = 1.5, k_v = 56$ .

Para el control del subsistema rápido se tiene  $u_f = k_{p_f}(x)z_f + k_{v_f}(x)\dot{z}_f$ . Se utilizó la técnica de fijación de polos de sistemas lineales para obtener los valores de  $k_{p_f}, k_{v_f}$ . Los valores obtenidos fueron  $k_{p_f} = -1.56, k_{v_f} = 12$ .

La ley de control implementada en la experimentación está dada por:

$$u = 42[\dot{\theta}_d + 56(\dot{\theta}_d - \dot{\theta}) + 1.5(\theta_d - \theta)] - 1.56\dot{p}_{-1} + 12p_{-1}$$

Entre las ventajas de este método se puede constatar la reducción del orden del modelo que permite resolver el problema de sistemas que tienen menor número de entradas de control que el número de variables controlables, la minimización de los cálculos en línea además de permitir su extensión al caso multieslabones.

Ancho del eslabón	3175cm
Masa del eslabón	06 Kg
Inercia del cuerpo rígido del eslabón	0042 Kg <sup>m</sup> 2

**RESULTADOS EXPERIMENTALES**

**EXPERIMENTO**

El equipo del robot flexible en el eslabón con un grado de libertad es mostrado en la figura 2, consiste de una barra de aluminio fija en uno de sus extremos a un motor de CD. Montada sobre el motor se encuentra una cámara con resolución de 014 cm/pixel. En el otro extremo de la barra, en la punta, se encuentra un led. La cámara detecta la posición del led y de esta manera se determina la deflexión del elemento terminal. Una interfase entre el equipo del robot y una computadora PC es utilizada para la retroalimentación de datos y control. El modelo y el control es implementado en lenguaje de programación C.

El experimento consiste en realizar movimientos del robot flexible a  $\pm n$  grados con respecto al origen (en este caso el centro, considerando ahí la referencia 0 grados). Es decir, la estructura recorre en total  $2n$  grados. En las gráficas mostradas se utilizó  $n = 20$ . Esto ha permitido calcular también repetibilidad y exactitud. Donde estos últimos son parámetros de interés en el estado presente de la investigación.

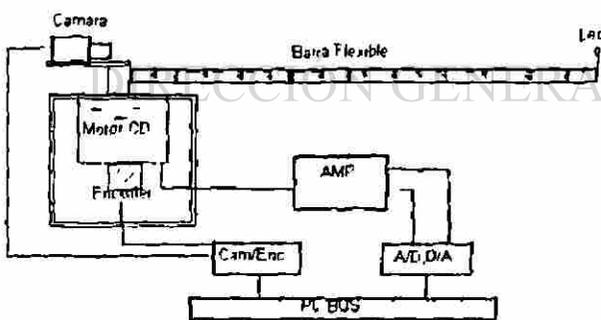


Fig 2: Robot Flexible Experimental

**PARAMETROS DEL SISTEMA**

Inercia de Cámara (Incluyendo Inercia del Motor)	002 Kg <sup>m</sup> 2
Longitud del eslabón	91.4 cm
Altura del eslabón	2.54 cm

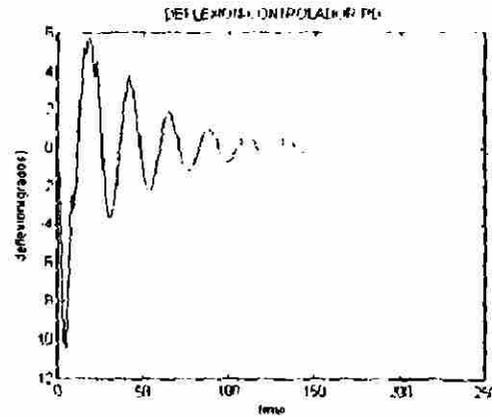


Fig 3a: Controlador PD

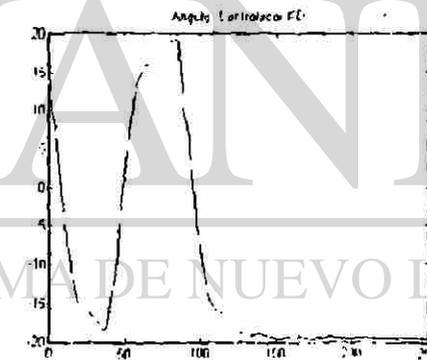


Fig 3b Controlador PI

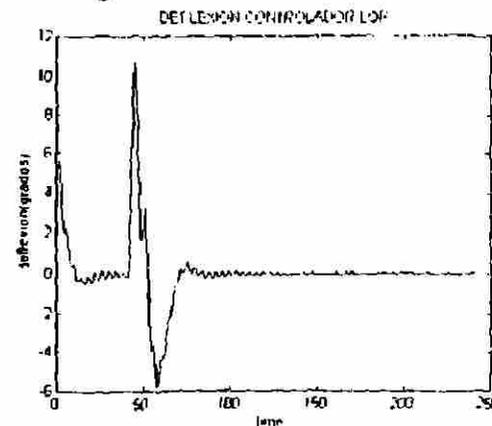


Fig 4a Controlador LQR

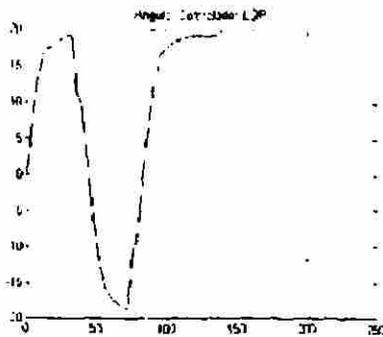


Fig. 4b. Controlador LQR

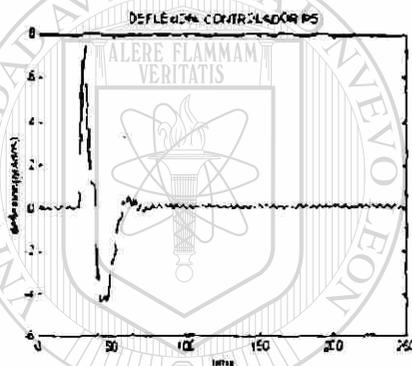


Fig. 5 Controlador PS

### CONCLUSIONES

En este trabajo se presentaron tres tipos de controladores. Los que presentan mejor comportamiento son el LQR y el de perturbaciones singulares. Como trabajo futuro se pretende trabajar con un modelo infinito del robot flexible agregando los controladores de Modos Deslizantes y Adaptivo. De esta manera obtener un estudio más completo tanto de análisis como de experimentación de este tipo de estructuras flexibles.

### Referencias

[1] F. H. A. G. Ulsoy, "Dynamic Modeling of Constrained Flexible Robots arms for Controller Design", Transactions of the ASME, vol 116, pp 56-65, 1994  
 [2] B.V. Chapnik, G.R. Heppler, and J.D. Aplevich, "Modeling Impact on a One-Link

Flexible Robotic Arm", IEEE Transactions on Robotics and Automation, vol 7, pp 479-488, 1991.

[3] Ahmet S. Yigit, "On the stability of PD Control for a two-link Rigid-Flexible Manipulator", Transactions of the ASME, vol 116, pp 208-215, 1994

[4] R. Murray, Zexiang Li, S. Shankar Sastry, "A mathematical Introduction to Robotic Manipulation", CRC Press, 1993

[5] Jeffrey J. Shifman, "Lyapunov Functions and the control of the Euler-Bernoulli beam", International Journal of Control, vol 57, pp971-990, 1993.

[6] Jacobs, Kilduff, "Engineering Materials Technology", Prentice Hall Inc., 1985

[7] Khalil H., "Nonlinear Systems", Second Edition, Prentice Hall, 1996

[8] Chalhoub N., Ulsoy A., "Control of a Flexible Robot Arm: Experimental and Theoretical Results", Journal of Dynamics Systems, Measurement and Control, Vol. 109, pp. 299-309, Dec. 1987

[9] Cannon R., Schmitz E., "Initial Experiments on the End-Point Control of a flexible One-Link Robot", The International Journal of Robotics Research, Vol 3, No.3, pp. 62-75, Fall 1984

[10] Qian W., Ma H., "A New Controller Design for a Flexible One-Link Manipulator", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol 37, No 1, January 1992.

[11] Siciliano B., Book W "A singular perturbation approach to control of Lightweight Flexible Manipulator", The International Journal of Robotics Research, Vol 7, No. 4, pp 79-90, 1988

[12] Aoustin, Chevareau, Glumineau, Moong, "Experimental Results for the End-Effector Control of a single Flexible Robotic Arm", IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol2, No 4, Dec 1994.



## SEGUNDA CONFERENCIA DE INGENIERIA ELÉCTRICA

**CIE/96**

Septiembre 11-13, 1996

México, D.F.



Julio 10, 1996

CIE/96/015

Ref:10

**MARTHA I. AGUILERA HERNANDEZ**

UANL

Ciudad Universitaria

C.P 66450 Nuevo León, México

Estimado Colega:

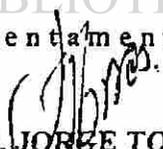
Por medio de la presente, me es grato comunicarle que después de haber revisado su trabajo titulado: "Estudio Comparativo de Diferentes Controles Aplicados a Un Robot Flexible en el Eslabón" ha sido aceptado para su participación en el **CIE/96**, siempre y cuando se realicen las modificaciones sugeridas por los revisores, mismas que le anexamos.

Por otro lado, le informo que la fecha límite para la entrega del resumen corregido y del artículo en extenso, de acuerdo a las instrucciones anexas, es para el 19 de agosto próximo.

Asimismo, mucho le agradecería confirmar la recepción de este documento por correo electrónico, fax o directamente con la Sra. Leticia Gutiérrez.

Sin más por el momento, aprovecho la ocasión para enviarle un cordial saludo.

Atentamente,

  
**DR. JORGE TORRES**  
PRESIDENTE DEL COMITE DEL  
PROGRAMA **CIE/96**

c.c.p.- Dr. René Asomoza.-Coordinador del **CIE/96**

Comité Organizador **CIE/96**

At'n.: Dr. René Asomoza / Sra. Leticia Gutiérrez

Depto. de Ingeniería Eléctrica, CINVESTAV-IPN

Av. Instituto Politécnico Nacional 2508, 07300 México, D.F. MEXICO.

Tel.: 747-70-00 ext. 3105, Fax: 747-7114, e-mail: cie96@mvax1.red.cinvestav.mx

JT/lg

Segunda  
conferencia  
de

# Ingeniería

# eléctrica

cie  
96

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Programa  
y  
Resúmenes

11-13 de septiembre de 1996  
México, D. F.

# Estudio Comparativo De Diferentes Controles Aplicados A Un Robot Flexible En El Eslabón

**Martha L. Aguilera Hernández**  
Univ. Autónoma de Nuevo León  
Instituto Tecnológico de Nuevo Laredo  
Apdo. Postal 137-F. Cd. Universitaria  
E-mail: ad917911@gama.fime.uanl.mx  
San Nicolás de los Garza N.L. 66451  
MEXICO

**Jesús de León Morales**  
Univ. Autónoma de Nuevo León  
Doctorado en Ingeniería Eléctrica  
Apdo. Postal: 148-F. Cd. Universitaria  
E-mail: jleon@ocr.dsi.uanl.mx  
San Nicolás de los Garza N.L. 66451  
MEXICO

**Palabras Claves:** Flexibilidad en el eslabón, deflexión

## RESUMEN

Recientemente, la aparición de nuevos materiales y el diseño de estructuras robóticas más ligeras y/o largas, ha fomentado la investigación en una variedad de problemas técnicos tales como: sistemas sensoriales avanzados, combinaciones de fuerza y movimiento y efectos de flexibilidad en la unión y en el eslabón. Este último ha dado lugar al desarrollo de estrategias de control que minimicen los fenómenos de flexibilidad (tales como desplazamientos elásticos), inclusive en la presencia de perturbaciones.

Con el fin de resolver los problemas de control asociados a estas estructuras, se tienen disponibles diferentes metodologías para diseñar leyes de control, en base a: Modelo de parámetros distribuidos de brazos flexibles (Tarn, Bejcky, 1988), Modelo discreto en tiempo y en el espacio (Rattan, Feliu, 1992) y un Modelo discreto en el espacio y continuo en el tiempo. Dentro de este último podemos encontrar el análisis Modal (Siciliano, W.J. Book, 1988) y el esquema de elemento finito (Chedmail, Michel, 1992).

En este artículo, se deriva un modelo matemático de un robot flexible en el eslabón de un grado de libertad, que considera los parámetros físicos del sistema. Se utiliza la teoría Euler-Bernoulli de la barra. Partiendo de un modelo discreto en el espacio y continuo en el tiempo, mediante la técnica de análisis modal, se obtiene un modelo dimensional finito para propósitos de simulación y diseño del control.

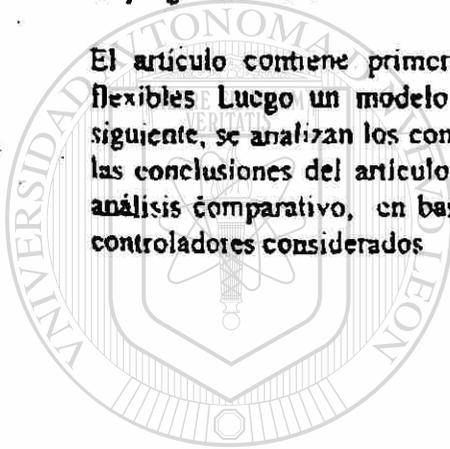


El artículo muestra un estudio comparativo de estrategias de control, las cuales son aplicadas al robot flexible. Resultados en simulación así como experimentales son presentados con el fin de analizar los datos obtenidos

Se consideran tres tipos de controladores: el Proporcional-Derivativo (PD), el Linear Quadratic Regulator (LQR) y el de Perturbaciones Singulares (PS). Los tres fueron aplicados al equipo de Robot flexible que consiste de una barra de aluminio fija en uno de sus extremos a un motor de CD. Montada sobre el motor se encuentra una cámara con resolución de 014 cm/pixel. En el otro extremo de la barra, en la punta, se encuentra un led. La cámara detecta la posición del led y de esta manera se determina la deflexión del elemento terminal.

Una interfase entre el equipo del robot y una computadora PC es utilizada para la retroalimentación de datos y control. El modelo y el control es implementado en lenguaje de programación C.

El artículo contiene primeramente un panorama general de las estructuras robóticas flexibles. Luego un modelo matemático del robot flexible es derivado. En la sección siguiente, se analizan los controladores PD, LQR y Perturbaciones Singulares. Finalmente las conclusiones del artículo son mostradas. El resultado principal de este artículo es el análisis comparativo, en base a los resultados experimentales y de simulaciones, de los controladores considerados.



# UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



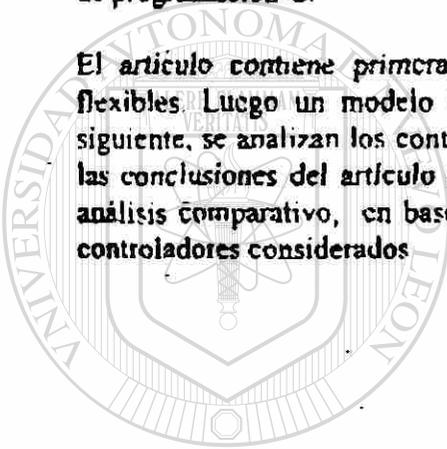
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

El artículo muestra un estudio comparativo de estrategias de control, las cuales son aplicadas al robot flexible. Resultados en simulación así como experimentales son presentados con el fin de analizar los datos obtenidos

Se consideran tres tipos de controladores: el Proporcional-Derivativo (PD), el Linear Quadratic Regulator (LQR) y el de Perturbaciones Singulares (PS). Los tres fueron aplicados al equipo de Robot flexible que consiste de una barra de aluminio fija en uno de sus extremos a un motor de CD. Montada sobre el motor se encuentra una cámara con resolución de .014 cm/pixel. En el otro extremo de la barra, en la punta, se encuentra un led. La cámara detecta la posición del led y de esta manera se determina la deflexión del elemento terminal.

Una interfase entre el equipo del robot y una computadora PC es utilizada para la retroalimentación de datos y control. El modelo y el control es implementado en lenguaje de programación C.

El artículo contiene primcramente un panorama general de las estructuras robóticas flexibles. Luego un modelo matemático del robot flexible es derivado. En la sección siguiente, se analizan los controladores PD, LQR y Perturbaciones Singulares. Finalmente las conclusiones del artículo son mostradas. El resultado principal de este artículo es el análisis comparativo, en base a los resultados experimentales y de simulaciones, de los controladores considerados



# UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



# INSTITUTO TECNOLÓGICO de nuevo laredo

Depto: División de Estudios de Posgrado  
No. Oficio: DEPI/100  
Asunto: Constancia

Fecha: 23 de Marzo de 1998.

**C. ING. MARTHA I. AGUILERA HERNÁNDEZ**  
CATEDRÁTICO DEL INST. TEC. de NUEVO LAREDO  
PRESENTE.

Por medio del presente, me permito informarle que su artículo " **Diseño de diferentes controladores para un robot flexible en eslabón**", presentado a esta División para su revisión y publicación en la Revista SIGMA ha sido aceptado y saldrá publicado en el ejemplar No. 1 año 1998.

Esperando que esta información sea de utilidad , me reitero.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LAREDO

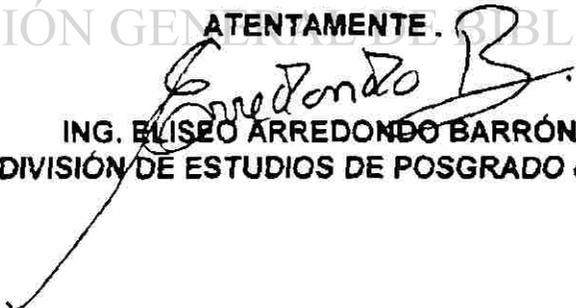
SECRETARÍA DE  
EDUCACIÓN PÚBLICA

INSTITUTO TECNOLÓGICO  
de nuevo laredo

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE  
POSGRADO E INVESTIGACIÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

ATENTAMENTE.

  
ING. ELISEO ARREDONDO BARRÓN.

JEFE DE LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO e INVESTIGACIÓN

C C P ARCHIVO.

Reforma Sur No 2007  
Cod. Post. 88000  
Apdo. Post 392

Tel. 14-09-15, 14-00-22, 14-01-26  
Fax 15-36-30



# Sigma

REVISTA DE LA DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACION DEL  
INSTITUTO TECNOLOGICO DE NUEVO LAREDO



AÑO 1998

No. 1

# CONTENIDO

	Página
Directorio	
Editorial.....	1
Contenido.....	2
<b>Diseño de diferentes controladores para un robot flexible en el eslabón.</b>	
Martha I. Aguilera Hernández , Jesús de León Morales.....	3
<b>Estabilidad robusta para sistemas lineales con retardo .</b>	
Gerardo Romero G. , Joaquín Collado M. , .....	9
<b>Pragmática de los lenguajes algebraico y químico en el ámbito escolar.</b>	
Luis Orlando Castillo Saldaña. , Aurora Gallardo Cabello .....	15
<b>Determinación del área máxima de un cuadrilátero.</b>	
René Eloy de la Peña. ....	19
<b>Consejos para la búsqueda de trabajo en el campo de la robótica.</b>	
Gustavo Guerra Guerra .....	25
<b>Software para calcular diferenciación numérica (La derivada de una función en un punto)</b>	27
Juan Manuel García Guerra, Rosa Elva Salas Martínez .....	
<b>Análisis de la ciencia y la tecnología .</b>	
Héctor Guerrero Rodríguez .....	30
<b>Un panorama a fondo de las pantallas planas.</b>	
Artículo traducido y compilado de la revista CONTROL FOR THE PROCESS INDUSTRIES del mes de Septiembre de 1997, autor Daniel A . Herbert.	
José Luis García Barrera, César Adrian Gordillo Lozano.....	36
<b>Requisitos para la presentación de artículos científicos, de Investigación y resúmenes de tesis.....</b>	42

# DISEÑO DE DIFERENTES CONTROLADORES PARA UN ROBOT FLEXIBLE EN EL ESLABON

Martha L. Aguilera Hernández

Jesús de León Morales

Programa Doctoral en Ingeniería Eléctrica  
FIME, Universidad Autónoma de Nvo. León  
Instituto Tecnológico de Nvo. Laredo  
Apdo. Postal 137-F  
San Nicolás de los Garza N.L. 66451, México  
E-mail: ad917911@gama.fime.uanl.mx

**RESUMEN:** *En este artículo se presenta el diseño y experimentación de controladores para un robot flexible en el eslabón de un grado de libertad. Se utiliza la técnica de análisis modal para obtener un modelo dimensional finito que nos permite realizar simulación y diseño del control. Un análisis del comportamiento de los controladores es mostrado y los resultados obtenidos se muestran en forma gráfica.*

## I. INTRODUCCION

En los últimos años se han desarrollado nuevos materiales con la finalidad de obtener incremento de rigidez (inflexibilidad), dureza, fuerza (resistencia a impactos), estabilidad dimensional, resistencia a la corrosión, reducción de deflexión debido a la temperatura, permeabilidad a gases y líquidos, absorción de agua, costos y energía, modificación de propiedades eléctricas, etc.

Estos nuevos materiales han surgido debido al desarrollo de aplicaciones especiales en la industria en general y en el espacio donde se presenta la necesidad de estructuras más ligeras, largas o resistentes en ambientes no convencionales. Como ejemplos, podemos mencionar los brazos largos que se requieren para acceder lugares hostiles como sitios nucleares, espacio, sitios con sustancias químicas, y en en el area industrial como robots diseñados con materiales ligeros apropiados para el manejo de herramientas y ensamble, pintado, soldado, etc. La necesidad de controlar estas estructuras en estos ambientes se ha presentado como una función inherente en el desarrollo de las diferentes aplicaciones.

Se sabe que si una estructura flexible es controlada colocando un sensor exactamente en el actuador que va a controlar, entonces se obtiene una operación estable. En forma contraria, si se tiene en uno de los extremos de la estructura el actuador y en el otro extremo el sensor, el problema de obtener estabilidad se complica [9,10].

Varios estudios con respecto al control de estas estructuras se han realizado y experimentado (Cannon & Schmitz, 1984, Qian & Ma, 1992). El enfoque es aplicar torque de control a un extremo del robot. Este control se basa en un sensor fijo en el otro extremo (en la punta). Pero una tecnología para utilizar sensores y actuadores en los extremos no se ha desarrollado en su totalidad. Los robots industriales requerirán de este tipo de control, debido a la necesidad de ser más ligeros para obtener una respuesta rápida con poca energía y una gran precisión en la posición del elemento terminal.

Para contribuir experimentalmente en el desarrollo de esta tecnología, el presente artículo muestra el diseño de controladores para un robot con flexibilidad en el eslabón de un grado de libertad (RFE). Se tienen disponibles diferentes metodologías para diseñar leyes de control, en base a: Modelo de parámetros distribuidos de brazos flexibles (Tarn, Bejcky, 1988), Modelo discreto en tiempo y en el espacio (Rattan, Feliu, 1992) y un Modelo discreto en el espacio y continuo en el tiempo. Dentro de este último podemos encontrar el análisis Modal (Siciliano, W.J. Book, 1988) y el esquema de elemento finito (Chedmail, Michel, 1992).

En este artículo, se deriva un modelo matemático para el RFE que considera los parámetros físicos

del sistema. Se utiliza la teoría Euler-Bernoulli de la barra. Partiendo de un modelo discreto en el espacio y continuo en el tiempo, mediante la técnica de análisis modal, se obtiene un modelo dimensional finito para propósitos de simulación y diseño del control.

Se consideran tres tipos de controladores: el Proporcional-Derivativo (PD), el Linear Quadratic Regulator (LQR) y el de Perturbaciones Singulares (PS). Los tres fueron aplicados al equipo de Robot flexible que es descrito en la sección III. Los resultados experimentales obtenidos se muestran en forma gráfica.

El artículo está organizado de la siguiente manera: La sección I da la introducción. En la sección II, se presenta la derivación del modelo matemático del robot flexible. En la sección III, los controladores PD, LQR y Perturbaciones Singulares así como el experimento práctico son mostrados. Finalmente, se tienen las conclusiones del artículo.

## II.- MODELO MATEMÁTICO MODELADO DE UN BRAZO FLEXIBLE EN EL ESLABON

Para el modelado, se utilizó las ecuaciones de Euler-Bernoulli para una barra. Los términos de segundo y alto grado en las variables de deformación son despreciables. Las hipótesis en las que se basa son: h1) El brazo es una barra con características geométricas uniformes y una distribución de masa uniforme, h2) El brazo es flexible en la dirección lateral, solo las deformaciones elásticas están presentes. h3) Las deformaciones no lineales así como la fricción interna u otras perturbaciones externas son efectos despreciables. Los parámetros de interés son: La densidad lineal ( $\rho$ ), Flexural rigidity ( $EI$ ), la inercia del eje ( $I_h$ ) y la longitud del brazo ( $l$ ).

La posición absoluta de un punto a lo largo de la barra (figura 1) está descrita por:

$$p = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \theta(t) - \omega(x,t) \sin \theta(t) \\ x \sin \theta(t) + \omega(x,t) \cos \theta(t) \end{pmatrix}$$

donde  $\omega(x,t)$  = Deflexión de la barra con respecto al eje neutral.

$t$  = Variable en el tiempo  
 $x$  = Coordenada a través del eje neutral de la barra

$\theta(t)$  = Angulo de rotación del eje

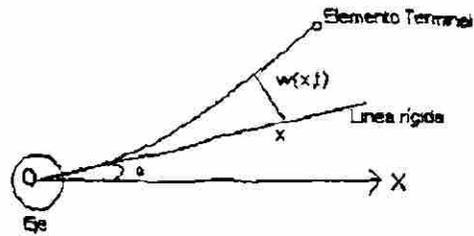


Fig 1 Marco de referencia

NOTA: En las siguientes ecuaciones una coma en la parte superior representan diferenciación respecto a  $x$ , y un punto representa la diferenciación con respecto al tiempo.

Además, dado que la barra está sujeta a la base, se tienen las siguientes condiciones geométricas de frontera  $\omega(0,t) = \omega'(0,t) = 0$ .

La energía cinética está dada por:  $T = T_h + T_f$ .

Del eje:  $T_h = \frac{1}{2} I_h \dot{\theta}(t)$  y del brazo

$$T_f = \frac{1}{2} \rho \int_0^l (\dot{p}_x^2 + \dot{p}_y^2) dx \\ = \frac{1}{2} \rho \int_0^l (x^2 \dot{\theta}(t)^2 + \omega^2(x,t) \dot{\theta}(t)^2 + \dot{\omega}^2(x,t) + 2x \dot{\theta}(t) \dot{\omega}(x,t)) dx$$

La energía potencial:

$$U = \frac{1}{2} EI \int_0^l (\omega''(x,t))^2 dx$$

Las ecuaciones del sistema son obtenidas de la condición variacional

$$\int_0^l (\delta T(t) - \delta U(t) + \delta W(t)) dt = 0,$$

donde  $\delta W(t) = u(t) \delta \theta(t)$  es el trabajo virtual realizado por el torque.

El modelo dinámico del robot flexible en el eslabón está dado por:

$$\sum_{NFE} \begin{cases} I_h \ddot{\theta}(t) + \rho \int_0^l x \ddot{\omega}(x,t) dx = u(t) \\ EI \omega''''(x,t) + \rho \ddot{\omega}(x,t) + \rho x \ddot{\theta}(t) = 0 \\ \omega(0,t) = \omega'(0,t) = 0 \\ \omega''(l,t) = \omega'''(l,t) = 0 \end{cases}$$

donde  $I_h = I_h + \rho^2 l^3 / 3$ . La primera ecuación puede ser atribuida a la dinámica del eje, mientras que la



estrategias para su efectividad, por ejemplo el control utilizando un modelo rígido-flexible. En este trabajo se implementó la ley de control  $\tau = k_p(\theta_d - \theta) + k_v(\dot{\theta}_d - \dot{\theta})$ . Los valores de  $k_p = 1.35$  y  $k_v = .28$  fueron obtenidos de la mejor sintonización del controlador en su respuesta en el tiempo. En los resultados experimentales (figuras 3a, 3b), podemos observar severas oscilaciones cuando el robot se posiciona en el punto deseado. Una extensión de este controlador a un robot de dos eslabones flexibles, puede hacerse únicamente considerando eslabones independientes.

### Controlador LQR

Para aplicar este método se linealizó el modelo aproximado del robot alrededor del punto de equilibrio  $\theta_i = 0$ . La ley de control aplicada está definida por

$$\tau = k_p(\theta - \theta_d) + k_v(\dot{\theta} - \dot{\theta}_d) + \beta_p(p_e - t) + \beta_v(\dot{p}_e - t)$$

donde  $p_e - t$  es la posición del elemento terminal (que es actualizada en tiempo real) y  $k_p, k_v, \beta_p, \beta_v$  son matrices de ganancia obtenidas por el criterio de optimización LQR [12]:

$$O_p = \int_0^{\infty} (e^T Q_1 e + \dot{e}^T Q_2 \dot{e} + u^T r u) dt$$

donde  $e = \theta - \theta_d$ ,  $Q_1, Q_2$  son semidefinidas positivas y  $r$  es definida positiva. Utilizando matlab los valores obtenidos fueron  $k_p = 1.38, k_v = .32, \beta_p = -1.1, \beta_v = .07$ .

Este método asegura márgenes de ganancia y de fase adecuados. La ventaja de este controlador con respecto al PD es que permanece insensible a perturbaciones externas. Las figuras 4a y 4b muestran la respuesta de este controlador. Se aprecia una mejora notable con respecto al controlador PD. Para una extensión a un robot flexible de dos eslabones, el modelo linealizado, depende de la configuración del robot.

### Controlador Utilizando el Método de Perturbaciones Singulares

Este método se basa en la separación del sistema en dos subsistemas, el cual uno se considera "lento" mientras que el otro se considera "rápido". Las variables de estado "rápidas" son las fuerzas

elásticas y sus derivadas en el tiempo. Un sistema de este tipo es una herramienta para reducir el orden del sistema (los robots flexibles pertenecen al conjunto de sistemas que tienen menor número de entradas de control que el número de variables controlables). Los dos sistemas identificados son:

a) Un subsistema "lento" que es del mismo orden que del manipulador rígido.

b) Un subsistema "rápido" en donde las variables de estado lentas juegan el rol de parámetros.

El control para el sistema lento puede ser diseñado por los esquemas conocidos para los robots rígidos.

Usando el procedimiento dado en [7]. El sistema del robot puede representarse

$$\dot{x} = f(t, x, z, u, \varepsilon)$$

$$\varepsilon \dot{z} = g(t, x, z, u, \varepsilon)$$

donde  $x$  es la variable lenta (variables rígidas),  $u$  es el control (torque),  $z$  es la variable rápida (variables elásticas) y,

$$x = \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}; \quad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \varepsilon \dot{z}_1 \end{pmatrix}$$

Para obtener el modelo reducido, tomamos  $\varepsilon = 0$  y obtenemos el modelo lento de la forma

$$\dot{x} = f(t, x, z, u, 0)$$

$$0 = g(t, x, z, u, 0)$$

Para el subsistema rápido, con  $\tau = t / \varepsilon$ , obtenemos

$$\dot{x} = \varepsilon f(x, z_f(\tau) + z, u_f(\tau) + u, \varepsilon)$$

$$\dot{z}_f = g(x, z_f(\tau) + z, u_f(\tau) + u, \varepsilon)$$

El control para el subsistema lento se obtuvo de un control lineal como el desarrollado en [11], dado por

$$u = \gamma [\ddot{\theta}_d + k_v(\dot{\theta}_d - \dot{\theta}) + k_p(\theta_d - \theta)]$$

donde  $k_p, k_v$  son seleccionadas para mantener la separación en la escala de tiempo entre los subsistemas lento y rápido,  $\gamma$  es una constante dependiente de la matriz de Inercia. Los valores obtenidos fueron:  $k_p = 1.5, k_v = .56$ .

Para el control del subsistema rápido se tiene  $u_f = k_{p_f}(x)z_f + k_{v_f}(x)\dot{z}_f$ . Se utilizó la técnica de fijación de polos de sistemas lineales para obtener los valores de  $k_{p_f}, k_{v_f}$ . Los valores obtenidos fueron  $k_{p_f} = -1.56, k_{v_f} = .12$ .

La ley de control implementada en la experimentación está dada por:

$$u = .42[\ddot{\theta}_d + .56(\dot{\theta}_d - \dot{\theta}) + 1.5(\theta_d - \theta)] - 1.56\dot{p}_e - t + .12p_e - t$$

Entre las ventajas de este método se puede constatar la reducción del orden del modelo que permite resolver el problema de sistemas que tienen menor número de entradas de control que el número de variables controlables, la minimización de los cálculos en línea además de permitir su extensión al caso multieslabones.

### EXPERIMENTO

El equipo del robot flexible en el eslabón con un grado de libertad es mostrado en la figura 2, consiste de una barra de aluminio fija en uno de sus extremos a un motor de CD. Montada sobre el motor se encuentra una cámara con resolución de .014 cm/pixel. En el otro extremo de la barra, en la punta, se encuentra un led. La cámara detecta la posición del led y de esta manera se determina la deflexión del elemento terminal. Una interfase entre el equipo del robot y una computadora PC es utilizada para la retroalimentación de datos y control. El modelo y el control es implementado en lenguaje de programación C.

El experimento consiste en realizar movimientos del robot flexible a  $\pm n$  grados con respecto al origen (en este caso el centro, considerando ahí la referencia 0 grados). Es decir, la estructura recorre en total  $2n$  grados. En las gráficas mostradas se utilizó  $n = 20$ . Esto ha permitido calcular también repetibilidad y exactitud. Donde estos últimos son parámetros de interés en el estado presente de la investigación.

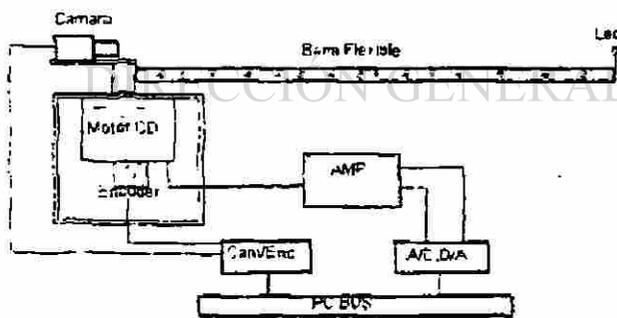


Fig. 2: Robot Flexible Experimental

#### PARAMETROS DEL SISTEMA

Inercia de Cámara (Incluyendo Inercia del Motor)	002 Kg <sup>m</sup> <sup>2</sup>
Longitud del eslabón	91.4 cm
Altura del eslabón	2.54 cm

Ancho del eslabón	.3175cm
Masa del eslabón	.06 Kg
Inercia del cuerpo rígido del eslabon	.0042 Kg <sup>m</sup> <sup>2</sup>

### RESULTADOS EXPERIMENTALES

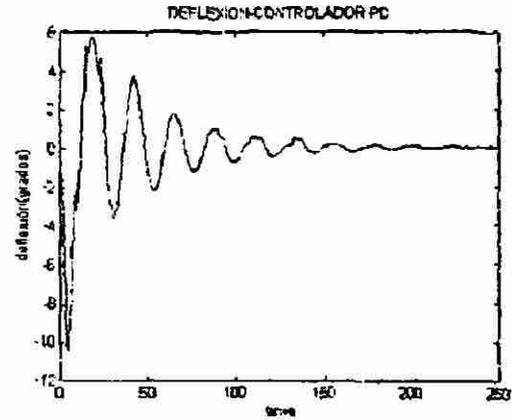


Fig. 3a: Controlador PD

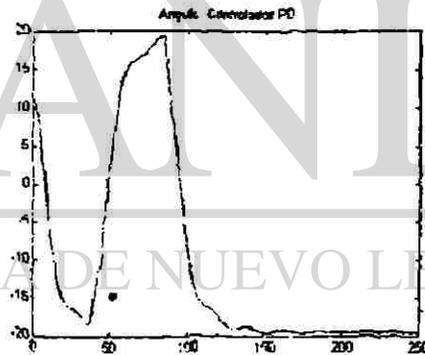


Fig. 3b: Controlador PD

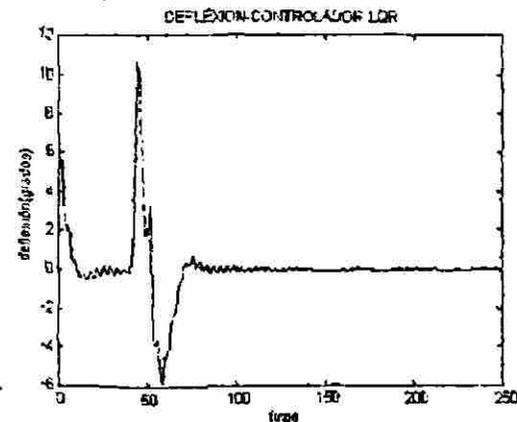


Fig. 4a. Controlador LQR

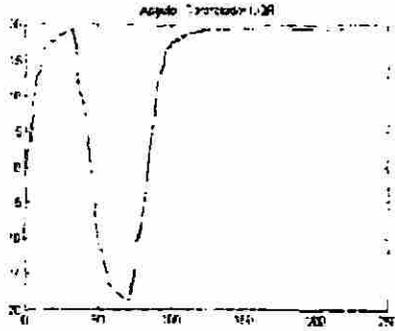


Fig. 4b. Controlador LQR

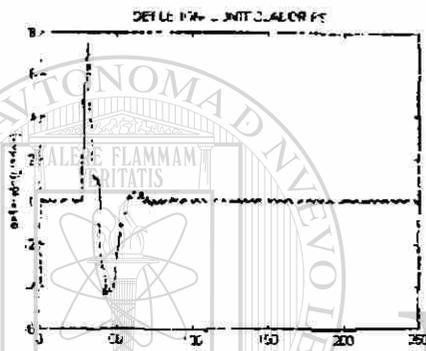


Fig. 5 Controlador PS

## CONCLUSIONES

En este trabajo se presentaron tres tipos de controladores. Los que presentan mejor comportamiento son el LQR y el de perturbaciones singulares. Como trabajo futuro se pretende trabajar con un modelo infinito del robot flexible agregando los controladores de Modos Deslizantes y Adaptivo. De esta manera obtener un estudio mas completo tanto de análisis como de experimentación de este tipo de estructuras flexibles.

## Referencias

- [1] F.L.Hu, A.G.Ulsoy, "Dynamic Modeling of Constrained Flexible Robots arms for Controller Design", Transactions of the ASME, vol 116, pp 56-65, 1994.
- [2] B.V. Chapnik, G.R. Heppler, and J.D. Aplevich, "Modeling Impact on a One-Link

Flexible Robotic Arm", IEEE Transactions on Robotics and Automation, vol 7, pp 479-488, 1991.

[3] Ahmet S. Yigit, "On the stability of PD Control for a two-link Rigid-Flexible Manipulator", Transactions of the ASME, vol 116, pp 208-215, 1994

[4] R. Murray, Zexiang Li, S. Shankar Sastry, "A mathematical Introduction to Robotic Manipulation", CRC Press, 1993.

[5] Jeffrey J. Shifman, "Lyapunov Functions and the control of the Euler-Bernoulli Beam", International Journal of Control, vol 57, pp971-990, 1993

[6] Jacobs, Kilduff, "Engineering Materials Technology", Prentice Hall Inc., 1985.

[7] Khalil H., "Nonlinear Systems", Second Edition, Prentice Hall, 1996

[8] Chalhoub N., Ulsoy A., "Control of a Flexible Robot Arm: Experimental and Theoretical Results", Journal of Dynamics Systems, Measurement and Control, Vol. 109, pp. 299-309, Dec. 1987

[9] Cannon R., Schmitz E., "Initial Experiments on the End-Point Control of a flexible One-Link Robot", The International Journal of Robotics Research, Vol 3, No.3, pp. 62-75, Fall 1984.

[10] Qian W., Ma H., "A New Controller Design for a Flexible One-Link Manipulator", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol 37, No. 1, January 1992.

[11] Siciliano B., Book W., "A singular perturbation approach to control of Lightweight Flexible Manipulator", The International Journal of Robotics Research, Vol 7, No. 4, pp. 79-90, 1988.

[12] Austin, Chevareau, Glumineau, Moong, "Experimental Results for the End-Effector Control of a single Flexible Robotic Arm", IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol2, No. 4, Dec. 1994.



*Saltillo, Coah. Mexico  
December 12-14*



# International Symposium on Robotics and Automation '98

*"Robotics and Automation  
Innovations for Facing  
Challenges of the New Millennium"*



*Instituto Tecnológico de Saltillo*

PROCEEDINGS



DGIT



Saltillo



# EXPERIMENTAL EVALUATION OF INFINITE MODEL BASED CONTROLLERS FOR A FLEXIBLE LINK ROBOT

Martha I. Aguilera Hernández<sup>1</sup> and Jesús de León Morales<sup>2</sup>

email: aguilera@teclaredo.edu.mx, jleon@ccr.dsi.uanl.mx

<sup>1</sup>Institute of Technology of Nuevo Laredo, Department of Electrical Engineering  
88240 Nuevo Laredo, Tam., México

<sup>2</sup>University of Nuevo León, Department of Electrical Engineering  
66450 San Nicolás de los Garza, N.L., México

## ABSTRACT

This paper presents an experimental evaluation of three infinite model based controllers. The results are compared with the simulations to demonstrate the performance of each controller.

**Keywords :** Flexible link robot, Lyapunov's Method, Distributed Parameter system.

## 1 INTRODUCTION

One of the most active research areas in the last decade has been the flexible link robots control. This happens because of the necessity of light weight manipulators that consume less energy and at the same time improve the end effector accuracy. Some applications of flexible link robots are the aircraft antennas, satellite rescue arms and the industrial links for welding or painting.

These robotics arms have been frequently modeled using the Bernoulli beam theory or Timoshenko beam theory [5]. In most of the cases small deflection assumption has been made. The beam model is a distributed parameter system. This distributed characteristic of the system has made the designing of the controller a difficult task. The model obtained for the flexible link robot is a set of integro-differential equations with coupled non-linear boundary conditions. Due to this characteristic, the original model is often reduced. This can be done by using assumed modes method, finite element technique or singular perturbation theory.

The control strategies are classified in Finite (or Reduced) Model Based Controllers and Infinite Model Based Controllers. In the literature, some controllers are called "model independent". In this article they are classified by the model used to derive them.

The great advantage of the reduced models is that the controller can be obtained by using techniques of linear systems, for instance LQR and PD, or by applying the

singular perturbation theory. The disadvantage of the reduced models is the effects of the truncated modes. Most of the recent studies have been concentrated in compensating the effects of this disregarded modes, usually called "spillover". A survey can be found in [8], where some finite dimensional control strategies are analyzed and compared, concluding that "the effects of high order modes must be considered". Another similar survey can be found in [1].

An attempt to overcome the difficulties associated with the reduced models is the design of an infinite dimensional control strategy. The main advantage of the infinite model approach is the preservation of the model structure, usually destroyed by approximation techniques [11].

Although there have been several experimental studies of different controllers [1,8], none of them has focused the attention to the infinite model based controllers.

This paper examines three *Infinite Model Based Controllers*. The first one was proposed by Shifman in [10,11]. The variable needed for the implementation of this controller is the measurement obtained from a strain gage installed along the beam. The second, is a controller proposed by Yuan in [9]. The controller variables needed for implementation is the measurement of the angle hub with the first and second derivatives. The third one is proposed by Aguilera in [14], and the variables needed for the implementation are the hub variables, an auxiliary approximated variable and the end effector measurement.

The simulations obtained for each controller are compared with the experimental results. The results show that all the infinite based model controllers tested reach the desired position. The inclusion of auxiliary variables in the controller's design improve the performance of the system. The infinite model based controller design is a good approach to control flexible link robots in a wide

range of real applications.

The paper is organized as follows: Section 1, gives the introduction. Section 2 shows the mathematical model of the flexible link robot. This model has been derived using the Euler-Bernoulli beam theory and applying Hamilton Principle. In Section 3, the three Infinite Model Based Controllers are presented. The controller design is described with all the considerations and the assumptions needed for implementation. Section 4 gives the technical details of the flexible link robot apparatus and the simulations and experimental results. Finally the conclusions of this paper are shown.

## 2 MATHEMATICAL MODEL OF THE FLR

The single flexible link robot (FLR) consists of a flexible link attach to a base. The structure is fixed in one end and free on the other (Figure 2.1), where  $\omega(x, t)$  denotes the deflection of the beam with respect to the neutral axis,  $t$  is the time variable,  $l$  is the beam length,  $x$  represents the spatial variable that index the beam points where  $x \in [0, l]$ ,  $\theta(t)$  denotes the rotation angle of hub. We assume that the beam is uniform with mass density  $\rho$ , Young's Modulus  $E$  and cross sectional inertia  $I$ . The hub inertia is denoted by  $I_h$  and the applied torque by  $\tau$ .

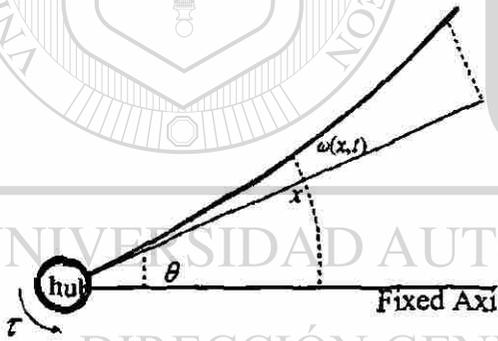


Fig. 2.1: Schematic Flexible Link Robot

**Remark 1** In what follows,  $(\dot{\phantom{x}})$  represents differentiation with respect to  $x$ , and a  $(\dot{\phantom{t}})$  represents differentiation with respect to time.

Since the beam is fixed at the base, the following geometric boundary conditions are verified  $\omega(0, t) = \omega'(0, t) = 0$ . The mathematical model which represents the dynamic's robot is deduced by means of Hamiltonian's principle, for that, the kinetic energy is given by  $T = T_{hub} + T_{link}$ , where the contribution of the hub is given by

$$T_{hub} = \frac{1}{2} I_h \dot{\theta}(t)^2 \quad (1)$$

and the link's contribution

$$T_{link} = \frac{1}{2} \rho \int_0^l (x^2 \dot{\theta}(t)^2 + \dot{\omega}^2(x, t) + 2x\dot{\theta}(t)\dot{\omega}(x, t)) dx \quad (2)$$

The potential energy is given by

$$U_{link} = \frac{1}{2} EI \int_0^l (\omega''(x, t))^2 dx \quad (3)$$

**Assumption 1:**  $\omega$  is consider to be small with respect to the length of the beam i.e.  $\omega \leq 0.1l$

Then, using techniques of calculus of variations, the principle takes the form

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T(t) - \delta U_{link}(t) + \delta W(t)) dt = 0$$

where  $\delta W(t) = \tau \delta \theta(t)$  is the virtual work of the torque. Joining  $\delta \omega$  and  $\delta \theta$  terms, the dynamic model of the flexible link robot is represented by

$$\Sigma_{RFE} \begin{cases} (I_h + \rho l^3/3) \ddot{\theta}(t) + \rho \int_0^l x \ddot{\omega}(x, t) dx = \tau \\ EI \omega''''(x, t) + \rho \ddot{\omega}(x, t) + \rho x \ddot{\theta}(t) = 0 \\ \omega(0, t) = \omega'(0, t) = 0 \\ \omega''(l, t) = \omega'''(l, t) = 0 \end{cases}$$

The first equation of  $\Sigma_{RFE}$  is contribution of the hub and the second is associated with the flexible link[13]. Integrating the second equation with respect to  $x$  and substituting in the first one and using the boundary conditions, we obtain

$$I_h \ddot{\theta}(t) - EI \omega''(0, t) = \tau \quad (4)$$

Now, let  $y(x, t) = x\theta(t) + \omega(x, t)$ , be the total deflection of the beam, then  $\Sigma_{RFE}$  takes the form

$$\Sigma_{RFET} : \begin{cases} I_h \ddot{\theta}(t) + \rho \int_0^l x \ddot{y}(x, t) dx = \tau \\ EI y''''(x, t) + \rho \ddot{y}(x, t) = 0 \\ y(0, t) = y'(0, t) - \theta(t) = 0 \\ y''(l, t) = y'''(l, t) = 0 \end{cases}$$

## 3 INFINITE MODEL BASED CONTROLLERS

### 3.1 JOINT PD CONTROLLER

This controller was proposed by Yuan in [9]. Based on Lyapunov's techniques, the controller is design using a

weighted error function with respect to the target state  $\theta_d$  as Lyapunov candidate. This function is given by

$$V = T_{hub} + T_{link} + U_{link} + \zeta(T_{link} + U_{link}) + \frac{1}{2}\gamma(\theta - \theta_d)^2 \quad (5)$$

where  $\theta_d$  represents the hub desired angle and  $\zeta > -1$  and  $\gamma > 0$  are design parameters. It is clear that  $V > 0$ ,  $V = 0$  only if  $\dot{\theta} = 0$  and  $\theta = \theta_d$ .

Taking the time derivative of  $V$ , using equations (3, 1, 2) and straightforward calculations it follows that

$$\dot{V} = [\tau + \zeta(\tau - I_h \ddot{\theta}) + \gamma(\theta - \theta_d)] \quad (6)$$

The torque control input can be chosen as

$$\tau = \frac{1}{1 + \zeta} [-k\dot{\theta} - \gamma(\theta - \theta_d) + \zeta I_h \ddot{\theta}] \quad (7)$$

where  $k > 0$  is also a design parameter.

Substituting the control input  $\tau$  in (6), we obtain

$$\dot{V} = -k\dot{\theta}^2$$

which is negative semidefinite. Therefore, using the Lyapunov Stability Theorem, we can say that the robot reaches an equilibrium state under the action of the applied control at which all the joint velocities are equal to zero. Substituting (7) in (4), we have that the closed-loop is given by

$$I_h \ddot{\theta} + k\dot{\theta} + \gamma\theta = (1 + \zeta)\omega''(0, t) + \gamma\theta_d$$

It is clear that  $\{\theta = \theta_d, \dot{\theta} = 0\}$  is the unique equilibrium state of the closed-loop system. It is worth noticing that the function  $V$  vanishes only at the desired equilibrium state i.e.  $\theta$  cannot vanishes until  $V = 0$  is reached. Invoking La Salle's Invariant Set Theorem, global asymptotic stability of the desired point follows.

The control law given by (7) does not require any feedback from the deflection variables. The design parameters were calculated using the assignment pole technique. The experimental values used were  $\zeta = 1$ ,  $\gamma = 40$ ,  $k = 21$ .

### 3.2 CONTROLLER DESIGN USING A STRAIN GAGE

The controller is implemented with the feedback of the deflection variables. This controller was proposed by Shifman in [11]. The deflection variables are measure using a strain gage collocated along the beam.

The position of the link is described by

$$y(x, t) = x\theta(t) + \omega(x, t) \quad (8)$$

The second equation of  $\sum_{RFET}$ , given by

$$\rho \ddot{y} + EI y'''' = 0$$

has the following boundary conditions

$$\begin{aligned} EI y &|_{x=0} = 0 \\ EI y'' &|_{x=l} = 0 \\ EI y'''' &|_{x=l} = 0 \\ EI y'' &|_{x=0} = -\tau + I_h \ddot{\theta} \end{aligned}$$

If we define

$$\begin{aligned} e &= y^d - y \\ \tilde{\tau} &= \tau^d - \tau \\ \tilde{\theta} &= \theta^d - \theta \end{aligned}$$

were the subindex  $d$  is use to identify the desired variable. The error is then given by

$$e = y^d - x\theta(t) - \omega(x, t) \quad (9)$$

were the derivatives with respect to  $x$  is given by

$$\begin{aligned} e' &= -\theta(t) - \omega'(x, t) \\ e'' &= -\omega''(x, t) \\ e'''' &= -\omega''''(x, t) \end{aligned}$$

and the time derivatives by

$$\begin{aligned} \dot{e} &= -\dot{y} = -x\dot{\theta}(t) - \dot{\omega}(x, t) \\ \ddot{e} &= -x\ddot{\theta}(t) - \ddot{\omega}(x, t) \end{aligned} \quad (10)$$

The second equation of  $\sum_{RFET}$  results in an error equation given by

$$EI e'''' + \rho \ddot{e} = 0 \quad (11)$$

with boundary conditions

$$\begin{aligned} EI e &|_{x=0} = 0 & EI e' &|_{x=l} = 0 \\ EI e'''' &|_{x=l} = 0 & EI e'' &|_{x=0} = -\tilde{\tau} + I_h \ddot{\tilde{\theta}} \end{aligned}$$

If we integrate twice with respect to  $x$ , the equation given by (11), first from  $x$  to  $l$ , and then from 0 to  $l$ , we obtain the relation

$$\tilde{\tau} = \rho \int_0^l \int_{x_1}^l \ddot{e}(x_0) dx_0 dx_1 + I_h \ddot{\tilde{\theta}}$$

Assigning

$$X := \rho \int_0^l \int_{x_1}^l \ddot{e}(x_0) dx_0 dx_1 + I_h \ddot{\tilde{\theta}} \quad (12)$$

then we can choose

$$\dot{\tau} = -c_1 \dot{X} - c_0 X = \ddot{X}$$

where the  $c_i$  are constants.

The closed loop system has the form

$$\ddot{X} + c_1 \dot{X} + c_0 X = 0$$

where the behavior of  $X$  is determined from the section of the  $c_i$ s.

$X$  represents all the error movement of the beam, the control law is designed such that the error  $e$  can be controlled. The controller has the form

$$\dot{\tau} = c_{10} \dot{X} + c_{11} \dot{\theta} + c_{00} X + c_{01} \bar{\theta} \quad (13)$$

where the  $c_{ij} > 0$  are constants. The above equation (13), can be rewritten as

$$\dot{\tau} = -c_0 (X + c_2 \bar{\theta}) - c_1 (\dot{X} + c_2 \dot{\bar{\theta}})$$

The variable  $X$  is directly measure from the strain gage.

### 3.3 CONTROLLER DESIGN USING FINITE ELEMENT NUMERICAL APPROXIMATION

The use of a strain gage for deflection measure are limited by external factors like temperature or pressure, and have to be calibrated. The longitude of the strain gage is also a limiting factor. Non-conventional sites like nuclear waste places, use long links to perform inspection and service. The use of a strain gage for this kind of work is impractical. Other methods to measure the end-effector position is the use of an acelerometer or photodiodes. However the efficiency of the measure equipment is limited by the longitude of the link and for the working environment.

One method is collocate small flexible links in cascade through the flexible link. Each one feedback the data to the last one. The data is referring to the deflection[15].

The controller proposed by Shifman, explained in the last section, guarantee stability of the closed loop system but requires the aggregate variable measure given by (12). The material properties is a main factor in the design of flexible structures for non-conventional sites, sufficient information of the performance of the material has to be known.

The controller proposed (SGA) has a similar for as Shifman's but the direct measure of the strain gage is approximated numerically, with the help of the material properties information and the feedback of the tip position. A finite technique is use to divide the beam in small links. For each link, the approximation of the

strain gage is made. The total value of approximation is the combination of all the small links values.

The strain is related to the beam deflection  $w(x)$  by

$$\epsilon_{xx} = \frac{z}{\rho} = z \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (14)$$

as  $y(x, t) = x\theta(t) + w(x, t)$ , (14) can be rewritten as  $\epsilon_{xx} = zw'' = zy''$ , the stress is given by

$$\sigma_{xx} = E\epsilon_{xx} = Ezy''$$

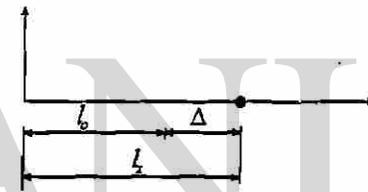
Also

$$\epsilon_{xx} = \frac{l_x - l_0}{l_0} = \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

where  $z$  is the distance respect to the neutral axis to the beam point of interest.



(a) Before deformation



(b) After deformation

Figure 3.1 Strain gage measure in a segment.

From the last section, we have that the controller is given by

$$\int_0^l \int_{x_1}^l y(x_0) dx_0 dx_1 = \frac{1}{3} l^3 \tilde{\theta} - \int_0^l p(x) y''(x) dx$$

where  $p(x) = \frac{1}{3} l^3 - \frac{1}{2} l^2 x + \frac{1}{6} x^3$ . Choosing the width of the strain gage as  $W(x) = 1/p(x)$  and knowing that

$$d \Delta_R(x) = k \frac{y''(x)}{W(x)} dx$$

we obtain

$$\frac{1}{k} \int_0^l d \Delta_R(x) = \int_0^l p(x) y''(x) dx \quad (15)$$

This approximation by means of a strain gage is valid for a single link. If we separate the link in small sublinks

applying the finite element method, each sublink can be approximated by  $A_p = \frac{1}{3}l^3 \ddot{\theta} + \frac{l^5}{8I_c} - \frac{1}{8}l^4$ , where  $l_0$  is a constant and equal to the beam length, and  $l$  is measure in real time during the beam trajectory to the desired position.

## 4 EXPERIMENTAL SETUP

The flexible robot equipment of one degree of freedom is shown in figure 4.2, it consists in an aluminium beam fixed on one end. A CD motor and a camera are mounted in the shaft of the motor. The camera's resolution is 0.014 cm/pixel. A led is used to measure the end beam position. The camera detects the led position and the deflection is measured. An interface is used to feedback the data and control to the equipment. The control is implemented in C language. To determine  $\theta$  a software filter was used. The *System Parameters* are: Camera Inertia  $0.002Kg\,m^2$ , Link length  $l = 0.914m$ , Link height  $2.54cm$ , Link width  $0.3175cm$ , Link mass  $0.06Kg$ , Link inertia  $0.0042Kg\,m^2$ , Flexural rigidity  $EI = 8Kg\,m^2/s^2$ , Linear density  $\rho = 0.8Kg/m$ . The flexible link robot finite was simulated using three modes. The nominal values used for the first controller were  $\zeta = 1, \gamma = 40, k = 21$ . For the second controller, the nominal values used were  $c_0 = 80, c_1 = 15, c_2 = .05$ .

The experiment consist in move the beam to a desired position. The computer collect the values of hub angle, deflection and driven torque. The simulations were performed using Matlab<sup>®</sup> with a stepsize of 0.01s. The time closed loop plot showing the dynamic behavior obtained by simulations and experimental of the deflection are given in figures (7.1) and (7.3). Also in figures (7.2) and (7.4), the driven torque is shown.

From the plots one can notice that the curves obtained from simulations are closed to the ones obtained experimentally.

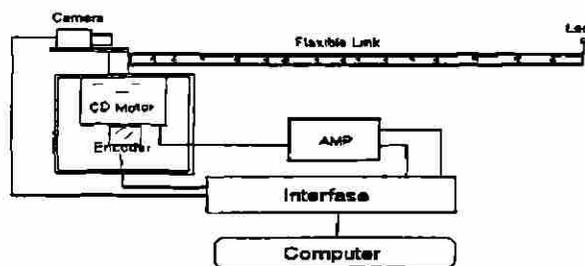


Figure 4.1: Schematic System

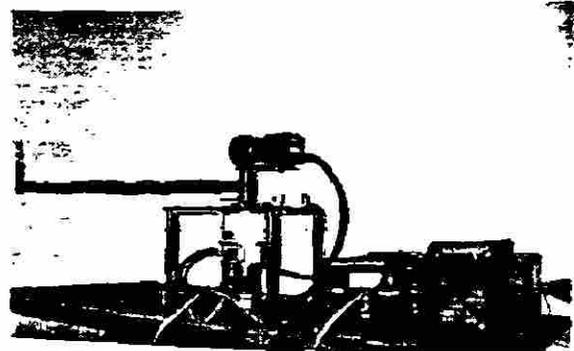


Figure 4.2: Experimental Flexible Robot

## 5 CONCLUSIONS

An infinite model based controllers were compared and tested in an experimental flexible robot equipment. This experimental results show that controllers derived from the infinite model are a viable approach for the control of flexible link robots. Future work include the design of a controller based on infinite model with gravity effects.

## 6 REFERENCES

- [1] Ajustin, Chevareau, Glumineau, Moong, "Experimental Results for the End-Effector Control of a single Flexible Robotic Arm", IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol2, No. 4, Dec. 1994.
- [2] Ahmet S. Yigit, "On the stability of PD Control for a two-link Rigid-Flexible Manipulator", Transactions of the ASME, vol 116, pp 208-215, 1994.
- [3] Chalhoub N., Ulsoy A., "Control of a Flexible Robot Arm: Experimental and Theoretical Results", Journal of Dynamics Systems, Measurement and Control, Vol. 109, pp. 299-309. Dec. 1987.
- [4] Cannon R., Schmitz E., "Initial Experiments on the End-Point Control of a flexible One-Link Robot", The International Journal of Robotics Research, Vol 3, No.3, pp. 62-75, Fall 1984.
- [5] William T. Thomson. "Teoria de Vibraciones. Aplicaciones". Editorial Prentice Hal. Internacional. 1983.
- [6] J.E. Lagnese, G. Leugering, E.J.P.G. Schmidt. "Modeling, Analysis and Control of Dynamic Elastic Multi-Link Structures". Ed. Birkhäuser, 1994.
- [7] Barbieri Enrique. "Single-Input/Single-Output Transfer Functions for a flexible Slewing Link". Journal of Robotics Systems 10(7). 913-929 (1993).
- [8] Wang D. "Comparison of Control Strategies for the Single Flexible Beam". American Mathematical Society. 1993. 1069-5265/93
- [9] Yuan King, "Regulation of a geometrically exact flexible beam manipulator", Systems & Control Letters 25 (1995) 9-12.

[10] Jeffrey J. Shifman, "Lyapunov Functions and the control of the Euler-Bernoulli Beam", International Journal of Control, vol 57, pp971-990, 1993.

[11] Shifman J. PHD Thesis. "The Control Of Flexible Robots", Churchill College., March 1991.

[12] Rossi M., Wang D. "Issues in the design of Passive Controllers for Flexible-Link Robots". The International Journal of Robotics Research. Vol. 16. No. 4, August 1997, p.p. 577-588.

[13] Canudas C., Siciliano B., Bastin G. "Theory of Robot Control", Springer Verlag. 2nd Ed., 1997.

[14] Aguilera Martha, "Control de Robots con Flexibilidad en el eslabón". PHD Thesis in progress. UANL 1998. Reporte de Investigación DIE-02-97.

[15] Love L., Kress R., Jansen J. "Control for a Hydraulically Actuated Flexible-Prismatic Link Robot". IEEE Control Systems. Vol. 18. No. 1, February, 1998.

[16] Astrom K., Wittenmark B. "Computer Controlled Systems", Prentice Hall, 1990.

[17] Banavar R., Dominic P. "An LQG/ $H_\infty$  Controller for a Flexible Manipulator". IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol.3, No.4, December 1995.

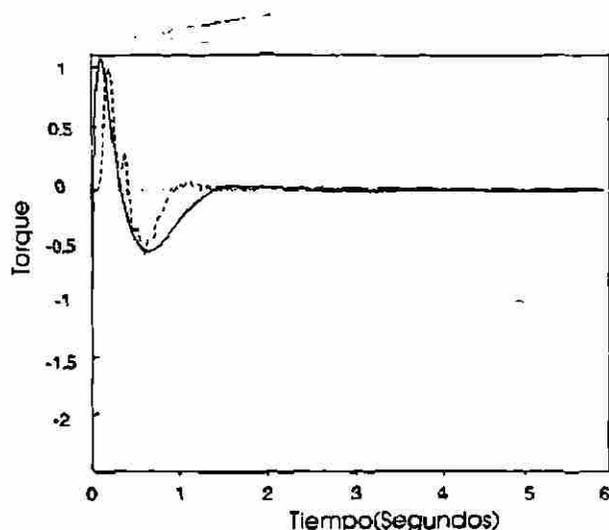


Figure 7.2. JPD Controller. Torque.

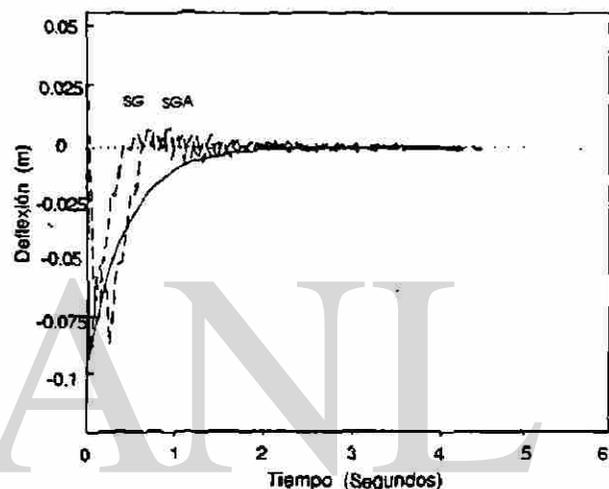


Figure 7.3. SG and SGA Controllers. Deflection

## 7 SIMULATION AND EXPERIMENTAL RESULTS

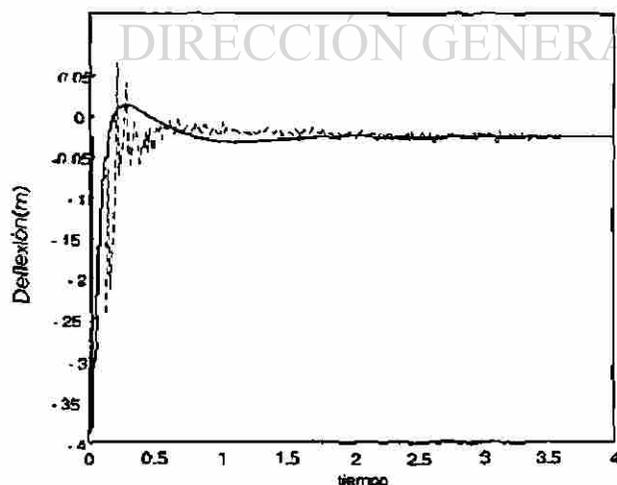


Figura 7.1. JPD Controller. Deflection.

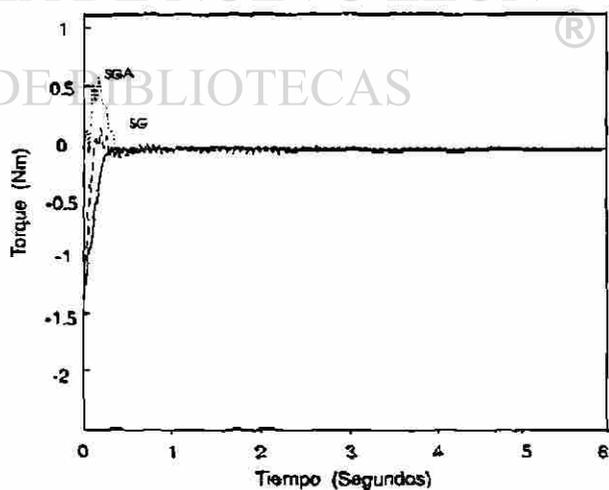


Figure 7.4. SG and SGA Controllers. Torque

X-Sender: iastedmb@mail.cadvision.com (Unverified)  
X-Mailer: Windows Eudora Pro Version 3.0.1 (32)  
Date: Thu, 12 Nov 1998 12:43:13 -0700  
To: aguilera@teclaredo.edu.mx  
From: IASTED <iastedmb@cadvision.com>  
Subject: MIC'99 Results

November 12, 1998

MARTHA I.A. HERNANDEZ  
INST. OF TECH. OF NUEVO LAREDO  
DEPARTMENT OF ELECTRICAL ENG.  
88240 NUEVO LAREDO  
TAM, MEXICO

Dear DR. HERNANDEZ,

It gives me pleasure to inform you that based upon the abstract  
we have received, your paper,

Paper #: 289-154 Entitled:

Experimental Study of finite and Infinite Model Based Controllers  
for a flexible Link robot

has been accepted for presentation as a short paper at the  
Eighteenth IASTED International Conference on Modelling,  
Identification and Control which is to be held at the Congress  
Innsbruck, Innsbruck, Austria on February 15-18, 1999.

Enclosed are special forms and instructions for the preparation of  
your manuscript.

We hereby invite you to attend the conference to present your  
research. We are looking forward to an enjoyable and informative  
conference.

Yours sincerely,

Nadia Hamza  
for the IASTED International Program Committee

P.S.

1. Please quote your paper number on all correspondence.
2. A slide projector and overhead projector will be available  
for your presentation. All slides and viewgraphs must be easy  
to read, please take great care in their preparation.
3. Authors must register and the payment and camera-ready  
manuscript must be received by January 4th, 1999.
4. New email address: calgary@iasted.com.

Dear Delegate,

# EXPERIMENTAL STUDY OF FINITE AND INFINITE MODEL BASED CONTROLLERS FOR A FLEXIBLE LINK ROBOT

M. AGUILERA-HERNANDEZ<sup>1</sup> and J. DE LEON-MORALES<sup>2</sup>

email: aguilera@teclaredo.edu.mx, jleon@ccr.dsi.uanl.mx

<sup>1</sup>Institute of Technology of Nuevo Laredo, Department of Electrical Engineering  
88240 Nuevo Laredo, Tam., México

<sup>2</sup>University of Nuevo León, Department of Electrical Engineering  
66450 San Nicolás de los Garza, N.L., México

## ABSTRACT

This paper presents an experimental study of finite based controllers (PD, LQR, Passive, LQG/ $H_\infty$  and Singular Perturbation) and three infinite model based controllers. The results are compared with the simulations to demonstrate the efficiency of each control technique.

**Keywords :** Flexible link robot, Lyapunov's Method, Distributed Parameter system.

## 1 INTRODUCTION

Over the last decade, the research area of light weight manipulators that consume less energy with an acceptable end effector accuracy had grown. This is because of the development of applications like aircraft antennas, satellite rescue arms and the industrial links for welding, painting or manipulators for nuclear waste remediation.

The flexible robotics arms have been frequently modeled using the Bernoulli beam theory or Timoshenko beam theory. In most of the cases small deflection assumption has been made. The model obtained for a flexible link robot is a set of integro-differential equations with coupled nonlinear boundary conditions, due to this characteristic, the original model is often reduced[4]. This can be done using assumed modes method, finite element technique or singular perturbation theory.

The control strategies are classified in Finite (or Reduced) Model Based Controllers and Infinite Model Based Controllers. In the literature, some controllers are called "model independent". In this article they are classified by the model used to derive them.

The great advantage of the reduced models is that the controller can be obtained using techniques of linear systems. However most of the recent studies has been concentrated in compensate the effects of the disregarded modes, usually called "spillover". A survey can be found in [3], where some finite dimensional control strategies

are analyze and compared, concluding that the "the effects of high order modes must be considered". Another similar survey can be found in [1].

An attempt to overcome the difficulties associated with the reduced models is the design of an infinite dimensional control strategy. The main advantage of the infinite model approach is the preservation of the model structure, usually destroyed by approximation techniques [5]. Although there has been several experimental studies of different controllers ([3],[1]), none of them have include the infinite model based controllers.

This paper examines several control strategies which have been implemented on a single link robot apparatus. The strategies include five *Finite Model Based Controllers* (Proportional-Derivative, the Linear Quadratic Regulator, LQG/ $H_\infty$ , the Passivity approach and a controller derived by using the Singular Perturbation Theory) and three *Infinite Model Based Controllers*. The first one (of the infinite model scheme) was proposed by Shifman in [5]. The variable needed for the implementation of this controller is the measurement obtained from a strain gage installed along the beam. The second, is a controller proposed by Yuan in [4]. The controller variables needed for implementation is the measurement of the angle hub with the first and second derivatives. The third one is proposed by Aguilera in [6], and the variables needed for the implementation are the hub variables, an auxiliary approximated variable and the end effector measurement. The simulations obtained for each controller are compared with the experimental results.

## 2 MODEL OF THE FLR

The single flexible link robot (FLR) consists of a flexible link attach to a base. The structure is fixed in one end and free on the other (Figure 2.1), were  $\omega(x, t)$  denotes the deflection of the beam with respect to the neutral

axis,  $t$  is the time variable,  $l$  is the beam length,  $x$  represents the spatial variable that index the beam points where  $x \in [0, l]$ ,  $\theta(t)$  denotes the rotation angle of hub. We assume that the beam is uniform with mass density  $\rho$ , Young's Modulus  $E$  and cross sectional inertia  $I$ . The hub inertia is denoted by  $I_h$  and the applied torque by  $\tau$ .

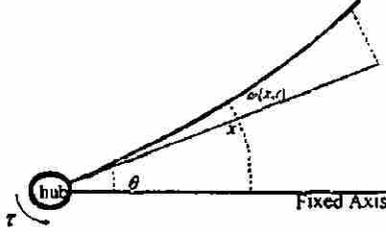


Fig. 2.1: Schematic Flexible Link Robot

**Remark 1** In what follows,  $(\cdot)$  represents differentiation with respect to  $x$ , and  $\dot{(\cdot)}$  represents differentiation with respect to time.

The dynamic model of the flexible link robot is represented by

$$\Sigma_{RFE} \begin{cases} (I_h + \rho l^3/3)\ddot{\theta}(t) + \rho \int_0^l x \ddot{w}(x, t) dx = \tau \\ EI w''''(x, t) + \rho \ddot{w}(x, t) + \rho x \ddot{\theta}(t) = 0 \\ \omega(0, t) = \omega'(0, t) = 0 \\ \omega''(l, t) = \omega'''(l, t) = 0 \end{cases}$$

### 3 INFINITE MODEL BASED CONTROLLERS

The first controller tested was the *Joint PD Controller (JPD)*. This controller was proposed by Yuan in [4] and is given by  $\tau = \frac{1}{1+\zeta} [-k\theta - \gamma(\theta - \theta_d) + \zeta I_h \ddot{\theta}]$ , where  $\theta_d$  represents the hub desired angle and  $\zeta > -1$ ,  $k > 0$  and  $\gamma > 0$  are design parameters. The control law does not require any feedback from the deflection variables. The design parameters were calculated using the assignment pole technique. The experimental values used were  $\zeta = 1$ ,  $\gamma = 40$ ,  $k = 21$ .

The second controller use an *auxilliary variable measure using a strain gage (SG)*. The controller is implemented with the feedback of the deflection variables. This controller was proposed by Shifman in [5]. The deflection variables are measure using a strain gage collocated along the beam.

The control law is given by  $\dot{\tau} = -c_0(X + c_2\ddot{\theta}) - c_1(\dot{X} + c_2\dot{\theta})$ , were  $X := \rho \int_0^l \int_0^l \ddot{e}(x_o) dx_o dx_1 + I_h \ddot{\theta}$ ,  $\ddot{\theta} = \theta'' - \theta$  and  $X$  represents all the error movement of the beam and is directly measure from the strain gage. The values of the

$c_i$  used for simulation are given by  $c_0 = 80$ ,  $c_1 = 15$ ,  $c_2 = .05$ .

The third controller is design using *finite element numerical approximation (SGA)*. The use of a strain gage for deflection measure are limited by external factors like temperature or pressure, and have to be calibrated. The longtude of the strain gage is also a limiting factor. The controller proposed has a similar form as Shifman's but the direct measure of the strain gage is approximated numerically, with the help of the material properties information and the feedback of the tip position. A finite technique is use to divide the beam in small links. For each link, the approximation of the strain gage is made. The total value of approximation is the combination of all the small links values. The approximation for each small link is given by  $A_p = \frac{1}{3} l^3 \ddot{\theta} + \frac{l^5}{8l_o} - \frac{1}{8} l^4$ , where  $l_o$  is a constant and equal to the beam length, and  $l$  is measure in real time during the beam trayectory to the desired position.

### 4 FINITE MODEL BASED CONTROLLERS

The procedure used to obtain a finite model was the assumed modes method. The linear system obtained has dimension  $2(\eta_e + 1)$ , were  $\eta_e$  is the number of modes. See [2,6] for details. The following table show the first three modes calculated and measured experimentally.

Mode	Calc.-Freq.	Measure-Freq.
1	2.11	1.9
2	13.29	13.1
3	37.21	33

The controllers designed based on this linear truncated model were the Proportional-Derivative (PD), the Linear Quadratic Regulator (LQR), the LQG/ $H_\infty$ , and the Passive. For details see [6]. The PD controller results is shown in figure (5.4). The graphics describe severe oscillations as the robot reach the desired point. This show that only feedback from hub is not enough to obtain a good response from the robot. The LQR results are shown in figure (5.5). This controller has better response than the PD. This method assure adequate gain and phase margins. The design of this controller for the multilink case depend on the robot configuration. The response of the passive controller is similar as the LQR. Only the torque needed is smaller than the one needed for the LQR. The LQG/ $H_\infty$  results are similar as the JPD controller. The  $H_\infty$  controller is design with the help of the  $h$  inf routine from Matlab. This routine was modified to accept new weights to optimize the system response. The singular perturbation controller was

design by means of the singular perturbations method. The method separate the model in two subsystems. One is consider the "fast subsystem" and the other "slow subsystem". The fast variables are identify as the elastic forces and their respective time derivatives. The advantage of this method is the order reduction of the model that allow to solve the problems of systems having less control signals than controlled variables. The response is similar as the SGA controller.

## 5 EXPERIMENTAL SETUP

The flexible robot equipment of one degree of freedom is shown in figure 5.1, it consists in an aluminium beam fixed on one end. A CD motor and a camera are mounted in the shaft of the motor. The camera's resolution is 0.014 cm/pixel. A led is used to measure the end beam position. The camera detects the led position and the deflection is measured. An interface is used to feedback the data and control to the equipment. The control is implemented in C language. To determine  $\theta$  a software filter was used. The *System Parameters* are: Camera Inertia  $0.002Kg\,m^2$ , Link length  $l = 0.914m$ , Link height  $2.54cm$ , Link width  $0.3175cm$ , Link mass  $0.06Kg$ , Link inertia  $0.0042Kg\,m^2$ , Flexural rigidity  $EI = 8Kg\,m^2/s^2$ , Linear density  $\rho = 0.8Kg/m$ . The flexible link robot finite was simulated using three modes. The simulations were performed using Matlab<sup>®</sup> with a stepsize of 0.01s.

The experiment consist in move the beam to a desired position. The computer collect the values of hub angle, deflection and driven torque. From the plots<sup>1</sup> one can notice that the curves obtained from simulations are closed to the ones obtained experimentally.

### Conclusions

An infinite and finite model based controllers were compared and tested in an experimental flexible robot equipment. The results show that controllers derived from the infinite model are a viable approach for the control of flexible link robots. Future work include the design of a controller based on infinite model with gravity effects.

### References

- [1] Acoustin, Chevareau, Glumineau, Moong, "Experimental Results for the End-Effector Control of a single Flexible Robotic Arm", IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol2, No. 4, Dec. 1994.
- [2] Canudas C., Siciliano B., Bastin G. "Theory of Robot Control", Springer Verlag. 2nd Ed., 1997.
- [3] Wang D. "Comparison of Control Strategies for the Single Flexible Beam". American Mathematical Society. 1993. 1069-5265/93

<sup>1</sup>Due of limitation of space, only the deflection variable result is showa for five controllers.

- [4] Yuan King, "Regulation of a geometrically exact flexible beam manipulator", Systems & Control Letters 25 (1995) 9-12.

- [5] Shifman J. PHD Thesis. "The Control Of Flexible Robots", Churchill College., March 1991.

- [6] Aguilera Martha, "Control de Robots con Flexibilidad en el eslabón". PHD Thesis in progress. UANL 1998. Reporte de Investigación DIE-02-97.

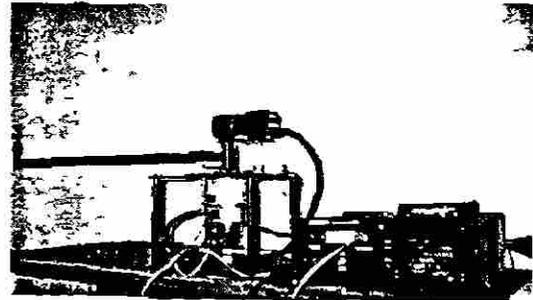


Figure 5.1: Experimental Flexible Robot

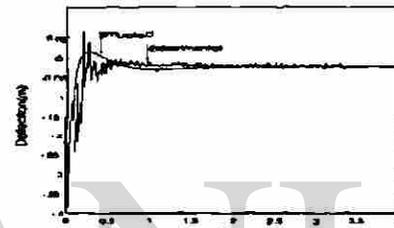


Figure 5.2. JPD Controller. Deflection

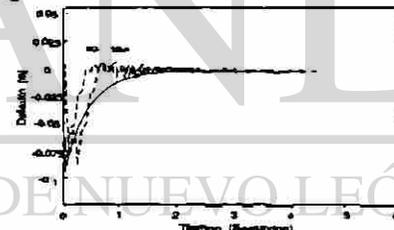


Figure 5.3. SG y SGA Control. Deflection. <sup>®</sup>

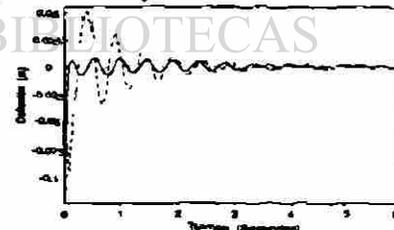


Figure 5.4. PD-Controller. Deflection.

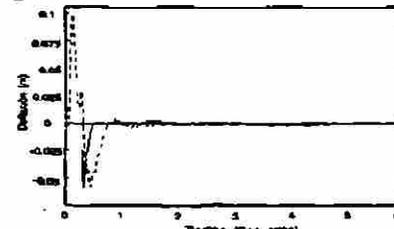


Figure 5.5. LQR-Control. Deflection.

