

**UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON**

**FACULTAD DE INGENIERIA CIVIL**



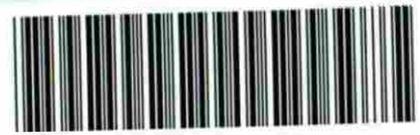
**UN TEXTO PARA LA ENSEÑANZA DEL  
DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO  
CONFORME AL REGLAMENTO ACI 318-95**

**POR  
JAVIER GARZA CORTINA**

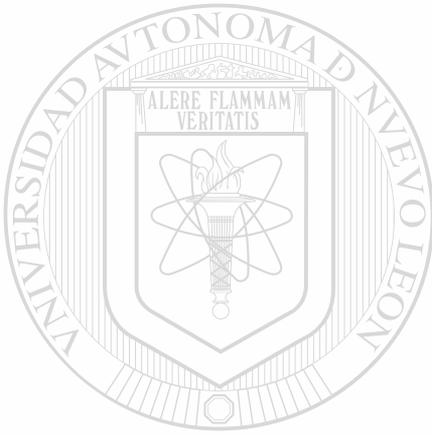
**COMO REQUISITO PARCIAL  
PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRIA EN CIENCIAS  
CON ESPECIALIDAD EN INGENIERIA  
ESTRUCTURAL**

**JULIO DE 1999**

TM  
TA681  
.5  
G3  
c.1



1080089087



# UANL

---

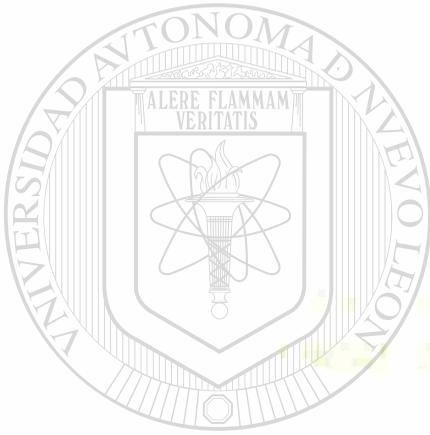
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA EN CIENCIAS ESTRUCTURALES



# UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

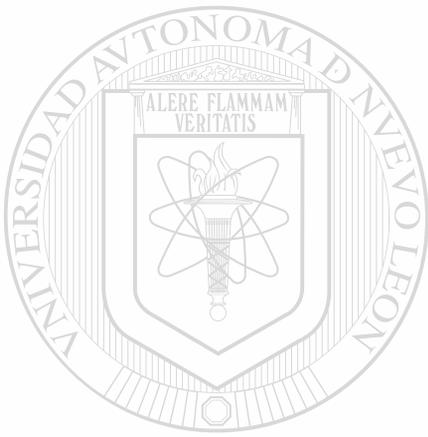


DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

COMO REQUISITO PARCIAL  
PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRIA EN CIENCIAS  
EN ESPECIALIDAD EN INGENIERIA  
ESTRUCTURAL

TITULO 1704

TM  
TA 8  
5  
G3

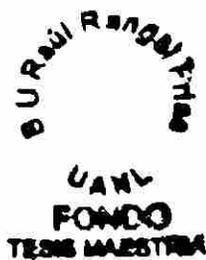


# UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE INGENIERIA CIVIL



UN TEXTO PARA LA ENSEÑANZA DEL  
DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO  
CONFORME AL REGLAMENTO ACI 318-95

Por

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

JAVIER GARZA CORTINA



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

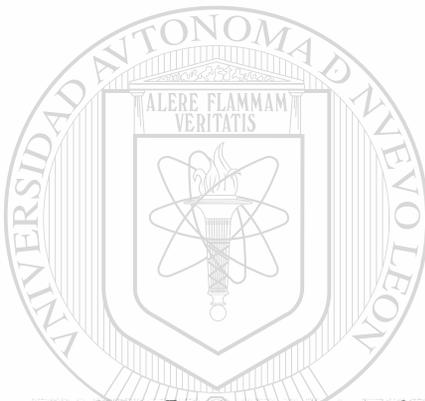
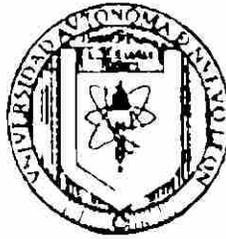
Como requisito parcial para obtener el Grado de  
MAESTRIA EN CIENCIAS con Especialidad en  
Ingeniería Estructural

Mayo 1994

**UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON**

**FACULTAD DE INGENIERIA CIVIL**

**DIVISION DE ESTUDIOS DE POSTGRADO**



**TESIS**

***UN TEXTO PARA LA ENSEÑANZA DEL DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE  
CONCRETO CONFORME AL REGLAMENTO ACI 318-95***

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

SUSTENTANTE.

ING. JAVIER GARZA CORTINA

ASESOR.

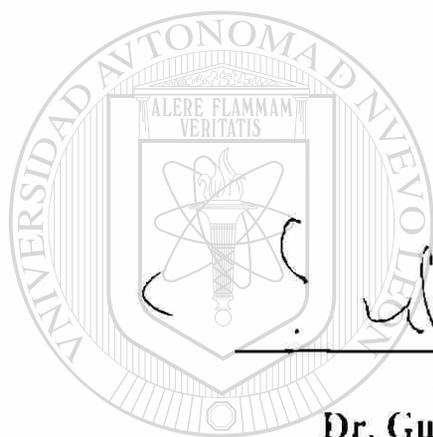
DR. GUILLERMO VILLARREAL GARZA

CO-ASESOR

DR. RICARDO GONZALEZ AL CORTA

**DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO CONFORME AL  
RI GLAMENTO ACI 318-95**

Aprobacion de Tesis



Asesor de la Tesis.

**Dr. Guillermo Villarreal Garza.**

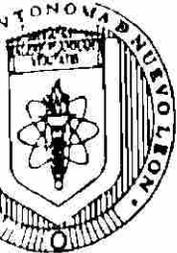
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

®

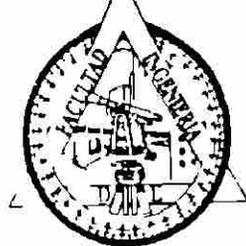
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Secretario de Postgrado.

**Dr. Ricardo González Alcorta.**



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
 FACULTAD DE INGENIERIA CIVIL  
 SECRETARIA DE ESTUDIOS DE POSTGRADO



COMPROBANTE DE CORRECCION

Tesista: JAVIER GARZA CORTINA

Tema de la tesis: UN TEXTO PARA LA ENSEÑANZA DEL  
 DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO CONFORME  
 AL REGLAMENTO ACI 318-95

Este documento certifica la corrección DEFINITIVA  
 del trabajo de tesis arriba identificado, en los aspectos: ortográfico,  
 metodológico y estilístico.

Recomendaciones adicionales:

(NINGUNA)

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
 DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Nombre y firma de quien corrigió:

Arq. Ramón Longoria Ramírez

El Secretario de Posgrado:

Dr. Ricardo González Alcorta

Ciudad Universitaria, a 19 de julio de 1999.

MONTERREY, N.L. A 9 DE JULIO DE 1999

**DR. RICARDO GONZÁLEZ ALCORTA**  
SUBDIRECTOR DE ESTUDIOS DE POSGRADO  
FACULTAD DE INGENIERIA CIVIL  
UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON  
PRESENTE

Estimado Dr. González

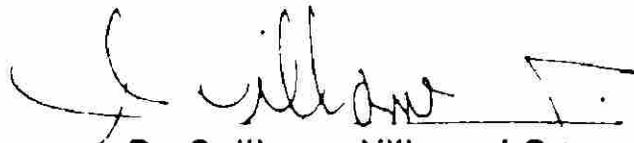
Por este conducto me permito comunicarle a Usted, que el Ing. Javier Garza Cortina pasante de la Maestría en Ciencias con Especialidad en Ingeniería Estructural ha concluido con su trabajo de tesis titulado UN TEXTO PARA LA ENSEÑANZA DEL CONCRETO REFORZADO DE ACUERDO AL REGLAMENTO ACI-95 por lo que no hay inconveniente para atender a su solicitud de Examen de Grado con los requisitos que exige el reglamento de exámenes profesionales de nuestra Institución he de agradecer e pasar las instrucciones necesarias para que le de trámite correspondiente en ese departamento a su digno cargo.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

Sin más por el momento, quedo de Usted agradeciendo de antemano su atención<sup>®</sup>

DIRECCION GENERAL DE BIBLIOTECAS

**Atentamente**



**Dr. Guillermo Villarreal Garza**  
**Asesor de Tesis**

San Nicolas de los Garza, N L , a 15 de Marzo de 1999

**DR. RICARDO GONZÁLEZ ALCORTA.**  
**Secretario de Estudios de Postgrado**  
**Facultad de Ingeniería Civil, U.A.N.L.**  
**Presente.-**

Estimado Dr Gonzalez Alcorta

Por medio de la presente, solicito a Usted la tramitacion correspondiente, para sustentar mi Examen de Grado, en virtud de que he concluido mi Tesis titulada "Un texto para la enseñanza del Concreto Reforzado, conforme al Reglamento ACI-318-95", la cual elabore como requisito parcial para obtener el grado de Maestro en Ciencias con especialidad en Ingeniería Estructural y la cual ha sido aprobada por mi asesor de Tesis, el Dr Guillermo Villarreal Garza en el aspecto tecnico y por el Arq Ramon Longoria Ramirez en el aspecto estilistico, ortografico y metodologico

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Sin mas por el momento y agradeciendo de antemano sus atenciones, me despido de Usted

ATENTAMENTE



**Ing. Javier Garza Cortina**

## **AGRADECIMIENTOS**

Esta tesis fue preparada con la ayuda y asistencia de quienes revisaron parte o todo el manuscrito. Deseo reconocer al Dr Guillermo Villarreal Garza, al Dr. Ricardo Gonzalez Alcorta y al M.C. Ing. Luis M. Aranda Malthés y expresarles mi sincero agradecimiento por sus sugerencias, críticas y estímulos no tan solo para este trabajo sino por todo el tiempo de convivencia en nuestra Facultad y en el ejercicio de la Ingeniería, producto de una gran amistad

Agradezco al Sr. Dr. Reyes Tamez Guerra Rector de nuestra Alma Mater, porque a través del proyecto Visión 2006 nos permite a los Profesores el desarrollo y superación profesional, así como al Ing. Antonio González Ireviño y al Dr. Rogelio González Castillo por su ayuda en los trámites necesarios para la realización de esta tesis.

Estoy especialmente agradecido con el Ing. Francisco Gámez Treviño por su ayuda, amistad y confianza tanto para la realización de este trabajo como en mi formación docente.

Aprecio y agradezco al Arq. Roberto J. Cantú Willman, a sus Colaboradores, a las Secretarías y Estudiantes de nuestra facultad por su gran ayuda para la reorganización e impresión de esta tesis.

Por último, agradezco a mi maravillosa familia por su continua paciencia y comprensión. Esta tarea no habría sido posible sin su infinito amor y fé en mí.

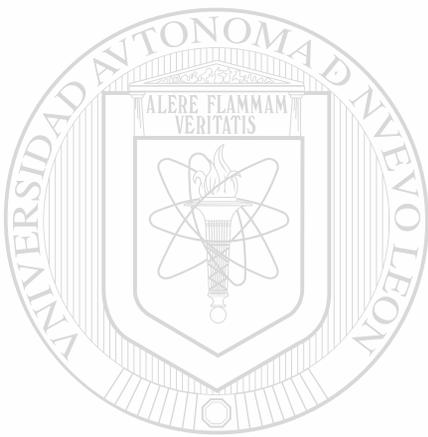
**JAVIER GARZA CORTINA**  
**Facultad de Ingeniería Civil**  
**Universidad Autónoma de Nuevo León**

## DEDICATORIA

Dedico esta tesis a mi más grande orgullo, mis padres ; por su apoyo total e incondicional por darme la profesión que yo elegí.

Irineo Garza Gómez (†)

Alicia Cortina Gutiérrez.



# UANL

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

# RESUMEN

Javier Garza Cortina

Fecha de graduacion : \_\_\_\_\_

Universidad Autonoma de Nuevo Leon

Facultad de Ingenieria Civil

Titulo de la tesis UN TEXTO PARA LA ENSEÑANZA DEL  
CONCRETO REFORZADO

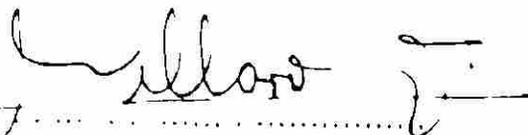
Numero de paginas

Candidato para el grado de Maestría  
en Ciencias con especialidad en  
Ingenieria Estructural

Area de estudio —Ingenieria Estructural

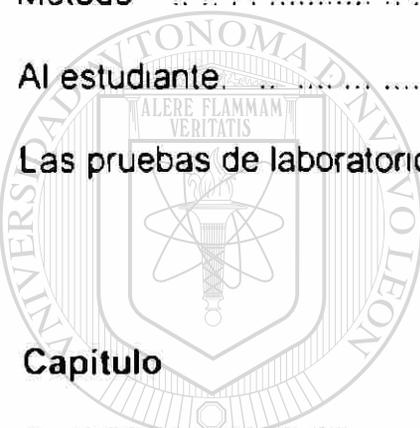
Proposito y Metodo del Estudio Como en la mayoría de las obras de ingenieria se utiliza el Concreto Reforzado, el ingeniero necesita una profunda formacion en el comportamiento basico del concreto y del acero como materiales estructurales. Por otro lado, el principal objetivo del ingeniero estructural es diseñar estructuras seguras, económicas y efectivas. Por lo tanto, con esta interpretacion fundamental como base, es esencial familiarizarse con los procedimientos actuales de diseño. Este texto, sirve para ambos propositos. A lo largo del texto se suministran procedimientos de diseño, paso a paso, con el proposito de guiar al estudiante dentro de los metodos, cada vez mas complejos, del diseño actual. Estos pueden convertirse en diagramas de flujo, para ayudar en la programación en computadoras. **Contribuciones y Conclusiones :** Los cambios del codigo ACI de 1995 relacionados con adherencia y anclaje generaron la estructuracion de la unidad 7. El texto es adecuado para un primer curso de un semestre. El segundo curso deberia incluir diseño de uniones, losas, metodos de analisis basados en la teoria de la plasticidad, losas sobre el terreno, cimentaciones y muros de contencion.

Firma del asesor : .....



# TABLA DE CONTENIDO

Proposición.....	I
Justificación.....	II
Un texto adecuado.....	III
Hipótesis.....	III
Objetivos .....	IV
Método .....	V
Al estudiante.....	V
Las pruebas de laboratorio .....	VII



UANL

Capítulo

Página

## 1: INTRODUCCION

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN.....	1
1.1 La mecánica del concreto reforzado.....	1
1.2 Las estructuras de concreto reforzado.....	1
1.3 Los miembros de concreto reforzado.....	3
1.4 Los factores que afectan la selección de un concreto para una estructura.....	5
1.5 Los códigos de edificación y el código del ACI.....	7

## 2: EL PROCESO DE DISEÑO

2.1 Los objetivos del diseño.....	8
2.2 El proceso de diseño.....	8

2.3 Los estados límite y el diseño de concreto reforzado.....	9
2.4 Seguridad estructural.....	12
2.5 Cálculo probabilístico de los factores de seguridad.....	14
2.6 Procedimientos de diseño especificados por el código ACI.....	18
2.7 Cargas y acciones.....	24

### **3: FLEXION: CONCEPTOS BASICOS, VIGAS RECTANGULARES**

3.1 Introducción.....	33
3.2 Teoría de flexión.....	36
3.3 Análisis de vigas de concreto reforzado.....	50
3.4 Ejemplos y problemas.....	51

### **4: FLEXION: VIGAS T Y VIGAS CON REFUERZO EN COMPRESION**

4.1 Introducción.....	82
4.2 Vigas T.....	82
4.3 Análisis de vigas T.....	87

### **5: CORTANTE EN VIGAS**

5.1 Análisis y diseño de vigas de concreto reforzado por cortante.....	128
5.2 Ecuaciones de diseño para la resistencia a corte de miembros sin refuerzo en el alma.....	128
5.3 Estados límite de falla por cortante, vigas con refuerzo en el alma.....	129
5.4 Localización del máximo cortante para diseño de vigas.....	138
5.5 Ejemplo.....	140
5.6 Problemas.....	147

## 6: TORSION

6.1	Introducción.....	151
6.2	El comportamiento de miembros de concreto reforzado sujetos a la torsión.....	161
6.3	El diseño por torsión, cortante y momento aplicando el código ACI 1995.....	163
6.4	El método de diseño por torsión aplicando el código ACI1995.....	163
6.5	Problemas.....	174

## 7: DESARROLLO, ANCLAJE Y TRASLAPE DEL REFUERZO

7.1	Introducción .....	176
7.2	Longitud de desarrollo... ..	179
7.3	Anclaje con ganchos.....	185
7.4	Diseño por anclaje.....	188
7.5	Cálculo de los puntos de corte en refuerzo por flexión... ..	200
7.6	Traslapes .....	209
7.7	Problemas .....	212

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

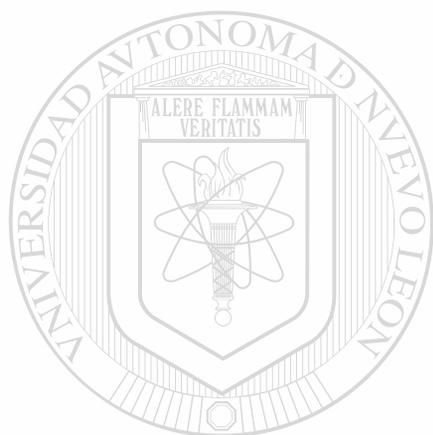
## 8: COLUMNAS CORTAS. CARGA AXIAL Y FLEXION

8.1	Introducción.....	214
8.2	columnas con estribos y columnas con espiral.....	214
8.3	Diagramas de interacción .....	217
8.4	Diagramas de interacción para columnas de concreto.....	221
8.5	Diseño de columnas cortas.....	225
8.6	Solución aproximada para columnas con estribos. Falla por compresión.....	238

8.7 Columnas cargadas biaxialmente.....	241
---	-----

## 9: COLUMNAS ESBELTAS

9.1 Introducción.....	249
9.2 Comportamiento y análisis de columnas articuladas.....	255
9.3 Diseño de columnas de marcos arriostrados (sin desplazamiento).....	276
9.4 Ejemplo de diseño de una columna de un marco no arriostrado (con desplazamiento).....	313
9.5 Problemas.....	331



# UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

# LISTA DE FIGURAS

## CAPITULO 1: INTRODUCCION

Figura	Página
1-1	Viga de concreto reforzado..... 2
1-2	Elementos en un edificio de concreto armado..... 4
1-3	Elementos de un edificio de concreto reforzado ..... 4

## CAPITULO 2: EL PROCESO DE DISEÑO

Figura	Página
2-1	Cargas y efecto de las cargas..... 13
2-2	Momento interno resistente..... 13
2-3	Comparación de los momentos de falla y nominal en vigas de concreto reforzado..... 15
2-4	Frecuencia de distribución para cargas sostenidas..... 15
2-5	Falla y no falla para combinaciones de cargas resistencias..... 17
2-6	Seguridad límite, probabilidad de falla..... 17
2-7	Diseño por esfuerzo de trabajo..... 20
2-8	Diagramas de momento. Ejemplo 2.1..... 22
2-9	Equilibrio de los esfuerzos debido a la contracción..... 25

## CAPITULO 3: FLEXION: CONCEPTOS BASICOS, VIGAS RECTANGULARES

Figura	Página
3-1	Flexión en una dirección..... 34
3-2	Dimensiones de sección transversal..... 34
3-3	Fuerzas internas en una viga..... 37
3-4	Diagrama de esfuerzos elásticos..... 37
3-5	Grietas, deformaciones y esfuerzos en una viga de prueba..... 40
3-6	Diagrama de momento-curvatura para la viga de prueba..... 41
3-7	Distribución de esfuerzos y deformaciones en una viga probada bajo cargas de servicio..... 44
3-8	Deformaciones medidas en pruebas de columnas cargadas excéntricamente..... 44
3-9	Deformación límite de compresión..... 46
3-10	Descripción matemática del bloque de esfuerzos de compresión.. 47
3-11	Valores para varias distribuciones de esfuerzos..... 47
3-12	Valores de $\alpha_1$ , $\beta_1$ en pruebas de prismas de concreto..... 49
3-13	Bloque de esfuerzos rectangular equivalente..... 52
3-14	Análisis de una sección transversal arbitraria..... 52
3-15	Vigas rectangulares con refuerzo por tensión..... 52
3-16	Fallas por tensión, compresión y balanceada..... 56
3-17	Vigas con dos camadas de refuerzo en tensión..... 60

## CAPITULO 4: FLEXION: VIGAS T Y VIGAS CON REFUERZO EN COMPRESION

Figura		Página
4-1	Losa en una dirección.....	83
4-2	Regiones de momento positivo y negativo en una viga T.....	84
4-3	Isométricos de vigas T.....	88
4-4	Descomposicion de una viga T.....	89
4 5	Figura ejemplo 4-1.....	94
4-6	Incremento en la capacidad a momento debido al refuerzo de compresión.....	107
4-7	Efecto del refuerzo de compresión en las deflexiones por cargas sostenidas.....	107
4-8	Efecto del refuerzo de compresión en la resistencia y ductilidad de vigas sub-reforzadas.....	110
4 9	Diagrama momento-curvatura para vigas con $\rho > \rho_b$ con o sin refuerzo de compresión.....	110
4 1	Deformaciones, esfuerzos y fuerzas en una viga con refuerzo a la c mpresion.....	111
4 11	Figura ejemplo 4-4.....	116
4 12	Figura ejemplo 4-5.....	120

## CAPITULO 5: CORTANTE EN VIGAS

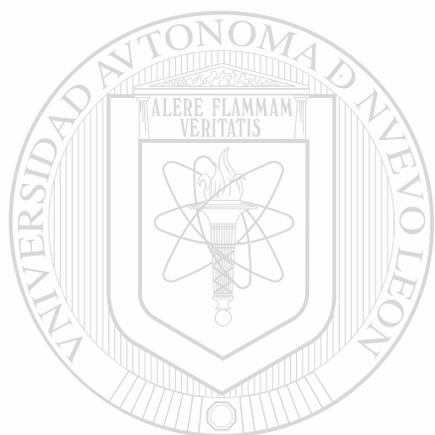
Figura		Pagina
5 1	Fuerzas internas en una sección agrietada c n estribos.....	130
5 2	Cortante resistido por los estribos.....	130
5 3	Maxim espaciamiento de estrib s.....	133
5 4	Anclaje de estribos.....	133
	Requi it s para detallado de estrib s.....	135
5 6	Diagrama de fuerzas cortantes en una viga c ntinua.....	139
5 7	Aplicaci n de la Seccion 11.1.3. del ACI.....	139
5 8	Figura ejemplo 5-1.....	140

## DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

## CAPITULO 6: TORSION

Figura		Pagina
6 1	Esfuerzos cortantes por torsión.....	152
6 2	Esfuerzos cortantes por torsion en una seccion circular cuadrada.....	152
6-3	Analogía de la membrana: barra circular.....	154
6 4	Analogía de la membrana: barra cuadrada.....	154
6 5	Analogía de la membrana: Miembro en forma de canal.....	155
6 6	Seccion transversal de puente.....	157
6 7	Esfuerzos principales de tensión y agrietamiento por torsion pura.....	159
6 8	Cortante, Torsion, y Momento combinados.....	160
6 9	Curva Momento angulo de torsión para una viga rectangular...	162
6 10	Interaccion de torsion y cortante.....	162

9-16	Longitud efectiva de columnas de marcos.....	278
9 17	Nomograma para factores de longitud efectiva.....	279



# UANL

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

## NOMENCLATURA

- $f_c$  = Resistencia a la compresión del concreto,  $\text{kg/cm}^2$  ó  $\text{LBS/pulg}^2$ .
- $d$  = Distancia desde la fibra extrema en compresión al centroide del refuerzo en tensión, cm., pulg, mm.
- $d_b$  = Diámetro nominal de la varilla, cm, mm.
- $f_y$  = Resistencia especificada a la fluencia del refuerzo  $\text{kg/cm}^2$ ,  $\text{LBS/pulg}^2$ ,  $\text{N/mm}^2$ .
- $l_d$  = Longitud de desarrollo, cm, pulg.
- $A_s$  = Área de acero de refuerzo en tensión,  $\text{cm}^2$ ,  $\text{pulg}^2$ .
- $A_s'$  = Área de acero de refuerzo en compresión,  $\text{cm}^2$ ,  $\text{pulg}^2$ .
- $b$  = Ancho de la cara de compresión del elemento, cm, pulg.
- $E_c$  = Módulo de elasticidad del concreto,  $\text{kg/cm}^2$ ,  $\text{LBS/pulg}^2$ ,  $\text{N/mm}^2$
- $E_s$  = Módulo de elasticidad del acero de refuerzo,  $\text{kg/cm}^2$ ,  $\text{LBS/pulg}^2$ ,  $\text{N/mm}^2$
- $l_n$  = Claro libre para momento positivo o cortante y promedio de los claros libres adyacente para momento negativo.
- $\gamma_c$  = Resistencia nominal al esfuerzo cortante proporcionada por el concreto.
- $W_c$  = Peso unitario del concreto,  $\text{ton/m}^3$ ,  $\text{LBS/pie}^3$ .
- $W_u$  = Carga factorizada por unidad de longitud de viga, o por unidad de área de losa.
- $\beta_1$  = Factor que se define en la sección 10.2.7.3 del Reglamento ACI 318-95.
- $\epsilon_r$  = Deformación neta a la tensión en el acero a tensión extremo, a la resistencia nominal.
- $\rho$  = Porcentaje de refuerzo no presforzado en tensión. =  $A_s/bd$
- $\rho'$  = Porcentaje de refuerzo no presforzado en compresión =  $A_s'/bd$
- $\rho_b$  = Porcentaje de refuerzo que produce condiciones balanceadas de deformación.
- $\phi$  = Factor de reducción de resistencia.

- $\lambda$  = Factor para considerar la deflexión adicional a largo plazo como se define en la sección 9.5.2.5 del código del ACI.
- $\epsilon$  = Factor que depende del tiempo para carga sostenida.
- $a$  = Peralte del bloque rectangular equivalente de esfuerzos definido según la sección 10.2.7.1.
- $A$  = Área efectiva en tensión del concreto que rodea a las varillas de refuerzo en tensión por flexión, y que tiene el mismo centroide que el refuerzo, dividida entre el número de varillas o de alambres,  $\text{cm}^2$ . Cuando el refuerzo por flexión consista en varillas o alambres de diferentes tamaños, la cantidad de éstos se debe calcular como el área total del refuerzo dividida entre el área de la varilla o del alambre de mayor tamaño utilizado.
- $A_c$  = Área del núcleo de un elemento sujeto a compresión reforzado con un espiral, medida hasta el diámetro exterior de la espiral,  $\text{cm}^2$ .
- $A_s$  = Área del refuerzo no presforzado en tensión,  $\text{cm}^2$ .
- $A_{sk}$  = Área del refuerzo lateral por unidad de altura en una cara lateral,  $\text{cm}^2/\text{m}$ . Ver la sección 10.6.7.
- $A_{s,min}$  = Cantidad mínima de refuerzo por flexión,  $\text{cm}^2$ . Ver la sección 10.5.
- $A_{st}$  = Área total del refuerzo longitudinal (varillas o perfiles de acero),  $\text{cm}^2$ .
- $A_t$  = Área del perfil de acero o tubo estructural en una sección compuesta,  $\text{cm}^2$ .
- $A_1$  = Área cargada.
- $A_2$  = El área de la base inferior del tronco mayor de una pirámide, cono o sección variable, contenida en su totalidad dentro del apoyo y que tenga por base superior el área cargada y con pendientes laterales de 1 vertical a 2 horizontal.
- $b_w$  = Ancho del alma, cm.
- $C_m$  = Factor que relaciona el diagrama de momento real con un diagrama equivalente de momento uniforme.
- $d_c$  = Espesor del recubrimiento de concreto, medido desde la fibra extrema en tensión al centro de la varilla o alambre más cercano a esa fibra, cm.
- $EI$  = Rigidez a la flexión del elemento en compresión.

$f_s$	=	Esfuerzo calculado en el acero de refuerzo para las cargas de servicio, $\text{kg/cm}^2$ .
$I_{se}$	=	Momento de inercia del acero de refuerzo respecto al eje centroidal de la sección transversal del elemento.
$I_t$	=	Momento de inercia de un perfil o tubo de acero estructural, respecto al eje centroidal de la sección transversal del elemento compuesto.
$k$	=	Factor de longitud efectiva para elementos en compresión.
$\ell_c$	=	Longitud del elemento a compresión de un marco, medida de centro a centro de las juntas del marco.
$\ell_u$	-	Longitud no apoyada de un elemento en compresión.
$M_c$	=	Momento factorizado para usarse en el diseño de un elemento en compresión.
$M_v$		Momento debido a cargas que producen considerable vibración.
$M_u$		Momento factorizado en la sección considerada.
$M_1$		Valor del menor momento de extremo factorizado de un elemento a compresión, positivo si el elemento está flexionado en curvatura simple, y negativo si está flexionado en doble curvatura.
$M_{1ns}$		Valor del momento de extremo factorizado de un elemento sujeto a compresión, al extremo en el que $M_1$ actúa debido a cargas, que causan un desplazamiento lateral no apreciable, calculado por el análisis convencional de marco elástico de primer orden.
$M_{1s}$		Valor del momento de extremo factorizado de un elemento sujeto a compresión, al extremo en el que $M_1$ actúa debido a cargas, que causan un desplazamiento lateral no apreciable, calculado por el análisis convencional de marco elástico de primer orden.
$M_2$	-	Valor del mayor momento de extremo factorizado de un elemento sujeto a compresión, siempre positivo.
$M_{2min}$	=	Valor mínimo de $M_2$ .
$M_{2ns}$	-	Valor del momento de extremo factorizado de un elemento sujeto a compresión, al extremo del cual $M_2$ actúa debido a cargas que causan un desplazamiento lateral no apreciable, calculado por el análisis convencional de marco elástico de primer orden.

(medido desde el diámetro exterior de la espiral) de un elemento reforzado con espiral sujeto a compresión.

- $a$  = Claro de cortante, distancia entre la carga concentrada y la cara del apoyo.
- $A_c$  = Área de la sección de concreto que resiste la transmisión de cortante,  $\text{cm}^2$ .
- $A_{cp}$  Área confinada por el perímetro exterior de la sección transversal del concreto,  $\text{cm}^2$ .
- $A_f$  = Área del acero de refuerzo en ménsula o cartela que resiste el momento factorizado  $[V_u a + (h-d)]$ ,  $\text{cm}^2$ .
- $A_g$  Área total de la sección,  $\text{cm}^2$ .
- $A_h$  = Área del acero de refuerzo por cortante paralelo al refuerzo de tensión por flexión,  $\text{cm}^2$ .
- $A_l$  = Área total del acero de refuerzo longitudinal para resistir la torsión,  $\text{cm}^2$ .
- $A_n$  Área del acero de refuerzo en ménsula o cartela que resiste la fuerza de tensión  $N_u$ ,  $\text{cm}^2$ .
- $A_o$  Área total confinada por el eje del refuerzo más externo torsional transversal cerrado,  $\text{cm}^2$ .
- $A_{oh}$  Área total confinada por el eje del refuerzo más externo torsional transversal cerrado,  $\text{cm}^2$ .
- $A_{ps}$  - Área del acero de refuerzo presforzado en la zona de tensión,  $\text{cm}^2$ .
- $A_t$  = Área de una rama de un estribo cerrado que resiste la torsión en una distancia "s",  $\text{cm}^2$ .
- $A_v$  Área del acero de refuerzo por cortante a una distancia s, o área del refuerzo por cortante perpendicular al refuerzo en tensión por flexión a una distancia s para elementos de gran peralte sujetos a flexión,  $\text{cm}^2$ .
- $A_{vf}$  = Área del refuerzo de cortante por fricción,  $\text{cm}^2$ .
- $A_{vh}$  Área del acero de refuerzo por cortante paralelo al refuerzo de tensión por flexión en una distancia "s",  $\text{cm}^2$ .
- $b_o$  Perímetro de la sección crítica para losa y zapatas, cm.

- $b_t$  = Ancho de la parte de la sección transversal que contiene los estribos cerrados que resisten la torsión.
- $b_w$  = Ancho del alma o diámetro de la sección circular, cm.
- $b_1$  = Ancho de la sección crítica definida en la secc. 11.12.1.2 medida en la dirección del claro, para el cual los momentos han sido determinados, cm.
- $b_2$  = ancho de la sección crítica definida en la sección 11.12.1.2 medida en dirección perpendicular a  $b_1$ , cm.
- $c_1$  = Tamaño de la columna rectangular, o equivalente del capitel o ménsula rectangular medido en dirección del claro para el cual van a determinarse los momentos, cm.
- $c_2$  = Tamaño de la columna rectangular, o equivalente del capitel o ménsula rectangular medido en dirección transversal a la del claro para el cual van a determinarse los momentos, cm.
- $f_{ct}$  = Resistencia promedio a la tensión del concreto hecho con agregado ligero  $\text{kg/cm}^2$ .
- $f_d$  = Esfuerzo debido a la carga muerta no factorizada en la fibra extrema de la sección en la cual los esfuerzo de tensión se producen por cargas aplicadas externamente,  $\text{kg/cm}^2$ .
- $f_{yv}$  = Resistencia a la fluencia del acero de refuerzo torsional transversal confinado,  $\text{kg/cm}^2$ .
- 
- $f_{vt}$  = Resistencia a la fluencia del acero de refuerzo longitudinal por torsión,  $\text{kg/cm}^2$ .
- $h_w$  = Peralte total de la sección transversal de la cruceta de cortante, cm.
- $h_w$  = Altura total de un muro medido desde la base a la parte superior, cm.
- $l_v$  = Longitud del brazo de la cruceta de cortante desde el centroide de la carga concentrada o reacción, cm.
- $l_w$  = Longitud horizontal de un muro, cm.
- $M_{cr}$  = Momento que produce agrietamiento.
- $M_m$  = Momento modificado.
- $M_{máx}$  = Momento máximo factorizado en la sección debido a las cargas aplicadas externamente.

$M_{2e}$	=	Valor del momento de extremo factorizado de un elemento sujeto a compresión, al extremo del cual $M_2$ actúa debido a cargas que causan un desplazamiento lateral no apreciable, calculado por el análisis convencional de marco elástico de primer orden.
$P_c$		Carga crítica.
$P_o$	-	Resistencia nominal a la carga axial a una excentricidad igual a cero.
$P_u$	=	Carga axial factorizada a una excentricidad determinada $\phi P_n$
$Q$	=	Índice de estabilidad para un piso.
$r$		Radio de giro de la sección transversal de un elemento en compresión
$V_u$		Cortante horizontal factorizado en un piso
$z$		Cantidad que limita la distribución del acero de refuerzo.
$\beta_1$		Factor que se define en la sección 10.2.7.3 del Reglamento ACI 318-95.
$\beta_d$		(a) Para marcos contraventeados $\beta_d$ es la relación de la máxima carga muerta axial factorizada a la carga total axial factorizada. (b) Para marcos no contraventeados, con excepción de lo requerido en (c), $\beta_d$ es la relación del cortante máximo factorizado sostenido dentro de un piso, al cortante total factorizado en ese piso
		(c) Para comprobaciones de estabilidad de marcos no contraventeados, elaborados de acuerdo con la sección 10.13.6, $\beta_d$ es la relación de la máxima carga axial sostenida factorizada, a la carga axial total factorizada.
$\delta_{ms}$		Factor de amplificación de momento para marcos contraventeados, para reflejar los efectos de la curvatura del elemento, entre los extremos del elemento en compresión.
$\delta_s$	-	Factor de amplificación de momento para marcos no contraventeados, para reflejar el desplazamiento lateral de entrepiso que resulta de las cargas laterales y gravitacionales.
$\Delta_o$		Deflexión lateral relativa entre la parte superior y la inferior de un piso, debido a $V_u$ , calculada utilizando un análisis de primer orden convencional de marco elástico y valores de rigidez que satisfagan la sección 10.11.1 del reglamento ACI 318-95
$\rho_s$		Relación de volumen del acero de refuerzo en espiral al volumen total del núcleo

$M_p$	=	Momento plástico resistente requerido en la sección transversal de la cruceta de _____ cortante.
$M_u$	=	Momento factorizado en la sección.
$M_v$	=	Momento resistente con el que contribuye el acero de refuerzo de la cruceta de cortante.
$N_u$	=	Carga axial factorizada normal a la sección transversal, que ocurre simultáneamente con $V_u$ , la cual debe tomarse como positiva para la compresión, negativa para la tensión, y debe incluir los efectos de la tensión debidos a la contracción y a la fluencia del concreto.
$N_{uc}$	-	Fuerza de tensión factorizada que actúa simultáneamente con $V_u$ , sobre la parte superior de una ménsula o cartela, que se debe tomar como positiva para la tensión
$P_{cp}$	-	Perímetro exterior de la sección transversal del concreto, cm.
$P_h$	-	Perímetro de la línea central externa del acero de refuerzo torsional transversal confinado, cm
$s$	-	Espaciamiento del acero de refuerzo por torsión o cortante en dirección paralela al acero de refuerzo longitudinal, cm.
$s_1$	-	Espaciamiento del acero de refuerzo vertical en un muro, cm.
$s_2$	-	Espaciamiento del acero de refuerzo por torsión o cortante en dirección perpendicular al refuerzo longitudinal o espaciamiento del acero de refuerzo horizontal en un muro, cm.
$t$	-	Espesor de un muro de una sección hueca, cm.
$T_n$	-	Resistencia nominal al momento torsionante.
$T_u$	-	Momento torsionante factorizado en la sección.
$V_c$	-	Resistencia nominal al cortante proporcionada por el concreto.
$V_{ci}$	=	Resistencia nominal al cortante proporcionada por el concreto, cuando el agrietamiento diagonal es el resultado de la combinación de cortante y momento.
$V_d$	-	Fuerza cortante en la sección debida a la carga muerta no factorizada.
$V_u$	-	Fuerza cortante factorizada en la sección, debida a cargas aplicadas externamente que se presentan simultáneamente con $M_{máx}$ .

- $V_n$  = Resistencia nominal al cortante.
- $V_p$  = Componente vertical de la fuerza efectiva de presfuerzo en una sección.
- $V_s$  = Resistencia nominal al cortante proporcionada por el acero de refuerzo de cortante.
- $V_u$  = Fuerza cortante factorizada en la sección.
- $V_n$  = Esfuerzo cortante nominal,  $\text{kg/cm}^2$ . Ver la sección 11.12.6.2.
- $\alpha_r$  = Angulo entre el acero de refuerzo debido al cortante por fricción y el plano de cortante.
- $\beta_c$  = Relación lado largo a lado corto del área de la carga concentrada o de reacción.
- $\phi$  = Angulo de las diagonales a compresión en la analogía de la armadura para torsión.
- $\lambda$  = Factor de corrección relacionado con el peso unitario del concreto.
- $\mu$  = Coeficiente de fricción.
- $\rho_h$  = Relación del área del acero de refuerzo horizontal por cortante al área total de concreto de una sección vertical.
- $\rho_n$  = Relación del área del refuerzo vertical por cortante al área de la sección total de concreto de una sección horizontal.
- 
- $\rho_w$  =  $\frac{.1s}{b_w d}$
- $A_b$  = Área de una varilla individual,  $\text{cm}^2$ .
- $A_{tr}$  = Área total de la sección transversal del acero de refuerzo transversal dentro de un espaciamiento "s" y que cruza al plano potencial de separación, a través del refuerzo que va a desarrollarse en  $\text{cm}^2$ .
- $f_{vt}$  = Resistencia especificada a la fluencia del acero de refuerzo transversal,  $\text{kg/cm}^2$ .
- $K_{tr}$  = Índice de acero de refuerzo transversal =  $\frac{A_{tr} f_{vt}}{105 s n}$  (la constante 105 lleva la unidad  $\text{kg/cm}^2$ )
- $\ell_a$  = Longitud adicional de empotramiento en el apoyo en el punto de inflexión,  $\text{cm}$ .
- $\ell_d$  = Longitud de desarrollo,  $\text{cm}$ .  $\ell_{db}$  x los factores de modificación aplicables.

- $l_{db}$  = Longitud básica de desarrollo, cm
- $l_{dh}$  = Longitud de desarrollo del gancho estándar en tensión, medida desde la sección crítica hasta el extremo exterior del gancho (longitud recta de empotramiento entre la sección crítica y el comienzo del gancho (punto de tangencia) más el radio de doblez y un diámetro de varilla), cm.
- $l_{bb}$  = Longitud básica de desarrollo del gancho estándar a tensión, cm.
- $n$  = Número de varillas o alambres que son traslapados o desarrollados a lo largo del plano de separación.
- $s$  = Espaciamiento máximo del acero de refuerzo transversal dentro de  $l_d$  centro a centro, cm.
- $s_w$  = Espaciamiento del alambre a desarrollarse o traslaparse, cm.
- $V_u$  = Fuerza cortante factorizada en la sección.
- $\alpha$  = Factor de ubicación del refuerzo. Ver la sección 12.2.4.
- $\beta$  = Factor de recubrimiento. Ver la sección 12.2.4.
- $\beta_b$  = Relación del área del acero de refuerzo cortado, al área total del acero de refuerzo en tensión en la sección.
- $\gamma$  = Factor del tamaño del refuerzo. Ver la sección 12.2.4.
- $\lambda$  = Factor del concreto de agregado ligero. Ver la sección 12.2.4

## PROPOSICIÓN

Tomando en cuenta que en la práctica de la Ingeniería Civil, en la mayoría de las obras se utiliza el concreto reforzado como material estructural ; es necesario que el egresado adquiera los conocimientos de la teoría fundamental para posteriormente aplicarlos en la revisión y diseño de estructuras.

Los principales propósitos de este texto introductorio al concreto reforzado son dar al estudiante una presentación clara y lógica de los conceptos básicos y los principios del concreto reforzado, y fortalecer la comprensión de ambos a través de ejemplos y comentarios sobre aplicaciones a la ingeniería práctica .

La disposición de estos propósitos hace hincapié en cada situación, con argumentos racionales.

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



## JUSTIFICACIÓN

Esta tesis, que pretende facilitar la enseñanza actualizada del concreto reforzado, mantiene un enfoque básico: primero, para establecer una clara interpretación del comportamiento del concreto reforzado, y luego, desarrollar experiencia en los métodos utilizados en la práctica de diseño actual, con referencia particular a las disposiciones del Código del American Concrete Institute (ACI) de 1995.

Se acepta ampliamente que la sola formación en técnicas especializadas para el diseño y en procedimientos de diseño codificados no es la base adecuada para una exitosa práctica profesional. Estos procedimientos están sujetos a cambios frecuentes. Para comprender y mantenerse actualizado, con éstas rápidas evoluciones, el ingeniero necesita una profunda formación en el comportamiento básico del concreto y del acero, como materiales estructurales y en el comportamiento de elementos de concreto reforzado y de estructuras. Por otro lado, el principal objetivo del ingeniero estructural es diseñar estructuras seguras, económicas y efectivas. Por tanto, con esta interpretación fundamental como base, es esencial familiarizarse con los procedimientos de diseño. Esta tesis sirve para ese propósito.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

## UN TEXTO ADECUADO

La mayoría de los catedráticos estarán de acuerdo en que un libro de texto seleccionado adecuadamente sería la mejor guía para que el estudiante entendiera y aprendiera la materia. Por lo tanto, un libro de texto debe ser accesible y escrito con un estilo que facilite la instrucción. Con estas premisas se han incluido algunas aclaraciones pedagógicas en el texto, con las cuales se intenta resaltar la utilidad del mismo, tanto para el estudiante como para el maestro.

El estilo de presentación y escritura, en ciertos párrafos es informal y relajado, con lo cual se pretende que el estudiante encuentre interesante y agradable la lectura. Se trata también de definir los términos y conceptos de la ingeniería estructural; específicamente, del concreto reforzado en la forma en que suelen hacerlo los ingenieros.

El aprendizaje de esta materia requiere de conocimientos básicos por parte del alumno, de matemáticas, así como de estática, resistencia de materiales y análisis estructural.

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

### HIPOTESIS

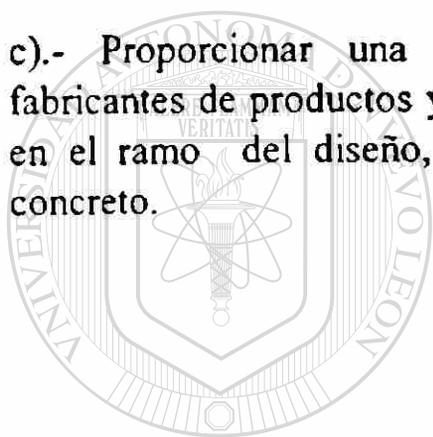
Si alguna persona, o un grupo de ellas, interesadas en el aprendizaje del diseño de elementos estructurales de concreto armado, aprende la teoría y aplica las prescripciones contenidas en este libro, para cada paso específico, logrará una satisfactoria capacitación para resolver los problemas de estructuras de concreto cuyo análisis y especificaciones se tratan.

## OBJETIVOS

a).- Proporcionar un curso elemental para el Diseño de Elementos de Concreto Reforzado, para los alumnos de la Licenciatura en la carrera de Ingeniero Civil.

b).- Ayudar a ingenieros y diseñadores en la adecuada aplicación de las normas del código ACI 318-95.

c).- Proporcionar una ayuda a profesores, arquitectos, contratistas, fabricantes de productos y materiales ; así como para personas involucradas en el ramo del diseño, de la construcción y control de estructuras de concreto.



# UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

## **MÉTODO**

Cada capítulo incluye un panorama global del tema que debe ser estudiado; en teoría, análisis y ejemplos y, en su caso, una prueba de laboratorio.

Como una ayuda para la rápida comprensión se intenta escribir el texto en forma clara y lógica. El estilo de presentación y escritura, en ciertos párrafos, es informal y relajado, con lo cual se pretende que el estudiante encuentre interesante y agradable la lectura.

Se trata también de definir los términos y conceptos de la ingeniería estructural; específicamente, del concreto reforzado, en la forma en que suelen hacerlo los ingenieros.

Se destacan algunas afirmaciones especiales, para ponderar su importancia y facilitar la búsqueda de soluciones pertinentes.

---

Con las ilustraciones se busca la eficiencia del material del texto, tanto como la de los ejemplos. La descripción de los conceptos se auxilia con figuras, diagramas y tablas.

## **AL ESTUDIANTE**

### **1.- COMO ESTUDIAR**

Muy a menudo a los profesores se les pregunta ¿Cómo debe estudiarse el Concreto Reforzado y cómo debe el alumno prepararse para los exámenes? No existe una respuesta simple para esta pregunta; pero sería oportuna ofrecer una, basada en mi experiencia personal en la enseñanza del curso durante más de 15 años.

Primero, adóptese una actitud positiva hacia esta disciplina, teniendo presente que el uso del concreto reforzado es fundamental en las obras de Ingeniería Civil y que la teoría se basa en los conceptos básicos de la mecánica y el estudio del material se confirma a través de pruebas de laboratorio.

## 2.- CONCEPTOS Y PRINCIPIOS

Es esencial que se comprendan los conceptos y principios básicos, antes de intentar la solución de los problemas. Esto se logra a través de una lectura cuidadosa de la teoría, antes de cada clase. En este proceso es útil marcar ciertos puntos que no suelen quedar muy claros. Se deben tomar notas en clase y aclarar con el profesor las dudas sobre cualquier aspecto.

Téngase presente que no todas las personas son capaces de retener a la primera el significado de un tema. Pueden ser necesarias varias lecturas del mismo y consultar. Los ensayos de laboratorio y las visitas a obras pueden complementar y reafirmar la lectura y las clases. Se debe razonar y reducir al mínimo el material por memorizar. Los corolarios son importantes para comprender la teoría. La comprensión se aumenta con hábitos de estudio eficientes, a través de discusiones con otros estudiantes y profesores y con la habilidad para resolver problemas reales. Formúlense aquellas preguntas que sean necesarias.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

## 3.- PLAN DE ESTUDIO

Es importante que se establezca un plan de estudio, para regular el trabajo diario.

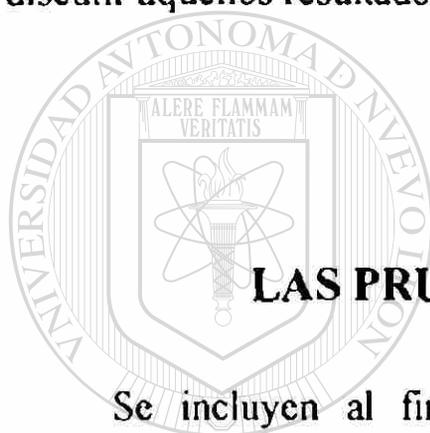
Procure avanzar en forma paralela al programa del maestro. La clase le parecerá más interesante si lee el material correspondiente por anticipado. Como regla general, deben dedicarse dos horas de estudio a cada hora de clase.

Si se tienen dudas búsquese la asesoría del maestro o de otros estudiantes que toman o hayan tomado el curso. Es muy importante que se evite la práctica de retrasar el estudio hasta algunos días antes del examen.

Esto, a menudo, conduce a malos resultados. Es preferible una noche de buen reposo a una fatigosa noche de repaso, antes de presentar.

#### 4.- LA IMPORTANCIA DE RESOLVER PROBLEMAS

Alguien dijo y estoy de acuerdo con él: “Usted no sabe nada sobre algo hasta que lo ha practicado”. Teniendo en cuenta esta afirmación, se recomienda desarrollar habilidades para resolver un amplio conjunto de problemas, para probarnos qué tanto sabemos sobre el tema. Es esencial que se comprendan los principios y conceptos básicos, antes de intentar resolver los problemas. Es buena práctica encontrar soluciones alternativas para un mismo problema, usando diferentes métodos, además de comparar y discutir aquellos resultados que pudiesen conducir a la solución óptima.



### **LAS PRUEBAS DE LABORATORIO**

Se incluyen al final, en el Apéndice B, las Normas Oficiales Mexicanas para el control de agregados, así como para determinar la resistencia  $f'_c$  y el módulo de elasticidad del concreto; así como el esfuerzo de fluencia,  $f_y$  y el módulo de elasticidad del acero de refuerzo, datos indispensables en el diseño estructural.

# **CAPITULO 1 :**

## **INTRODUCCION**

**1.1 Las estructuras de Concreto Reforzado**

**1.2 La mecánica del Concreto Reforzado**

**1.3 Los miembros de Concreto Reforzado**

---

**1.4 Algunos de los factores que afectan la selección de un concreto para una estructura.**

**1.5 Los Códigos de Edificación y el Código de la ACI.**

## **1.1.- LAS ESTRUCTURAS DE CONCRETO REFORZADO.**

El concreto y el concreto reforzado se usan como materiales de construcción en todos los países. En algunos, incluyendo E.U.A. y Canadá, el concreto reforzado es denominado el material estructural de la construcción en ingeniería

La composición universal del concreto reforzado utilizado en construcción la constituyen las varillas de acero de refuerzo, la grava, la arena y el cemento. El concreto reforzado se utiliza en puentes, edificios de todos tamaños y formas, tanques de almacenamiento, bases para estructuras, presas, etc.

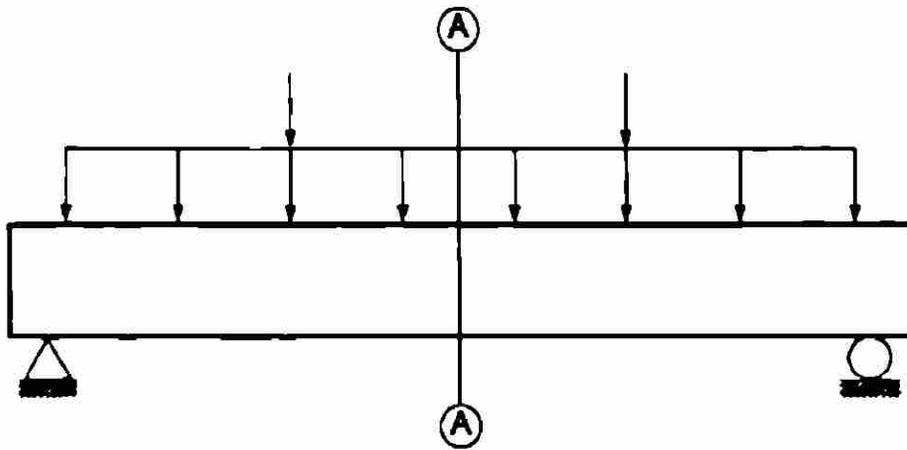
## **1.2.- LA MÉCANICA DEL CONCRETO REFORZADO.**

El concreto es muy resistente a compresión; pero poco para la tensión. Debido a esto, aparecen grietas debido a las cargas, a contracciones y a cambios de temperatura, dado que los esfuerzos de tensión exceden el esfuerzo de tensión resistido por el concreto.

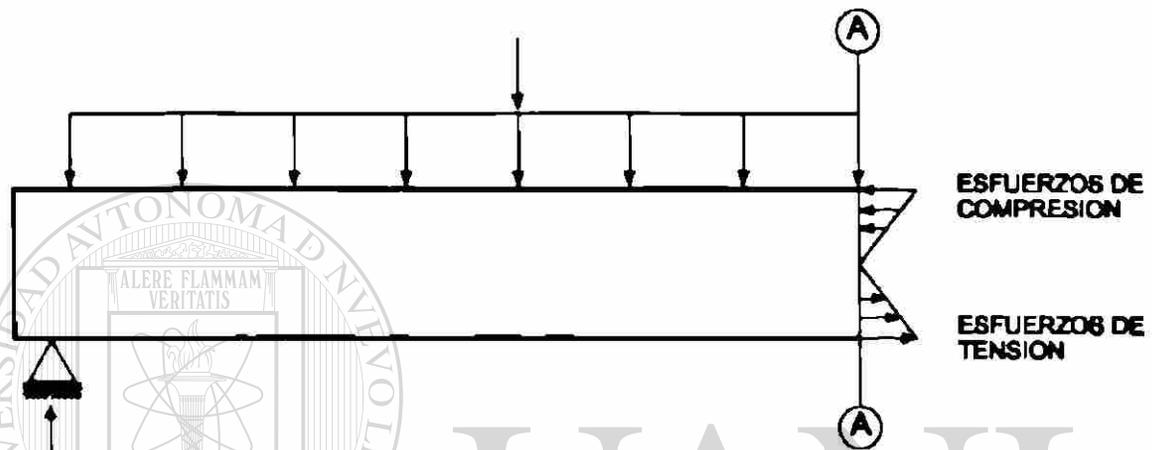
En una viga recta de concreto reforzado como se muestra en la Figura 1-1b, los momentos con respecto a "0" debidos a las cargas aplicadas, son resistidos por un par interno de tensión y compresión.

La viga falla muy súbitamente y por completo cuando se forman las grietas en la viga sin refuerzo.

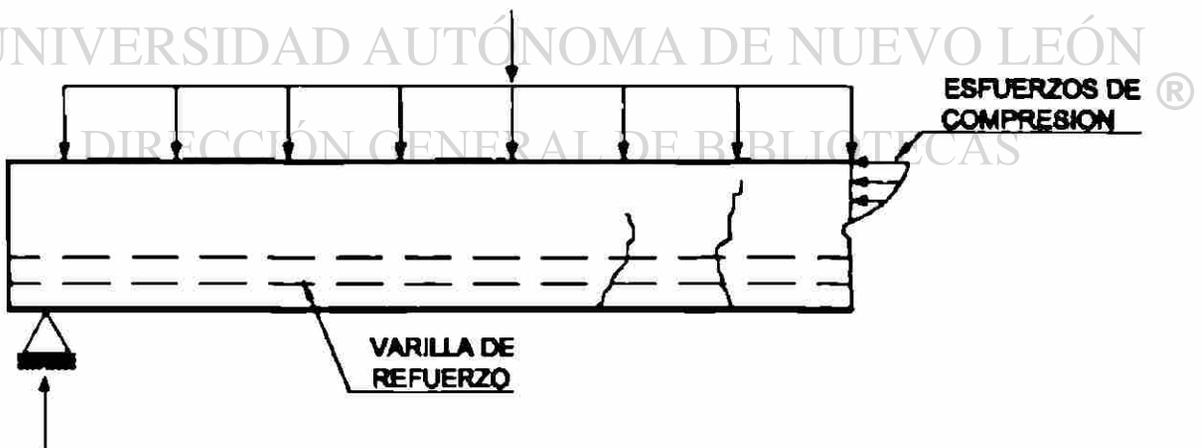
En una viga de concreto reforzado (Figura 1.1), las varillas de refuerzo embebidas en el concreto ejercen las fuerzas de tensión necesarias para formar el par interno resistente.



VIGA Y CARGAS.



ESFUERZOS EN UNA VIGA DE CONCRETO.



ESFUERZOS EN UNA VIGA DE CONCRETO REFORZADO.

FIGURA 1-1  
VIGA DE CONCRETO REFORZADO.

Para construir un elemento de concreto reforzado que forme parte de la estructura de un edificio, normalmente el concreto se cuela dentro de una forma o cimbra. La cimbra debe diseñarse para soportar el peso y la presión del concreto que ha de contener, así como el peso de la gente que efectúe el colado, el peso de las carretillas, la presión del viento, etc.

El refuerzo del elemento debe estar colocado adecuadamente, de acuerdo con los planos dentro de las formas, durante la operación del colado del concreto. Después de que el concreto ha endurecido, las formas deben ser removidas.

### **1.3.- LOS MIEMBROS DE CONCRETO REFORZADO.**

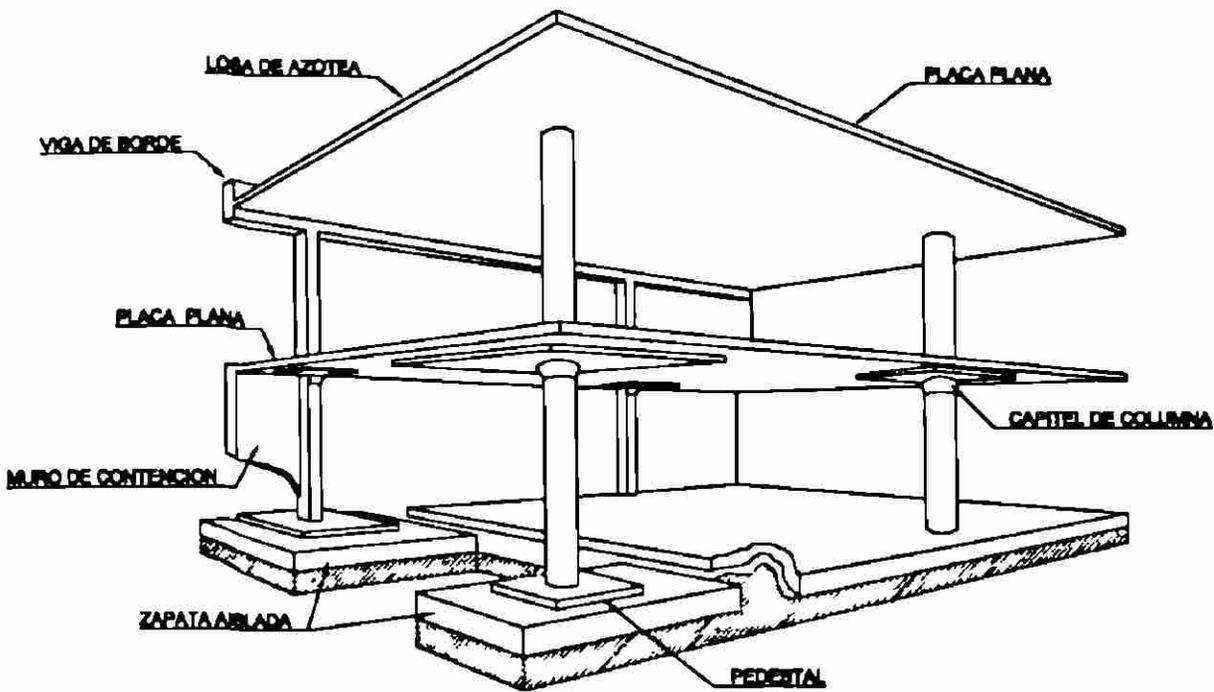
Las estructuras de concreto reforzado consisten de una serie de miembros individuales que, por interacción con los apoyos, transmiten las cargas de la estructura.

El segundo piso del edificio de la Figura 1-3 es un sistema de losa de concreto que utiliza "joists", las cuales son nervaduras paralelas que transmiten la carga sobre la losa. Las reacciones de los "joists" son las cargas sobre las vigas, las cuales transmiten la carga a sus apoyos que, en el caso de la figura, son muros y columnas. Las nervaduras o vigas "joist" actúan como vigas de sección "T". El primer piso de la figura 1-3, es un sistema de losa-viga en el que la losa se diseña como apoyada en las vigas y éstas se apoyan sobre las columnas.

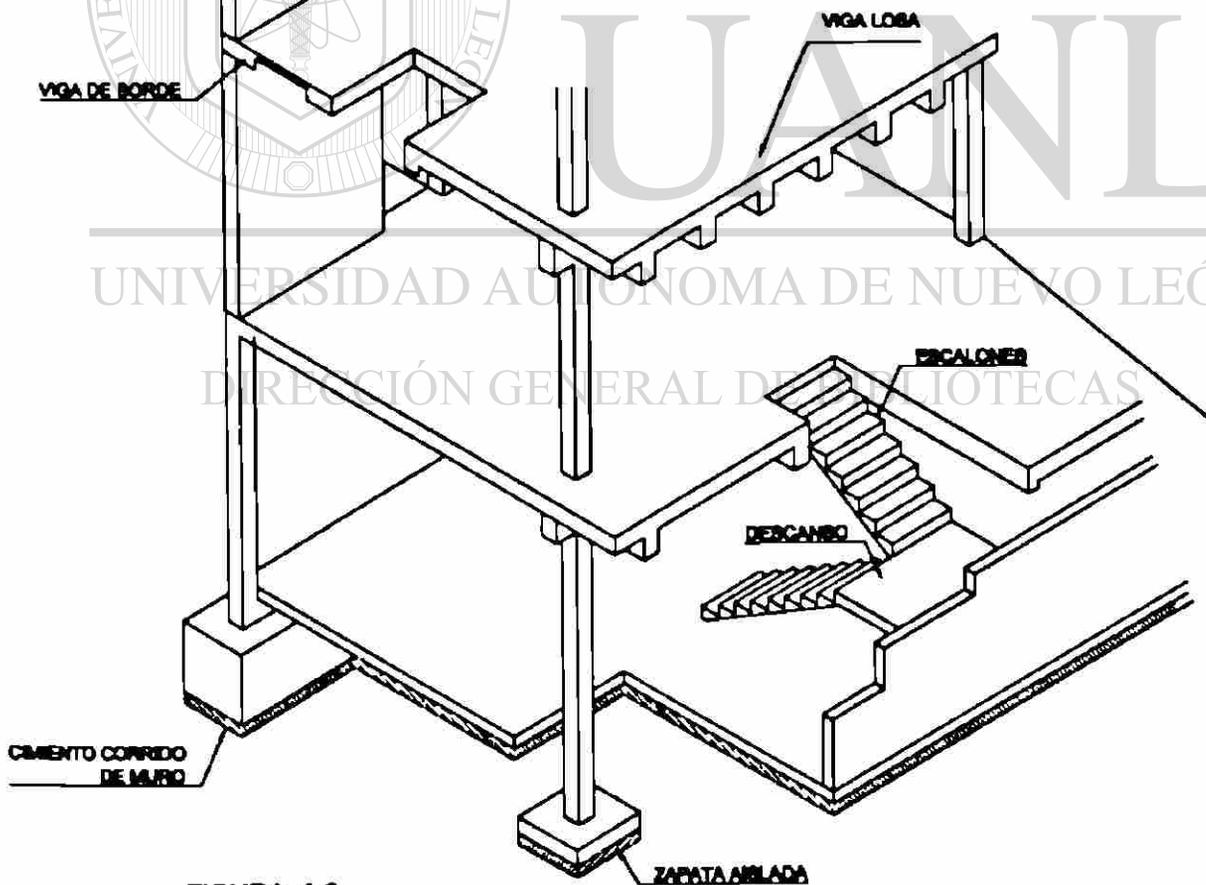
Las cargas sobre las columnas se transmiten a unas zapatas aisladas, las cuales transmiten su carga al suelo ; por lo que deben tener suficiente área para evitar el asentamiento del mismo. Algunos tipos de suelo requieren pilotes de cimentación u otras cimentaciones mayores. En un edificio, también puede ser necesario el uso de muros de contención, para soportar el empuje del suelo, cuando se tiene sótano, como se muestra también en la figura 1-2.

La carga sobre la losa la puede transmitir ésta también en dos direcciones. En la periferia de las columnas, en ocasiones se incrementa el espesor de la losa mediante ábacos ("droppanel") y capiteles cónicos o piramidales. Este incremento en el espesor proporciona una resistencia al incremento del momento y del cortante perimetral, en la cercanía de la columna. También reduce las deflexiones de la losa.

La losa de azotea del edificio mostrado en la Figura 1.2 es de espesor uniforme, sin ábacos ni capiteles en las columnas. A este tipo especial de losa plana también se le llama placa plana ("flat plate").



**FIGURA 1-2**  
**ELEMENTOS EN UN EDIFICIO DE CONCRETO ARMADO.**



**FIGURA 1-3**  
**ELEMENTOS EN UN EDIFICIO DE CONCRETO REFORZADO.**

## **1.4.- FACTORES QUE AFECTAN LA SELECCIÓN DE UN CONCRETO PARA UNA ESTRUCTURA.**

La selección de una estructura formada de concreto, acero, albañilería, o madera depende de la existencia de los materiales en el mercado y el número de alternativas en cuanto se refiere a la solución estructural.

1.- La economía. Frecuentemente, la consideración más importante es el costo total de la estructura. Este es, por supuesto, una función del costo de los materiales y la mano de obra para colocarlos. Frecuentemente, sin embargo, el costo total también depende del tiempo de ejecución por el constructor, costo que puede afectar la ocupación del edificio, y así reducir los gastos de financiamiento. Cualquier medida que se tome, ya sea en la selección del tipo de estructura o en el procedimiento de construcción, reduce el costo total de la obra.

En algunos casos, la economía, de la estructura a largo plazo, puede ser más importante que el costo inicial, debido a que el mantenimiento y durabilidad son consideraciones importantes.

2.- Selección del material adecuado para su función arquitectónica y estructural. En un sistema de concreto reforzado, el diseñador frecuentemente combina las funciones Arquitectónica y Estructural. El concreto tiene la ventaja de que es colocado en condición plástica y adopta la forma y textura deseadas. A todos los elementos de concreto reforzado, tales como : vigas, losas, columnas y muros, se les puede dar un acabado arquitectónico atractivo, aún cuando fueron diseñados para soportar cargas de gravedad, viento o sismo.

3.- La resistencia al fuego. La estructura de un edificio puede resistir los efectos del fuego y se conserva mientras que el edificio pudiese ser evacuado y el fuego se extinga. El concreto puede estar próximo al fuego de 1 a 3 horas, sin que se alteren sus propiedades mecánicas.

4.- La rigidez. Raramente las vibraciones por viento, en un edificio, son un problema ; debido a la rigidez de la masa de la estructura de concreto, lo cual permite gran variedad de usos habitacionales o de otros tipos.

5.- El bajo mantenimiento. Los elementos de concreto requieren de menor mantenimiento que los de acero o de madera. Esto es debido a la densidad, pues el aire contenido en el concreto ha sido expuesto a la atmósfera, y esto permite un drenaje adecuado en la estructura.

**6.- La disponibilidad de los materiales.** La arena, la grava, y el cemento se mezclan fácilmente y están casi siempre disponibles ; el acero de refuerzo puede ser transportado con mayor facilidad que el acero estructural. Esto permite usar el concreto en grandes áreas, por más alejadas de las ciudades que éstas estén.

Por otro lado, hay una serie de factores que deben tomarse en cuenta al seleccionar el concreto reforzado. Estos incluyen:

**1.- La baja resistencia a la tensión.** A temprana edad, la resistencia a la tensión en el concreto es mucho más baja que la resistencia a la compresión (cerca de 1/10) por lo que el concreto se puede agrietar. Para fines estructurales, esto se soluciona, con acero de refuerzo, las fuerzas de tensión controlan el ancho de las grietas dentro de valores aceptables.

**2.- Las formas y ademes.** La construcción de elementos colados en el lugar implica tres pasos que no están involucrados con las estructuras de acero o de madera. Estos son: a) La construcción de las formas, b) La remoción de éstas formas y, c) El apuntalamiento adecuado, hasta que el concreto alcance una resistencia considerable.

**3.- La relación de la resistencia por unidad de peso o volumen.** La resistencia a la compresión, del concreto es del 5 al 10% de la del acero, mientras que la densidad específica es del 30% de la del acero. Como resultado de esto, las estructuras de concreto requieren de mayor volumen que las estructuras de acero y mayor peso.

---

Por esta razón, las estructuras de grandes claros a menudo se construyen de acero de acero.

**4.- Los cambios de volumen con el tiempo.** Tanto el concreto como el acero tienen aproximadamente la misma expansión y contracción térmica.

Debido a que hay menor masa de acero para ser calentado o enfriado, ya que el acero es mejor conductor que el concreto, una estructura de acero es más afectada por lo cambios de temperatura que una estructura de concreto.

Por otro lado, si en el concreto, las deformaciones son restringidas, se puede causar deflexiones que tienden a incrementarse con el tiempo ; posiblemente al doble, debido a la vibración del concreto sometido a cargas sostenidas.

## 1.5.- LOS CÓDIGOS DE EDIFICACIÓN Y EL CÓDIGO DEL ACI

La primera reglamentación para edificios de concreto reforzado fue publicada por el Profesor Mörsch, de la Universidad de Stuttgart, en Prussia en 1904. Posteriormente, aparecieron otras especificaciones en Britania, Francia, Austria y Suiza, entre 1907 y 1909.

La "American Railway Engineering Association" formó un Comité, en Masonry, en 1890. En 1903, este Comité presentó especificaciones para Concreto con cemento Portland. Entre 1908 y 1910, la "National Association of Cement" publicó las "Standard Building Regulations for the Use of Reinforced Concrete".

En 1904, se formó un Comité en Concreto y Concreto Reforzado por la "American Society of Civil Engineers", la "American Society for Testing and Materials", la "American Railway Engineering Association" y la "Association of American Portland Cement Manufacturers". Este grupo se unió para formar el ACI (American Concrete Institute). Una historia sobre los Códigos sobre Concreto Reforzado fue redactada en 1954 por Kerekes y Reid.

Desde entonces surgió el Reglamento de las Construcciones de Concreto Reforzado (ACI-318) el cual se complementa con un sección de Comentarios

Este Código, el cual es referido generalmente como "El Código ACI", ha sido incorporado en muchos códigos de edificación, en Los Estados Unidos, y sirve como base de comparación para los Códigos de Canadá, de Nueva Zelanda, de Australia y de partes de Latino América.

El Código ACI es revisado y nuevamente publicacado cada seis años. El ACI-318-95 es la revisión publicada en 1995. Una revisión intermedia o suplemento se publica a la mitad del periodo de seis años.

Las reglas para el Diseño de puentes de Concreto Reforzado son especificadas en el "STANDARD SPECIFICATIONS FOR HIGHWAY BRIDGES", la "American Association of State Highway and Transportation Officials", en Washington, D.C.

Cada nación o grupo de naciones, en Europa tiene un Código para las Construcciones de concreto Reforzado. El CEB-FIP Código Modelo para Estructuras de Concreto publicado en 1978 y revisado en 1990 por el Comité Internacional de Béton, Lausanne, intenta servir como base de los Códigos de Europa

# **CAPITULO 2 :**

## **EL PROCESO DE DISEÑO**

**2.1 Los Objetivos del Diseño.**

**2.2 El Proceso de Diseño**

**2.3 Los Estados Límite y el Diseño de Concreto Reforzado.**

---

**2.4 La Seguridad Estructural.**

**2.5 El Cálculo Probabilístico de los Factores de Seguridad.**

**2.6 Los Procedimiento de Diseño Especificados por el Código ACI.**

**2.7 Cargas y Acciones.**

## 2.1.- LOS OBJETIVOS DEL DISEÑO.

Una estructura de concreto deberá satisfacer cuatro criterios, deberá ser :

**1.- Apropriada.** El arreglo de espacios y claros, las alturas libres, los accesos y las áreas de flujo deben ser funcionales. La estructura deberá ser no contaminante y estética.

**2.- Económica.** El costo total de la estructura no debe exceder del presupuesto dado al cliente. Frecuentemente, el equipo de trabajo busca soluciones económicas.

**3.- Estructuralmente segura.** Una estructura ideal involucra dos aspectos:

- (a) Debe soportar las cargas con seguridad.
- (b) No debe tener deflexiones excesivas.

**4.-De fácil mantenimiento.** Una estructura deberá diseñarse de tal forma que se requiera el mínimo mantenimiento y a un bajo costo.

## 2.2- EL PROCESO DE DISEÑO.

El proceso de diseño es una toma de decisiones secuencial e iterativa. Las tres fases principales del mismo son:

### 1.- La definición de las necesidades del cliente y prioridades.

Esto involucra requisitos de uso del edificio o estructura, el funcionamiento, la apariencia estética y el presupuesto. Este último implica : el costo directo (materiales, mano de obra, y equipo), el tiempo de ejecución para poder ocupar la obra rápido y la disminución de gastos de conservación.

### 2.- El desarrollo del concepto de proyecto.

Con base en las necesidades del cliente y las prioridades, se presenta un número de posibles soluciones desarrollándolas. Se revisan y se selecciona la mejor solución, procurando que sea la que coincide con las necesidades del cliente, funcional y estéticamente.

Al proyecto arquitectónico anterior se le busca adaptar la solución estructural. Basándose en un análisis aproximado de los momentos, los cortantes, y las fuerzas axiales, seleccionando el tamaño del miembro, para cada tramo de estructura. Con esto, es posible estimar el costo y seleccionar el sistema estructural adecuado.

**3.- El diseño de sistemas individuales.** Una vez que se ha seleccionado el sistema estructural y se tienen las dimensiones generales, puede diseñarse la estructura. Para diseñar una estructura, se hace un análisis estructural para determinar los momentos, las fuerzas cortantes y axiales, que actúan en cada miembro; para diseñarlo adecuadamente, tomando en cuenta, la estética, el procedimiento de construcción y el futuro mantenimiento. La solución final del proceso de diseño se dibuja detalladamente en planos, añadiendo las especificaciones correspondientes.

## **2.3- LOS ESTADOS LÍMITE Y EL DISEÑO DE CONCRETO REFORZADO.**

### **Estados límite.**

Cuando una estructura o un elemento estructural comienza a deteriorarse por su intenso uso, se dice que ha caído en "estado límite". Los estados límite de las estructuras de concreto reforzado se han dividido en tres grupos básicos.

**1.- Estados límite último.** Esto implica el colapso de una parte o del total de la estructura. Si una estructura se colapsa, puede ocasionar pérdidas de vidas y pérdidas financieras. Los estados límite son:

**(a).- La pérdida de equilibrio de una parte o del total de la estructura,** como un cuerpo rígido. Este tipo de falla generalmente es un ladeo o desplazamiento de la estructura completa y ocurre si no se desarrollan las reacciones necesarias para el equilibrio.

**(b).- La ruptura de las partes críticas de la estructura,** provocando el colapso parcial o total.

**(c).- El colapso progresivo.** En algunos casos, una falla menor localizada puede provocar que los miembros adyacentes fallen y la estructura se colapse. El colapso progresivo se puede prevenir o reducir, corrigiendo los detalles; como pueden ser las uniones y probar con alternativas de carga en el caso de una falla localizada. Algunas fallas ocurren durante la construcción. el calculista debe diseñar tomando en cuenta las cargas y los procedimientos de construcción.

**(d).**- La formación de mecanismo plástico. Un mecanismo se forma cuando el acero de refuerzo fluye y produce una rótula plástica en varias secciones haciendo la estructura inestable.

**(e).**- La inestabilidad debida a las deformaciones de la estructura. Este tipo de falla se debe al pandeo.

**(f).**- La fatiga. Falla de los miembros debido a ciclos de refuerzo, repetidos bajo cargas de servicio, pueden provocar el colapso.

**2.-** Los estados límite de servicio. Esto implica la ruptura de la estructura ; pero sin llegar al colapso. Reduce la vida útil de la estructura. Estos estados incluyen:

**(a).**- Las deflexiones excesivas para servicio normal. Pueden ser causadas por maquinaria o mal funcionamiento, pueden ser visiblemente inaceptables, por dañar los miembros de la estructura y cambiar la distribución de las fuerzas. En cubiertas con drenaje pluvial, el agua almacenada puede incrementar las deflexiones, lo cual provoca que se almacene más agua, hasta que se exceda de la capacidad de la cubierta y esto produce falla.

**(b).**- El excesivo ancho de grieta. Se pueden presentar grietas en el concreto, antes de que trabaje el refuerzo, lo cual permite el paso del agua, causando la corrosión del acero de refuerzo y el deterioro del concreto.

**(c).**- Las vibraciones no deseadas. Las vibraciones verticales en pisos o puentes y las laterales y torsionales, en edificios, pueden producir estados límite en el servicio.

**3.-** Los estados límite especiales. Esta clase de estados límite implica daño o falla, debido a condiciones o cargas anormales, incluye:

**(a).**- Daño o colapso por sismos.

**(b).**- Efectos estructurales por fuego, explosiones o colisiones vehiculares.

**(c).**- Efectos estructurales por corrosión o deterioro.

El diseño por estados límite es un proceso que incluye:

1.- La identificación de todos los modos de falla.

2.- la determinación de niveles aceptables de seguridad en la ocurrencia de cada estado límite.

3.-Consideración por parte del calculista del significado de los estados límite.

## Relación del diseño básico.

La figura 2-1a muestra una viga soportando un peso muerto,  $w$ , más unas cargas  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$ . Estas cargas producen momentos flexionantes, distribuidos como se muestra en la Fig. 2-1b. Las cargas pueden producir también: cortante, carga axial, torsión, deflexión y vibración.

El momento interno resistente cuando la sección transversal falla, es llamado "capacidad de momento" o "momento resistente".

La viga mostrada en la Figura 2-2 soportará con seguridad las cargas si la resistencia de la sección excede los efectos de la carga.

$$\text{Resistencia} \geq \text{efectos de la carga} \quad (2-1)$$

Si consideramos la posibilidad de que la resistencia pueda ser menor que la encontrada, y los efectos de la carga mayores, llamando  $\phi$  al factor de reducción de resistencia, menor que 1, y  $\alpha$  a los factores de carga mayores que 1, e introduciéndolos en la ecuación anterior:

$$\phi R_n \geq \alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \dots \quad (2-2)$$

donde:  $R_n$  es la resistencia nominal y

$S$  es el efecto de carga basado en cargas específicas.

Escribiendo en términos de momento, la ecuación (2-2):

$$\phi_M M_n \geq \alpha_D M_D + \alpha_L M_L \quad (2-3a)$$

donde:  $M_n$  = Momento resistente nominal.

La palabra "nominal" implica que la resistencia se calcula en función de las resistencias específicas del acero y el concreto y las dimensiones de la sección transversal del elemento.  $M_D$  es el momento flexionante debido a la carga muerta y  $M_L$  debido a la carga viva;  $\phi_M$  es factor de reducción de resistencia para momento; y  $\alpha_D$  y  $\alpha_L$  son los factores de carga muerta y viva, respectivamente.

Ecuaciones similares se pueden escribir para cortante, v, o carga axial, P:

$$\phi_v V_n > \alpha_D V_D + \alpha_L V_L + \dots \quad (2-3b)$$

$$\phi_P P_n \geq \alpha_D P_D + \alpha_L P_L + \dots \quad (2-3c)$$

La ecuación 2-1 es llamada la ecuación básica de diseño límite. Las ecuaciones (2-3b y c), son formas especiales de la ecuación básica. La ecuación 11-1 de el Código ACI, por ejemplo, es la misma que la ecuación 2-3b, excepto que en esta ecuación, el grupo de términos ( $\alpha_D V_D + \alpha_L V_L + \dots$ ) están expresadas como  $V_u$ , el cual se define como "fuerza cortante factorizada". En el Código ACI el símbolo U se usa para referirse a la combinación ( $\alpha_D D + \alpha_L L + \dots$ ). Esta combinación se define como la resistencia requerida para las cargas factorizadas. Los símbolos  $M_u$ ,  $V_u$ ,  $T_u$ , se refieren a los "efectos de la carga factorizada" calculadas con las cargas factorizadas U, y se denotan con el subíndice u.

## 2.4.- SEGURIDAD ESTRUCTURAL

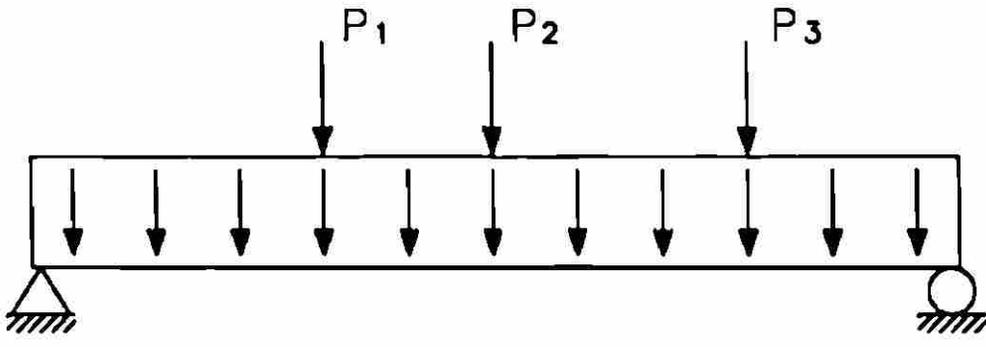
Hay tres razones significativas para establecer los factores de seguridad que son necesarios en el diseño estructural:

**1.- Variación en la resistencia.** La resistencia de vigas, columnas u otros miembros estructurales siempre difiere de los valores calculados por el diseñador. Por las siguientes razones:

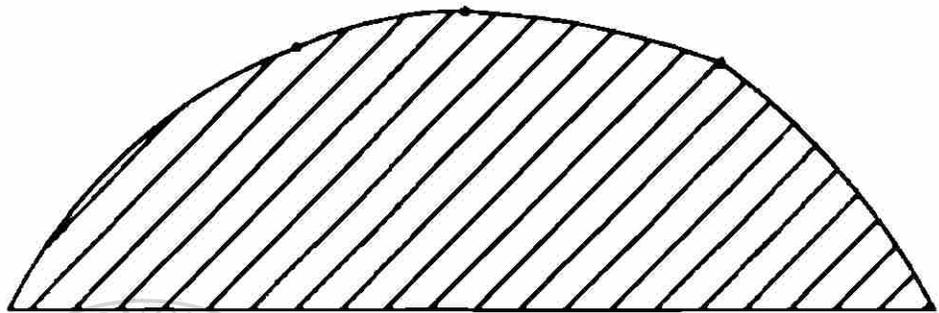
- (a).- Variación en las resistencias del concreto y el acero.
- (b).- Diferencias entre las dimensiones marcadas en los planos estructurales.
- (c).- Efecto de las simplificaciones hechas en las ecuaciones para calcular la resistencia del miembro.

Un histograma de la relación de la capacidad de momento de una viga observada durante la prueba,  $M_{test}$ , y la resistencia nominal calculada por el diseñador,  $M_n$ , está dibujada en la Figura 2-3. Se observa que la resistencia es marcadamente 1.05 veces la resistencia nominal, en ésta muestra, hay una probabilidad definida de que algunas secciones de la viga tienen baja capacidad. La variación que se muestra se debe en gran parte a las consideraciones simplificadorias al calcular el momento resistente,  $M_n$ .

**2.- Variación en las cargas.** Todas las cargas son variables, especialmente las cargas vivas y las cargas debidas a fenómenos naturales como nieve, viento o sismo. La figura 2-2a compara la intensidad de la carga viva en una familia de áreas de 151 ft<sup>2</sup> en oficinas con la frecuencia con que se presenta.



(a) Viga

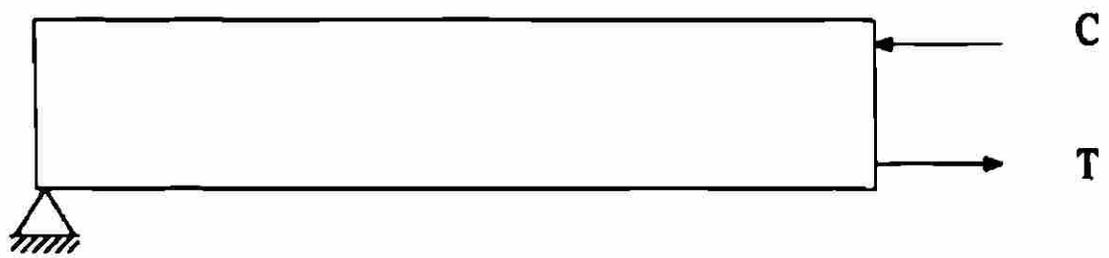


(b) Efecto de la carga  
(Diagrama de momentos flexionantes)

**FIGURA 2-1. CARGAS Y EFECTOS DE LAS CARGAS**



(a) Esfuerzos actuando en la seccion transversal



(b) Par interno

**FIGURA 2-2. MOMENTO INTERNO RESISTENTE**

La mayor ocurrencia de la carga viva es para 13 Lbs/ft<sup>2</sup> en este ejemplo, el 1% de la carga medida excede las 44 Lbs/pie<sup>2</sup>. Para este tipo de ocupación y área, el código especifica una carga viva de 50 Lbs/pie<sup>2</sup>. Para áreas mayores, la disminuye, como se muestra en la Figura 2-4 (b). Los factores de carga y los factores de resistencia en las ecuaciones 2-2 y 2-3 se pueden aplicar para reducir la probabilidad de falla a un mínimo nivel.

Un tercer factor puede ser considerado para establecer el factor de seguridad de una estructura en particular es:

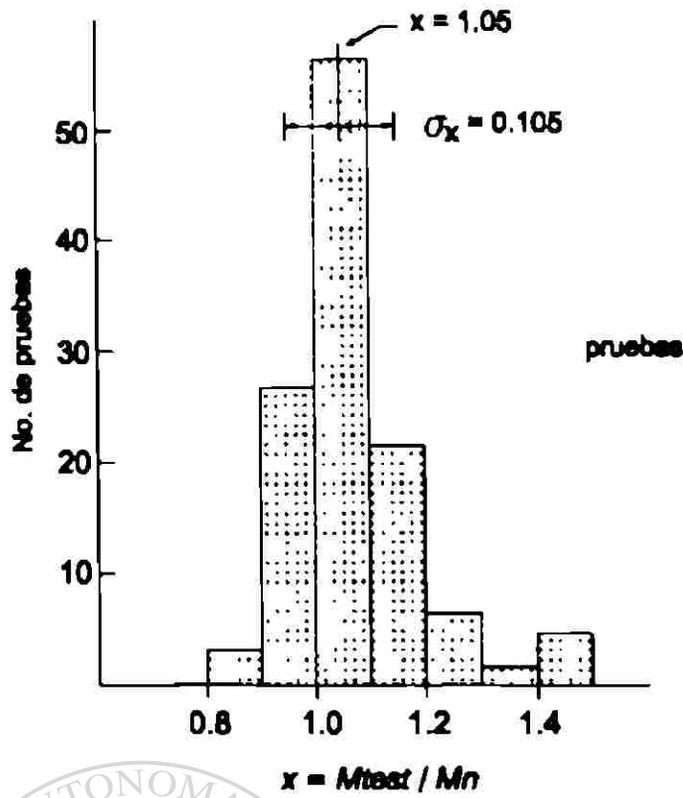
**3.- Consecuencias de falla.** Un número de factores subjetivos puede ser considerado para determinar un nivel aceptable de seguridad, en una clase particular de estructura. Esto incluye lo siguiente:

- (a).- El costo de demoler la estructura y reemplazarla toda o parte de ella.
- (b).- La pérdida potencial de vidas. Puede ser deseable tener un factor de seguridad mayor para un auditorio que para un almacén.
- (c).- El costo de pérdida de tiempo debido a la falla. Por ejemplo, la falla de un puente puede resultar de gran costo porque provoca el congestionamiento del tráfico.
- (d).- El tipo de falla, el aviso de la falla, la existencia de patrones alternativos de carga. Si la falla de un miembro es precedido por deflexiones excesivas, como en el caso de falla por flexión en una viga de concreto reforzado, esto da tiempo a que las personas desalojen el edificio. Esto no ocurre en las columnas, puesto que la falla de una columna causa el colapso completo de la estructura.

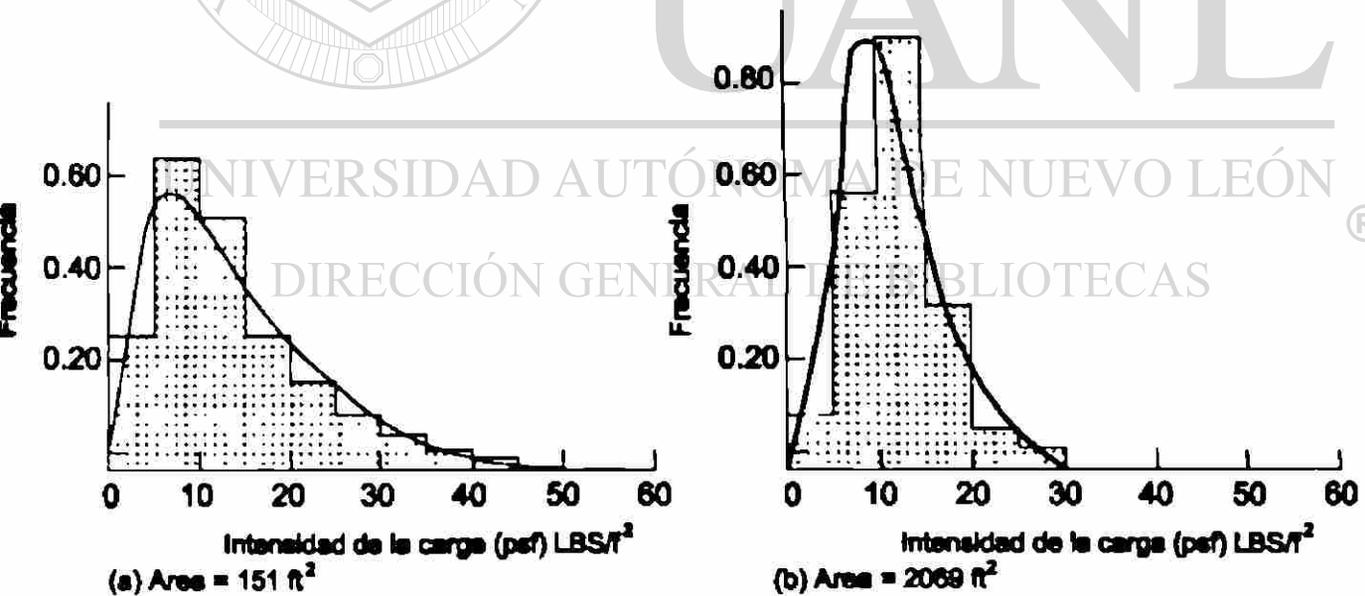
Por lo tanto, dependiendo también del miembro que se esté diseñando, es el factor de seguridad.

## **2.5.- CÁLCULO PROBABILÍSTICO DE LOS FACTORES DE SEGURIDAD .**

La distribución de una población de resistencia, R, de un grupo de estructuras similares y dibujadas en el eje horizontal como se muestra en la Figura 2-5.



**FIGURA 2-3**  
**COMPARACION DE LOS MOMENTOS DE FALLA  $M(test)$  Y NOMINAL BASADA EN LOS DATOS DE VIGAS DE CONCRETO REFORZADO CON  $f'_c > 2000 \text{ LBS/pg}^2$**



**FIGURA 2-4**  
**FRECUENCIA DE DISTRIBUCION DE LA COMPONENTE SOSTENIDA DE CARGAS VIVAS EN OFICINAS.**

Esto es comparado con la distribución de los efectos de carga máximos,  $S$ , considerando que se presentan durante la vida útil de la estructura, dibujado en el eje vertical de la misma figura. La línea a  $45^\circ$  expresa el efecto de la carga igual a la resistencia. Valores de  $S > R$  representan la falla. Entonces un efecto de carga  $S_1$  actuando en una estructura de resistencia  $R_1$  produce la falla, mientras que un efecto de carga  $S_2$  actuando en una estructura de resistencia  $R_2$  representa una combinación segura para una distribución dada de efectos de carga, la probabilidad de falla puede reducir incrementando la resistencia, esto corresponde a la distribución de resistencias a la derecha de la figura 2-5. La probabilidad de falla también puede reducirse al reducir la dispersión de las resistencias. El término  $Y = R - S$  es llamado "límite de seguridad". Por definición, la falla ocurrirá si  $Y$  es negativa, como se muestra en la Figura 2-6. La probabilidad de falla  $P_f$ , es la ocurrencia de que se presente una combinación particular de  $R$  y  $S$  dando un valor negativo de  $Y$ . Esta probabilidad es igual a la relación del área achurada a el área total bajo la curva de la Figura 2-6.

La probabilidad de falla,  $P_f$ , puede ser expresada como:

$$P_f = \text{Probabilidad que } [Y < 0] \quad (2-4)$$

La función " $Y$ " tiene un valor medio  $\bar{Y}$  y una desviación estándar  $\sigma_Y$ . De la Figura 2-6 podemos ver que  $\bar{Y} = 0 + \beta\sigma_Y$ , donde:  $\beta = \bar{Y}/\sigma_Y$

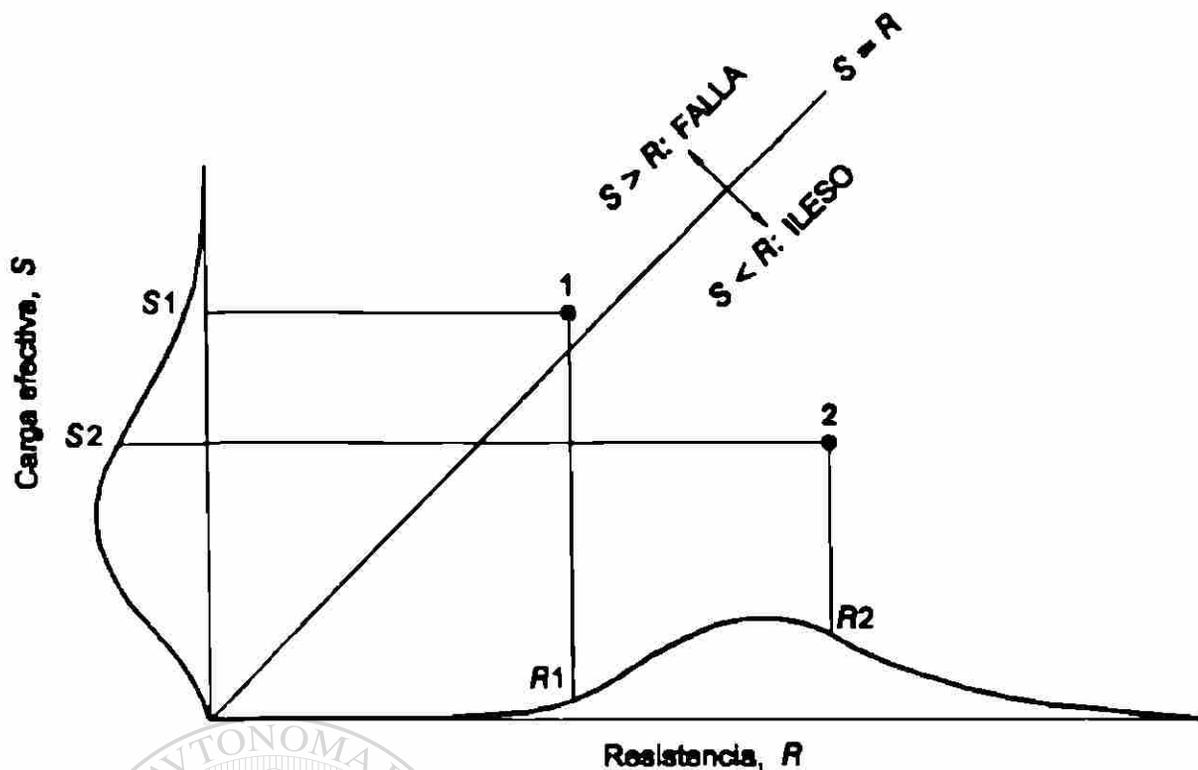
Si la distribución se cambia a la derecha para hacer  $\bar{Y}$  mayor,  $\beta$  se incrementará, y el área achurada,  $P_f$ , disminuye. Entonces  $P_f$  es una función de  $\beta$ . El factor  $\beta$  es llamado "índice de seguridad".

Si " $Y$ " sigue una distribución estadística estándar, y si  $\bar{Y}$  y  $\sigma_Y$  se conocen, la probabilidad de falla puede calcularse y obtener unas tablas estadísticas en función de el tipo de distribución y el valor de  $\beta$ . Entonces si " $Y$ " sigue una distribución normal y  $\beta$  es 3.5 entonces  $\bar{Y} = 3.5\sigma_Y$  y de las tablas de la distribución normal,  $P_f$  es  $1/9091$  ó  $1.1 \times 10^{-4}$ .

Esto significa que rigurosamente 1 de 10,000 miembros estructurales diseñados con base de  $\beta = 3.5$  fallará debido a carga excesiva o se sobre-esforzará durante su vida útil.

Los valores apropiados de  $P_f$  y por lo tanto  $\beta$  dependen de las consecuencias de la falla. Basado en un diseño práctico,  $\beta$  se toma entre 3 y 3.5 para falla dúctil y con un promedio de consecuencia de falla entre 3.5 y 4. Para falla súbita y con graves consecuencias.

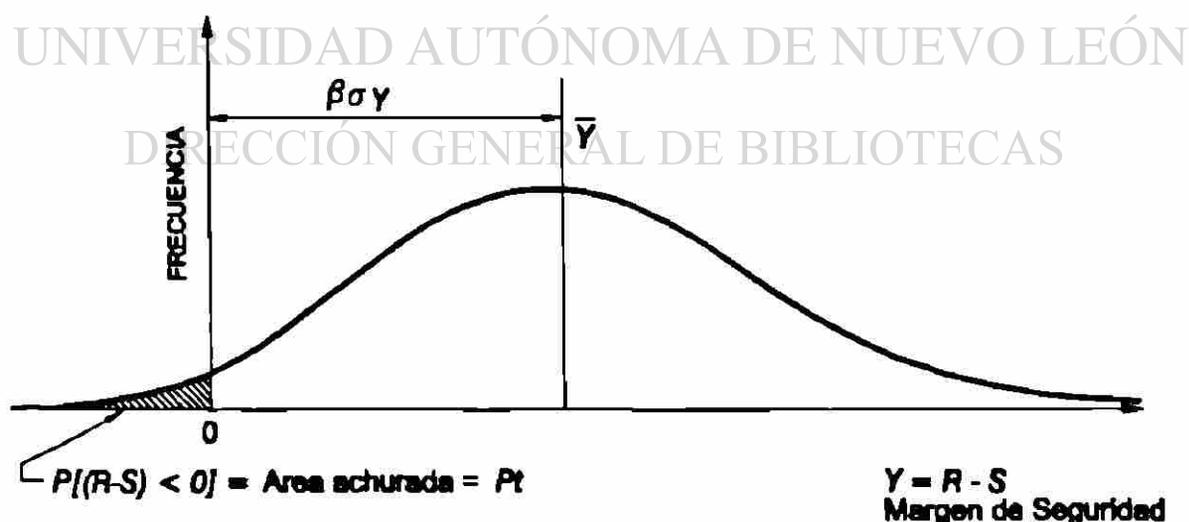
Debido a que las resistencias y las cargas varían independientemente, es necesario tener un factor o una serie de factores que consideren la variación de la resistencia y una segunda serie de factores que consideren la variación de los efectos de carga. Estos factores son llamados Factores de resistencia,  $\phi$ , y Factores de carga,  $\alpha$ . El resultado son las ecuaciones de diseño 2-2 y 2-3.



**FIGURA 2-5**  
**FALLA Y NO FALLA PARA COMBINACIONES**  
**DE CARGAS Y RESISTENCIAS.**



UANL



**FIGURA 2-6**  
**SEGURIDAD LIMITE, PROBABILIDAD DE FALLA.**

Los factores de resistencia y carga en el Código ACI están basados en modelos estadísticos, los cuales consideran una probabilidad de 1/1000 para sobrecarga y 1/1000 para baja resistencia, la probabilidad de que una sobrecarga y baja resistencia se presenten simultáneamente es entonces de  $(1/1000)(1/1000)$  ó de  $1 \times 10^{-6}$ .

Entonces, los factores  $\phi$  originalmente derivados para calcular la resistencia  $\phi R_n$  se excederán de 99 a 100 veces. Los factores  $\phi$  para columnas se dividen entre 1.1 porque una falla de una columna tiene serias consecuencias.

## 2.6.- PROCEDIMIENTOS DE DISEÑO ESPECIFICADOS POR EL CODIGO ACI.

El Código ACI 1995 recomienda los procedimientos alternativos de diseño. El más comúnmente usado involucra factores de carga y resistencia y lo menciona como "Diseño por resistencia." Este procedimiento es básicamente diseñado por estados límite excepto que la atención principal está enfocada en los estados límite últimos con los estados límite de servicialidad para completar el diseño.

Las secciones 9.1.1 y 9.1.2 presentan la filosofía a seguir en estos métodos de diseño básico por estados límite.

**9.1.1.-** Las estructuras y los elementos estructurales deberán diseñarse para obtener una resistencia mínima en todas las secciones al menos igual a la resistencia calculada para las cargas factorizadas y las fuerzas en las combinaciones que se estipulan en este reglamento.

**9.1.2.-** Los elementos también deberán cumplir con todos los demás requisitos de este reglamento para garantizar un comportamiento adecuado en los niveles de carga de servicio.

Estas cláusulas se refieren principalmente al control de deflexiones y ancho excesivo de grieta.

Alternativamente, se puede usar el *diseño por esfuerzo de trabajo*. En este caso, el diseño está basado en "carga de trabajo", que también son llamadas "carga de servicio" o "carga no factorizada". En flexión, los esfuerzos máximos dentro del intervalo elástico, no pueden exceder los "esfuerzos permisibles" o "esfuerzos de trabajo" que son de 0.4 a 0.5 veces la resistencia del concreto y del acero respectivamente. El Código ACI 1995 se refiere a este procedimiento como un "Procedimiento Alternativo de Diseño" lo menciona en la sección 8.1.2. y viene detallado en el Apéndice A.

El método de “*Diseño por esfuerzo de trabajo*” considera que los estados últimos límite de esfuerzo son automáticamente satisfechos usando esfuerzos permisibles. El ACI en la sección A.1.4. requiere que el calculista (diseñador) debe considerar la deflexión y el ancho de la grieta, en el estado límite.

Uno de los inconvenientes más importantes en el método de “*Diseño por esfuerzo de trabajo*” es la variación en las resistencias y las cargas, y esto reduce el nivel de seguridad. Esto sucede cuando en una estructura se presentan diferentes cargas, con distinta variación ; por ejemplo, en la Figura 2-7.

En este caso, si se incrementa el viento en un 20% esto causa un 20% de incremento en el esfuerzo máximo de flexión (de 500 psi a 600 psi) ; pero causa el 100% de incremento en el esfuerzo, en el punto A, en la Figura 2-7d.

### **Cargas factorizadas, Resistencia requerida.**

El ACI, en las secciones de la 9.2.1 a la 9.2.7, presenta una serie de factores de carga y combinaciones de estos factores para ser usados en el cálculo de los efectos de carga. En el código el símbolo U se refiere a la combinación de cargas factorizadas; y los símbolos  $M_u$ ,  $V_m$ ,  $T_u$  y otros, se refieren a efectos de carga factorizados (momentos, cortantes, torsiones) calculados con U.

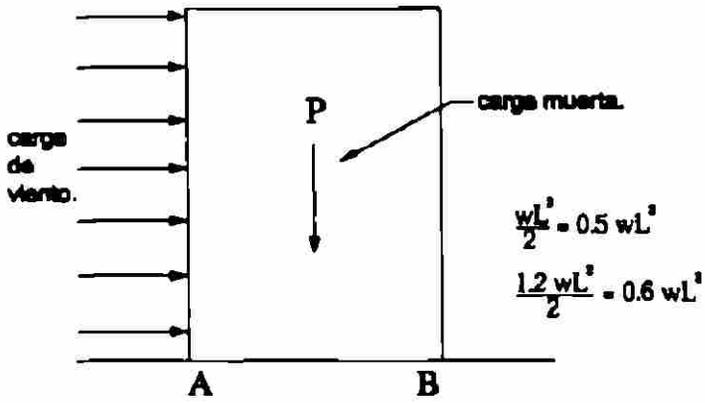
El código ACI usa el término “**Resistencia requerida**” para referirse a los efectos de carga factorizados.

En el diseño de edificios que no están sujetos a fuerzas de viento importantes o de sismo, las cargas factorizadas son calculadas con:

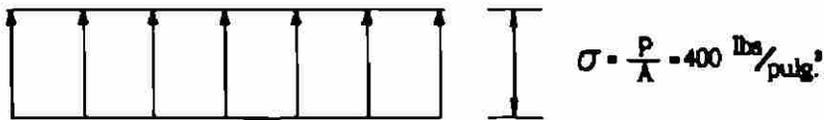
$$U = 1.4D + 1.7L \quad (\text{Ec. 9-1 ACI}) \quad (2-5)$$

donde D y L son cargas muerta y viva especificadas.

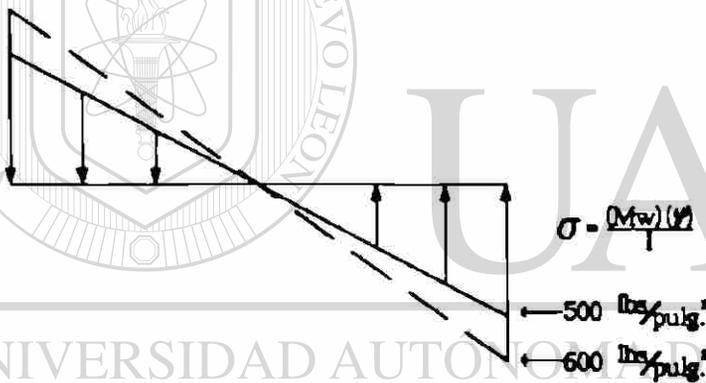
Si las cargas de viento afectan el diseño, el ACI en la sección 9.2.2. requiere que se consideren tres combinaciones de carga y que el diseño se base en el mayor de los valores de “U”, en cada sección crítica:



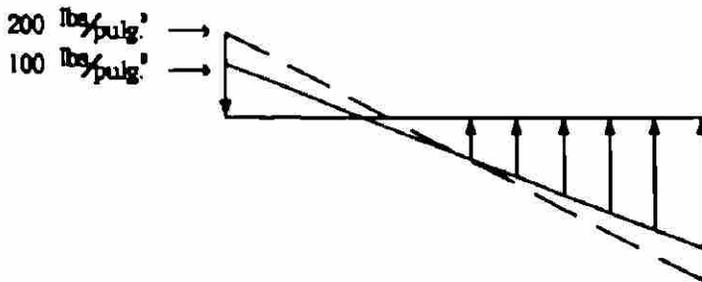
(a) Estructura.



(b) Esfuerzos por carga muerta.



(c) Esfuerzos por carga de viento.



(d) Esfuerzos por combinación de cargas.

FIGURA 2-7  
DISEÑO POR ESFUERZO DE TRABAJO.

- 1.- Donde los efectos de carga de viento, muerta y viva estén presentes.

$$U = 0.75 (1.4D+1.7L+1.7W) \quad (\text{ACI Ec. 9-2}) \quad (2-6)$$
$$U = 0.75 (1.4D+1.7W) \quad (2-7)$$

- 2.- Donde los efectos de la carga muerta estabilizan a la estructura contra el efecto del viento como en la Figura 2.7:

$$U = 0.9D+1.3W \quad (\text{ACI Ec. 9-3}) \quad (2-8)$$

pero en cualquier combinación de D, L y W la resistencia requerida no será menor que el valor dado por la ecuación 2-5 (ACI Ec. 9-11).

Combinaciones similares de carga están dadas por el ACI, en la sección 9.2.3. para cargas por sismos, en la sección 9.2.4. para presión lateral de suelo, en la sección 9.2.5. para presiones de fluidos (en tanques, etc.) en la sección 9.2.6. para cargas de impacto, en la sección 9.2.7. para asentamientos diferenciales, fluencia, contracción y cambios de temperatura. La ecuación 2-8, debe usarse para encontrar los esfuerzos en el punto A de la Figura 2-7. En el punto B, deberá aplicarse la más crítica de las ecuaciones 2-5 ó 2-7. En el análisis de un marco de un edificio, frecuentemente se analiza elásticamente para tres cargas 1.0D, 1.0L, 1.0W y las combinaciones de estos para determinar momentos, cortantes y fuerzas normales para cada miembro de acuerdo con las ecuaciones de 2-5 a 2-8. Este procedimiento se ilustra en el siguiente ejemplo.

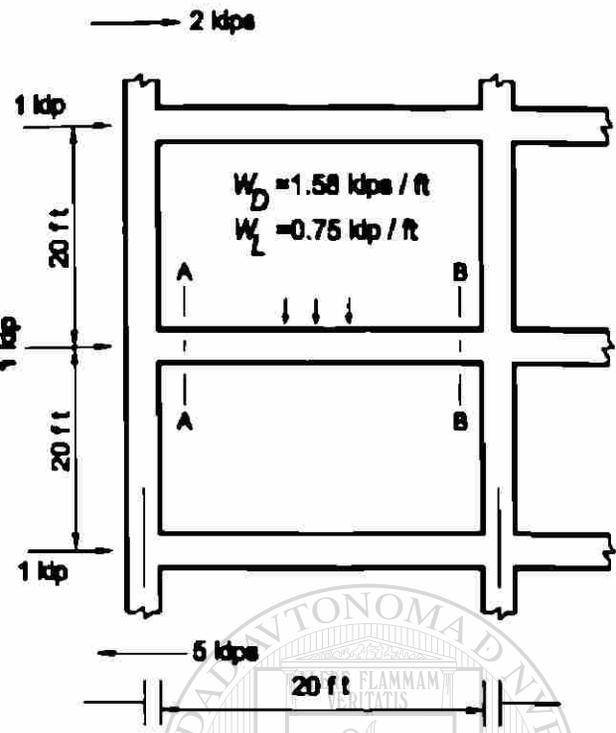
### Ejemplo 2-1 Cálculo de los efectos de carga, factorizada.

En la Figura 2-8 se muestran una viga y una columna de un marco de un edificio de concreto, las cargas por pie en la viga son, Carga muerta, D=1.58 Kips/ft, y carga viva, L=0.75 Kips/ft los momentos y cortantes en la viga y en las columnas arriba y abajo de la viga debido a 1.0D, 1.0L y 1.0W están mostrados en la Figura 2-8 d.

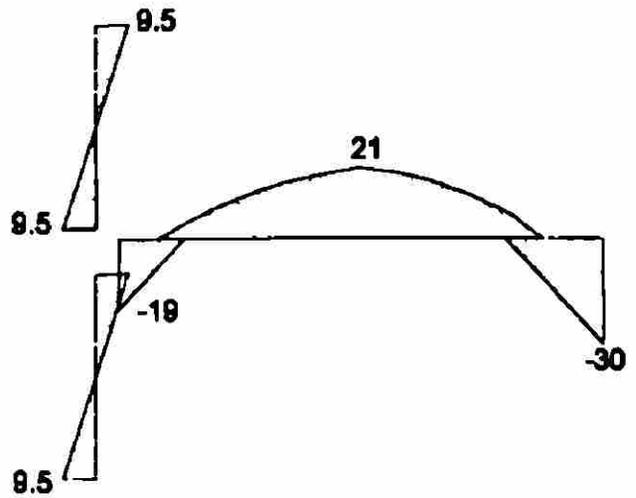
Las cargas factorizadas se calcularon utilizando las ecuaciones de la 2-5 a la 2-8 y luego se calculan los momentos para la sección A como sigue:

(a)  $U = 1.4D+1.7L$   
 $= 1.4 (-39)+1.7 (-19) = -86.9 \text{ Kips-ft}$

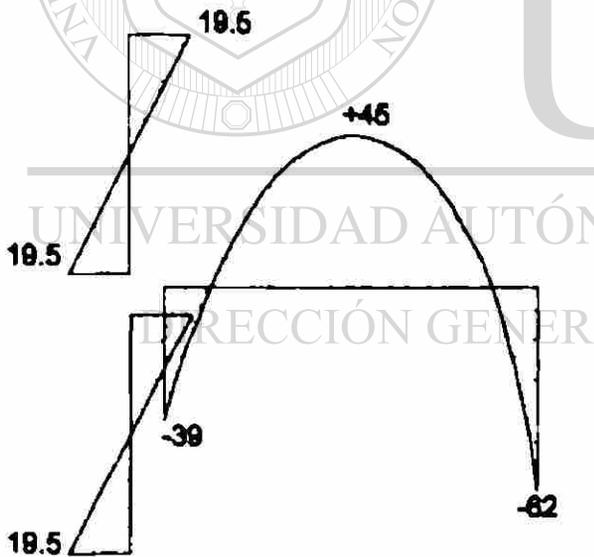
(b)  $U = 0.75 (1.4D+1.7L+1.7W)$   
 $= 1.05 (-39)+1.275 (-19) \pm 1.275 (84)$   
 $= -40.95 - 24.225 \pm 107.10$   
 $= -172.3 \text{ Kips - ft y } + 41.9 \text{ Kips - ft}$



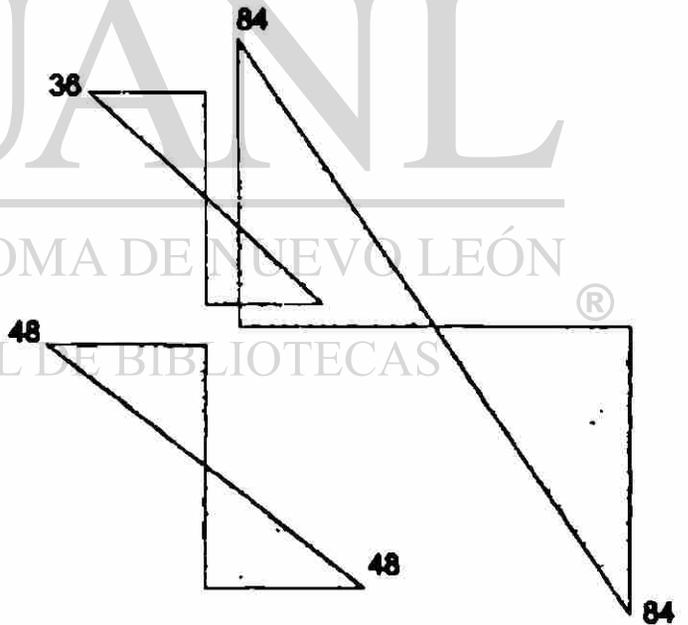
(a) Marco.



(c) Momentos debido a 1.0L, ft-kips.



(b) Momentos debido a 1.0D, ft-kips.



(d) Momentos debido a 1.0W, ft-kips.

FIGURA 2-8  
DIAGRAMAS DE MOMENTO.  
Ejemplo 2-1

Los valores positivo y negativo de los momentos por viento, son debidos a viento alternado en los dos lados del edificio.

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad U &= 0.75 (1.4 D + 1.7W) \\ &= 1.05 \times 39 + 1.275 \times 84 \\ &= -148.1 \text{ Kips-ft y } 66.22 \text{ Kips - ft} \end{aligned}$$

No es necesario revisar el cuarto caso de carga porque este problema no involucra succión o giro. Entonces las resistencias requeridas,  $M_u$ , en la sección A son + 66.2 Kips - ft y -172.3 Kips - ft.

### Resistencia factorizada, diseño por resistencia.

En el diseño básico por estados límite las ecuaciones. 2-2 y 2-3 ( $\phi R_n$ ,  $\phi M_n$ , etc.) se refieren a "resistencia factorizada". Los factores de resistencia  $\phi$ , son dados en el ACI en la Sección 9.3.2. donde son llamados "factores de reducción de resistencia". Los siguientes valores son especificados:

1 - Flexión, con o sin tensión axial  $\phi = 0.90$

2 - Tensión axial  $\phi = 0.90$

3 - Compresión axial, con o sin flexión:

(a) Miembros con refuerzo en espiral según ACI Sección 10.9.3  $\phi = 0.75$

(b) Otros miembros reforzados  $\phi = 0.70$

Nótese que  $\phi$  puede incrementarse por fuerzas axiales como se explica en la Sección 11-4.

4.- Cortante y torsión  $\phi = 0.85$

5.- Aplastamiento en concreto  $\phi = 0.70$

En regiones de alta actividad sísmica, los factores de reducción de resistencia bajan cuando son usados en cortante en columnas; ver ACI Sección 9.3.4.

Los valores positivo y negativo de los momentos por viento, son debidos a viento alternado en los dos lados del edificio.

$$\begin{aligned} \text{(c) } U &= 0.75 (1.4 D + 1.7W) \\ &= 1.05 \times 39 + 1.275 \times 84 \\ &= -148.1 \text{ Kips-ft y } 66.22 \text{ Kips - ft} \end{aligned}$$

No es necesario revisar el cuarto caso de carga porque este problema no involucra succión o giro. Entonces las resistencias requeridas,  $M_u$ , en la sección A son + 66.2 Kips - ft y -172.3 Kips - ft.

### Resistencia factorizada, diseño por resistencia.

En el diseño básico por estados límite las ecuaciones. 2-2 y 2-3 ( $\phi R_n$ ,  $\phi M_n$ , etc.) se refieren a "resistencia factorizada". Los factores de resistencia  $\phi$ , son dados en el ACI en la Sección 9.3.2. donde son llamados "factores de reducción de resistencia". Los siguientes valores son especificados:

1.- Flexión, con o sin tensión axial  $\phi = 0.90$

2 - Tensión axial  $\phi = 0.90$

3 - Compresión axial, con o sin flexión:

(a) Miembros con refuerzo en espiral según ACI Sección 10.9.3  $\phi = 0.75$

(b) Otros miembros reforzados  $\phi = 0.70$

Nótese que  $\phi$  puede incrementarse por fuerzas axiales como se explica en la Sección 11-4.

4.- Cortante y torsión  $\phi = 0.85$

5.- Aplastamiento en concreto  $\phi = 0.70$

En regiones de alta actividad sísmica, los factores de reducción de resistencia bajan cuando son usados en cortante en columnas; ver ACI Sección 9.3.4.

## 2.7.- CARGAS Y ACCIONES

### Acciones directas e indirectas

Una acción es todo lo que produce esfuerzos en la estructura. El término "carga" o "acción directa" se refiere a fuerzas concentradas o distribuidas resultantes del peso de la estructura con todos sus elementos, presiones debidas al viento, agua o suelo. Una "acción indirecta" o "deformación impuesta" es un movimiento o deformación producido por las cargas aplicadas que causan esfuerzos en la estructura. Ejemplo de esto son los asentamientos en los apoyos de vigas continuas, contracción en el concreto, cuando no es libre de acortarse.

Porque los esfuerzos debido a las deformaciones impuestas no resisten las cargas aplicadas, ellos generalmente se auto equilibran. Considerar, por ejemplo un prisma de concreto con una varilla de refuerzo a lo largo de su eje. Como el concreto se contrae, el acortamiento es resistido por el esfuerzo entre la varilla y el concreto. Resulta que la fuerza de compresión desarrollada en el acero es igual y opuesta a la fuerza de tensión desarrollada en el concreto, como se muestra en la Figura 2-9. Si el concreto se agrieta debido a la tensión, la fuerza de tensión en el concreto agrietado es cero, y para lograr el equilibrio, también desaparece la fuerza en el acero, en la sección agrietada.

### Clasificación de las cargas.

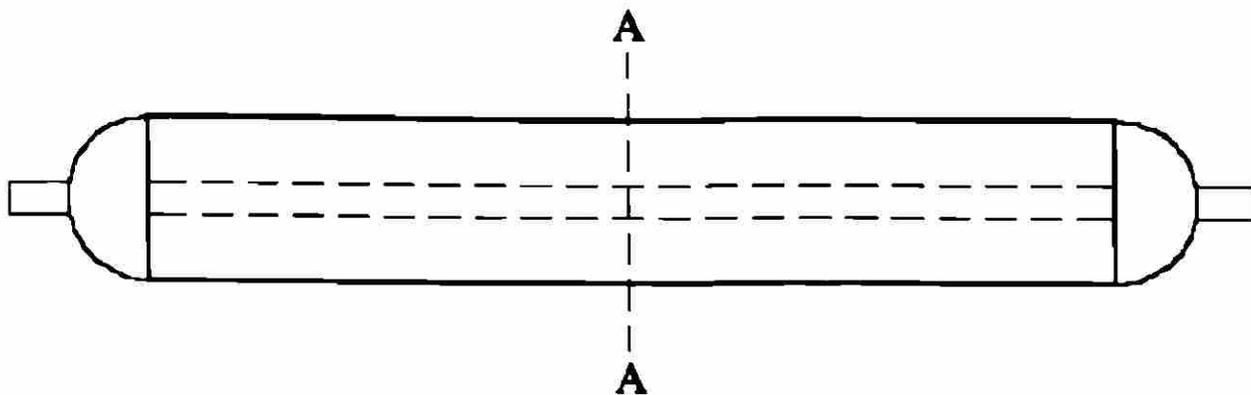
Las cargas pueden ser descritas por su variación con el tiempo y por su localización.

Una carga "permanente" es la que se aplica en todo tiempo en la estructura. Por ejemplo, el peso propio de la estructura, o la presión del suelo en algunas cimentaciones.

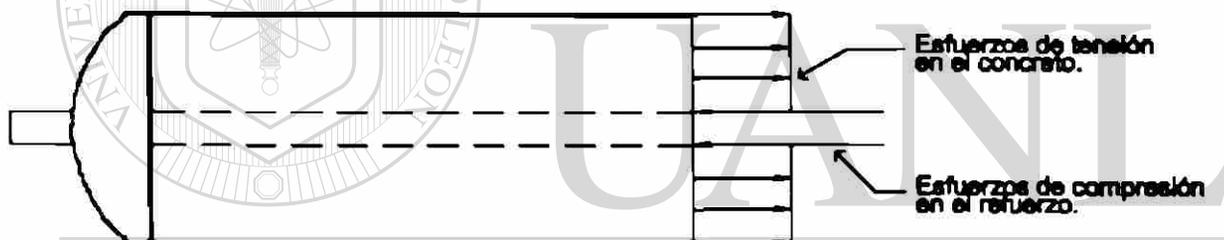
Las cargas variables pueden ser sostenidas de larga duración, como el peso del mobiliario de una oficina, o cargas "variables" como las cargas de viento que cambian con el tiempo.

La tercera categoría son las cargas accidentales, las cuales incluyen colisiones vehiculares y explosiones.

Las cargas variables pueden ser fijas o libres según su localización. Entonces, la carga en un edificio puede ser libre ya que se puede aplicar en cualquier punto del área cargada. La carga de un tren en un puente no es fija longitudinalmente, pero sí lateralmente, por los rieles.



(a) Contracción de un prisma.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

FIGURA 2-9  
EQUILIBRIO DE LOS ESFUERZOS DEBIDO A LA CONTRACCIÓN.

Son frecuentemente clasificadas como cargas estáticas, las que no causan aceleración o vibración de la estructura o de elementos de la estructura, y como cargas dinámicas las que sí las producen.

En los E.U.A. existe el Código del ASCE (American Society of Civil Engineering) donde se especifican las cargas mínimas de diseño para los edificios y otras estructuras (ASCE 7-88) como lo indica la Tabla 2-1.

**TABLA 2-1**

<b>CARGAS VIVAS ESPECIFICADAS EN EL ASCE 7-88</b>	
<b>EDIFICIOS DE DEPARTAMENTOS</b>	
Áreas residenciales y corredores.	40 psf (200 kg/m <sup>2</sup> )
Cuartos públicos y pasillos	100 psf (500 kg/m <sup>2</sup> )
<b>CORREDORES</b>	
Primer piso	100 psf (500 kg/m <sup>2</sup> )
<b>EDIFICIOS PARA OFICINAS</b>	
Lobbies	100 psf (500 kg/m <sup>2</sup> )
Oficinas	50 psf (250 kg/m <sup>2</sup> )
<b>ESCUELAS</b>	
Salones de clase	40 psf (200 kg/m <sup>2</sup> )
Pasillos	80 psf (400 kg/m <sup>2</sup> )
Escaleras y rampas	100 psf (500 kg/m <sup>2</sup> )
<b>BODEGAS</b>	
Ligero	125 psf (600 kg/m <sup>2</sup> )
Pesado	250 psf (1200 kg/m <sup>2</sup> )
<b>ALMACENES</b>	
Primer Piso	100 psf (500 kg/m <sup>2</sup> )
Azoteas	75 psf (350 kg/m <sup>2</sup> )
En venta mayoreo	125 psf (600 kg/m <sup>2</sup> )

## Las cargas muertas

La carga muerta, en un elemento estructural, es el peso propio del elemento, más el peso de los materiales que cargan sobre él, como el peso de los muros, las tuberías, el equipo electro-mecánico, etc.

En el diseño de un elemento de concreto reforzado, es necesario estimar su peso propio. Los métodos para estimarlo se verán posteriormente ; el peso de un elemento se obtiene multiplicando el volumen por la densidad del concreto.

Cuando se trabaja con unidades en el Sistema Internacional (SI), el peso se obtiene multiplicando el volumen por la densidad de masa del concreto o por la constante de gravedad 9.81 N/kg. El peso del concreto reforzado se considera como 2450 kg/m<sup>3</sup> y para concreto simple de 2300 kg/m<sup>3</sup>. El peso de un m<sup>3</sup> de concreto es:

$$1\text{m}^3 \times 2450 \text{ kg/m}^3 \times 9.81 \text{ N/kg} / 1000 \text{ N/kn} = 24.0 \text{ Kn.}$$

## Las cargas en azoteas.

Además de las cargas de nieve, los techos deberán diseñarse para soportar las cargas mínimas de trabajo, como son : el paso de los materiales de la azotea, durante la construcción y cuando haya necesidad de hacer reparaciones. Se deben considerar también las cargas debidas al agua de lluvia, suponiendo que las salidas del drenaje pluvial se tapen ocasionalmente.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

## Las cargas durante la construcción (ACI Sección 6.2.2.)

Ninguna carga de construcción que exceda la combinación de la carga muerta impuesta, más la carga viva especificada, deberá apoyarse en una zona de la estructura en construcción, sin puntales, a menos que un análisis indique que existe la resistencia adecuada para soportar tales cargas adicionales.

## **Cargas de viento**

### **Introducción:**

Generalmente en la República mexicana para el diseño de una estructura que resista el efecto del viento se consulta el "Manual de Diseño de Obras Civiles de la Comisión Federal de Electricidad. Sección C. Estructuras." La primera edición de ésta se publicó en 1969 y la más reciente, en octubre de 1993.

### **Alcance**

En el diseño por viento se toman en cuenta la influencia de diferentes parámetros involucrados en la evaluación de las cargas generadas por los vientos extremos que ocurren en el territorio nacional. Los procedimientos reflejan la experiencia y los resultados de investigaciones recientes, tanto nacionales como internacionales, llevadas a cabo por expertos en la materia necesarias para determinar en forma correcta la carga por viento.

#### **Un procedimiento para determinar las cargas de viento**

Se proponen principalmente dos procedimientos:

1.- El del análisis estático: Se emplea cuando se trate de estructuras suficientemente rígidas, que no sean sensibles a los efectos dinámicos del viento.

2.- El de análisis dinámico: Se afirma que un elemento estructural es sensible a los efectos dinámicos del viento, cuando se presentan fuerzas importantes provenientes de la interacción dinámica entre el viento y la estructura, durante un período mayor que un segundo.

Un tercer procedimiento consiste en llevar a cabo pruebas experimentales, en modelos de túnel de viento. (Estructuras especiales).

## DETERMINACION DE LA VELOCIDAD DE DISEÑO, $V_D$ :

La velocidad de diseño es a partir de la cuál se calculan los efectos del viento sobre una estructura o sobre un componente de la misma.

La velocidad de diseño en km/hr se obtendrá de acuerdo con la ecuación:  $V_D = F_T F_\alpha V_R$

donde:  $F_T$  es un factor que depende de la topografía del lugar, adimensional.

$F_\alpha$ , factor que toma en cuenta al efecto combinado de las características de exposición locales, tamaño de la construcción y variación de la velocidad con la altura, adimensional.

$V_R$ , velocidad regional que corresponde al sitio donde se construye la estructura, en Km/hr.

### FACTOR DE EXPOSICION, $F_\alpha$

Refleja la variación de la velocidad del viento con respecto a la altura  $Z$ .

$$F_\alpha = F_c F_{rz}$$

donde:  $F_c$ , factor que determina el tamaño de la construcción, adimensional.

$F_{rz}$ , factor que establece la variación de la velocidad del viento con la altura  $Z$  en función de la rugosidad del terreno en los alrededores adimensional.

$$F_{rz} = 1.56(10/\delta)^\alpha \text{ si } z \leq 10$$

$$F_{rz} = 1.56(z/\delta)^\alpha \text{ si } 10 < z < \delta$$

$$F_{rz} = 1.56 \text{ si } z \geq \delta$$

donde.  $\delta$ , es la altura medida a partir del terreno de desplante por encima de la cuál la variación de la velocidad del viento no es importante y se puede suponer constante, se le conoce como altura gradiente.  $\delta$  y  $Z$  están dadas en metros y  $\alpha$ , exponente que determina la forma de la variación de la velocidad del viento con la altura y es adimensional.

El factor de tamaño  $F_c$ , toma en cuenta el tiempo en que la ráfaga del viento actúa de manera efectiva sobre una construcción y se determina con la siguiente tabla.

**TABLA 2-2**

CLASE DE ESTRUCTURA	$F_c$
A	1.00
B	0.95
C	0.90

**El factor de topografía local,  $F_T$**

Toma en cuenta el efecto topográfico local del sitio donde se desplantará la estructura.

En la siguiente Tabla se muestran valores que se recomiendan con base en la experiencia.

**FACTOR DE TOPOGRAFIA LOCAL,  $F_T$ .**

SITIOS	TOPOGRAFIA	$F_T$
Protegidos	Base de promontorios y faldas de serranías del lado de sotavento.	0.8
	Valles cerrados	0.9
Normales	Terreno prácticamente plano, campo abierto, ausencia de cambios topográficos importantes, con pendientes menores de 5%	1.0
Expuestos	Terrenos inclinados con pendiente entre 5 y 10% valles abiertos y litorales planos.	1.1
	Cimas de promontorios, colinas o montañas, terrenos con pendientes mayores de 10%, cañadas cerradas y valles que formen un embudo o cañón, islas.	1.2

Si por cualquier razón, plenamente justificada, se requiere cambiar el periodo de retorno de la velocidad regional o el nivel de probabilidad de excedencia o el periodo de vida útil de una estructura que se desplantará en un sitio dado, se aplicarán los criterios descritos en el Manual de Diseño de Obras Civiles de la CFE Sección C. Estructuras. Capítulo 4.

### La presión dinámica de base, qz.

Cuando el viento actúa sobre un obstáculo, genera presiones sobre su superficie que varían según la intensidad de la velocidad y la dirección del viento. La presión perpendicular a la superficie se denomina comúnmente "presión dinámica de base" y se determina con la siguiente ecuación:

$$qz = 0.0048 G V_D^2$$

donde:  $G$ , es el factor de corrección por temperatura y por altura con respecto al nivel del mar ; es adimensional.

$V_D$ , es la velocidad de diseño ya definido anteriormente y,

$qz$ , es la presión dinámica de base, a una altura  $z$  sobre el nivel del terreno, en  $\text{kg/m}^2$ .

El factor 0.0048 corresponde a un medio de la velocidad del aire y el valor de  $G$  se obtiene en la expresión:  $G = \frac{0.392\Omega}{273+\tau}$

donde:  $\Omega$ , es la presión barométrica en mm de Hg, y;

$\tau$ , la temperatura ambiental en °C.

En la siguiente tabla se presenta la relación entre los valores de la altitud  $h_m$ , en metros, sobre el nivel del mar (msnm) y la presión barométrica,  $\Omega$ .

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

®

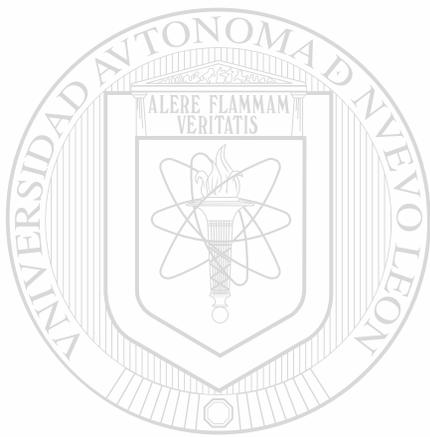
TABLA 2-4.-Relación entre la altitud y la presión barométrica.

ALTITUD (msnm)	PRESION BAROMETRICA (mm de Hg)
0	760
500	720
1000	675
1500	635
2000	600
2500	565
3000	530
3500	495

La presión que actúa sobre una construcción,  $P_z$ , en  $\text{kg/m}^2$ , se obtiene tomando en cuenta principalmente su forma, y está dada, de manera general, por la ecuación:  $P_z = C_p q_z$ .

En donde el coeficiente  $C_p$  se denomina coeficiente de presión y es adimensional.

Los valores de los coeficientes de presión, para diversas formas estructurales y el cálculo de las presiones globales y locales importantes, se especifican en el Manual de Diseño de Obras Civiles de la CFE.



# UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

# **CAPÍTULO 3 :**

## **FLEXION :CONCEPTOS BASICOS, VIGAS RECTANGULARES**

**3.1.- Introducción.**

**3.2.- Teoría de la Flexión.**

**3.3.- Análisis de Vigas de Concreto Reforzado.**

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

**3.4.- Ejemplos y Problemas.**

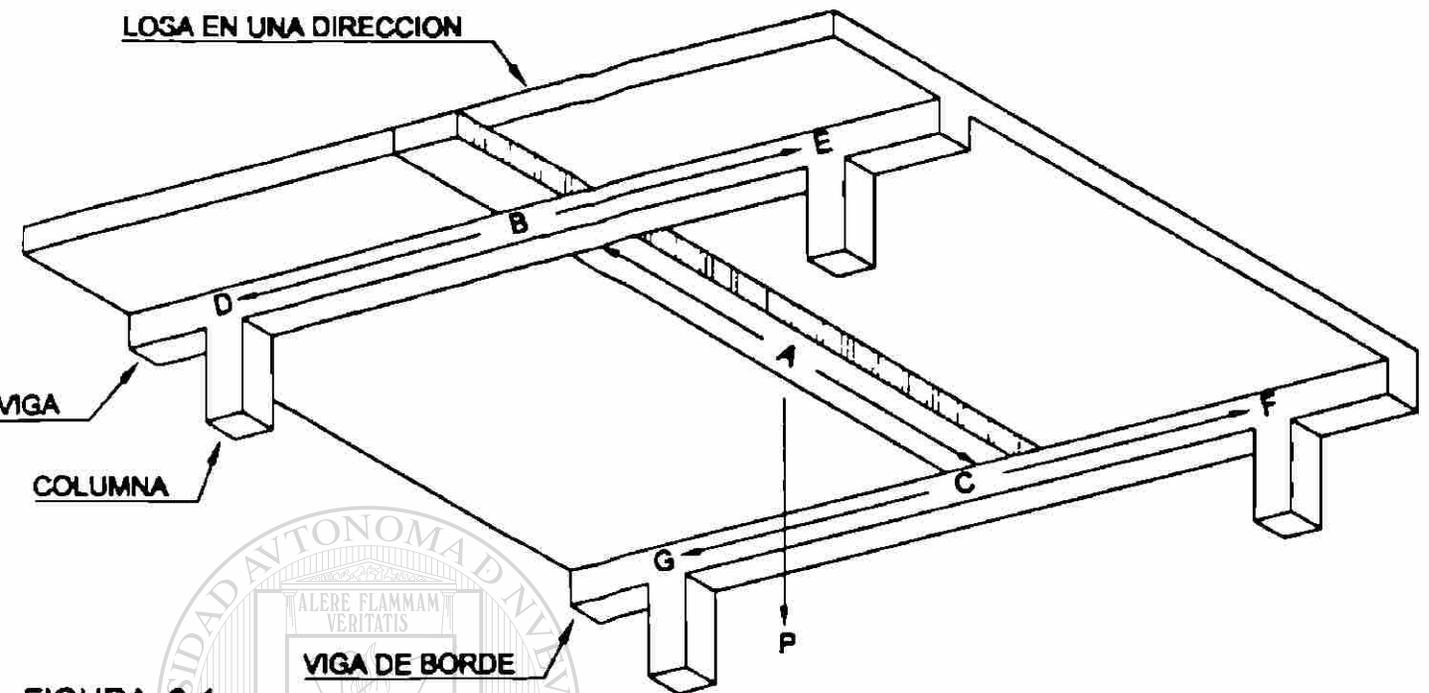


FIGURA 3-1  
FLEXION EN UNA DIRECCION.

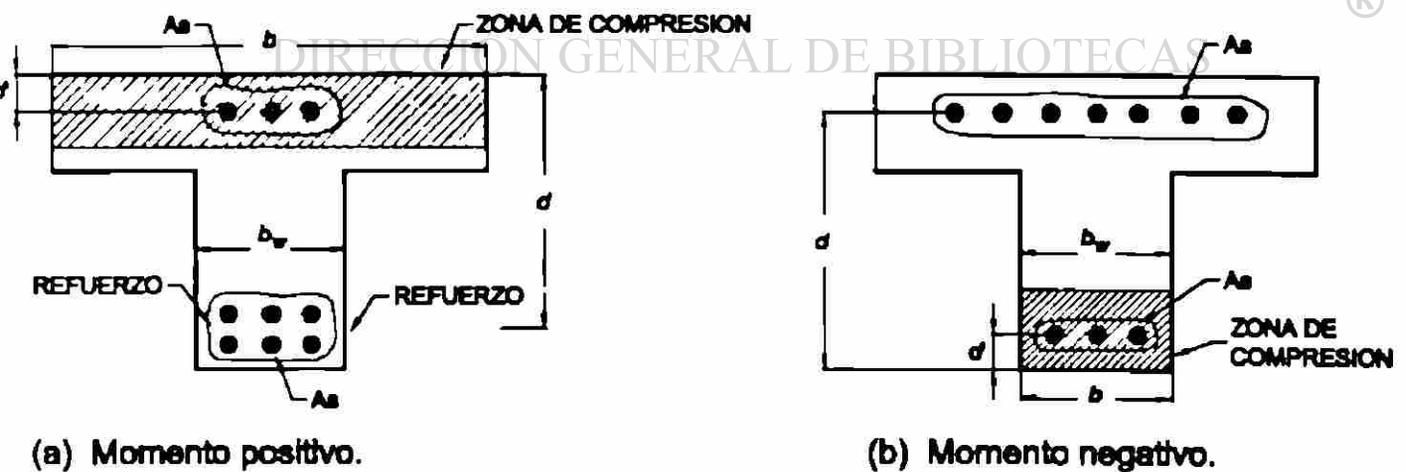
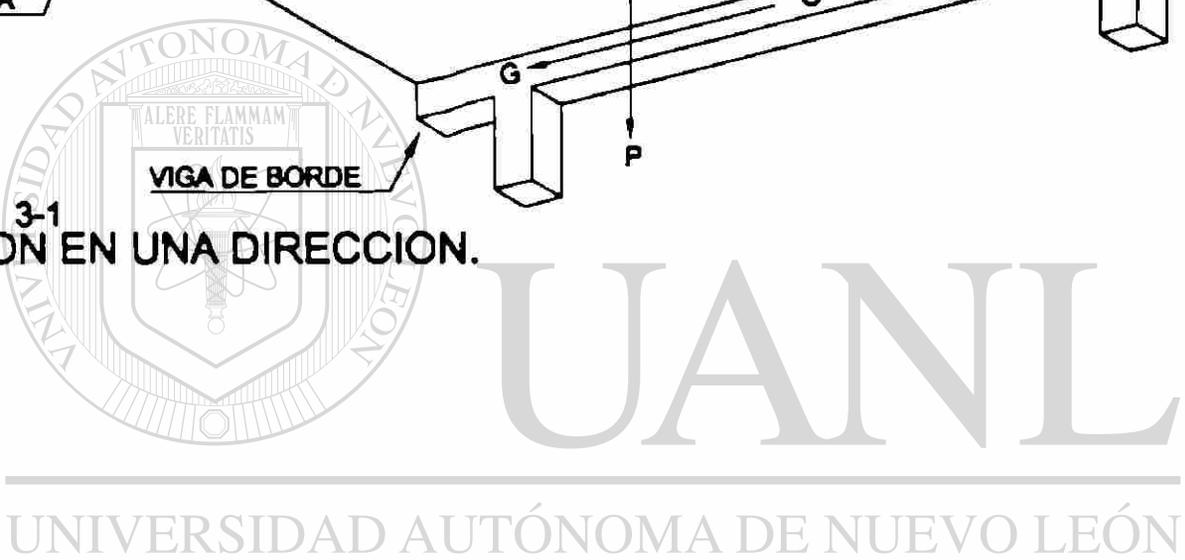


FIGURA 3-2  
DIMENSIONES DE SECCION TRANSVERSAL.

## Resistencia requerida y Resistencia de diseño.

La ecuación básica de seguridad por flexión es:

$$\text{Resistencia factorizada} > \text{efectos de carga factorizada} \quad (3-1a)$$

$$\text{ó} \quad \phi M_n > M_u \quad (3-1b)$$

Donde  $M_u$  es el momento debido a las cargas factorizadas, el cual el ACI lo menciona como el "Momento último requerido". Esto es el efecto calculado por análisis estructural por la combinación de cargas dada en la Sección 9.2. del Código ACI.

El término  $M_n$  se refiere a la "capacidad de momento nominal" de la sección transversal calculado usando las dimensiones nominales y resistencias del material especificado. El factor  $\phi$  es un "factor de reducción de resistencia (ACI Sección 9.3)" para tomar en cuenta las posibles variaciones en dimensiones y en resistencias del material y posibles aproximaciones en las ecuaciones de resistencia. Para flexión,  $\phi = 0.90$ . El producto  $\phi M_n$ , se le denomina "momento de diseño, resistencia de diseño, o resistencia de momento factorizado".

### Momentos Positivo y Negativo.

Un momento que causa compresión en la superficie superior de una viga y tensión en la superficie inferior es llamado "*momento positivo*". Las zonas para momentos positivo y negativo se muestran en la Figura 3-2. Los diagramas de momento positivo serán dibujados por el lado de las compresiones del miembro.

A continuación se definen algunos símbolos con referencia a la Figura 3-2 y a la teoría de flexión de elementos de concreto reforzado.

El símbolo prima (') generalmente se refiere a la zona de compresión, como  $A'_s$  y  $d'$ .

$A_s$  es el área del refuerzo en la cara de tensión de la viga, refuerzo en tensión en  $\text{in}^2$  ó  $\text{cm}^2$ .

$A'_s$  es el área de refuerzo en la zona de compresión de la viga, refuerzo en compresión en  $\text{in}^2$  ó  $\text{cm}^2$ .

$b$  es el ancho en la cara de compresión de la viga. Como se ilustra en la Figura 3-2 para momento positivo y negativo, en  $\text{in}$  ó  $\text{cm}$ .

$b_w$  es el ancho del alma de la viga y puede ser o no el mismo que  $b$ , en pulgadas ó  $\text{cm}$ .

$d$  es la distancia entre la fibra extrema en compresión a el centroide del acero de tensión de el miembro. En la región de momento positivo (Figura 3-2a) el acero se localiza cerca de la cara inferior de la viga mientras que en la región de momento negativo está cerca de la cara superior, en pulgadas ó cm.

$f_c$  es la resistencia a la compresión del concreto especificado a los 28 días de edad, en lbs/pulg<sup>2</sup> ó kg/cm<sup>2</sup>.

$f_s$  es el esfuerzo en tensión del refuerzo en lbs/pulg<sup>2</sup> ó kg/cm<sup>2</sup>.

$f_y$  es la resistencia a la fluencia especificada del refuerzo en lbs/pulg<sup>2</sup> ó kg/cm<sup>2</sup>.

$jd$  es el brazo de la palanca, la distancia entre la resultante de la fuerza de compresión y la resultante de la fuerza de tensión en pulgadas ó cm.

$j$  es una relación sin dimensiones usada para definir el brazo de palanca,  $jd$ ,  $j$  varía durante la vida de la viga.

$\epsilon_{cu}$  es la deformación asumida del concreto en la cara de compresión de la viga en la falla por flexión.

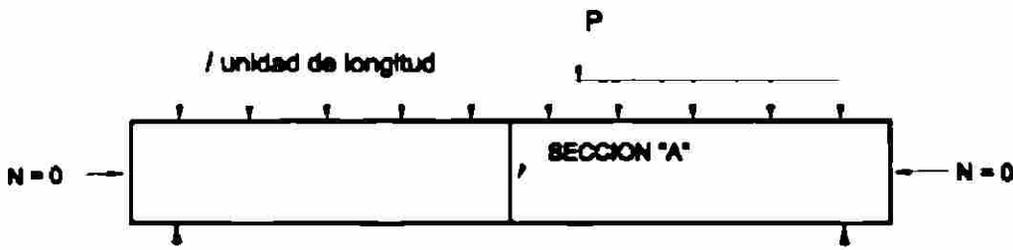
$\epsilon_s$  es la deformación del refuerzo de tensión.

$\rho$  es el porcentaje de acero longitudinal,  $\rho = A_s/bd$ .

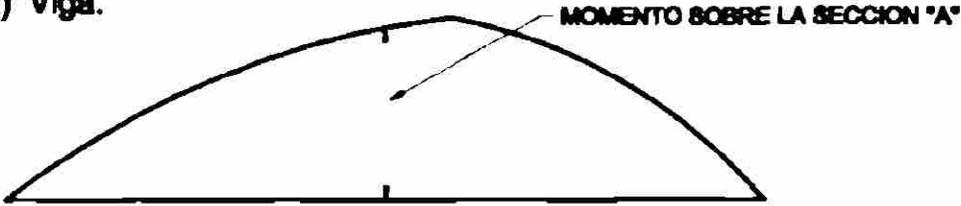
## 3.2.- TEORIA DE FLEXION

### Estática de una viga.

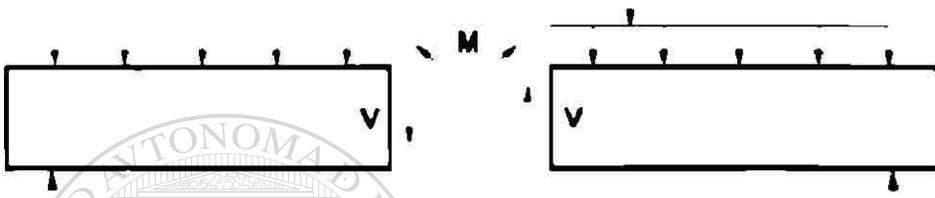
Una "viga" es un miembro estructural que soporta cargas aplicadas y su peso propio produciéndole cortantes y momentos internos. La Figura 3-3a muestra una viga simple que soporta una carga muerta  $W$  por unidad de longitud más una carga aplicada,  $P$ . Si la carga axial aplicada,  $N$ , es igual a cero como se muestra, el miembro se considera como una "viga". Si  $N$  es una fuerza de compresión, el miembro se llama "viga-columna". Si es tensión el miembro será un elemento en tensión. Este tema comprende el caso únicamente cuando  $N = 0$  Las cargas,  $W$  y  $P$ , causan "momentos flexionantes" distribuidos como se muestra en la Figura 3-3b. El momento flexionante es un "efecto de carga" determinado por las cargas usando los principios de estática. Para una viga simplemente apoyada con un claro dado y cargas dadas,  $W$  y  $P$ , los momentos son independientes de la composición y tamaño de la viga.



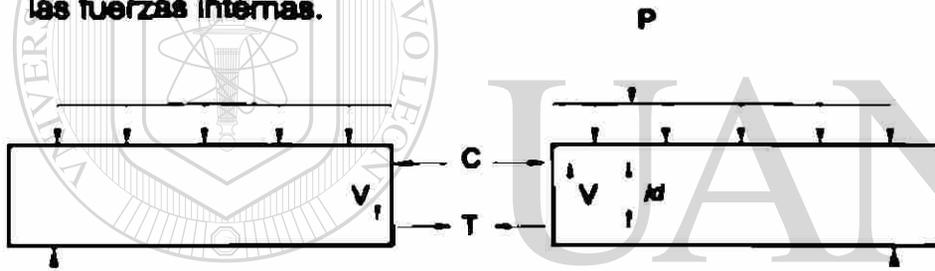
(a) Viga.



(b) Diagrama de momentos flexionantes. P



(c) Diagrama de cuerpo libre mostrando las fuerzas internas.



(d) Diagrama de cuerpo libre mostrando el momento interno como un par.

FIGURA 3-3

FUERZAS INTERNAS EN UNA VIGA.

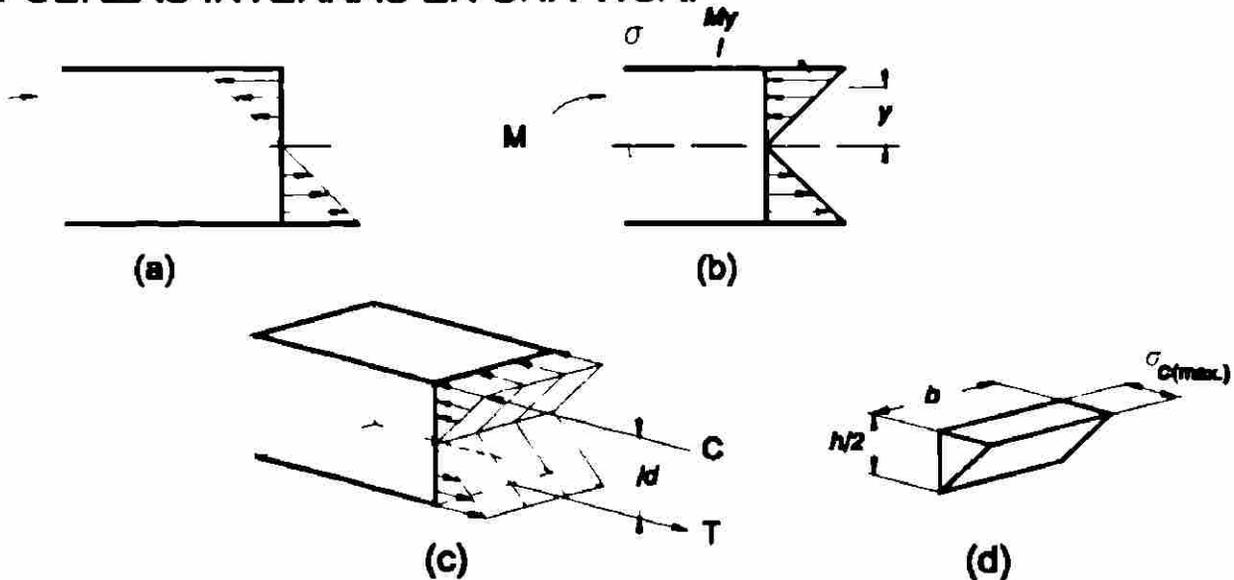


FIGURA 3-4  
DIAGRAMA DE ESFUERZOS ELASTICOS

En cualquier sección dentro de la viga, el "momento interno resistente",  $M$ , mostrado en la Figura 3-3c es el necesario para equilibrar el momento flexionante. El cortante resistente interno,  $V$ , es también el requerido como se muestra. El momento resistente interno,  $M$ , resulta de una fuerza de compresión,  $C$ , y una fuerza interna de tensión,  $T$ , separadas por un brazo de palanca,  $jd$ , como se muestra en la Figura 3-3d. Mientras **NO** haya cargas axiales horizontales,  $N$ , la suma de fuerzas horizontales da:

$$C - T = 0 \quad \text{ó} \quad C = T \quad (3-2)$$

Si se toman momentos con respecto a la fuerza de compresión  $C$ , el equilibrio del diagrama de cuerpo libre da:

$$M = Tjd \quad (3-3a)$$

Similamente, si los momentos se toman con respecto al punto de aplicación de la fuerza de tensión,  $T$ ,:  $M = Cjd$  (3-3b)

Como  $C = T$  estas dos ecuaciones son idénticas. Las ecuaciones 3-2 y 3-3 se deducen de la estática y son igualmente aplicables a vigas de acero, madera o concreto reforzado. La teoría convencional de viga "elástica" no da la ecuación,  $\sigma = My/I$  para una sección no agrietada, de una viga de sección transversal rectangular sin refuerzo y da una distribución de esfuerzos como se muestra en la Fig. 3-4.

Los diagrama de esfuerzos de la Figura 3-4c y d se pueden ver en forma de "volumen" y son frecuentemente referidos como "bloque de esfuerzos de compresión" y "bloque de tensión". La resultante de los esfuerzos de compresión es la fuerza  $C$  dada por:

$$C = (\sigma_{c \text{ (max)}} / 2) (bh/2) \quad (3-4)$$

Esto igual al volumen del bloque de esfuerzo de compresión mostrado en la Figura 3-4d. De forma similar se puede determinar la fuerza  $T$  con el volumen del bloque de esfuerzos de tensión. Las fuerzas  $C$  y  $T$ , actúan en los centroides de los volúmenes de los respectivos bloques de esfuerzos. En el caso "elástico" estas fuerzas actúan a  $h/3$  del eje neutro, por lo que  $jd=2/3 h$ . De las ecuaciones 3-3b y 3-4 y la Figura 3-4 podemos escribir:

$$M = Cjd \quad (3-5a)$$

$$M = \sigma_{c \text{ (max)}} (bh/4)(2h/3) \quad (3-5b)$$

$$M = \sigma_{c \text{ (max)}} (3bh/12)/(h/2) \quad (3-5c)$$

$$\text{ó} \quad M = \sigma I/y \quad (3-5d)$$

Entonces para el caso elástico respuestas idénticas se obtienen de la viga tradicional con la ecuación (3-5d). La ecuación de teoría elástica para viga (3-5d) *no* se usa en diseño de vigas de concreto reforzado: primero, porque la curva esfuerzo-deformación del concreto *no* es lineal como ya se vio. Y lo más importante porque el concreto se agrieta bajo esfuerzos de tensión, por esto se colocan varillas de refuerzo para transferir la fuerza de tensión, T.

### Teoría de flexión para concreto reforzado

La teoría de la flexión para concreto reforzado está basada en tres consideraciones básicas, las cuales son suficientes para calcular el momento resistente de una viga. Estas se presentarán primero ilustrando el comportamiento de la sección transversal de una viga incrementando el momento. Después de esto, cuatro simplificaciones adicionales del Código ACI se utilizan para simplificar el análisis de aplicación práctica.

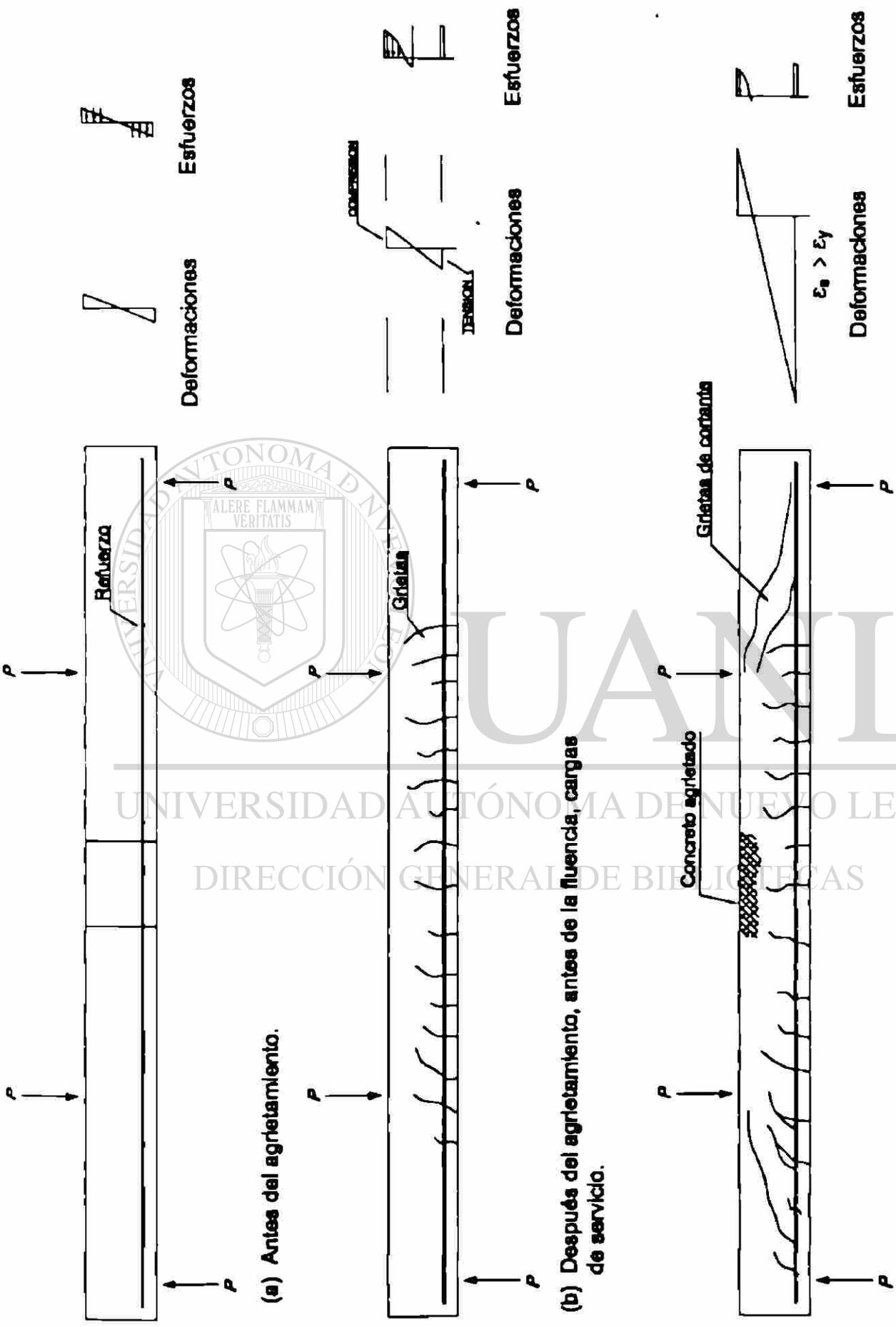
#### Comportamiento por flexión

Un patrón de agrietamiento y deformaciones medidas en un ensaye de laboratorio de una viga de concreto reforzado se muestra en la Figura 3-5. Las grietas están indicadas por pequeñas líneas verticales e inclinadas en las Figuras 3-5b y c. Una fotografía de la viga después de la falla se muestra en la Figura 3-6. Las grietas han sido marcadas con color negro. Las deformaciones dibujadas en la Figura 3-5 fueron medidas en una longitud de calibración de 16 pulg., marcándose 8 pulg., a cada lado del centro del claro de la viga. Esta región se muestra achurada en la Figura 3-5a y se muestra en la Figura 3-4c y la Figura 3-6 que existen dos grietas en esta región de falla; las deformaciones medidas usadas para calcular la curvatura correspondiente a cada nivel de carga. Curvatura,  $\phi$ , está definida como el cambio en ángulo en una longitud conocida y como se muestra en la Figura 3-7, se calcula con:

$$\phi = \epsilon/y \quad (3-6)$$

Donde  $\epsilon$  es la deformación a una distancia  $y$  del eje de deformación cero en el rango de carga en cuestión. La Figura 3-7 expresa el momento flexionante, M, en el centro del claro de la viga donde ocurre la curvatura. Este es el "diagrama de Momento-curvatura".

Inicialmente, la viga *no* se agrieta. Las deformaciones en este rango son muy pequeñas y la distribución de esfuerzos es esencialmente lineal. El momento y la curvatura se muestran en la Figura 3-5. El diagrama de momento curvatura es lineal en el segmento OB de la Figura 3-6.



(a) Antea del agrietamiento.

(b) Después del agrietamiento, antes de la fluencia, cargas de servicio.

(c) Falla.

FIGURA 3-6  
GRIETAS, DEFORMACIONES Y ESFUERZOS EN UNA VIGA DE PRUEBA.

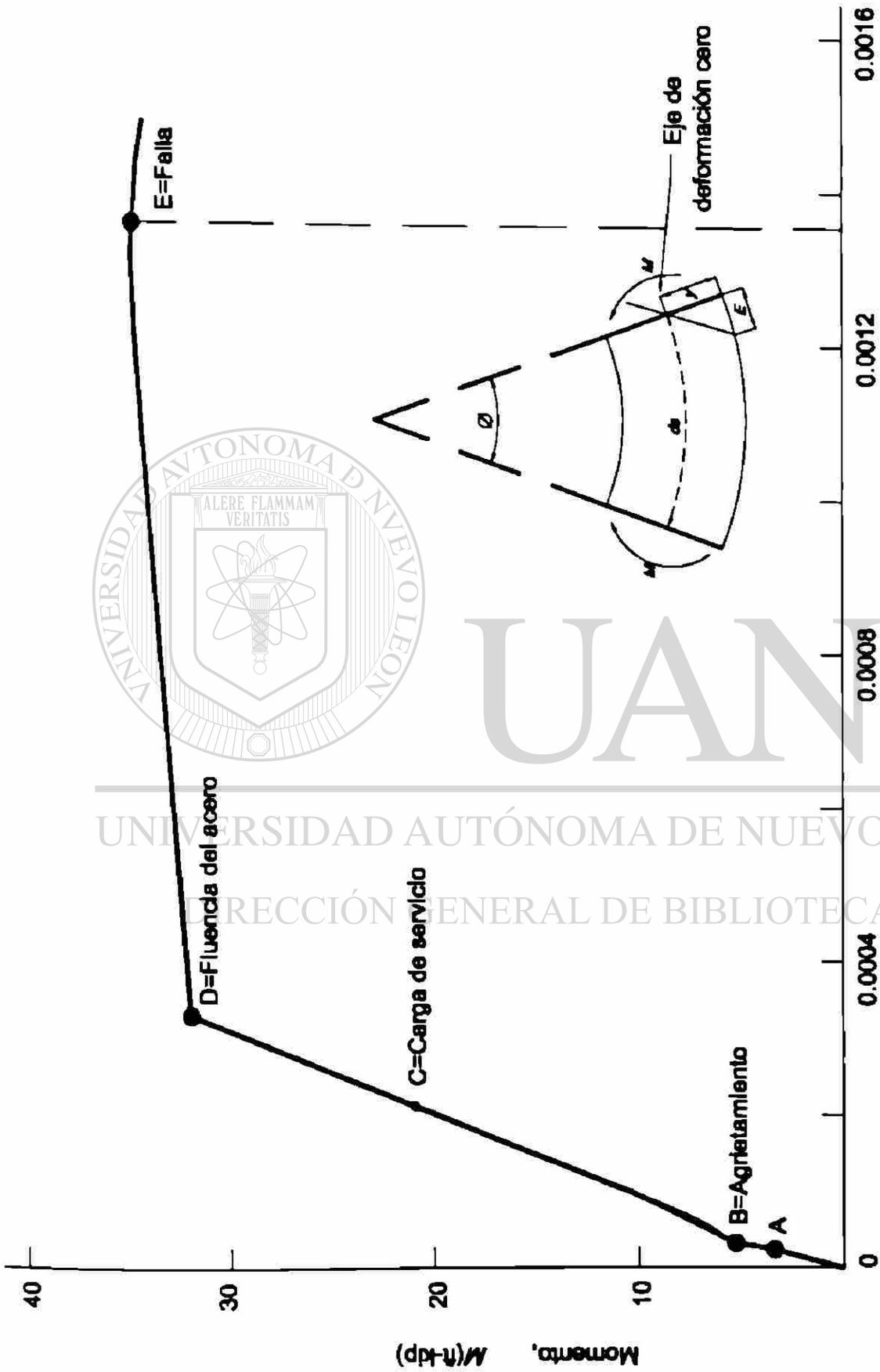


FIGURA 3-6  
DIAGRAMA DE MOMENTO CURVATURA PARA LA VIGA DE PRUEBA

Cuando los esfuerzos en la fibra inferior de la viga alcanzan la resistencia a la tensión del concreto, ocurre el agrietamiento. Después del agrietamiento, la fuerza de tensión en el concreto se transfiere al acero. De esto resulta, una sección menor de concreto para resistir los momentos, como se muestra en la distribución de esfuerzos en la Figura 3-5b y la rigidez de la viga disminuye. Entonces la pendiente del diagrama momento-curvatura (mostrado por B-C-D en la Figura 3-6) también disminuye. El patrón de grietas y deformaciones de la Figura 3-5b corresponde al comportamiento debido a las cargas aplicadas en servicio. (Inciso b en la Figura 3-5 y punto C en Figura 3-6). La distribución de esfuerzos en el concreto se conserva lineal en esta etapa

Eventualmente, el refuerzo alcanza el punto de fluencia, como lo muestra el punto D de la Figura 3-6. Los esfuerzos de compresión dejan de tener un comportamiento lineal en esta etapa. Después de la fluencia, la curvatura se incrementa rápidamente con un pequeño incremento, como se muestra en la Figura 3-6. El incremento en curvatura se puede apreciar también por la diferencia en deformaciones en los diagramas en las Figuras 3-5b y c. La viga falla por el agrietamiento del concreto en la cara superior de la viga. Esto demuestra que el concreto no es un material muy dúctil pero en vigas reforzadas puede exhibir gran ductilidad, como lo demuestra el diagrama momento curvatura en la porción después de la fluencia. En carga de servicio (etapa C), la deflexión en el centro del claro de la viga es 0.31 pulg., ó 1/383 de el claro. Al último, ésta puede incrementarse a 2 pulg., ó 1/60 de el claro, lo que muestra una gran ductilidad de esta viga.

En la práctica, el diseño del concreto reforzado ha sido enfocado por uno de dos caminos. A mediados de los 60s, los calculistas consideraban las cargas de servicio y asumían una distribución lineal de esfuerzos en el concreto en compresión. Esto es llamado "diseño por esfuerzos de trabajo". Cuando los cálculos han sido llevados a la etapa de falla (punto E en la Figura 3-6) o grandes cargas mayores que las que se esperan en servicio (cargas factorizadas) que corresponden a las deflexiones y agrietamiento en los niveles de carga de servicio, esto es llamado "Diseño en estados límite" o "diseño por resistencias". En estos apuntes se referirán a diseño en estados límite. Los principios de diseño por esfuerzo de trabajo se usan para calcular las deflexiones y esfuerzos en el acero bajo cargas de servicio.

### **Consideraciones básicas de la teoría de la flexión.**

Tres consideraciones básicas son hechas:

1.- Las secciones perpendiculares a el eje de flexión permanecen planas después de la flexión.

2.- La deformación del refuerzo es igual a la deformación del concreto en el mismo nivel.

3.- Los esfuerzos en el concreto y el acero de refuerzo pueden calcularse con las deformaciones de las curvas esfuerzo-deformación para el concreto y el acero. La primera es la tradicional "las secciones planas permanecen planas" en el desarrollo de la teoría de la flexión. La Figura 3-7b corresponde al diagrama de distribución de deformaciones de la Figura 3-5b. Los puntos representan las deformaciones medidas en las líneas de calibración mostradas en la Figura 3-7a. La Figura 3-8 muestra la distribución de deformaciones medidas en dos columnas sujetas a carga axial y momento. La distribución resultó ser lineal como se supuso.

## TEORIA DE LA FLEXION

La segunda consideración es necesaria porque el concreto y el acero de refuerzo actúan simultáneamente para transmitir la carga. Esta consideración implica una perfecta adherencia entre el concreto y el acero. La concordancia entre las deformaciones medidas en el acero, dibujadas con un triángulo en la Figura 3-7b y la línea a través de los puntos marcados sobre el concreto muestran que las deformaciones son las mismas.

El Código ACI combina estas dos consideraciones como sigue:

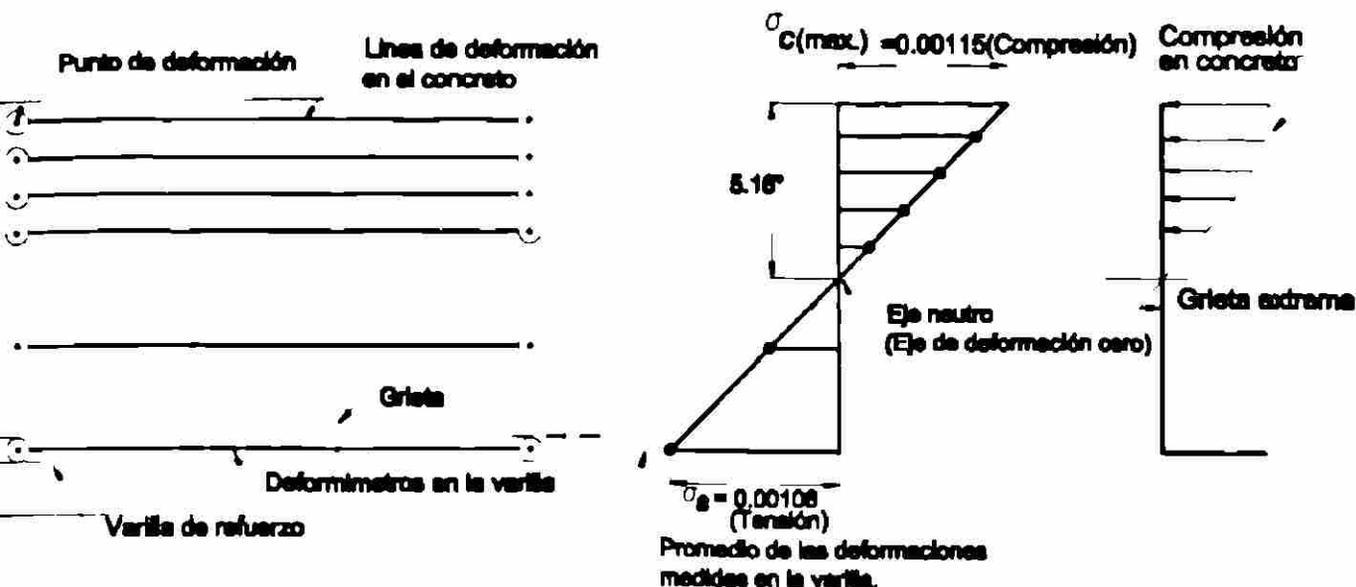
**10.2.2.-** La deformación en el acero y el concreto serán consideradas directamente proporcionales a la distancia al eje neutro.

### Consideraciones adicionales en la teoría de la flexión para diseño.

Las tres consideraciones hechas son suficientes para calcular la resistencia de elementos de concreto reforzado. Para propósito de diseño, sin embargo, las siguientes consideraciones adicionales se añaden para simplificar el problema con poca pérdida en precisión.

4.- El esfuerzo de tensión en el concreto es despreciado en el cálculo de la resistencia a la flexión (ACI Sección 10.2.5). La resistencia del concreto en tensión es aproximadamente 1/10 de la resistencia en compresión y la fuerza de tensión en el concreto abajo del eje de deformación cero es pequeña comparada con la fuerza de tensión en el acero. En casos especiales como el cálculo del cortante, flexión, deflexión y cálculos de carga de servicio en concreto presforzado, la resistencia a la tensión del concreto se aprovecha.

5.- El concreto se considera que falla cuando la deformación por compresión rebasa un valor límite.

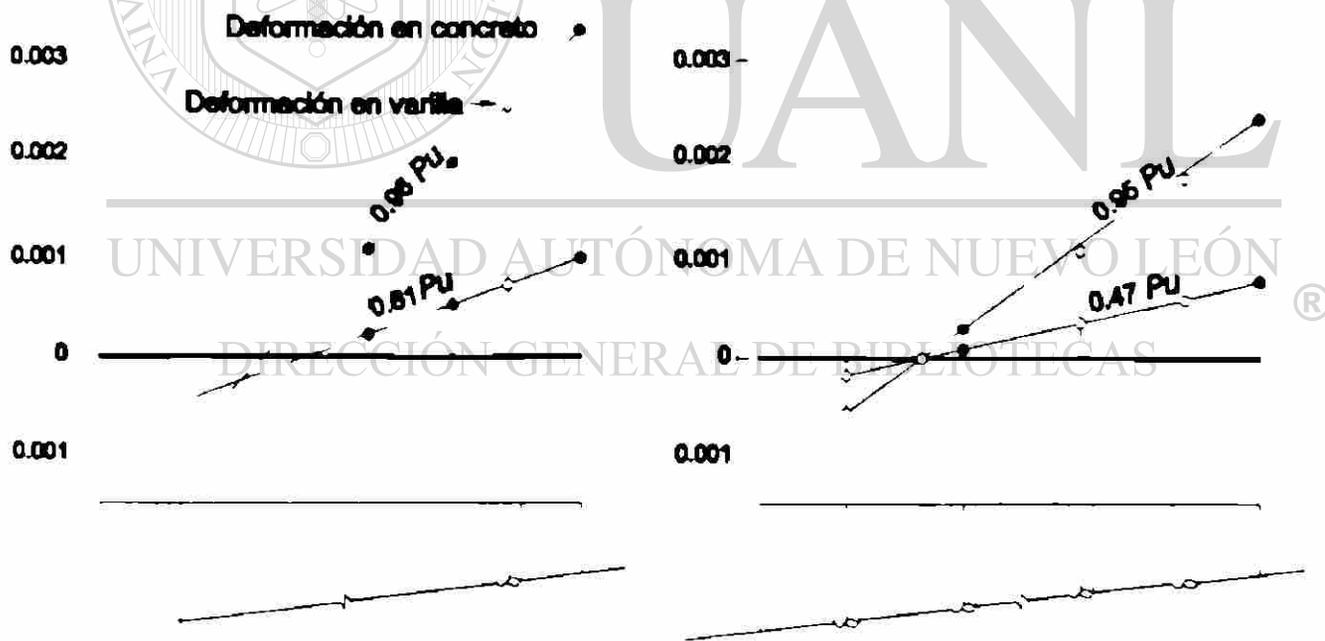


(a) Líneas de deformación.

(b) Deformaciones para 7-kip de carga.

(c) Esfuerzos de 7-kip de carga.

FIGURA 3-7  
DISTRIBUCIÓN DE ESFUERZOS Y DEFORMACIONES EN UNA VIGA PROBADA BAJO CARGAS DE SERVICIO.



(a) Columna con estribos.

(b) Columna con espiral.

FIGURA 3-8  
DEFORMACIONES MEDIDAS EN PRUEBAS DE COLUMNAS CARGADAS EXCÉNTRICAMENTE.

Estrictamente hablando, lo que limita al concreto es la deformación por compresión. Como se muestra en la Figura 3-6 una viga simple de concreto reforzado alcanza su máxima capacidad cuando la pendiente,  $dM/d\phi$  del diagrama momento-curvatura es igual a cero (punto E). La falla ocurre cuando  $dM/d\phi$  se hace negativa, la cual corresponde a una situación inestable en la cual ocurren grandes deformaciones para pequeños incrementos de carga.

Los cálculos para diseño se simplifican mucho, siempre y cuando se considere una deformación límite. Ya que el momento y la curvatura en el punto de momento máximo del diagrama momento-curvatura corresponde a un valor particular de la deformación extrema por compresión, los momentos correspondientes a cualquier otra deformación en la fibra extrema serán menores. Como resultado de esto, se considera que la resistencia estimada así será conservadora.

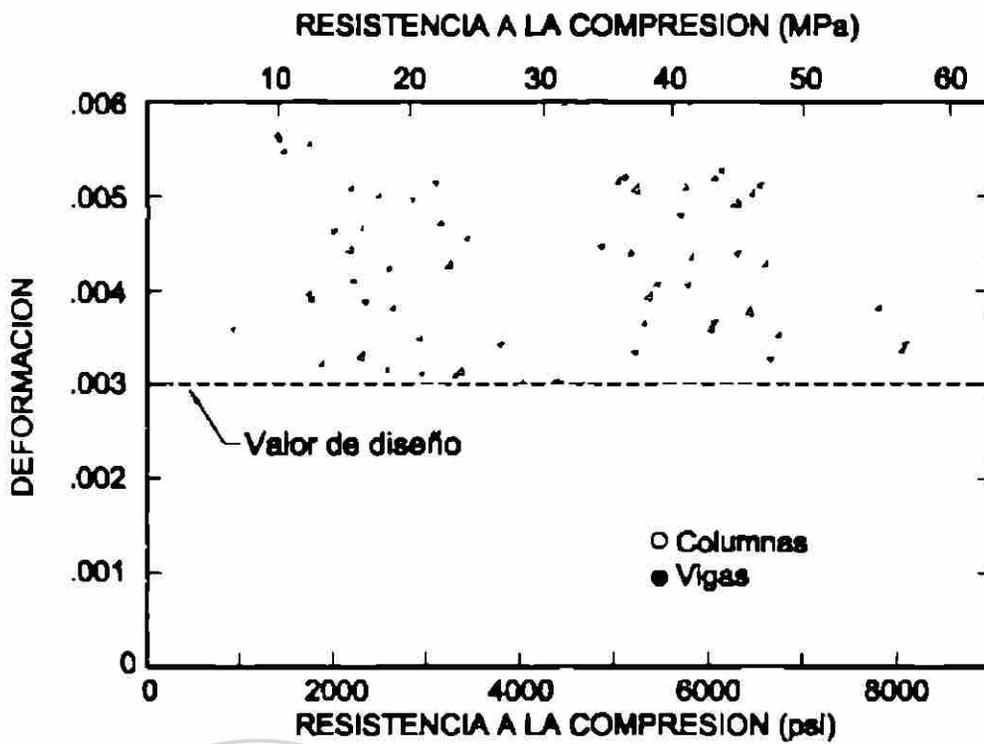
La deformación por compresión máxima,  $\epsilon_{cu}$ , de las pruebas en vigas de concreto reforzado, columnas cargadas excéntricamente y prismas de concreto cargados excéntricamente se reproducen en la Figura 3-9. El ACI en la Sección 10.2.3. especifica una deformación por compresión límite igual a 0.003. Esta representa el límite menor de los datos de pruebas de la Figura 3-9b. En Europa, el Código Modelo CEB usa una deformación límite de 0.002 para columnas con carga axial concentrada, y 0.0035 para vigas y columnas cargadas excéntricamente. Se notará que el límite superior de deformaciones ha sido medido en miembros con un gradiente significativo de momento y miembros en los cuales el concreto está confinado por espirales o estribos.

6.- La relación esfuerzo de compresión-deformación para el concreto puede ser considerada como rectangular, trapezoidal, parabólica o cualquier otra forma que coincida sustancialmente con los resultados de las pruebas de compresión (ACI Sección 10.2.6). Otros diagramas fácilmente se pueden usar como aceptables, previendo que correspondan con los resultados de la prueba. Como se ilustra en la Figura 3-11, la forma del bloque de esfuerzos en una viga en el momento último puede expresarse matemáticamente en función de tres constantes:

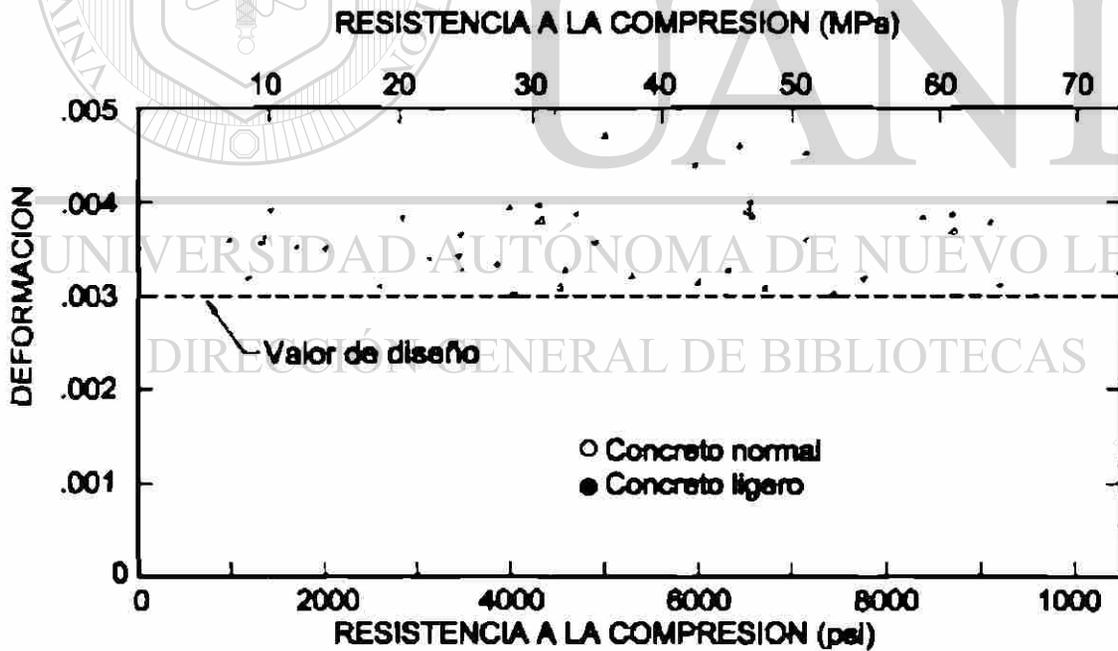
$k_3$  = relación del máximo esfuerzo  $f_c$  en la zona de compresión para una resistencia del cilindro  $f_c$ .

$k_1$  = relación del esfuerzo promedio de compresión a el esfuerzo máximo (ésta es igual a la relación del área achurada en la Figura 3-11 a el área del rectángulo  $ck_3f_c$ ).

$k_2$  = relación de la distancia entre la fibra extrema de compresión y la fuerza resultante de compresión a la profundidad del eje neutro,  $c$ .



(a) Deformación última en pruebas de miembros de concreto reforzado.



(b) Deformación última en pruebas de especímenes de concreto.

FIGURA 3-9  
DEFORMACION LIMITE DE COMPRESION.

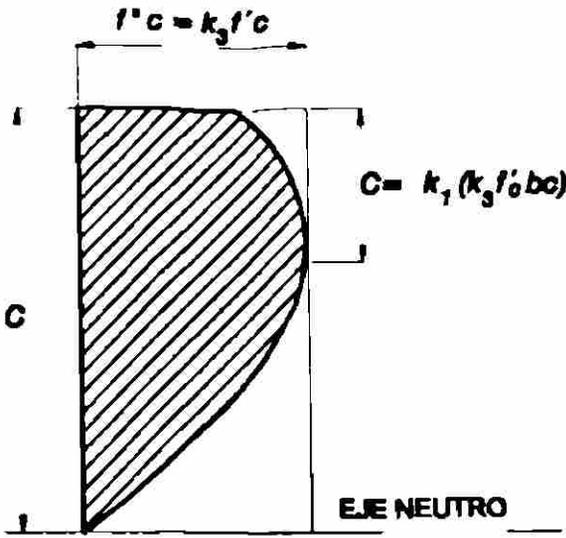


FIGURA 3-10  
DESCRIPCION MATEMATICA DEL BLOQUE DE ESFUERZOS DE COMPRESION.

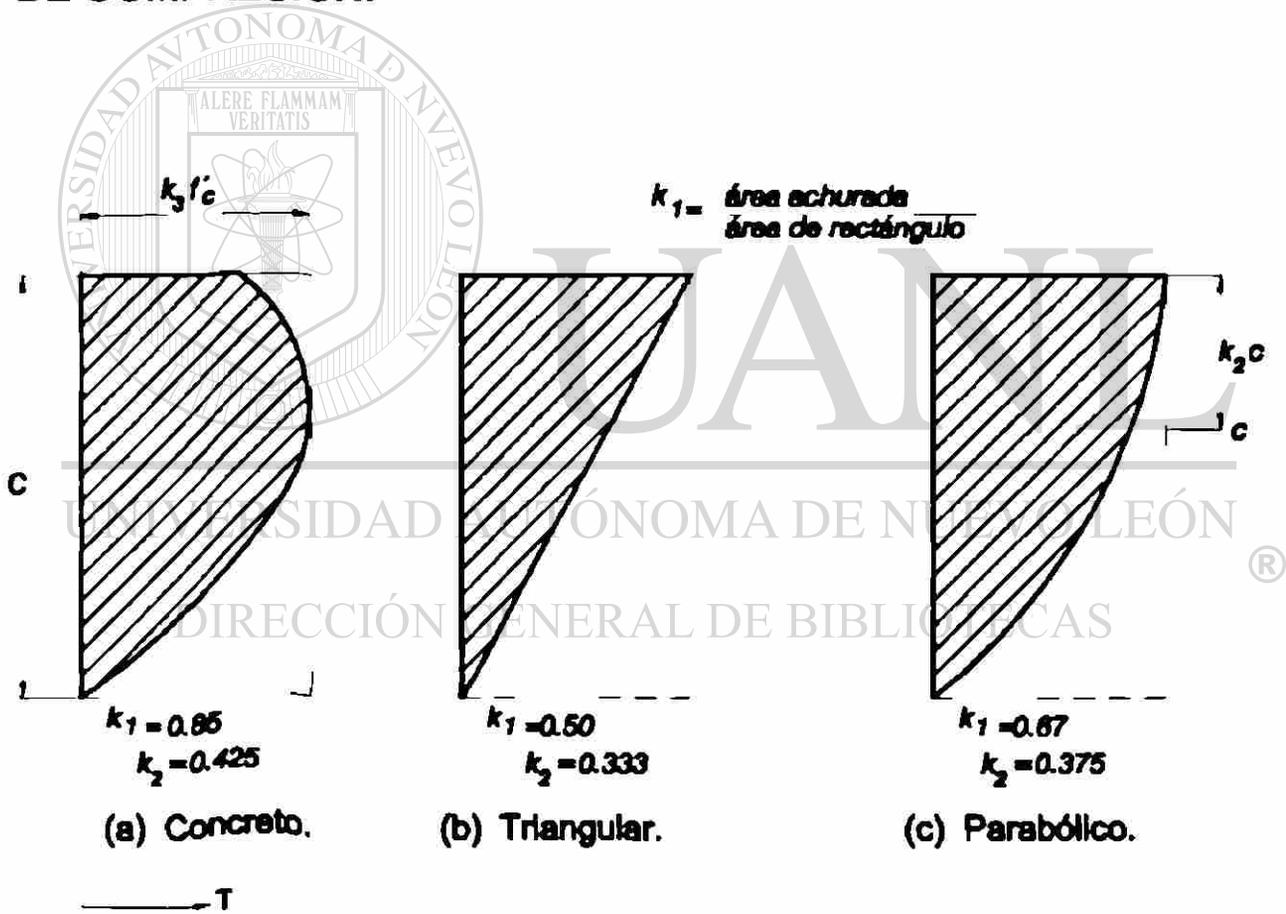


FIGURA 3-11  
VALORES DE  $k_1$  Y  $k_2$  PARA VARIAS DISTRIBUCIONES DE ESFUERZOS.

Para una zona rectangular de compresión de ancho,  $b$  y profundidad del eje neutro,  $c$ , la fuerza de compresión resultante es :  $C = k_1 k_3 f_c b c$ .

Los valores de  $k_1$  y  $k_3$  están dados en la figura 3-11 para varios diagramas esfuerzo-deformación considerados o "bloques de esfuerzo".

Las pruebas en prismas de concreto arrojan los valores de  $\alpha_1 \beta_1$  mostrados en la Figura 3-12. Estudia el efecto de carga sostenida en la resistencia del concreto en pruebas de columnas, el valor de  $k_3$  puede tomarse igual a 0.85 para propósitos prácticos.

Como una simplificación, el ACI Sección 10.2.7 permite usar una distribución rectangular de esfuerzos en el concreto como se muestra en la Figura 3-13 para cálculos de la resistencia última. La distribución rectangular está definida como sigue:

1.- Un esfuerzo en el concreto de  $\alpha_1 f_c$  será considerado distribuido uniformemente hasta una profundidad de  $a = \beta_1 c$  desde la fibra extrema en compresión (máxima deformación). Donde  $\alpha_1 = 0.85$ .

2.- La distancia "c" de la fibra de máxima deformación a el eje neutro se mide perpendicular a éste.

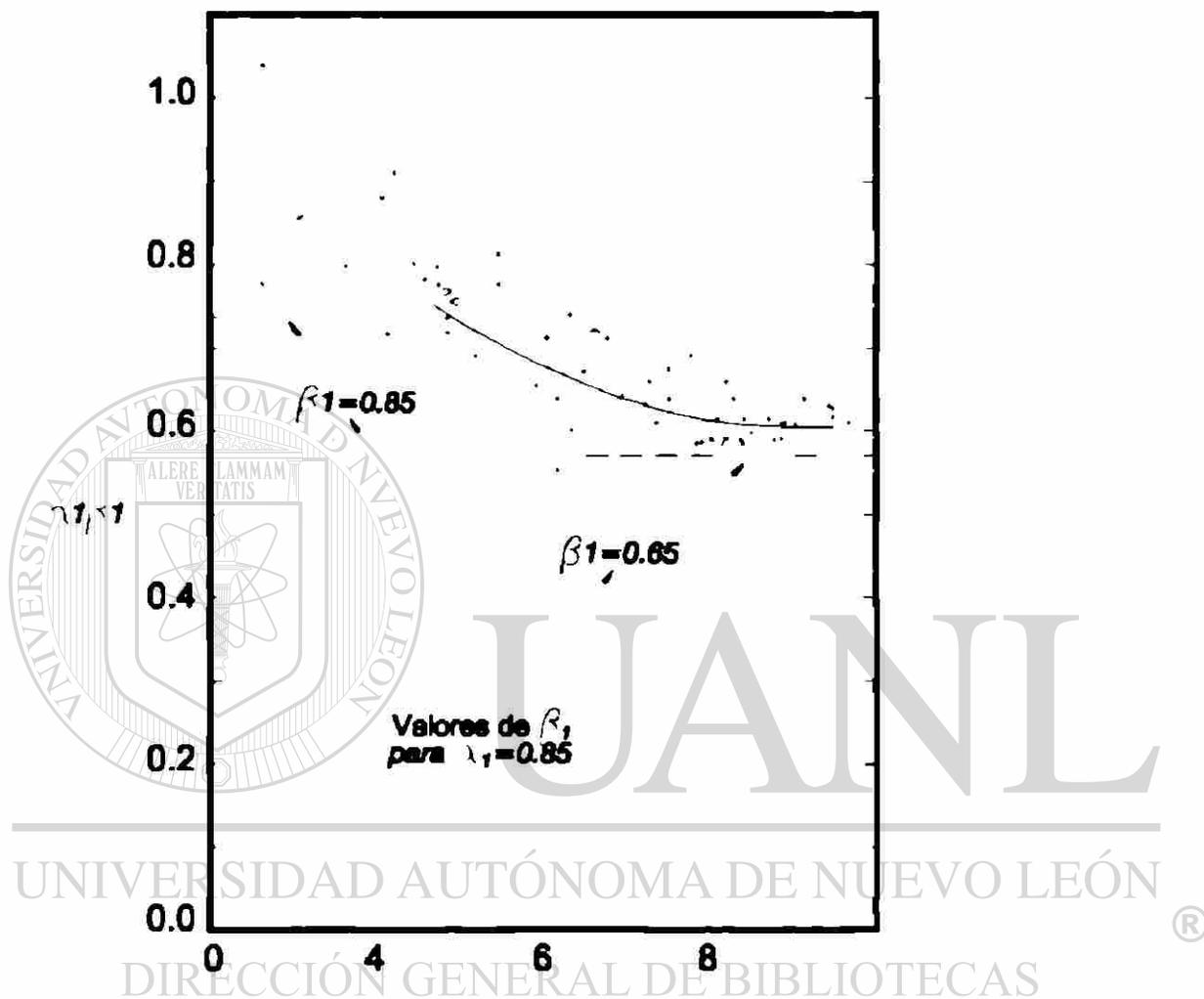
3.- El factor  $\beta_1$ , será tomado como:

(a) Para concretos con resistencias mayor o igual 4000 lbs/pulg<sup>2</sup> (280 kg/cm<sup>2</sup>)

$$\beta_1 = 0.85 \tag{3-8a}$$

(b) Para  $f_c$  entre 4000 (280) y 8000 lbs/pulg<sup>2</sup> (560 kg/cm<sup>2</sup>)

$$\beta_1 = 1.05 - 0.05 (f_c / 1000) \quad \text{en lbs/pulg}^2 \tag{3-8b}$$



**FIGURA 3-12**  
**VALORES DE  $\alpha_1 \beta_1$  EN PRUEBAS EN PRISMAS DE CONCRETO.**

(c) Para  $f_c$  mayor 8000 lbs/pulg<sup>2</sup> (560 kg/cm<sup>2</sup>)

$$\beta_1 = 0.65$$

(3-8c)

Los símbolos  $\alpha_1$  y  $\beta_1$  se usan para definir el bloque rectangular de esfuerzos los cuales son diferentes a los símbolos  $k_1$ ,  $k_2$  y  $k_3$  usados para describir el bloque de esfuerzos de las pruebas porque el bloque rectangular de esfuerzos queda definido por dos símbolos, mientras que se necesitan tres para definir el bloque de esfuerzos de pruebas.

Estudios de el efecto de cargas sostenidas en la resistencia del concreto y pruebas de columnas sugieren que  $\alpha_1$  puede ser tomado igual a 0.85. La línea punteada de la Figura 3-12 es el límite inferior y corresponde a  $K_3 = \alpha_1 = 0.85$  y  $\beta_1$  se obtiene de la ecuación 3-8.

Debido a que  $\beta_1$  se toma como el límite inferior de los datos de las pruebas Figura 3-12. El brazo de palanca de la fuerza de compresión en el concreto con respecto al eje neutro (eje de deformación cero) para una columna rectangular es  $(h/2 - \beta_1 c/2)$ , donde  $c$  es la profundidad del eje neutro. Si  $\beta_1$  es muy pequeño, el brazo de palanca será muy grande y la capacidad de momento también. Las siguientes ecuaciones se recomiendan para determinar  $\alpha_1$  y  $\beta_1$  con  $f_c$  en lbs/pulg<sup>2</sup>.

$$\alpha_1 = 0.85 \text{ para } f_c \leq 8000 \text{ lbs/pulg}^2$$

$$\alpha_1 = 0.85 - \frac{f_c - 8000}{50,000} \geq 0.73 \text{ para } f_c > 8000 \text{ lbs/pulg}^2$$

$$\beta_1 = 0.85 \text{ para } f_c \leq 4000 \text{ lbs/pulg}^2$$

$$\beta_1 = 0.85 - 0.15 \left( \frac{f_c - 4000}{10,000} \right) \geq 0.70 \text{ para } f_c > 4000 \text{ lbs/pulg}^2$$

### 3-3.- ANÁLISIS DE VIGAS DE CONCRETO REFORZADO.

#### Compatibilidad de esfuerzos y deformaciones y equilibrio.

Dos requisitos son satisfechos en el análisis y diseño de vigas y columnas de concreto reforzado. Estos son:

1.- Compatibilidad de esfuerzos y deformaciones. El esfuerzo de cualquier punto en un miembro corresponde a la deformación en ese punto. Excepto para vigas cortas de gran peralte la distribución de deformaciones sigue una variación lineal.

2.- Equilibrio. Las fuerzas internas deben balancear los efectos de las cargas externas, como se ilustra en la Figura. 3-3 y en las ecuaciones 3-2 ,3-3.

### **Análisis de la capacidad a flexión de una sección transversal general**

El uso del equilibrio y la compatibilidad de deformaciones en el cálculo de la capacidad de una sección transversal arbitraria, como la que se muestra en la Figura 3-14 involucra cuatro pasos como se verá con un ejemplo.

#### **Ejemplo 3-1.- Cálculo de la capacidad de momento de una viga.**

La viga mostrada en la Figura 3-14 es de concreto con una resistencia,  $f_c$  de 210 kg/cm<sup>2</sup> y tiene tres varillas No. 8 con una resistencia a la fluencia,  $f_y$ , de 4200 kg/cm<sup>2</sup>.

1.- Inicialmente suponemos que el esfuerzo,  $f_s$ , en el refuerzo de tensión es igual a la resistencia a la fluencia,  $f_y$ , y calculamos la fuerza de tensión  $T=A_s f_y$ .

$$A_s = 3 \# 8 = 3 \times 5.07 \text{ cm}^2 = 15.21 \text{ cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2 \text{ para varillas grado 60}$$

$$T = A_s f_y = 4200 \times 15.21 = 63,882 \text{ Kg.}$$

La consideración de  $f_s = f_y$  se revisará en el paso 3. Si el acero ha fluido, una solución simple existe; si no, una solución más compleja puede usarse. Esta consideración generalmente se presentará si se cumplen los requisitos de porcentajes de acero que marca el ACI.

2 - Calcular el área de el bloque de compresión para igualar  $C = T$ .

Usando el bloque rectangular equivalente de esfuerzos mostrado en la Figura 3-14b. Este bloque consiste de un esfuerzo uniforme de  $0.85f_c$  distribuido hasta una profundidad de  $a = \beta_1 c$  medida desde la fibra extrema en compresión.

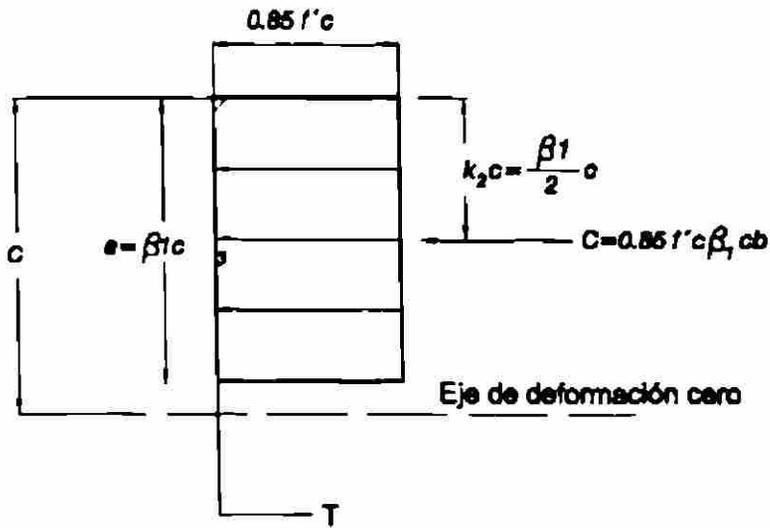


FIGURA 3-13  
BLOQUE DE ESFUERZOS RECTANGULAR EQUIVALENTE.

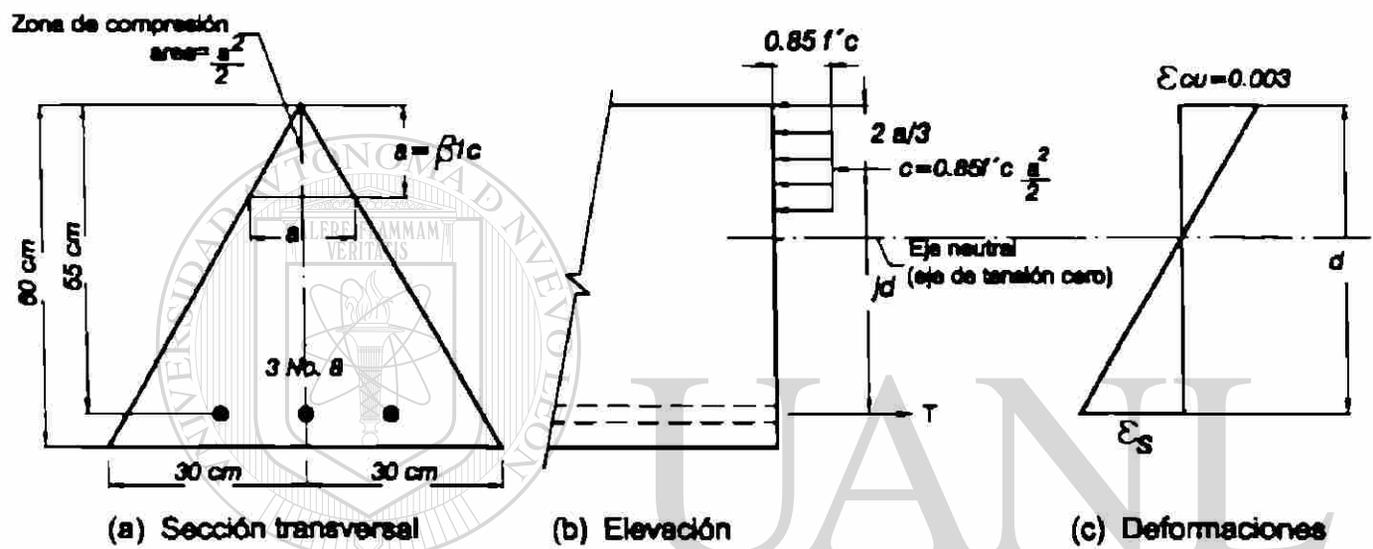
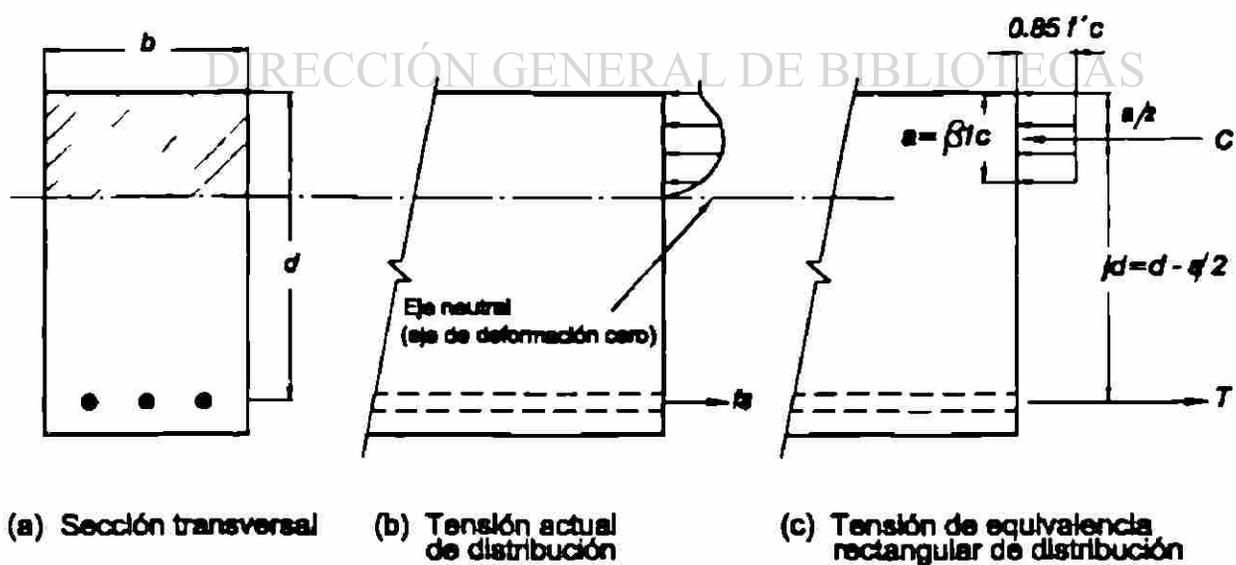


FIGURA 3-14  
ANÁLISIS DE UNA SECCIÓN TRANSVERSAL ARBITRARIA.



(a) Sección transversal (b) Tensión actual de distribución (c) Tensión de equivalencia rectangular de distribución

FIGURA 3-15  
VIGAS RECTANGULARES CON REFUERZO POR TENSION.

La magnitud de la fuerza de compresión se obtiene del equilibrio:  
 $C = T = 63,882 \text{ Kg.}$

Por la geometría de esta sección triangular si la profundidad de la zona de compresión es  $a$ , el ancho también es  $a$ , y el área es  $a^2/2$ . Esto es solamente en esta forma particular.

Entonces,  $C = (0.85 f_c) a^2/2$

$$a = \sqrt{\frac{63,882 \times 2}{0.85 \times 210}}$$

$$a = 26.75 \text{ cm.}$$

3.- Revisar si  $f_s = f_y$ .

Haciendo uso de la compatibilidad de deformaciones. La distribución de deformación última se muestra en la Figura 3-14c.

$$\epsilon_{cu} = 0.003$$

(consideración 4, Sección 3-2)

$$c = a/\beta_1$$

Para  $f_c = 210 \text{ Kg/cm}^2$ ,  $\beta_1 = 0.85$  (De las Ecuaciones 3-8)

Entonces,  $c = 26.75/0.85 = 31.47 \text{ cm.}$

Por triángulos semejantes de la Figura 3-14c

$$\epsilon_s / d - c = 0.003 / c$$

$$\epsilon_s = 0.003 (55 - 31.47) / 31.47 = 0.00224$$

Para refuerzo Grado 60,  $f_y = 60,000 \text{ lbs/pulg}^2$

$$\epsilon_y = f_y / E_s$$

$$\epsilon_y = \frac{60,000}{2,040,000} = 0.00205$$

\*ACI Sección 8.5.2.

Por lo tanto,  $\epsilon_s > \epsilon_y$  y  $f_s = f_y$ . Entonces la consideración hecha en el paso 1 es satisfecha.

4 - Calcular  $\phi M_n$ .

$$M_n = Cjd = Tjd$$

Dónde  $jd$  es el brazo de palanca, distancia de la fuerza de tensión en el centroide del refuerzo de tensión a la resultante de la fuerza de compresión  $C$ . Debido a que el área del bloque de esfuerzos de compresión en este caso es triangular,  $C$  actúa a  $2/3$  de  $a$  del borde superior de la viga. Por lo tanto,

$$jd = d - 2a/3$$

$$y \quad \phi M_n = \phi[A_s f_y (d - 2a/3)]$$

$$\phi M_n = 0.9 [15.21 \times 4,200 (55 - (2 \times 26.75)/3)]$$

$$\phi M_n = 2,374,281 \text{ kg-cm} = 23,743 \text{ kg-m} = 23.743 \text{ ton-m.}$$

Entonces la capacidad de momento de diseño de la sección transversal de esta viga es 23.743 ton-m.

Este procedimiento general de análisis puede usarse para calcular la capacidad de cualquier forma de sección. Frecuentemente se presentan secciones rectangulares en vigas como se verá más adelante.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

### **Tensión, compresión y falla balanceada**

Dependiendo de las propiedades de una viga, las fallas por flexión pueden ocurrir de tres formas :

**1.- Falla por tensión:** El refuerzo fluye antes de que el concreto se agriete. Entonces se dice que la sección es sub-reforzada.

**2.- Falla por compresión:** El concreto falla antes que el acero fluya. Es cuando se dice que la viga es sobre-reforzada.

**3.- Falla balanceada:** El concreto se agrieta y el acero fluye simultáneamente. Se dice entonces que la viga tiene refuerzo balanceado.

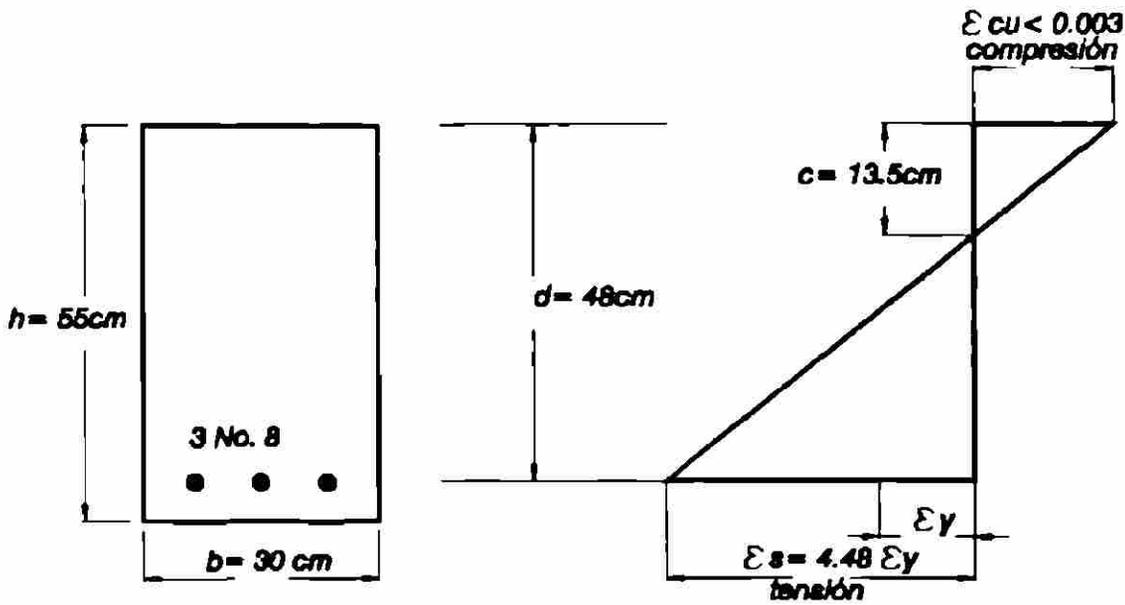
En el espécimen de prueba mostrado en la Figura 3-5, el acero fluyó antes que el concreto se agrietara por lo tanto en la viga se desarrolló una falla por tensión. En la falla (punto E de la Figura 3-6) la curvatura de la sección corresponde al momento máximo y tiene un esfuerzo de aproximadamente cuatro veces el valor de la fluencia (punto D). Como resultado de esto, la viga se flexiona excesivamente y se desarrollan grietas a todo lo ancho al final del ciclo de carga. Este tipo de comportamiento se dice que es dúctil y corresponde en los diagramas momento-curvatura ó carga-deflexión a la gran región plástica (D-E en la Figura 3-6). Si una viga en un edificio falla de una manera dúctil, los ocupantes de el edificio tiene oportunidad de desalojarlo antes del colapso final, entonces se reducen las consecuencias. Los diagramas momento-curvatura representados en la Figura 3-16d corresponden a las tres vigas que se muestran en las Figuras 3-16a, b y c. Las vigas difieren solamente en la cantidad de refuerzo. En la falla, el refuerzo en la viga A ha fluido, como se muestra por el diagrama de deformación. Esta viga desarrolla una falla por tensión y tiene una respuesta momento-curvatura dúctil como se muestra en la Figura 3-16d. Se verá después en esta sección, que la falla por tensión ; es pequeña cuando la relación de refuerzo mecánica  $\omega = \rho (f_y/f_c)$ .

En el caso de la viga B en la Figura 3-16, el concreto en la fibra extrema de compresión alcanza una deformación de 0.003 antes que en el acero se presente la fluencia. Esto es llamado "falla por compresión". El diagrama momento-curvatura para esta viga no tiene un comportamiento dúctil después de la fluencia como en la viga A. Las fallas por compresión ocurren para valores altos de la relación  $\omega$ . En el caso de la viga C, la distribución de la deformación en la falla, como se muestra en la Figura 3-16c, involucra un agrietamiento simultáneo del concreto y la fluencia del acero. Este caso, representado en la Figura 3-16d, dibujado entre la falla por tensión y la falla por compresión recibe el nombre de "falla balanceada".

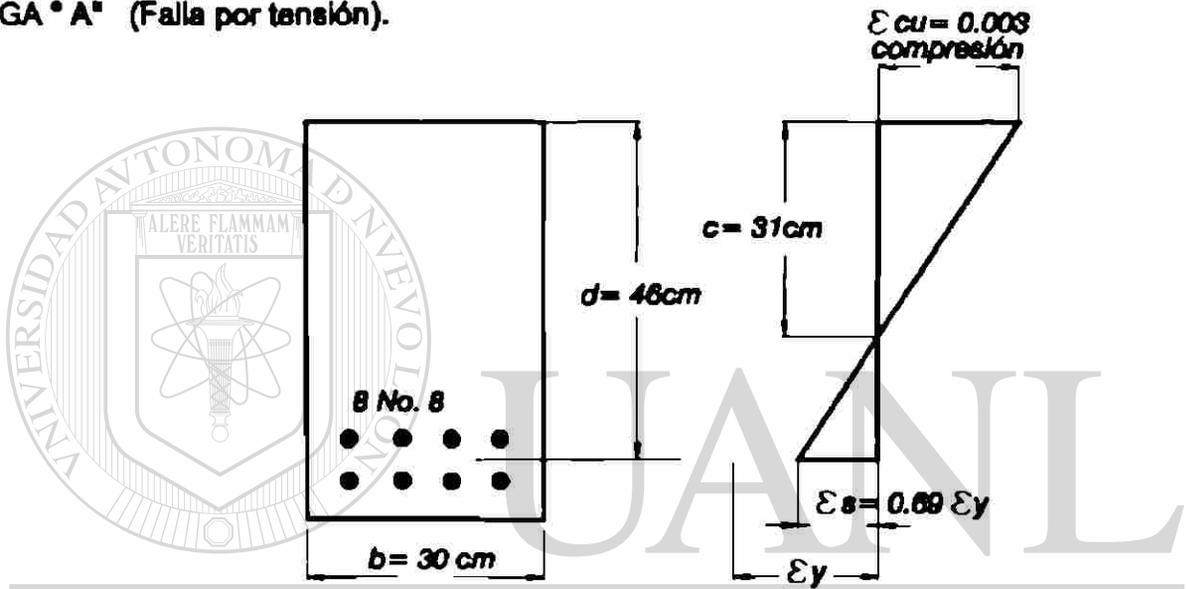
### **Análisis de vigas rectangulares con refuerzo por tensión solamente**

#### **Ecuaciones para $M_n$ y $\phi M_n$ : Tensión de fluencia en el acero.**

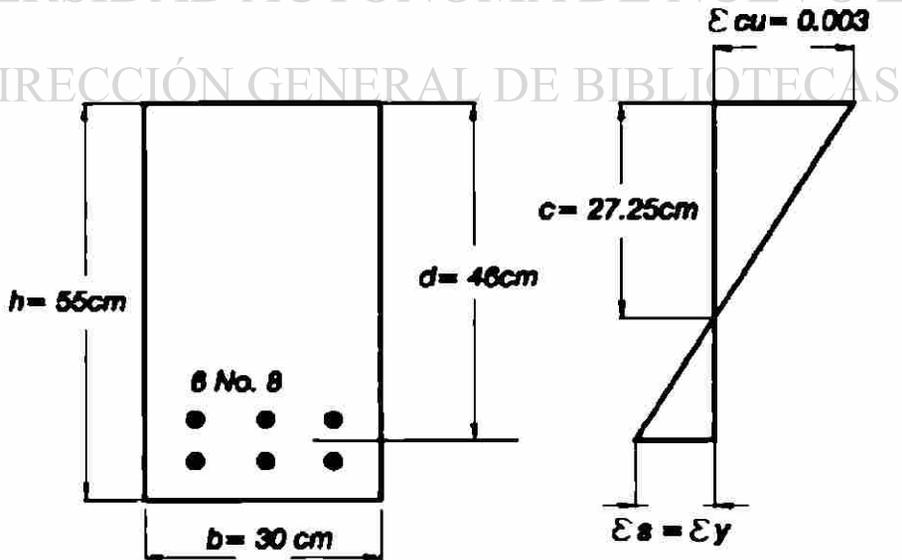
En la sección anterior, el equilibrio y la compatibilidad se usaron para determinar la capacidad de momento de la sección transversal de una viga particular. Considerando ahora la viga mostrada en la Figura 3-15c. La fuerza de compresión,  $C$ , en el concreto es:  $C = (0.85 f_c) (b)(a)$ .



(a) VIGA "A" (Falla por tensión).

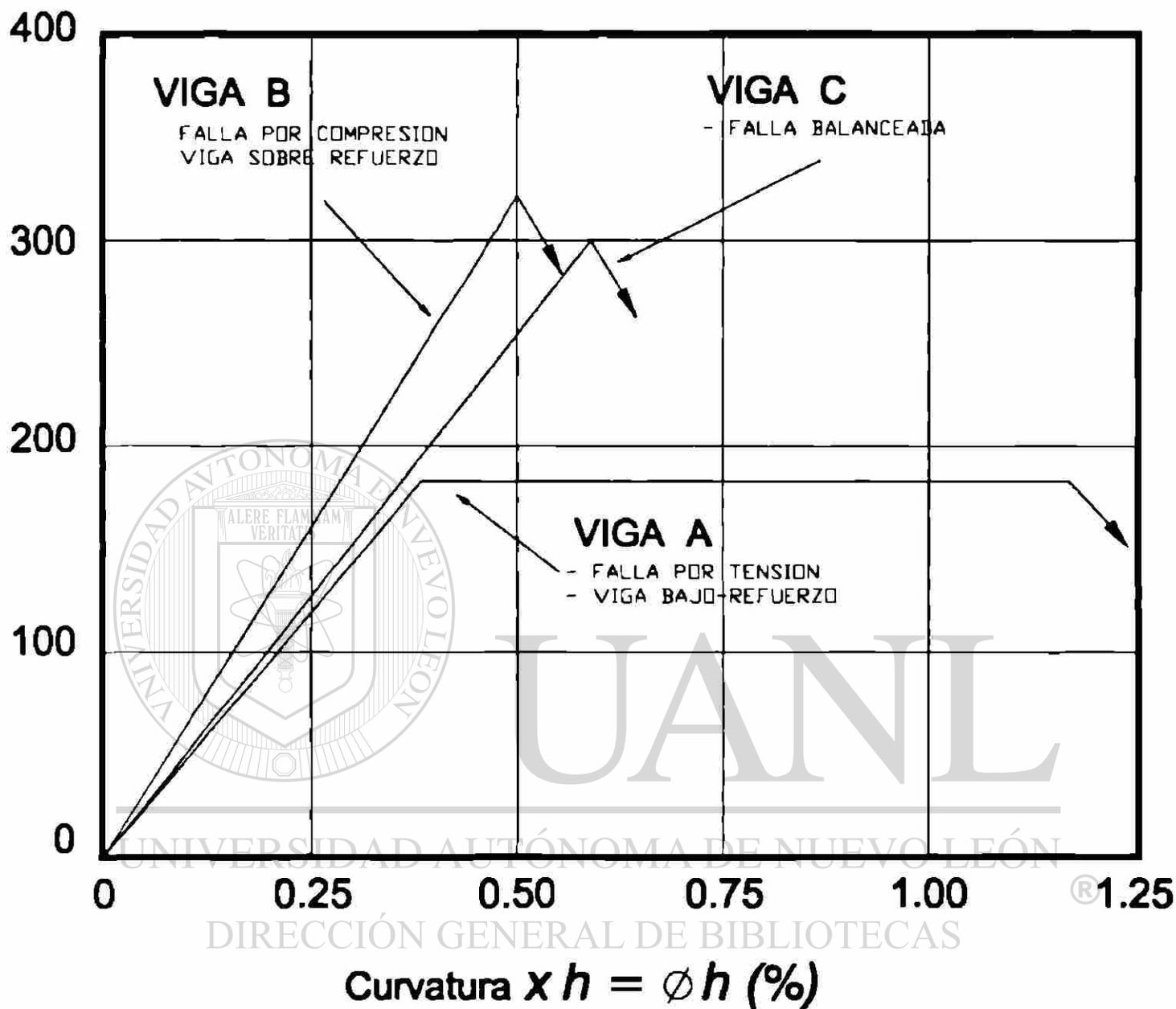


(b) VIGA "B" (Falla por compresión).



(c) VIGA "C" (Falla balanceada).

FIGURA 3 -16  
FALLAS POR TENSION, COMPRESION Y BALANCEADA.



(d) Diagrama Curvatura - Momento.

FIGURA 3-16  
FALLAS POR TENSION, COMPRESION Y BALANCEADA.

Por equilibrio,  $C=T$ . Entonces, la profundidad,  $a$ , de el bloque rectangular equivalente de esfuerzos es:

$$a = \frac{A_s f_s}{0.85 f_c b}$$

Si  $f_s = f_y$  como se considera en el paso 1 del ejemplo 3-1, tenemos:

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f_c b}$$

Es posible expresar las ecuaciones para  $M_n$  y  $\phi M_n$  en varias formas basándose en  $M_n = Tjd$ ,  $M_n = Cjd$ , como se muestra en los siguientes párrafos.

### Ecuación para $M_n$ basada en $M_n = Tjd$

Sumando momentos con respecto a la línea de acción de la fuerza de compresión,  $C$  en la Figura 3-15c da:  $M_n = Tjd$

Substituyendo  $C = (0.85 f_c)ba$  y  $jd = (d-a/2)$  da:

$$M_n = (0.85 f_c)ba (d-a/2)$$

$$\phi M_n = \phi[(0.85 f_c)ba (d-a/2)]$$

### Ecuaciones adimensionales para $M_n$

Si substituímos  $A_s = \rho bd$  en la Ecuación de "a", tenemos:

$$a = \rho (f_y/0.85f_c)(d)$$

donde  $\rho(f_y/f_c) = \omega$  y se refiere a la relación mecánica de refuerzo.

El término  $\omega$  es frecuentemente usado como una medida de el comportamiento mecánico de una viga ya que toma en cuenta tres variables importantes ( $\rho$ ,  $f_y$  y  $f_c$ ). Entonces:

$$a = \omega d / 0.85$$

Substituyendo la ecuación anterior dentro de la Ecuación de  $\phi M_n$  da:

$$\phi M_n = \phi[f_c b d^2 \omega (1 - (\omega/2 \times 0.85))]$$

$$\phi M_n = \phi[f_c b d^2 \omega (1 - 0.59 \omega)]$$

Denominando  $K_n = f_c \omega (1 - 0.59\omega)$

$$\phi M_n = \phi K_n b d^2$$

$$\text{Haciendo } M_n = \phi M_n = \phi K_n b d^2$$

$$\text{de donde: } b d^2 = M_u / \phi K_n$$

Esta expresión nos sirve para diseño conociendo  $M_u$  en Kg-cm y  $f_c$  en Kg/cm<sup>2</sup> obtenemos  $b d^2$  en cm<sup>3</sup>.

La resistencia de materiales nos enseña que la sección más eficiente a flexión es aquella en que  $b \approx d/2$  por lo que podemos, ya teniendo  $b d^2$  proponer una sección de acuerdo al  $M_u$  y revisar comparando con  $\phi M_n$ .

Determinar si  $f_s = f_y$ .

La figura 3-17 muestra una viga con dos camas de refuerzo en tensión. El peralte efectivo al centroide de éste refuerzo es "d". Considerando que ocurre la falla balanceada el diagrama de deformaciones se muestra en la Figura 3 - 17b.

Por triángulos semejantes:

$$c_b/d = \epsilon_{cu} / (\epsilon_{cu} + \epsilon_y)$$

Sustituyendo  $\epsilon_{cu} = 0.003$  y  $E = 2,040,000$  Kg/cm<sup>2</sup> da:

$$c_b/d = 6100 / (6100 + f_y)$$

Con  $f_y$  en Kg/cm<sup>2</sup>. Si una viga tiene el eje neutro a una profundidad  $c$  menor que  $c_b$  la deformación en el acero excede  $\epsilon_y$  y viceversa. Entonces, si  $c < c_b$  en la falla  $f_s = f_y$  como  $a = \beta_1 c$ , luego:

$$a_b/d = \beta_1 (6100 / (6100 + f_y))$$

Durante el diseño, la localización exacta del eje neutro no se conoce hasta que el refuerzo se define y detalla. Por esta razón, es más fácil, definir la distribución, de las deformaciones en términos de el peralte  $d_t$  con respecto a la cama inferior del refuerzo en tensión. La deformación correspondiente en este acero es  $\epsilon_t$ . El término "deformación en tensión neta" se refiere a la deformación en resistencia nominal, del acero, excluyendo deformaciones debidas a presfuerzo, contracción, flujo plástico o temperatura. En otras palabras para una viga de concreto reforzado, la deformación neta por tensión,  $\epsilon_s$ , es la debida a las cargas muerta y viva factorizadas de la viga. El ACI Sección B.10.3.3 define una sección de compresión controlada, cuando la deformación neta en el acero extremo a tensión  $\epsilon_t$ , es menor o igual que la deformación de fluencia, en tensión,  $\epsilon_y$ . La distribución de deformación correspondiente a el límite de deformación a compresión controlada se muestra en la Figura 3-17c.

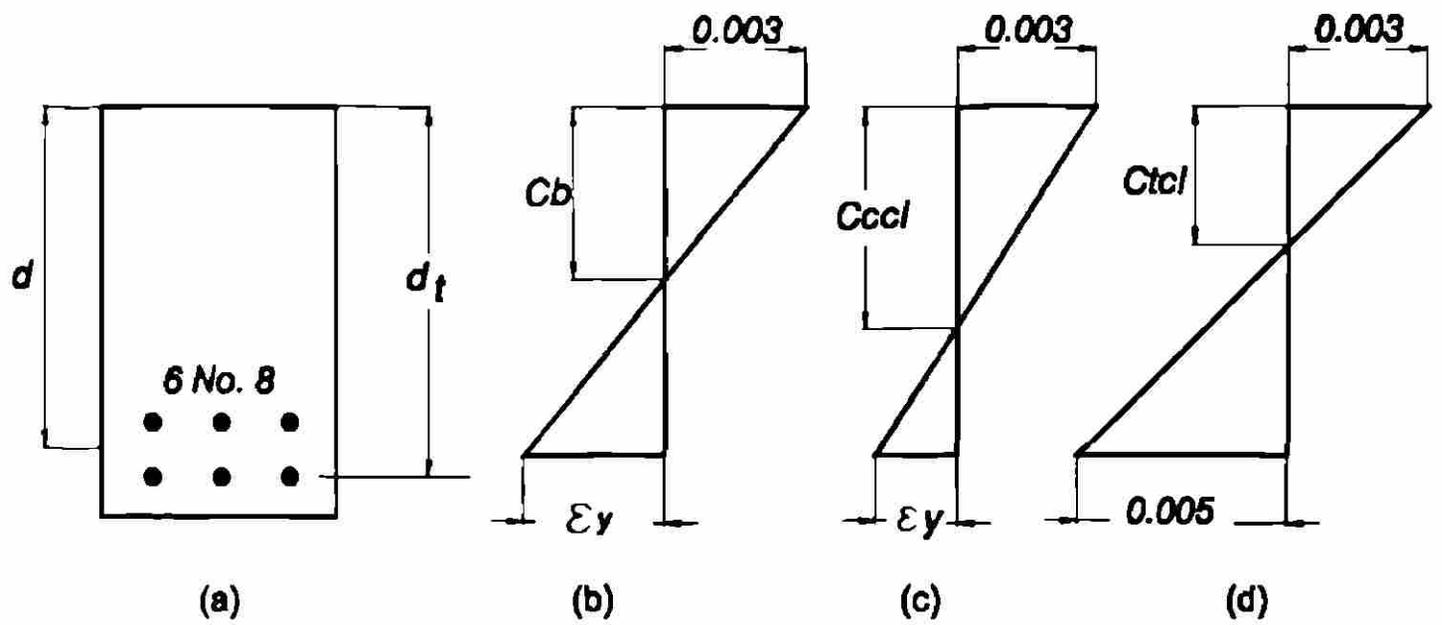


FIGURA 3-17  
VIGA CON DOS CAMAS DE REFUERZO EN TENSION.

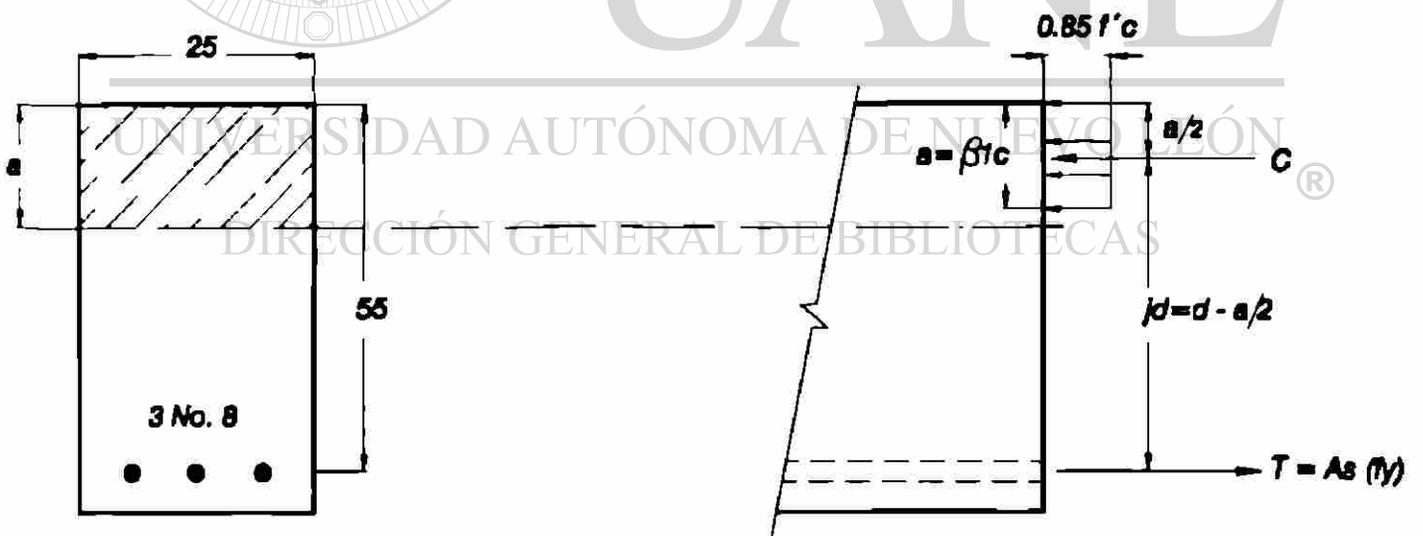


FIGURA DEL EJEMPLO 3-2.

Aquí la profundidad del eje neutro es  $C_{cd}$  y la deformación  $\epsilon_y$  ocurre en el extremo en tensión localizado a una profundidad  $d_t$ ,

Derivando en forma similar de la ecuación anterior, la relación  $a/d$  correspondiente a el límite de deformación en compresión controlada es.

$$a_{cd}/d_t = \beta_1(6100/6100+f_y)$$

El ACI Sección B.10.3.3. define una sección en tensión controlada cuando la deformación neta a tensión en el acero a tensión extremo es igual o mayor a 0.005. Esta distribución de deformación se muestra en la Figura 3-17d, en la cual por triángulos semejantes:

$$\frac{C_{cd}}{d_t} = \frac{0.003}{0.003 + 0.005} = 0.375$$

y  $a_{cd}/d_t = 0.375 \beta_1$

### REFUERZO MAXIMO. ACI Sección B10.3.3.

En el Código ACI 1995 hay dos procedimientos para determinar la cantidad máxima de refuerzo que se permite en una viga. El apéndice B del ACI no da la cantidad de refuerzo en una viga. En la Sección B9.3.2. se define  $\phi = 0.90$  para secciones de tensión controlada,  $\phi = 0.70$  para secciones de compresión controlada con estribos normales o anillos, o  $\phi=0.75$  para miembros (columnas) con el refuerzo principal dentro de una espiral. Las espirales no se usan en vigas por lo que  $\phi = 0.70$  para secciones de vigas de compresión controlada. Para vigas entre estos límites, la Sección B9.3.2.2. del ACI especifica que se puede interpolar linealmente entre  $\phi = 0.90$  y  $\phi = 0.70$  lo que da

$$\phi = 0.356 + \frac{0.204}{c/d_t}$$

o  $\phi = 0.356 + \frac{0.204}{a/\beta_1 d_t}$

### LIMITE SUPERIOR DE REFUERZO. ACI Sección 10.3.3.

Mientras que una viga sub-reforzada falla de una manera dúctil y la viga sobre-reforzada falla de una manera frágil, el ACI en la Sección 10.3.3. prevee la falla no-dúctil limitando el porcentaje de acero,  $\rho < 0.75 \rho_b$ . Esto equivale a una deformación  $\epsilon_s$ , entre 1.8 y 2.0 veces la deformación de fluencia  $\epsilon_y$ .

Debido a la variedad de resistencias entre el acero y el concreto (baja en el concreto y, elevada en el acero) y a la diferencia en dimensiones, una viga que normalmente satisface  $\rho = 0.75\rho_b$  puede desarrollar una falla por compresión. Además es difícil colocar el refuerzo en el concreto en una viga con un  $\rho$  cerca de  $0.5\rho_b$ . Por éstas razones es buena práctica limitar el porcentaje de acero máximo de  $0.4$  a  $0.5\rho_b$ .

El límite para tensión controlada según ACI corresponde a  $\rho = 0.563\rho_b$  para una viga rectangular con refuerzo en tensión solamente.

### Ejemplo 3-2. Análisis de una viga simplemente reforzada. El refuerzo en tensión fluye

Calcular la capacidad a momento nominal de tres vigas, cada una con  $b = 25$  cm,  $d = 50$  cm, 3 Varillas #8 dando  $A_s = 3 \times 5.06 = 15.19$  cm<sup>2</sup> y

$$\rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{15.19}{25 \times 50} = 0.0121$$

**Viga 1:  $f'_c = 210$  kg/cm<sup>2</sup> y  $f_y = 4200$  kg/cm<sup>2</sup>**

1.- Calcular "a": Considerar que el esfuerzo en el acero,  $f_s$ , es igual a  $f_y$  (el cual corresponde a  $\rho = \rho_b$ ) lo cual será revisado en el paso 2.

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b} = \frac{15.19 \times 4200}{0.85 \times 210 \times 25} = 14.30 \text{ cm}$$

2.- Revisar si  $f_s = f_y$  y si la sección está en tensión controlada.

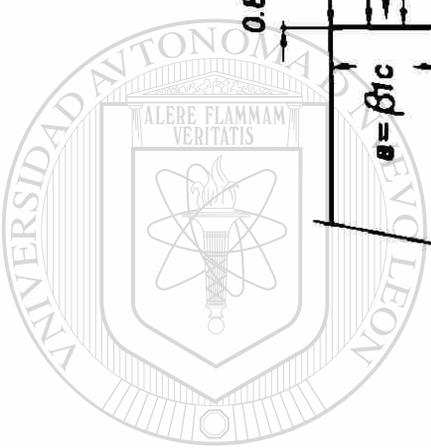
Si  $a/d \leq a_{\text{cr}}/d$ ,  $f_s$  será igual a  $f_y$ , donde:

$$a_{\text{cr}}/d = \beta_1(6100/6100 + f_y) = 0.85(6100/10,300) = 0.503$$

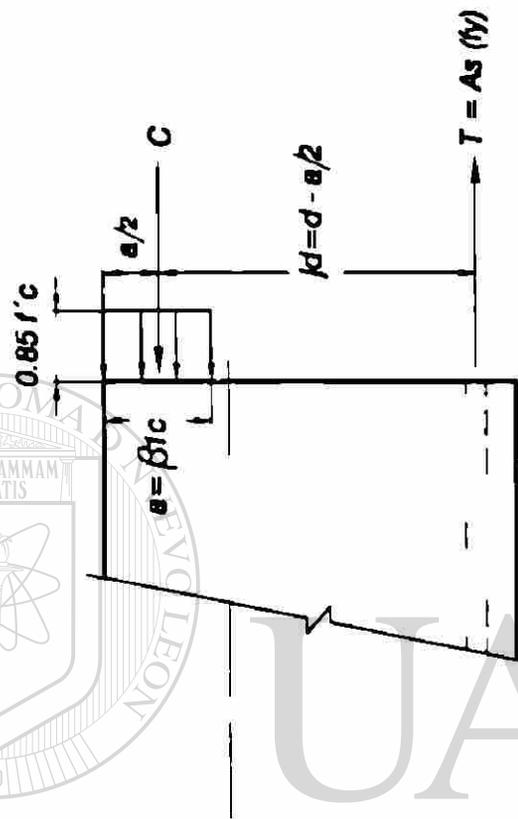
$$a/d = 14.30/50 = 0.286 \text{ es menor que}$$

$$a_{\text{cr}}/d = 0.503, f_s = f_y$$

Para revisar si la sección está en tensión controlada  $a/d_t \leq a_{\text{cr}}/d_t$ . En este caso  $d_t = d$ .



(a) Sección transversal



(b) Fuerzas internas.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

®

FIGURA DEL EJEMPLO 3-2.

Porque el acero se considera en una sola capa.

$$\frac{a_{cl}}{d} = 0.375 \beta_1 = 0.375 \times 0.85 = 0.319$$

$$\frac{a}{d} = 0.286 \text{ es menor que } 0.319$$

La sección está en tensión controlada y  $\phi = 0.90$ .

### 3.- Capacidad a momento nominal, Mn.

$$\begin{aligned} M_n &= A_s f_y (d - a/2) \\ &= 15.19 \times 4200 (50 - 14.30/2) \\ &= 2,733,744 \text{ kg-cm.} = 27,337 \text{ kg-m.} \\ &= 27.337 \text{ ton-m.} \\ \phi M_n &= 0.90 \times 27.337 = 24.603 \text{ ton-m.} \end{aligned}$$

Viga 2: Mismo  $A_s$  que viga 1 excepto que  $f_c = 420 \text{ kg/cm}^2$

#### 1.- Calcular "a":

$$a = \frac{15.9 \times 4200}{0.85 \times 420 \times 25} = 7.15 \text{ cm}$$

#### 2.- Revisar si $f_s = f_y$ y si la sección está en tensión controlada

$$a/d = 7.15/50 = 0.143$$

$$a/d = \beta_1 (6100/6100 + f_y)$$

donde  $\beta_1$  de la Sección ACI 10.2.7.3

$$\beta_1 = 0.85 - 0.05 \times \frac{(420 - 280)}{70} = 0.75$$

$$a/d = 0.75 (6100 / 6100 + 4200) = 0.444$$

Como  $\frac{a}{d} = 0.143 < \frac{a_b}{d} = 0.444$ ,  $f_s = f_y$

$$\frac{a_{cl}}{d} = 0.375 \beta_1 = 0.375 \times 0.75 = 0.281$$

Como  $a/d = 0.143 < a_{cl} = 0.281$  la sección está en tensión controlada y  $\phi = 0.90$ .

3.- Calcular  $M_n$ :

$$M_n = 15.19 \times 4200 (50 - 7.15/2) = 2,961,822 \text{ kg-cm}$$

$$= 29,618 \text{ kg-m.}$$

$$= 29.618 \text{ ton-m.}$$

$$\phi M_n = 0.90 \times 29.618 = 26.656 \text{ ton-m.}$$

**VIGA 3: Mismo A<sub>s</sub> que viga1 excepto que  $f_y = 2800 \text{ kg/cm}^2$**

1.- Calcular "a" :

$$a = \frac{15.19 \times 2800}{0.85 \times 210 \times 25} = 9.53 \text{ cm}$$

2.- Revisar si  $f_s = f_y$  y si la sección esta en tensión controlada.

$$a/d = 9.53/50 = 0.91$$

$$a_b/d = 0.85 (6100/6100+2800)$$

$$= 0.85 (6100/8900) = 0.582$$

$$\frac{a_{cl}}{d} = 0.375 \times 0.85 = 0.319$$

$d_t$

Entonces  $f_s = f_y$  la sección está en tensión controlada y  $\phi = 0.90$

3.- Calcular  $\phi M_n$ :

$$M_n = 15.19 \times 2800 \frac{(50 - 9.53)}{2} = 1,923,935 \text{ kg-cm.}$$

$$= 19,239 \text{ kg-m.}$$

$$= 19.239 \text{ ton-m.}$$

$$\phi M_n = 0.90 \times 19.239 = 17.315 \text{ ton-m.}$$

Nótese que al reducir  $f_y$  en un 33% se reduce  $M_n$  en un 30%.

CUADRO DE RESULTADOS			
VIGA	$f_c$ (kg/cm <sup>2</sup> )	$f_y$ (kg/cm <sup>2</sup> )	$\phi M_n$ (ton-m)
1	210	4200	24.603
2	420	4200	26.656
3	210	2800	17.315

Ecuaciones para  $M_n$  y  $\phi M_n$ : Acero de tensión elástica en la falla.

Por estática:  $C = T$

$$0.85 f_c b a = A_s f_s = \rho E_s \epsilon_s b d$$

Del diagrama de deformaciones por triángulos semejantes:

$$\epsilon_s = \epsilon_{cu} ((d-c)/c)$$

Sustituyendo en la ecuación anterior y haciendo  $a = \beta_1 c$ .

$$0.85 f_c a^2 = \rho E_s \epsilon_{cu} \beta_1 d^2 - \rho E_s \epsilon_{cu} a d$$

$$(0.85 f_c / \rho E_s \epsilon_{cu}) a^2 + (d) a - \beta_1 d^2 = 0$$

Es una cuadrática en "a" y con este valor calcular  $\phi M_n$ .

Las vigas  $\rho > \rho_b$  no las permite el ACI en la Sección 10.3.3. pero son permitidas por la Sección B10.3.3. requiriendo que  $\phi$  se tome igual a 0.70. El código ACI no da valores de  $\phi$  para cuando en una viga  $\rho > \rho_b$ . En mi opinión usaría  $\phi = 0.70$  en vez de 0.90 usado para flexión para calcular la capacidad  $\phi M_n$ , debido a la forma súbita de la falla por compresión. Cuando  $\rho$  es mayor que  $\rho_b$ , el valor de  $M_n$  cambia poco con el  $\rho$ . Esto porque  $f_s$  y  $j d$  disminuyen cuando  $A_s$  se incrementa. En 1937 Whitney usó un análisis semi-empírico para determinar la capacidad de momento por falla de compresión con:

$M_n = 0.333 f_c b d^2$ . Usando la solución exacta, la constante de esta ecuación resulta entre 0.29 y 0.35 para vigas con  $\rho = \rho_b$ , incrementándose aproximadamente 10% con  $\rho = 2\rho_b$ .

### Ejemplo 3-3. Análisis de viga simplemente reforzada. Acero en tensión elástica

Calcular la capacidad nominal a momento  $M_n$ , de una viga que tiene  $b = 25$  cm,  $d = 50$  cm,  $A_s = 30.36$  cm<sup>2</sup> (6 Varillas #8),  $f_c = 210$  Kg/cm<sup>2</sup>,  $f_y = 4200$  kg/cm<sup>2</sup>.

1.- Calcular "a". Cuando se calcula la capacidad de una viga y no sabemos si  $A_s$  fluye o no, suponemos que  $f_s = f_y$  y luego corregimos si es necesario entonces, tentativamente  $a = A_s f_y / (0.85 f_c (b))$

$$a = \frac{30.36 \times 4200}{0.85 \times 210 \times 25} = 28.57 \text{ cm}$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

2.- Revisar si  $f_s = f_y$  y si la sección está en tensión controlada. ®

$$a/d = 28.57/50 = 0.571$$

$$a_b/d = \beta_1 (6100/6100 + f_y) = 0.503$$

Como  $a/d$  es menor que  $a_b/d$  la viga falla por compresión y  $f_s$  es menor que  $f_y$ , la sección está en compresión controlada.

3.- calcular "a" nuevamente.

$$(0.85 f_c \rho E_s \epsilon_{cu}) a^2 + (d)a - \beta_1 d^2 = 0$$

$$\rho = 30.36/25 \times 50 = 0.024$$

$$a = \frac{0.85 \times 210}{0.024 \times 2,030,000 \times 0.003} = 1.2221$$

$$1.2221a^2 + 50a - 0.85(50)^2 = 0$$

$$1.2221a^2 + 50a - 2125 = 0$$

$$a = \frac{-50 + \sqrt{2500 - 4(1.2221)(2125)}}{2 \times 1.2221} = \frac{-50 \pm 113.24}{2 \times 1.2221}$$

$$a = 25.98 \text{ cm}$$

4.- Calcular  $M_n$ : Como no se conoce  $f_s$ , utilizamos la ecuación de  $M_n$  en función de  $f_c$ .

$$M_n = 0.85 f_c ab(d-a/2)$$

$$M_n = 0.85 \times 210 \times 25.98 \times 25 (50 - 25.98/2)$$

$$= 4,290,782 \text{ kg-cm} = 42,908 \text{ kg-m.}$$

$$= 42.908 \text{ ton-m.}$$

Como la sección está en compresión controlada y no contienen refuerzo en espiral, según ACI Sección B9.3.2.2 (b) da  $\phi = 0.70$  y  $\phi M_n = 30.036 \text{ ton.-m.}$

Con la ecuación de Whitney:

$$M_n = 0.333 f_c b d^2 = 0.333 \times 210 \times 25 \times (50)^2$$

$$= 4,370,625 \text{ kg-cm} = 43,706 \text{ kg-m.}$$

$$= 43.706 \text{ ton-m.}$$

El cuál es aproximado el valor de  $M_n$  con la ecuación. exacta  $M_n = 42.908 \text{ ton-m}$

### Relación entre el peralte de las vigas y las deflexiones.

Las deflexiones en una viga pueden calcularse con ecuaciones de la forma:

$$\Delta_{\max} = C_1(w l^4 / EI)$$

Expresando ésta ecuación en función de la deformación del acero y la profundidad del eje neutro se puede llegar a una ecuación de la forma:

$$\Delta/\ell = C (\ell/d)$$

Entonces, para cualquier relación de deflexión a claro  $\Delta/\ell$  aceptable se puede obtener una relación claro a peralte  $\ell/d$ , la cual si se excede puede resultar una deflexión no aceptable. La tabla 9.5 (a) del ACI da espesores mínimos de losas o peraltes de vigas para evitar el calcular deflexiones.

## **RECUBRIMIENTO DEL CONCRETO Y ESPACIAMIENTO DE VARILLAS**

Es necesario tener un recubrimiento entre la superficie de la losa o viga y las varillas de refuerzo por cuatro razones principales:

**1.- La adherencia entre los dos materiales.** La eficiencia de la adherencia se incrementa al incrementarse el recubrimiento. Un recubrimiento mínimo en función del diámetro de la varilla se requiere para este propósito en vigas y columnas.

**2.- La protección del refuerzo contra la corrosión.** Depende del medio ambiente y el tipo de miembro, variando el recubrimiento de 3/8" (1.00 cm) a 3" (7.5 cm) (ACI Sección 7.7). En ambientes altamente corrosivos como en losas expuestas a sales o sulfatos, el recubrimiento se incrementa. En los comentarios el ACI Sección R 7.7 permite usar métodos alternativos para incrementar los recubrimientos para elementos expuestos a la intemperie. Un ejemplo de un método alternativo puede ser una membrana a prueba de agua en la superficie expuesta.

**3.- Proteger el refuerzo de la pérdida de resistencia debida al sobrecalentamiento en el caso de fuego.** El recubrimiento para proteger del fuego está especificado en el Código de Construcción local. Por lo general 3/4" (2 cm) de recubrimiento en una losa estructural protege durante 1 hora del fuego. Mientras que un recubrimiento de 1 1/2" (4 cm) con estribos o anillos de vigas corresponde a 2 horas contra el fuego.

**4.- Recubrimiento adicional en las losas, particularmente en garages y fábricas, aumenta la resistencia a la abrasión por el tráfico intenso.**

Los recubrimientos libres se especifican en el ACI Sección 7.7.1. a menos que se especifique en otra parte. El arreglo de las varillas en una viga será de tal forma que estén rodeadas de suficiente concreto para poder transmitir las fuerzas; debe haber suficiente espaciamiento para permitir el paso del vibrador por la parte superior de la viga y compactar la masa.

Las secs. 3.3.2, 7.6.1 y 7.6.2 del ACI especifican los espaciamientos y recubrimientos como se muestra en las Figuras de la hoja siguiente.

### Ejemplo 3-4.- Cálculo de "d" y "b" mínimos

Calcular el peralte efectivo "d" y el ancho "b" para la viga mostrada en la Figura siguiente. El tamaño máximo del agregado grueso especificado es 3/4" (2 cm). El peralte total de la viga es 60 cm.

La viga tiene dos tamaños diferentes de varillas.

Las varillas de mayor diámetro están en la cama inferior lo cuál aumenta el brazo de palanca del par interno. Nótese también que las varillas. están colocadas simétricamente con respecto a la línea de centros de la viga. Las varillas. de la cama superior están en línea con las de la cama inferior.

Por la Sección 7.7.1 del ACI el recubrimiento libre de los estribos es 1.5" (4 cm). De las Secciones. 7.6.2 y 3.3.2 la distribución mínima entre camas es la mayor de 1 pulgada (2.5 cm), 1 1/3 veces, el tamaño del agregado grueso, el cuál es 1 1/3 x 3/4 = 1 pulgada (2.5 cm).

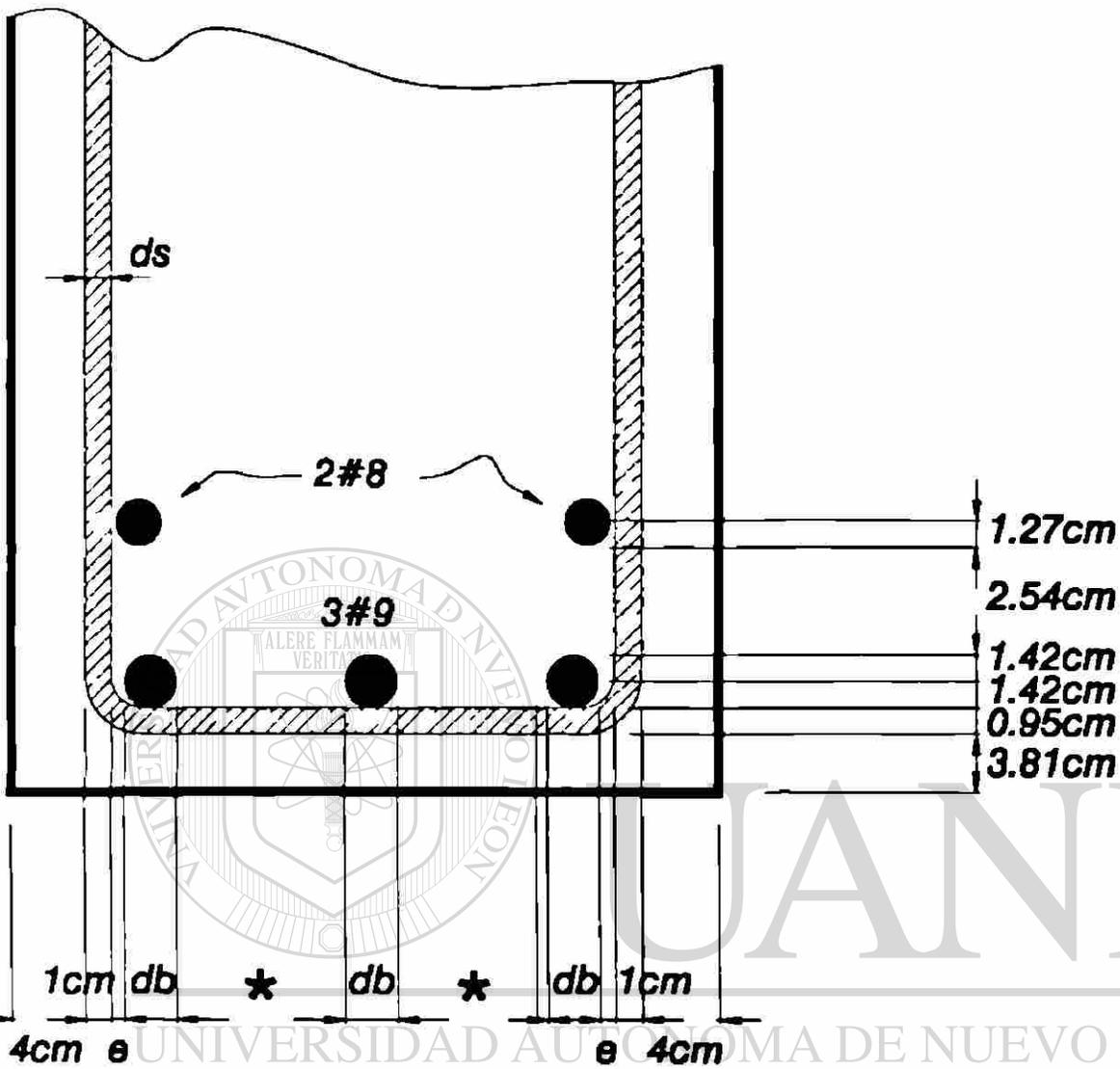
1.- Calcular centroide de varillas.

CAPA	AREA A(cm <sup>2</sup> )	DIST. AL PAÑO, Y (cm)	AY (cm <sup>3</sup> )
Inferior	3 x 6.42 = 19.26	3.81 + 0.95 + 1.42 = 6.18	119.03
Superior	2 x 5.07 = 10.14	3.81+0.95+2.84+2.54+1.27 = 11.41	115.70
A=	29.40		234.73 cm <sup>3</sup>

$$\bar{y} = \frac{Ay}{A} = \frac{234.73}{29.40} = 7.98 \text{ cm} = 8.0\text{cm al paño de la viga.}$$

El peralte efectivo es:  $d = 60 - 8 = 52 \text{ cm.}$

2.- Cálculo del ancho mínimo.



$d_s =$  diámetro del estribo =  $3/8" = 0.95$  cm.

$d_b =$  diámetro de la varilla =  $9/8" = 2.86$  cm.

$$e = \text{espacio} = 2 d_s - 0.5 d_b = 2 \times 0.95 - 0.5 \times 2.86$$

$$= 1.9 - 1.43 = 0.47 \text{ cm}$$

\* No menor que: 1 pulg. = 2.5 cm o  $d_b = 2.86$  cm.

$$b_{\min.} = 8 + 2 + 2 \times 0.47 + 5 \times 2.86$$

$$= 25.24 \text{ cm} \approx 26 \text{ cm.}$$

Generalmente es satisfactorio estimar el peralte efectivo de una viga usando:

Para vigas con refuerzo en una cama:  
 $d \approx h - 2.5 \text{ pulg.} = h - 6.35 \text{ cm} \approx h - 6 \text{ cm}$

Para vigas con refuerzo en dos camas:  
 $d \approx h - 3.5 \text{ pulg.} \approx h - 8.89 \text{ cm.} \approx h - 9 \text{ cm.}$

Para losas de concreto reforzado el recubrimiento libre mínimo es 3/4" (2 cm). Generalmente se usan varillas. números 3, 4, ó 5. Para este caso:

Losa en una sola dirección con claros hasta 3.70 m.  
 $d \approx h - 2.5 \text{ cm.}$

Losa en una dirección con claro mayor de 3.70 m.  
 $d \approx h - 3 \text{ cm.}$

Generalmente hablando,  $b$  no debe ser menor de 25 cm y preferentemente no menor de 30 cm para vigas, cuando se tienen 2 varillas. Únicamente en un caso extremo se puede usar un ancho mínimo de 20 cm. Cuando se tienen vigas con varias camas de refuerzo debemos cuidar los espaciamientos mínimos que permitan el paso del vibrador.

### Refuerzo mínimo

Si el momento de agrietamiento excede la resistencia de la viga después de agrietarse, una falla súbita puede ocurrir. Por esta razón el ACI en la Sección 10.5 requiere una cantidad mínima de refuerzo por flexión igual a:

$$A_{s_{\min}} = \frac{0.8 \sqrt{f_c}}{f_y} b_w d \geq 14.5 \frac{b_w d}{f_y} \quad (\text{ACI Ec. 10.3})$$

dónde  $f_c$  y  $f_y$  están en  $\text{kg/cm}^2$

Para vigas T estáticamente determinadas con patín en tensión el  $A_{s_{\min}}$  será igual o mayor que el menor valor dado por:

$$A_{s_{\min}} = \frac{1.6 \sqrt{f_c}}{f_y} b_w d \quad (\text{ACI Ec.10-4})$$

o por la ecuación. 10 - 3 con  $b_w$  definida como el ancho del patín.

### EJEMPLO 3-5. Diseño del refuerzo cuando “b” y “h” se conocen

El primer tipo de problema de diseño es el caso en el cual las dimensiones de la sección transversal han sido establecidas por razones no-estructurales, o por apariencia arquitectónica, existencia de formas estándar, resistencia al fuego y otras. En este caso, b y d (o h) son conocidas y solamente se requiere calcular  $A_s$ .

Por razones arquitectónicas es necesario que la viga mostrada en el Figura sea de 60 cm. de ancho y 60 cm de peralte total. Las resistencias del concreto y el acero son de 210 y 4200 kg/cm<sup>2</sup> respectivamente. Además la viga deberá soportar una sobrecarga muerta de servicio (no factorizada) de 1.5 ton/m. y una carga viva de servicio de 3.6 ton/m.

Calcular el área de refuerzo requerido en el centro del claro y seleccionar este refuerzo.

#### 1.- Determinar momento factorizado, $M_u$ .

$$\text{Peso/m de viga} = 0.60 \times 0.60 \times 2400 = 864 \text{ kg/m.} = 0.864 \text{ ton/m.}$$

$$\text{La carga factorizada es: } U = 1.4D + 1.7L \quad (\text{ACI Ec. 9.1})$$

$$\text{ó } W_u = 1.4(1.5 + 0.864) + 1.7 \times 3.6 = 9.43 \text{ ton/m.}$$

$$\text{sobre carga muerta} = 1.5 \text{ ton/m.}$$

$$\text{carga viva de servicio} = 3.6 \text{ ton/m.}$$

El efecto de la carga factorizada (momento último factorizado) es:

$$M_u = \frac{W_u l_n^2}{8} = \frac{9.43 (6)^2}{8} = 42.435 \text{ ton-m.}$$

Es necesario, entonces proveer  $\phi M_n \geq M_u$  ó  $\phi M_n \geq 42.435 \text{ ton-m.}$

#### 2.- Calcular el peralte efectivo, d.

Debido a que la viga es muy ancha, se consideran todas las varillas en una sola cama. d, puede ser estimado como:

$$d \approx h - 6 \text{ cm} = 60 - 6 = 54 \text{ cm.}$$

3.- Determinar el área de refuerzo,  $A_s$ :

Considerar que  $jd = d - a/2 = 0.875d$  (esto es equivalente a considerar que  $a = 0.875 \times 54 = 47$  cm)

Acero de refuerzo :

$$A_s = M_u / \phi f_y jd = 4,243,500 / (0.90 \times 4200 \times 47)$$

$$A_s = 23.88 \text{ cm}^2$$

Posibles soluciones de la Tabla A - 10:

$$7 \text{ varillas No. 7, } A_s = 7 \times 3.88 = 27.16 \text{ cm}^2$$

$$5 \text{ varillas No. 8, } A_s = 5 \times 5.07 = 25.35 \text{ cm}^2$$

$$4 \text{ varillas No. 9, } A_s = 4 \times 6.42 = 25.68 \text{ cm}^2$$

Considerar 7 varillas #7 ya que se acomodan mejor en el ancho de 60 cm.

4.- Revisar si  $A_s \geq A_{s(\text{min})}$ .

$$A_{s(\text{min})} = (14.5 b_w d) / f_y = (14.5 \times 60 \times 54) / 4200 = 11.18 \text{ cm}^2$$

5.- Determinar  $a$  y  $a/d$  y revisar que  $\rho \leq 0.75\rho_b$

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f_c b} = \frac{27.16 \times 4200}{0.85 \times 210 \times 60} = 10.65 \text{ cm}$$

$$a/d = 10.65/54 = 0.197$$

Revisar si  $\rho \leq 0.75\rho_b$ , o bien  $a/d$  es menor que  $0.75a_b/d$ .

$$a_b/d = \beta_1 (6100 / 6100 + 4200) = 0.503$$

$$0.75a_b/d = 0.377$$

6.- Determinar  $M_n$  y  $\phi M_n$ .

Debido a que  $A_s$  ha sido calculado con un valor estimado de  $jd$  es necesario revisar si el refuerzo seleccionado es adecuado por capacidad de momento. Y también revisar si  $d$  es apropiado.

Momento nominal

$$M_n = A_s f_y (d - a/2) = 27.16 \times 4200 (54 - 10.65/2) = 5,552,455 \text{ k-cm}$$

$$\phi M_n = 0.9 \times 5,552,455 = 4,997,209 \text{ kg-cm.}$$

$$= 49.972 \text{ ton-m.}$$

$$M_u = 42.435 \text{ ton-m} < \phi M_n.$$

### Diseño de vigas cuando “b” y “h” no se conocen

El segundo tipo de problema de diseño involucra determinar b, d y  $A_s$ . Se estima preliminarmente la carga muerta de la viga, seleccionando las dimensiones b y d de la viga. Para proponer el peso de la viga nos podemos basar en que éste para una viga de selección rectangular es aproximadamente del 10 al 20% de las cargas que soporta. Alternativamente se puede estimar h como aproximado 8 a 10% del claro (1 pulg., por pie de claro), estimar b como 0.5h, y usar estas dimensiones para determinar el peso. Posteriormente la carga muerta y rediseñar.

Es entonces necesario seleccionar un porcentaje de acero  $\rho$  el cual se usa para determinar  $\phi M_n$  y determinar b y d. Este peso es el que repercute en un diseño económico; generalmente,  $\rho \approx 0.01$  es una solución económica; por ductilidad, generalmente  $\rho$  oscila entre  $0.35\rho_b$  y  $0.4\rho_b$  da un nivel deseado de ductilidad; y por otro lado es necesario considerar también que si  $\rho$  excede 0.015 puede resultar difícil colocar el refuerzo. Para refuerzo, Grado 60,  $0.4\rho_b$  es 0.0114 para  $f_c = 280 \text{ kg/cm}^2$  y 0.0134 para  $350 \text{ kg/cm}^2$  de  $f_c$ . Por esta razón nuestro diseño será ideal considerando que  $\rho = 0.010$  en el punto de máximo momento en todos los casos.

### Factores a considerar para determinar “b” y “h”

**1.- Una viga aperaltada requiere menor refuerzo.** Pero por otro lado incrementa el costo y reduce la altura libre por piso lo que ocasiona mayor altura de todo el edificio.

**2.- Mayores longitudes de desarrollo para varillas menos espaciadas.** Esto normalmente no es un problema excepto en extremos de varillas en vigas cortas rectangulares.

**3.- Puede ser posible calcular deflexiones** si el peso total de la viga excede los valores dados por la Tabla 9.5a del ACI.

4.- Para secciones rectangulares es práctica común seleccionar  $d/b$  entre 1.5 y 2.

El paso final en el diseño es determinar el área de acero requerido correspondiente a "b" y "d" seleccionados y llenar los requisitos de resistencia, economía y estética que optimizan un buen diseño.

### Ejemplo 3-6.- Diseño de una viga cuando "b" y "d" no se conocen

Datos:

Carga viva de servicio = 2.50 ton/m.

Carga muerta de servicio = 1.50 ton/m.

Claro = 10.00 m

$f_c = 210 \text{ kg/cm}^2$

$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$

Determinar: b, d y  $A_s$ .

#### 1 - Estimar el peso propio de la viga:

Considerando que el peralte total  $h$  es aproximado del 8 al 10% del claro.

$$h \approx 0.08 \times 1000 = 80 \text{ cm}$$

$$b \approx 0.5 h = 40 \text{ cm.}$$

$$\text{Peso propio} = 0.40 \times 0.80 \times 2400 = 768 \text{ kg/m.}$$

#### 2.- Calcular $M_u$ :

$$M_u = W_u L_n^2 / 8$$

$$W_u = 1.4 (1.5 + 0.768) + 1.7 (2.50) = 7.425 \text{ ton/m.}$$

$$M_u = \frac{7.425 (10)^2}{8} = 92.815 \text{ ton-m.}$$

### 3.- Calcular b y d:

De la ecuación  $M_u = \phi f_c b d^2 \omega (1 - 0.59\omega)$

despejamos  $b d^2 = M_u / \phi f_c \omega (1 - 0.59\omega)$

dónde:  $\omega = \rho \frac{f_y}{f_c}$  proponiendo  $\rho = 0.01$

$$\omega = 0.01 \times \frac{4,200}{210} = 0.20$$

haciendo  $k_n = f_c \omega (1 - 0.59 \omega)$

$$= 210 \times 0.2 (1 - 0.59 \times 0.2)$$

$$= 37.044$$

$$b d^2 = \frac{M_u}{\phi k_n} = \frac{9,281,500}{0.90 \times 37.044}$$

$$b d^2 = 278,393 \text{ cm}^3$$

$$b = 40 \text{ cm}$$

$$d = \sqrt{278,393/40} = 83 \text{ cm}$$

$$h = 83 + 7 = 90 \text{ cm}$$

Proponiendo una sección de 40 x 90 cm.

### 4.- Recalcular $M_u$ .

Peso propio =  $0.40 \times 0.90 \times 2400 = 864 \text{ kg/m}$ .

$W_u = 1.4 (1.5 + 0.864) + 1.7 (2.5) = 7.56 \text{ ton/m}$ .

$$M_u = \frac{7.56 (10)^2}{8} = 94.495 \text{ ton-m}$$

5.- Calcular el área del refuerzo, As:

Considerar  $jd = (d-a/2) = 0.875 d$

$$= 0.875 \times 83 = 72 \text{ cm.}$$

$$As = \frac{M_u}{\phi f_y jd} = \frac{9,449,500}{0.90 \times 4200 \times 72} = 34.72 \text{ cm}^2$$

$$As_{(min)} = 0.8 \frac{\sqrt{f_c}}{f_y} b_w d \quad (\text{ACI 10.3})$$

$$= 0.8 \frac{\sqrt{210}}{4200} \times 40 \times 83 = 9.16 \text{ cm}^2$$

Proponiendo varillas # 8

$$N^\circ \text{ Varillas.} = 34.72 / 5.07 = 6.8 \approx 7 \text{ varillas.}$$

Según la Tabla A-6 producto del análisis respetando espaciamientos y recubrimientos mínimos para 7 varillas #8 se requiere un ancho mínimo de 20 cm y se tienen 40 cm.

6.- Calcular d:

$$d = h - r = 90 - 7 = 83 \text{ cm.}$$

7.- Calcular "a" y revisar si  $f_s = f_y$  y si la sección está en tensión controlada.

$$a = \frac{As f_y}{0.85 f_c b} = \frac{5.07 \times 7 \times 4200}{0.85 \times 210 \times 40} = 20.88 \text{ cm}$$

$$\frac{a}{d} = \frac{20.88}{83} = 0.251$$

De la Tabla A - 4  $(a/d) = 0.503$

entonces  $\frac{a}{d} > \frac{a}{d}$  luego  $f_s = f_y$

$$d = d_t = 83 \text{ cm}$$

$$a/d_t = 0.251$$

$$a_{id}/d_t = 0.375 \beta_1 = 0.375 \times 0.85 = 0.319$$

$$a/d_t = 0.251 < a_{id}/d_t = 0.319$$

La sección está en tensión controlada y  $\phi = 0.90$

8.- Calcular  $\phi M_n$  :

$$\begin{aligned} \phi M_n &= \phi A_s f_y (d - a/2) = 0.90 \times 35.49 \times 4200 (83 - 20.88/2) \\ &= 9,734,084 \text{ kg-cm} = 97,341 \text{ kg-m.} = 97.341 \text{ ton-m.} \end{aligned}$$

$\phi M_n > M_u$                       Está bien la sección propuesta.

### PROBLEMAS

3-1.- En la Figura P3-1 se muestra una viga simplemente apoyada y la sección transversal de la mitad del claro. La viga soporta una carga uniforme de servicio muerta (no factorizada) de 2.0 ton/m. y una carga viva de servicio de 2.20 ton/m. la resistencia del concreto es  $f_c = 210 \text{ kg/cm}^2$  y el esfuerzo de fluencia del acero es  $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$ . El concreto es de peso normal.

$$\begin{aligned} W_m &= 2.0 \text{ ton/m} \\ W_v &= 2.20 \text{ ton/m} \end{aligned}$$

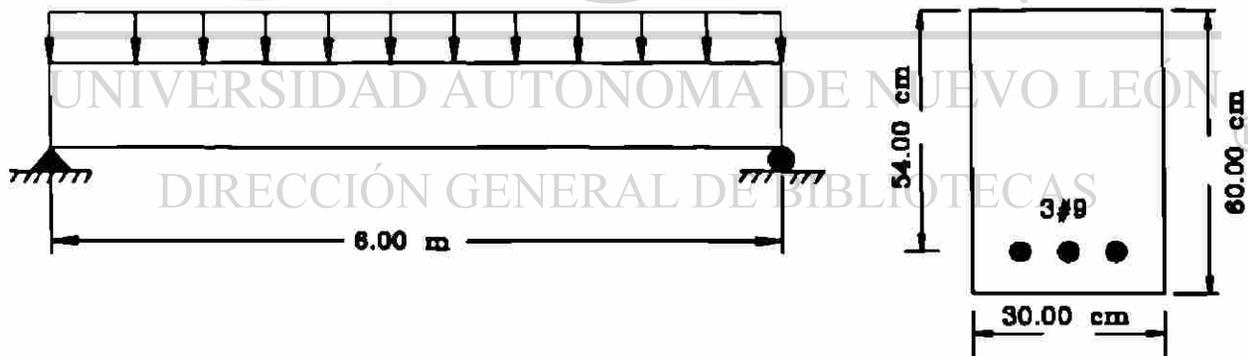


Figura P3-1

- a).- Calcular el peso en kg/m de la viga, la carga factorizada por metro,  $W_u$  y el momento debido a las cargas factorizadas,  $M_u$  y dibujar el diagrama de momentos flexionantes.
- b).- Calcular  $\phi M_n$  para la sección mostrada. Es la sección suficiente?
- c).- Dibujar la sección de la mitad de claro mostrando:
  - 1.- La localización de la zona de compresión.
  - 2.- Las dimensiones de b, d, h y a.

**3-2.-** En la sección del problema anterior considerar que la deformación máxima de compresión en el concreto es 0.003, y calcular la deformación en el acero correspondiente a el momento  $M_n$  si  $f_s = f_y$ .

**3-3.-** Para cada una de las vigas mostradas en la figura P3 - 3 (pág 81) se pide:

(a).- Dibujar la curva elástica o deformada del eje neutro de la viga.

(b).- Dibujar :

(b-1).- El diagrama de momentos flexionantes debido al peso de la viga.

(b-2).- El diagrama de momentos flexionantes para las otras cargas mostradas.

(b-3).- La suma de los dos diagramas.

(c) Mostrar en una vista longitudinal de la viga el refuerzo para el diagrama de momentos final, inciso (b-3).

**3-4.-** Una viga cantiliver de 3.60m de longitud soporta una carga muerta de servicio (no-factorizada) de 0.75 ton/m. La viga está hecha de concreto de peso normal de  $f_c = 280 \text{ kg/cm}^2$ , y tiene  $b = 40 \text{ cm}$ ,  $d = 39 \text{ cm}$ ,  $h = 45 \text{ cm}$ , está reforzada con 4 varillas #7 de grado 60. Calcular la máxima carga viva concentrada de servicio (no factorizada) que se puede aplicar a 0.30m del extremo libre.

**3-5.-** Explicar el significado de "viga sobrerreforzada" y viga "subreforzada".

**3-6.-** (a).- Calcular el peralte efectivo  $d$ , y el mínimo ancho permisible  $b$ , de la sección mostrada en la figura P3-6. Usar los espaciamientos mínimos permitidos por el Código ACI, para un concreto con tamaño máximo de agregado grueso de  $\frac{3}{4}$ ". Seleccionar el recubrimiento para concreto no expuesto a la intemperie o en contacto con el suelo.

**3-7.-** Dar dos razones para los requisitos de espaciamiento mínimo por el Código ACI.

**3-8.-** Una viga rectangular tiene  $b = 30 \text{ cm}$ ,  $h = 50 \text{ cm}$  y 8 varillas #8 en dos camas de 4 varillas,  $f_c = 210 \text{ kg/cm}^2$ ,  $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$ . Calcular  $\phi M_n$ .

**3-9.-** Seleccionar  $b$ ,  $d$ ,  $h$  y el refuerzo para una viga rectangular simplemente apoyada la cual soporta una carga muerta de servicio de 2.25 ton/m; (inc. el peso propio), más una carga viva que consiste en dos concentradas de 4.5 ton localizadas a los tercios de un claro de 7.20m. Usar  $f_c=210 \text{ kg/cm}^2$  y  $f_y=4200 \text{ kg/cm}^2$ .

3-10.- La viga mostrada en la Figura P3-10 soporta una carga muerta de servicio de 0.75 ton/m ; (inc. el peso propio) y una carga viva de servicio de 2.25 ton/m. La carga muerta actúa en toda la longitud de la viga pero la viva puede actuar en tres formas, como se indica en la Figura.

- (a).- Dibujar los diagramas de momento flexionante factorizado para los tres casos y envolvente de momento.
- (b).- Diseñar la viga seleccionando  $b$ ,  $d$  y  $h$ , y la varillas de refuerzo. Usar  $f_c=210 \text{ kg/cm}^2$  y  $f_y=4200 \text{ kg/cm}^2$ .
- (c).- Dibujar elevación de viga mostrando el refuerzo.
- (d).- Dibujar las secciones en los puntos de máximo momento positivo y negativo.

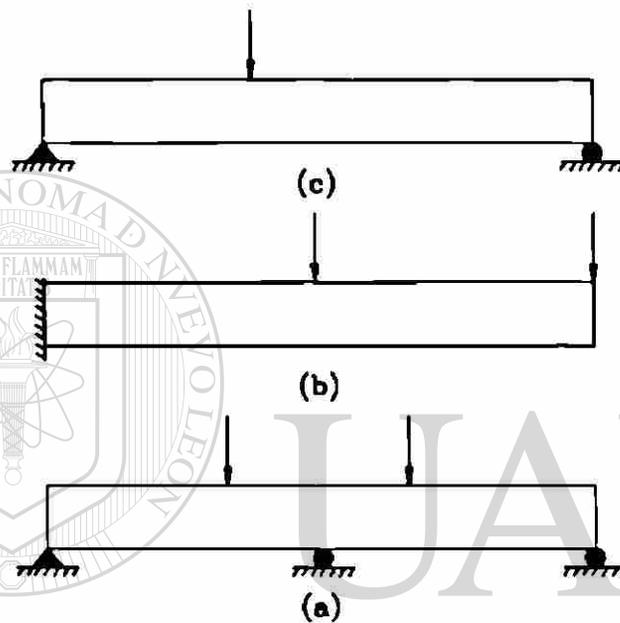


Figura P3-3

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

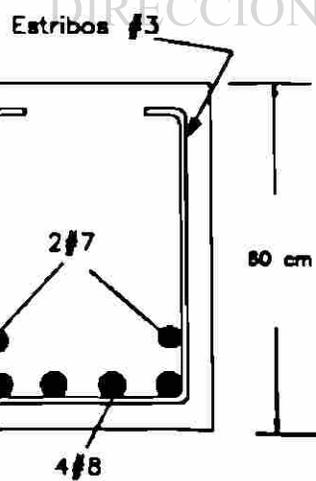
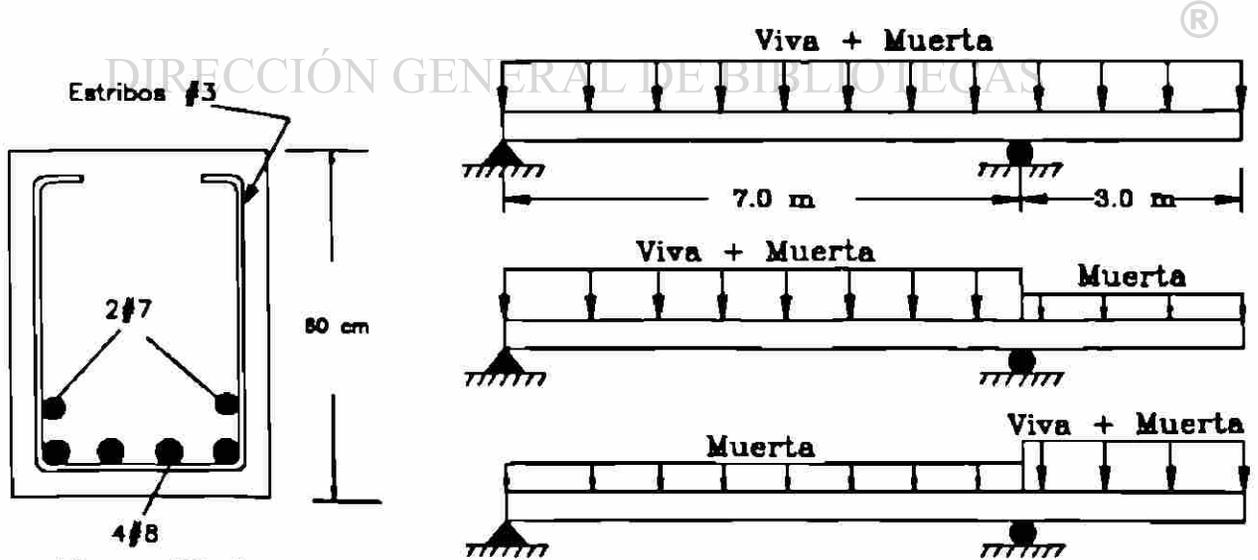


Figura P3-6

Figura P3-10

# **CAPÍTULO 4:**

## **FLEXIÓN: VIGAS T Y VIGAS CON REFUERZO EN COMPRESIÓN.**

**4.1.- Introducción.**

**4.2.- Vigas T.**

**4.3.- Vigas con Refuerzo a la Compresión.**

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

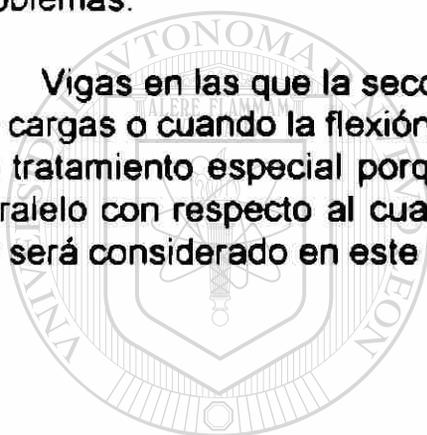
## 4.1.- INTRODUCCION.

En el tema anterior la teoría de la flexión para el concreto reforzado ha sido desarrollada y aplicada a vigas rectangulares con refuerzo en la zona de tensión.

Frecuentemente, las vigas de concreto son en forma de T, I o con refuerzo tanto en la zona de tensión como de compresión.

En este tema la teoría de la flexión se extiende a cubrir este tipo de problemas.

Vigas en las que la sección transversal no es simétrica con respecto al eje de cargas o cuando la flexión se presenta con respecto a dos ejes requieren de un tratamiento especial porque el eje de deformación cero (eje neutro) no es paralelo con respecto al cual el momento resultante actúa, este tipo de casos no será considerado en este tema.



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

## 4.2.- VIGAS T.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

En el sistema de piso mostrado en la figura 4-1, la losa transmite las cargas en una dirección a las vigas. Durante la construcción se cuela el concreto de las columnas y se deja que frague antes de colar el concreto del sistema de piso (ACI Sección 6.4.5.). Posteriormente, se cuela el concreto de la losa y las vigas en forma monolítica (ACI Sección 6.4.6.).

Debido a esto parte de la losa trabaja con las vigas como se indica achurado en la figura. Una viga así se le denomina viga "T".

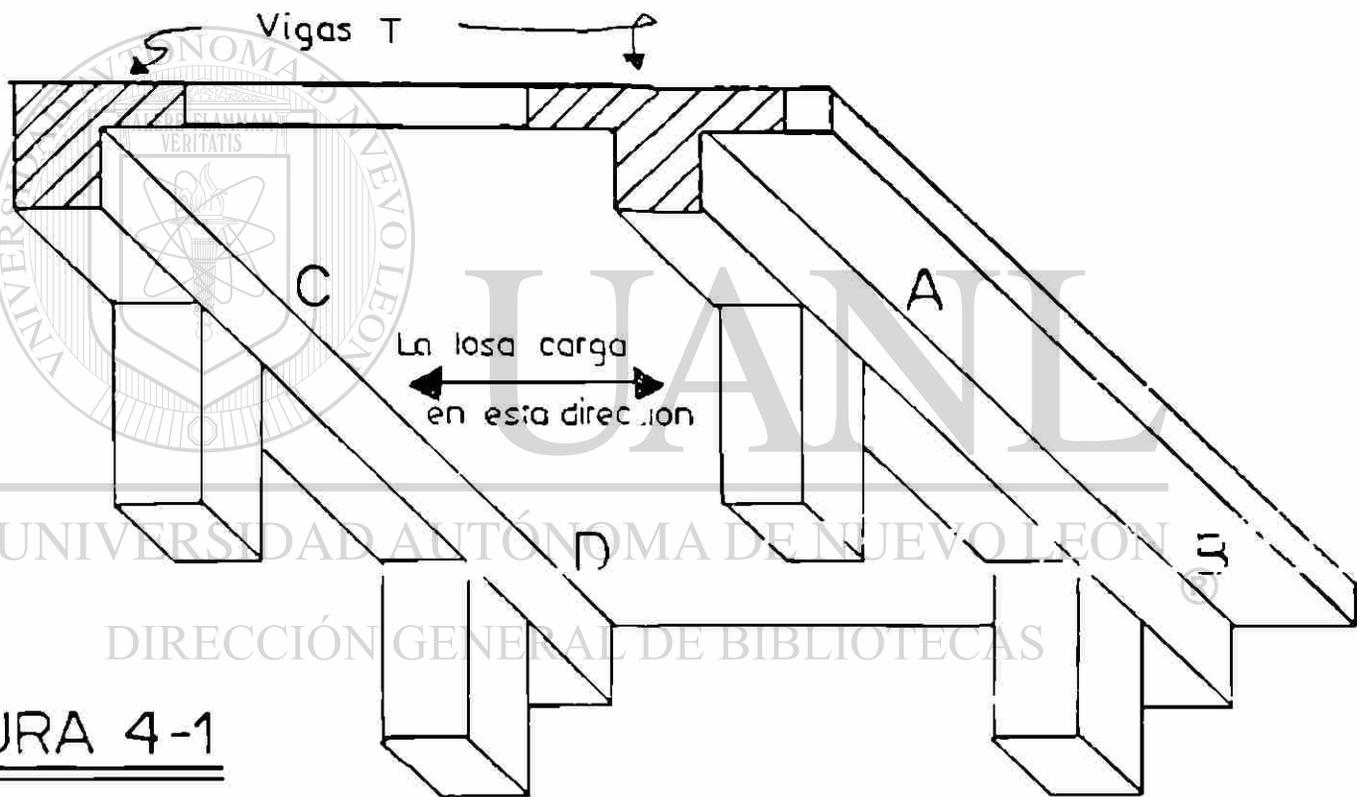
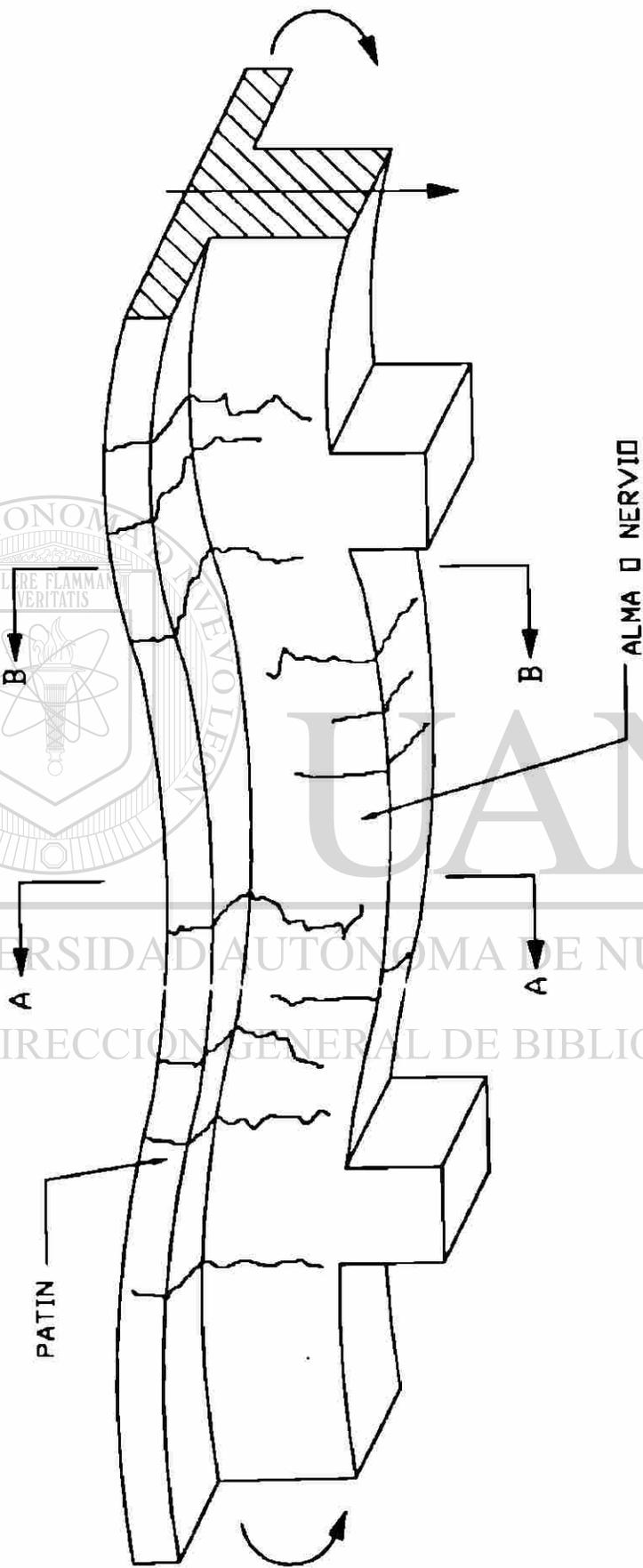


FIGURA 4-1

EN UNA VIGA 'T' CONTINUA COMO SE MUESTRA EN LA SIGUIENTE FIGURA (4-2)



**a.- VIGA DEFORMADA.**

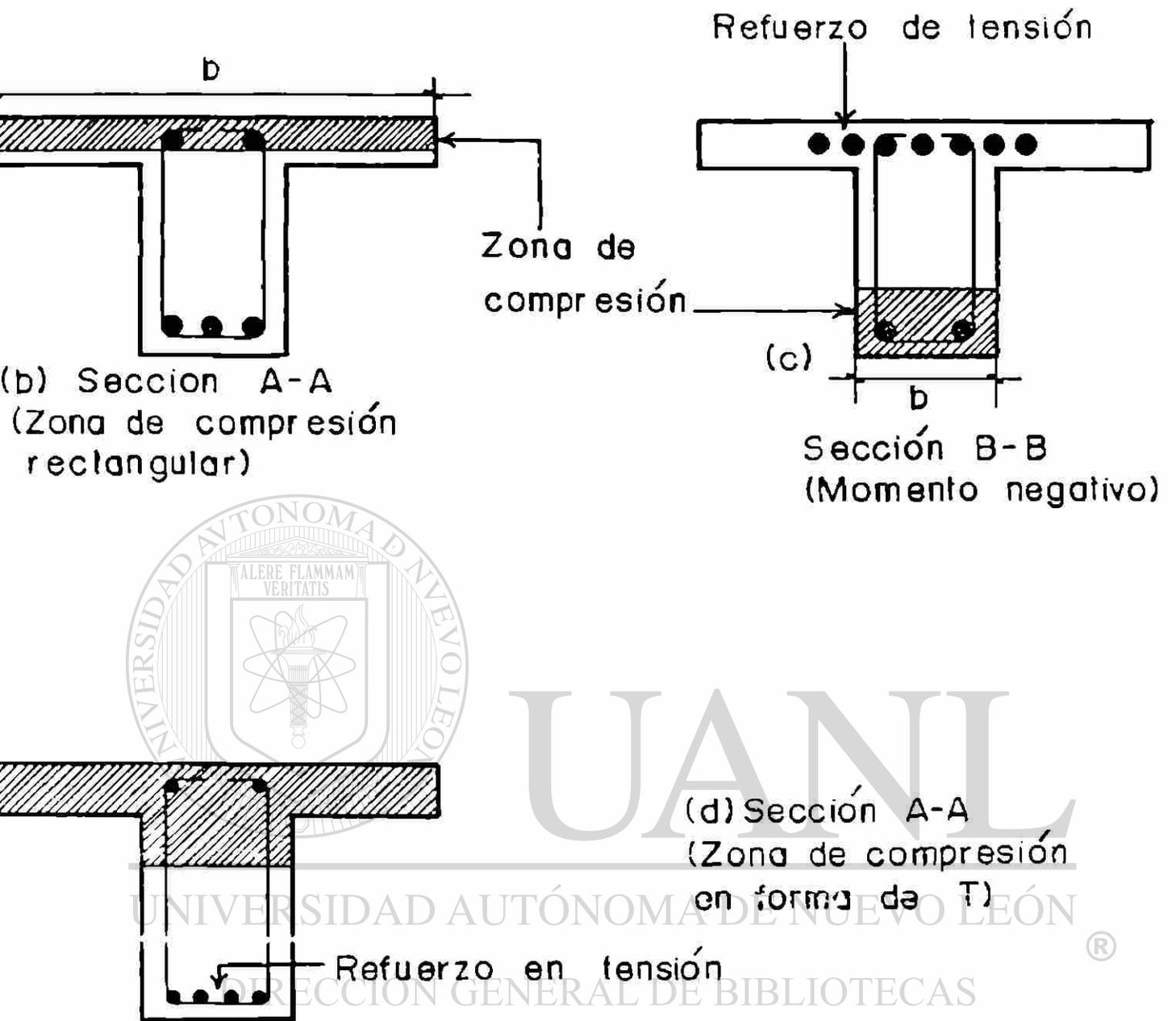


FIGURA 4.2. Regiones de momento positivo y negativo en una viga T

## **ANCHO EFECTIVO Y REFUERZO TRANSVERSAL**

Las fuerzas que actúan en el patín de una viga T simplemente apoyada se ilustran en la Figura 4 - 4a. En el apoyo no hay esfuerzos de compresión en el patín. Mientras que en la mitad del claro todo el patín está esforzado.

Debido a la transición del cortante horizontal ante el alma y el patín disminuyen los esfuerzos de compresión en los puntos del patín alejados del alma.

En la figura 4-3 se muestra la distribución de esfuerzos de compresión en la losa la cual forma los patines de una serie de vigas aperaltadas en la sección de máximo momento positivo.

El esfuerzo de compresión es máximo en el alma y baja entre las almas. Cerca de los apoyos la variación de máximo a mínimo es más pronunciada.

Cuando se diseña una sección "T" para momento positivo, un "ancho efectivo" es usado (Figura 4-2b).

Varias soluciones se han usado para estimar el ancho efectivo del patín. Estas soluciones sugieren que el ancho es afectado por el tipo de carga (uniforme, concentrada), el tipo de apoyos, el espaciamiento entre vigas y la rigidez relativa de la losa y las vigas. Sin embargo, se ha ignorado el agrietamiento del patín observado en las pruebas.

— El ACI en la sección 8.10 presenta reglas para estimar el ancho del patín para propósitos de diseño. Para una viga interior, el ACI en la Sección 8.10.2 establece que:

1.- El ancho efectivo del patín en compresión no debe exceder de  $\frac{1}{4}$  del claro de la viga.

2.- El ancho del patín en voladizo a cada lado del alma no debe exceder el menor de 8 veces el espesor de la losa o un medio del claro libre a la siguiente alma.

El ACI en las secciones 8.10.3 y 8.10.4 especifica más reglas para vigas que tengan losa de un solo lado y para vigas T aisladas.

### 4.3.- ANALISIS DE VIGAS T.

Generalmente, la zona de compresión de una viga T es rectangular como se muestra en la figura 4-2a con un ancho "b". En ciertos casos en los que la zona de compresión tiene forma de "T", Figura 4-2b, el análisis considera dos vigas como se muestra en la figura 4-4.

Considerando la viga en la figura 4-4a con una profundidad del bloque de compresión "a", mayor que el espesor del patín,  $h_f$ . Las fuerzas internas en esta viga consisten en la fuerza de compresión C en el centroide de la zona de compresión y la fuerza de tensión  $T = A_s f_y$ , considerando que el acero fluye y el momento resistente es  $M_n = Cjd$  ó  $M_n = Tjd$ .

Es necesario localizar el centroide del área achurada (donde "a" no se conoce) es conveniente considerar dos vigas hipotéticas; como se muestran en la Figura 4-4.

#### VIGA F:

Area de la zona de compresión =  $(b - b_w)h_f$ .

Fuerza de la zona de compresión  $C_f = (0.85f_c)(b - b_w)h_f$

Para calcular el área del refuerzo requerido en la viga F,  $T_f = C_f$ , considerando:  $f_s = f_y$ .

$$A_{s_f} \cdot f_y = 0.85 f_c (b - b_w) h_f$$

$$A_{s_f} = \frac{0.85 f_c (b - b_w) h_f}{f_y}$$

El brazo de palanca es  $(d - h_f/2)$ , luego:

$$M_n = 0.85 f_c (b - b_w) h_f (d - h_f/2)$$

Alternativamente, tomando momentos con respecto a la línea de acción de  $C_f$ , da:

$$M_n = A_{s_f} \cdot f_y (d - h_f/2)$$

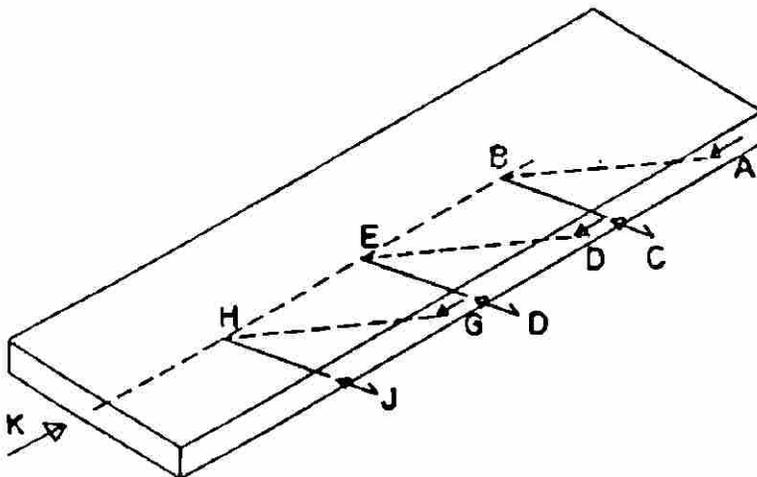
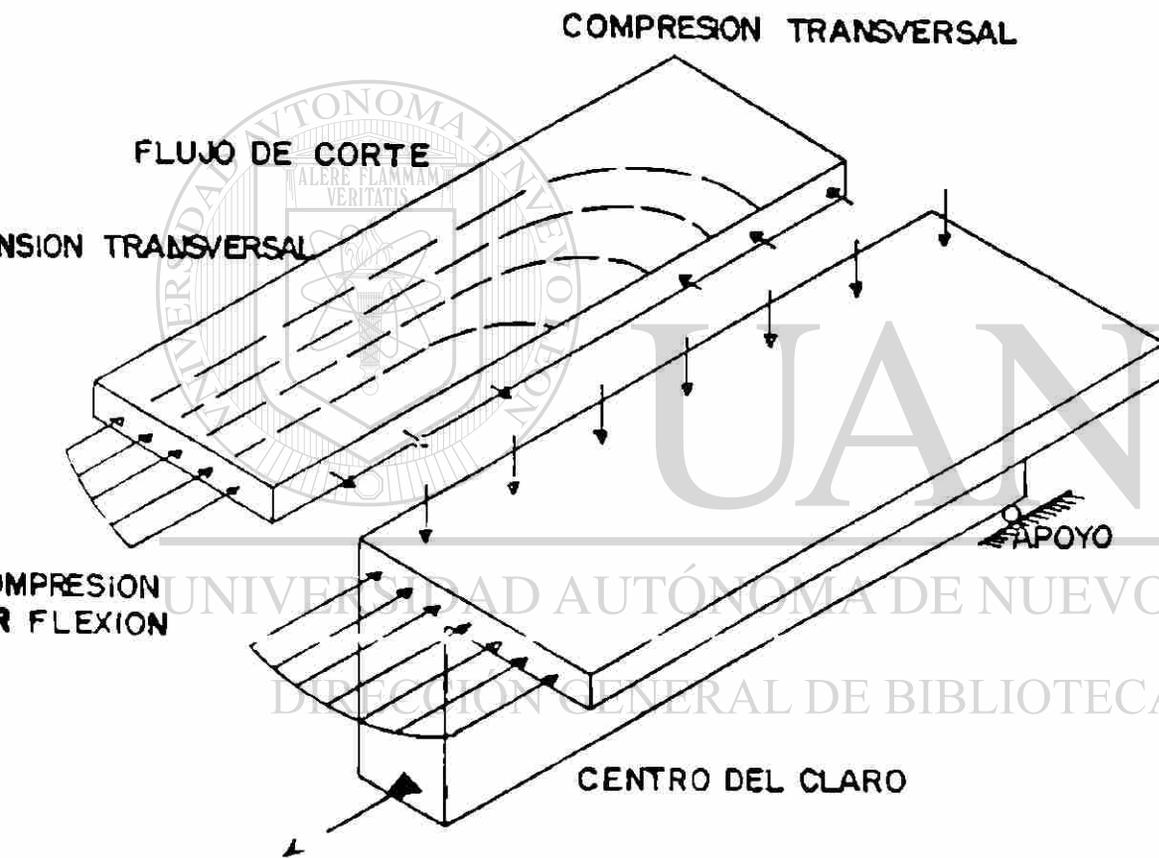
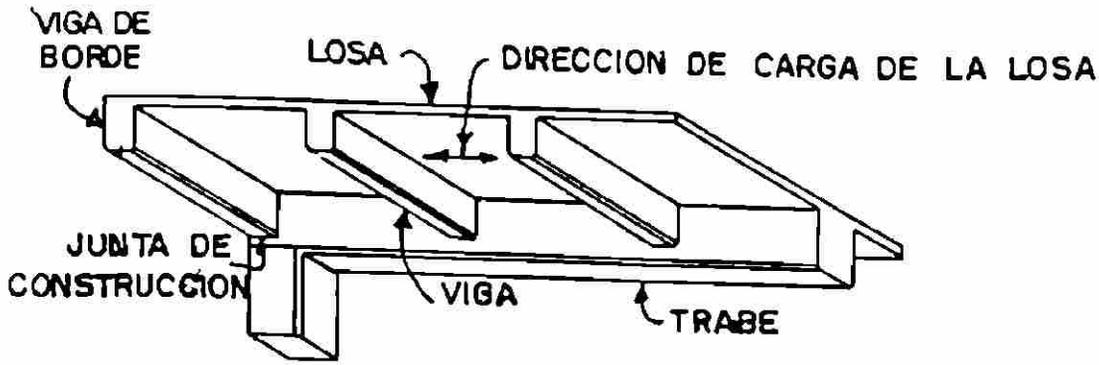
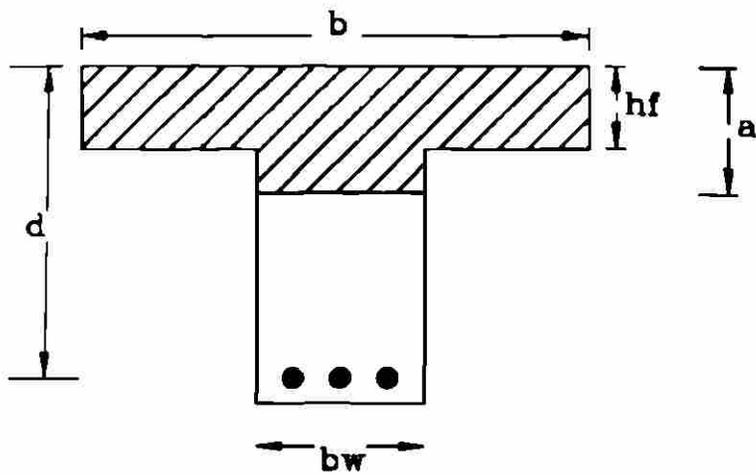
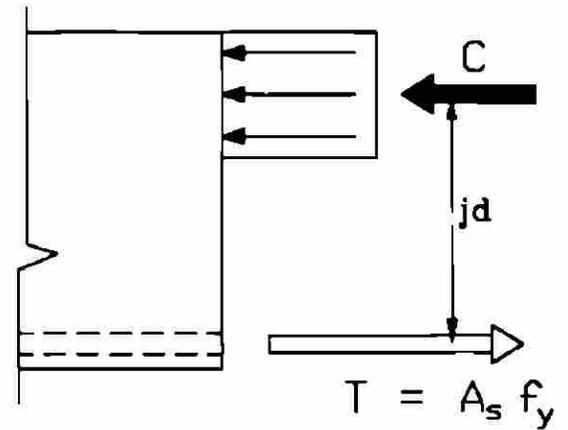


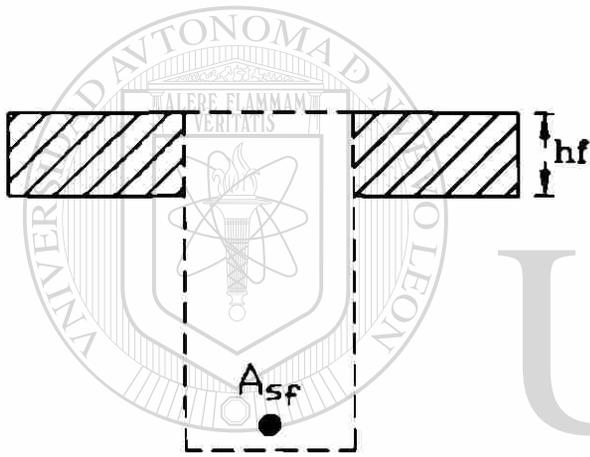
FIGURA 4-3



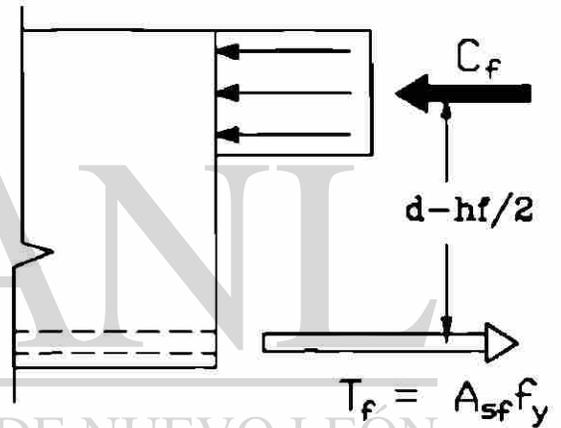
(a) Sección transversal



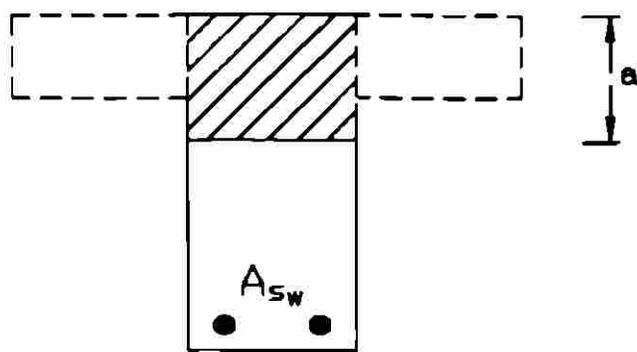
(b) Fuerzas internas



(c) Viga F



(c) Viga F



(d) Viga W

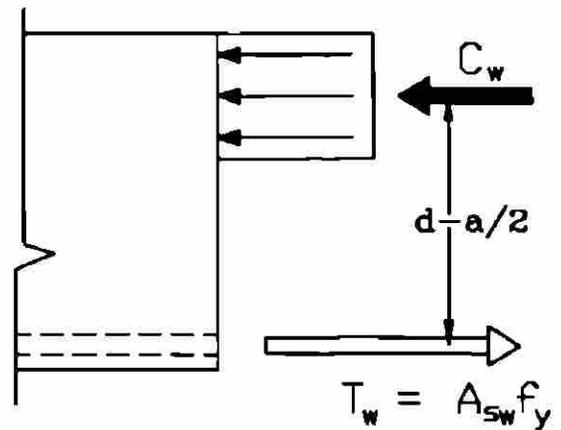


FIGURA 4-4

### VIGA W:

Area del acero de tensión,  $A_{s_w} = A_s - A_{s_c}$  fuerza de compresión

$$C_w = 0.85f'c b_w a$$

$$\text{ó } a = \frac{A_{s_w} f_y}{0.85 f'c b_w}$$

con brazo de palanca  $(d-a/2)$

$$M_{rw} = A_{s_w} f_y (d-a/2)$$

### VIGA "T" = VIGA F + VIGA W.

La capacidad a momento nominal de la viga T es la suma de las capacidades de las vigas F y W.

$$M_n = M_{rf} + M_{rw}$$

$$\text{ó } M_n = [A_{s_c} f_y (d-h_f/2)] + [A_{s_w} f_y (d-a/2)]$$

Finalmente la capacidad factorizada es  $\phi M_n$ .

Ocasionalmente, "a" puede ser igual a  $h_f$ . Esta se puede considerar como viga rectangular para propósitos de cálculo.

Determinar si  $f_s = f_y$ :

Para calcular  $M_n$  de la ecuación anterior es necesario revisar si  $f_s = f_y$ , esto se logra comparando  $(c/d)$ , ó  $(a/d)$  con las relaciones  $(C_b/d)$  ó  $(a_b/d)$  dados por:

$$\frac{C_b}{d} = \frac{6115}{6115 + f_y}$$

$$\text{y } a_b/d = \beta_1 (6115/6115+f_y)$$

## LIMITE SUPERIOR DEL REFUERZO EN VIGAS "T" ACI APENDICE B.

No existe límite superior para la cantidad de refuerzo en tensión en vigas en el apéndice B del ACI. En lugar de eso el valor de  $\phi$  se considera 0.90 para secciones de tensión controlada y 0.70 para secciones en compresión controlada sin refuerzo en espiral en la zona de compresión.

El refuerzo en espiral no se usa normalmente en vigas. En la zona de transición para las secciones controladas por tensión y las controladas por compresión,  $\phi$  varía de 0.90 a 0.70.

Una falla controlada por tensión ocurrirá si la relación  $c/d_i$  es menor o igual a el límite de tensión controlada dado por:

$$\frac{c_{td}}{d_i} = 0.375$$

Esto también se expresa en términos de la relación de la profundidad del bloque rectangular de compresiones al peralte efectivo, en el límite de tensión controlada.

$$\frac{a_{cd}}{d_i} = 0.375 \beta_1$$

Una falla de compresión controlada con  $f_s = f_y$  ocurrirá si la relación  $a/d_i$  es mayor o igual que el límite de compresión controlada.

$$\frac{a_{cd}}{d_i} = \beta_1 (6115 / 6115 + f_y)$$

El ACI en la Sección B9.3.2 especifica  $\phi = 0.70$  para secciones de compresión controlada sin refuerzo en espiral en la zona de compresión.

Una falla de transición ocurrirá si la relación  $a/d_i$  está entre el límite de compresión controlada y el límite de tensión controlada. Entonces, si  $a/d_i$  está entre  $a_{cd}/d_i$  y  $a_{td}/d_i$  en la falla  $\phi$  está entre 0.70 y 0.90 y esta dado por:

$$\phi = 0.356 + \frac{0.204}{a/\beta_1 d_i}$$

### LIMITE INFERIOR DEL REFUERZO EN VIGAS T. ACI Sec 10.3.3.

Para asegurar un comportamiento dúctil el ACI en la sección 10.3.3 requiere que  $\rho \leq 0.75 \rho_b$ . Esto puede revisarse por una de tres formas:

1.- Si la zona de compresión es rectangular,  $f_s = f_y$  si  $a/d < a_b/d$  y  $\rho < 0.75 \rho_b$  si  $a/d \leq 0.75 a_b/d$ .

$$\text{donde } \frac{a_b}{d} = \beta_1 (6115 / 6115 + f_y)$$

Si la zona de compresión tiene forma de T, este cálculo no puede usarse y es necesario hacerlo de acuerdo al método 2 ó 3, siguientes.

2.- El área del acero de tensión correspondiente a la falla balanceada es:

$$A_{s_b} = \frac{C_b}{f_y}$$

Dónde  $C_b$  es la fuerza de compresión resultante del bloque de esfuerzos con una profundidad  $a_b$  la cuál se calcula con:

$$\frac{a_b}{d} = \beta_1 (6115 / 6115 + f_y)$$

El área de acero mínima permitida por el ACI Sección 10.3.3 es entonces  $0.75 A_{s_b}$ .

3.- Alternativamente, la revisión de  $f_s = f_y$  y  $\rho \leq 0.75 \rho_b$  puede basarse en un  $\rho_b$  modificado para vigas T dado por:

$$\rho_{bT} = \frac{b_w}{b} (\rho_b + \rho_f)$$

dónde  $\rho_b$  es el porcentaje de acero balanceado dado por la ecuación :

$$\rho_b = \frac{0.85 \beta_1 f_c}{f_y} \frac{6115}{6115 + f_y}$$

basada en  $b = b_w$  y  $\rho_f = \frac{A_{s_f}}{b_w d}$ , donde:

$$A_{s_f} = \frac{0.85 f_c (b - b_w) h_f}{f_y}$$

De estos el método 2 es el preferido para vigas que trabajan como T.

## REFUERZO MINIMO.

Este es necesario para tener suficiente refuerzo en tensión para que la capacidad a momento exceda el momento de agrietamiento. Para una viga T con el patín en compresión y para las regiones de momento negativo en una viga T continua donde el patín está en tensión, este está dado de acuerdo a la sección 10.5.1 del ACI, revisando que  $A_s = A_{s_f} + A_{s_w}$  exceda  $A_{s_{min}}$  dado por:

$$A_{s_{(min)}} = \frac{0.8\sqrt{f'c}}{f_y} b_w d \geq \frac{14.5b_w d}{f_y} \quad (\text{ACI Ec. 10-3})$$

donde  $f'c$  y  $f_y$  están en  $\text{kg/cm}^2$ .

Cuando una viga es estáticamente determinada, como una viga cantiliver en sección T, el patín trabaja a tensión. El ACI en la sección 10.5.2 da el  $A_{s_{min}}$  como:

$$A_{s_{(min)}} = \frac{1.6\sqrt{f'c}}{f_y} b_w d \quad (\text{ACI Ec. 10-4})$$

La cantidad de refuerzo mínimo en una viga T estáticamente determinada con el patín en tensión no necesita exceder la cantidad dada por la ecuación 10-3 del ACI, tomando  $b = b_w$  como ancho del patín.

Alternamente, el ACI en la Sección 10.5.3 permite que no se utilicen las ecuaciones 10-3 y 10-4, si el área de refuerzo a tensión proporcionada es por lo menos un tercio mayor que la requerida por el análisis.

### EJEMPLO 4-1.

#### CAPACIDAD PARA MOMENTO POSITIVO DE UNA VIGA T:

##### "a" menor que $h_f$

Una viga T de un sistema de piso tiene un claro libre, entre paño de columnas de 5.50 m., como se muestra en la figura 4-5.

Las resistencias del concreto y el acero son  $210 \text{ kg/cm}^2$  y  $2800 \text{ kg/cm}^2$  respectivamente. Calcular la capacidad de la viga en la sección de momento positivo.

1.- Ancho efectivo del patín,  $b$ . El menor de:

(a)  $l_n/4 = 550/4 = 137.5 \text{ cm}$



$$(b) 16 h_f + b_w = 16 \times 12.5 + 30 = 230 \text{ cm.}$$

$$(c) \frac{270}{2} + 30 + \frac{325}{2} = 327.5 \text{ cm}$$

Entonces  $b = 137 \text{ cm.}$

## 2.- Calcular "d".

Para refuerzo en dos capas  $d = 50 - 9 = 41 \text{ cm.}$

## 3.- Calcular "a":

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f_c b} = \frac{6 \times 2.85 \times 2800}{0.85 \times 210 \times 30} = 8.94 \text{ cm}$$

Menor que  $h_f$  por lo que la viga trabaja como rectangular.

## 4.- Revisar si $A_s \geq A_{s_{min}}$

$$A_{s_{min}} = \frac{0.8 \sqrt{f_c} b_w d}{f_y} \geq \frac{14.5 b_w d}{f_y}$$

$$= \frac{0.8 \sqrt{210} \times 30 \times 41}{2800} \geq \frac{14.5 \times 30 \times 41}{2800}$$

$$= 5.09 \geq 6.36 \text{ cm}^2$$

$A_s = 6 \times 2.85 = 17.10 \text{ cm}^2$  excede  $6.36 \text{ cm}^2$ . Está bien.

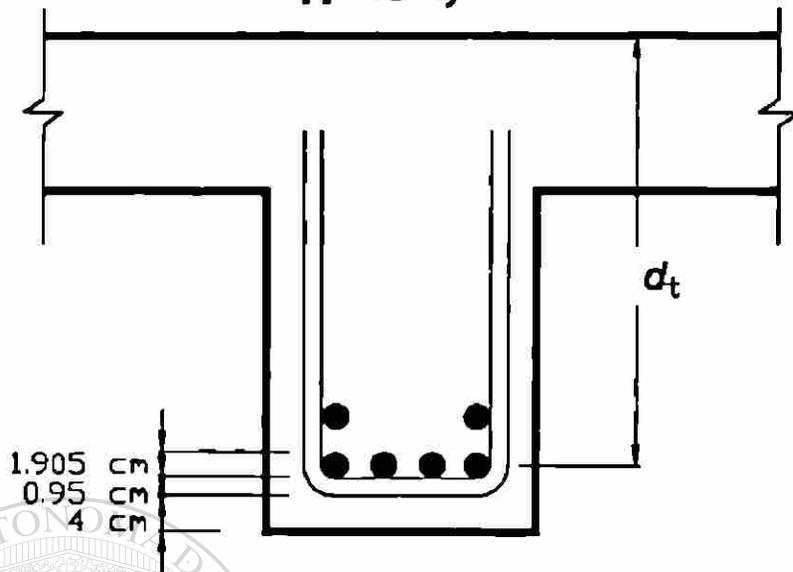
## 5.- Revisar si $f_s = f_y$ y si la sección es controlada por tensión.

$$\frac{a}{d} = \frac{8.94}{41} = 0.218$$

$$\frac{a_b}{d} = \beta_1 (6115 / 6115 + f_y) = 0.85 (6115 / 6115 + 2800)$$

$$= 0.583$$

$$\therefore f_s = f_y$$



$$d_t = 50 - 4 - 0.95 - \frac{1.905}{2}$$

$$d_t = 44 \text{ cm}$$

$$\frac{a}{d_t} = \frac{8.94}{44} = 0.203$$

$$\frac{a_{td}}{d_t} = 0.375 \beta_1 = 0.319$$

$$\frac{a_{td}}{d_t} = 0.375 \beta_1 = 0.319$$

$\frac{a_{td}}{d_t}$  DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Como 0.203 es menor que 0.319 la sección es controlada por tensión y  $\phi = 0.90$ .

#### 6.- Calcular $\phi Mn$ :

$$\phi Mn = \phi [Asfy (d - a/2)]$$

$$= 0.90 [17.10 \times 2800 (44 - \frac{8.94}{2})]$$

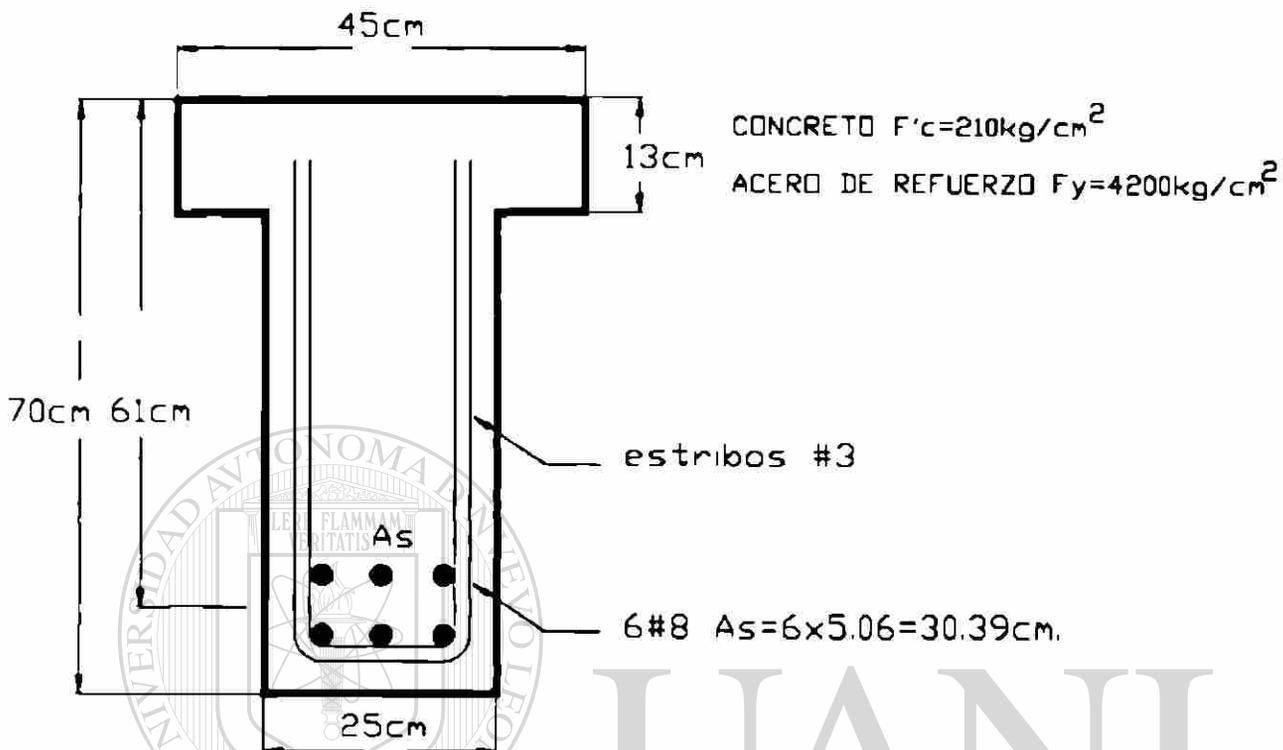
$$= 1,703,427 \text{ kg - cm} = 17,034 \text{ kg - m.}$$

$$= 17.034 \text{ ton - m}$$

## EJEMPLO 4 - 2.

### ANALISIS DE UNA VIGA T CON EL EJE NEUTRO EN EL ALMA.

Calcular la capacidad a momento positivo de la viga mostrada.



#### 1.- Calcular "b":

Esta es una viga T aislada en la que el patín se utiliza para incrementar la zona de compresión. Para una viga así el ACI en la sección 8.10.4 establece que el espesor no debe ser menor que un medio del ancho del alma y un ancho efectivo del patín que no debe exceder cuatro veces el ancho del alma. Por observación estas condiciones son satisfechas. Entonces  $b = 45 \text{ cm}$ .

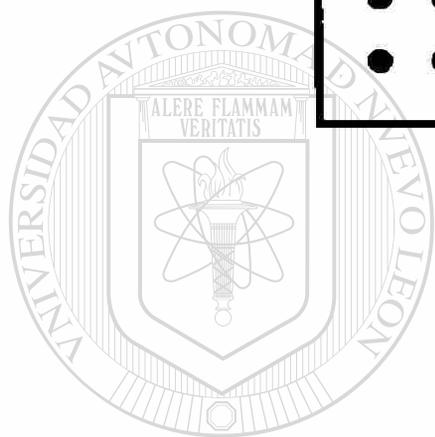
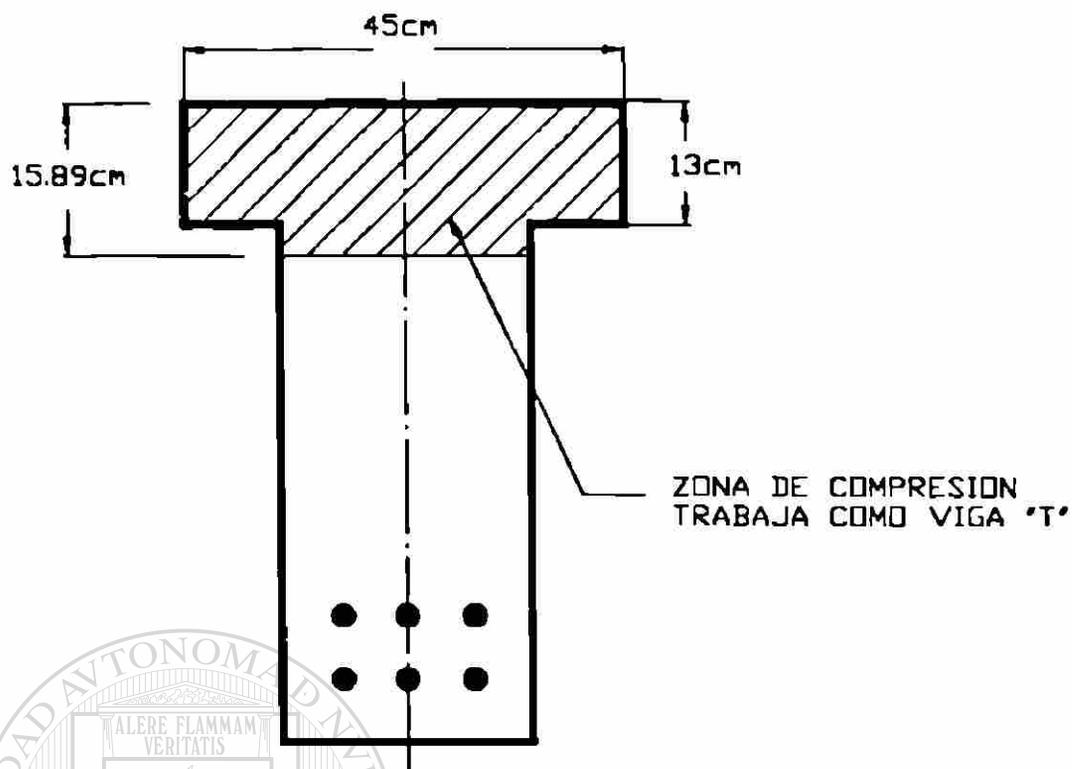
#### 2.- Calcular "d":

Considerando un recubrimiento para refuerzo en dos camadas de  $3 \frac{1}{2}'' \approx 9 \text{ cm}$ . Entonces,  $d = 70 - 9 = 61 \text{ cm}$ .

#### 3.- Calcular "a":

Considerando que la zona de compresión fuese rectangular

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b} = \frac{30.39 \times 4200}{0.85 \times 210 \times 45} = 15.89 \text{ cm}$$



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

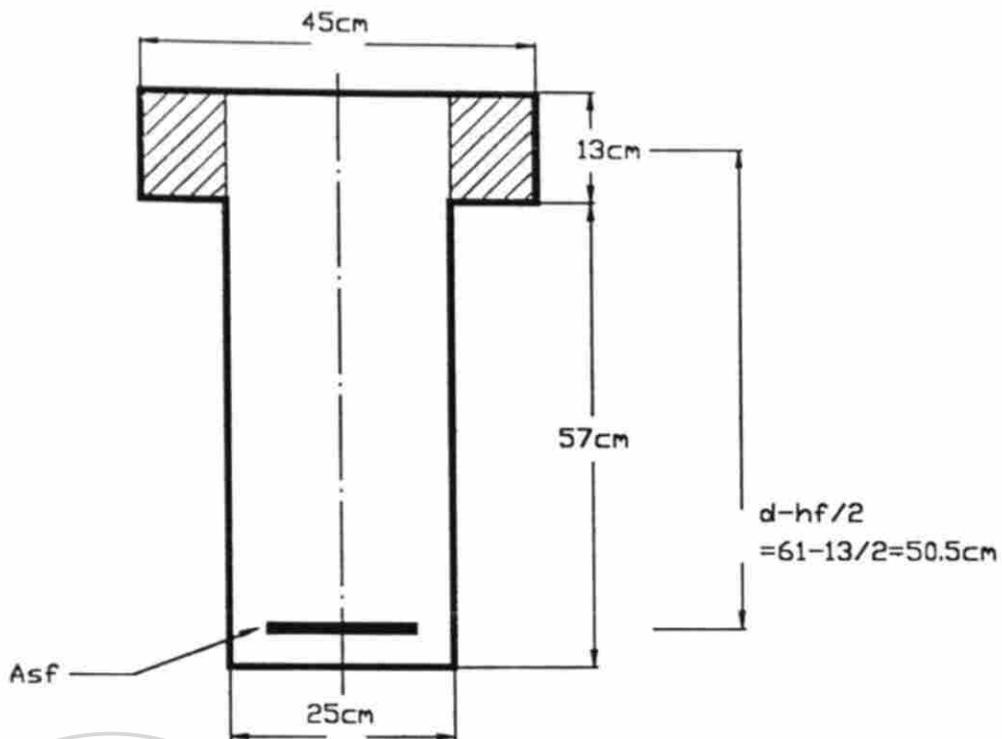
4 - DIVIDIR LA VIGA EN UNA "VIGA F" Y VIGA "W".

Viga F: Fuerza de compresión  $C_f$ :

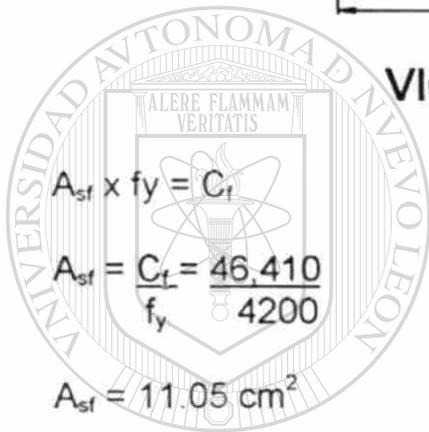
$$C_f = (0.85 f_c) (b - b_w) h_f$$

$$= 0.85 \times 210 (45 - 25) (13)$$

$$= 46,419 \text{ kgs.}$$



**VIGA F**



$$A_{sf} \times f_y = C_f$$

$$A_{sf} = \frac{C_f}{f_y} = \frac{46,410}{4200}$$

$$A_{sf} = 11.05 \text{ cm}^2$$

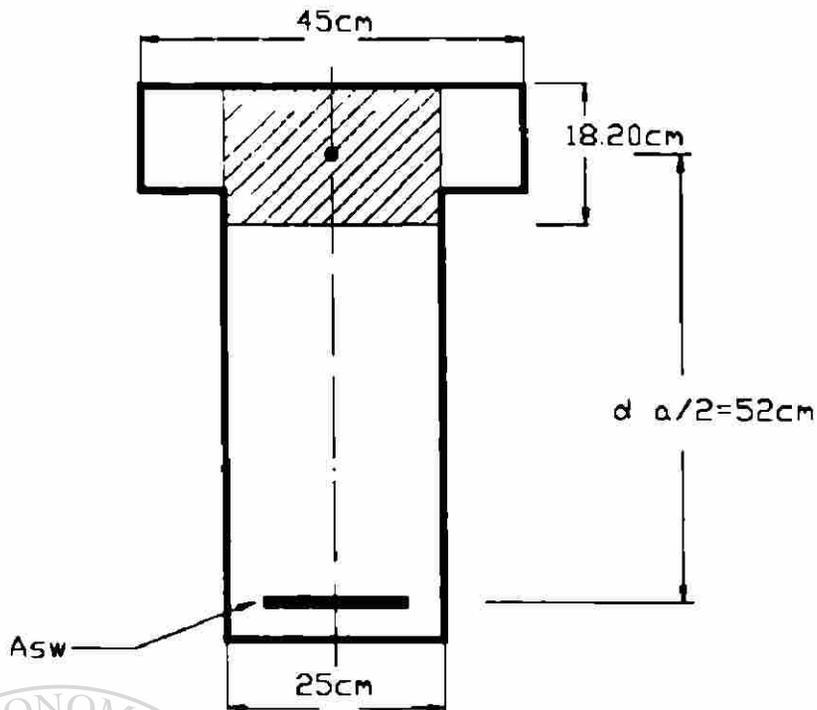
UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

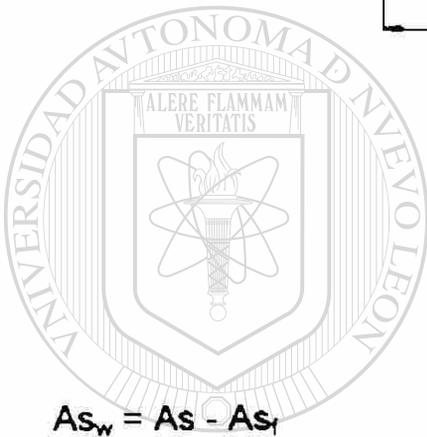
$$= 46,410 (50.5)$$

$$= 2,343,705 \text{ kg - cm.}$$

$$= 23.437 \text{ tons - m.}$$



**VIGA W**



UANL

$$A_{s_w} = A_s - A_{s_f}$$

$$= 30.39 - 11.05$$

$$= 19.34 \text{ cm}^2$$

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Para la viga **W** :  $b - b_w$

$$a = \frac{A_{s_w} f_y}{0.85 f_{cb}} = \frac{19.34 \times 4200}{0.85 \times 210 \times 25}$$

$$a = 18.20 \text{ cm} > 13 \text{ cm}$$

Trabaja como rectangular

$$M_{r_w} = A_{s_w} \times f_y (d - a/2)$$

$$= 19.34 \times 4200 ( 61 - 18.20/2 ) = 4,215,638 \text{ kg - cm}$$

$$M_r = 42.156 \text{ ton - m.}$$

5.- Revisar si  $A_s > A_{s_{min}}$  (ACI Ec. 10-3)

$$A_{s_{min}} = \frac{0.8\sqrt{f'_c}}{f_y} b_w d > 14.5 \frac{b_w d}{f_y}$$
$$= \frac{0.8\sqrt{210}}{4200} \times 25 \times 61 > 14.5 \frac{25 \times 61}{4200}$$

$$= 4.21 > 5.26 = A_{s_{min}} = 5.26 \text{ cm}^2$$

Como  $A_s = 30.39 \text{ cm}^2 > A_{s_{min}}$   $\therefore$  Está bien.

6.- Revisar si  $f_s = f_y$  y si la sección es controlada por tensión.

$$\frac{a}{d} = \frac{18.20}{61} = 0.298$$

$$\frac{a_b}{d} = 0.85 \frac{6115}{6115 + 4200} = 0.504 \therefore f_s = f_y$$

$$d_t = 70 - (4 + 0.95 + 1.27) = 64 \text{ cm}$$

$$\frac{a_{td}}{d_t} = 0.375 \beta_1 = 0.375 \times 0.85 = 0.319$$

$$\frac{a}{d_t} = \frac{18.20}{64} = 0.284$$

Como 0.284 es menor que 0.319 la sección es controlada por tensión y  $\phi = 0.90$ .

7.- Calcular  $\phi M_n$ :

$$\phi M_n = 0.90 \times (23.437 + 42.156) = 59.034 \text{ ton} \cdot \text{m}.$$

### EJEMPLO 4 - 3.

#### DISEÑO DEL REFUERZO DE UNA VIGA "T".

El diseño de una viga T consiste en determinar las dimensiones de la sección transversal y el área del acero de refuerzo. El espesor y el ancho del patín usualmente se establecen durante el diseño de la losa de piso. El tamaño de una viga T se ve afectado por los mismos factores que una viga de sección rectangular.

En el caso de una viga T continua los esfuerzos de compresión en el concreto son más críticos en la zona de momento negativo donde la zona de compresión de la viga es más pequeña. Frecuentemente, el tamaño en esta región de la viga corresponde a un  $\rho \approx 0.5\rho_b$  en el punto de máximo momento negativo.

Cuando se ha definido el tamaño de la sección transversal, es posible calcular el área del refuerzo requerido con la ecuación:

$$A_s = \frac{M_u}{\phi f_y j d}$$

En la región de momento negativo consideramos  $j = 0.875$  como un valor tentativo. Como en la región de momento positivo el ancho del patín es grande se tiene un valor pequeño de "a" y por lo tanto un valor mayor de "j".

Como un primer tanteo se recomienda  $j = 0.95$  para calcular el acero de refuerzo en la región de momento positivo. Esto equivale a considerar  $a = 0.1 d$ .

#### EJEMPLO:

Una viga T como la mostrada en la figura del ejemplo 4-1 (pág. 94) está sujeta a un momento positivo factorizado,  $M_u = 30 \text{ ton-m}$ . Usando  $f_c = 210 \text{ kg/cm}^2$  y  $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$ . Diseñar el refuerzo requerido.

##### 1.- Ancho efectivo de patín:

Siguiendo los cálculos del ejemplo 4 - 1,  $b = 150 \text{ cm}$ .

##### 2.- Calcular "d":

Considerando dos capas de refuerzo:

$$d = h - 3.5" = h - 9 \text{ cm} = 50 - 9 = 41 \text{ cm}.$$

### 3.- Area de refuerzo, $A_s$ :

$$A_s = \frac{M_u}{\phi f_y j d}$$

Como se trata de +M:  $j \approx 0.95$  (supuesto).

$$A_s = \frac{30\,000\,000}{0.9 \times 4200 \times 0.95 \times 41} = 20.38 \text{ cm}^2$$

Usando varillas # 8,  $A_s = 5.06 \text{ cm}^2$

Proponiendo 4 Varillas # 8 en una cama, podemos reducir el recubrimiento a  $2.5" \approx 6.25 \text{ cm} \approx 6 \text{ cm} \therefore d = 44 \text{ cm}$ .

### 4.- Revisar si $A_s \geq A_{s_{\min}}$

$$\begin{aligned} A_{s_{\min}} &= \frac{0.8 \sqrt{f'_c} b_w d}{f_y} \geq \\ &= \frac{0.8 \sqrt{210}}{4200} \times 30 \times 44 \geq \\ &= 3.64 \text{ cm}^2 \geq \end{aligned}$$

Entonces  $A_s > A_{s_{\min}}$ . Está bien.

### 5.- Calcular "a" y revisar si $f_s = f_y$ y si la sección es controlada por tensión.

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b} = \frac{20.38 \times 4200}{0.85 \times 210 \times 150} = 3.19 \text{ cm}$$

menor que el espesor del patín  $h_f$  la acción de viga rectangular existe.

$$\frac{a}{d} = \frac{3.19}{44} = 0.072$$

$$\frac{a_b}{d} = 0.85 \frac{6115}{6115 + 4200} = 0.85 \times \frac{6115}{10315} = 0.504$$

Entonces  $f_s = f_y$

$$d_t = 50 \text{ cm} - (4 + 0.95 + \frac{2.54}{2}) = 43.78 \text{ cm} \approx 44 \text{ cm}$$

$$\frac{a}{d_t} = \frac{3.19}{44} = 0.072$$

$$\frac{a_{td}}{d_t} = 0.375 \beta_1 = 0.375 \times 0.85 = 0.319$$

Entonces, la sección es controlada por tensión y  $\phi = 0.90$

### 6.- Capacidad de la viga a flexión, $\phi M_n$ :

$$\phi M_n = \phi [A_s f_y (d - a/2)] \quad A_s = 5.06 \times 4 = 20.24 \text{ cm}^2$$

$$= 0.90 [20.24 \times 4200 (44 - \frac{3.19}{2})] = 3,244,288 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

$$= 32,443 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

$$\phi M_n = 32.443 \text{ ton} \cdot \text{m.}$$

$\phi M_n > M_u = 30 \text{ ton} \cdot \text{m}$ , entonces está bien.

Usar 4 varillas # 8 grado 60 (AR-42) en una cama.

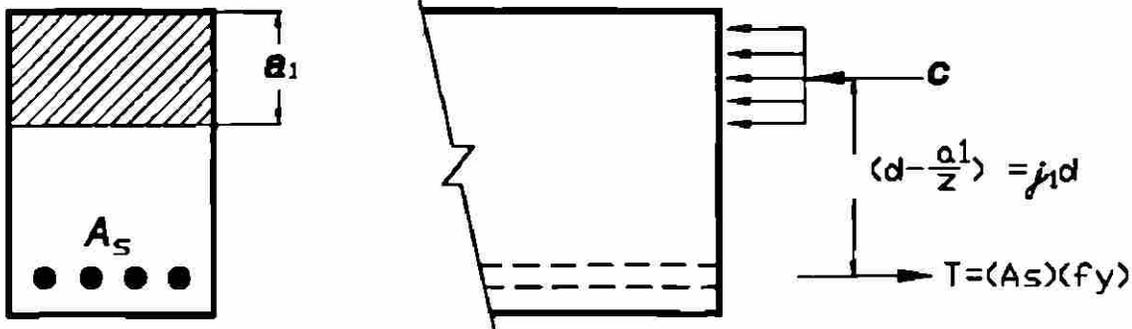
El brazo de palanca  $(d - a/2) = jd = 0.965 d$ .

El valor de  $0.95d$  considerado en el paso 3 normalmente da en el primer tanteo.

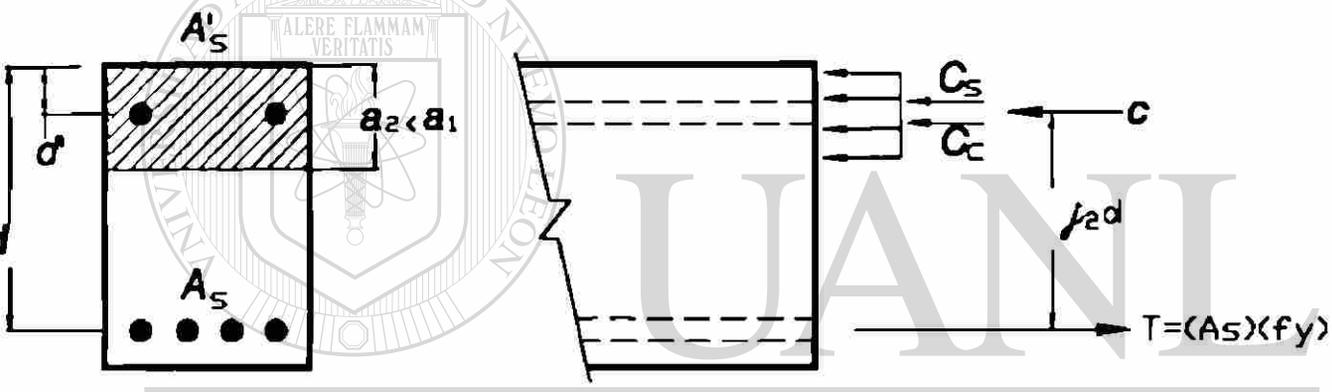
El diseño completo de una viga T, incluye el diagrama de momentos, diseño por flexión, cortante y anclaje como se verá posteriormente.

**4 - 3 VIGAS CON REFUERZO A LA COMPRESION. EFECTO DEL REFUERZO DE COMPRESION EN LA RESISTENCIA Y COMPORTAMIENTO.**

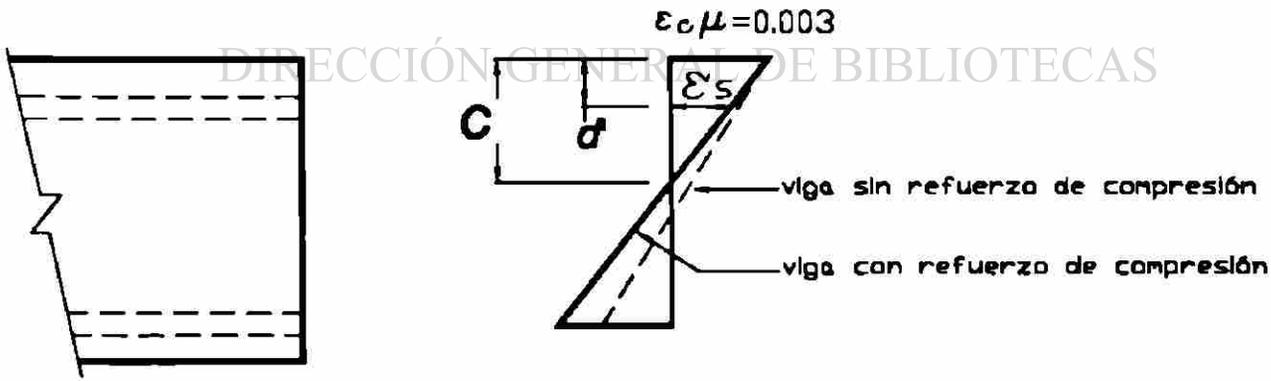
Las vigas con o sin refuerzo a la compresión son comparadas en la siguiente figura.



(a) Viga con refuerzo a tensión solamente.



(b) Viga con refuerzo a tensión y compresión.



(c) Efecto del refuerzo de compresión en el diagrama de deformaciones en dos vigas con la misma As.

**EFECTO DEL REFUERZO DE COMPRESION EN LA RESISTENCIA Y COMPORTAMIENTO.**

El área del refuerzo en tensión  $A_s$  es la misma en ambas vigas. En ambas vigas la fuerza total de compresión es  $C = T = A_s f_y$ .

En la viga con refuerzo en tensión solamente ésta fuerza es resistida totalmente por el concreto. En el otro caso  $C = C_c + C_s$ , donde:  $C_s$  es la fuerza en el acero en compresión, la fuerza proporcionada por el concreto,  $C_c$ , será menor que  $C$ , de lo cual resulta una profundidad de la zona de compresión,  $a_2$ , menor que  $a_1$ , como se muestra en la figura anterior; (pág. 105).

La suma de momentos con respecto a la fuerza de compresión  $C$  da:

Para la viga sin refuerzo de compresión:

$$M_n = A_s f_y (j_1 d)$$

Para la viga con refuerzo de compresión:

$$M_n = A_s f_y (j_2 d)$$

donde  $j_2 d$  es la distancia entre la fuerza de tensión y la resultante de  $C_c$  y  $C_s$ .

Debido a que  $a_2$  es más pequeña que  $a_1$  hace que  $j_2$  sea ligeramente mayor que  $j_1$  y por lo tanto para la misma cantidad de acero en tensión el añadir refuerzo en compresión trae un aumento en la capacidad a momento.

En la figura 4-6 se representa el incremento en la capacidad a momento debido al refuerzo de compresión. La efectividad del acero en compresión disminuye si se incrementa  $d'$  aunque disminuye la deformación  $\epsilon'_s$  del refuerzo en compresión.

Para porcentajes de acero normales ( $\rho \leq 0.015$ ) el incremento en momento es generalmente menor de 5%.

El efecto del incremento de  $d'/d$  de 0.1 a 0.2 se puede ver en la Figura 4-6.

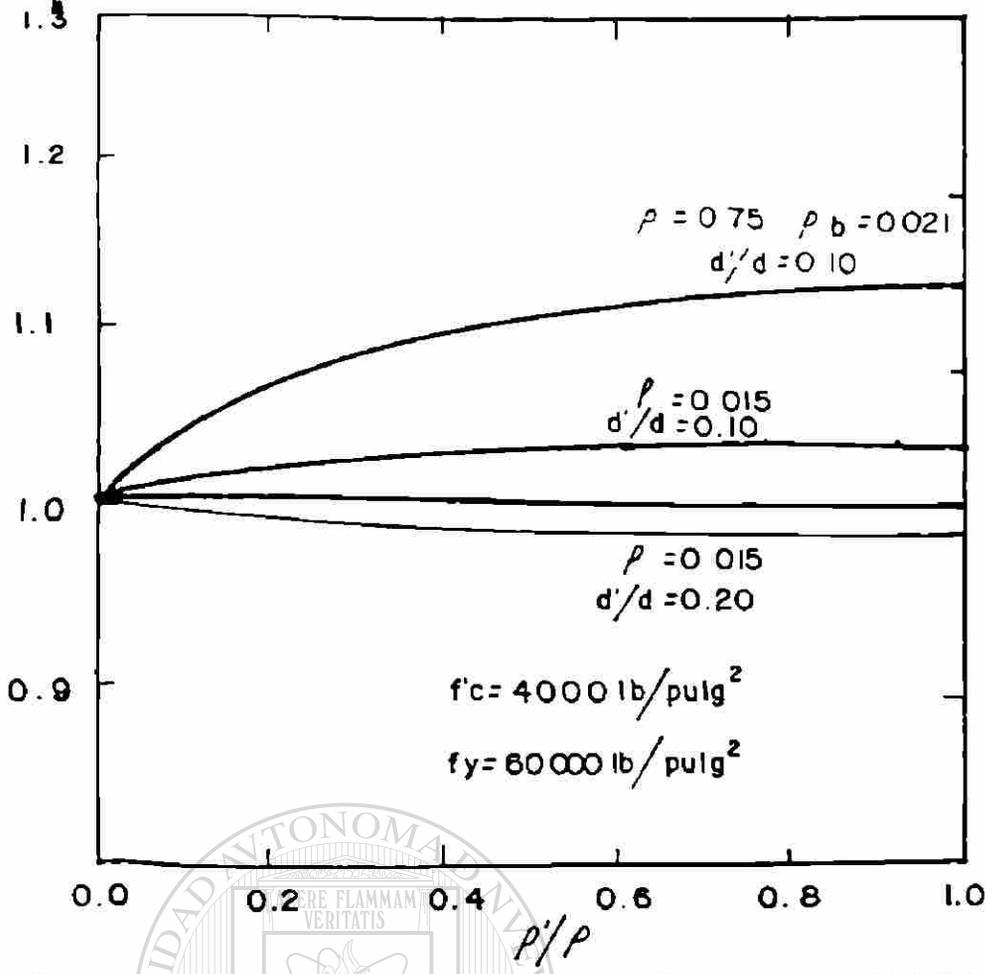
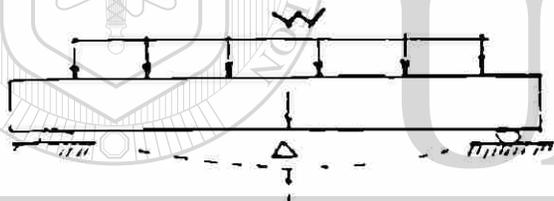


FIG 4-6 INCREMENTO EN LA CAPACIDAD A MOMENTO DEBIDO AL REFUERZO DE COMPRESION.



DEFLEXION AL CENTRO DEL CLARO.  
 $\Delta$  (pulg).

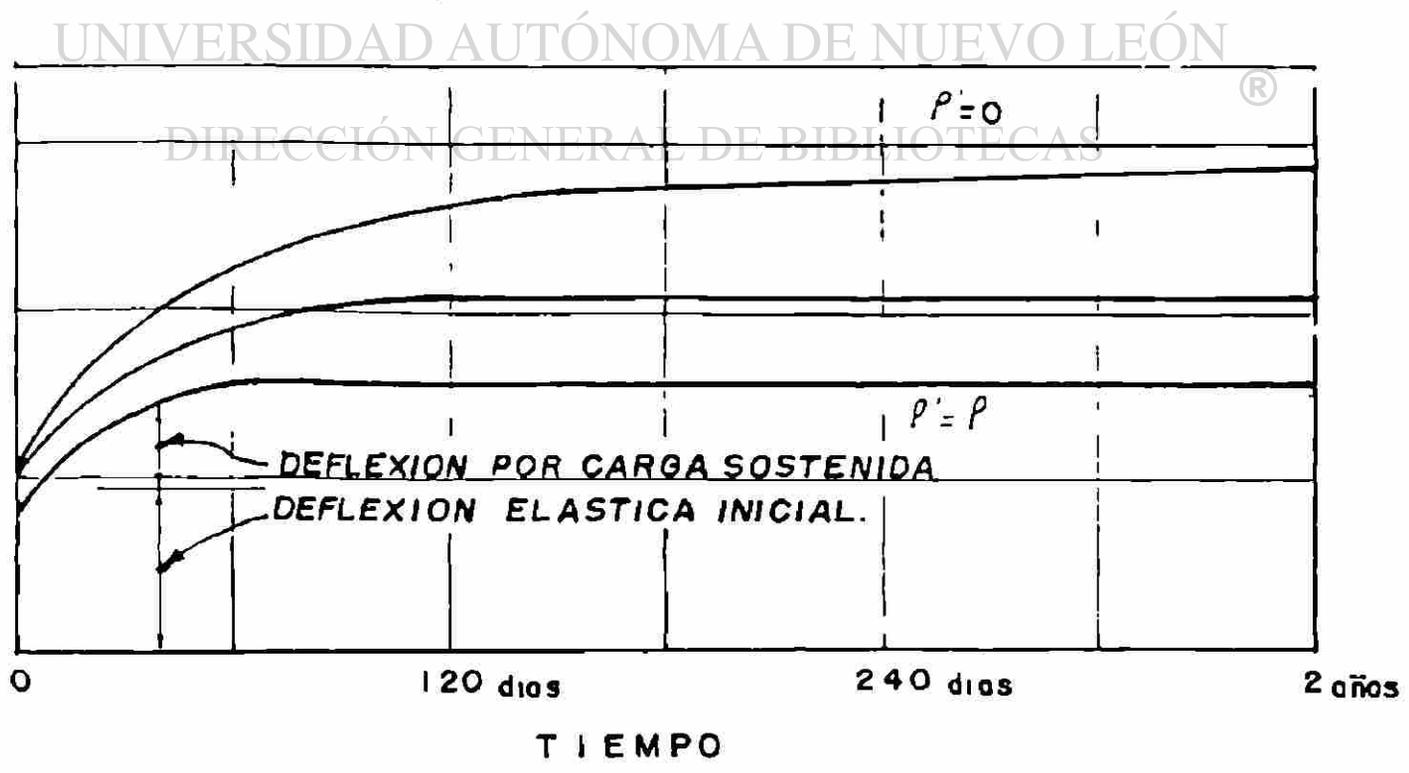


FIG 4-7 EFECTO DEL REFUERZO DE COMRRESION EN LAS DEFLEXIONES POR CARGAS SOSTENIDAS

## RAZONES PARA AÑADIR REFUERZO DE COMPRESION.

Hay cuatro razones principales para usar refuerzo de compresión en vigas.

### 1.- REDUCE DEFLEXIONES POR CARGAS SOSTENIDAS.

La figura 4-7 presenta los diagramas deflexión-tiempo para vigas con y sin refuerzo en compresión. Cuando las vigas son cargadas en un período de varias horas a nivel de cargas de servicio y éstas cargas se mantienen por 2 años. En el tiempo de cargado inicial (tiempo = 0), las 3 vigas se deflexionan entre 1.6 y 1.9 pulg. o aprox. la misma cantidad.

Pasado el tiempo las deflexiones en las tres vigas se incrementan. El incremento de la deflexión inicial es de 195% en la viga sin refuerzo de compresión ( $\rho' = 0$ ), pero solamente 99% de la deflexión inicial en la viga con refuerzo de compresión igual al de tensión ( $\rho' = \rho$ ). El ACI toma en cuenta esto en los procedimientos de cálculo de deflexión.

### 2 - INCREMENTA DUCTILIDAD.

El añadir refuerzo de compresión causa una reducción en el peralte del bloque de esfuerzos de compresión,  $a$ . Por lo que  $a_2$  es menor que  $a_1$  como se vio anteriormente y esto hace que la deformación en el refuerzo en tensión se incremente lo cual produce un comportamiento más dúctil. En la figura 4-8 se comparan los diagramas momento - curvatura de tres vigas con  $\rho \leq \rho_b$  y variando las cantidades del refuerzo de compresión  $\rho'$ , donde  $\rho' = \frac{A's}{bd}$

El momento en la primer fluencia del acero en tensión tiene un pequeño cambio cuando se añade refuerzo en compresión. El incremento en momento después de la fluencia es grande debido a la deformación del refuerzo añadido y del de tensión.

Como esto ocurre para deflexiones y curvaturas muy grandes, se ignora en el diseño. Por otro lado se incrementa la ductilidad significativamente como se muestra en la figura 4-8. Esto es particularmente importante en regiones sísmicas.

### 3 - CAMBIO DEL MODO DE FALLA POR COMPRESION.

Cuando  $\rho > \rho_b$  una viga falla de manera frágil debido a que se agrieta la zona de compresión antes que fluya el acero. El diagrama momento-curvatura para una viga así se muestra en la figura 4-9 ( $\rho' = 0$ ). Cuando se añade acero a la zona de compresión ésta aumenta su resistencia de tal manera que permite que fluya primero el acero de tensión antes de que se agriete el concreto.

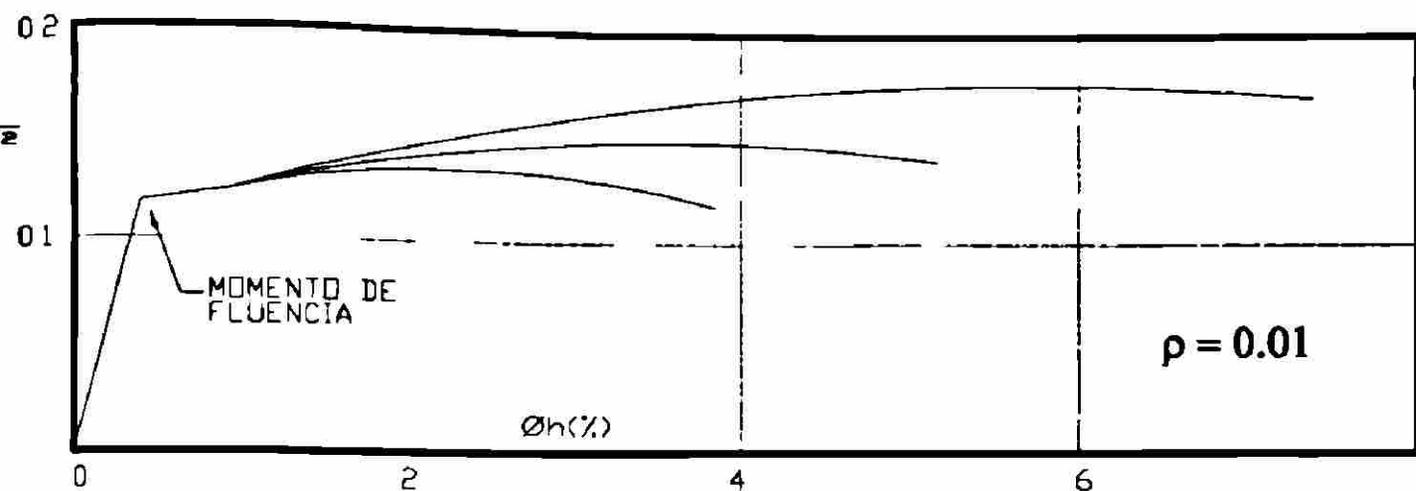
La viga entonces presenta una falla de manera más dúctil, como se muestra en la Figura 4-9. Si el acero de compresión fluye la viga entonces presenta una distribución de deformaciones, curvatura y falla muy parecidas a las de una viga simple (con refuerzo en tensión solamente) tiene un porcentaje de acero ( $\rho - \rho'$ ). El término ( $\rho - \rho'$ ) se le denomina "porcentaje efectivo de acero". Frecuentemente, los calculistas consideran que  $(\rho - \rho') \leq 0.5 \rho_b$ .

Dos casos se presentan comúnmente de refuerzo en compresión que son.

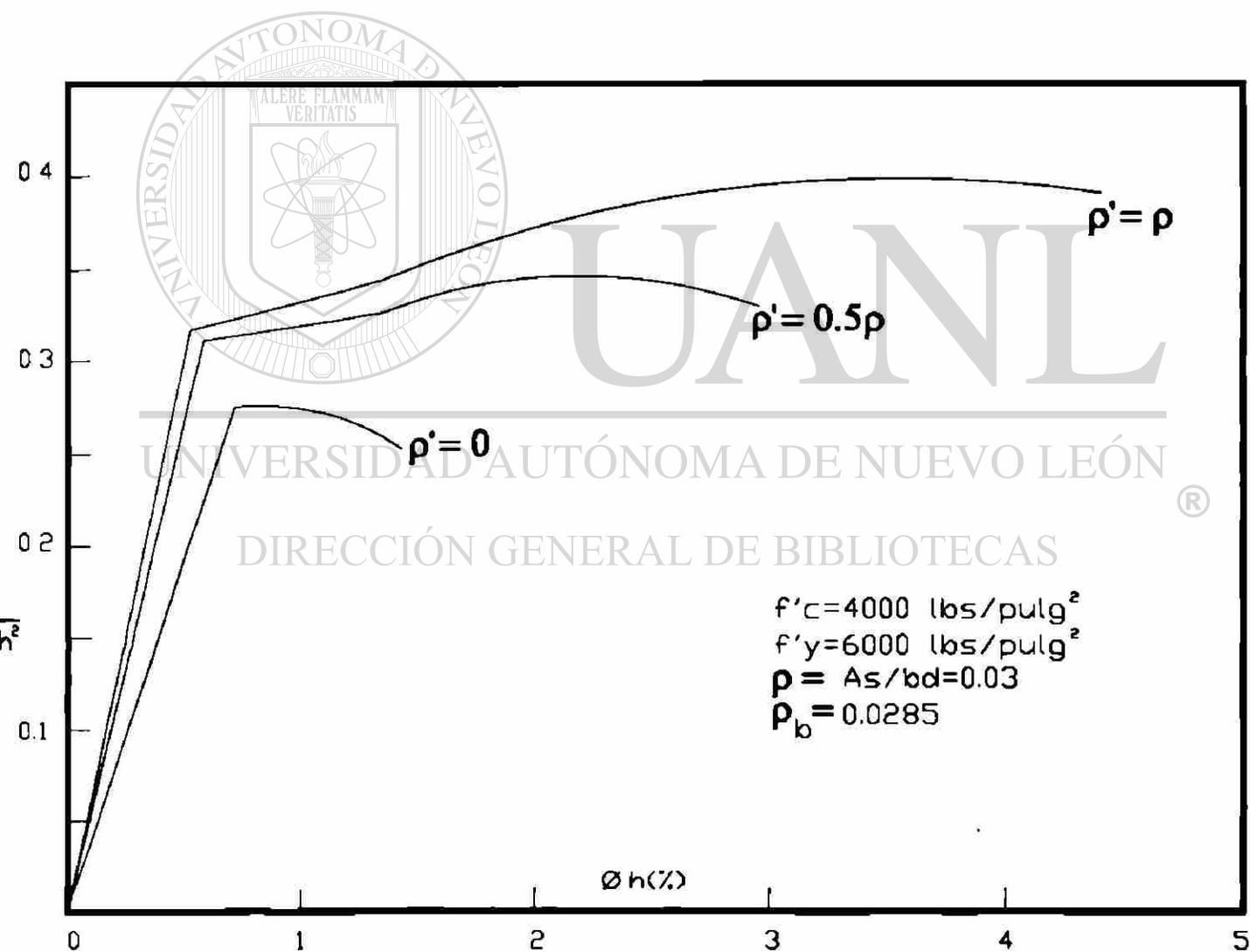
- 1 - Región de momento negativo en vigas T continuas.
- 2 - Región a la mitad del claro en vigas T invertidas usándose el patín para apoyar otras vigas o losa.

### 4 - FACIL FABRICACION.

El refuerzo en compresión sirve de amarre a los estribos de cortante y a su anclaje lo cual también tiene un pequeño incremento en la capacidad de la viga. A la vez los estribos permiten la colocación del refuerzo de compresión.



**FIGURA 4-8**  
**EFFECTO DEL REFUERZO DE COMPRESION EN LA RESISTENCIA Y**  
**DUCTILIDAD DE VIGAS SUBREFORZADAS  $\rho < \rho_b$ .**



**FIGURA 4-9**  
**DIAGRAMAS DE MOMENTO DE CURVATURA PARA VIGAS CON**  
 **$\rho > \rho_b$  CON Y SIN REFUERZO DE COMPRESION.**

## ANÁLISIS DE VIGAS CON REFUERZO EN TENSION Y COMPRESION.

Se sigue un procedimiento similar al de las vigas "T" descomponiendo la viga dada en dos, como se muestra en la figura 4-10.

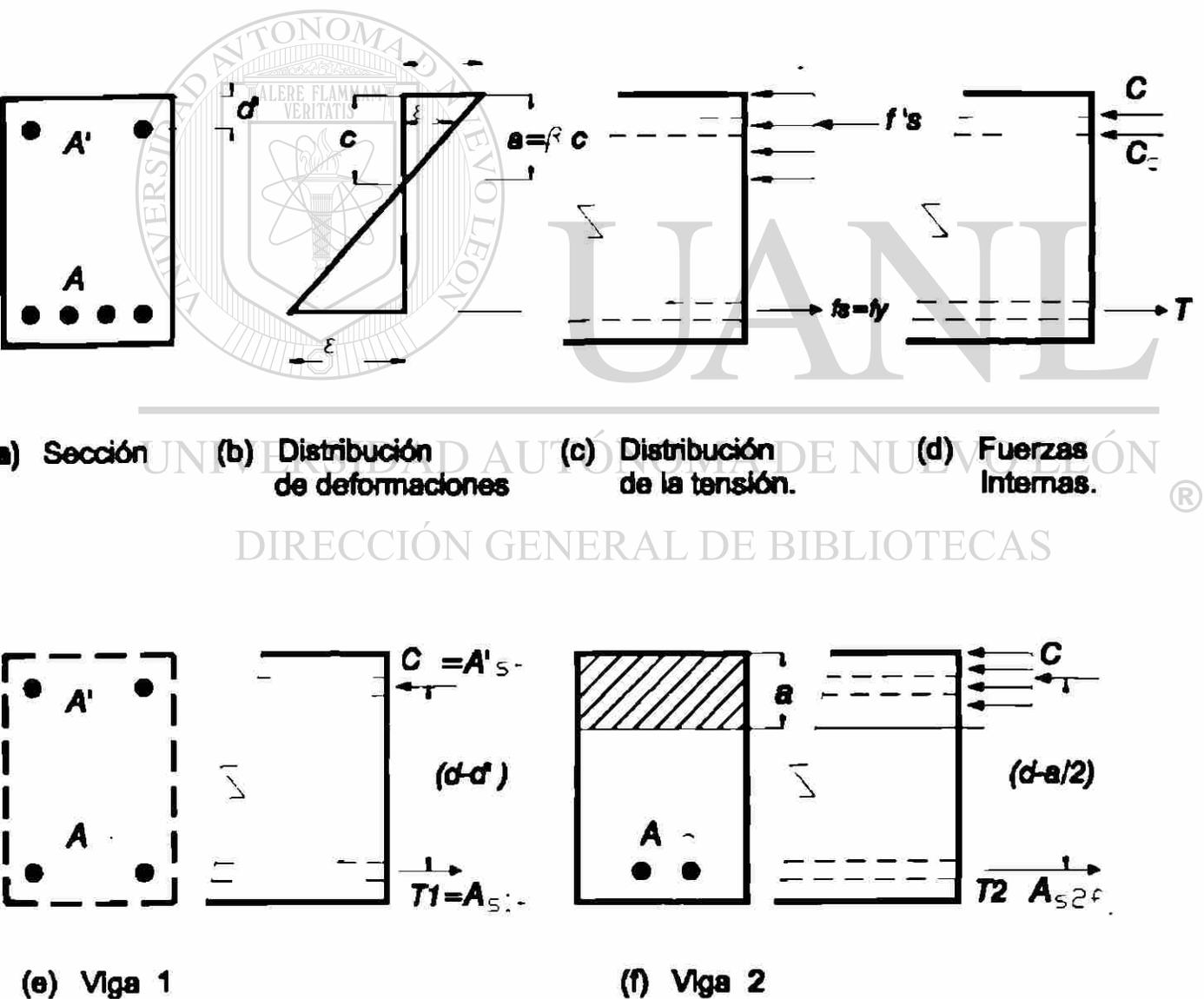


FIGURA 4-10  
DEFORMACIONES, ESFUERZOS Y FUERZAS EN UNA VIGA CON  
REFUERZO A LA COMPRESION.

**VIGA 1:** Consiste del refuerzo en compresión en la cama superior y un acero en la cama inferior tal que  $T_1 = C_s$ .

**VIGA 2:** Consiste en la zona de concreto en compresión y el resto del refuerzo en tensión.

El refuerzo del acero en compresión es  $f'_s$ .

Del diagrama de deformaciones por  $\Delta_s$  semejantes:

$$\epsilon'_s = \frac{(c - d')}{c} 0.003$$

Si  $\epsilon'_s \geq \epsilon_y$  entonces  $f'_s = f_y$ . Sustituyendo  $c = \frac{a}{\beta_1}$ , da:

$$\epsilon'_s = \left(1 - \frac{\beta_1 d'}{a}\right) 0.003$$

Sustituyendo  $\epsilon'_s = \epsilon_y$  y  $\epsilon_y = \frac{f_y}{E_s}$  donde  $E_s = 2;030,000 \text{ kg/cm}^2$

podemos encontrar el valor límite de  $d'/a$  para el cuál el refuerzo en compresión fluye,

$$(d'/a)_{\text{lim}} = \frac{1}{\beta_1} \left( a - \frac{f_y}{6115} \right) \text{ donde } f_y \text{ en kg/cm}^2$$

Si el valor de  $d'/a$  es mayor que este valor, el acero en compresión no fluye.

$$[f'_s = f_y \text{ solamente si } d'/a \leq (d'/a)_{\text{lim}}]$$

A continuación se revisarán dos casos para determinar la capacidad de una viga dependiendo estos dos casos si fluye o no el acero en compresión.

## CASO I.- EL ACERO DE COMPRESION FLUYE.

Si el acero de compresión fluye para el análisis se considera la viga dividida en dos: cada una con  $C = T$ .

La viga 1 consiste del acero en compresión con una fuerza  $C_s$  y el equivalente en tensión con una fuerza  $T_1$  tal que  $C_s = T_1$  ó  $A'sfy = As_1fy$  lo que da  $A's = As_1$  la capacidad de esta viga es:

$$M_{n1} = A'sfy(d-d')$$

La viga 2 consiste en el concreto y el acero remanente:  $As_2 = As - As_1$

Si  $f_s = f_y$  entonces  $As_1 = A's$ . La fuerza de compresión en el concreto es:

$$C_c = 0.85 f_c b a$$

Como  $C = T$  para la viga 2, donde  $T = (As - A's)fy$ , la profundidad del bloque de esfuerzos en compresión es "a" y es:

$$a = \frac{(As - A's)fy}{0.85 f_c b}$$

El momento nominal de la viga 2 es:

$$M_{n2} = (As - A's)fy (d - a/2)$$

La capacidad nominal total de la viga es:

$$M_n = A'sfy (d - d') + (As - A's) fy (d - a/2)$$

## CALCULOS PARA CUANDO $f_s = f_y$ EN EL ACERO EN TENSION.

La ecuación anterior considera que tanto el acero en compresión como el acero en tensión fluyen. Si  $d'/a$  es menor o igual a  $(d'/a)_{lim}$  el acero en compresión fluye.

El acero en tensión fluirá si la falla es de tensión o si es falla balanceada. Es decir si  $a/d \leq a_f/d = 0.85 (6115/6115+f_y)$  con  $f_y$  en  $kg/cm^2$

## CASO 2: EL ACERO DE COMPRESION NO FLUYE.

Si el acero en compresión no fluye  $f_s$ , no se conoce y se requiere una solución diferente.

Si consideramos que el acero en tensión fluye, las fuerzas internas en la viga son:

$$T = A_s f_y$$

$$C_c = 0.85 f_c b a$$

$$C_s = (E_s \varepsilon'_s) A'_s.$$

Por equilibrio  $C_c + C_s = T$

$$0.85 f_c b a + E_s A'_s \left(1 - \frac{\beta_1 d'}{a}\right) 0.003 = A_s f_y$$

Esta se puede reducir a una ecuación cuadrática en  $a$ , dada por:

$$(0.85 f_c b) a^2 + (0.003 E_s A'_s - A_s f_y) a - (0.003 E_s A'_s \beta_1 d') = 0$$

con el valor de "a" conocido, la capacidad a momento nominal de la sección es:

$$M_n = C_c (d - a/2) + C_s (d - d')$$

Esta ecuación es aplicable solamente si  $f_s \leq f_y$  y los valores de  $C_c$  y  $C_s$  están dados en las ecuaciones anteriores.

## AREA DE ACERO MAXIMA EN TENSION EN VIGAS CON REFUERZO EN COMPRESION. ACI APENDICE B.

No existe límite superior en la cantidad de refuerzo en tensión en el Apéndice B del ACÍ. Sin embargo, el valor de  $\phi = 0.90$  para secciones en tensión controlada y  $\phi = 0.70$  para secciones en compresión controlada en secciones, sin refuerzo en espiral en la zona en compresión. Una sección estará en tensión controlada si la relación  $a/d$  es menor o igual a:

$$\frac{a_{td}}{d_t} = 0.375 \beta_1$$

## LIMITE SUPERIOR DEL REFUERZO DE TENSION EN VIGAS CON REFUERZO A LA COMPRESION. ACI Sec. 10.3.3

El ACI en la sección 10.3.3 limita la cantidad de acero en tensión en vigas a 0.75 veces el correspondiente a la falla balanceada, esto es 0.75 veces la cantidad dada:

$$(\rho - \rho')_b = 0.85 \frac{\beta_1 f'_c}{f_y} (6115/6115 + f_y)$$

El código establece que en elementos con refuerzo en compresión la porción de  $\rho_b$  igualada por el acero de compresión no necesita reducirse mediante el factor de 0.75.

### REFUERZO MINIMO EN TENSION.

El refuerzo mínimo en tensión será el correspondiente a la ecuación:

$$A_{s_{min}} = 0.8 \frac{\sqrt{f'_c}}{f_y} b_w d \geq 14.5 \frac{b_w d}{f_y}$$

con unidades en sistema métrico.

### ESTRIBOS PARA REFUERZO DE COMPRESION.

Cuando se alcanza la carga última por una viga, el refuerzo de compresión puede flexionarse y provocar el desprendimiento del recubrimiento de concreto. Por esta razón es necesario encerrar el refuerzo de compresión con anillos o estribos.

El diseño de estos estribos está cubierto en la Sección 7.11 del ACI. El espaciamiento y tamaño de estos estribos es similar a los estribos para columnas.

**EJEMPLO 4-4. ANALISIS DE UNA VIGA CON REFUERZO EN COMPRESION. EL ACERO EN COMPRESION FLUYE.**

Como se muestra en la Figura 4-11 esta viga tiene  $f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$  y  $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$ . Para esta viga basada en el refuerzo de tensión solamente tiene  $a = 25.7 \text{ cm}$ ,  $d_t = 60 \text{ cm}$ . dado  $a/d_t = 0.428$ , el cual excede el límite de tensión controlada  $a_{t,cl} = 0.319 d_t$

Por lo tanto,  $\phi$  será menor que 0.90. Nos permitimos usar  $\phi = 0.90$  para dar mayor ductilidad, 2 Varillas # 7 han sido añadidos como refuerzo de compresión. Calcular la capacidad a momento.

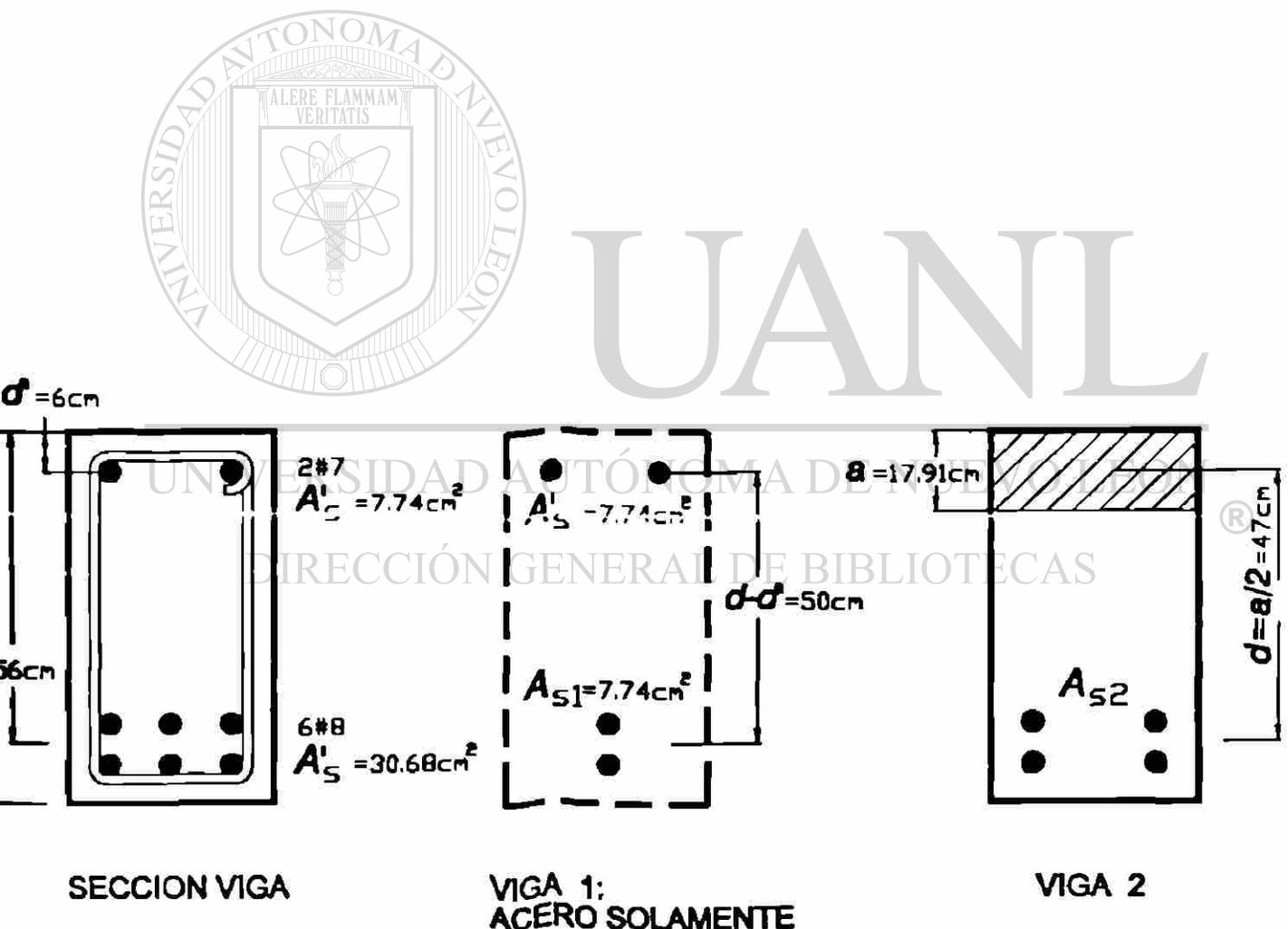


FIGURA 4-11

**1.- Considerar que  $f'_s = f_y$  y  $f_s = f_y$  y dividir la viga en dos componentes.**

$A_{s1} = A'_s$ . El área de acero de la viga 2 es:

$$\begin{aligned} A_{s2} &= A_s - A_{s1} \\ &= 30.58 - 7.74 = 22.84 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

**2.- Calcular "a" para la viga 2.**

$$a = \frac{(A_s - A'_s) f_y}{0.85 f_c b} = \frac{22.84 \times 4200}{0.85 \times 210 \times 30} = 17.91 \text{ cm}$$

**3.- Revisar si el acero de compresión fluye :**

Se supuso en el paso 1 que  $f'_s = f_y$

$$d' = 6 \text{ cm}, d/a = \frac{6}{17.91} = 0.335$$

$$(d'/a)_{\text{lim}} = \frac{1}{\beta_1} (1 - f_y / 6115)$$

$$= \frac{1}{0.85} (1 - 4200/6115) = 0.368$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
Como  $d'/a = 0.335$  es menor que el valor límite de 0.368, el acero de compresión fluye y  $f'_s = f_y$ .  
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

**4.- Revisar si  $f_s = f_y$  para el acero de tensión y si la sección es controlada por tensión.**

$$a = 17.91 \text{ cm}, \quad a/d = \frac{17.91}{56} = 0.320$$

El límite para tensión controlada es:

$$\frac{a_{td}}{d_t} = 0.375 \beta_1 = 0.319$$

$$0.319 \approx 0.320 \text{ se tomará } \phi = 0.90$$

5.- Revisar si  $A_s \geq A_{s_{min}}$

$$A_{s_{min}} = \frac{0.8 \sqrt{f_c}}{f_y} b_w d \geq 14.5 \frac{b_w d}{f_y} \quad (\text{ACI Ec. 10 - 3})$$

$$= \frac{0.8 \sqrt{210}}{4200} \times 30 \times 56 = 4.64 \text{ cm}^2 \geq \frac{14.5 \times 30 \times 56}{4200}$$

$$= 4.64 \text{ cm}^2 \geq 5.8 \text{ cm}^2$$

Como  $A_s = 30.58 \text{ cm}^2 > A_{s_{min}}$ . Esta bien.

6.- Calcular  $\phi M_n$ :

(a) **Viga 1:**  $\phi M_{n1} = \phi [A's f_y (d - d')]$

$$= 0.90 [7.74 \times 4200 \times 50] = 1,462,860 \text{ kg - cm.}$$

$$= 14.63 \text{ ton - m.}$$

(b) **Viga 2:**  $\phi M_{n2} = \phi [(A_s - A's) f_y (d - a/2)]$

$$= 0.90 [22.84 \times 4200 \times 47] = 4,057,754 \text{ kg - cm.}$$

$$= 40.58 \text{ ton-m.}$$

Capacidad total a momento:

$$\phi M_n = \phi M_{n1} + \phi M_{n2}$$

$$= 14.63 + 40.58 = 55.21 \text{ ton - m.}$$

## EJEMPLO 4 - 5.

### ANÁLISIS DE UNA VIGA CON REFUERZO EN COMPRESIÓN. EL ACERO DE COMPRESIÓN NO FLUYE. UNIDADES SI.

En la viga mostrada en la Figura 4-12 tiene  $f_c = 20$  MPa y  $f_y = 400$  MPa. Para esta viga, basada en el refuerzo en tensión solamente,  $a = 257$  mm.  $d_t = 538$  mm. dando  $a/d_t = 0.478$  el cual excede la relación límite en tensión controlada de  $a_{td}/d_t = 0.319$ .

Por esto  $\phi$  será menor de 0.90. Se dará  $\phi = 0.90$  para lograr más ductilidad. 2 Varillas #25 han sido añadidas a la compresión. Calcular la capacidad a momento.

#### SOLUCION:

1.- Considerar  $f_s = f_y$  y  $f'_s = f_y$  y dividir la viga en dos componentes.

Como se puede apreciar en la figura la viga dada se dividió en 2 y se considera que todo el acero fluye. El área de acero en la viga 1 es:  $A_{s1} = A'_s$ . El área de acero en la viga 2 es:

$$A_{s2} = A_s - A_{s1} = 3000 - 1000 = 2000 \text{ mm}^2.$$

2.- Calcular "a" para viga 2:

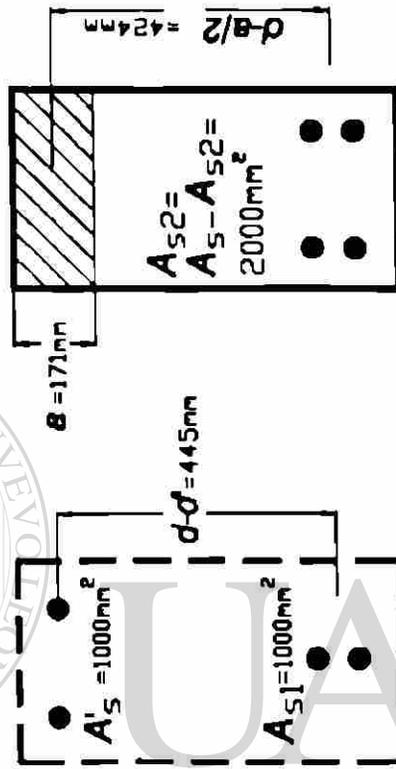
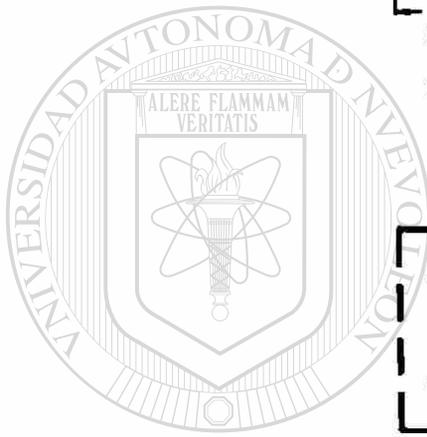
$$a = \frac{(A_s - A'_s) f_y}{0.85 f_c b} = \frac{2000 \times 400}{0.85 \times 20 \times 275} = 171 \text{ mm}$$

3.- Revisar si el acero en compresión fluye:

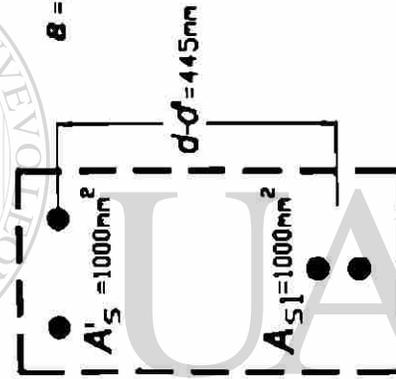
$$d' = 65 \text{ mm}, \quad d'/a = \frac{65}{171} = 0.380$$

$$(d'/a)_{lm} = \frac{1}{\beta_1} (1 - f_y/600) = 0.392$$

Como  $d'/a = 0.380$  es menor que el valor límite de 0.392, el acero en compresión fluye.



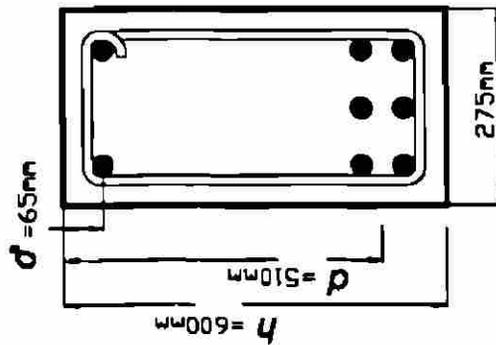
VIGA 2



VIGA 1:  
ACERO SOLAMENTE

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



SECCION VIGA

FIGURA 4-12

**4.- Revisar si  $f_t = f_y$  para el acero en tensión y si la sección es controlada por tensión.**

$$a = 171 \text{ mm y } a/d = \frac{171}{510} = 0.335$$

De la tabla A - 4M,  $a_b/d = 0.510$ . Como 0.335 es menor que 0.510, el acero en tensión fluye.

$$d_t = 600 - 40 - 10 - 25/2 = 537 \text{ mm.}$$

$$a/d_t = \frac{171}{537} = 0.3184$$

El límite para que la sección sea controlada por tensión es:

$$\frac{a_{ld}}{d_t} = 0.375 \beta_1 = 0.3188$$

Como 0.3184 es menor que 0.3188 la sección es controlada por tensión y  $\phi = 0.90$

Alternativamente, el diseño debe satisfacer la Sección 10.3.3 del ACI, el límite máximo del acero será tal que  $\rho - \rho' \leq 0.75 \rho_b$ . Para revisar esto, calcular las fuerzas de compresión  $C_c$  y  $C_s$  en el concreto y acero en la condición balanceada con  $a = a_b$ , para encontrar el área de acero en la condición balanceada:

$$A_{s_b} = \frac{C_c + C_s}{f_y} \text{ esto da } A_{s_b} = 4040 \text{ mm}^2$$

$0.75 A_{s_b} = 3030 \text{ mm}^2$  el cual es un poco mayor que  $A_s = 3000 \text{ mm}^2$ . Entonces esta viga satisface la Sección 10.3.3 del ACI y  $\phi = 0.90$ .

**5.- Revisar si  $A_s \geq A_{s_{\min}}$  (de la ecuación del ACI)**

$$A_{s_{\min}} = 392 \text{ mm}^2 < 491 \text{ mm}^2, \text{ luego se toma :}$$

$$A_{s_{\min}} = 491 \text{ mm}^2$$

Como  $A_s = 3000 \text{ mm}^2$  excede  $A_{s_{\min}}$ , esta bien.

6.- Calcular  $\phi M_n$ :

(a) Viga 1.  $\phi M_{n1} = \phi [A's f_y (d - d')]$

$$= \frac{0.9 [1000 \times 400 (510 - 65)]}{10^6} = 160 \text{ KN-m}$$

(b) viga 2:  $\phi M_{n2} = \phi [(A_s - A's) f_y (d - a/2)]$

$$= \frac{0.9 [(3000 - 1000) 400 (510 - 171/2)]}{10^6} = 306 \text{ KN - m}$$

La capacidad total a momento es:  $\phi M_n = \phi M_{n1} + \phi M_{n2} = 466 \text{ KN -m}$

Entonces, la capacidad a momento de la viga mostrada en la Figura es **466 KN-m.**

### PROBLEMAS.

Con el fin de ejercitarnos en los sistemas de unidades se manejan en el sistema métrico y el Inglés.

**4-1 y 4-2.** Calcular  $\phi M_n$  para las vigas mostradas en Figura P4-1 y P4-2. Usar  $f_c = 260 \text{ kg/cm}^2$  para P4-1 y  $f_c = 210 \text{ kg/cm}^2$  para P4-2 y  $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$

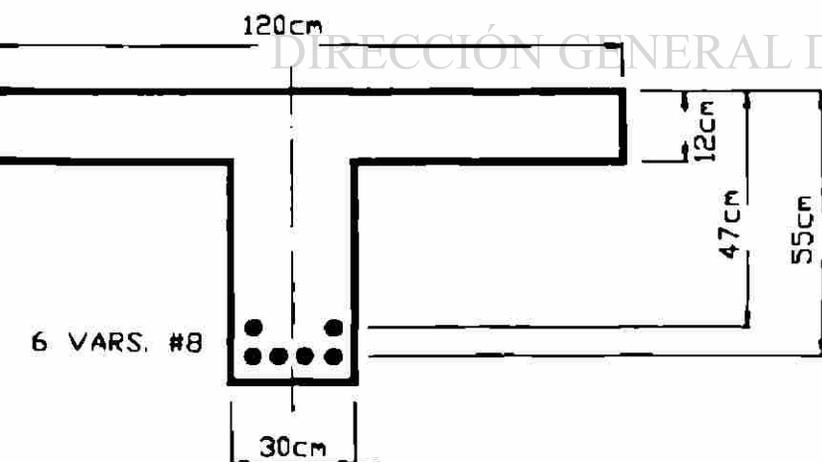


FIGURA P4-1

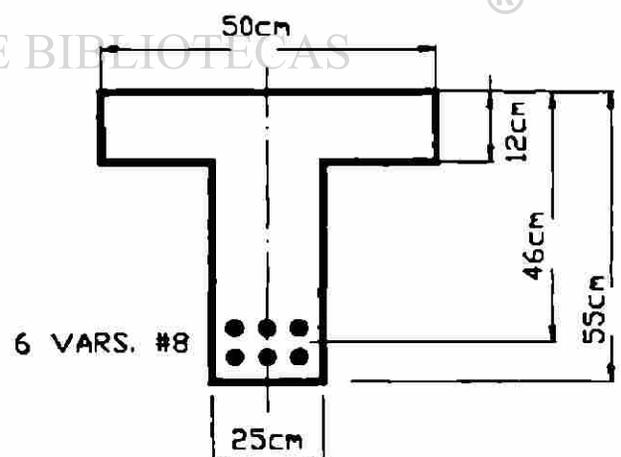


FIGURA P4-2

4-3.- Calcular la capacidad para momento negativo  $\phi M_n$ , para la viga mostrada en la Figura P4-3. Usar  $f_c = 3000$  psi y  $f_y = 40,000$  psi.

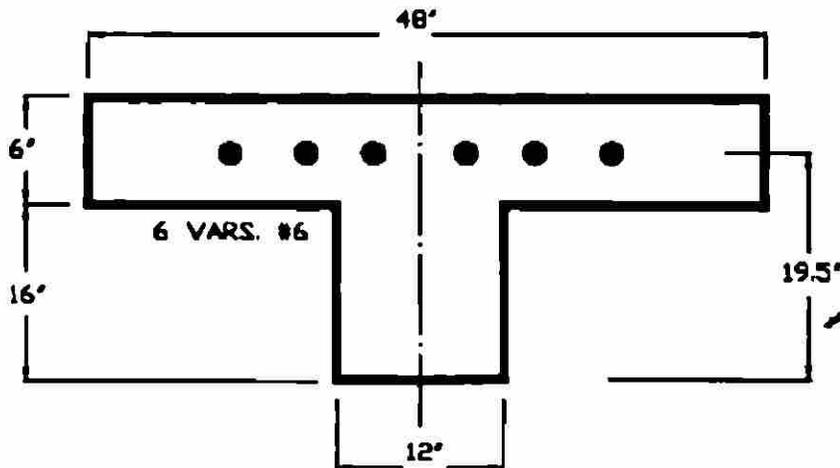


FIGURA P4-3

4-4.- Para la viga mostrada en la Figura P4-4 usar  $f_c = 210$  kg/cm<sup>2</sup>.

- Calcular el ancho efectivo a la mitad del claro.
- Calcular  $\phi M_n$  para momentos positivo y negativo. En los apoyos refuerzo en una cama, en el centro del claro las 3 # 8 están en la 1era. cama y las 2 # 7 en la 2da. cama.

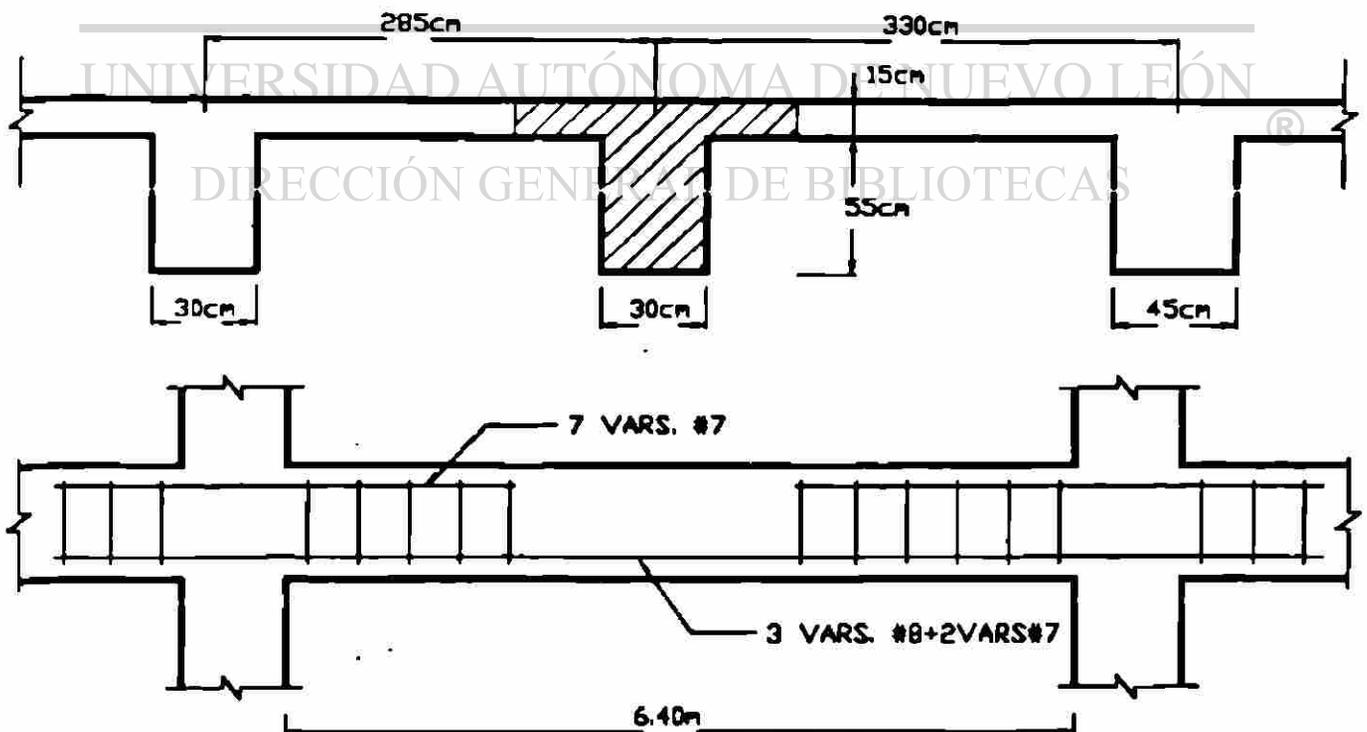


FIGURA P4-4

4 5 - Para la viga mostrada en la Figura P4-5 se dan las cargas de servicio (no - factorizadas). Carga muerta 1.5 KLBS/pie y viva de 3.5 KLBS/pie

- (a) Dibujar envolvente de momentos.
- (b) Seleccionar el refuerzo para las regiones de momento positivo y negativo. Usar  $f'_c=3000 \text{ LBS/pulg}^2$  y  $f_y=60,000 \text{ LBS/pulg}^2$

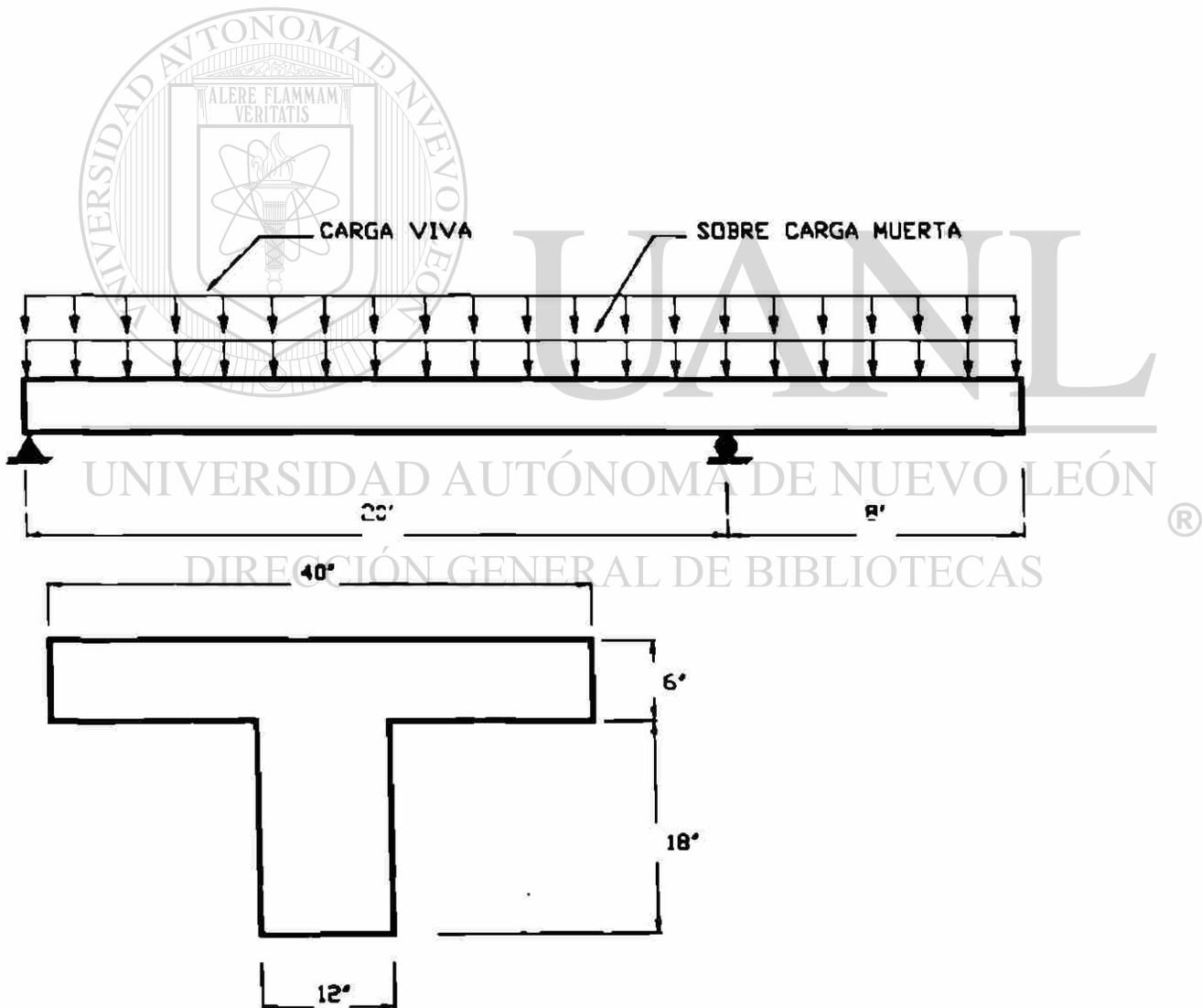


FIGURA P4-5

P4-6 - Calcular  $\phi M_n$  para la viga en la Figura P4-6. Usar  $f'_c=210 \text{ kg/cm}^2$ .

- (a) El refuerzo son 6 Varillas # 8.
- (b) El refuerzo son 9 Varillas # 8.

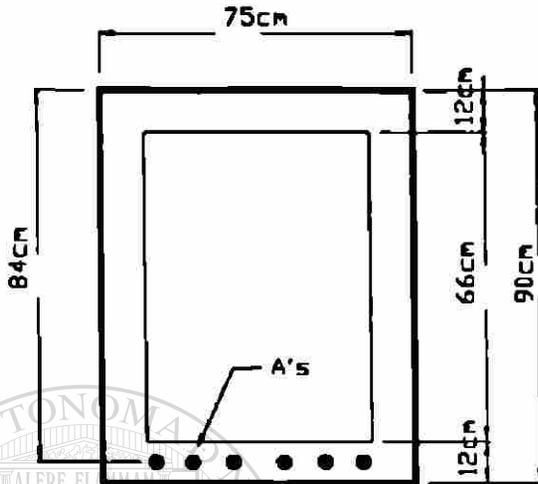


FIGURA P4-6

P4-7.- Calcular  $\phi M_n$  para la viga mostrada en la Figura P4-7. Usar  $f'_c = 4000 \text{ LBS/pg}^2$  y  $f_y = 60,000 \text{ LBS/pulg}^2$ .

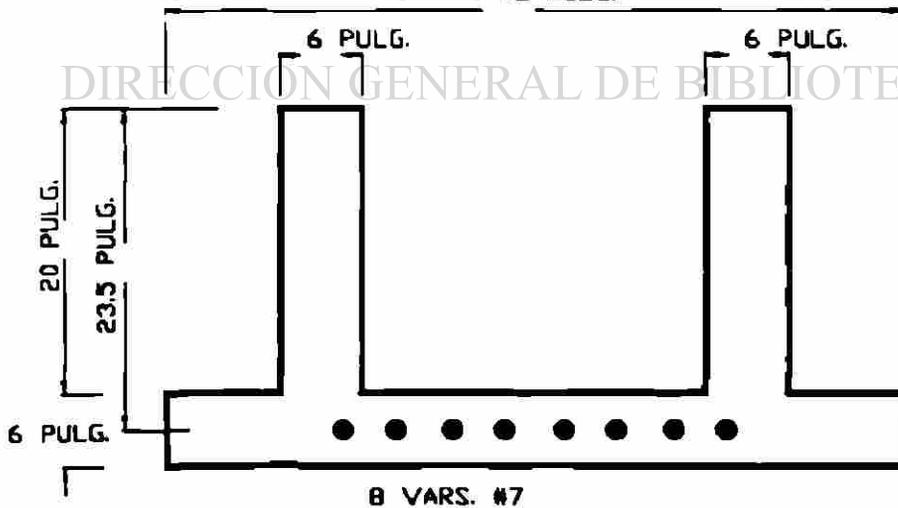


FIGURA P4-7

4-8: Dar tres razones para usar refuerzo de compresión en vigas.

4-9: (a) Calcular  $\phi M_n$  para las tres vigas mostradas en la figura P4-9. En cada caso  $f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$ ,  $f_y = 4,200 \text{ kg/cm}^2$ ,  $b = 30 \text{ cm}$ ,  $h = 90 \text{ cm}$ ,  $d = 81 \text{ cm}$ .

(b) comparar costo y resistencia de las tres secciones.

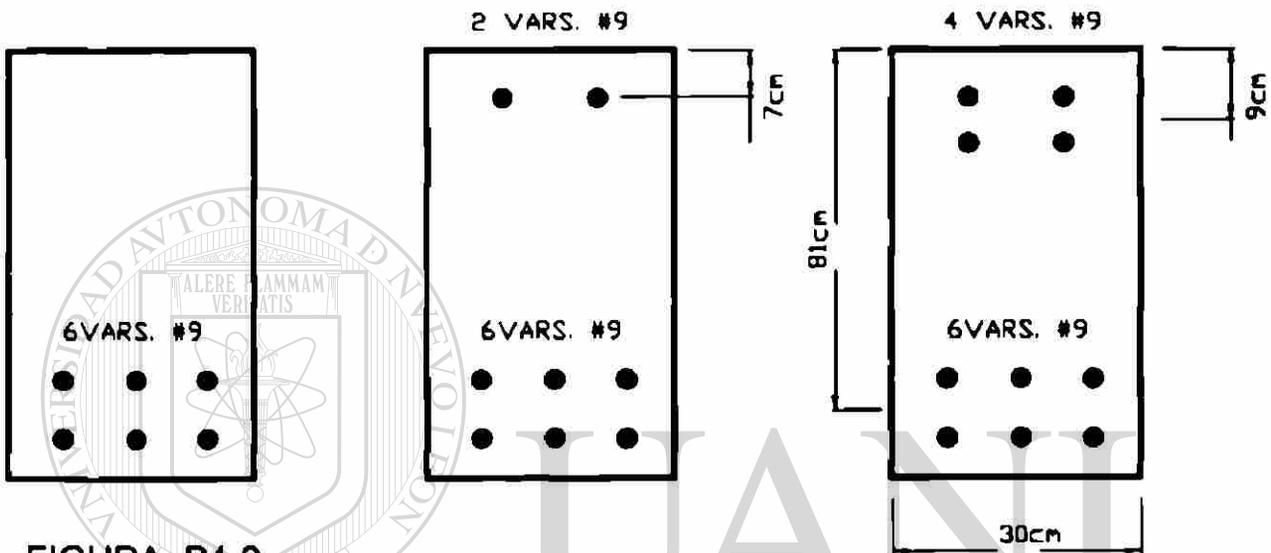
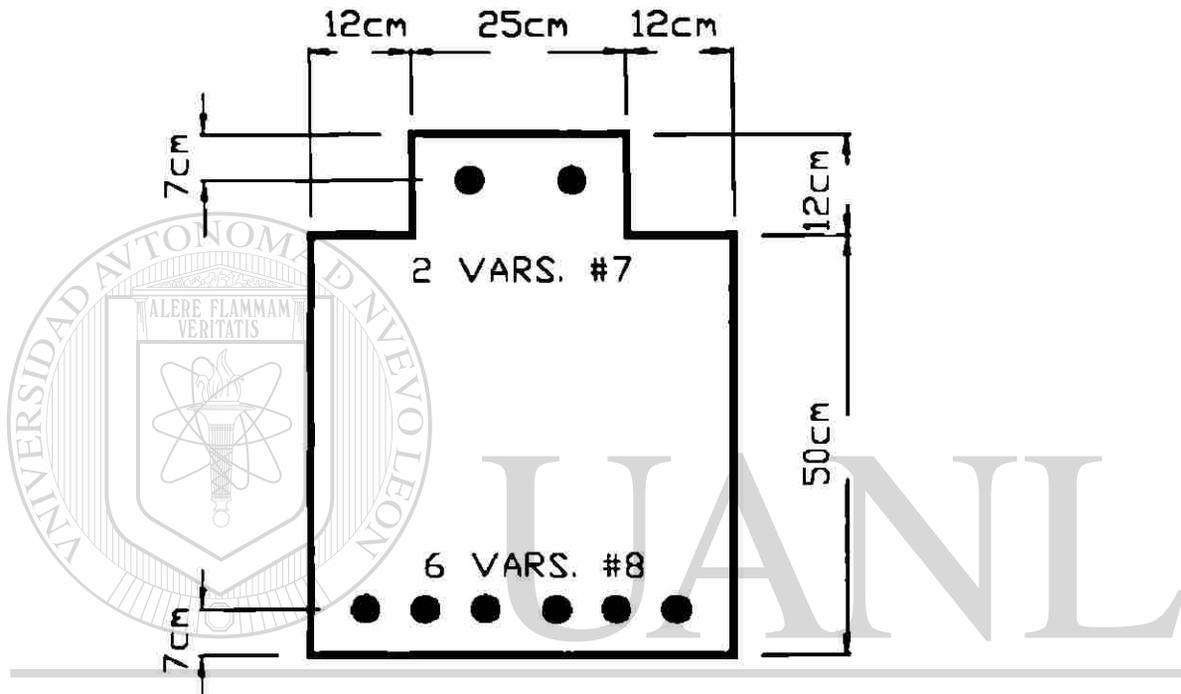


FIGURA P4-9

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

**NOTA :** Se hace la aclaración que estos ejemplos fueron elaborados con fines académicos, esto en virtud de que las varillas #7 y #9 no son comerciales en México.

P4-10. Calcular  $\phi M_n$  para la viga mostrada en la Figura P4-10. Usar  $f_c = 175 \text{ kg/cm}^2$ ,  $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$ . ¿Cuál acero fluye primero en la capacidad última de esta viga?



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
**FIGURA P4-10**  
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

# **CAPÍTULO 5:**

## **CORTANTE EN VIGAS**

**5.1.- Análisis y Diseño en vigas de Concreto Reforzado por Cortante Código ACI.**

**5.2.- Ecuaciones de Diseño para la Resistencia**

**5.3.- Estados límite de Falla por Cortante, Vigas con Refuerzo en el alma.**

**5.4.- Localización del Máximo Cortante para Diseño de Vigas.**

**5.5.- Ejemplo.**

**5.6.- Problemas.**

## 5.1.- ANALISIS Y DISEÑO DE VIGAS DE CONCRETO REFORZADO POR CORTANTE

### CODIGO ACI

En el Código ACI, la ecuación básica de diseño para la capacidad a cortante para vigas es:

$$\phi V_n \geq V_u \quad (\text{ACI Ec. 11-1})$$

Donde  $V_u$  es la fuerza cortante debida a las cargas factorizadas,  $\phi$  es el factor de reducción de resistencia, tomado igual a 0.85 para cortante, y  $V_n$  es la Resistencia nominal a cortante, la resistencia nominal a cortante es:

$$V_n = V_c + V_s \quad (\text{ACI Ec. 11-2})$$

Donde  $V_c$  es el cortante resistido por el concreto y  $V_s$  el cortante resistido por los estribos.

La falla por cortante se dice que ocurre cuando uno de los varios estados límite se alcanza.

Posteriormente se describen estos estados límite y como los maneja el Código ACI.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

## 5.2.- ECUACIONES DE DISEÑO PARA LA RESISTENCIA A CORTE DE MIEMBROS SIN REFUERZO EN EL ALMA.

En 1962 el comité ACI - ASCE en cortante y Tensión Diagonal presentó la siguiente ecuación para calcular la fuerza cortante en una grieta inclinada en vigas sin refuerzo en el alma sujetos a cortante y flexión únicamente.

$$V_c = (0.5\sqrt{f'_c} + 175 \rho_w V_u d / M_u) b_w d \quad (\text{ACI Ec. 11-5})$$

$$\leq 0.93 \sqrt{f'_c} b_w d.$$

La cantidad  $\frac{V_u d}{M_u}$  no se debe tomar mayor que 1.

$M_u$  es momento factorizado que ocurre simultáneamente con  $V_u$  en la sección considerada.

En el sistema inglés de unidades la ecuación anterior es:

$$V_c = (1.9 \sqrt{f'_c} + 2500 \rho_w \frac{V_u d}{M_u}) b_w d$$

Donde para un rango normal de las variables del segundo término entre paréntesis este da 0.1  $\sqrt{f'_c}$  de lo cual resulta:

$$V_c = 2 \sqrt{f'_c} b_w d \quad (\text{sistema inglés}) \quad (\text{ACI Ec. 11-3})$$

$$V_c = 0.53 \sqrt{f'_c} b_w d \quad (\text{sistema métrico})$$

Para miembros cargados axialmente, el Código ACI modifica la ecuación anterior como sigue:

Compresión Axial (ACI Sección 11.3.1.2):

$$V_c = 0.55 \left( \frac{N_u}{2000 A_g} + 1 \right) \sqrt{f'_c} b_w d \quad \text{donde}$$

$N_u/A_g$  está en  $\text{kg/cm}^2$

Tensión axial (ACI Sección 11.3.2.3)

$$V_c = 0.55 \left( \frac{N_u}{35 A_g} + 1 \right) \sqrt{f'_c} b_w d \quad (\text{ACI Ec. 11.8})$$

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

### 5.3.- ESTADOS LIMITE DE FALLA POR CORTANTE VIGAS CON REFUERZO EN EL ALMA

#### 1.- Falla debida a fluencia de los estribos:

En la figura 5-1 el cortante se transfiere a través de la superficie, A - B - C, por cortante en la zona de compresión,  $V_{cz}$ , la componente vertical de contribución del agregado,  $V_{ay}$ , la acción de clavija,  $V_d$ , y estribos,  $V_s$ . En el Código ACI  $V_{cz}$ ,  $V_{ay}$  y  $V_d$  son conjuntados como  $V_c$ , el cual es referido como "cortante transmitido por el concreto".

Entonces la resistencia nominal a cortante,  $V_n$ , se asume que es:

$$V_n = V_c + V_s \quad (\text{ACI Ec. 11-2})$$

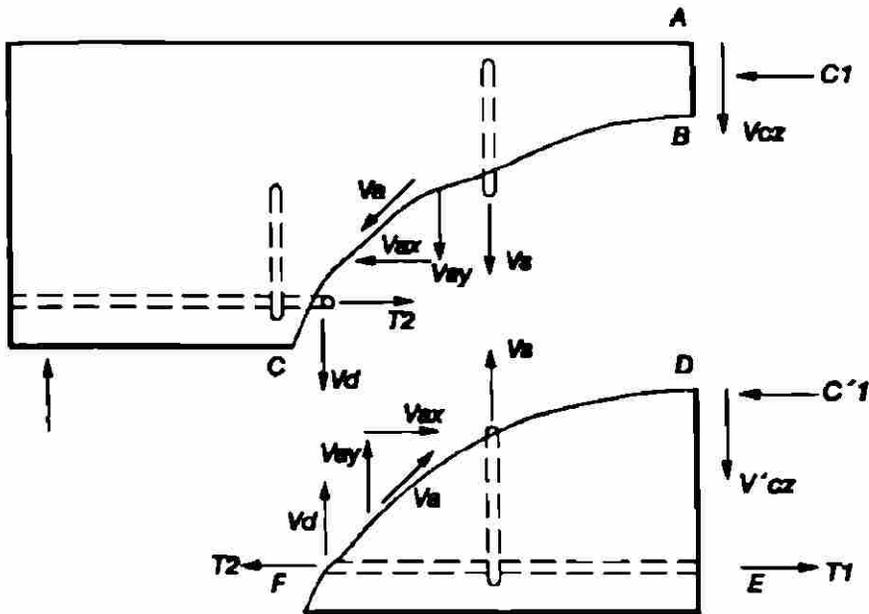
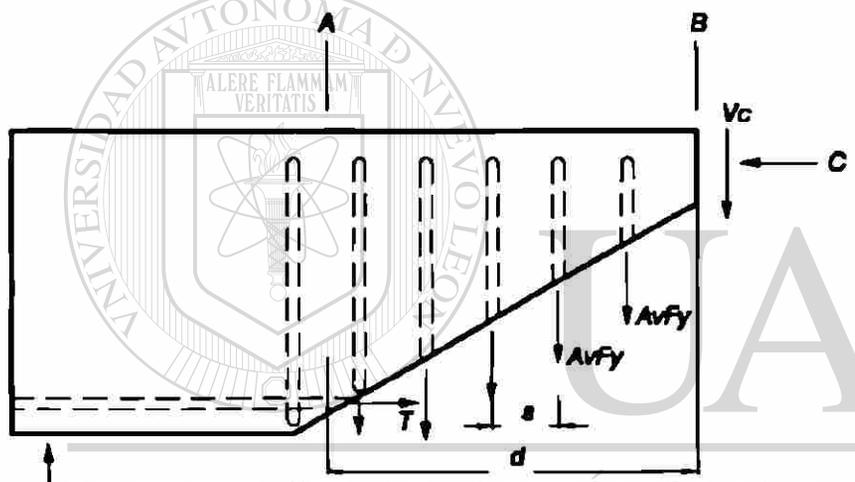
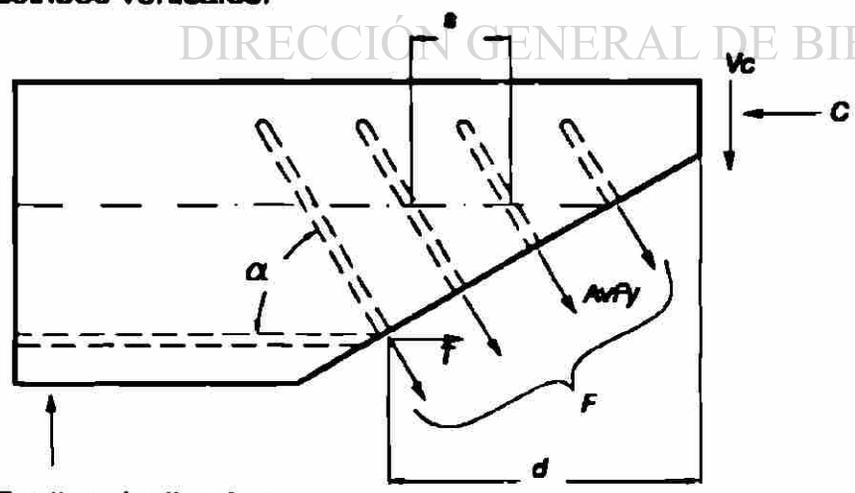


FIGURA 5-1  
FUERZAS INTERNAS EN UNA SECCION AGRIETADA CON ESTRIBOS.



(a) Estribos verticales.



(b) Estribos inclinados.

FIGURA 5-2  
CORTANTE RESISTIDO POR LOS ESTRIBOS.

Se hace énfasis que tomando  $V_c$  igual en una grieta inclinada es una observación "empírica" de pruebas, si se considera que la proyección horizontal de la grieta inclinada es  $d$ , como se muestra en la Figura 5-2.

La Figura 5-2 muestra el cuerpo libre entre la grieta en una viga y su extremo. La proyección horizontal de la grieta es tomado como  $d$ , si se supone que esta grieta esta inclinada aprox.  $45^\circ$ .

Si "s" es la separación de los estribos, el número de estribos cortados por una grieta es  $d/s$ .

Considerando que fluyen en la falla, el cortante resistido por los estribos es:

$$V_s = \frac{A_v f_y d}{s} \quad (\text{ACI Ec. 11-5})$$

Si los estribos están inclinados un ángulo  $\alpha$ , con la horizontal, como se muestra en la Figura 5-2b el número de estribos cruzados por una grieta es aproximadamente  $d(1+\cot\alpha)/s$  donde "s" es el espaciamiento horizontal de los estribos.

La fuerza inclinada,  $F$ , es:

$$F = A_v f_y [d (1 + \cot\alpha)]/s$$

El cortante resistido por los estribos,  $V_s$ , es la componente vertical de  $F$ , la cual es  $F \sin\alpha$ , esto es:

$$V_s = \frac{A_v f_y (\sin\alpha + \cos\alpha) d}{s}$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

Si  $V_u$  excede  $\phi V_c$ , es necesario proveer estribos tales que  $V_u \leq \phi V_n$  (ACI Ec. 11-1) DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

De tal manera que para diseño:

$$\phi V_n = \phi(V_c + V_s) \geq V_u \text{ de donde:}$$

$$V_s \geq \frac{V_u - V_c}{\phi} \text{; igualando}$$

$$V_s = \frac{A_v f_y d}{s} = \frac{V_u - V_c}{\phi} \quad \text{da :}$$

$$s = \frac{A_v f_y d}{\phi (V_u - V_c)}$$

Esta ecuación es aplicable para estribos verticales.

Para garantizar que los estribos están cruzados por una grieta inclinada el ACI en la Sección 11.5.4.1 establece que el espaciamiento máximo de estribos verticales sea  $d/2$  ó 60 cm (24 pulg) como se muestra en la Figura 5-3.

Si  $(V_u / \phi) - V_c = V_s$  excede  $1.1 \sqrt{f'_c} b_w d$  (sistema métrico)

El máximo espaciamiento permisible se reduce a la mitad es decir  $d/4$  ó 30 cm. (12 pulg).

## **2.- Falla por cortante iniciada por falla del anclaje de los estribos.**

La ecuación  $V_s = (A_v f_y d) / s$  está basada en que el acero de los estribos llega a la fluencia. Esto realmente ocurrirá si los estribos están bien anclados. Generalmente la parte superior de la grieta inclinada ocurre en la cara de compresión de la viga como se muestra en la Figura 5-4. El esfuerzo de fluencia en el estribo se presenta donde la grieta intercepta al estribo. Por esta razón el ACI Sección 12.13.1 requiere de recubrimiento, espaciamiento y ganchos de anclaje de los estribos.

El requisito de la sección 12.13.5 del ACI se muestra en la figura 5-5(c)

Los requisitos de la Secciones 7.11 y 11.6.4.1 se muestran en la Figura 5-5 (d)

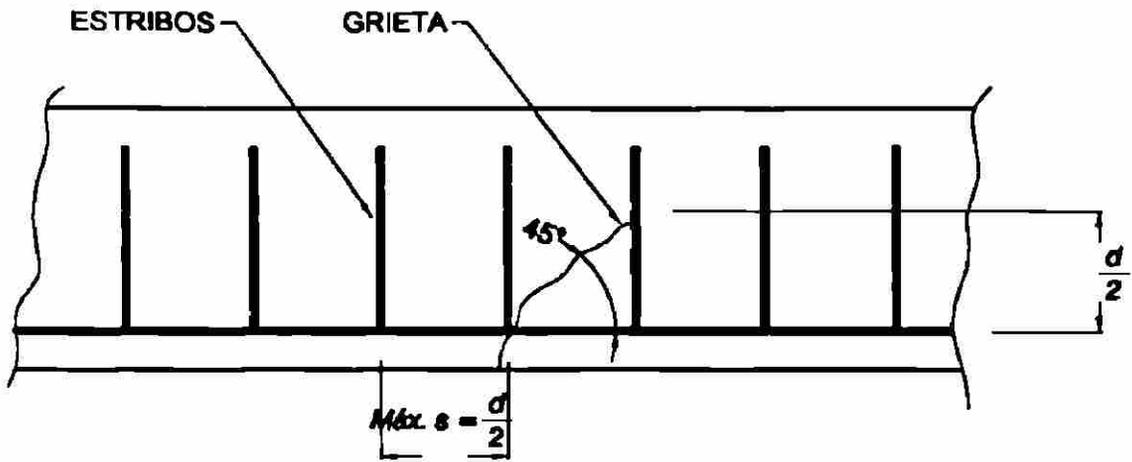
El refuerzo de compresión en vigas y trabes debe estar confinado para evitar el pandeo.

Finalmente, el usar estribos Grado 40 ( $f_y = 2800 \text{ kg/cm}^2$ ) trae la ventaja de que reduce su espaciamiento el cual ayuda a prevenir el ancho excesivo de la grieta.

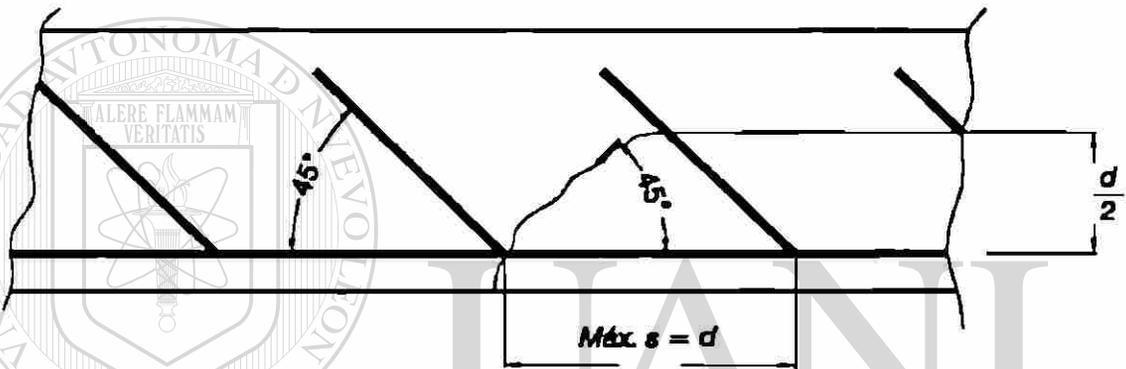
## **3.- Falla debida al ancho excesivo de la grieta por cargas de servicio.**

Cuando las grietas inclinadas en las vigas son significantes y permiten que penetre el agua en la viga, posiblemente cause la corrosión de los estribos. En pruebas en tres vigas similares, el ancho de la grieta bajo cargas de servicio fue de 150% mayor en vigas de varillas dobladas sin estribos que en una viga con estribos verticales.

El Código ACI requiere de anclaje en estribos tal como se muestra en la figura 5-5.



(a) Estribos verticales.



(b) Estribos inclinados.

FIGURA 5-3 MAXIMO ESPACIMIENTO DE ESTRIBOS.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

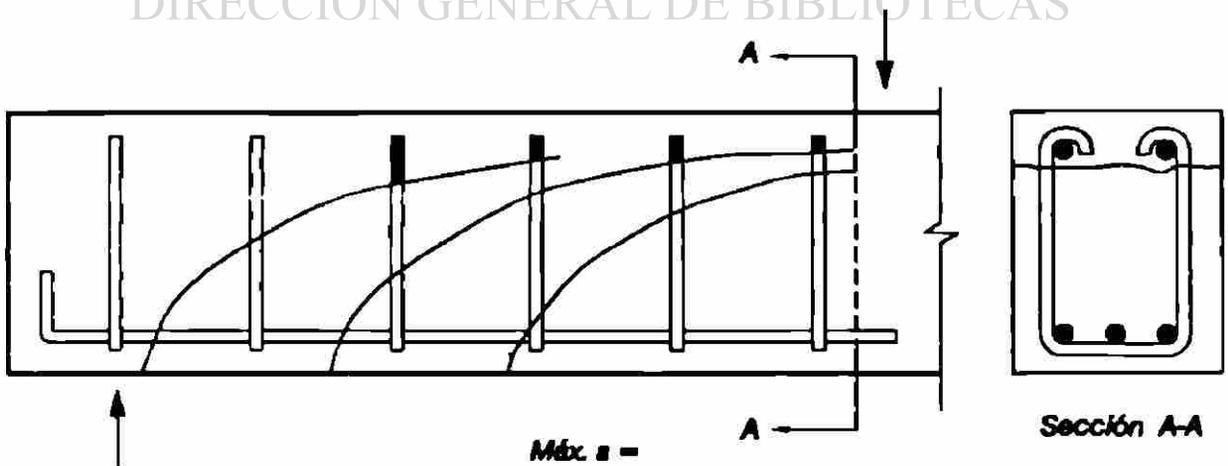
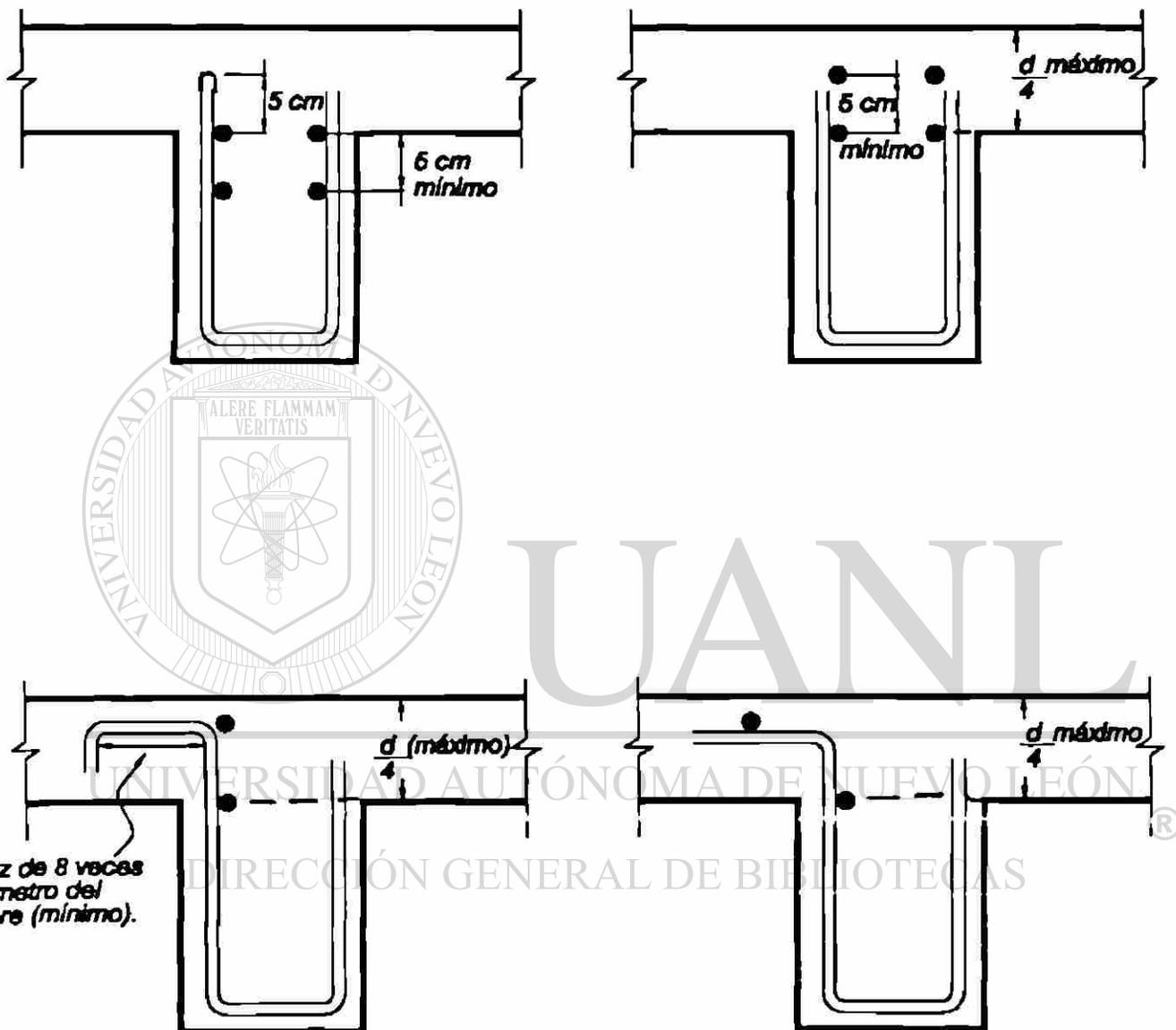
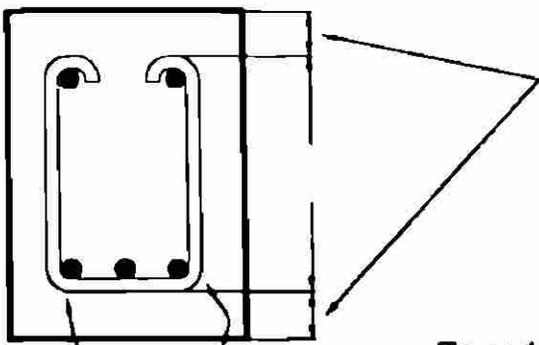


FIGURA 5-4 ANCLAJE DE ESTRIBOS.



## REQUISITOS DE ANCLAJE DE ESTRIBOS.

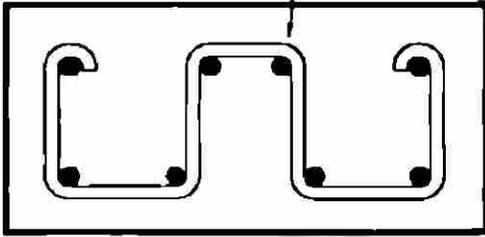
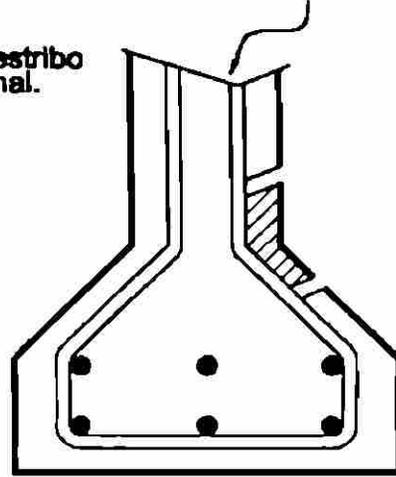


Estribos cerrados en las caras de tensión y compresión con recubrimiento y espacio permitido.

No permitido

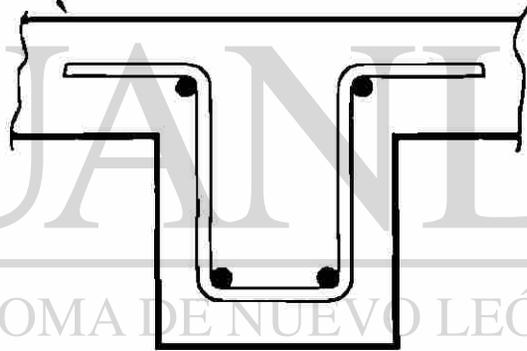
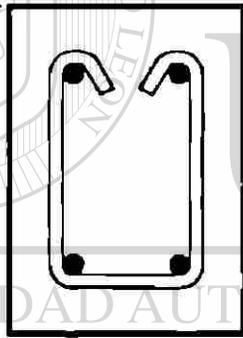
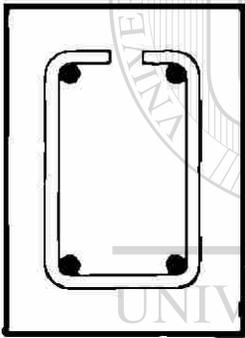
Como el estribo esta en tensión produce grietas en recubrimiento.

En cada dobléz de estribo una varilla longitudinal.

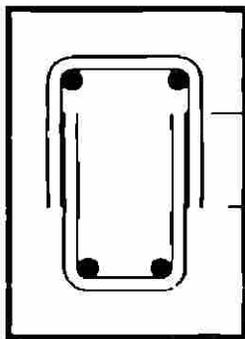


(a) Requisitos generales.

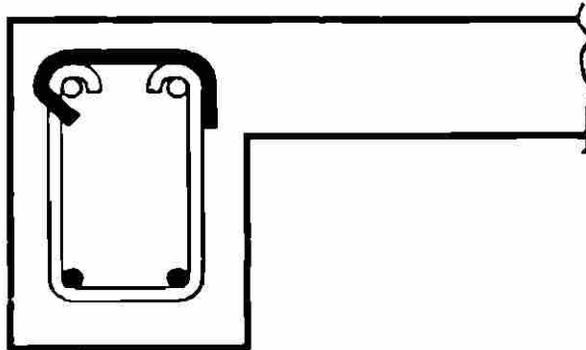
Ganchos std de estribo ACI Sec. 7.1.3, varilla encerrada por un estribo ACI Sec.12.13.2.1



(b) Requisitos de anclaje de estribos para varillas #5 y menores como lo permiten las Secs. 7.13 y 12.13.2.1 del ACI.



No menor que  $1.3 l_d$



(c) Anclaje de estribo como lo permite la Sec. 12.13.5 del ACI.

(d) Dos piezas de estribo cerrado.  
- Vigas con torsión o compresión.  
ACI Secs. 7.11 y 11.6.4.1.

FIGURA 5-5  
REQUISITOS PARA DETALLADO DE ESTIBOS.

(a) La sección 12.13.3 del ACI requiere que cada doblez de estribo encierre a una varilla longitudinal como se muestra en la Figura 5-5a.

(b) La Sección 12.13.2.1 del ACI requiere que varillas #5 y alambre D31 y menores con  $f_y = 2800 \text{ kg/cm}^2$  se les permite usar un gancho estándar alrededor del acero de refuerzo longitudinal. Los ganchos pueden ser a  $90^\circ$ ,  $135^\circ$  ó  $180^\circ$  como se muestra en la Figura 5-5b.

(c) Para varillas # 6, 7 y 8 con estribos con  $f_y$  de  $2800 \text{ Kg/cm}^2$  el ACI en la Sección 12.13.2.1 permite detallar como se muestra en la Figura 5-5b, es decir, un gancho estándar alrededor del refuerzo longitudinal.

(d) Para estribos con varillas #6, 7 y 8 con  $f_y$  mayor de  $2800 \text{ kg/cm}^2$  el ACI en la Sección 12.13.2.2 permite usar un gancho de estribo estándar alrededor de una varilla longitudinal, más un anclaje entre el punto medio de la altura del elemento y el extremo exterior del gancho igual o mayor a  $0.053 d_b f_y / \sqrt{f_c}$ .

(e) Los requisitos para el anclaje de estribos de malla de alambre liso soldados se muestran en la figura de la página 134.

Para la máxima carga de servicio el ancho de la grieta en una viga con estribos inclinados es solamente el 80% que en una viga con estribos verticales.

Además, los anchos de las grietas son menores usando estribos de menor diámetro poco espaciados que con estribos de mayor diámetro muy espaciados.

#### **4.- Falla por cortante debida al agrietamiento del alma.**

Esto sucede en vigas de alma delgada debido a la compresión diagonal en el alma de la viga. Los esfuerzos de compresión diagonal se relacionan con el esfuerzo cortante, " $V$ ", varios códigos mencionan que el esfuerzo cortante último es de 0.2 a 0.25 veces la resistencia a la compresión del concreto.

El Código ACI limita el  $V_s$  para control de agrietamiento a  $V_{s(\max)} = 2.1 \sqrt{f_c} b_w d$  para garantizar la seguridad adecuada y no se agriete el alma en vigas de concreto reforzado.

## **5.- Falla por cortante iniciada por falla en la cuerda de tensión.**

La fuerza de tensión en el refuerzo longitudinal puede provocar agrietamiento y como las cargas vivas varían de posición esto provoca que se mueva el punto de inflexión del diagrama de momentos el cual va acompañado de cortante. Parcialmente por esta razón el ACI en la Sección 12.10.3 requiere que el refuerzo de flexión se extienda "d" ó 12 diámetros de varilla después del punto de donde se requieren (excepto en apoyos de vigas simples o extremos de voladizos).

### **REFUERZO MINIMO DEL ALMA**

Debido a que la falla por cortante en una viga sin refuerzo en el alma es súbita y porque las cargas de falla por cortante varían con respecto a los valores dados por las ecuaciones de diseño, el ACI Sección 11.5.5.1 requiere de una cantidad mínima de refuerzo por cortante cuando la fuerza cortante aplicada  $V_u$  excede un medio del cortante resistido por el concreto  $\phi (0.5V_c)$ , excepto en:

- 1.- Losas y zapatas.
- 2.- Juntas de construcción de concreto.
- 3.- Vigas con un peralte total no mayor de 25 cm (10 pulg), 2 ½ veces el espesor del patín ó ½ del ancho del alma el que sea mayor.

Las excepciones en cada caso representan un tipo de miembro en el cual la redistribución de la carga puede ocurrir en el ancho del miembro, o en el caso de pisos con joist, en los miembros adyacentes.

El ACI en la Sección 7.13.2.2. requiere que las vigas en el perímetro de la estructura deberán tener por lo menos un sexto del acero de refuerzo de tensión requerido para momento negativo en el apoyo, y un cuarto del acero de refuerzo requerido por momento positivo a la mitad del claro, continuo alrededor del perímetro y amarrado a estribos cerrados, o con estribos anclados alrededor del refuerzo de momento negativo con un gancho que tenga un doblez de por lo menos 135° esto es para evitar el colapso que se produciría si fallan las vigas exteriores por la extensión de la falla de las vigas interiores ; donde se requiera, el refuerzo mínimo en el alma será como mínimo (ACI Sección 11.5.5.3).

$$A_{v(\min)} = (50 b_w s) / f_y$$

(Unidades sistema inglés)

$$A_{v(\min)} = (3.5 b_w s) / f_y$$

(Unidades sistema métrico)

Esto equivale a proporcionar refuerzo para transmitir un esfuerzo cortante de  $3.5 \text{ kg/cm}^2$ .

Para vigas con  $f_c$  mayor que  $700 \text{ Kg/cm}^2$ , se pueden usar valores de  $\sqrt{f_c}$  mayores que  $26.5 \text{ kg/cm}^2$  con un refuerzo mínimo en el alma dado por la ecuación ;(ACI Secc. 11.1.2.1) :

$$A_{v(\min)} = \frac{f_c}{350} (3.5 \frac{b_w s}{f_y}) \leq \frac{10.5 b_w s}{f_y}$$

## **FACTOR DE REDUCCION DE RESISTENCIA POR CORTANTE**

El factor de reducción de resistencia por torsión y cortante es 0.85 (ACI Sección 9.3.2.3.). Este es más bajo que para flexión porque las cargas de falla de cortante son más variables que las cargas de falla de flexión. Factores especiales de reducción de resistencia son requeridos por cortante en algunos miembros sujetos a cargas sísmicas (ACI Sección 9.3.4.).

### **5.4.- LOCALIZACION DEL MAXIMO CORTANTE PARA EL DISEÑO DE VIGAS.**

En una viga apoyada como se muestra en la Figura 5-6a las grietas inclinadas se inician cerca de los apoyos y se extienden hacia arriba aproximadamente a  $45^\circ$ , por lo que las cargas que actúan hasta una distancia "d" del apoyo serán transmitidas a el directamente. Por esta razón el ACI en la Sección 11.1.3.1 establece que:

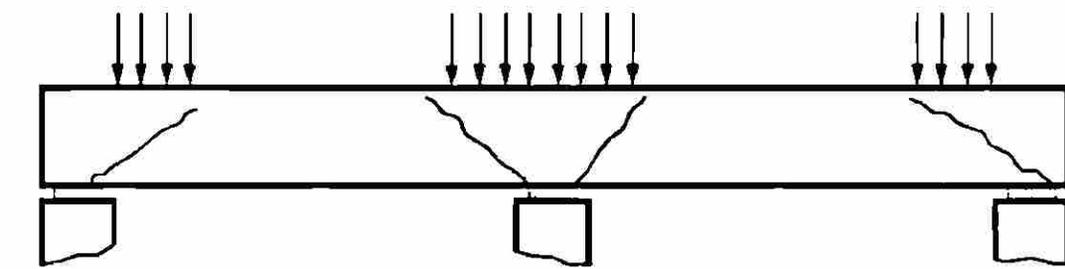
Para miembros no-presforzados en secciones localizadas a una distancia menor que "d" de la cara del apoyo pueden ser diseñadas para el mismo cortante,  $V_u$ , calculado a la distancia "d".

Esto se permite solamente cuando:

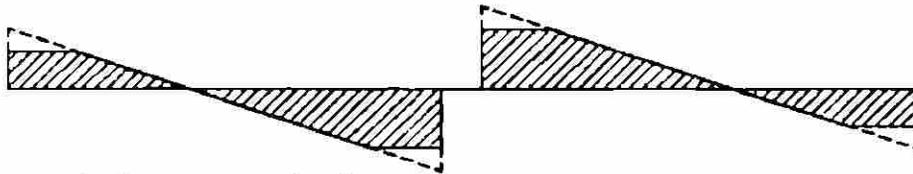
- 1.- La reacción en el apoyo, en la dirección del cortante aplicado, introduce compresión en las secciones extremas del miembro.
- 2.- No se presentan cargas concentradas en una zona a una distancia "d" de la cara del apoyo.

Entonces para la viga mostrada en la Figura 5-6a, los valores de  $V_u$ , usados en el diseño se muestran por el área achurada del diagrama de fuerzas cortantes de la Figura 5-6b.

En la Figura 5-7 se muestran algunos casos típicos para usarse en diseño al considerar la ubicación de la sección crítica.

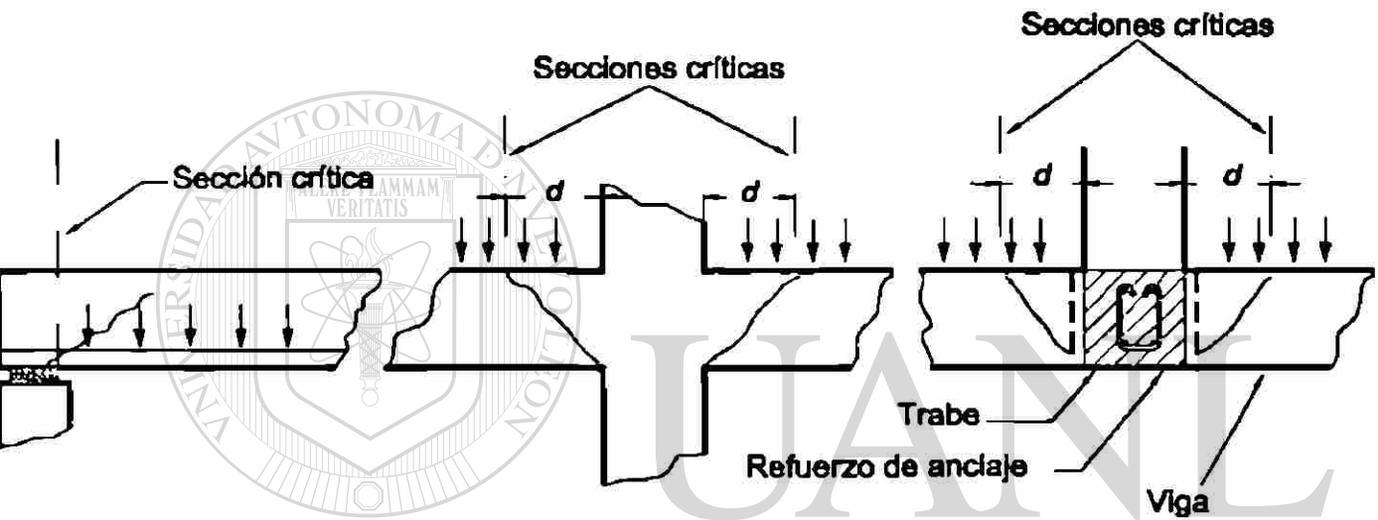


(a) Viga.



(b) Diagrama de fuerzas cortantes.

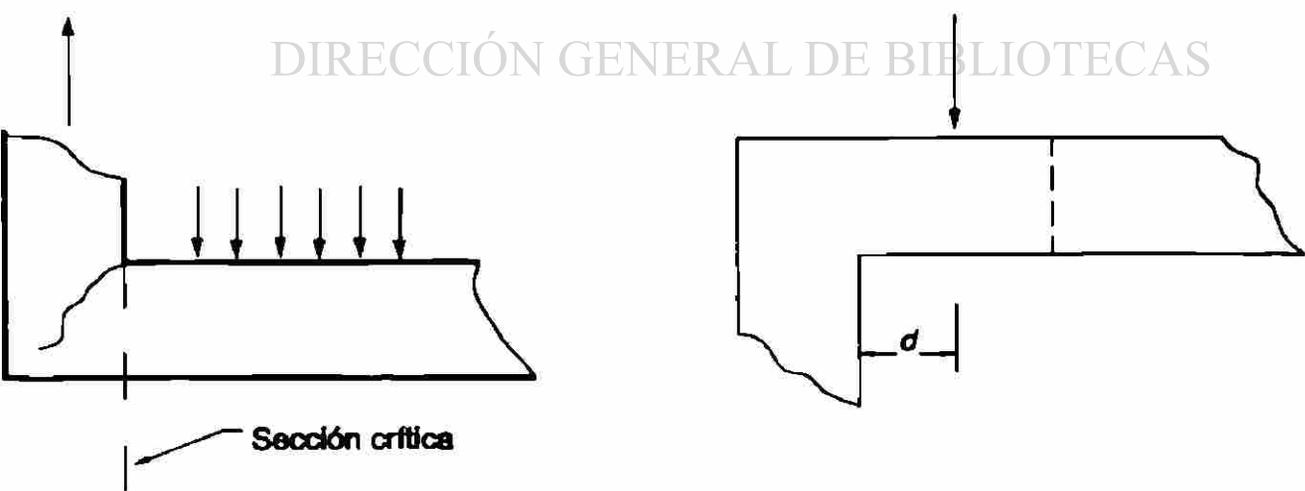
FIGURA 5-6  
DIAGRAMA DE FUERZAS CORTANTES EN UNA VIGA CONTINUA.



(a) Viga cargada en el patín de tensión.

(b) Viga columna.

(c) Trabe apoyada en trabe de cortante.



(d) Viga apoyada en elemento a tensión.

(e) Viga con carga concentrada cerca del apoyo.

FIGURA 5-7  
APLICACION DE LA SECCION 11.1.3 DEL ACI.

En un edificio normal las cargas muertas y vivas se consideran uniformes. La carga muerta está siempre presente en todo el claro, pero la carga viva puede actuar en una parte del claro únicamente, como se muestra en la Figura 5-8d esto produce un cortante a la mitad del claro de manera que al actuar la carga viva, en todo el claro se tienen dos combinaciones de carga por lo que para el diseño se tiene que dibujar la envolvente de cortantes (Figura 5-8e).

El cortante en la mitad del claro debido a una carga viva uniforme es:

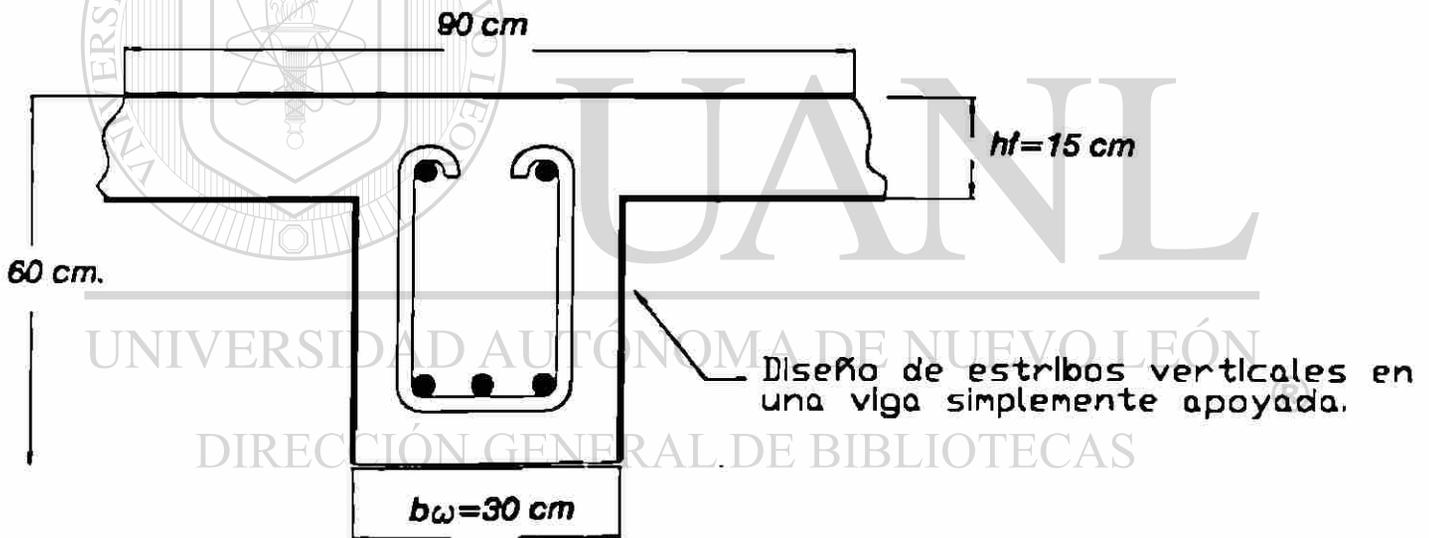
$$V_u = \frac{wl\ell}{8}$$

Este puede ser negativo o positivo.

### 5.5.- EJEMPLOS DE DISEÑO DE UNA VIGA POR CORTANTE.

**EJEMPLO 5-1** Diseño de estribos verticales en una viga simplemente apoyada.

DATOS:



(b) Sección transversal.

EJEMPLO DE: FIGURA 5-8 (b).

**DISEÑO DE UNA VIGA POR CORTANTE.**

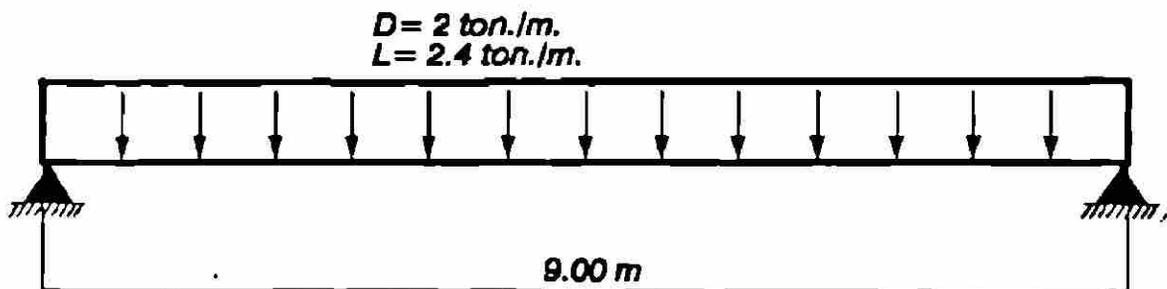


FIGURA 5-8 (a) DE VIGA DADA.

Diseñar los estribos verticales de la viga  $f'c=280 \text{ kg/cm}^2$  (estribos).

Considerar que se satisface diseño por flexión y su anclaje.

**1.- Diagrama de fuerzas cortantes.**

Carga total factorizada:

$$\omega\mu = 1.4 \times 2 + 1.7 \times 2.4 = 6.88 \text{ ton/m.}$$

$$\omega\mu_M = 1.4 \times 2 = 2.80 \text{ ton/m.}$$

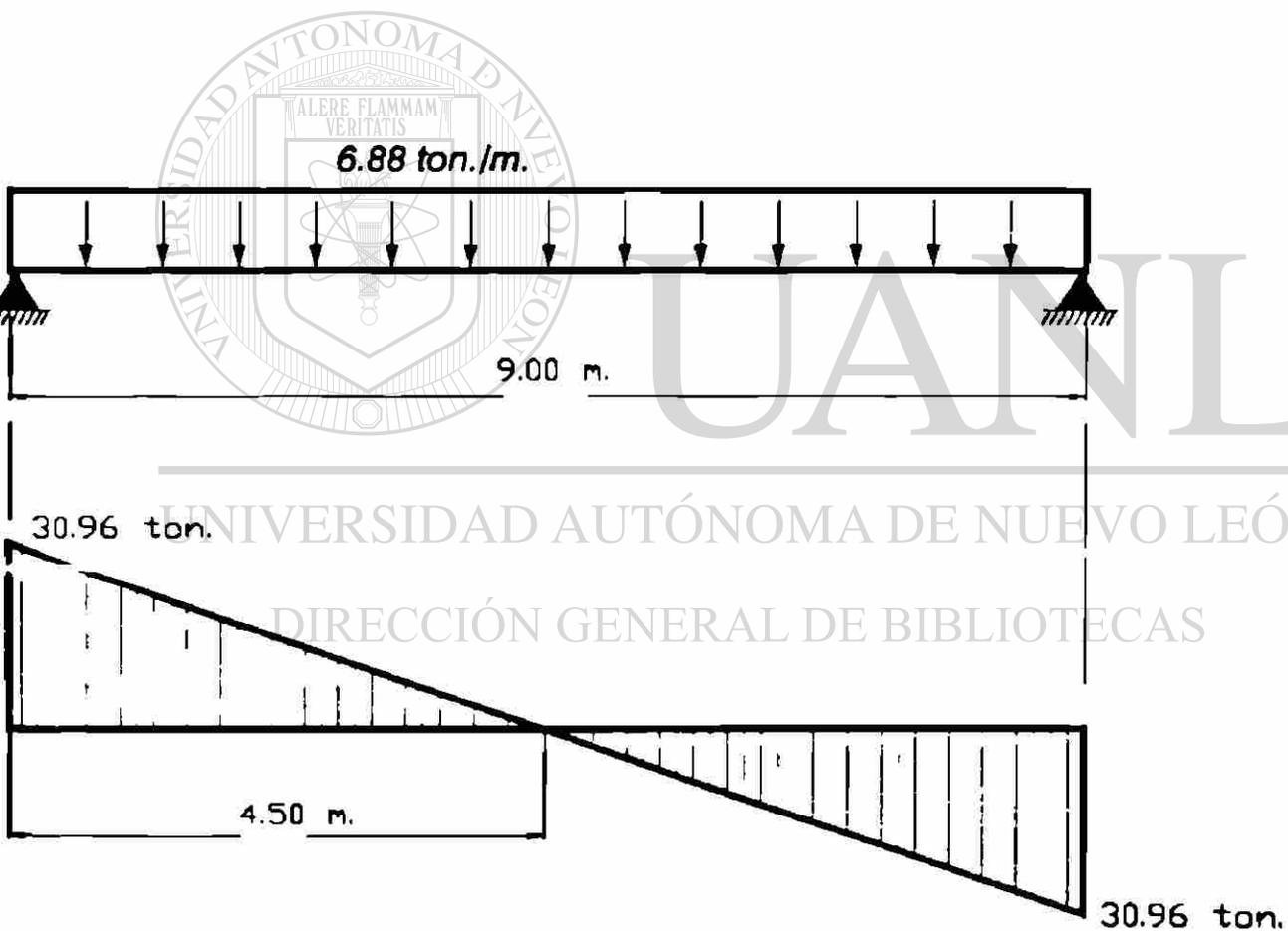


FIGURA 5-8 (c).  
DIAGRAMA DE FUERZAS CORTANTES; (Caso 1).

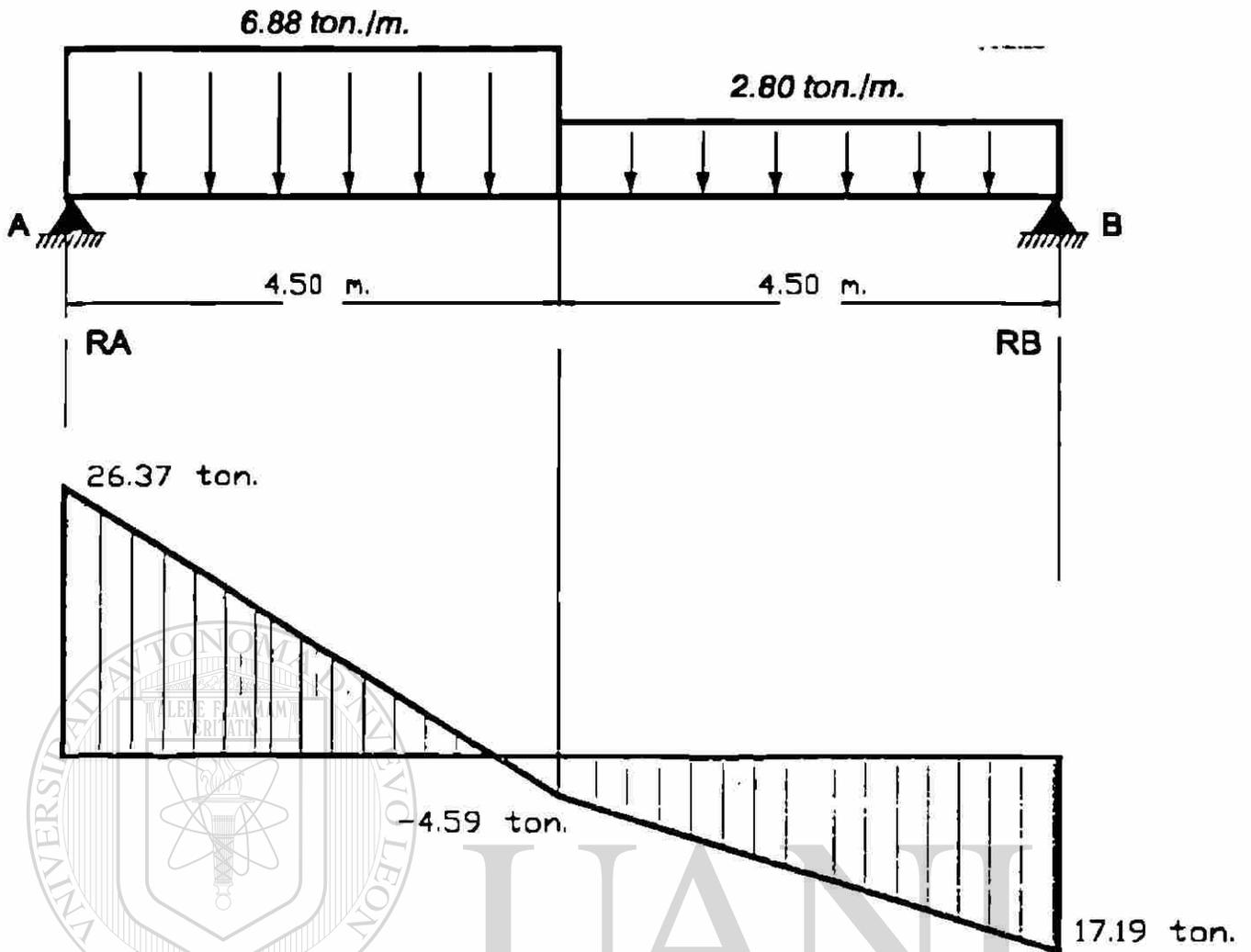


FIGURA 5-8 (d).  
**DIAGRAMA DE FUERZAS CORTANTES; (Carga caso 2).**

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
 DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$\Sigma M_B = R_A \times 9 - 6.88 \times 4.5 \times 6.75 - 2.8 \times 4.5 \times 2.25 = 0$$

$$R_A = \frac{208.98 + 28.35}{9}$$

$R_A = 26.37 \text{ Ton}$

$$R_B = 6.88 \times 4.5 + 2.8 \times 4.5 - 26.37$$

$R_B = 17.19 \text{ ton}$

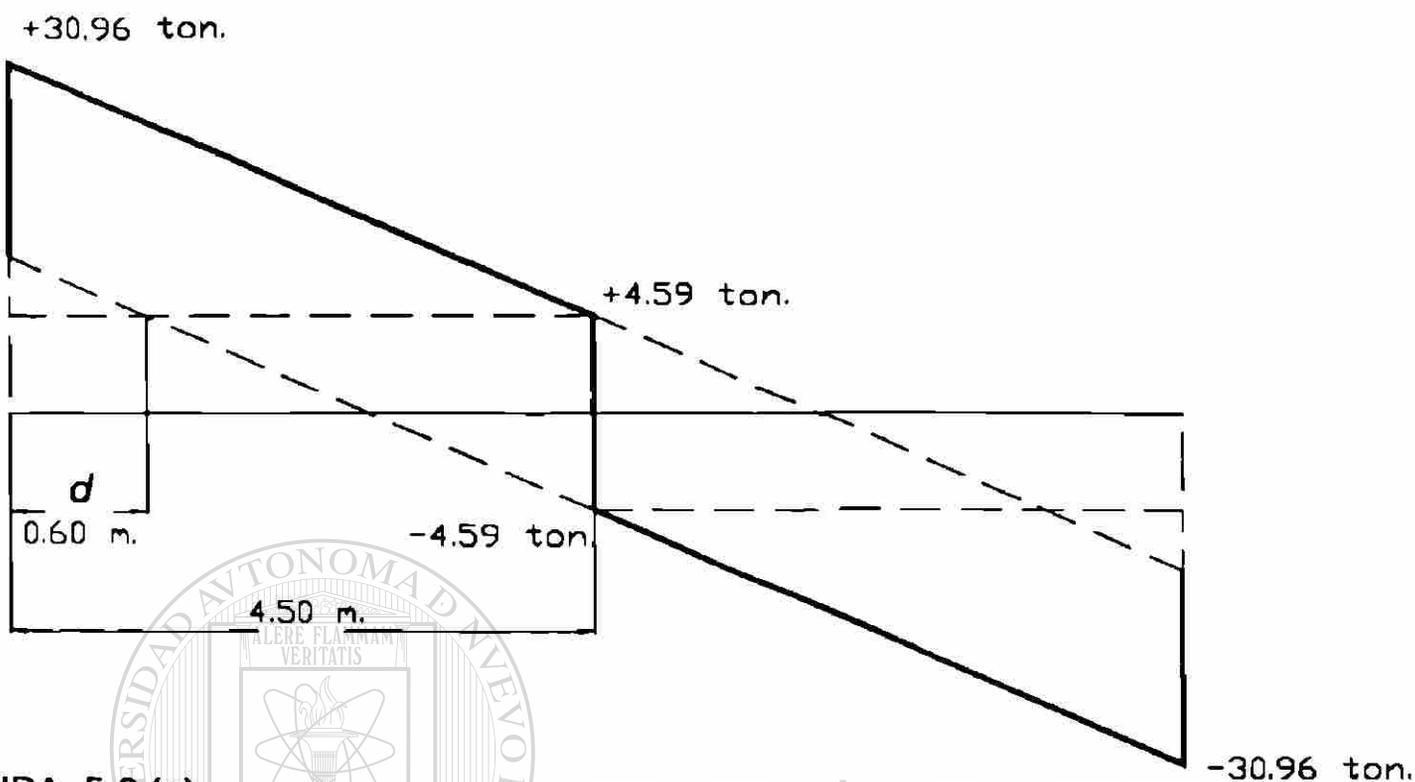


FIGURA 5-8 (e).  
ENVOLVENTE DE CORTANTES.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

Cortante a una distancia "d", en la sección crítica.

®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$\frac{(V_{\mu})_d - 4.59}{3.9} = \frac{30.96 - 4.59}{4.5}$$

$$(V_{\mu})_d = \frac{3.9}{4.5} (26.37) + 4.59$$

$$(V_{\mu})_d = 27.44 \text{ ton}$$

## 2.- Cálculo de los estribos:

Proponiendo estribos #3 se calculará la separación para resistir el cortante máximo,  $(V_u)_d$ :

$$S = \frac{A_v f_d}{\phi (V_u - V_c)} \quad \text{donde:} \quad A_v = 0.71 \times 2 = 1.42 \text{ cm}^2$$
$$V_c = 0.53 \sqrt{f_c} b_w d$$
$$= 0.53 \sqrt{280} \times 30 \times 60$$
$$= 15,963 \text{ Kgs.}$$

$$V_s = \frac{(V_u)_d}{\phi} - V_c = \frac{27,440}{0.85} - 15,963 = 16,319 \text{ kgs.}$$

$$S = \frac{1.42 \times 2800 \times 60}{16,319} = 14 \text{ cm.}$$

## 3.- Revisar anclaje de estribos.

Como el diámetro del estribo es menor del #6 el ACI Sección 12.13.2.1 establece que los estribos pueden ser anclados por un gancho a 90° alrededor de la varilla.

## 4.- Determinar espaciamiento máximo.

Basado en el peralte de la viga: El ACI Sección 11.5.4.1 establece que el máximo espaciamiento es el menor de  $0.5d=30 \text{ cm}$  ó  $60 \text{ cm}$ . El ACI Sección 11.5.4.3 requiere  $\frac{1}{2}$  de estos espaciamientos si  $V_s$  excede  $1.1 \sqrt{f_c} b_w d = 1.1 \sqrt{280} \times 30 \times 60 = 33,132 \text{ Kgs}$ .

$$V_s = 16,319 \text{ Kgs}$$

$$S_{\max} = 30 \text{ cm}$$

Basado en  $A_{v(\min)}$ :

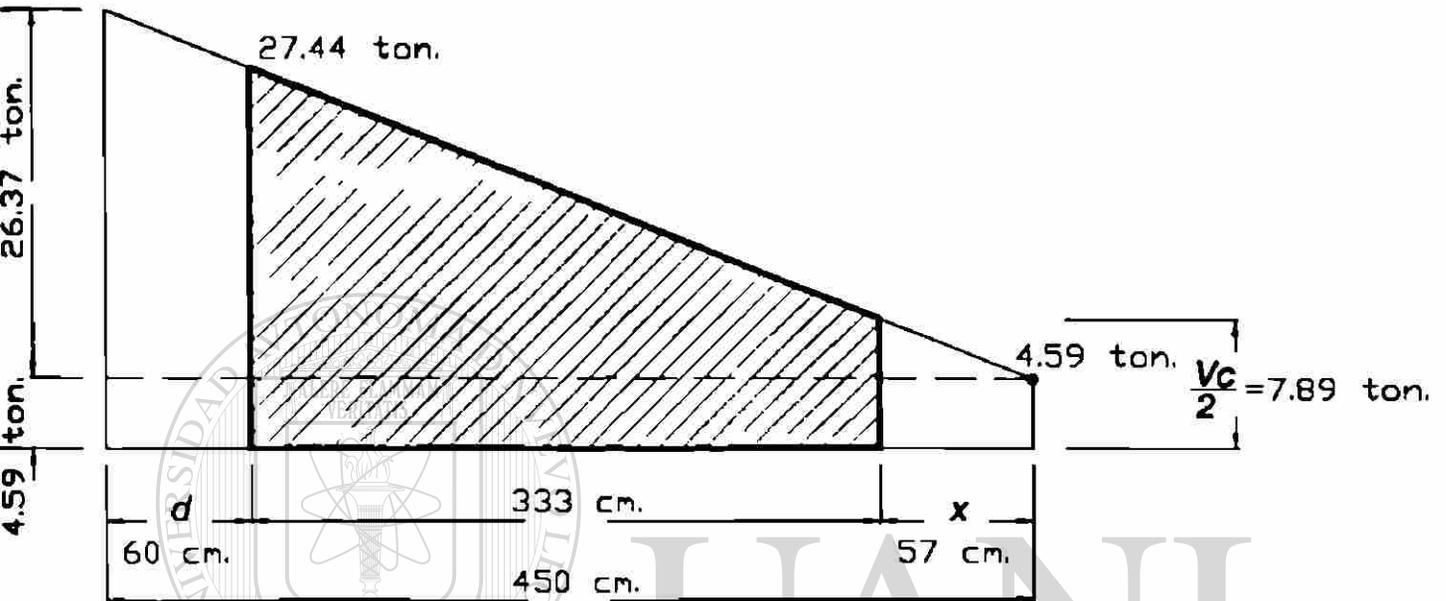
$$A_{v(\min)} = 3.5 \frac{b_w s}{f_y} = 1.42 \text{ cm}^2$$

$$S_{(\max)} = \frac{1.42 \times 2800}{3.5 \times 30} = 37 \text{ cm}$$

Entonces gobierna

$$S_{\max} = 30 \text{ cm}$$

Definir zona donde se requieren estribos.



**FINIR ZONA DONDE SE REQUIEREN ESTRIBOS.**

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$\frac{V_c}{2} = \frac{15.96}{2} = 7.98 \text{ ton}$$

$$\frac{26.37}{4.5} = \frac{7.98 - 4.59}{x}$$

$$5.86 = \frac{3.39}{x}$$

$$x = 0.57 \text{ m} = 57 \text{ cm}$$

3.- Tramo donde se pueden colocar estribos @ 20cm.

$$S = A_v f_y d = 20 \text{ cm} \frac{V_u - V_c}{\phi}$$

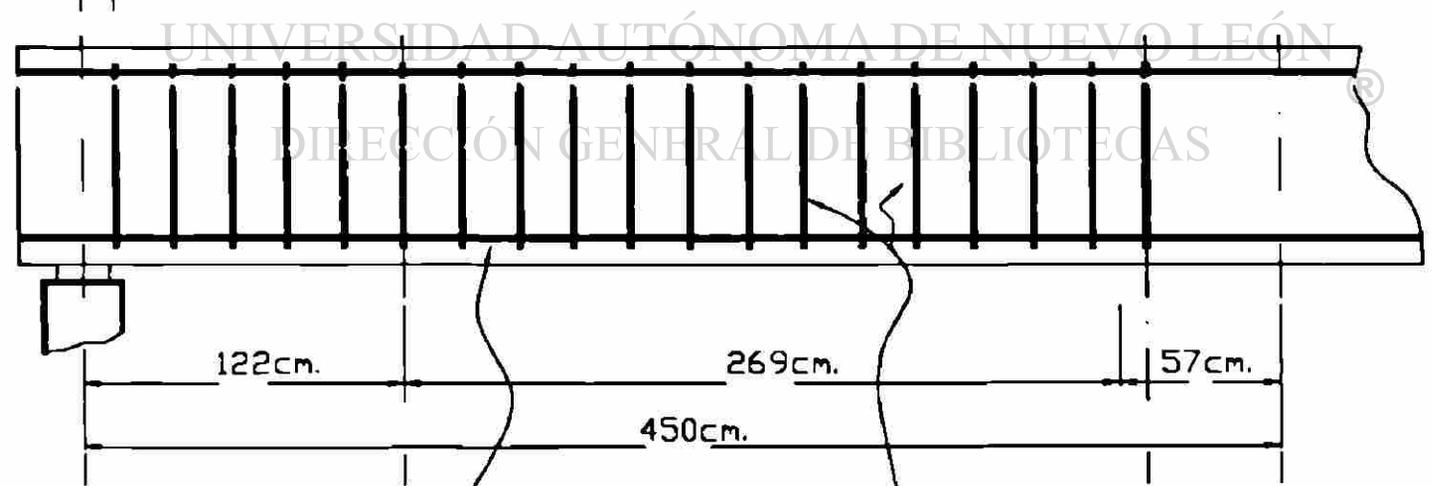
$$\frac{V_u - V_c}{\phi} = \frac{1.42 \times 2800 \times 60}{20} = 11,928 \text{ Kgs.}$$

$$\frac{V_u}{\phi} = 11,928 + 15,963 = 27,891 \text{ Kgs}$$

$$V_u = 0.85 \times 27,891 = 23,707 = 23,707 \text{ tons.}$$

$$\frac{x_1}{23,707 - 4,59} = \frac{4,5}{26,37} \Rightarrow x_1 = 0.17 \times 19.117 = 3.26 \text{ m.}$$

$$x_2 = 326 - 57 = 269 \text{ cm.}$$



2 vars. #4 en las esquinas de los estribos.

Estribos #3 grado 40 ( $f_y = 2800 \text{ kg/cm}^2$ ).

**CROQUIS DETALLE DE ESTRIBOS.**

## 5.6.- PROBLEMAS:

5-1 Calcular  $\phi V_n$  para las secciones mostradas

5-2 Para la viga mostrada en la Figura P5-2 soporta las cargas no-factorizadas que se muestran. La carga muerta incluye el peso de la viga.

- (a) Dibujar el diagrama de fuerzas cortantes para:
- (1).- Carga muerta más viva factorizadas en toda la viga.
  - (2).- Carga muerta factorizada en toda la viga más carga viva factorizada en la mitad izquierda.
  - (3).- Carga muerta factorizada en toda la viga.
- (b) Dibujar la envolvente de cortantes superponiendo los diagramas anteriores.

(c) Diseñar estribos. Usar  $f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$  y varillas #3 con gancho con  $f_y = 2800 \text{ kg/cm}^2$

Muerta = 2 ton/m.

Viva = 2.25 ton/m.

$$\omega M = 2.0 \text{ ton./m.}$$
$$\omega V = 2.25 \text{ ton./m.}$$

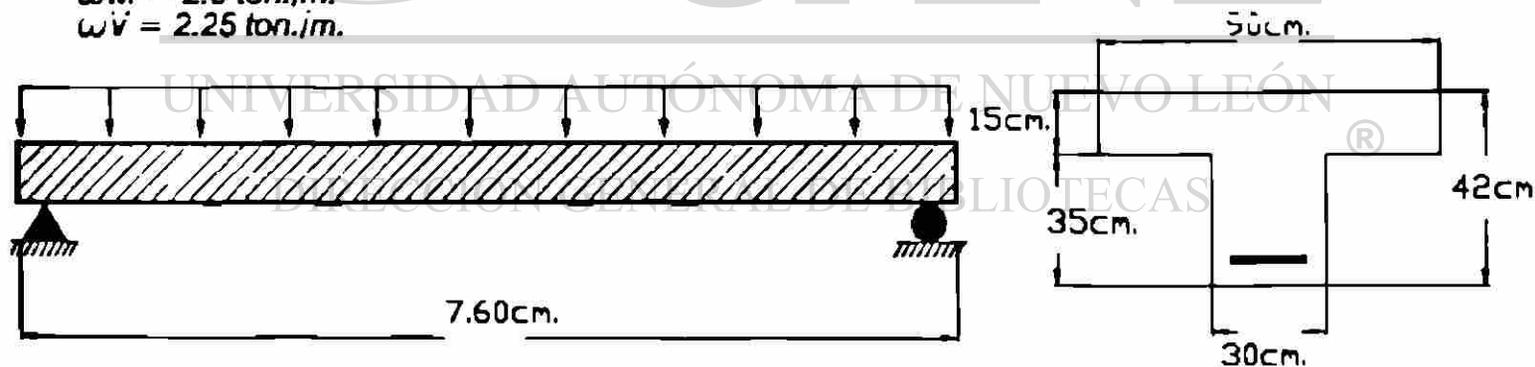
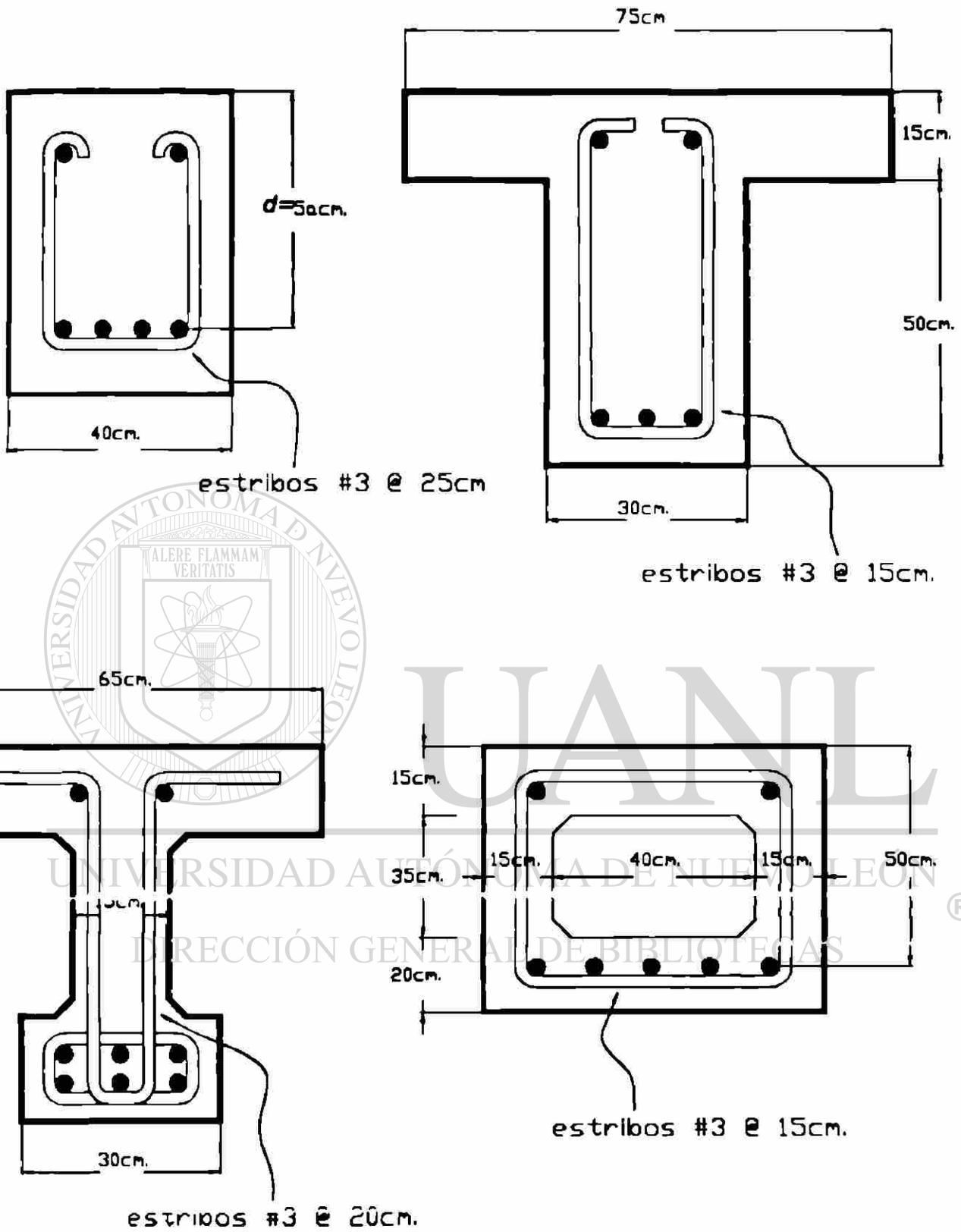


FIGURA P5-2.



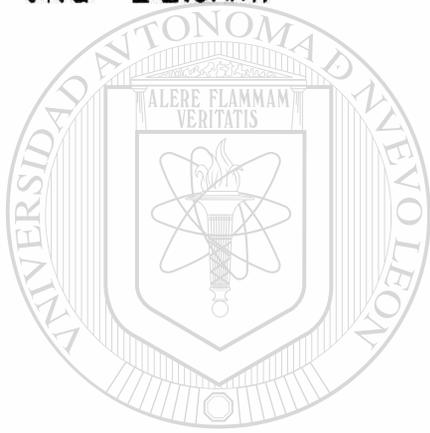
**FIGURA P5-1  
CALCULAR  $\phi V_n$  PARA LAS SECCIONES MOSTRADAS.**

P5-3 En la viga mostrada en la Figura P5-3 soporta las cargas no factorizadas que se muestran. La carga muerta incluye el peso de la viga.

- (a) Dibujar los diagramas de fuerzas cortantes para:
- (1) Cargas muerta más viva factorizadas en toda la viga.
  - (2) Carga muerta factorizada en toda la viga más carga viva factorizada en AB y CD.
  - (3) Carga muerta factorizada en toda la viga más carga viva factorizada en BC.
- (b) Dibujar envolvente de cortantes.
- (c) Diseñar estribos. Usar  $f_c = 210 \text{ kg/cm}^2$  y estribos con  $f_y = 2800 \text{ kg/cm}^2$ .

Muerta = 3 ton/m

Viva = 2.20 ton/m



# UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

$\omega_m = 3.0 \text{ ton./m.}$   
 $\omega_v = 2.20 \text{ ton./m.}$

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

®

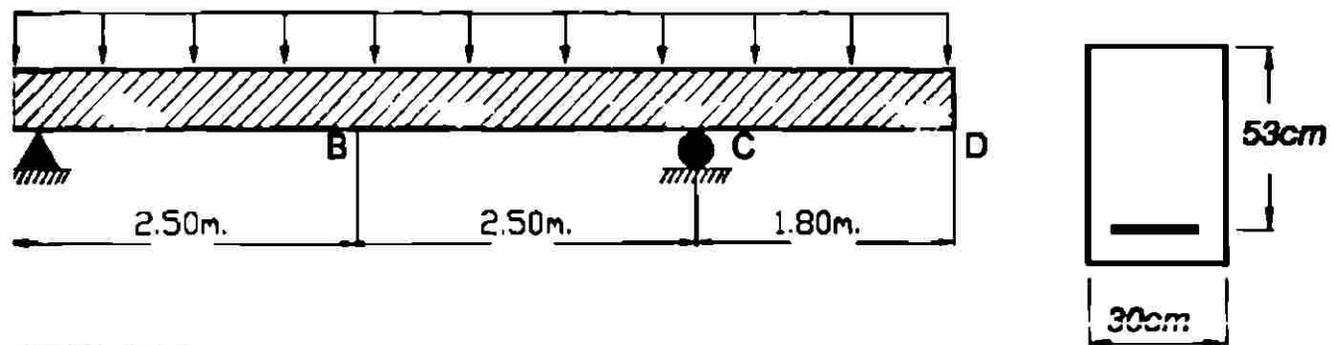


FIGURA P5-3.

5 - 4 En la figura P5-4 se muestra un marco rígido y las cargas factorizadas actuando en el marco Usar  $f_c = 210 \text{ kg/cm}^2$ ,  $f_y = 2800 \text{ kg/cm}^2$

Indicar estribos en la viga

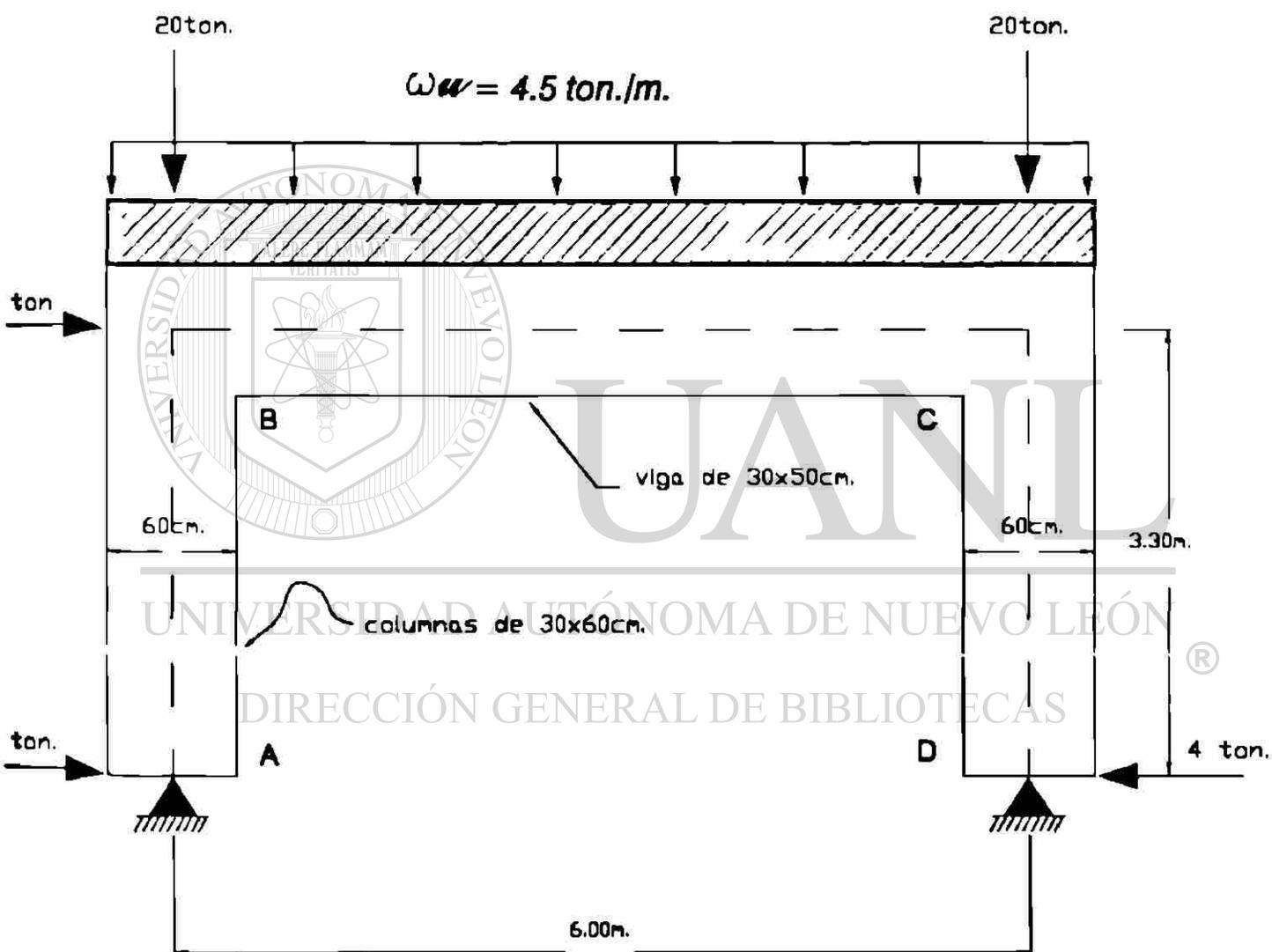


FIGURA P5-4.

# **CAPÍTULO 6 :**

## **TORSIÓN**

**6.1.- Introducción.**

**6.2.- El comportamiento de miembros de concreto reforzado sujetos a la torsión.**

**6.3.- El diseño por torsión, cortante y momento aplicando el Código del ACI 1995.**

---

**6.4.- El método de diseño por torsión aplicando el Código ACI 1995.**

**6.5.- Problemas**

## 6.1.- INTRODUCCION.

Un momento actuando alrededor del eje longitudinal de un miembro es llamado "torque" o "momento torsional",  $T$ . En estructuras, la torsión resulta de cargas excéntricas en vigas, lo cual se discutirá posteriormente, o bien la torsión puede provenir de deformaciones resultantes de la continuidad de vigas o miembros similares sobre el miembro en estudio.

En un miembro sujeto a torsión, el momento torsionante causa esfuerzos cortantes en la sección transversal del miembro extendiéndose desde cero en el eje centroidal hasta la superficie exterior.

El elemento mostrado en la siguiente figura está sujeto a cortante,  $\tau$ , debido a la aplicación del momento torsionante,  $T$ .

En un miembro circular, los esfuerzos cortantes varían desde cero hasta un máximo en las fibras extremas como se muestra en la Figura 6-2a.

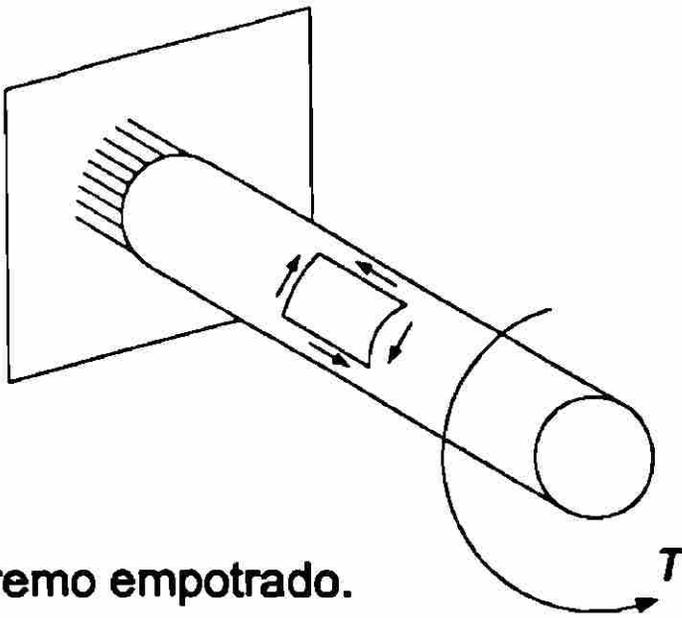
En una barra de sección cuadrada, los esfuerzos cortantes varían desde cero en el centro hasta un máximo en el centro de la longitud de las diagonales y un máximo en los extremos de los lados como se muestra en la Figura 6-2b.

La distribución de esfuerzos cortantes en una sección transversal puede ser visualizada usando la "analogía de la membrana". Las ecuaciones de la pendiente de una membrana inflada son análogas a las ecuaciones de los esfuerzos cortantes debidos a la torsión. Entonces la distribución de los esfuerzos cortantes puede visualizarse colocando una membrana en la sección transversal del miembro a torsión e inflándola. En la figura 6-3 se muestra una membrana inflada para una sección transversal circular.

La pendiente máxima de cada punto en la membrana es proporcional al esfuerzo cortante en ese punto.

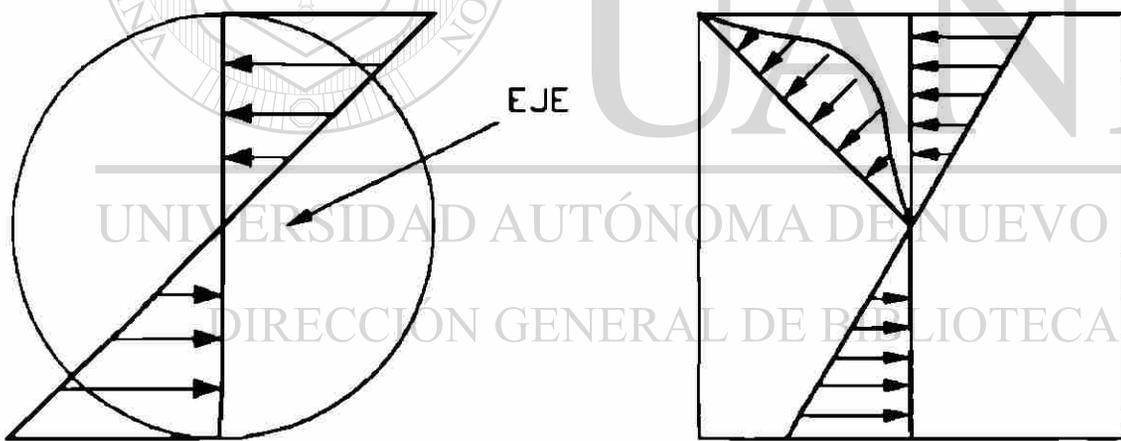
Los esfuerzos cortantes actúan perpendiculares a la dirección de la línea de máxima pendiente.

Entonces la pendiente de una línea radial en la membrana se incrementa desde cero en el punto medio de la membrana hasta un máximo en el extremo de la misma, como corresponde a los esfuerzos de la figura 6-2a.



) Extremo empotrado.

**FIGURA 6-1**  
**ESFUERZOS CORTANTES POR TORSION.**



a) Distribución de esfuerzos en una barra circular.

(b) Distribución de esfuerzos en una barra de sección cuadrada.

**FIGURA 6-2**  
**ESFUERZOS CORTANTES POR TORSION EN UNA SECCION CIRCULAR Y UNA CUADRADA.**

En la figura 6-4 se muestra la membrana inflada cubriendo una sección cuadrada. Aquí las pendientes de las líneas radiales corresponden a la distribución de esfuerzos mostrada en la figura 6-2b.

Una membrana similar para una sección transversal en forma de U formada por una serie de rectángulos se muestra en la Figura 6-5.

El momento torsionante es proporcional al volumen bajo la membrana. Comparando las figuras 6-4 y 6-5 se muestra que para una pendiente máxima dada corresponde a un esfuerzo cortante máximo, bajo una figura sólida es mucho mayor que bajo una figura abierta. Entonces para un esfuerzo cortante máximo dado, una sección sólida rectangular puede transmitir un momento torsionante mayor que una sección abierta. Lo mismo sucede con una sección hueca cerrada.

El máximo esfuerzo cortante en una sección circular elástica es:

$$\tau_{\max} = \frac{Tr}{J}$$

donde:  $\tau_{\max}$  = Esfuerzo cortante máximo.

T = Momento torsionante.

r = Radio de la barra.

J = Momento polar de Inercia =  $\pi r^4/2$ .

De manera similar, el esfuerzo cortante máximo en una sección rectangular elástica ocurre en el centro de media diagonal y puede escribirse como:

$$\tau_{\max} = \frac{T}{\alpha x^2 y}$$

Donde "x" es la dimensión menor de la sección, "y" la dimensión mayor y  $\alpha$  varía de 0.208 para  $y/x = 1.0$  (sección cuadrada) a 0.333 para  $y/x = \infty$  (placa de ancho infinito). Un valor con suficiente aproximación de  $\alpha$  es:

$$\alpha = \frac{1}{3 + 1.8y/x}$$

Para una sección compuesta por varios rectángulos.

$$\tau_{\max} = \frac{T}{\Sigma(x^2 y/3)}$$

Donde el término  $x^2 y/3$  se valúa para cada rectángulo.

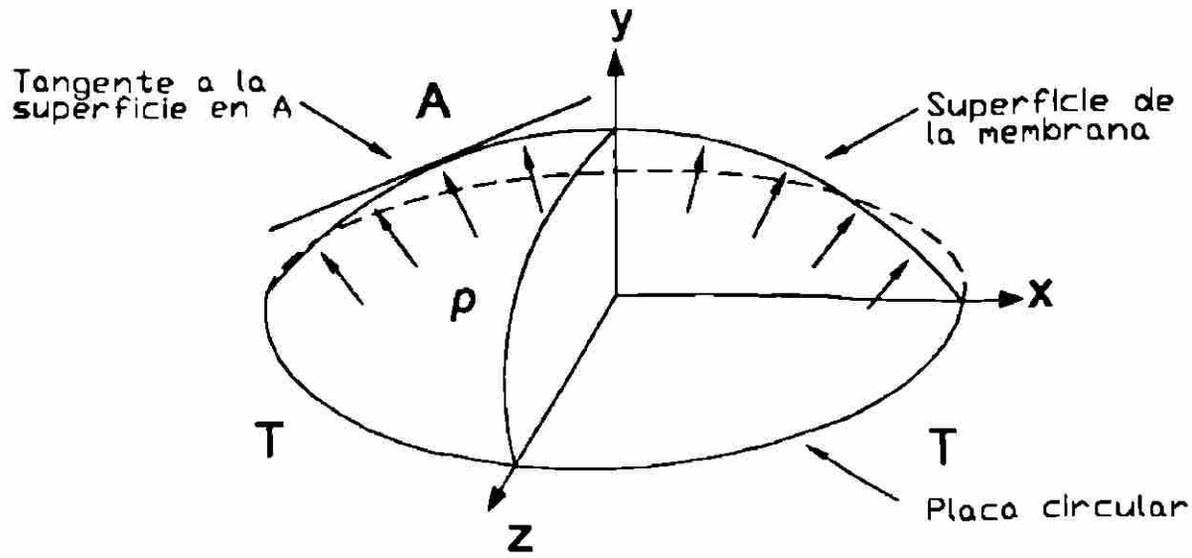


FIGURA 6-3  
ANALOGÍA DE LA MEMBRANA BARRA CIRCULAR.

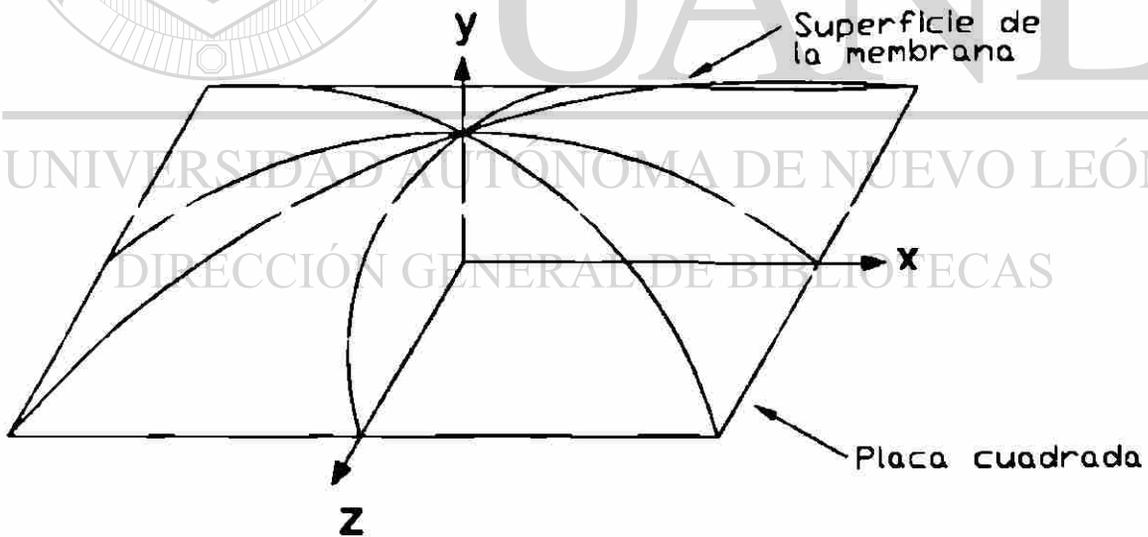
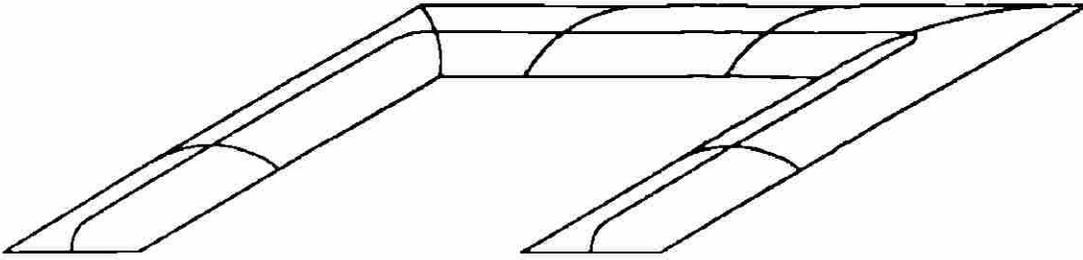
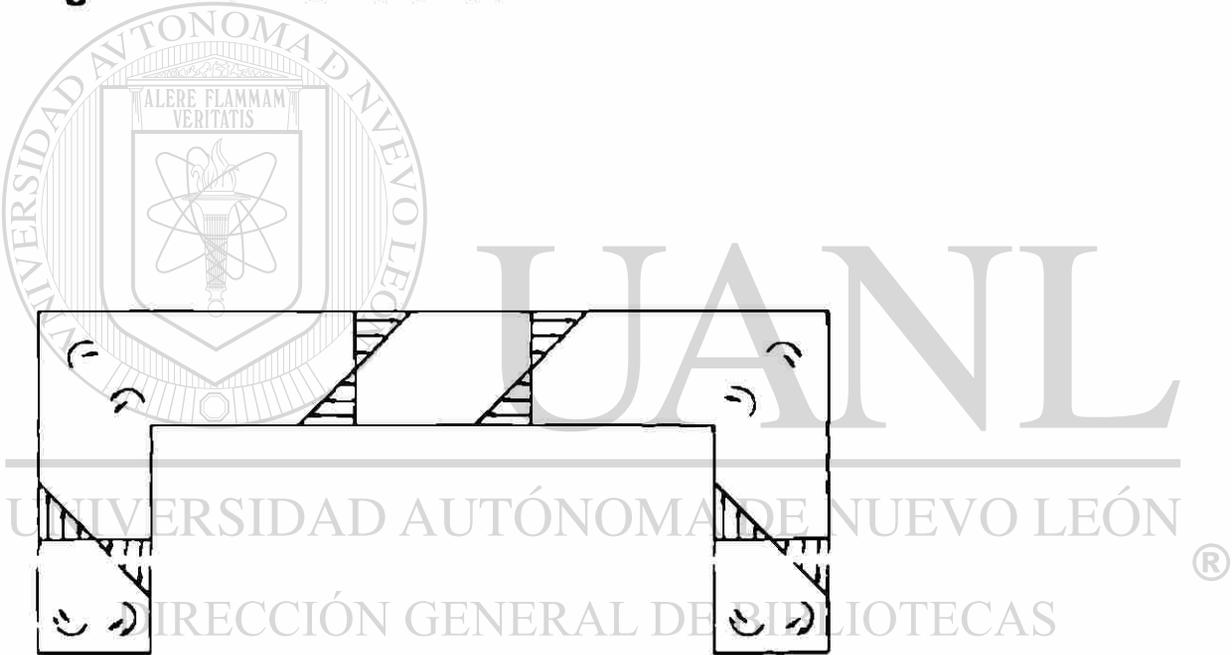


FIGURA 6-4  
ANALOGÍA DE LA MEMBRANA BARRA CUADRADA.



(a) Analogía de la membrana.



(b) Distribución de esfuerzos cortantes.

**FIGURA 6-5**  
**ANALOGIA DE LA MEMBRANA:**  
**MIEMBRO EN FORMA DE CANAL.**

## Secciones tubulares huecas

Para una sección tubular, de cualquier forma, pero que sea cerrada, el esfuerzo cortante está dado por:

$$\tau = \frac{T}{2A_0t}$$

donde:  $\tau$  = Esfuerzo cortante

$T$  = Momento torsionante aplicado a la barra.

$A_0$  = Área encerrada por la circunferencia media.

$t$  = espesor del tubo (constante generalmente).

Para la deducción de la fórmula anterior se puede consultar cualquier obra sobre Resistencia de Materiales como Timoshenko y Gere, Timoshenko y Young, Singer, etc.

### EJEMPLO 6-1.- CALCULO DE LOS ESFUERZO CORTANTES POR TORSION EN LA SECCION TRANSVERSAL DE UN PUENTE.

En la siguiente figura se muestra la sección transversal de un puente. Calcular esfuerzos cortantes,  $\tau$ , en la fibra superior e inferior de los muros y en la losa inferior si se aplica un momento torsionante de 1650 lbs -pie.

#### 1.- Cálculo de $A_0$ :

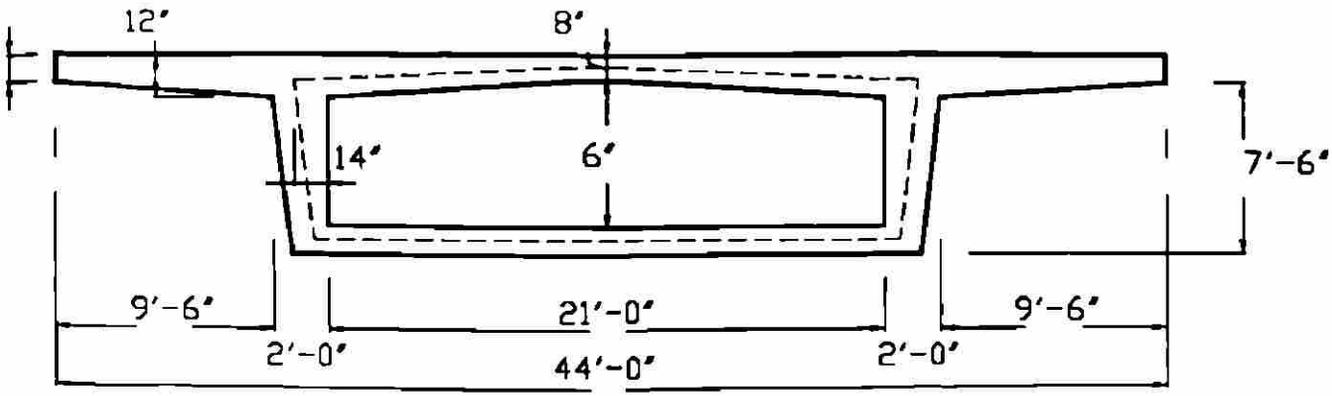
$A_0$  es el área encerrada por el perímetro medio del hueco o tubo. El área encerrada por la línea punteada en el figura anterior.

Los voladizos no son parte del tubo y pueden ignorarse en el cálculo de  $A_0$ . Dividiendo en triángulos y un rectángulo como se muestra en el inciso (b) de la figura 6-6.

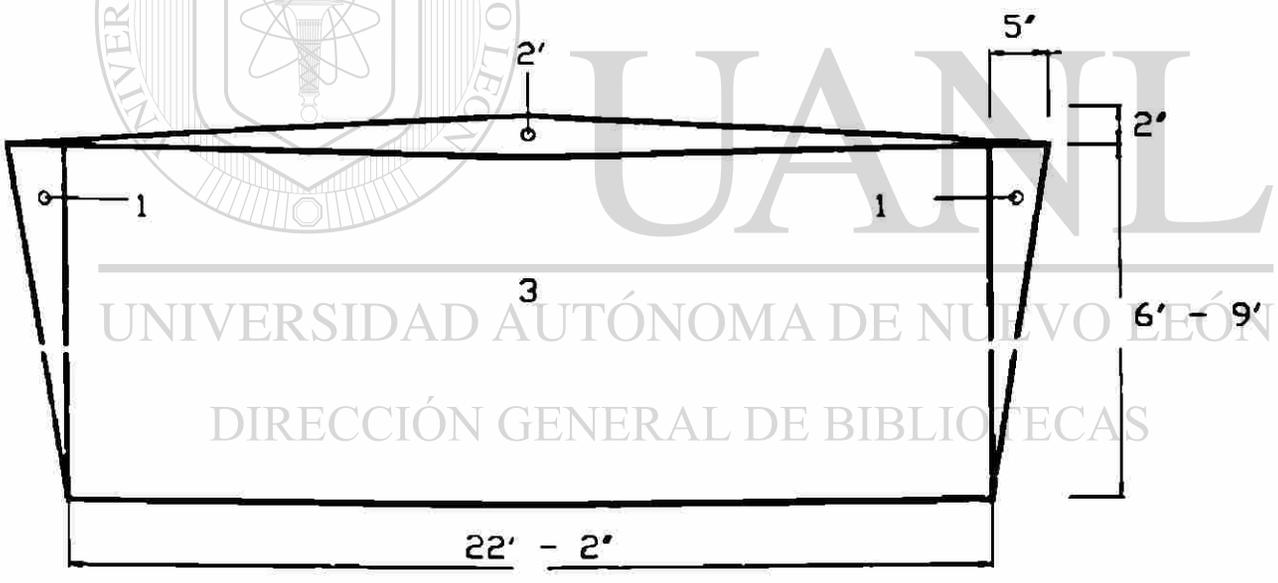
$$A_0 = (2 \times 6' - 9'' \times 5'' / 2) + (23' - 0'' \times 2'' / 2) + (22' - 2'' \times 6' - 9'')$$

$$= 405 + 276 + 21,546.$$

$$22,227 \text{ pulg}^2$$



(a) Sección transversal del puente.



(b)  $A_{\sigma}$

FIGURA 6-6  
SECCION TRANSVERSAL DE PUENTE

## 2.- Cálculo del flujo de corte, q.

$$q = \frac{T}{2A_v} = \frac{1650 \times 12,000}{2 \times 22,227} = 445 \text{ Lbs/pulg}$$

## 3.- Cálculo de los esfuerzos cortantes.

En la parte superior del muro el espesor es 24 pulg.

Por lo que el esfuerzo cortante por torsión es:

$$\tau = \frac{q}{t} = \frac{445}{24} = 18.6 \text{ Lbs/pulg}^2$$

En la parte inferior del muro el espesor es 14 pulg. Luego:

$$\tau = \frac{q}{t} = \frac{445}{14} = 31.8 \text{ Lbs/pulg}^2$$

El espesor en el patín inferior es 6 pulg.

$$\tau = \frac{445}{6} = 74.2 \text{ Lbs/pulg}^2$$

### **Esfuerzos principales por torsión**

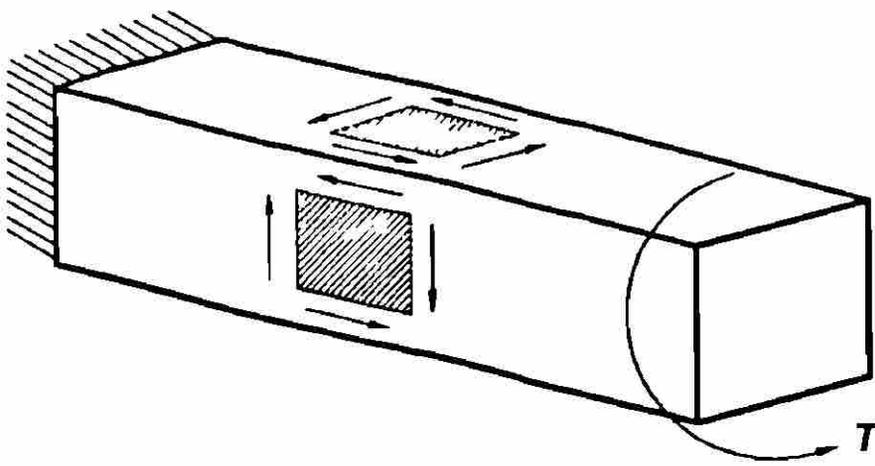
— Cuando una viga como la mostrada en la figura 6-7 está sujeta a un momento torsionante, T, los esfuerzos se desarrollan en la cara superior y en las caras laterales como se muestra en el inciso (a) de la Figura 6-7.

Los esfuerzos principales de estos elementos se muestran en el inciso (b) de la Figura 6-7.

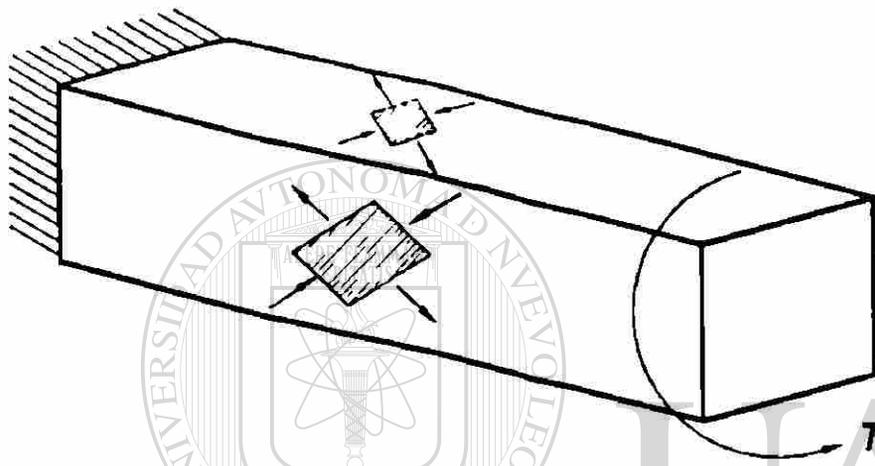
Los esfuerzos principales de torsión son iguales a los principales de compresión y ambos son iguales a el esfuerzo cortante si T es la única carga.

El esfuerzo principal de tensión eventualmente causa agrietamiento en forma aproximada de espiral alrededor del cuerpo, como se muestra por la línea A-B-C-D-E del inciso (c). Para evitar este agrietamiento estribos cerrados son requeridos.

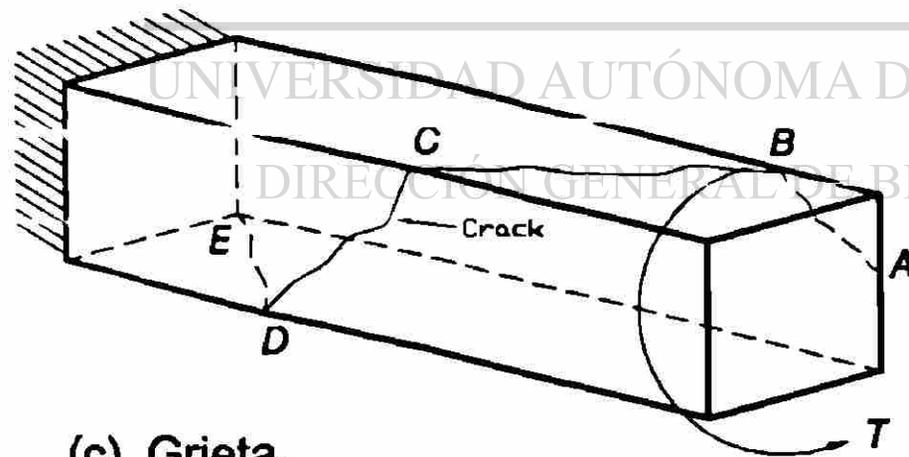
Si una viga está sujeta a corte por flexión y torsión combinados, las componentes de los esfuerzos cortantes se suman y en las caras opuestas se contrarrestan.



(a) Esfuerzos de corte.

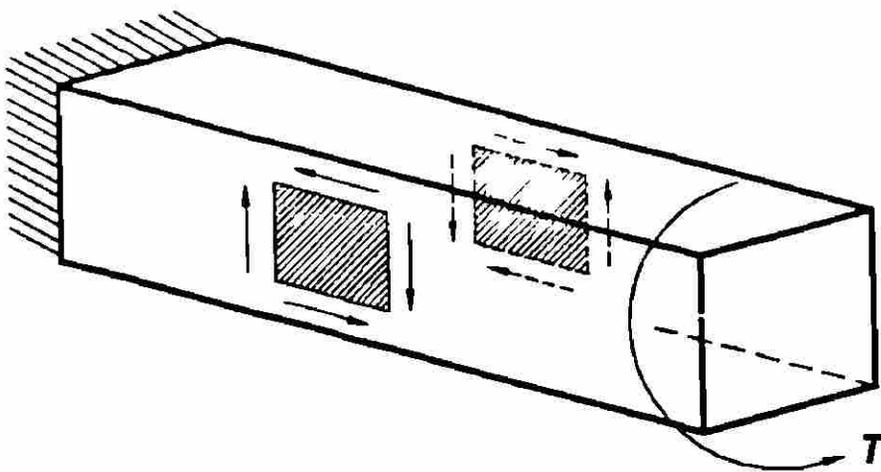


(b) Esfuerzos principales.

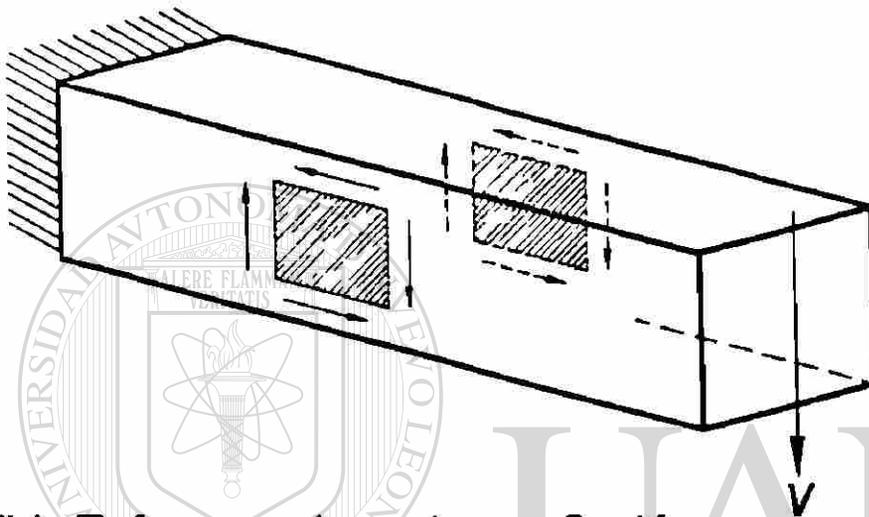


(c) Grieta.

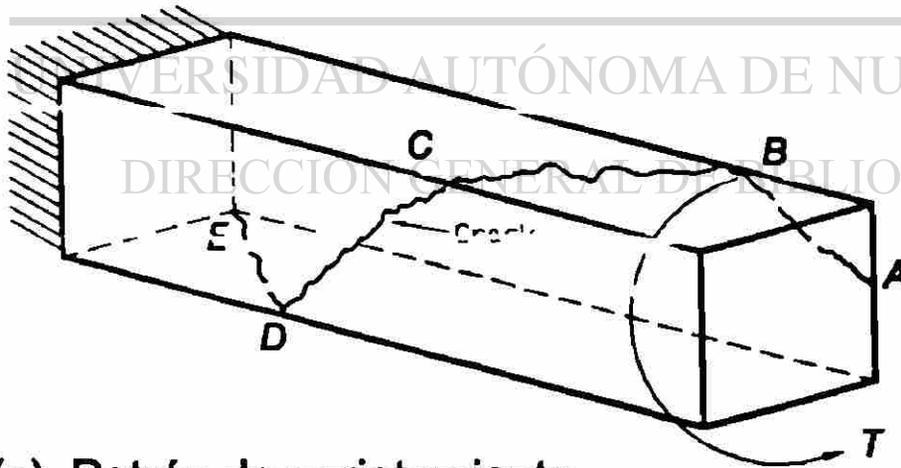
FIGURA 6-7  
ESFUERZOS PRINCIPALES DE TENSION Y  
AGRIETAMIENTO POR TORSION PURA.



(a) Esfuerzos cortantes debidos a torsión.



(b) Esfuerzos de corte por flexión.



(c) Patrón de agrietamiento.

FIGURA 6-8  
CORTANTE, TORSION Y MOMENTO  
COMBINADOS.

Como resultado de esto, aparecen grietas inclinadas donde se suman los esfuerzos (grieta AB) y se extienden a través de la cara de tensión por flexión de la viga (en este caso en la superior por ser un cantiliver). Si los momentos son lo suficientemente grandes las grietas se extenderán también a través de las caras verticales [grieta CD del inciso (c)].

## **6-2.- COMPORTAMIENTO DE MIEMBROS DE CONCRETO REFORZADO SUJETOS A TORSION.**

### **Torsión pura.**

Cuando un miembro de concreto es cargado en torsión pura, los esfuerzos cortantes, y los esfuerzos principales se desarrollan como se muestra en la Figura 6-7a y b.

Una o más grietas inclinadas se desarrollan cuando los esfuerzos principales máximos de tensión alcanzan la resistencia a tensión del concreto. La aparición de las grietas causa la falla en un miembro de concreto sin refuerzo. Por otro lado, si se añade refuerzo longitudinal y estribos tienen efecto en la resistencia de la viga cargada en torsión pura.

Una viga rectangular con varillas longitudinales en las esquinas y estribos cerrados puede resistir un incremento de carga después del agrietamiento. La figura 6-9 es una curva Momento torsionante - ángulo de torsión, en la carga de agrietamiento, punto A, el ángulo de torsión se incrementa para un momento de torsión constante y las fuerzas que agrietan el concreto se distribuyen en el acero. Las grietas se extienden en el núcleo central del miembro, haciéndolo inefectivo.

## **COMBINACION DE TORSION Y FLEXION**

La torsión raramente se presenta sola. Generalmente hay también momentos flexionantes y cortante por flexión. En la figura 6-10, se muestran los resultados de tres secciones diferentes, cargadas para varias relaciones de torsión y cortante.

La envolvente inferior da un cuarto de elipse, cuya ecuación es :

$$(T_o/T_{\omega})^2 + (V_c/V_{\omega})^2 = 1$$

Dónde, en esta gráfica,  $T_{\omega} = 1.6 \sqrt{f'_c} (x^2y)$  y  $V_{\omega} = 2.68 \sqrt{f'_c} b_w d$  (sistema inglés).

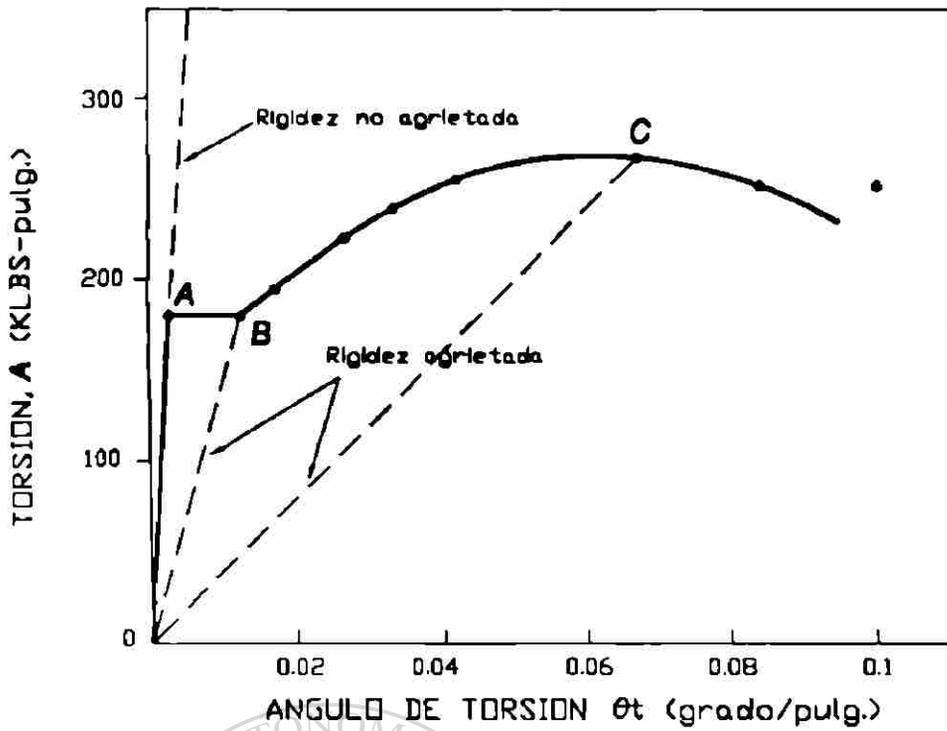


FIGURA 6-9  
CURVA MOMENTO - ANGULO DE TORSIÓN  
PARA UNA VIGA RECTANGULAR.

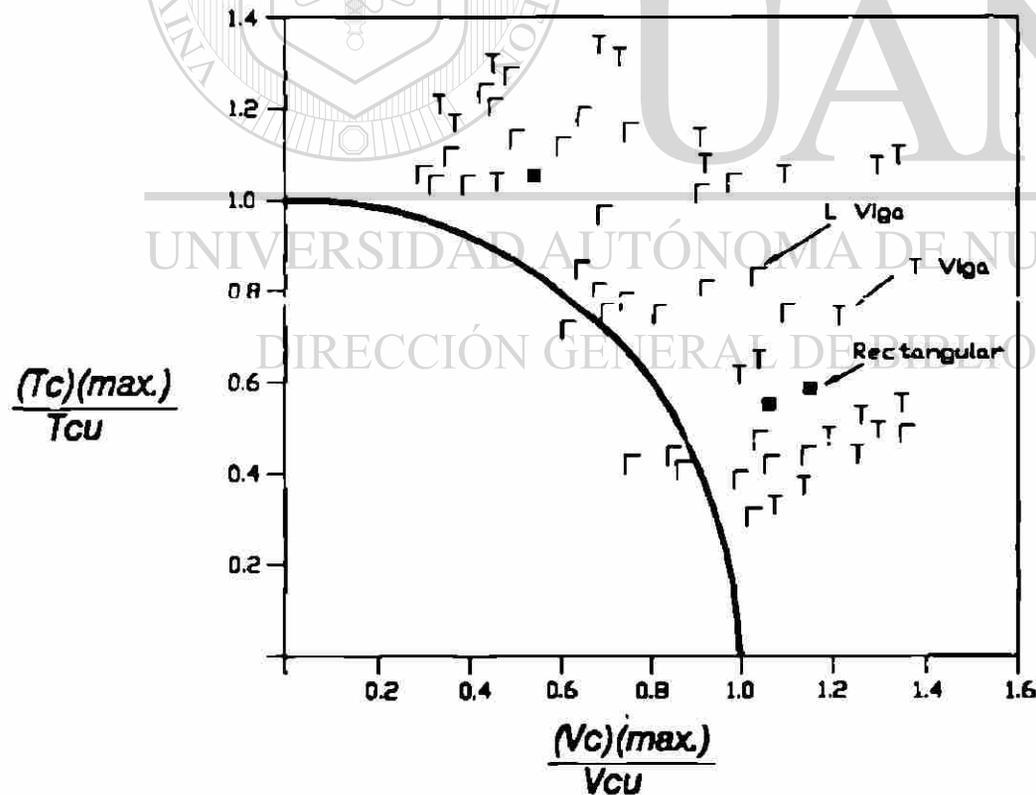


FIGURA 6-10  
INTERACCION DE TORSION Y CORTANTE.

### 6-3.- DISEÑO POR TORSION, CORTANTE Y MOMENTO - CODIGO ACI 1995.

El procedimiento de diseño para torsión y flexión consiste en diseñar primero por flexión, calcular el refuerzo longitudinal y los estribos por flexión y posteriormente añadir los estribos por torsión y refuerzo longitudinal por torsión. Las ecuaciones básicas de diseño son:

$$\phi V_n > V_\mu \quad (\text{ACI Ecuación 11-1})$$

$$V_n = V_c + V_s \quad (\text{ACI Ecuación 11-2})$$

$$y \quad \phi T_n > T_\mu \quad (\text{ACI Ecuación 11-20})$$

donde  $\phi$  es el factor de reducción de resistencia por cortante y torsión, el cual se toma como 0.85 (ACI Sección 9.3) y  $T_n$  está dado por la Ecuación 11-21 del ACI.

### 6.4.- METODO DE DISEÑO POR TORSION APLICACION DEL CODIGO ACI - 1995.

#### **Pasos del Método.**

- 1.- ~~Calcular el momento flexionante  $M_\mu$  máximo de la envolvente de momentos.~~
- 2.- Seleccionar  $b$ ,  $d$ , y  $h$  basándose en el momento flexionante último  $M_\mu$ . Para problemas con torsión, se recomienda la sección cuadrada.
- 3.- Basándose en  $b$  y  $h$ , dibujar las envolventes finales de  $M_\mu$ ,  $V_\mu$  y  $T_\mu$ . Calcular el área de refuerzo requerido por flexión.
- 4.- Determinar si la torsión debe ser considerada. La torsión debe considerarse si  $T_u$  excede:

$$\frac{\phi \sqrt{f_c'} (A_{cp}^2)}{P_{cp}} \quad (\text{sistema inglés})$$

(ACI Sección 11.6.1)

donde:  $A_{cp}$ , es el área encerrada por el perímetro de la sección y:  
 $P_{cp}$ , es el perímetro de la sección.

5.- Determinar si el caso involucra equilibrio o compatibilidad de torsión. Si es compatibilidad el momento puede reducirse a:

$$0.44\phi\sqrt{f'_c} (A^2_{cp}/P_{cp}) \quad (\text{ACI Sección 11.6.2.2})$$

donde "d" es el peralte efectivo de las caras de los apoyos.

6.- Revisar si la sección es suficiente para torsión si  $T_u$  excede los valores dados por las ecuaciones 11-19 y 11-18 del ACI.

7.- Calcular el área de estribos requeridos por cortante. (ACI Ecuaciones 11-1, 11-2, 11-3 y 11-17). Para facilitar la suma de estribos por cortante y torsión calcular:

$$\frac{A_v}{s} = \frac{V_s}{f_y d}$$

Si  $V_s$  excede a  $2.1\sqrt{f'_c} b_w d$ , la sección es pequeña y hay que aumentarla.

8.- Calcular área de estribos requeridos por torsión usando las ecuaciones 11-20 y 11-21 del ACI. Otra vez calcular  $A_v/s$ .

9.- Sumar estribos de cortante por flexión y torsión debiendo exceder el mínimo requerido por la ecuación (11-23) del ACI. El espaciamiento debe satisfacer las Secciones 11.6.6.4, 11.6.6.1 y 11.6.6.3 del ACI. Los estribos deben ser cerrados.

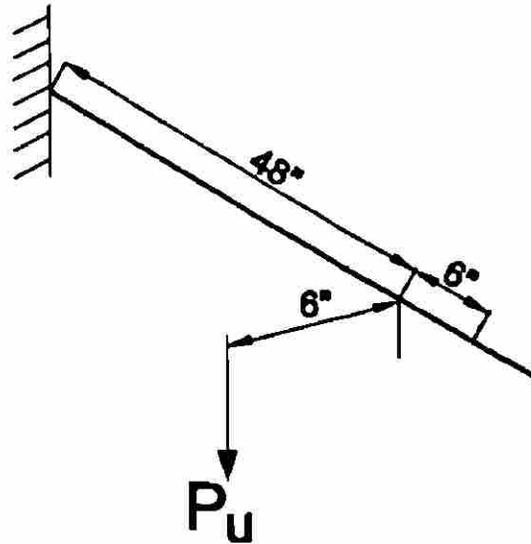
10.- Diseñar el refuerzo longitudinal por torsión usando la ecuación 11-22 del ACI y añadirsele al de flexión. El refuerzo longitudinal por torsión debe exceder el mínimo dado por la Ecuación 11-24 del ACI y satisfacer las secciones 11.6.4.3, 11.6.6.2 y 11.6.6.3.

### **EJEMPLO 6-2.- DISEÑO POR TORSION, CORTANTE Y MOMENTO : EQUILIBRIO POR TORSION.**

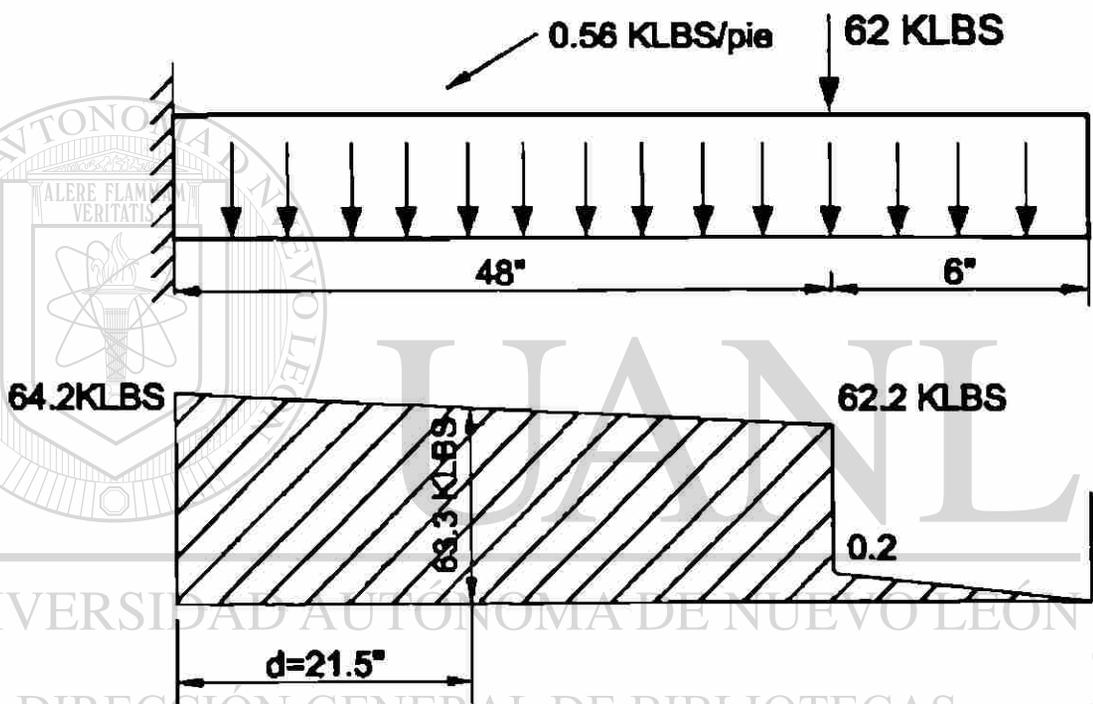
La viga cantiliver mostrada en la siguiente figura tiene 54 pulgadas de longitud y la carga concentrada actúa a 6 pulg., del extremo libre y 6 pulg., del eje. La carga concentrada no factorizada consiste de 20 KLBS de carga muerta y 20 KLbs de carga viva.

Usar  $f'_c = 3000 \text{ Lbs/pulg}^2$  y  $f_y = 60,000 \text{ Lbs/pulg}^2$

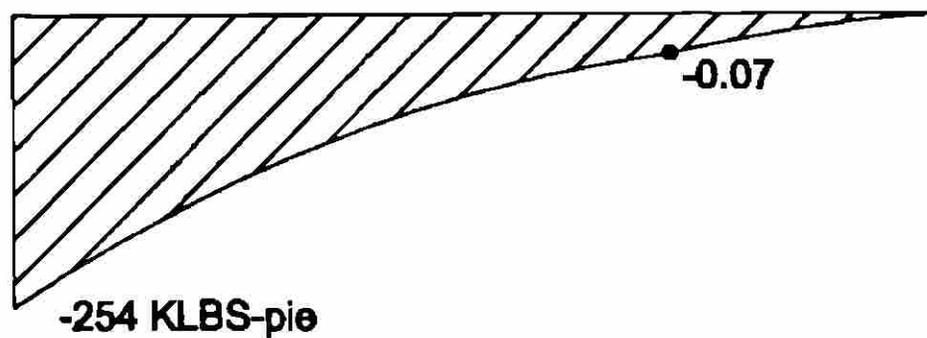
1.- Cálculo del diagrama de momentos flexionantes.



(a) Viga.



(b) Diagrama de cortantes.



(c) Momentos flexionantes.

## DISEÑO POR TORSION, CORTANTE Y MOMENTO.

Es necesario estimar el tamaño de la viga (proponer sección) para considerar el peso propio que en estructuras de concreto representa una carga importante.

De la Tabla 9.5a del ACI, el peralte mínimo para control de deflexiones es  $\ell/8 = 6.75$  pulg., como se puede ver es pequeño para las cargas que se tienen por lo que, como primer tanteo se propondrá una sección de 16 pulg., de ancho y 24 pulg., de peralte total con  $d = 21.5$  pulg.

Peso propio:

$$W = \frac{16 \times 24}{144} \times 0.15 = 0.40 \text{ KLBS/pie.}$$

Peso propio uniforme factorizado:

$$W = 1.4 \times 0.40 = 0.56 \text{ KLBS/pie.}$$

Carga concentrada factorizada:

$$P_u = 1.4 \times 20 + 1.7 \times 20 = 62 \text{ KLBS.}$$

## 2.- Cálculo de "b", "d" y "h" por flexión

Utilizando la ecuación: 
$$\frac{M_u}{\phi K_n} = \frac{bd^2}{12,000}$$

donde  $\phi K_n = \phi [f_c \omega (1 - 0.59 \omega)]$ ,  $\omega = \rho \frac{f_y}{f_c}$

y  $M_u$  está en KLbs-pie. Considerando  $\rho \approx 0.01$ :

$$\omega = \frac{0.01 \times 60,000}{3000} = 0.20$$

$$\phi K_n = 0.9 \times 3000 \times 0.20 (1 - 0.59 \times 0.20) = 476$$

Entonces, 
$$\frac{bd^2}{12000} = \frac{254}{476} = 0.533$$

$$bd^2 = 6390 \text{ pulg}^3.$$

Las posibles soluciones son:

$b = 12$  pulg,  $d = 23.1$  pulg,  $h = 25.6$  pulg.,

$b = 14$  pulg,  $d = 21.4$  pulg,  $h = 23.9$  pulg.,

$b = 16$  pulg,  $d = 20$  pulg,  $h = 22.5$  pulg.

Usaremos  $b = 14$  pulg,  $d = 21.5$  pulg, y  $h = 24.0$  pulg.

Como esta sección es menor que la propuesta inicialmente, es necesario recalcular  $W$  y  $M_u$ .

$W = 0.35$  KLBS/pie y  $W_u = 0.49$  KLBS/pie.

$M_u = 253$  KLBS-pie en el empotramiento del cantiliver.

$$A_{s(\text{req})} = \frac{M_u \times 12000}{\phi f_y d}$$

Considerando  $j = 0.875$

$$A_{s(\text{req})} = \frac{253 \times 12000}{0.9 \times 60000 (0.875 \times 21.5)} = 2.99 \text{ pulg}^2$$

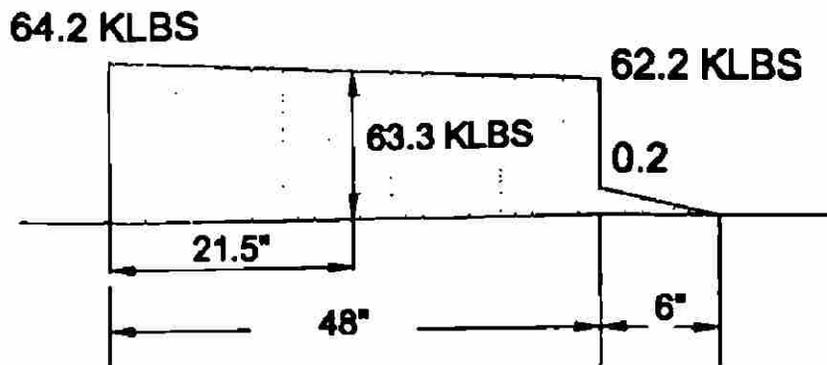
Revisando  $M_n$  para  $A_s = 2.99 \text{ pulg}^2$

$a = 5.02$  pulg.

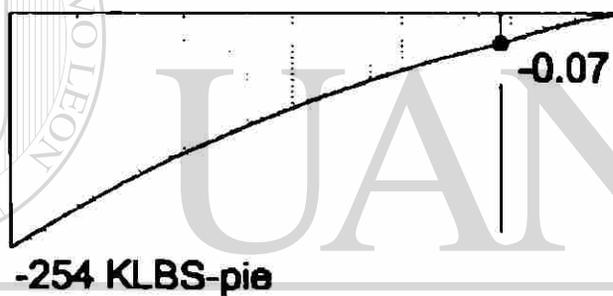
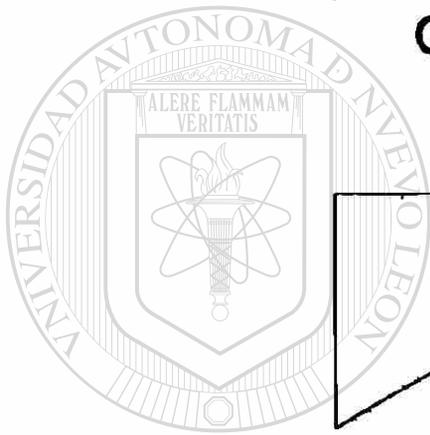
$$\phi M_n = \frac{0.9 \times 2.99 \times 60,000 (21.5 - 5.02/2)}{12,000} = 255 \text{ KLBS-pie.}$$

Entonces usar una sección de  $14$  pulg x  $24$  pulg. con  $d = 21.5$  pulg.  $A_s = 2.99 \text{ pulg}^2$ .

3.- Diagramas finales de  $V_u$ ,  $M_u$  y  $T_u$ .

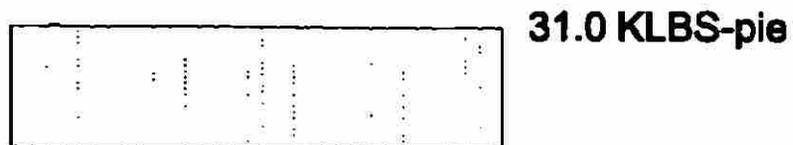


**Cortantes.**



**Momentos flexionantes.**

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



**Momentos torsionantes.**

**DIAGRAMAS FINALES DE  $V_u$  ,  $M_u$  Y  $T_u$  .**

4.- Se debe considerar torsión?

Para la sección transversal  $A_{cp} = 14 \times 24 = 336 \text{ pulg}^2$  y  $P_{cp} = 2 (14 + 24) = 76 \text{ pulg}$ . De ACI Sección 11.6.1 la torsión puede despreciarse si  $T_u$  es menor que:

$$\phi \frac{\sqrt{f'_c} (A_{cp}^2)}{P_{cp}} = 0.85 \frac{\sqrt{3000} (336^2)}{76} = 69,160 \text{ LBS-pulg.} = 5.76 \text{ KLBS-pie}$$

$< 31.0 \text{ KLBS-pie}$

**Se debe considerar torsión**

5.- Equilibrio o compatibilidad de torsión?

La torsión es necesaria por equilibrio, entonces diseñaremos para  $T_u = 31.0 \text{ KLBS-pie}$ .

6.- Es la sección suficiente para resistir torsión?

Para una sección sólida, el ACI Sección 11.6.3.1 (a) requiere que la sección satisfaga:

$$\sqrt{(V_u/b_w d)^2 + (T_u p_n / 1.7 A_o h)^2} \leq \phi (V_c / b_w d + 2.12 \sqrt{f'_c}) \quad (\text{ACI Ec.11-18})$$

Por ACI Sección 11.3.1.1 tomar :

$$V_c = 2\sqrt{f'_c} b_w d.$$

$A_o h$  = Area encerrada por los estribos en línea media.

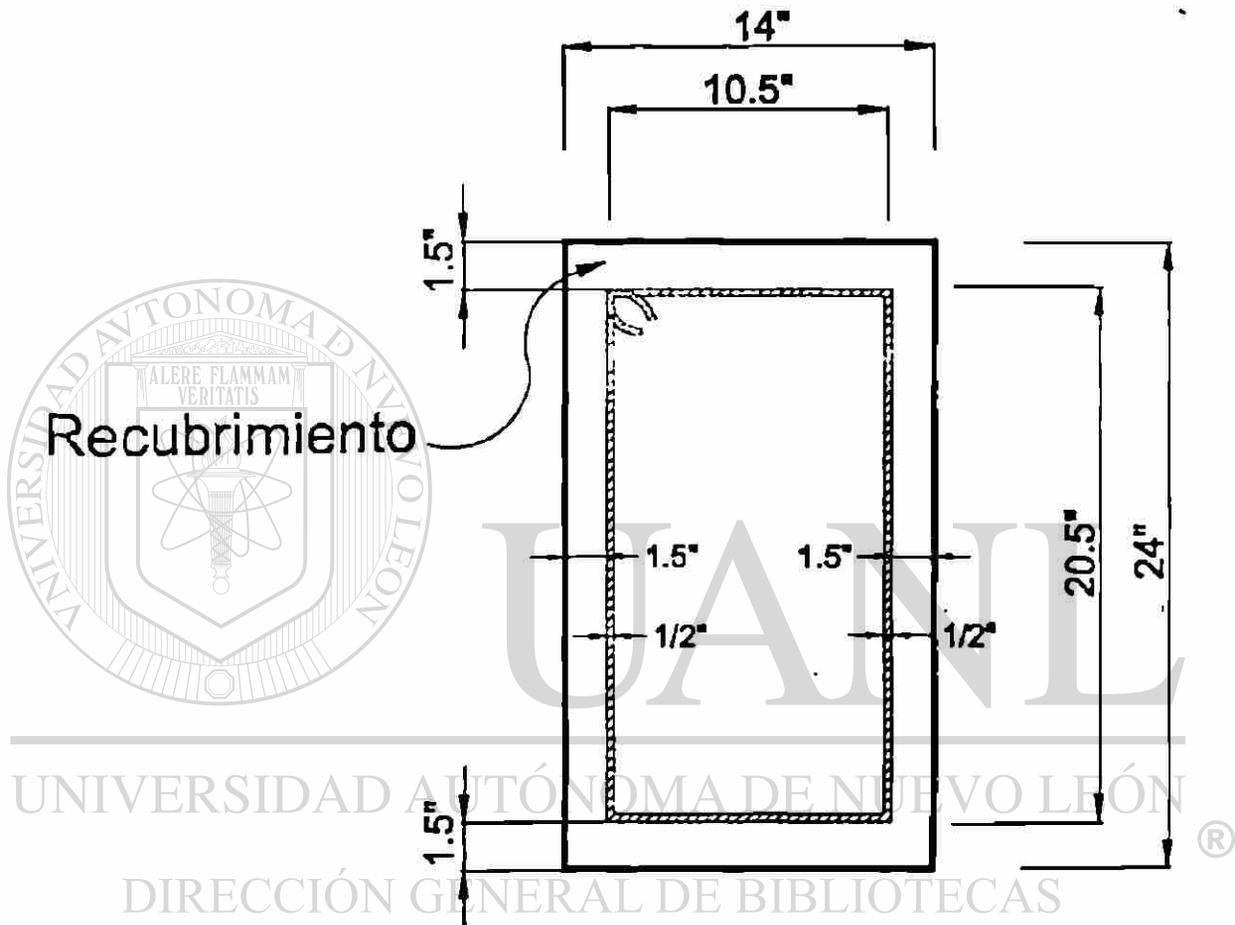
Considerando recubrimiento libre de 1.5 pulg., y estribos # 4 :

$$A_{oh} = (14 - 2 \times 1.5 - 0.5)(24 - 2 \times 1.5 - 0.5)$$

$$A_{oh} = 215 \text{ pulg}^2$$

$P_h$  = Es el perímetro de la línea media del anillo o estribo.

$$P_h = 2(10.5 + 20.5) = 62 \text{ pulg.}$$



$$\sqrt{\left(\frac{63,300}{14 \times 21.5}\right)^2 + \left(\frac{31.0 \times 12,000 \times 62}{1.7 \times 215^2}\right)^2} \leq 0.85(2\sqrt{3,000} + 8\sqrt{3,000})$$

$$\sqrt{43,810 + 86,100} = 361 \text{ Lbs/pulg}^2$$

$$0.85 \times 10 \sqrt{3000} = 466 \text{ Lbs/pulg}^2$$

361 < 466 la sección es suficiente.

7.- Estribos de cortante por flexión.

$$V_u \leq \phi(V_c + V_s)$$

$$V_c = 2 \sqrt{f'_c} b_w d = 2 \sqrt{3,000} \times 14 \times 21.5$$

$$V_c = 32.97 \text{ KLbs}$$

$$V_s = \frac{V_u}{\phi} - V_c = \frac{63.3}{0.85} - 32.97$$

$$V_s = 41.5 \text{ KLbs}$$

$$V_s = \frac{A_v f_y d}{s} \Rightarrow \frac{A_v}{s} = \frac{V_s}{f_y d} = \frac{41,500}{60,000 \times 21.5}$$

$$\frac{A_v}{s} = 0.0322$$

8.- Estribos de cortante por torsión:

$$\phi T_n > T_u$$

$$T_n = \frac{T_u}{\phi} = \frac{31.0 \times 12,000}{0.85} = 437,650 \text{ Lbs} \cdot \text{pulg.}$$

Por la ecuación 11-21 del ACI:

$$T_n = \frac{2A_o A_t f_{yv}}{s} \cot \theta \Rightarrow \frac{A_t}{s} = \frac{T_n}{2A_o f_{yv}} \cot \theta$$

Del ACI Sec. 11.6.3.6.

$$A_o = 0.85 A_{ch} = 0.85 \times 215 = 182.8 \text{ pulg}^2$$

$$\theta = 45^\circ, \quad \frac{A_t}{s} = \frac{437,650}{2 \times 182.8 \times 60,000}$$

$$\frac{A_t}{s} = 0.020$$

9.- Estribos totales:

$$\frac{A_v+t}{s} = \frac{A_v}{s} + 2 \frac{A_t}{s} = 0.0322 + 2 \times 0.020 = 0.0722 \text{ pulg}^2/\text{pulg.}$$

Revisando estribos mínimos (ACI Ec. 11-23)

$$(A_v+2A_t) \geq 3.5b_w s / f_{yv}$$

$$\frac{(A_v+t)}{s_{\min}} = \frac{50 \times 14}{60,000} = 0.0117$$

El mínimo no gobierna.

Para estribos #3, dos ramas  $A_v+t = 0.22 \text{ pulg}^2$

$$s = 3.05 \text{ pulg.}$$

Para estribos #4, dos ramas  $A_v+t = 0.40 \text{ pulg}^2$

$$s = 5.54 \text{ pulg.}$$

El espaciamiento mínimo (ACI Sección 11.6.6.1) es el menor de:

$$P_r/8 = \frac{62}{8} = 7.75 \text{ pulg}$$

Usar estribos #4 @ 5 pulg. c.a.c.

10.- Refuerzo longitudinal por torsión.

De la ecuación 11-12 del ACI:

$$A_l = (A_t/s) p_h (f_{yv}/f_{yt}) \cot^2\theta$$

$$=(0.020) \times 62 \times \frac{60,000}{60,000} \cot^2 45^\circ = 1.24 \text{ pulg}^2$$

De la ecuación 11-24 del ACI el  $A_{l_{\min}}$  es:

$$A_{l_{(\min)}} = \frac{5 \sqrt{f'_c} A_{cp}}{f_{yt}} - (A_t/s) p_h (f_{yv}/f_{yt})$$

donde  $A_t/s$  está basada en el área de estribos proporcionada en el paso anterior, estribos #4 @ 5".  $A_t$ , para una rama de estribo,  $\frac{A_t}{s} = \frac{0.20}{5} = 0.040$

$$A_r = \frac{5 \sqrt{3,000} \times 336}{60,000} - (0.040) \times 62 \times \frac{60,000}{60,000} = -0.95 \text{ pulg}^2$$

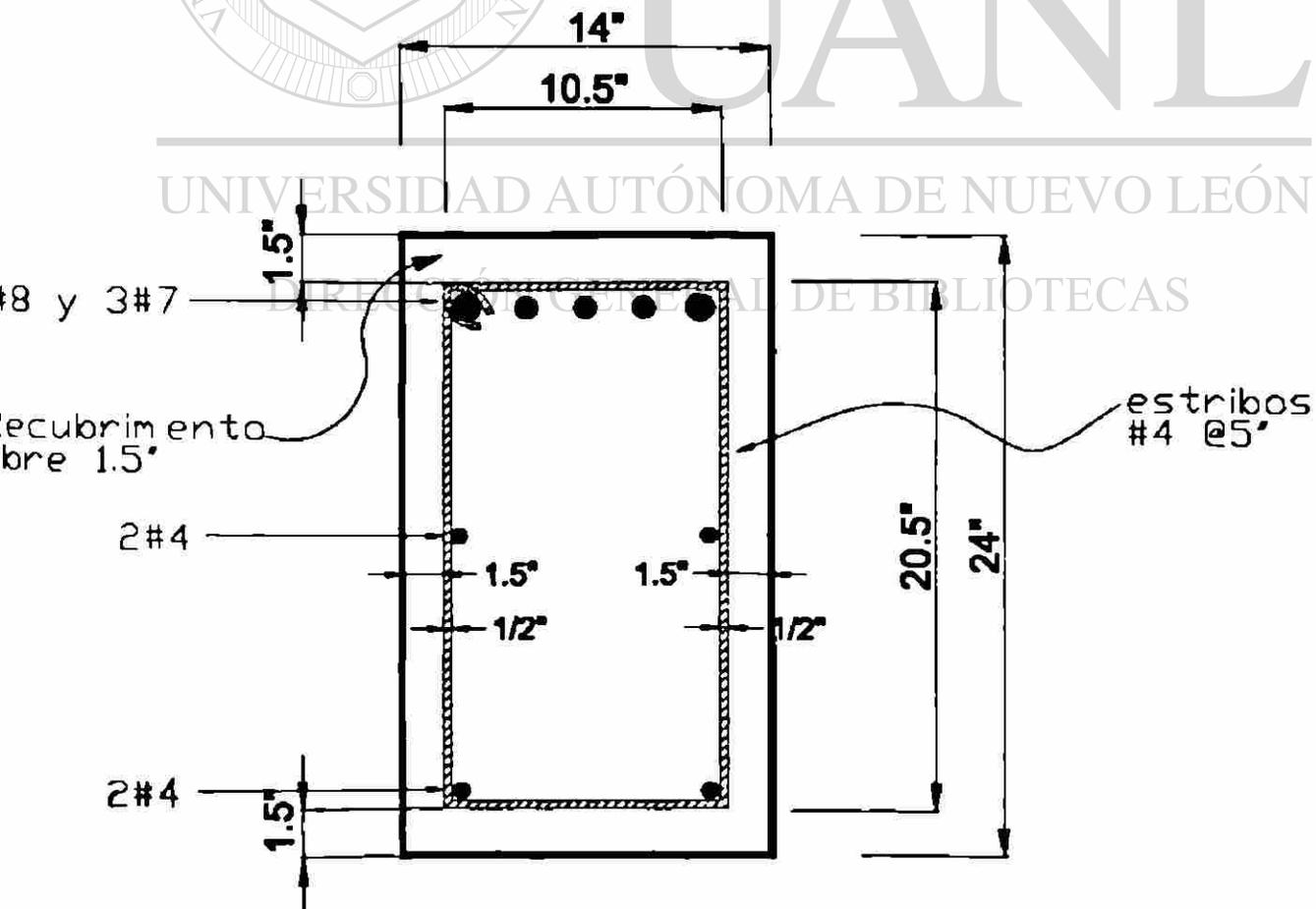
Como es negativa no se aplica y el  $A_{r(\min)}$  no gobierna, entonces proporcionar  $A_r = 1.24 \text{ pulg}^2$ .

Estas varillas deben quedar con un espaciamiento máximo 12 pulg. (30 cm) según ACI Sección 11.6.6.2 lo cual se logra con 6 varillas como mínimo cada una con un área de  $0.207 \text{ pulg}^2$ . Debe haber 1 varilla en cada esquina de estribo. El diámetro mínimo es  $1/24$  del espaciamiento de los estribos =  $5/25 = 0.21 \text{ pulg}$ .

Colocando 4 varillas #4 en la parte inferior de media viga y el resto se le añade al refuerzo de flexión.  $1.24 - 4 \times 0.20 = 0.44 \text{ pulg}^2$

Area total requerida en cara a tensión =  $2.99 + 0.44 = 3.43 \text{ pulg}^2$

2#8 + 3#7 las cuales quedan en una cama, como se muestra en la siguiente figura.



## 6.5.- PROBLEMAS

**6 - 1: Compatibilidad de Torsión.** El sistema de piso con "joist" mostrado en la figura P6-1 (siguiente página) soporta una carga total muerta factorizada de 157 LBS/pie<sup>2</sup> y una carga viva total factorizada de 170 LBS/pie<sup>2</sup>,  $W_{total} = 327$  LBS/pie<sup>2</sup>. Diseñar la viga de borde AB, en el eje 1. La carga muerta factorizada de la viga y las cargas factorizadas aplicadas directamente en la viga dan un total de 1.1 KLBS/pie. Los momentos y cortantes pueden calcularse por coeficientes (ACI Sección 8.3.3). Usar  $f_y = 60,000$  LBS/pulg<sup>2</sup> y  $f_c = 4000$  LBS/pulg<sup>2</sup>.

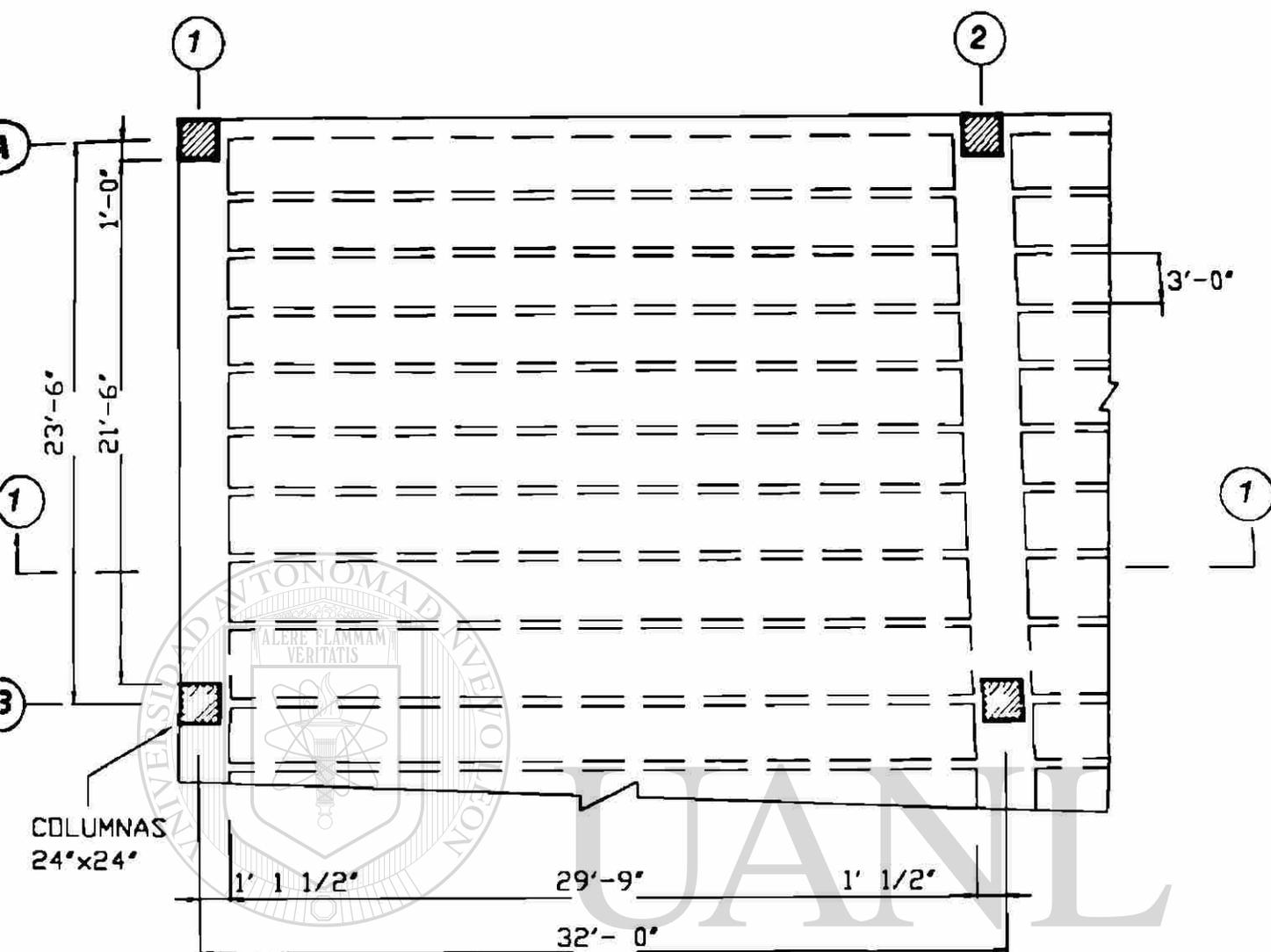
**6 - 2:** Una viga cantiliver de 2.50m de longitud y 45 cm de ancho soporta una carga muerta de 7 toneladas y una carga viva de 10 toneladas (de servicio) ; además de su peso propio. Diseñar refuerzo de flexión, cortante y torsión. Usar  $f_y = 4200$  kg/cm<sup>2</sup> y  $f_c = 210$  kg/cm<sup>2</sup>

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

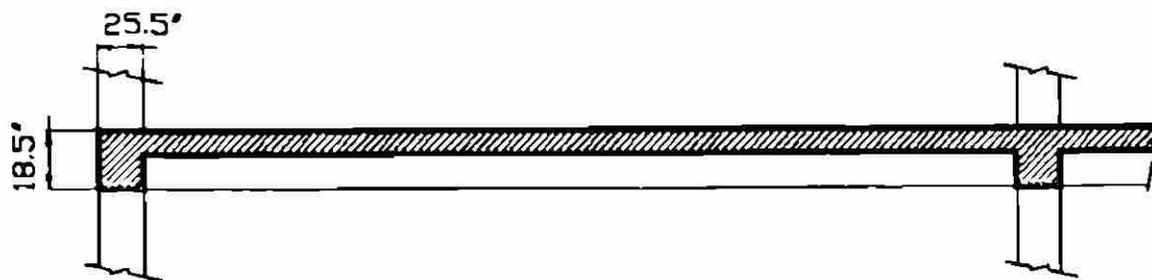
®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

**6 - 3:** Explicar la diferencia entre lo que es "equilibrio por torsión" y lo que es "compatibilidad de torsión".



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
 (a) Planta.  
 DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



(b) Sección 1-1

FIGURA P6-1

# **CAPÍTULO 7:**

## **DESARROLLO, ANCLAJE Y TRASLAPE DEL REFUERZO.**

**7.1.- Introducción.**

**7.2.- Longitud de desarrollo.**

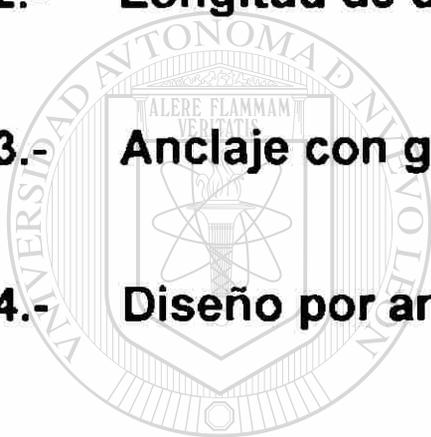
**7.3.- Anclaje con ganchos.**

**7.4.- Diseño por anclaje.**

**7.5.- Cálculo de los puntos de corte en refuerzo por flexión.**

**7.6.- Traslapes.**

**7.7.- Problemas.**



**UANL**

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

## 7-1.- INTRODUCCIÓN.

En una viga de concreto reforzado las fuerzas de compresión de la flexión son resistidas por el concreto, mientras que las fuerzas de tensión las resiste el refuerzo como se muestra en la Figura 7-1.

Para que este proceso exista es necesaria una fuerza de transferencia, o "adherencia" entre los dos materiales, como se muestra en la Figura 7-1b para que la varilla esté en equilibrio los esfuerzos de adherencia tienen que existir si estos desaparecen, la varilla se sale del concreto y la fuerza de tensión, T, se hace cero y se causa la falla de la viga.

Del cuerpo libre de la varilla, como se muestra en la Figura 7-2.

Si  $f_{s2}$  es mayor que  $f_{s1}$ , el esfuerzo de adherencia  $\mu$ , actúa en la superficie de la varilla manteniendo el equilibrio. Sumando fuerzas en la dirección de la varilla y llamando  $\mu_{prom}$  al esfuerzo de adherencia promedio, es:

$$\Delta f_s \frac{\pi d_b^2}{4} = \mu_{prom} \cdot (\pi d_b) l ; \text{ de donde :}$$

$$\mu_{prom} = \frac{\Delta f_s \cdot d_b}{4l}$$

Si  $l$  se toma como una longitud muy corta,  $dx$ , esta ecuación se puede escribir:

$$\mu_{prom} = \frac{df_s d_b}{4dx} ; \text{ de donde : } \frac{df_s}{dx} = \frac{4\mu}{d_b}$$

donde  $\mu$  es el esfuerzo de adherencia real actuando en una longitud  $dx$ .

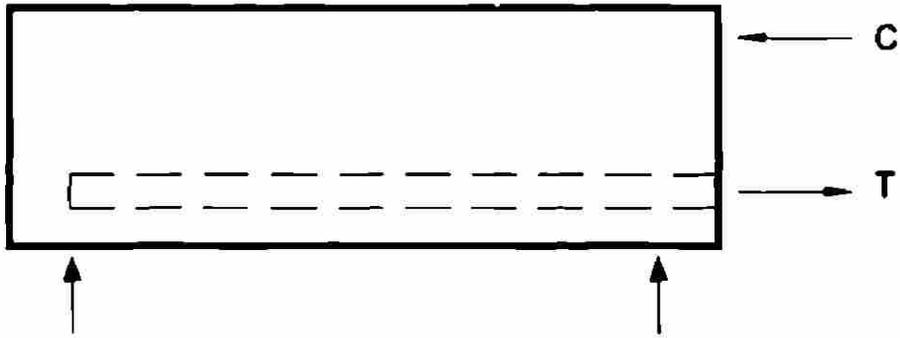
### Esfuerzo de adherencia promedio en una viga.

En una viga, la fuerza en el acero en una grieta puede ser expresada como:

$$T = M/jd$$

Donde  $jd$  es el brazo de palanca de las fuerzas internas y  $M$  es el momento actuando en la sección.

Si consideramos la longitud de viga entre dos grietas como se muestra en la Figura 7-3.



(a) Fuerzas internas en la viga.

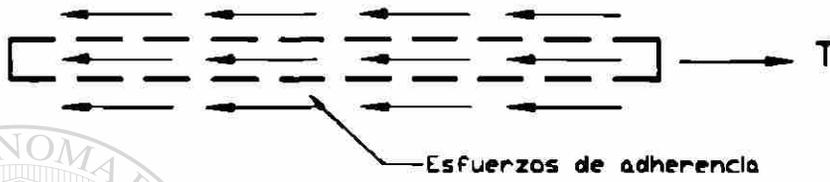


FIGURA 7-1.  
ADHERENCIA DEL REFUERZO.



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

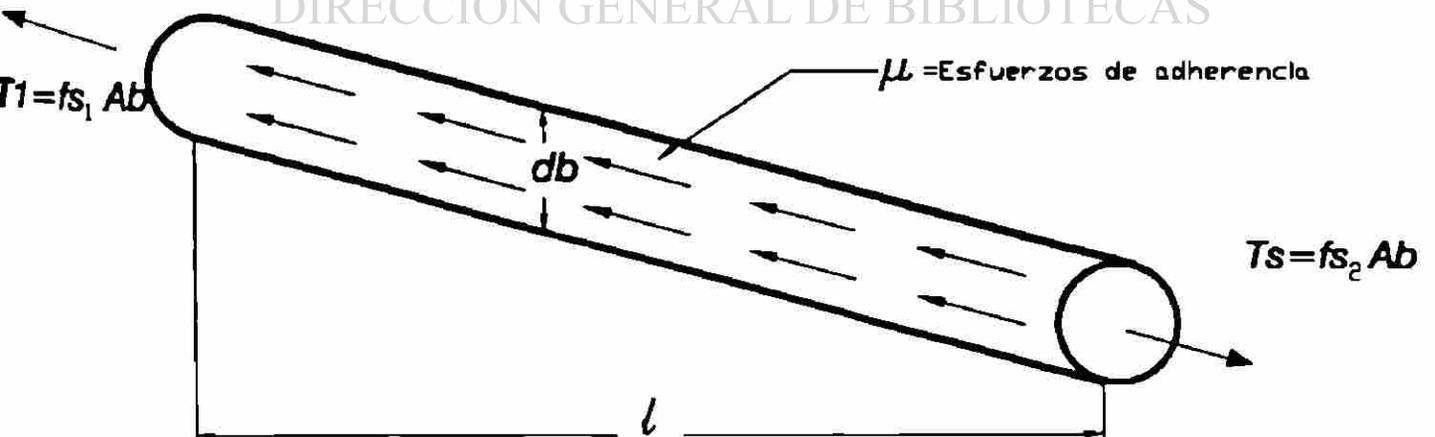


FIGURA 7-2.  
RELACION ENTRE LOS ESFUERZOS DE ADHERENCIA EN LA VARILLA.

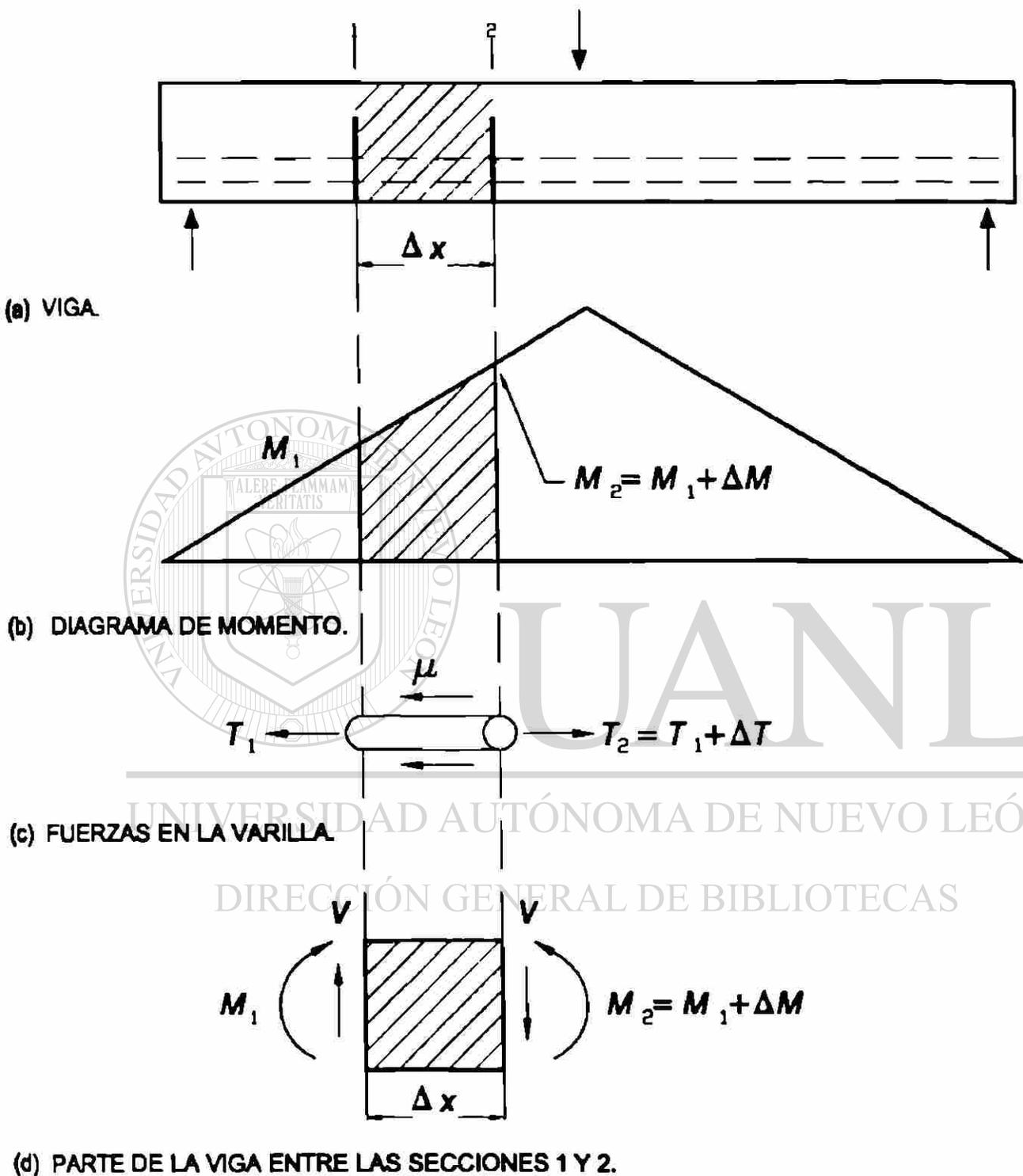


FIGURA 7-3.  
ESFUERZO PROMEDIO DE ADHERENCIA EN FLEXION.

Los momentos actuando en las dos grietas son  $M_1$  y  $M_2$ . Si la viga está reforzada con una varilla son las mostradas en la Figura 7-3c.

Sumando fuerzas horizontales da:

$$\Delta T = (\pi d_b) \mu_{prom} \Delta x$$

y como  $\Delta M = (\Delta T)(jd)$

$$\Delta T = \Delta M/jd = (\pi d_b) \mu_{prom} (\Delta x)$$

$$\text{de donde } \Delta M/\Delta x = (\pi d_b) \mu_{prom} (jd)$$

Del diagrama de cuerpo libre de la Figura 7-3d, podemos ver que  $\Delta M = (V)(\Delta x)$  ó  $\Delta M/\Delta x = V$ .

$$\text{Entonces: } \mu_{prom} = \frac{V}{(\pi d_b)jd}$$

Si hay más de una varilla, el perímetro  $(\pi d_b)$  es reemplazado con la suma de los perímetros,  $\Sigma O$ , dando:

$$\mu_{prom} = \frac{V}{\Sigma Ojd}$$

Las ecuaciones anteriores dan el promedio del esfuerzo de adherencia entre dos grietas de una viga.

## 7.2 LONGITUD DE DESARROLLO.

Debido a que el esfuerzo de adherencia varía a lo largo de la longitud de la varilla anclada en la zona de tensión, el Código ACI usa el concepto "longitud de desarrollo" para transmitir el esfuerzo de adherencia. La longitud de desarrollo,  $l_d$ , es la longitud más corta o mínima de la varilla en la cual el esfuerzo (en la varilla) se puede incrementar de cero a la resistencia de fluencia,  $f_y$ . Si la distancia de un punto, en la varilla donde el esfuerzo es igual al  $f_y$ , a el extremo de la varilla es menor que la longitud de desarrollo, la varilla se desprende del concreto.

La longitud de desarrollo puede expresarse en términos del valor último del esfuerzo promedio de adherencia y la fluencia  $f_y$  del acero, como:

$$l_d = \frac{f_y \cdot d_b}{4 \mu_{prom}}$$

dónde el  $\mu_{prom}$  es el valor del esfuerzo de adherencia promedio en la longitud de desarrollo de la varilla.

## Longitudes de desarrollo en tensión

### Ecuación básica

En 1977, Orangun dedujo una ecuación para longitud de desarrollo como resultado en pruebas de adherencia y traslapes. La ecuación resultante para,  $l_d$ , esta en función del diámetro de la varilla  $d_b$ , el esfuerzo desarrollado,  $\sqrt{f_c}$ , el recubrimiento y/o espaciamiento entre varillas y la relación de refuerzo transversal.

Esto sirvió de base para las ecuaciones de  $l_d$  del Reglamento ACI 1989. Estas son algo difícil de usar, sin embargo, entre 1989 y 1995, el Comité 318 y el Comité de Adherencia del ACI simplificaron las expresiones de diseño.

Esto consiste en dos pasos. Primero, se valúa una expresión básica para,  $l_d$ , expresada como múltiplo del diámetro de la varilla,  $d_b$ , esto da un punto de comparación. Está dada en la Sección 12.2.3 del ACI, como:

$$l_d = \frac{3}{40} \frac{f_y}{\sqrt{f_c}} \frac{\alpha\beta\gamma\lambda}{c + \frac{K_{tr}}{d_b}} \quad (\text{unidades en S.I.}) \quad (\text{ACI Ec. 12-1})$$

Donde el término  $(c+K_{tr}/d_b)$  está limitado a no mayor de 2.5 para prevenir la falla por adherencia, y la longitud  $l_d$ , no menor de 12 pulg.

$l_d$  es la longitud de desarrollo, en pulgadas.

$d_b$  es el diámetro de la varilla, en pulgadas.

$\alpha$  es un factor de localización de la varilla en ACI Sección 12.2.4.

$\beta$  es un factor de recubrimiento epóxico dado por ACI Sección 12.2.4

$\gamma$  es un factor de diámetro de varillas ACI Sección 12.2.4

$\lambda$  es un factor de concreto ligero ACI Sección 12.2.4

$c$  es el menor de :

(a) la menor distancia medida de la superficie de concreto al centro de la varilla desarrollada.

(b) un medio del espaciamiento centro a centro entre las varillas desarrollada, (recubrimiento).

$K_r$  es el factor de refuerzo transversal dado por ACI Sección 12.2.4

El segundo paso es la simplificación de la ecuación anterior sustituyendo valores comunes de  $c$  y  $K_r$ .

### Ecuaciones simplificadas para la longitud de desarrollo por tensión

En muchos casos la ecuación de  $l_d$  del ACI es difícil de usar porque los valores de  $c$  y  $K_r$  varían a lo largo de la longitud del miembro. La ecuación 12-1 del ACI se ha simplificado sustituyendo los límites inferiores de  $c$  y  $K_r$  para los casos más comunes de diseño con expresiones que no incluyen estos factores. Para varillas y alambres corrugados el ACI Sección 12.2.2 define a la longitud de desarrollo como se da la tabla de la sección 12.2.2 del ACI. La primer fila de la Tabla considera mínimo de estribos y los espaciamientos mínimos especificados en el ACI Secciones 11.5.4.1, 11.5.5.3 y 7.10.5.

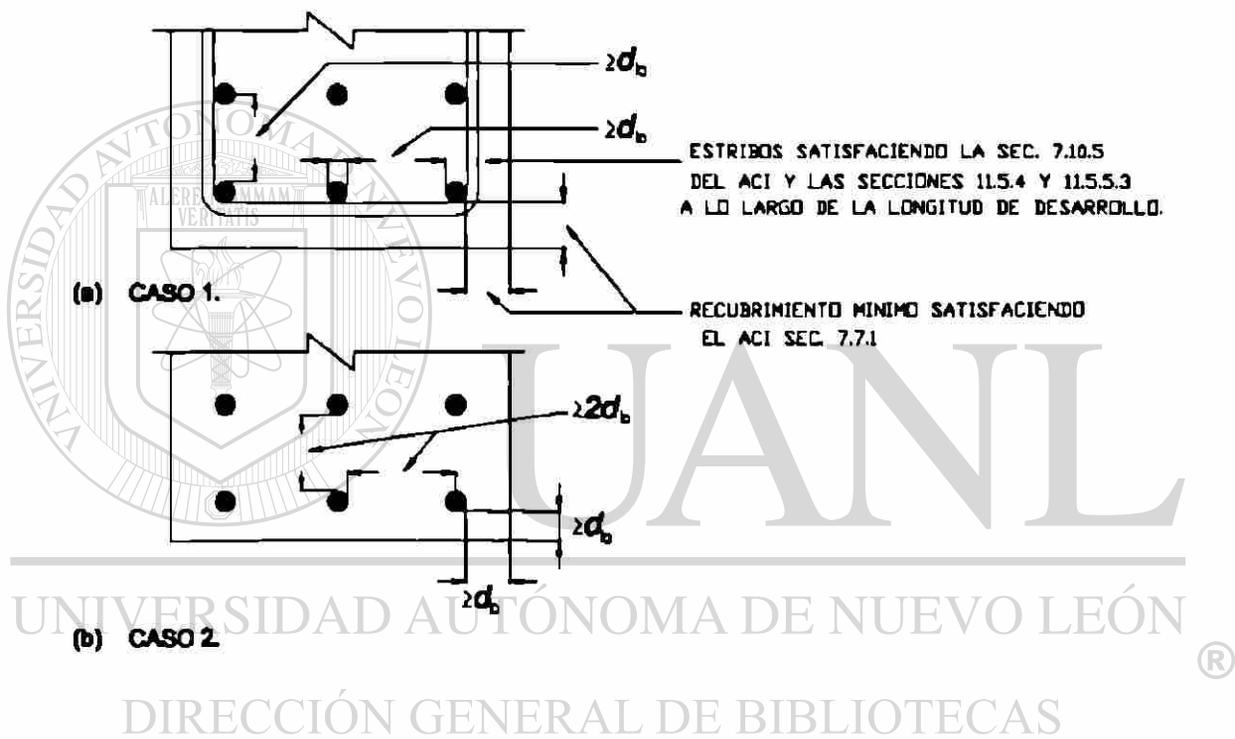
El espaciamiento en las varillas desarrolladas o traslapadas no menor de  $d_b$  corresponde a  $c = (\text{espacio de } d_b/2) + d_b/2 = d_b$ .

La cantidad mínima de estribos corresponde a  $K_r$  de  $0.5d_b$ . Entonces, para esta combinación  $(c + K_r/d_b) \approx 1.5$ . Similarmente un espaciamiento libre de varillas por desarrollar o traslapar no menor de  $2d_b$  con recubrimiento no menor del  $d_b$  y estribos o anillos mínimos corresponden a  $c = 1.5d_b$  y  $(c + K_r/d_b) = 1.5$ . El factor de tamaño de varilla  $\gamma$  es 0.8 para varillas No. 6 y menores y 1.0 para varillas No. 7 y mayores, sustituyendo estos valores en la ecuación original da las fórmulas de la Tabla de la Sección 12.2.2 del ACI.

## Factores de la ecuación (12-1 ACI)

Estos factores se definen en la Sección 12.2.4 del ACI.

En la siguiente figura se presenta gráficamente la explicación de la tabla de la sección 12.2.2 del ACI.



## Acero de refuerzo en exceso.

Aparece en la Sección 12.2.5 del ACI.

### Longitud de desarrollo en compresión.

Es menor que la  $l_d$  de tensión porque la misma fuerza es transferida en el concreto por empuje en el extremo de la varilla y porque no hay grietas en la región de anclaje.

La longitud de desarrollo básica es (ACI Sección 12.3)

$$l_{db} = \frac{0.075 d_b f_y}{\sqrt{f_c}} \quad \text{pero no menor que } 0.0043 d_b f_y$$

La constante lleva como unidad  $m^2/kg$ , esta longitud debe multiplicarse por los factores de la Sección 12.3.3 por exceso de refuerzo y si esta encerrada en espiral o estribos. La longitud de desarrollo resultante no deberá ser menor de 8 pulg. (20 cm) (ACI Sección 12.3.1).

### Longitudes de desarrollo para varillas recubiertas

En cubiertas de puente o en losas de estacionamiento es práctica común usar varillas de refuerzo recubiertas con epóxico o galvanizado para reducir los problemas de corrosión. En varillas con recubrimiento epóxico se afectarán por el factor  $\beta$  del ACI Sección 12.2.4. Las varillas recubiertas con zinc o galvanizado pueden ser afectadas en sus propiedades de adherencia debido a la reacción química con el alcali del concreto. Esto se puede prevenir tratando a las varillas con una solución de cromo después del galvanizado. Si esto se da, la adherencia es esencialmente la misma que en refuerzo normal.

### Longitud de desarrollo de la malla de alambre liso soldado sujeta a tensión.

El ACI Sección 12.8 trata de esto. El anclaje de la malla depende del anclaje de dos alambres transversales, con el alambre transversal más próximo a no menos de 5 cm del punto de la sección crítica.

Sin embargo, la longitud de desarrollo básica  $\ell_d$  medida desde el punto de la sección crítica hasta el alambre transversal más alejado, no debe ser menor que:

$$1.02 (A_w/s_w)(f_y/\sqrt{f'_c})\lambda \quad (\text{sistema métrico})$$

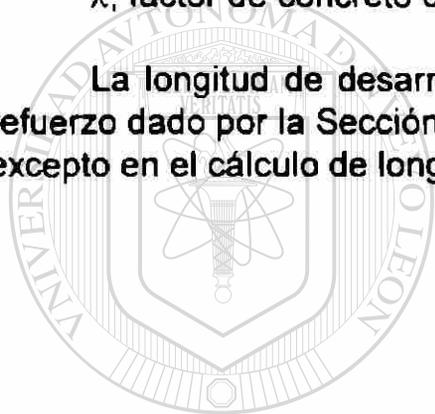
donde:

$A_w$  es el área de un alambre individual que se debe desarrollar o traslapar,  $\text{cm}^2$ .

$s_w$  es el espaciamiento máximo del acero de refuerzo transversal dentro de  $\ell_d$ , centro a centro, cm.

$\lambda$ , factor de concreto de agregado ligero.

La longitud de desarrollo debe multiplicarse por el factor de exceso de refuerzo dado por la Sección 12.2.5 pero no debe ser menor de 6 pulg. (15 cm), excepto en el cálculo de longitud de traslapes dadas por la Sección 12.19.



# UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

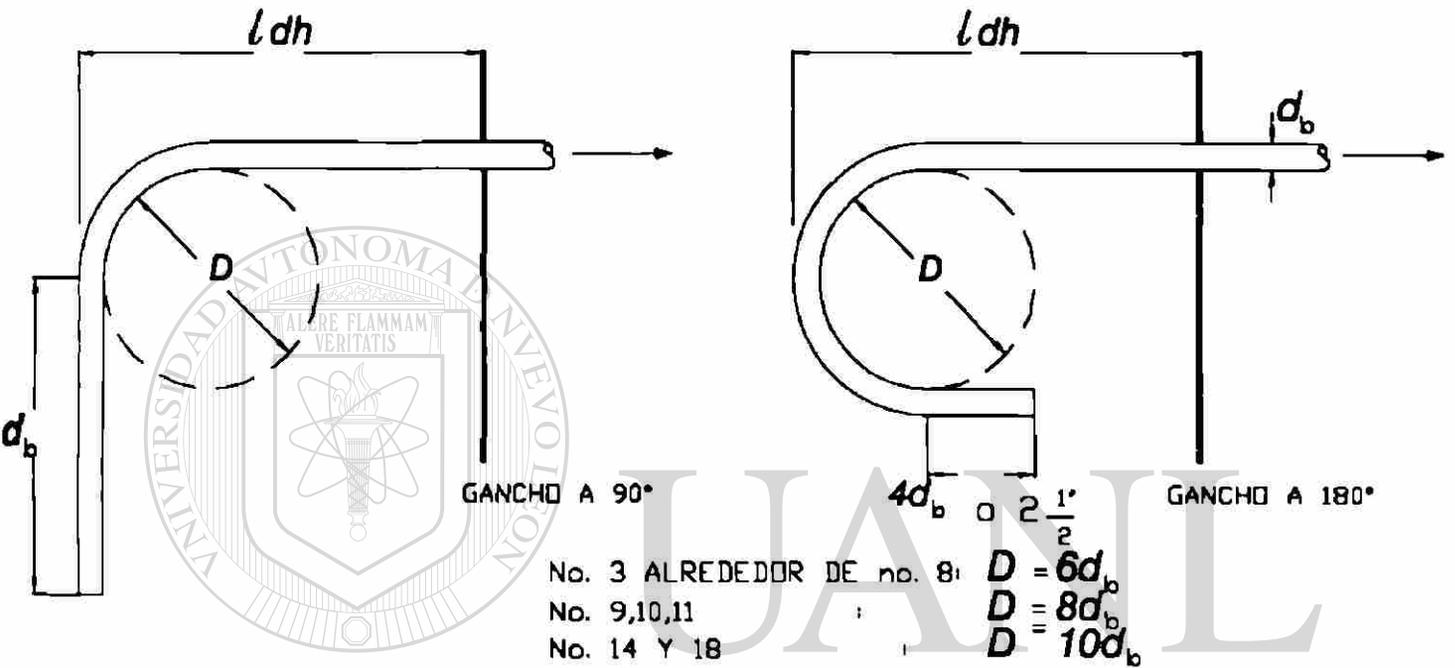
®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

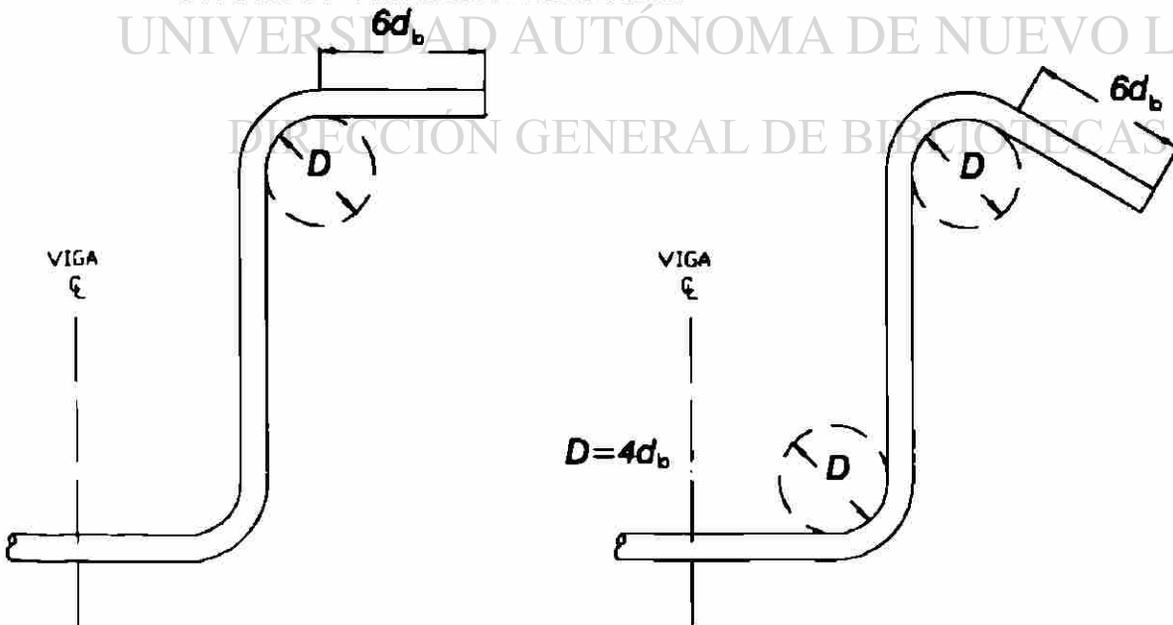
### 7-3.- ANCLAJE CON GANCHOS.

#### COMPORTAMIENTO DE ANCLAJES CON GANCHO

Los ganchos se usan para dar un anclaje adicional cuando la longitud de la varilla no es suficiente para desarrollar la adherencia. En el ACI Sección 7.1 se les denomina "Ganchos estándar". En la siguiente figura se detallan los "ganchos estándar en varillas y estribos".



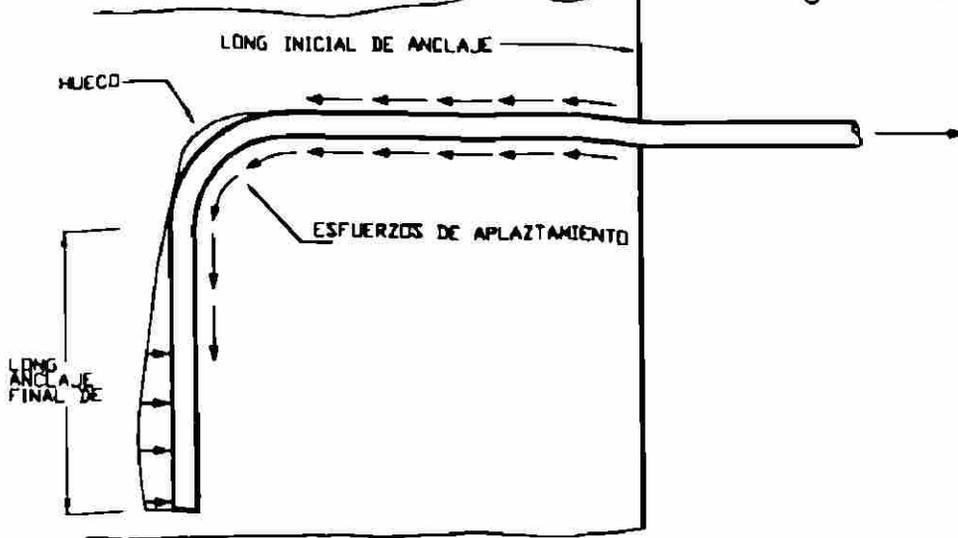
#### 1) GANCHOS ESTANDAR - ACI Sec. 7.1 and 7.2.1.



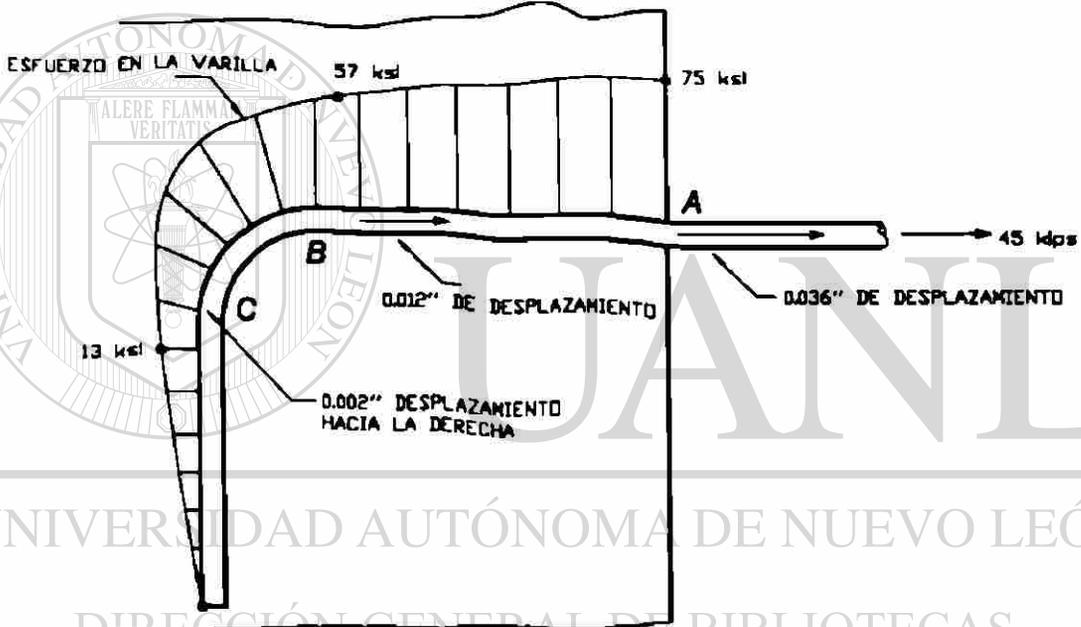
#### 2) GANCHOS DE ESTRIBOS #3 - ACI Sec. 7.1.3 For No. 3.

#### 3) GANCHOS ESTANDAR.

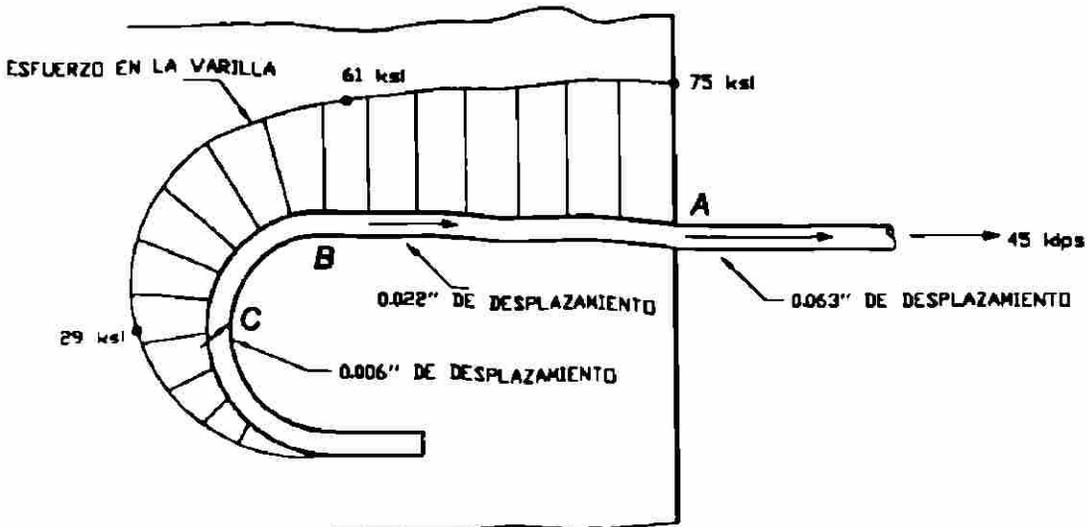
En la siguiente figura se ilustra el comportamiento de un gancho a 90° sujeto a tensión



(a) FUERZAS ACTUANDO EN LA VARILLA.



(b) ESFUERZOS Y DESPLAZAMIENTOS EN GANCHO ESTANDAR A 90°:



(c) ESFUERZOS Y DESPLAZAMIENTOS EN GANCHO ESTANDAR A 180°:  
COMPORTAMIENTO DE GANCHOS.

El esfuerzo en la varilla es resistido por la adherencia en la superficie de la varilla y el empuje del concreto en el interior del gancho.

El gancho se mueve interiormente, dejando un hueco entre el lado exterior de la varilla y el concreto en el cual se producen también esfuerzos de compresión.

La falla del gancho siempre involucra agrietamiento del concreto dentro del gancho.

Los esfuerzos y deslizamientos medidos en puntos a lo largo del gancho para un esfuerzo en la varilla de  $1.25 f_y$  (75 ksi) en pruebas de ganchos No. 7 se pueden apreciar en los incisos (b) y (c) de la figura anterior.

### Diseño de anclaje de ganchos

El ACI Sección 12.5.1 no diferencia entre ganchos a  $90^\circ$  y  $180^\circ$  o varillas de lecho superior o inferior.

La longitud de desarrollo del gancho  $l_{db}$ , se calcula con el producto de la longitud de desarrollo básica  $l_{db}$  por los factores. La longitud de desarrollo final no debe ser menor de  $8d_b$  o 6 pulg. (15 cm) el que sea menor. La longitud de desarrollo para un gancho de varilla con  $f_y = 60,000$  psi. ( $4200 \text{ kg/cm}^2$ ) será:

$$l_{db} = \frac{318 d_b}{\sqrt{f_c'}} \quad (\text{sistema métrico}) \quad (\text{ACI sec. 12.5.2})$$

La longitud de desarrollo básica del gancho  $l_{db}$  deberá multiplicarse por los factores dados por el ACI en las Secciones. 12.5.3.1, 12.5.3.2, 12.5.3.3, 12.5.3.4 y 12.5.3.5.

En los extremos de miembros discontinuos donde el gancho requiere de recubrimiento tanto al extremo libre del elemento como lateral, tanto para varillas de lecho superior e inferior de menos de  $2 \frac{1}{2}$ " (6.3 cm), las varillas con gancho se deben encerrar a lo largo de la longitud  $l_{db}$  por anillos o estribos con un espaciamiento no mayor de  $3d_b$ , donde  $d_b$  es el diámetro de la varilla con gancho según ACI 12.5.4. En gancho de varillas de losas en sus extremos discontinuos se considera que tienen confinamiento a ambos lados del gancho y por lo tanto no se aplica la Sección 12.5.4 del ACI.

Requisitos especiales para ganchos en juntas de marcos resistentes a cargas sísmicas aparecen en la Sección 21.5.4.1 del ACI. Debido a que éstos ganchos deben estar dentro de la columna del marco, estas reglas implican la garantía del confinamiento de los ganchos.

#### 7-4.- DISEÑO POR ANCLAJE.

La regla básica que rige el diseño de desarrollo y anclaje de las varillas es: "La tensión o compresión calculada en el acero de refuerzo en cada sección de elementos de concreto reforzado, se deberá desarrollar a cada lado de dicha sección, mediante la longitud de anclaje, gancho o dispositivo mecánico o combinación de ambos. Los ganchos no se pueden utilizar para desarrollar varillas en compresión (ACI Sección 12.1).

El siguiente ejemplo se resuelve en unidades del sistema inglés, se recomienda al alumno resolverlo en los sistemas métrico e internacional aplicando el Código ACI 318-95.

#### EJEMPLO 7-1.- ANCLAJE DE UNA VARILLA RECTA.

Una viga cantiliver de 16 pulg. de ancho se ancla a un muro como se muestra en la siguiente figura.



ANCLAJE DE UNA VARILLA RECTA.

Las varillas #3 son esforzadas al esfuerzo de fluencia  $f_y$  en el punto A en la cara del muro. Calcular la  $\ell_d$  mínima dentro del muro.

El concreto es de agregado ligero con  $f_c = 3000$  LBS/pulg<sup>2</sup>.

Acero de refuerzo,  $f_y = 60,000$  LBS/pulg<sup>2</sup>.

Se localizan juntas de construcción arriba y abajo de los paños de la viga.

La viga tiene estribos No. 3 con  $f_y = 40,000$  LBS/pg<sup>2</sup>.

El recubrimiento de los estribos es 1.5 pulg.

1.- Revisión de espaciamiento y recubrimiento de las varillas por desarrollarse:

$$\text{Espaciamiento libre: } \frac{16-2(1.5+0.5)-3 \times 1.0}{2}$$

$$= 4.5 \text{ pulg} = 4.5 d_b$$

$$\text{Recubrimiento en el muro: } 1.5+0.5 = 2.0 \text{ pulg.} = 2 d_b$$

Como el recubrimiento es mayor que  $d_b$  y el espaciamiento es mayor que  $2d_b$  se aplica la ecuación:

$$\frac{\ell_d}{d_b} = \frac{f_y \alpha \beta \lambda}{20 \sqrt{f_c}}$$

donde:

$\alpha = 1.3$  porque se tienen más de 12 pulg de concreto fresco debajo de las varillas.

$\beta = 1.0$  porque las varillas no tienen recubrimiento epóxico.

$\lambda = 1.3$  porque el concreto es de agregado ligero.

$$\frac{\ell_d}{d_b} = \frac{60,000 \times 1.3 \times 1.0 \times 1.3}{20 \sqrt{3,000}} = 92.6$$

Entonces, la longitud de desarrollo es:

$$\ell_d = 92.6 \times 1.0 = 92.6 \text{ pulg.}$$

Las varillas deben extenderse 92.6 pulg. dentro del muro para que se desarrolle la resistencia de fluencia.

Extender las varillas 8 pies dentro del muro.

Alternativamente, hay que revisar el ACI Sección 12.2.3

$$l_d = \frac{3}{d_b} \frac{f_y}{\sqrt{f_c}} \frac{\alpha\beta\gamma\lambda}{c+K_{tr}} \frac{d_b}{d_b}$$

donde:  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\lambda$  son los mismos valores anteriores y  $\gamma = 1.0$  porque las varillas son No. 8.

$c$  = el menor de:

(a).- La distancia del centro de la varilla a la superficie más cercana de concreto

$$\text{lateral} = 1.50 + 0.50 + 1.0/2 = 2.5 \text{ pulg.}$$

$$\text{vertical} = 1.50 + 1.0/2 = 2.0 \text{ pulg.}$$

(b).- La mitad centro a centro del espaciamiento de las varillas

$$= 0.5 \frac{(16 - 2 \times 2.5)}{2} = 2.75 \text{ pulg.}$$

Entonces,  $c = 2.0$  pulg.

$$K_{tr} = \frac{A_{tr} f_y}{1500 s n}$$

donde:

$s$  = espaciamiento del refuerzo transversal en la longitud de desarrollo,  
 $l_d = 12$  pulg.

$A_{tr}$  = Área total de la sección transversal del acero de refuerzo transversal que se encuentra dentro del espaciamiento  $s$ , y que cruza el plano potencial de separación, a través del refuerzo que va a desarrollarse en  $\text{pulg}^2$ .

$$A_{tr} = 2 \times 0.20 = 0.40 \text{ pulg}^2$$

$f_y = 60,000$  LBS/pulg<sup>2</sup> para el refuerzo del muro.

$n = \text{número de varillas que se están desarrollando} = 3.$

$$\text{Entonces: } K_r = \frac{0.40 \text{ pulg}^2 \times 60,000 \text{ LBS/pulg}^2}{1,500 \text{ LBS/pulg}^2 \times 12 \text{ pulg} \times 3}$$
$$= 0.444 \text{ pulg.}$$

$$\text{El término } c + \frac{K_r}{d_b} = 2.0 \text{ pulg} + \frac{0.444 \text{ pulg.}}{1.0 \text{ pulg}}$$
$$= 2.44$$

pero no mayor de 2.5. Sustituyendo en la ecuación original, tenemos:

$$l_d/d_b = \frac{3}{40} \times \frac{60,000}{\sqrt{3,000}} \times \frac{1.3 \times 1.0 \times 1.0 \times 1.3}{2.44} = 56.8$$

Entonces:  $l_d = 56.8 \times 1.0 = 56.8 \text{ pulg.}$

De acuerdo con esto:

Extender las varillas 5 pies dentro del muro.

En este caso, hay una gran diferencia entre las dos ecuaciones porque la primera es considerando  $c + K_r/d_b = 1.5$  y la segunda con 2.44

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS  
**EJEMPLO: Desarrollo de una varilla en cantiliver**

El cantiliver del ejemplo anterior se extiende 48 pulg., dentro de la cara del muro. Las varillas se esfuerzan a su resistencia de fluencia dentro de la cara del muro.

¿Se pueden desarrollar  $l_d$  varillas #8?

¿Caso negativo que varilla debe usarse?

La viga tiene estribos cerrados #3 grado 40 @ 7.5 pulg., c. a. c., en toda su longitud. El punto de máximo esfuerzo ocurre en el paño del muro.

Las varillas deberán extenderse por lo tanto un mínimo de  $l_d$  dentro del muro y en el claro.

**1.- Determinar espaciamiento y su confinamiento.**

Del ejemplo anterior el espaciamiento de las varillas #8 es  $4.5d_b$  y el área mínima de estribos es, (ACI Sección 11.5.5.3) :

$$A_v = 50 \frac{b_w s}{f_s} = 50 \frac{16 \times 7.5}{40,000} = 0.15 \text{ pulg}^2$$

se tienen est. # 3,  $A_v = 0.22 \text{ pulg.}$   $\therefore$  está bien.

El espaciamiento de los estribos no debe exceder  $d/2 = 7.80 \text{ pulg.}$   $\therefore$  está bien.

**2.- Longitud de desarrollo.**

Del ejemplo anterior  $\ell_d$  para varillas #8 es 92.6 pulg.

Las varillas se pueden extender  $60 - 1.5 = 58.5 \text{ pulg.}$ , dentro de la viga desde la cara del muro, lo cual es insuficiente para las varillas #8. Podemos usar varillas menores con  $\ell_d$ , más corta o con ganchos en B, como se muestra en la figura anterior, (página 185).

Usando 6 varillas #6 ( $A_s = 2.64 \text{ pulg}^2$  comparando con 3 varillas #8 con  $A_s = 2.37 \text{ pulg}^2$ )

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

**1'.- Revisar espaciamiento y confinamiento del refuerzo transversal** <sup>®</sup>

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

El recubrimiento libre lateral es  $1.5 + 0.5 = 2.0 \text{ pulg.} = 2d_b$ . El espaciamiento de las 6 varillas #6 es:

$$\frac{16 - 2 \times 2 - 6 + 0.75}{5} = 1.50 \text{ pulg} = 2d_b$$

Los estribos exceden el Código mínimo y el espaciamiento es mayor que  $d_b$ , entonces se aplica la siguiente ecuación :

2'.- Longitud de desarrollo.

$$\frac{\ell_d}{d_b} = \frac{f_y \alpha \beta \lambda}{25 \sqrt{f_c'}} = \frac{60,000 \times 1.3 \times 1.0 \times 1.3}{25 \sqrt{3000}} = 74.0 \text{ pulg.}$$

$$\text{y } \ell_d = 74.0 \times 0.75 = 55.5 \text{ pulg.} < 58.5 \text{ pulg.}$$

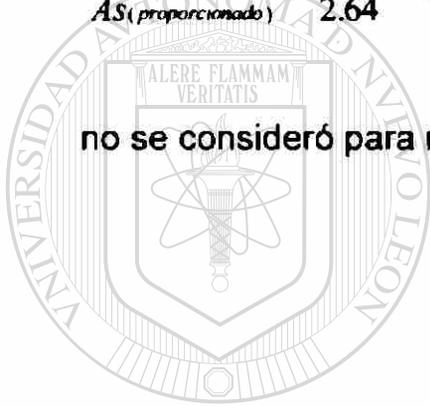
Las varillas #6 se pueden desarrollar sin ganchos en el extremo libre.

Usar 6 varillas #6.

El ACI Sección 12.2.5 permite reducir la  $\ell_d$  por la relación:

$$\frac{AS(\text{requerido})}{AS(\text{proporcionado})} = \frac{2.37}{2.64} = 0.898$$

no se consideró para mayor seguridad.



UANL

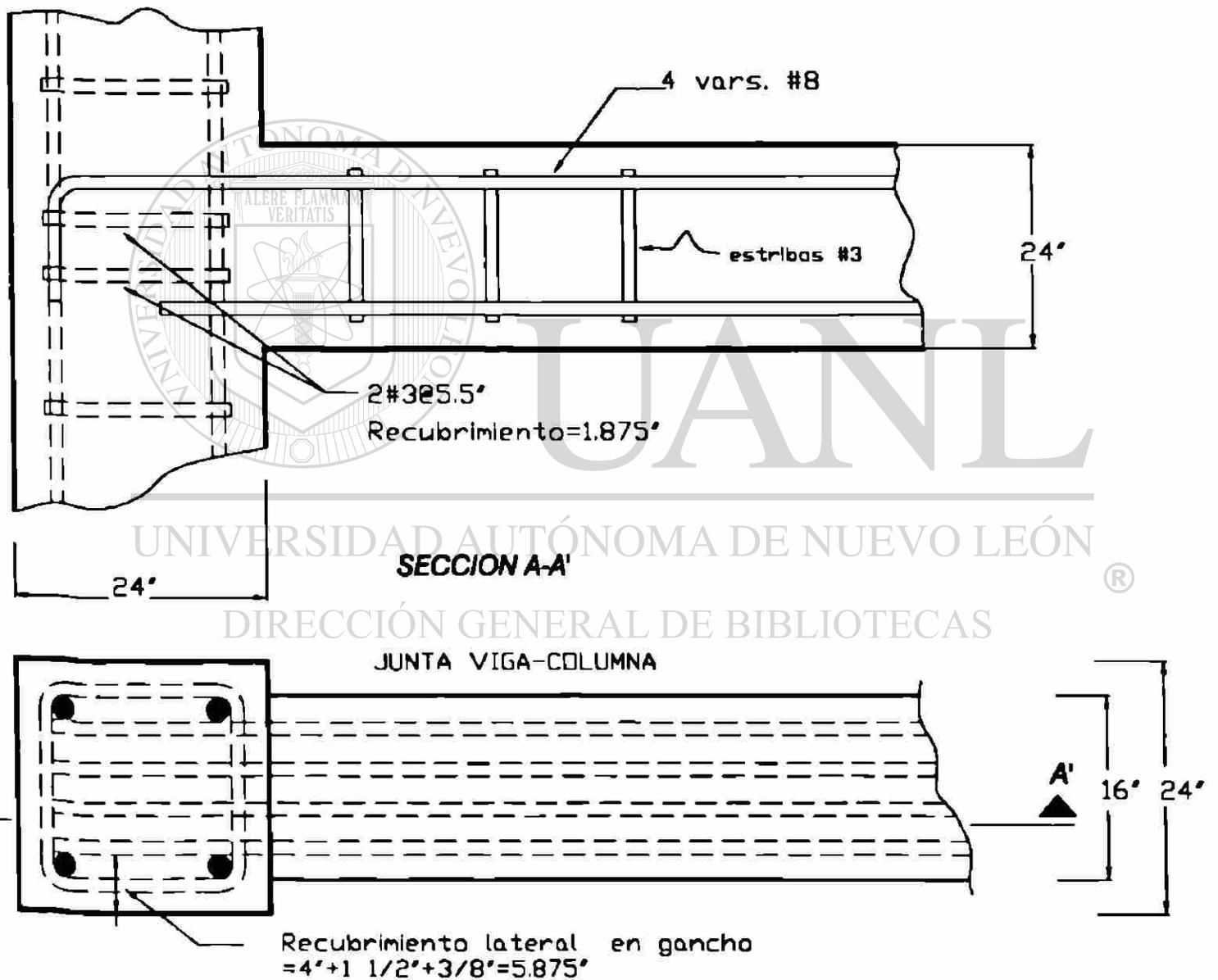
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



**EJEMPLO**

**GANCHO DE ANCLAJE DENTRO DE UNA COLUMNA**



**GANCHO DE ANCLAJE DENTRO DE UNA COLUMNA.**

La columna tiene 4 varillas #11 longitudinales. El refuerzo para momento negativo en la viga consiste de 4 varillas #8.

Concreto  $f_c = 3,000$  LBS/pulg<sup>2</sup> de peso normal.

Acero de refuerzo,  $f_y = 60,000$  LBS/pulg<sup>2</sup>

**Diseñar anclaje de las varillas #8, dentro de la columna.**

1.- Longitud de desarrollo de las varillas de la viga.

$$\frac{\lambda_d}{d_b} = \frac{3}{40} \times \frac{f_y}{\sqrt{f'_c}} \times \frac{\alpha\beta\gamma\lambda}{c + d_b} K_{TR}$$

donde:

$\alpha = 1.3$  (Varillas de lecho superior)

$\beta = 1.0$  (no epóxico)

$\gamma = 1.0$  (Varillas #8)

$\lambda = 1.0$  (concreto de peso normal)

$c =$  El menor de: GENERAL DE BIBLIOTECAS

(a) La distancia del centro de la varilla al paño de la viga más cercano.

$$\text{Distribuir al paño superior} = 1.50 + 0.375 + 1.0/2$$

$$= 2.375 \text{ pulg.}$$

(b) La mitad de la distancia centro a centro del espaciamiento entre varillas:

$$1/2 \frac{(16 - 2 \times 2.375)}{3} = 1.875 \text{ pulg}$$

Entonces,  $c = 1.875$  pulg.

$$K_{Tr} = \frac{A_{tr} f_{yr}}{1500 s_n}$$

$A_r$  = Area total de la sección transversal del acero de refuerzo transversal dentro de un espaciamiento  $s$  y que cruza el plano potencial de separación a través del refuerzo que va a desarrollarse.

$$4 \text{ varillas } \#11 = 4 \times 1.56 = 6.24 \text{ pulg}^2$$

$s$  = Espaciamiento del refuerzo transversal (asumimos que el acero de la columna se confina en el ancho de la columna = 24 pulg)

$$K_r = \frac{6.24 \times 60,000}{1500 \times 24 \times 4} = 2.60 \text{ pulg.}$$

$$c + K_r/d_b = 1.875 + 2.60/1 = 4.475 \text{ pero no mayor de } 2.5$$

$$l_d/d_b = (3/40) (60,000/\sqrt{3,000}) [(1.3 \times 1.0 \times 1.0 \times 1.0)/2.5]$$

$$l_d = 42.7 \times 1.0 = 42.7 \text{ pulg.} > 24 \text{ pulg} = \text{ancho de columna.}$$

Es necesario usar ganchos para anclar las varillas.

## 2.- Longitud de desarrollo de los ganchos.

Longitud de desarrollo básica:

$$l_{nb} = \frac{1200 d_b}{\sqrt{f_c}} = \frac{1200 \times 1.0}{\sqrt{3000}} = 21.9 \text{ pulg.}$$

Considerando que las varillas se extenderán dentro del refuerzo vertical de la columna. El ACI Sección 11.11.2 requiere un mínimo de estribos en la junta. Considerando estribos #3. El espaciamiento requerido es ACI Sección 11.11.2.

$$A_v = \frac{50 b_w s}{f_y} \longrightarrow$$

$$s = \frac{A_v f_y}{50 b_w} = \frac{0.11 \times 60,000}{50 \times 24}$$

$$s = 5.5 \text{ pulg.}$$

El recubrimiento lateral de los ganchos es:

4 pulg., de diferencia con viga + 1.5 pulg., recubrimiento + 0.375 pulg. est. = 5.875 pulg.

Esto excede 2 1/2" y entonces esta bien.

El recubrimiento para el gancho es:

1.5 pulg. de estribos + 0.375 pulg. estribos = 1.875 pulg.

$$l_{dh} = l_{hb} \times \text{Factores de ACI Sección 12.5.3}$$

12.5.3.2 (b): El recubrimiento lateral excede 2.5" pero el recubrimiento de la extensión de la varilla es menor de 2 pulg. entonces el factor es 1.0. La Sección 12.5.4 del ACI no se aplica porque el recubrimiento excede 2.5 pulg. Entonces solamente los estribos mínimos requeridos por la Sección 11.11.2 son requeridos: estribos No. 3 @ 5.5 pulg. La Sección 12.5.3.3 no se aplica, entonces el factor es 1.0

$$l_{dh} = l_{hb} \times 1.0 \times 1.0 = 21.9 \text{ pulg.} \geq 8 d_b \text{ ó } 6 \text{ pulg. Esta bien.}$$

La longitud de desarrollo disponible es:

$$24 \text{ pulg.} - \text{recubrimiento de la extensión} = 22.1 \text{ pulg.}$$

Como 22.1 pulg. excede 21.9 pulg. Por lo tanto la extensión del gancho está bien. ®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

La altura vertical del gancho estándar a 90° es  $4d_b + 12d_b = 16$  pulg., lo cual queda dentro de la junta.

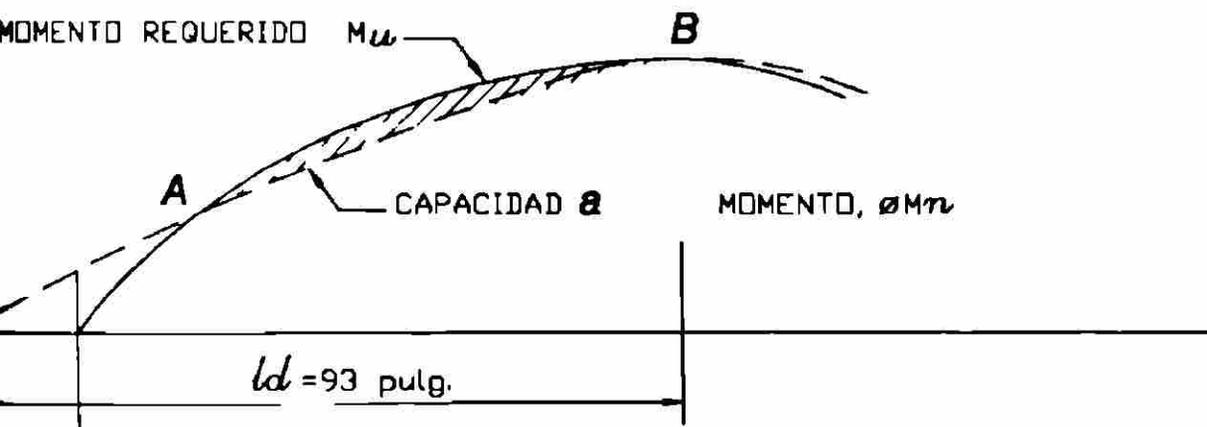
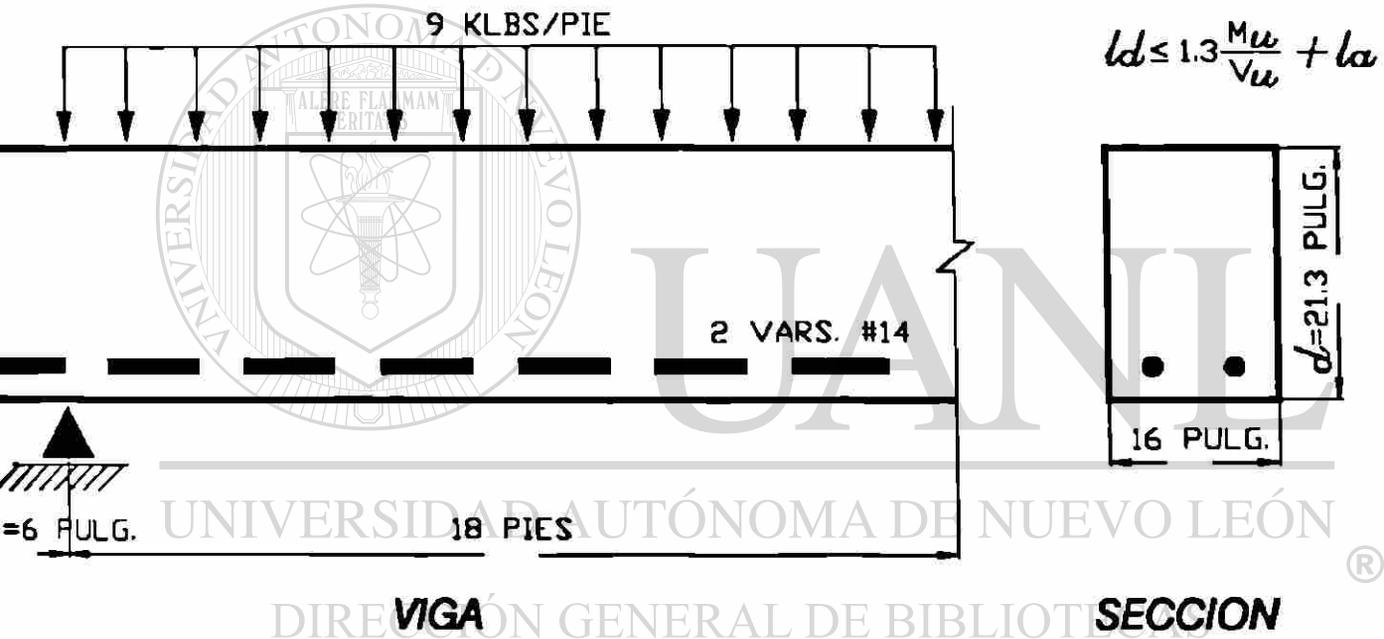
## EJEMPLO.

### REVISION DEL DESARROLLO PARA VARILLAS DE MOMENTO POSITIVO.

La viga de la figura tiene 2 varillas #14 y estribos #3 @ 10 pulg. c a c. El concreto es de  $f_c' = 3000 \text{ LBS/pulg}^2$  y  $f_y = 60,000 \text{ LBS/pulg}^2$  para el acero de refuerzo. La viga soporta una carga total factorizada de  $9.0 \text{ KLBS/pie}$ .

Revisar si la Sección 12.11.3 del ACI es satisfecha

$$l_d \leq 1.3 \frac{M_u}{\mu V} + l_a$$



1.- Espaciamiento y confinamiento de las varillas #14.

$$e = 16 - 2(1.5 + 0.375) - 2 \times 1.69 = 8.87 \text{ pulg.}$$

La viga cumple con el mínimo de estribos que establece el Código.

2.- Longitud de desarrollo.

$$l_d = \frac{f_y \alpha \beta \lambda}{20 \sqrt{f_c}} = \frac{60,000 \times 1.0 \times 1.0 \times 1.0}{20 \sqrt{3000}} = 54.8$$

$$l_d = 54.8 d_b = 54.8 \times 1.69 = 92.7 \text{ pulg.}$$

3.- Revisar la ecuación para la  $l_d$ , requerida:

En el apoyo hay dos varillas # 14:

$$M_n = 2 \times 2.25 \times 60,000 \left( 21.3 - \frac{2 \times 2.25 \times 60,000}{1.7 \times 3,000 \times 16} \right)$$

$$= 4.86 \times 10^6 \text{ LBS-pulg} = 4860 \text{ KLBS - pulg.}$$

$$\text{En el apoyo, } V_u = \frac{Wl}{2} = \frac{9.0 \times 18}{2} = 81 \text{ KLBS}$$

$l_s$  = extensión de la varilla pasando la línea de centros del apoyo = 6 pulg.

$$\text{Entonces: } \frac{1.3 M_n}{V_u} + l_s = \frac{1.3 \times 4860}{81} + 6 = 84 \text{ pulg.}$$

Pero  $l_d = 92.7$  pulg., es mayor que 84 pulg.; entonces las varillas #14 no pueden usarse. Proponiendo 6 varillas #8 es necesario recalcular  $l_d$ .

4.- Espaciamiento y confinamiento para las varillas #8.

De la Tabla A – 6, en las ayudas de diseño del apéndice A, podemos encontrar que el ancho mínimo para 6 varillas #8 es 15.5 pulg., se tienen 16 pulg., lo cual quiere decir que el espaciamiento excede el  $d_b$  por lo cual se usa la siguiente fórmula:

5.- Longitud de desarrollo para las varillas # 8.

$$l_d = \frac{f_y \alpha \beta \lambda}{20 \sqrt{f_c}} = \frac{60,000 \times 1.0 \times 1.0 \times 1.0}{20 \sqrt{3000}} = 54.8 \text{ pulg.}$$

$l_d = 54.8 \times 1.0 = 54.8$  pulg. (Ver Tabla A – 9 de las ayudas de diseño del apéndice A)

6.- Ecuación para  $l_d$  requerida:

$$M_n = 5076 \text{ KLBS} - \text{pulg.}$$

$$1.3 \frac{M_n}{V_u} + l_a = \frac{1.3 \times 5067}{81} + 6 = 87.3 \text{ pulg.}$$

$54.8 < 87.3$  esto es aceptable. Usar 6 Varillas # 8.

## 7-5 CÁLCULO DE LOS PUNTOS DE CORTE EN REFUERZO POR FLEXIÓN.

Las Secciones del ACI que gobiernan los puntos de corte del acero de refuerzo son 7.13, 12.1, 12.10, 12.11 y 12.12. Estas secciones se resumen en seis "reglas" para su detalle:

### Todas las Varillas:

**Regla 1.-** Las varillas deben extenderse una longitud de "d" ó "12d<sub>b</sub>" más allá del punto de corte por flexión excepto en apoyos o extremos de voladizos.

**Regla 2:** Las varillas deben extenderse un mínimo de  $\lambda_d$ , desde el punto de máximo esfuerzo o desde la sección donde se cortaron las varillas adyacentes (ACI Secciones. 12.10.2, 12.10.4 y 12.12.2).

### Varillas para momento positivo:

#### **Regla 3.-**

(a) Apoyos simples: Un mínimo de 1/3 del refuerzo para momento positivo se debe extender 6" pulg., dentro del apoyo (ACI Sección 12.11.1).

(b) Vigas continuas interiores con estribos cerrados: Un mínimo de 1/4 del refuerzo para momento positivo se debe extender 6" dentro del apoyo (ACI Secciones 12.11.1 y 7.13.2.3).

**(c) Vigas continuas interiores sin estribos cerrados:** Un mínimo de  $\frac{1}{4}$  del refuerzo para momento positivo debe continuarse o será traslapado cerca del apoyo con un traslape Clase A en tensión y en apoyos no - continuos terminar en un gancho estándar (ACI Sección 7.13.2.3).

**(d) Vigas Perimetrales continuas:** Un mínimo de  $\frac{1}{4}$  del refuerzo para momento positivo a la mitad del claro, deberá continuarse alrededor del perímetro del edificio y será encerrado con estribos cerrados o abiertos con ganchos a  $135^\circ$  en las varillas del lecho superior. Los traslapes deberán ser Clase A en tensión tanto para momentos positivos como cerca de los apoyos (ACI Sección 7.13.2.2).

**(e) Vigas que forman parte de un marco y sea parte fundamental de éste para resistir cargas laterales:** El acero de refuerzo por momento positivo que se requiere prolongar en el apoyo de acuerdo con la Sección 12.11.1, se debe anclar para que se desarrolle la resistencia especificada de fluencia  $f_y$  a la tensión en la cara del apoyo (ACI Sección 12.11.2).

#### **Varillas para momento negativo:**

##### **Regla 5:**

Las varillas para momento negativo deberán anclarse dentro de apoyos, columnas u otros miembros por  $\ell_d$ , ganchos o anclajes mecánicos (ACI Sección 12.12.1).

##### **Regla 6:**

**(a) Vigas Interiores:** Cuando menos  $\frac{1}{3}$  del refuerzo para momento negativo deberá extenderse más allá del punto de inflexión una longitud de anclaje no menor que el peralte efectivo,  $12d_b$  ó  $\frac{1}{16}$  del claro libre el que sea mayor (ACI Sección 12.12.3).

**(b) Vigas perimetrales:** Además de satisfacer la Regla 6(a),  $\frac{1}{6}$  del refuerzo para momento negativo en el apoyo deberá continuarse a la mitad del claro. Haciéndose los traslapes Clase A en tensión a la mitad del claro de ser necesario (ACI Sección 7.13.2.2).

**EJEMPLO: CÁLCULO DE LOS PUNTOS DE CORTE BASÁNDOSE EN LAS ECUACIONES DE LOS DIAGRAMAS DE MOMENTO.**

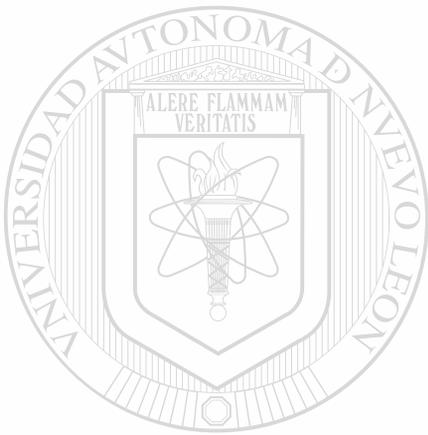
Para la viga mostrada en la siguiente figura:

$$f_c = 3000 \text{ LBS/pulg}^2$$

$$f_y = 60,000 \text{ LBS/pulg}^2$$

Carga muerta factorizada = 0.42 KLBS/pie.

Carga viva factorizada = 3.4 KLBS/pie.

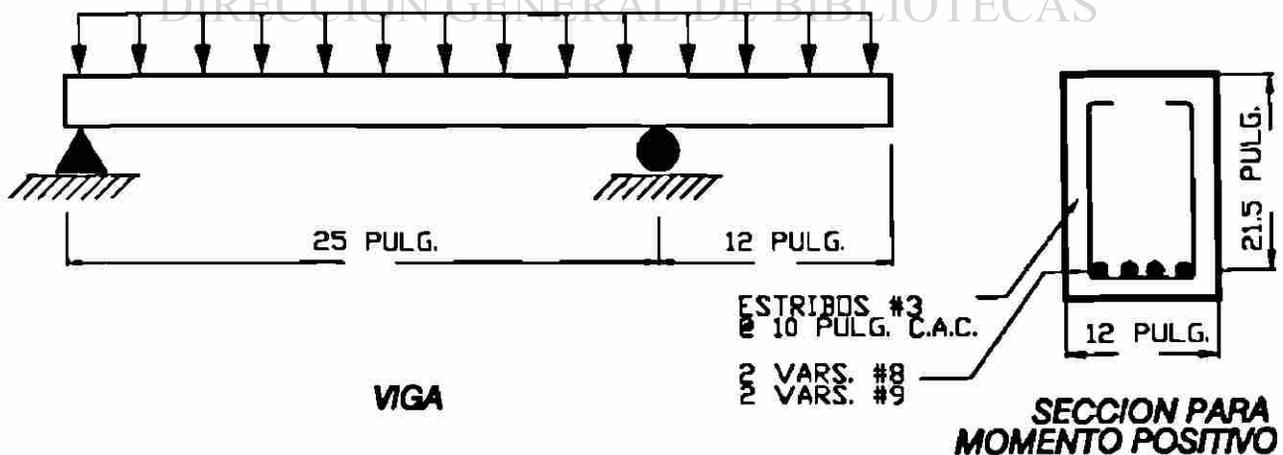


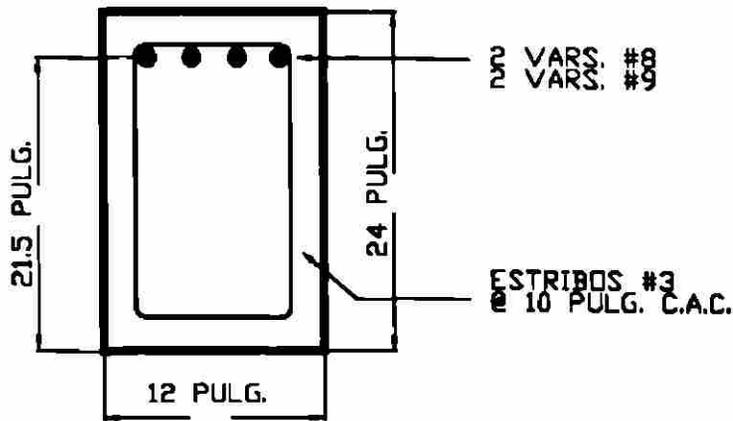
UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

®

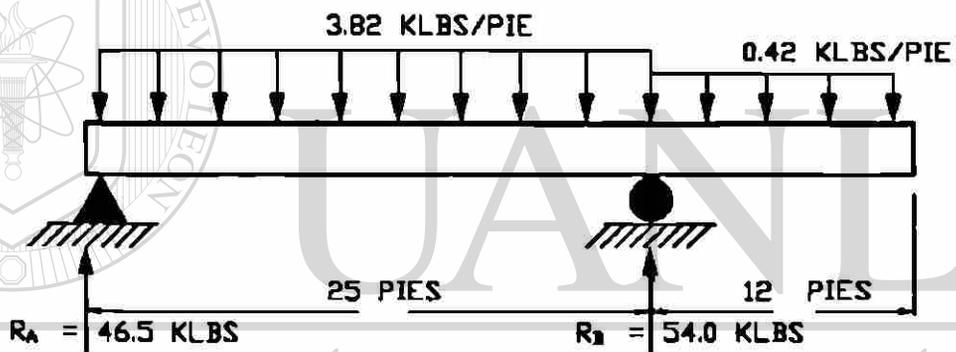
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



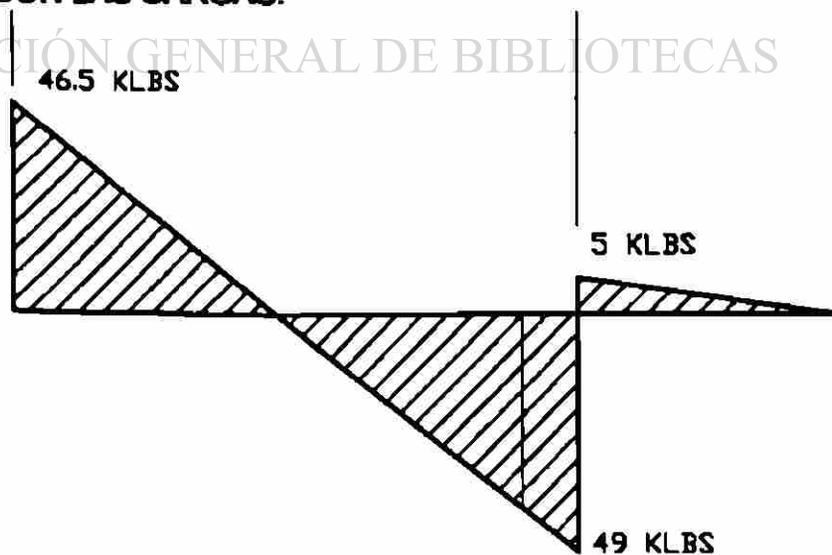


**SECCION PARA  
MOMENTO NEGATIVO**

**COMBINACION DE CARGA PARA MOMENTO POSITIVO MAXIMO  
TOTAL EN EL CLARO Y MUERTA EN EL VOLADIZO**



**(a) VIGA CON LAS CARGAS.**



**(b) DIAGRAMA DE FUERZAS CORTANTES.**

Del diagrama de cuerpo libre de una parte del claro con origen en A el momento  $M_u$  a una distancia  $x$ , es:

$$M_u = 46.5x - \frac{3.82x^2}{2} \text{ KLBS-pie.}$$

A la mitad del claro la viga tiene 2#9 más 2#8. Si se cortan las 2#8. La capacidad de las varillas que quedan; (2#9) es:

$$\phi M_n = \frac{0.9x(2x1.0x60,000 \left( 21.5 - \frac{2.0x60,000}{17x3000x12} \right))}{12,000}$$

$$= 176 \text{ KLBS-pie.}$$

Igualando  $\phi M_n = M_u = 176 \text{ KLBS-pie}$ , en la ecuación anterior queda:

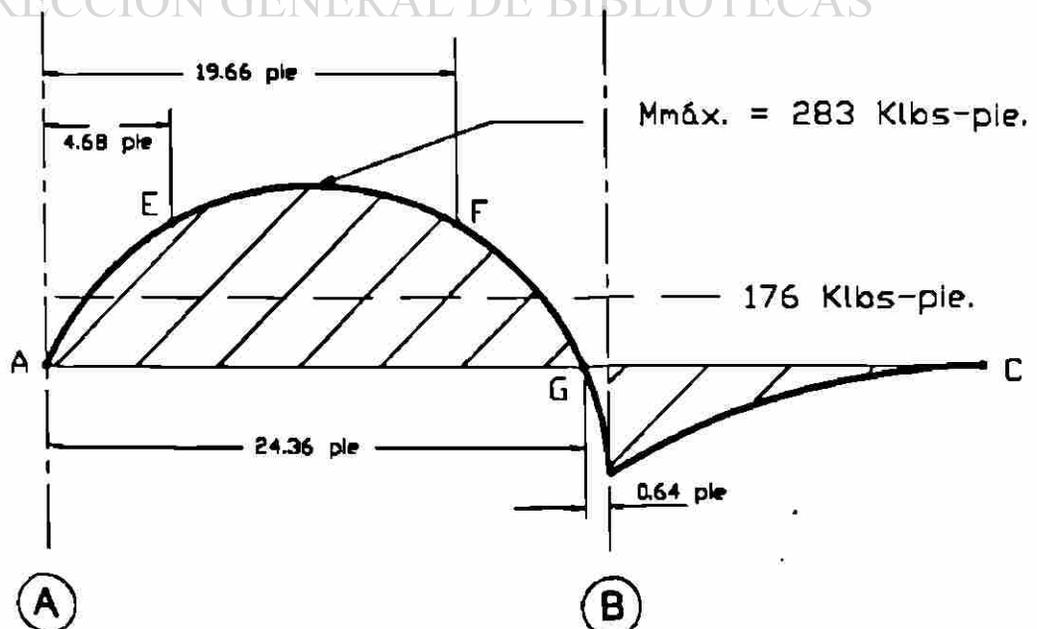
$$1.9x^2 - 46.5x + 176 = 0$$

La cual es una cuadrática en  $x$ , de la forma:

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

cuya solución es: 
$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

Entonces,  $x = 4.68$  pies y  $19.66$  pies, a partir de A, dibujando el diagrama de momentos tenemos:



Se tienen en el diagrama los puntos de corte por flexión E y F, y G es el punto de momento cero o punto de inflexión.

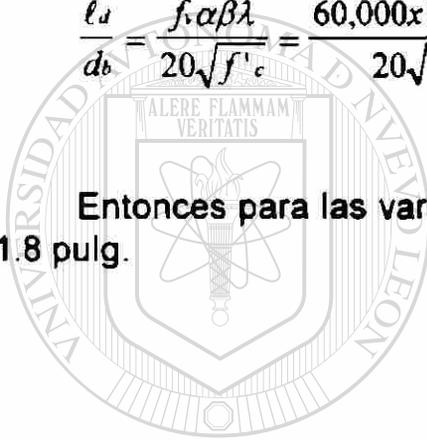
2.- Longitudes de desarrollo para varillas inferiores:

$$\text{Espaciamiento} = \frac{12 - 2(15 + 0.375) - 2 \times 1.128 - 2 \times 1.0}{3} = 1.33 \text{ pulg.}$$

esto excede  $d_b$  tanto para la #8 como para la #9 y satisface el mínimo de estribos por lo que la fórmula a utilizar es:

$$\frac{\ell_d}{d_b} = \frac{f_y \alpha \beta \lambda}{20 \sqrt{f'_c}} = \frac{60,000 \times 1.0 \times 1.0 \times 1.0}{20 \sqrt{3,000}} = 54.8$$

Entonces para las varillas #8,  $\ell_d = 54.8$  pulg., y para las varillas #9,  $\ell_d = 61.8$  pulg.



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

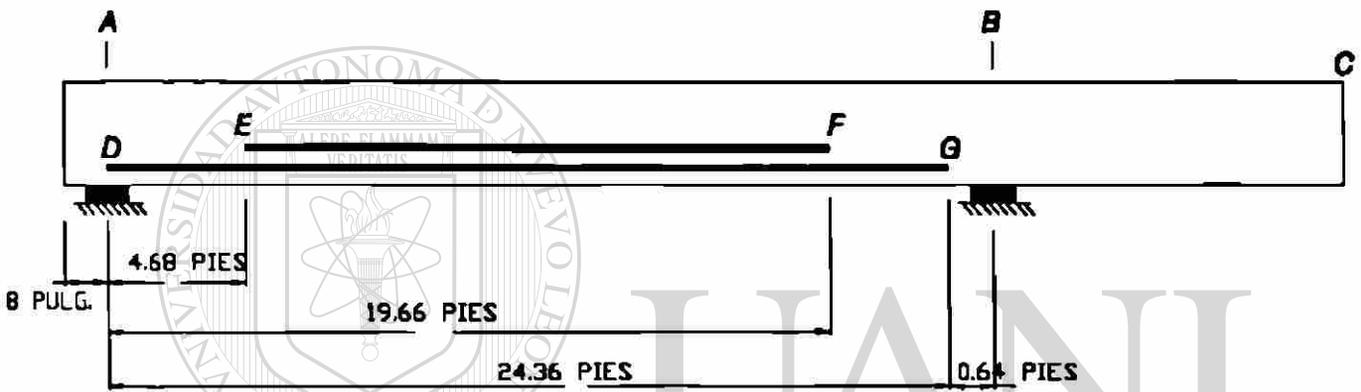


DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

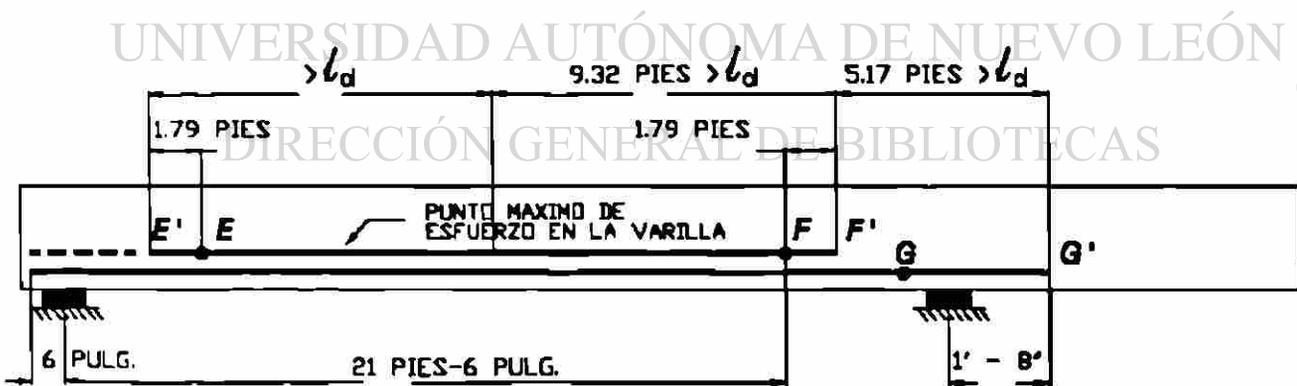
3.- Puntos de corte para refuerzo positivo.

Se aplican las 6 reglas vistas anteriormente:

Con el diagrama de momentos se tienen los siguientes puntos:



(a) PUNTOS DE CORTE POR FLEXION PARA ACERO POSITIVO.



(b) PUNTOS DE CORTE FINALES PARA ACERO POSITIVO..

(a) Corte de F:

2 Varillas #8 serán cortadas y deben satisfacer las reglas 1 y 2.

**Regla 1:** Prolongar las varillas el mayor de  $d = 21.5 \text{ pulg} = 1.79 \text{ pies}$  y  $12d_b = 1 \text{ pie}$ . Entonces la posición final de F está a  $19.66 + 1.79 = 21.45 \text{ pies}$  del centro del apoyo A, es decir 21 pie 6 pulg., como se muestra en el inciso (b) de la figura anterior.

**Regla 2:** Las varillas se deben extender un mínimo de  $l_d$  a partir de los puntos de máximo esfuerzo. Para estas varillas el corte se localiza en F', el máximo esfuerzo se localiza a la mitad del claro (aprox.), por lo tanto la longitud hasta F' es  $21.5 - 12.18 = 9.32 \text{ pies}$  y para las varillas #8  $l_d = 54.8 \text{ pulg.}$ , entonces está bien.

Cortar las varillas en F' localizado a 21 pie, 6 pulg desde A.

(b) Corte de G:

2 Varillas #9 serán cortadas y deberán satisfacerse las reglas 2 y 3 para G, y la regla 4 para momento positivo en el punto de inflexión.

**Regla 3:** Un mínimo de 1/3 de las varillas deberán extenderse 6" (15 cm) dentro del apoyo. Para el apoyo B deberán extenderse hasta 25 pies 6 pulg., a partir de A.

**Regla 2:** Las varillas deberán extenderse un mínimo de  $l_d$  de los puntos de corte de las varillas adyacentes. La  $l_d$  para las varillas #9 es 61.8 pulg. = 51.5 pies.

La distancia entre F' y G' es  $(25'6") - (21'6") = 4 \text{ pies} = 48 \text{ pulg.}$ , menor que  $l_d$ , luego las varillas no se extenderán  $l_d$ , entonces las varillas se extenderán  $21.45 \text{ pies} + 5.15 \text{ pies} = 26.6 \text{ pies} = 26'8"$ .

**Regla 4:** Deberá satisfacerse la ecuación:

$$l_d \leq \frac{M_n}{V_n} + l_a \text{ en el punto de inflexión, (punto de momento cero).}$$

El punto de inflexión está a 0.64 pie del apoyo, como se puede apreciar en el croquis del diagrama de momentos de la página 204. En este punto  $V_u = 46.5 \text{ KLBS}$  y el momento  $M_n$  es la capacidad de las varillas en el punto de inflexión (2 varillas #9) el cuál es:

$$M_n = 176x \frac{12}{0.9} = 2345 \text{ KLBS - pulg.}$$

$l_a =$  el mayor de "d" = 21.5 pulg., ó  $12d_b = 13.5$  pulg., pero no mayor que la actual extensión de las varillas en el punto de inflexión (26.67 - 24.36 = 2.31 pies = 27.7 pulg.) Entonces  $l_a = 21.5$  pulg., y:

$$\frac{M_n}{V_n} + l_a = \frac{2345}{46.5} + 21.5 = 71.9 \text{ pulg.}$$

Como esto excede  $l_d = 61.8$  pulg. Esta bien cortar las 2 varillas #9 a 1 pie 8 pulg de B.

(c) Corte E.

Se cortarán dos varillas #8 y deberán satisfacer las reglas 1 y 2.

**Regla 1:** Extender las varillas  $l_d = 1.79$  pies después del punto de corte por flexión. Entonces, cortar en E', que esta a  $4.68 - 1.79 = 2.89$ , (2'10") de A.

**Regla 2:** La distancia del punto del momento máximo al punto de corte excede  $l_d = 54.8$  pulg., entonces está bien.

Cortar las 2 varillas #8 a 2 pies 10 pulg de A. (Punto E', de la figura anterior)

(d) Corte D.

Se cortarán 2 varillas #9 y deben satisfacer las reglas 2, 3 y 4.

**Regla 3:** Prolongar las 2 varillas #9, 6 pulg., después de A.

**Regla 2:** Deberán extenderse las varillas  $l_d$  del punto de corte E', donde:

$l_d = 61.8$  pulg (Varillas #9). La máxima longitud posible es 2 pies 10 pulg + 6 pulg = 40 pulg. Como es menor que  $l_d$ , debemos usar ganchos en los extremos de las varillas o usar varillas de menor diámetro o eliminar el punto de corte E'. Entonces, extender las 4 varillas 6 pulgadas después de "A".

**Regla 4:** Se debe satisfacer la siguiente ecuación en el apoyo:

$$l_d \leq 1.3 \frac{M_n}{V_u} + l_a$$

$$V_u = 46.4 \text{ KLBS}$$

$$M_n = \frac{3.58 \times 60,000 \left( 21.5 - \frac{3.58 \times 60,000}{1.7 \times 3,000 \times 12} \right)}{1000}$$

= 3860 KLBS - pulg

$l_a = 6$  pulg

$l_d$  menor o igual que:  $\frac{1.3M_u}{V_u} + l_a = \frac{1.3 \times 3860}{46.4} + 6 = 113.9$  pulg.  $> l_d$

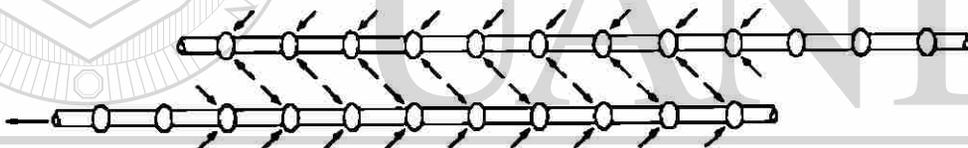
La regla 4 se satisface  $\therefore$  Cortar como lo marca la figura.

Con un procedimiento similar, se determinan los puntos de corte en las varillas para momento negativo siguiendo las reglas descritas anteriormente, incluyendo los estribos extra que se requieren en los puntos de corte.

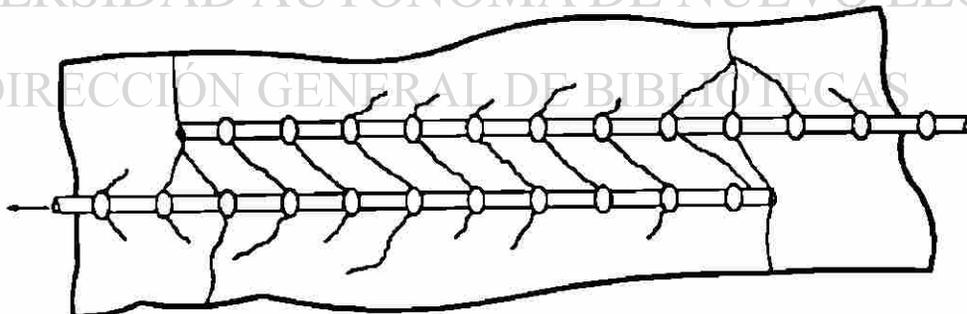
## 7-6 TRASLAPES

### Traslapes en Tensión

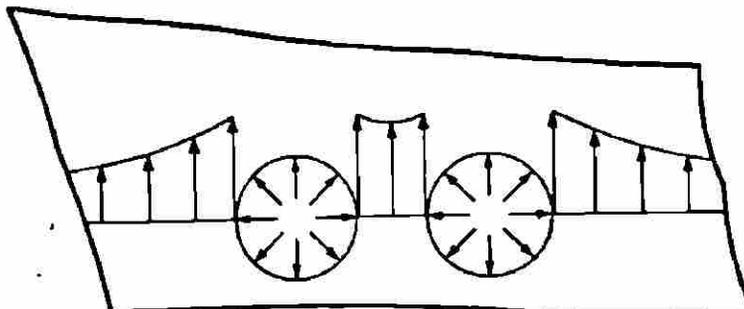
En un traslape entre dos varillas, la fuerza en una varilla se transfiere a el concreto, el cual la transfiere a la varilla adyacente. El mecanismo de la transferencia se muestra en la siguiente figura.



(a) FUERZAS EN LAS VARILLAS EN TRASLAPE.



(b) GRIETAS INTERNAS EN EL TRASLAPE.



(c) FUERZAS RADIALES EN EL CONCRETO Y ESFUERZOS EN LAS VARILLAS TRASLAPADAS.

### TRASLAPES EN TENSION.

El mecanismo de transferencia de la fuerza mostrado en el inciso (a) provoca el patrón de agrietamiento del inciso (b). La transferencia de fuerzas en el exterior de la varilla hacia el concreto causa una presión radial en el concreto como se muestra en el inciso (c), el cual puede provocar una grieta en todo lo ancho de un elemento estructural (viga) en la cama de las varillas. Cuando esto ocurre el traslape falla. Las grietas en los traslapes se inician en los extremos del traslape, donde la presión es mayor que en medio. Como se muestra en el inciso (b), las grietas grandes transversales ocurren en la discontinuidad de los extremos de las varillas traslapadas. El refuerzo transversal en la región del traslape *retrasa* la separación de las varillas traslapadas y la aparición de grietas lo cual reduce la capacidad del traslape.

El ACI Sección 12.15 distingue dos tipos de traslapes en tensión, dependiendo de la fracción de varillas traslapadas en una longitud dada y del esfuerzo en las varillas traslapadas. La tabla R 12.15.2 de los comentarios del ACI se reproduce al final como la Tabla 7-2. La equivalencia entre ( $A_s$  proporcionado/ $A_s$  requerido) y  $f_s/f_y$  dadas en la Tabla 7-2 no aparece en el Código de 1995, se expresó en términos de  $f_s/f_y$  en el Código 1971 pero después no fue cambiado. Las longitudes de traslape para cada clase de traslape son las siguientes:

- Traslape Clase A:  $1.0 l_d$
- Traslape Clase B:  $1.3 l_d$

Debido a que el nivel de esfuerzo se considera en la Tabla 7-2, la reducción en la longitud de desarrollo por exceso de refuerzo permitida por la Sec. 12.2.5 del ACI no es aplicada para calcular  $l_d$  para este propósito.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

**TABLA 7 - 2 TIPOS DE TRASLAPES REQUERIDOS EN TENSIÓN.**

$A_s$ proporcionada / $A_s$ requerida	ó $f_s/f_y$	Máximo porcentaje de $A_s$ traslapado con longitud de traslape requerida	
		50%	100%
2 ó más	0.5 o menos	Clase A	Clase B
menor de 2	más de 0.5	Clase B	Clase B

La distancia centro a centro entre dos varillas en un traslape no debe ser mayor de 1/5 de la longitud del traslape con un máximo de 6 pulg. (ACI Sección 12.14.2.3).

Las varillas mayores que la #11 no podrán ser traslapadas, excepto en las juntas zapata-columna (ACI Sección 15.2.8.4). Los traslapes deberán siempre ser encerrados con estribos, anillos o espirales para prevenir la pérdida de capacidad del traslape.

Como se indica en las Secciones 12.2.2 y 12.2.3, la presencia de refuerzo transversal acorta  $l_d$  y por lo tanto se tendrán traslapes menores.

El ACI Sección 21.3.2.3 requiere que los traslapes en tensión del refuerzo por flexión en vigas para resistir cargas sísmicas sean encerradas en anillos o espiral.

### **Traslapes en compresión**

En un traslape en compresión, una parte de la fuerza se trasmite al concreto a través del extremo de la varilla. Esto, y el hecho de que se presentan grietas transversales por tensión en la longitud del traslape, permite que los traslapes por compresión sean mucho más cortos que los traslapes de tensión (ACI Sección 12.16). Frecuentemente, un traslape de compresión fallará por desgarre del concreto bajo los extremos de la varilla.

---

### **Empalmes soldados y uniones mecánicas**

Además de los traslapes, las varillas esforzadas a tensión o compresión pueden traslaparse y soldarse, o por varios dispositivos mecánicos, así como con camisas metálicas. El uso de estos empalmes y uniones mecánicas está gobernado por las secciones 12.14.3 y 12.16.3 del ACI.

## 7-7 PROBLEMAS

7 - 1.- En la figura mostrada la viga cantiliver tiene  $b = 30$  cm y esta reforzada con 3 varillas #7, las cuales están ancladas a la columna con ganchos estándar a  $90^\circ$ .  $f_c = 350$  kg/cm<sup>2</sup> y  $f_y = 4200$  kg/cm<sup>2</sup>. Considerando que el acero es esforzado al  $f_y$  en la cara de la columna, pueden estas varillas:

(a) Anclarse con ganchos dentro de la columna. El recubrimiento lateral libre de los ganchos es 7 cm. El recubrimiento libre de la extensión de las varillas al paño de la columna es 5 cm. La junta está encerrada por estribos @ 15 cm c. a. c.

(b) Desarrollarse en la viga. Las varillas terminan 5 cm del extremo de la viga. La viga tiene estribos #3 @ 20 cm.

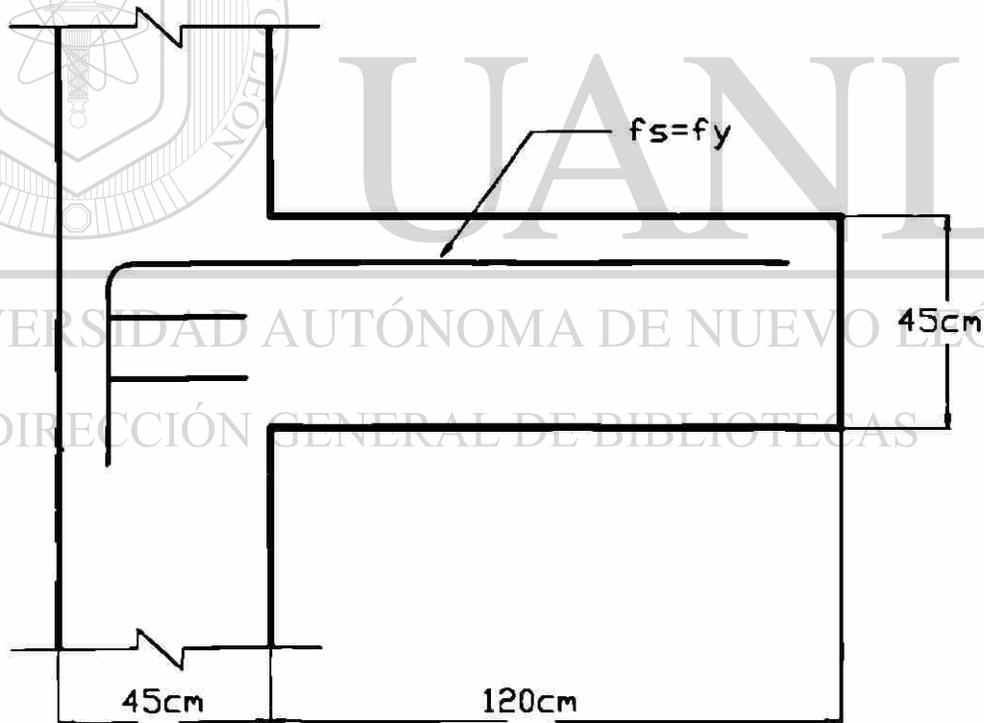


FIGURA P7-1

**7 - 2.-** Dar dos razones por las cuales la longitud de desarrollo en tensión es mayor que en compresión.

**7 - 3.-** Porque el espaciamiento y el recubrimiento de las varillas afecta la adherencia de las varillas.

**7 - 4.-** Una viga simplemente apoyada de sección rectangular con  $b = 35$  cm y  $d = 44$  cm y estribos mínimos #3 con un claro de 4.50 m soporta una carga uniforme total factorizada de 9 ton/m incluyendo el peso propio. El concreto es de  $f_c = 210$  kg/cm<sup>2</sup> y reforzada con 2 varillas #10 con  $f_y = 4200$  kg/cm<sup>2</sup> las cuales se extienden 13 cm después de la línea de centros del apoyo en cada extremo con el mínimo de estribos #3. ¿Satisface esta viga la Sección 12.11.3 del ACI? Si no, ¿cuál es el tamaño de varilla adecuado?

**7 - 5.-** Cuál de las Secciones del ACI 12.10.3 ó 12.12.3 requiere que las varillas se extiendan "d" después de los puntos de corte por flexión.

**7 - 6.-** Una viga de sección rectangular tiene  $b = 35$  cm,  $h = 60$  cm y  $d = 54$  cm soporta una carga total factorizada de 5.75 ton/m incluyendo su peso propio. La viga está simplemente apoyada en un claro de 6.50 m. Está reforzada con 6 varillas #6 grado 60, dos de las cuales se cortarán entre el centro y el apoyo y las otras cuatro se extenderán 12 pulg., después del apoyo.  $f_c = 280$  kg/cm<sup>2</sup>. La viga tiene estribos #3 que satisfacen la Sección 11.5.4 del ACI y la 11.5.5.3.

- (a) Dibujar a escala el diagrama de momentos factorizado.  $M = Wlx/2 - Wx^2/2$ , donde "x" es la distancia del apoyo y "l" es el claro.
- (b) Redibujar el diagrama de momentos desplazado una distancia "d", hacia los apoyos.
- (c) Dibujar el diagrama de momento resistente y localizar los puntos de corte para las dos varillas cortadas.

# **CAPÍTULO 8 :**

## **COLUMNAS CORTAS. CARGA AXIAL Y FLEXION.**

**8.1.- Introducción**

**8.2.- Columnas con estribos y columnas con espiral.**

**8.3.- Diagramas de interacción.**

**8.4.- Diagramas de interacción para columnas de concreto.**

**8.5.- Diseño de columnas cortas.**

**8.6.- Solución aproximada para columnas con estribos. Falla por compresión.**

**8.7.- Columnas cargadas biaxialmente.**

## **8.1.- INTRODUCCION.**

Una columna es un miembro estructural que transmite cargas en compresión axial con o sin momentos. Las columnas soportan cargas verticales de las azoteas y pisos para transmitir las a la cimentación.

En construcción, después de colar la cimentación se coloca el acero de refuerzo de las columnas, y posteriormente las formas o cimbra y se cuela después el concreto, el cual cuando ha endurecido (fraguado) se retira la cimbra, para después cimbrar losas y vigas y continuar. Una columna normalmente lleva dos tipos de refuerzo: el refuerzo longitudinal, o principal y el refuerzo transversal al eje de la columna; el cual puede ser, estribos, anillos o espirales.

En términos más generales los miembros en compresión o miembros sujetos a carga axial y flexión pueden ser columnas, muros o miembros de armaduras o marcos de concreto.

Estos pueden ser verticales, inclinados u horizontales. Una columna es un caso especial de un miembro a compresión que es vertical.

Los efectos de estabilidad deben ser considerados en el diseño de miembros a compresión.

Si los momentos inducidos por efectos de esbeltez deforman una columna apreciablemente, se considera como "columna esbelta" o "columna larga". La mayoría de las columnas son lo suficientemente proporcionadas que los efectos de esbeltez pueden ignorarse. A estas se les conoce como "columnas cortas".

Aunque la teoría desarrollada en este capítulo se aplica a columnas en regiones sísmicas. Estas columnas requieren un detallado especial para resistir las fuerzas cortantes y los ciclos de carga repetida por los sismos.

## **8.2.- COLUMNAS CON ESTRIBOS Y ESPIRAL**

Alrededor de un 95% de las columnas de edificios están en zona no sísmica y se utilizan con estribos.

Los estribos para columnas pueden ser cuadrados, rectangulares, en forma de L, circulares o cualquier otro tipo de forma requerido. Ocasionalmente cuando se requiere alta resistencia y/o alta ductilidad, las varillas principales se colocan dentro de un refuerzo transversal circular en

forma de hélice o espiral, con un paso de 1 3/8 a 3 3/8 de pulgada. A una columna así se le denomina "columna con espiral". Las columnas con espiral generalmente son circulares, aunque pueden ser cuadradas o en forma de polígono en casos especiales.

La espiral actúa restringiendo la expansión lateral de la columna provocada por las cargas axiales que causan agrietamiento y con esto se evita la falla del núcleo, haciendo la columna más dúctil, como se discute en la próxima sección.

### **Comportamiento de columnas con estribos y con espiral**

En la siguiente figura se muestra una porción del núcleo de una columna con espiral. Las cargas de compresión producen un esfuerzo en el concreto en la dirección longitudinal  $f_1$ , y debido a la relación de Poisson's se expande lateralmente. Esta expansión lateral se restringe con la espiral la cual trabaja a tensión.

Por equilibrio el concreto está sujeto a un esfuerzo de compresión lateral  $f_2$ . Tomando un elemento del núcleo en cuerpo libre como se muestra en (c) sujeto a compresión triaxial, la cual demuestra que el incremento en la resistencia del concreto es:

$$f_1 = f_c + 4.1 f_2$$

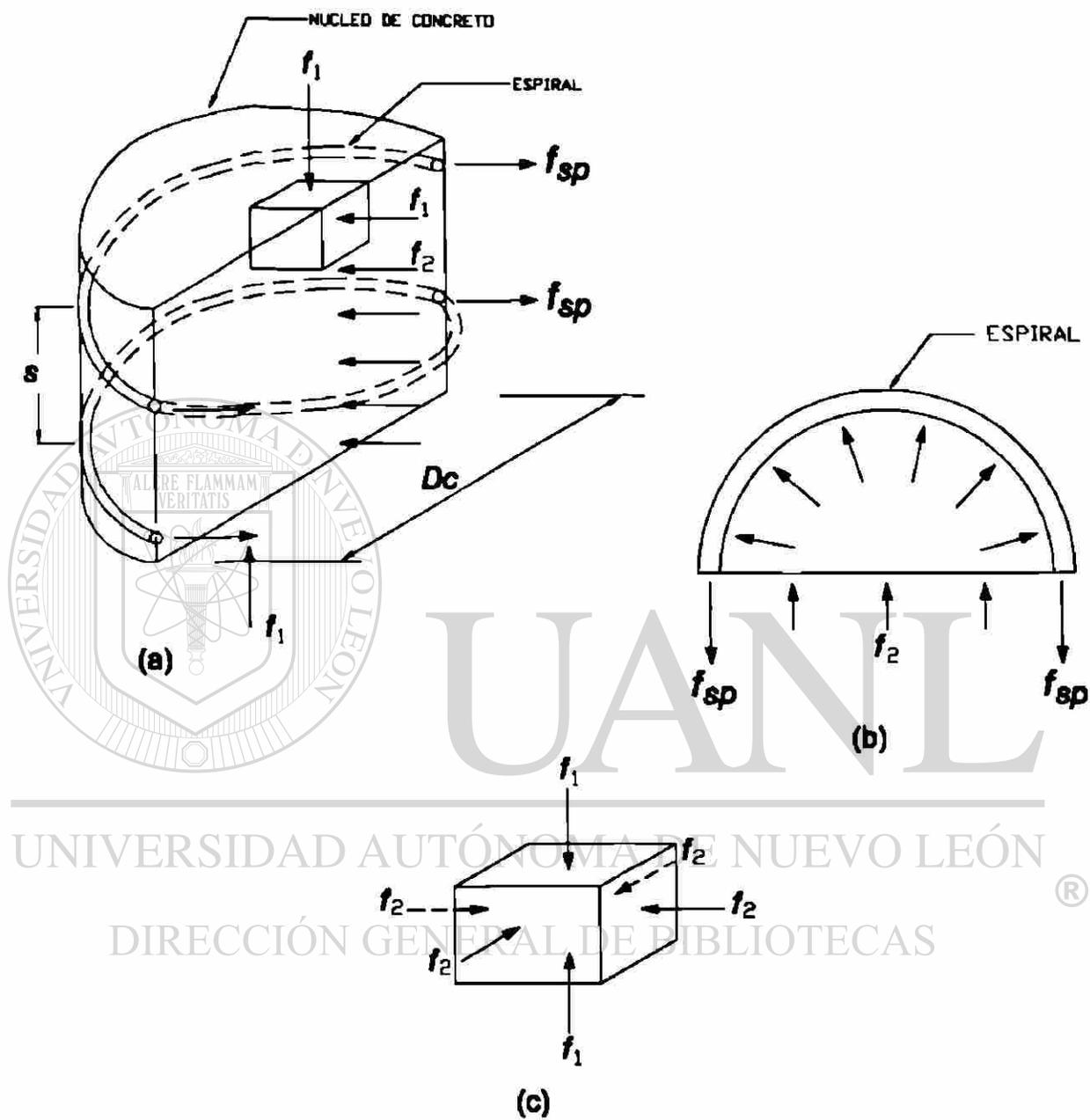
~~Más adelante se usará esta ecuación para calcular la cantidad de refuerzo en espiral que necesita la columna.~~

En ensayos hechos a columnas, se ha determinado que las columnas con espiral tienen mayor ductilidad por eso se les ha asignado un factor de reducción de capacidad,  $\phi$  de 0.75 y un valor de  $\phi = 0.70$  para columnas con estribos.

Las columnas con refuerzo en espiral se usan cuando la ductilidad es importante o cuando se tienen cargas elevadas y se requiere hacer un diseño económico utilizando la resistencia extra al tener un mayor factor de reducción de resistencia.

### **Resistencia de columnas cargadas axialmente**

Cuando una columna simétrica está sujeta a una carga concentrada axial,  $P$ , las deformaciones longitudinales,  $\epsilon$  se desarrollan uniformemente en la sección transversal. Como las varillas longitudinales están confinadas en el



**FIGURA 8-1**  
**ESFUERZOS TRIAXIALES EN EL NUCLEO DE UNA COLUMNA CON ESPIRAL.**

concreto las deformaciones en el concreto y el acero son iguales. Para cualquier deformación dada es posible calcular los esfuerzos en el concreto y el acero usando las gráficas esfuerzo - deformación de ambos materiales.

Las fuerzas,  $P_c$ , y  $P_s$ , en el concreto y acero respectivamente son iguales al producto de los esfuerzos por sus respectivas áreas. La carga total,  $P_o$ , es la suma de estas dos cantidades. La falla ocurre cuando  $P_o$  alcanza un máximo. Para un acero con una resistencia de fluencia bien definida, esto ocurre cuando  $P_c = f_c A_c$  y  $P_s = f_s A_{st}$ , donde  $f_c = C f'_c$  es la resistencia del concreto a la compresión. Basándose en pruebas de 564 columnas probadas en la Universidad de Illinois y en la Universidad de Lehigh de 1927 a 1933 el ACI toma  $C = 0.85$ .

Entonces para una columna con resistencia a la fluencia definida su capacidad es:  $P_o = 0.85 f'_c (A_g - A_{st}) + f_y A_{st}$ .

donde  $A_g$  es el área total y  $A_{st}$  el área del acero.

### 8-3.- DIAGRAMAS DE INTERACCION.

Casi todos los miembros a compresión de estructuras de concreto están sujetos también a momentos, además de las cargas axiales. Esto puede ser debido a que la carga no está concentrada en la columna, como se muestra en la figura 8-2.

Esto produce momentos en la columna. La distancia "e" es la excentricidad de la carga. La carga P y el momento M se calculan respecto al eje geométrico centroidal de la sección.

Sumando los esfuerzos producidos por la carga axial P y el momento M, se tiene:

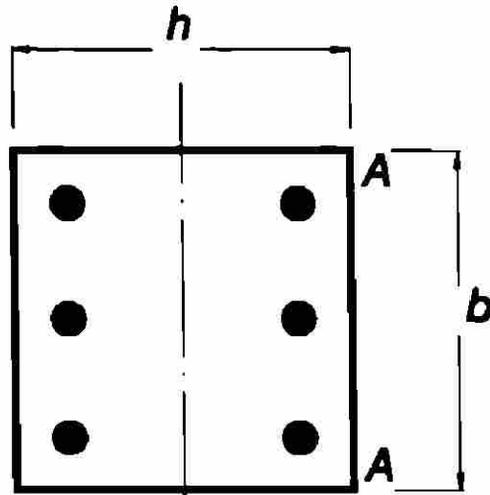
$$P/A + \frac{My}{I} = f_{cu}$$

donde :  $f_{cu}$  = Es la resistencia a la compresión.

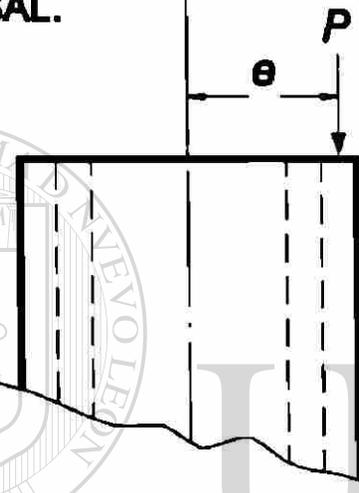
A, I = Area y momento de Inercia de la sección transversal, respectivamente.

y = Distancia del eje centroidal a la fibra extrema en compresión (superficie A-A).

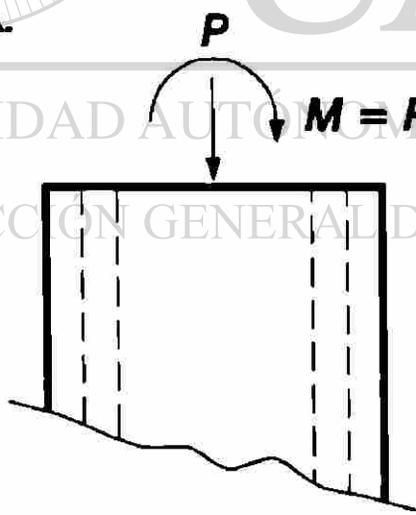
P = Carga axial, positiva en compresión.



SECCION TRANSVERSAL.

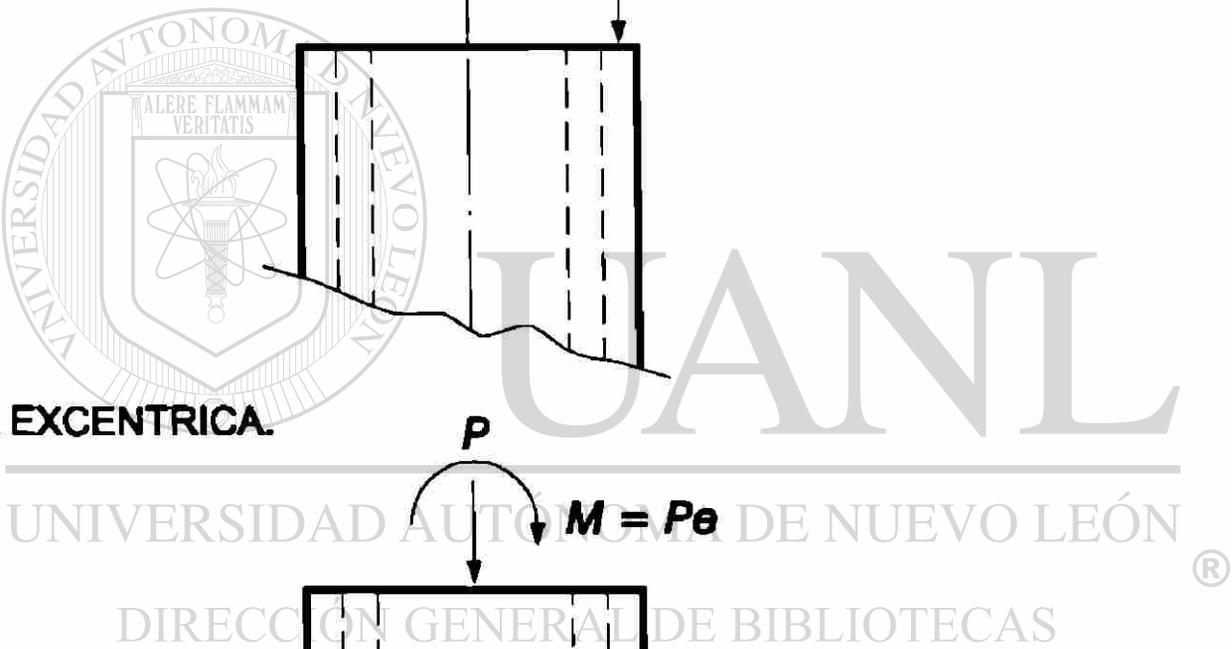


CARGA EXCENTRICA.



CARGA AXIAL Y MOMENTO.

FIGURA 8-2  
COLUMNA FLEXOCOMPRESION.



M = Momento flexionante.

Dividiendo ambos miembros entre  $f_{cu}$  da:

$$\frac{P}{f_{cu}A} + \frac{My}{f_{cu}I} = 1$$

La máxima carga axial que soporta la columna ocurre cuando  $M = 0$ , y es  $P_{max} = f_{cu}A$ .

Similarmente, el momento máximo que soporta la columna ocurre cuando  $P = 0$ , y es  $M_{max} = f_{cu}I/y$ .

Sustituyendo  $P_{max}$  y  $M_{max}$  da:

$$\frac{P}{P_{max}} + \frac{M}{M_{max}} = 1$$

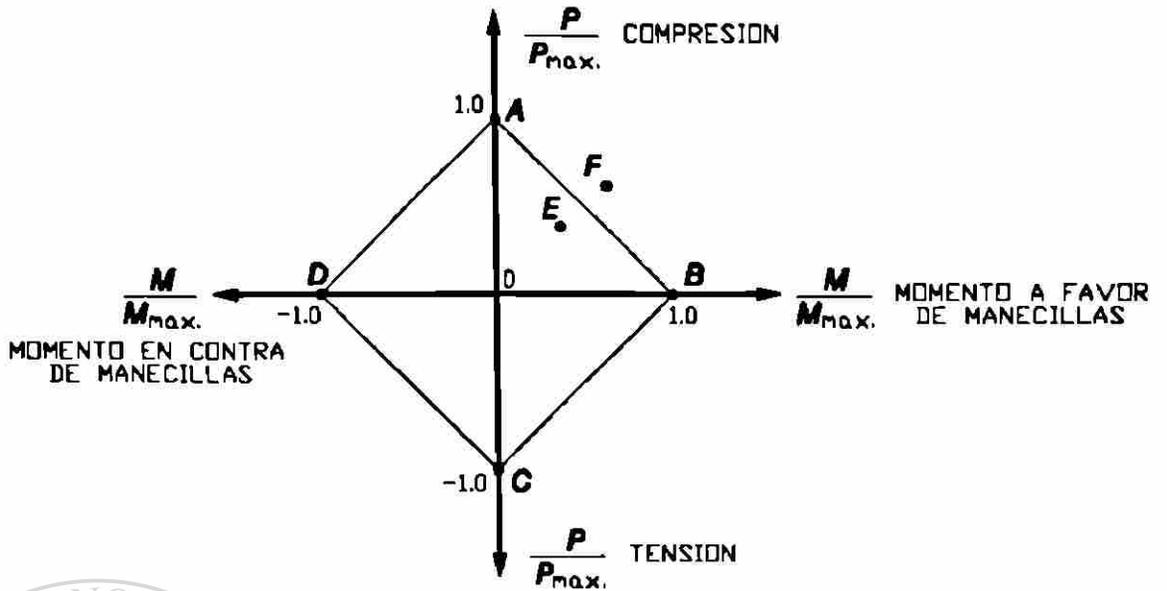
Esta ecuación es conocida como "ecuación de Interacción" porque muestra la interacción de, o la relación entre P y M en la falla.

Esto está representado por la línea AB de la Figura 8-3. Una ecuación similar para la carga de tensión, P, gobernada por  $f_{tu}$ , da la línea BC de esta figura, y las líneas AD y DC resultan de los momentos con signos opuestos.

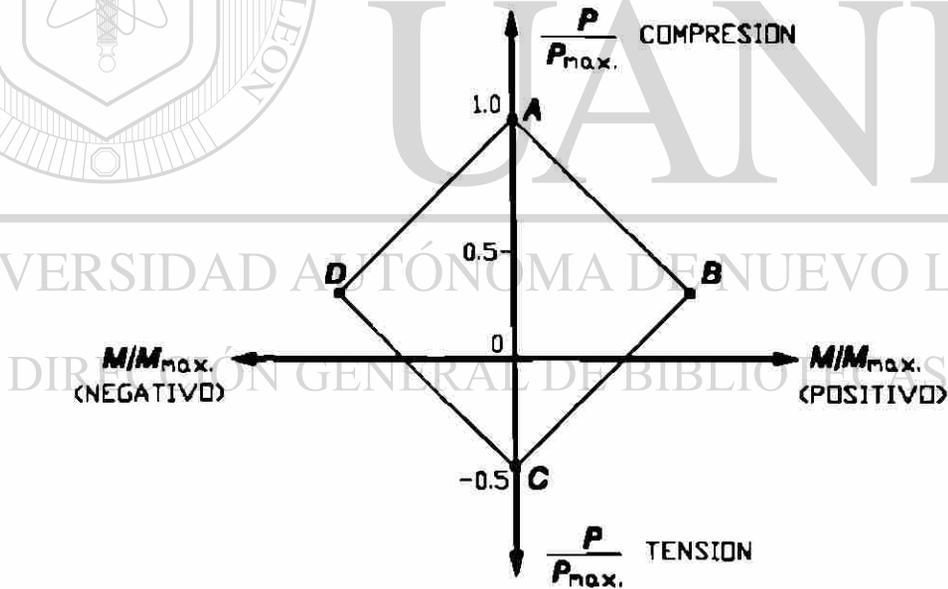
Los puntos del diagrama de interacción representan las combinaciones de P y M correspondientes a la resistencia de la sección. Un punto dentro del diagrama como el E, representa una combinación de P y M que No causan la falla. Las combinaciones de carga que causan la falla quedan fuera de la línea, como el punto F, exceden las resistencias de la columna.

En la figura 8-4 se muestra un diagrama de interacción para un material con  $f_{tu} = -f_{cu}/2$ .

Las líneas AB y AD indican las combinaciones de carga correspondientes a la falla inicial por compresión (gobernada por  $f_{cu}$ ) mientras que las líneas BC y DC indican, las fallas iniciadas por tensión. Los puntos B y D representan la "Falla Balanceada" en la cual las resistencias a tensión y a compresión se alcanzan simultáneamente.



**FIGURA 8-3**  
**DIAGRAMA DE INTERACCION PARA COLUMNA ELASTICA.**  
 $f_{cu} = f_{tu}$



**FIGURA 8-4**  
**DIAGRAMA DE INTERACCION PARA COLUMNA ELASTICA.**  
 $f_{tu} = -f_{cu}/2$

#### 8-4.- DIAGRAMAS DE INTERACCION PARA COLUMNAS DE CONCRETO.

Se pueden derivar una familia de ecuaciones para determinar la resistencia de columnas sujetas a las combinaciones de cargas axiales y momentos, pero estas ecuaciones son tediosas para usarse. Por esta razón, se elaboran una serie de diagramas de interacción para calcular los valores de  $P$  y  $M$ .

En la figura 8-5 se ilustra el proceso de cálculo para una distribución particular de deformación.

La máxima deformación de compresión de 0.003, corresponde a la falla de la sección. La localización del eje neutro se calcula con el diagrama de deformaciones. Con este diagrama se calcula el diagrama de esfuerzos en el concreto y en cada nivel del refuerzo con  $f = E\varepsilon$  (figura 8-5c).

Las fuerzas en el concreto y en los niveles de acero como se muestra en la Figura 8-5d se calculan multiplicando los esfuerzos por las áreas correspondientes. Finalmente, la fuerza axial  $P_n$  se calcula sumando las fuerzas individuales en el concreto y el acero y el momento  $M_n$  se calcula sumando los momentos de estas fuerzas con respecto al centroide geométrico de la sección transversal. Estos valores de  $P_n$  y  $M_n$  representan un punto del diagrama de interacción.

En la siguiente figura (8-6) se ilustran una serie de distribuciones de deformación y los puntos resultantes del diagrama de interacción. El punto A representa compresión axial pura. El punto B corresponde al agrietamiento en una cara y cero tensión en la otra. Si la resistencia a tensión del concreto se ignora en los cálculos, esto implica el agrietamiento en la cara de tensión de la sección.

Todos los puntos abajo de este diagrama de interacción representan casos en los cuales la sección es parcialmente agrietada. El punto C corresponde a una distribución con una deformación de compresión máxima de 0.003 en el concreto y una deformación de fluencia  $\varepsilon_y$  en el acero en tensión.

Esto representa la "falla balanceada" en la cual se presentan simultáneamente el agrietamiento del concreto y la fluencia del acero. Arriba del punto C representan falla por compresión y abajo "falla por tensión". El punto D corresponde a una distribución de deformaciones en que la deformación en el acero en tensión es mayor que la de fluencia, antes de que el concreto alcance la deformación de agrietamiento.

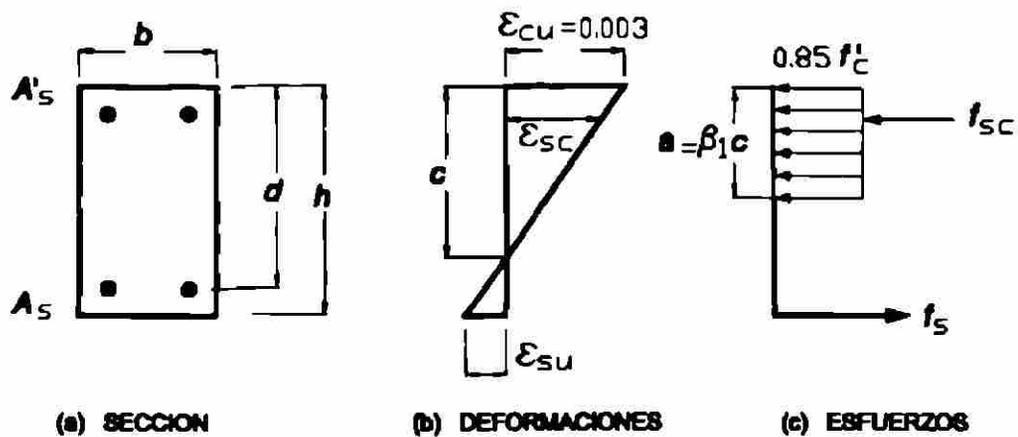


FIGURA 8-5  
CALCULO DE  $P_n$  Y  $M_n$  PARA UNA DISTRIBUCION DE UNA DEFORMACION DADA.

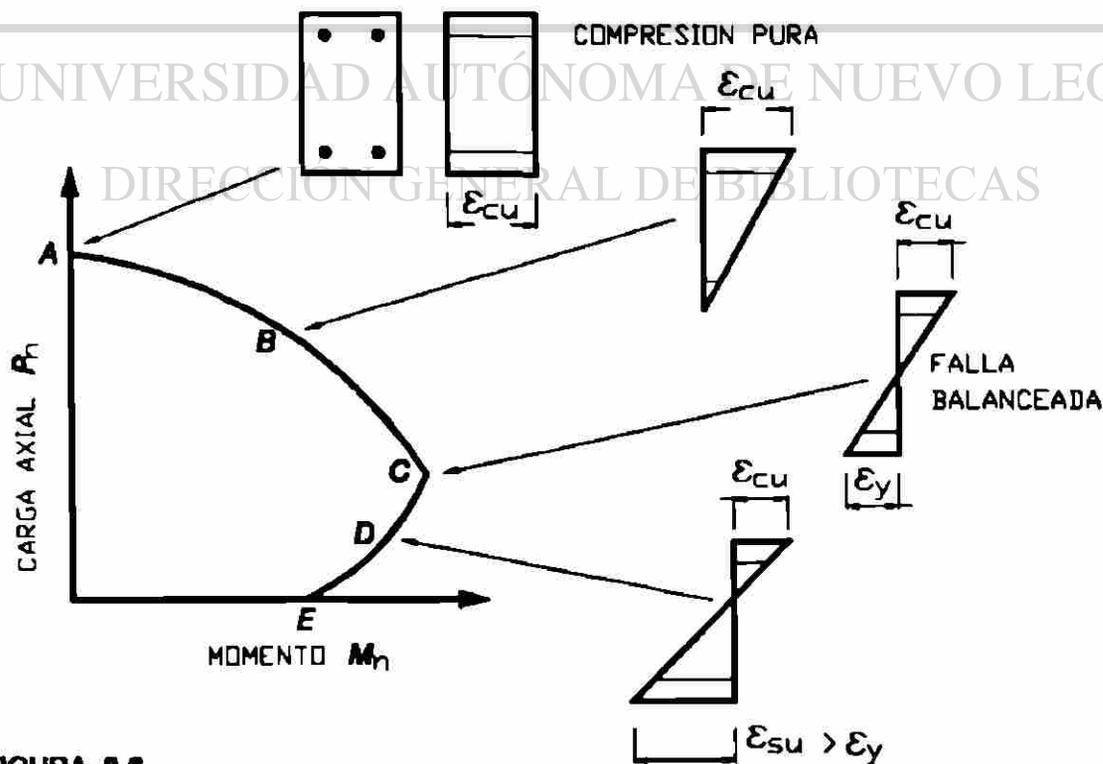


FIGURA 8-6  
DISTRIBUCION DE DEFORMACIONES PARA EL DIAGRAMA DE INTERACCION.

Esto implica comportamiento dúctil. En contraste con la distribución del punto B, la columna falla cuando la deformación de compresión alcanza 0.003 y el acero no ha fluido y la columna falla de una manera frágil (súbita).

### Carga axial máxima:

Como se vio antes, la resistencia de una columna a carga axial puede escribirse como:  $P_o = (0.85 f_c)(A_g - A_{st}) + f_y(A_{st})$

donde:  $0.85 f_c$  = Esfuerzo máximo del concreto

$A_g$  = Area de la sección total (concreto y acero).

$f_y$  = Esfuerzo de fluencia del acero.

$A_{st}$  = Area del acero

El valor de  $0.85f_c$  fue derivado de pruebas ; para tomar en cuenta el efecto de momentos accidentales. El ACI Secciones. 10.3.5.1 y 10.3.5.2 especifica que la carga máxima en una columna no debe exceder de 0.85 veces el valor dado por la ecuación anterior para columnas con espiral ni de 0.80 veces para columnas con estribos.

Columnas con espiral:

$$\phi P_{n(max)} = 0.85\phi[0.85f_c (A_g - A_{st}) + f_y A_{st}] \quad (\text{ACI Ec. 10-1})$$

Columnas con estribos:

$$\phi P_{n(max)} = 0.80\phi[0.85 f_c (A_g - A_{st}) + f_y A_{st}] \quad (\text{ACI Ec. 10-2})$$

### Factor de reducción de resistencia para columnas

En el diseño de columnas, la capacidad a carga axial y momento debe satisfacer:  $\phi P_n \geq P_u$                        $\phi M_n \geq M_u$

donde:  $P_u$  y  $M_u$  = Carga y momento factorizados aplicados a la columna, calculados del análisis del marco.

$P_n$  y  $M_n$  = Resistencias nominales de la sección transversal de la columna.

$\phi$  = Factor de reducción de resistencia, es el mismo para carga axial y momentos.

Los valores de  $\phi$  para columnas están dados en la sección 9.3.2.2. (b) del ACI y en el apéndice B.9.3.2. Para valores altos de carga axial, ambos procedimientos especifican  $\phi$  igual a 0.70 para columnas con estribos y  $\phi = 0.75$  para columnas con espiral.

El valor de  $\phi$  es menor que 0.90 usado en vigas porque la resistencia de una columna es más afectada por las variaciones en la resistencia del concreto que una viga, y porque la falla de una columna trae consecuencias más graves que la falla de una viga. Una columna con estribos tiene un valor de  $\phi$  menor que una columna con espiral porque la falla de la primera es más súbita (frágil).

El eje horizontal del diagrama de interacción corresponde a "flexión pura". Aquí el factor de reducción de resistencia,  $\phi$ , es igual o aproximado a 0.90 para considerar la transición entre  $\phi = 0.70$  ó  $0.75$  para carga axial alta y  $\phi = 0.90$  para flexión pura. La transición se hace como lo especifica ACI en Sección 9.3.2.2. (b) y B. 9.3.2.

#### ACI Sección 9.3.2.2 (b)

El cambio de  $\phi$  comienza para la capacidad a carga axial,  $\phi P_n$ , la cual es igual a la menor de la carga balanceada,  $\phi P_b$ , o,  $0.1f_c A_g$ . Generalmente,  $\phi P_b$  excede  $0.1f_c A_g$  excepto para algunas columnas no rectangulares. El valor de  $\phi$  varía linealmente desde  $\phi P_n$  hasta cero.

### UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

#### ACI Sección B. 9.3.2.

En el ACI en el apéndice B la transición en  $\phi$ , es una función de la deformación,  $\epsilon_t$ , del refuerzo extremo de la cara de compresión.

Cuando esta deformación está entre 0.003 en compresión y  $\epsilon_y$  (dónde estos son negativos) la sección se dice que está en "compresión controlada". Cuando  $\epsilon_t$  es menor (más negativo a mayor tensión) de -0.005, la sección se dice que está en "tensión controlada". El valor de  $\phi$  varía linealmente como una función de  $\epsilon_t$  cuando esta varía desde  $-\epsilon_y$  hasta -0.005.

## 8-5.-DISEÑO DE COLUMNAS CORTAS.

### Tipos de cálculos. Análisis y diseño

Si la sección transversal se conoce y se requiere determinar la capacidad, se trata de un *análisis* o *revisión*. Por otro lado, si las cargas y los momentos se conocen y es necesario seleccionar una sección transversal para resistirlos, el procedimiento consiste en un *diseño* o *dimensionamiento*. Ambos se facilitan usando los diagramas de interacción como ayuda de diseño.

### Factores que afectan la selección de una columna

- **Elegir el tipo de columna**

Se puede tener la misma calidad de materiales  $f_c$  y  $f_y$ , la misma cantidad de acero,  $A_{st}$  y la misma cantidad de sección transversal,  $A_g$  pero pueden diferir en el arreglo del refuerzo y en la forma de la sección transversal pudiendo ser, cuadrada, rectangular o circular.

Para relaciones de excentricidad,  $e/h$ , menores que 0.1, una columna con espiral es más eficiente en términos de capacidad de carga. Esto es debido a que  $\phi = 0.75$  comparado con 0.70 para columnas con estribos. Esta economía puede compensarse por el costo de la cimbra y de la espiral el cual es mayor que en una columna con estribos.

Para relaciones de excentricidad,  $e/h$  mayores de 0.2, para flexión en un solo sentido se recomienda una sección rectangular por ser más eficiente, incrementando la capacidad en el eje de flexión.

Las columnas con estribos con varillas en las cuatro caras se recomiendan para relaciones  $e/h$ , menores o cerca de 0.2 y cuando se tiene flexión en ambos ejes. Las columnas con espiral generalmente se usan poco en zonas no sísmicas. En zonas sísmicas o donde la ductilidad es importante, se usan frecuentemente las columnas con espiral.

- **Estimación del tamaño de la columna**

El paso inicial para diseñar una columna involucra estimar una sección requerida de la columna. No hay una regla directa, porque depende de la magnitud de la carga axial y del momento. Sin embargo, basándose en la capacidad a carga axial se obtiene una relación aproximada:

$$A_g \text{ (tanteo)} \geq \frac{P_u}{0.45 (f_c + f_y \rho_t)}$$

donde:  $\rho_t = \frac{A_{st}}{A_g}$ , para columnas con estribos.

y  $A_g \text{ (lanteo)} \geq \frac{P_u}{0.55 (f'_c + f_y \rho_t)}$ ; para columnas con espiral.

Estas ecuaciones no consideran la presencia de los momentos, por lo que corresponden a la porción de línea horizontal del diagrama de interacción  $\phi P_n$ ,  $\phi M_n$ .

Generalmente, tanto el ancho como el peralte se incrementan 2 pulg. (5 cm.). El ACI no especifica un tamaño mínimo de columna, la dimensión mínima de una columna con estribos colada en el lugar es 10 pulg. (25 cm). El diámetro mínimo de una columna con espiral es 12 pulg. (30 cm.)

### Columnas esbeltas

Una columna esbelta se flexiona lateralmente debido a las cargas. La reducción de la capacidad a carga axial debida a esta flexión se le denomina efecto de esbeltez. El ACI en la Sección 10.12.2 establece que se desprecien los efectos de esbeltez si:

$$\frac{K \ell_u}{r} \leq 34 - 12 \frac{M_1}{M_2}$$

donde: K = Factor de longitud efectiva el cual, para un marco arriostrado, será menor o igual a 1.0.

$\ell_u$  = Longitud libre de la columna.

r = Radio de giro igual a 0.3 de la dimensión menor de la columna en sección rectangular y 0.25 del diámetro en sección circular.

$M_1/M_2$  = Relación de momentos en los dos extremos de la columna la cual, para un marco arriostrado está entre +0.5 y -0.5.

En este capítulo se considerará que  $K = 1.0$  y  $M_1/M_2 = +0.5$ , lo cual es conservador. Para esta combinación, las columnas son cortas si  $K \ell_u / r \leq 28$ .

Para una columna cuadrada, esto corresponde a  $\ell_u / h \leq 8.4$ .

## **Requisitos de espaciamiento de varillas**

El ACI Sección 7.7.1. requiere un recubrimiento libre no menor que 1 ½ pulg. (≈ 4cm.), en columnas con estribos o espiral. En otros casos se requiere mayor recubrimiento. El concreto al ser colado en la forma de la columna debe fluir alrededor de las varillas. Para facilitar esto, el Código ACI requiere que la distancia mínima libre entre varillas longitudinales no debe ser menor que ; el mayor de : 1.5 veces el diámetro de varillas longitudinales, 1.5 pulg. (≈ 4 cm.) (ACI Sección 7.6.3) ó 1 1/3 veces el tamaño máximo del agregado grueso (ACI Sección 3.3.2). Esta distancia libre también debe darse en el caso de traslapes (ACI Sección 7.6.4) como se puede apreciar en la Figura 8-7.

## **Espaciamiento y requisitos de construcción de estribos**

Los estribos se colocan en las columnas por cuatro razones:

**1.- Evitar el pandeo de las varillas longitudinales.** El ACI en las Secciones 7.10.5.1, 7.10.5.2 y 7.10.5.3 dan los límites de tamaño, separación y arreglo de los estribos. El tamaño mínimo es el #3 para varillas longitudinales #10 o menores y estribo #4 para varillas mayores a la #10. El espaciamiento vertical de los estribos no debe exceder 16 veces el diámetro de la varilla longitudinal, 48 veces el diámetro del estribo, ni la dimensión menor de la sección transversal.

En regiones sísmicas se requieren estribos cerrados (ACI Sección 21.4.4).

El ACI Sección 7.10.5.3 como se ilustra en la figura 8-8 especifica que, la separación mínima entre esquinas de estribos, para evitar el desplazamiento lateral de las varillas longitudinales, debe ser 6 pulg., o menor lo cual también sirve para mantener a las varillas en su posición correcta al vaciar el concreto y compactarlo con el vibrador. Los extremos de los estribos deben anclarse con ganchos a 90° o 135° alrededor de la varilla longitudinal más una extensión de 6 diámetros del estribo pero no menor de 2 ½ pulg.

En zona sísmica, se requieren ganchos a 135° más una extensión de 6 diámetros del estribo.

- 2.- Los estribos sujetan al refuerzo durante el proceso de construcción.**
- 3.- Confinan el núcleo de concreto, aumentando la ductilidad.**
- 4.- Sirven como refuerzo de cortante a la columna.**

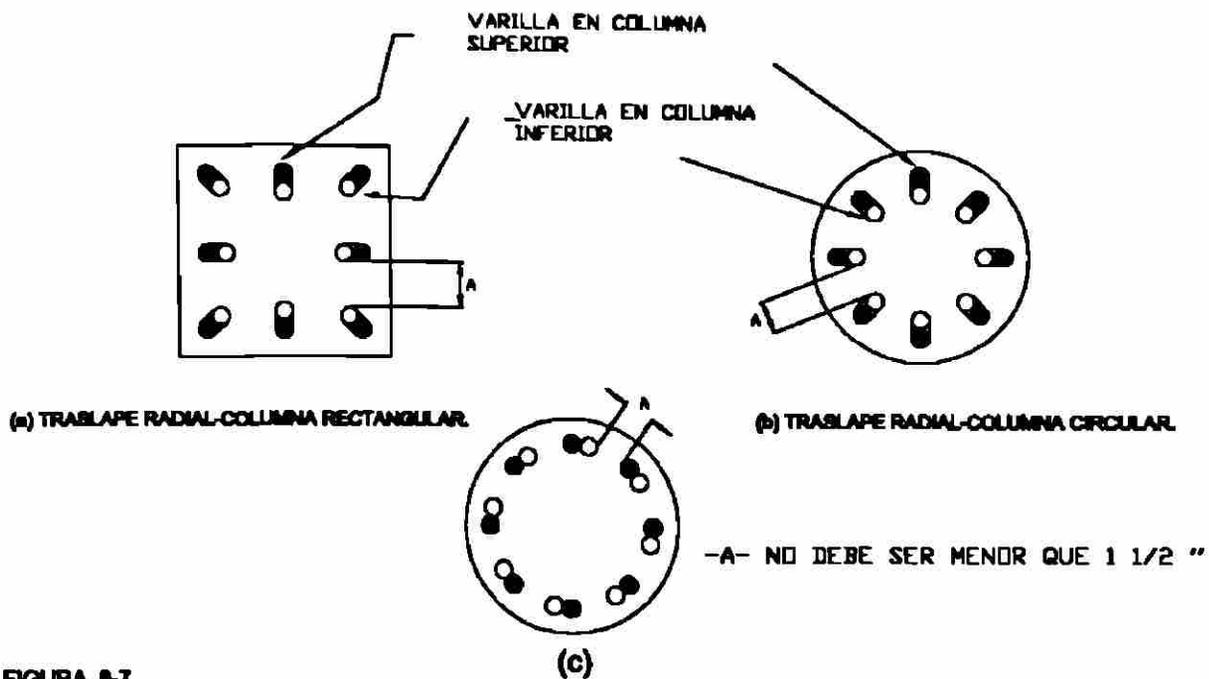


FIGURA B-7  
ARREGLO DE VARILLAS TRASLAPADAS EN COLUMNAS.

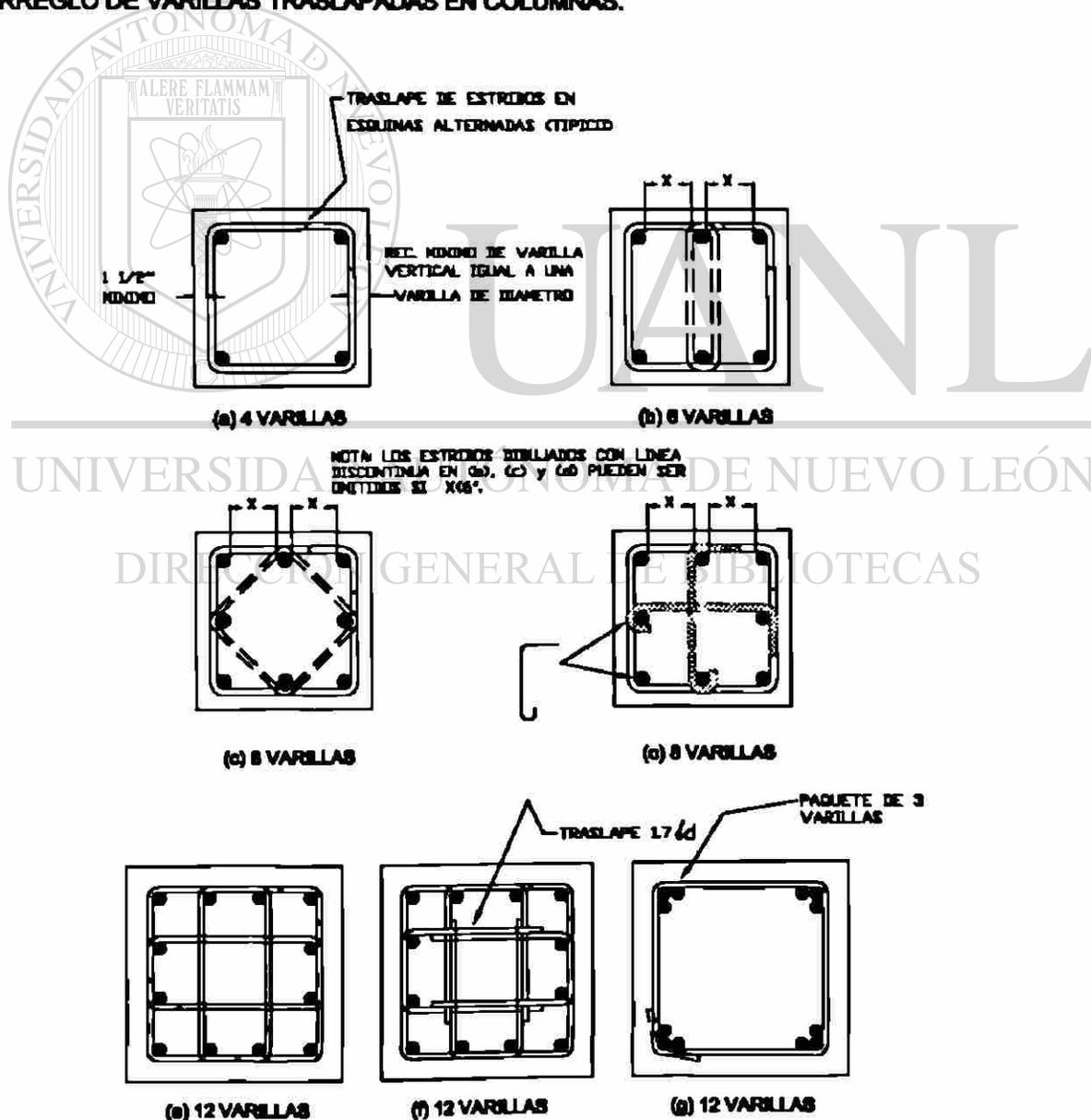
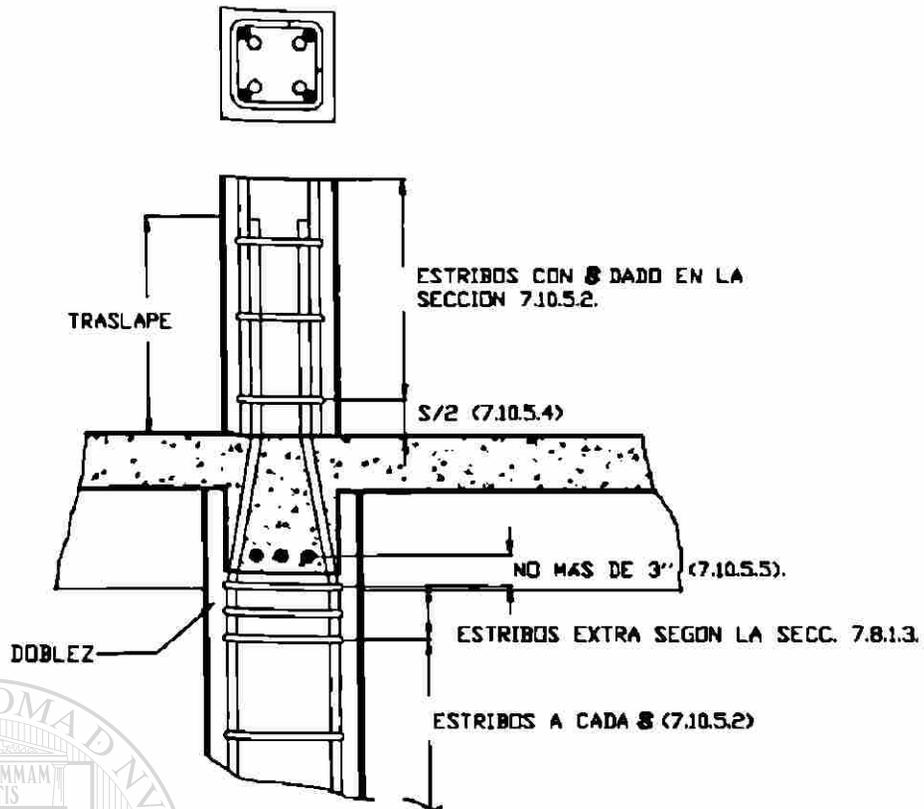
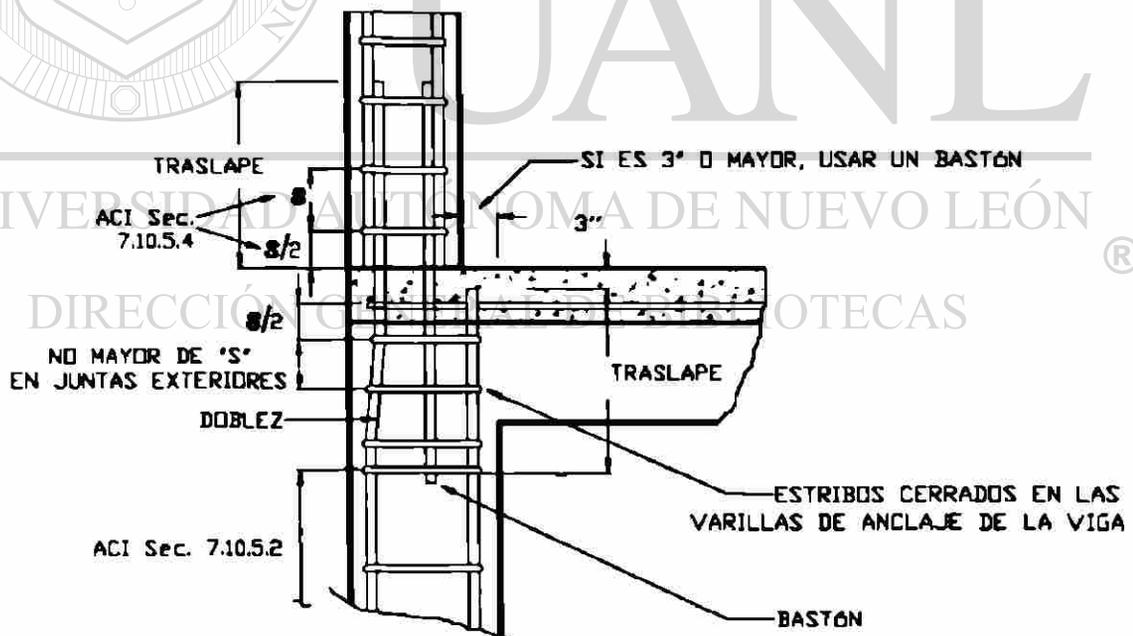


FIGURA B-8  
ARREGLOS TÍPICOS DE ESTRIBOS



(a) ESPACIAMIENTO DE ESTRIBOS EN JUNTA VIGA-COLUMNNA INTERIOR.



(b) ESTRIBOS EN VIGA-COLUMNNA EXTERIOR.

FIGURA 8-8  
ESPACIAMIENTO DE ESTRIBOS EN JUNTAS VIGA-COLUMNNA.

Si el cortante  $V_u/\phi$  excede  $0.5V_c$ , se requiere refuerzo por cortante (ACI Sección 11.5.5.1). Los estribos como refuerzo de cortante no pueden espaciarse a más de  $d/2$  (ACI Sección 11.5.4.1)

El ACI Secciones 7.10.5.4 y 7.10.5.5 requiere que los estribos se coloquen como lo indica la figura 8-9, en las juntas de viga-columna interior y viga-columna exterior.

Finalmente, se requieren estribos extras debajo de la losa o viga en el extremo de la columna para resistir la componente horizontal de las varillas tal como se describe en la Sección 7.8.1 del ACI.

### Cantidad de espiral y requisitos de espaciamiento

La cantidad del refuerzo de la espiral se define usando una relación de refuerzo de espiral,  $\rho_s$ , dado por:

$$\rho_s = \frac{A_{sp} L_{sp}}{A_c L_c}$$

donde:

$$A_{sp} = \text{Área de la varilla de la espiral} = \frac{\pi (d_{sp})^2}{4}$$

$d_{sp}$  = Diámetro de la varilla de la espiral.

$L_{sp}$  = Longitud de una vuelta de la espiral =  $\pi D_c$ .

$D_c$  = Diámetro del núcleo.

$A_c$  = Área del núcleo,  $\pi (D_c)^2/4$

$L_c$  = Paso de la espiral =  $s$ .

$$\text{Entonces: } \rho_s = \frac{(A_{sp}) (\pi D_c)}{(\pi D_c^2/4) s}$$

$$\rho_s = \frac{4A_{sp}}{sD_c}$$

Del diagrama de cuerpo libre de la espiral.

$$2f_{sp} A_{sp} = f_2 D_c s$$

$$f_2 = \frac{f_{sp} \times \rho_s}{2}$$

La resistencia de la columna en el primer máximo es:

$$P_0 = 0.85 f_c (A_g - A_{st}) + f_y A_{st}$$

La resistencia en el segundo máximo es:

$$P_2 = 0.85 f_1 (A_c - A_{st}) + f_y A_{st}$$

Entonces si  $P_2$  es igual a  $P_0$ ,  $0.85 f_1 (A_c - A_{st})$  puede ser igual a  $0.85 f_c (A_g - A_{st})$ . Siempre que  $A_{st}$  es pequeña comparada con  $A_g$  o  $A_c$ , lo que da:

$$f_1 = \frac{A_g f_c}{A_c}$$

tomando  $f_{sp}$  igual a la resistencia de fluencia de la espiral,  $f_y$ , el porcentaje de acero da:

$$\rho_s = 0.45 (A_g/A_c - 1) (f_c/f_y) \quad (\text{ACI Ec. 10 - 6})$$

El espaciamiento de la espiral se puede determinar por tres reglas:

1.- Resolviendo la ecuación anterior lo cual da:

$$S \leq \frac{\pi d_{sp}^2 f_y}{0.45 D_c f_c [(A_g/A_c) - 1]}$$

2.- El ACI Sección 7.10.4.3 limita el espaciamiento libre entre espiral ; (paso), a no más de 3 pulg. (7.5 cm).

3.- Para evitar problemas de colado del concreto. El espaciamiento libre no será menor que 1 1/3 veces el tamaño del agregado grueso (ACI Sección 3.3.3) y no menor de 1 pulg. (ACI Sección 7.10.4.3).

La terminación de la espiral tanto arriba como abajo de la columna se rige por las Secciones 7.10.4.6 a 7.10.4.8. Otra vez, las juntas de refuerzo deben satisfacer la Sección 7.9.1 del ACI.

## EJEMPLOS DE DISEÑO

**Ejemplo 8-1.** Diseño de una columna con estribos para  $P_u$  y  $M_u$  dados

$$P_u = 350 \text{ KLbs.} \quad M_u = 110 \text{ KLbs-pie.} \quad \text{y} \quad V_u = 16 \text{ KLbs.}$$

La columna está en un marco arriostrado y mide 10 pies, 6 pulg.

1.- Seleccionar materiales y proponer sección.

Usar  $f_y = 60$  KLbs y  $f_c = 3$  KLbs/pulg<sup>2</sup>. Un porcentaje económico de acero esta entre 1 y 2%. Consideremos  $\rho_t = 0.015$  como primer tanteo.

$$A_g \text{ (tanteo)} \geq \frac{P_u}{0.45 (f_c + f_y \rho_t)}$$

$$\geq \frac{350}{0.45 (3 + 60 \times 0.015)} \geq 199 \text{ pulg}^2$$

ó 14.1 pulg x 14.1 pulg.

Como la fórmula anterior no considera el efecto del momento  $M_u$ , se propondrá una sección de 16 x 16 pulg., como primer tanteo.

Para proponer el arreglo del refuerzo, calculamos la relación  $e/h$ :

$$e = \frac{M_u}{P_u} = \frac{110}{350} = 0.314 \text{ pies.} \quad \frac{e}{h} = 0.236$$

Para este rango de  $e/h$ , se recomienda una columna reforzada en dos caras como eficiente.

Relación de esbeltez: Este efecto puede despreciarse si:

$$Kl_u/r \leq 34 - 12(M_1/M_2)$$

Como la columna está arriostrada propondremos  $K \leq 1.0$  y  $M_1/M_2$  normalmente estará entre +0.5 y -0.5, propondremos  $K = 1.0$  y  $M_1/M_2 = +0.5$

$$\frac{Kl_u}{r} = \frac{1.0 \times 126}{0.3 \times 16} = 26.3$$

$$34 - 12 (M_1/M_2) = 34 - 12 (+0.5) = 28.0$$

El efecto de esbeltez puede despreciarse.

2.- Calcular  $\gamma$

$\gamma$ , es la relación entre la distancia a centros de varillas y la dimensión total  $h$  de la columna, se requiere para definir que diagrama de interacción se usara.

$$\gamma = \frac{16 - 2 (1.5 + 0.375 + 0.5)}{16} = 0.703$$

Como se tienen diagramas de interacción para  $\gamma = 0.60$  y  $\gamma = 0.75$  tendrá que interpolarse.

### 3.- Uso de los diagramas de interacción para determinar $\rho_t$ .

Datos para entrar a los diagramas:

$$\frac{\phi P_n}{A_g} = \frac{P_u}{A_g} = \frac{350}{16 \times 16} = 1.367$$

$$\frac{\phi M_n}{A_g h} = \frac{M_u}{A_g h} = \frac{110 \times 12}{16 \times 16 \times 16} = 0.322$$

Del diagrama de interacción para  $\gamma = 0.60$ ,  $\rho_t = 0.014$ .

Del diagrama de interacción para  $\gamma = 0.75$ ,  $\rho_t = 0.013$ .

Interpolando linealmente para  $\gamma = 0.703$ .

$$\rho_t = 0.014 - 0.001 \times \frac{0.103}{0.150} = 0.0133$$

Si este valor hubiese resultado mayor de 0.03 ó 0.04 aumentar sección, y si hubiese resultado menor de 0.01 es necesario recalcular usando una sección más pequeña (ACI Sección 10.9.1).

### 4.- Selección del refuerzo

$$A_{st} = \rho_t \times A_g$$

$$= 0.0133 \times 16 \times 16 = 3.41 \text{ pulg}^2$$

Posibles combinaciones:

4 varillas # 9,  $A_{st} = 4.00 \text{ pulg}^2$  (2 en cada cara).

8 varillas # 6,  $A_{st} = 3.52 \text{ pulg}^2$  (4 en cada cara).

6 varillas # 7,  $A_{st} = 3.60 \text{ pulg}^2$  (3 en cada cara).

Se propone una columna cuadrada de 16" de lado con 6 varillas #7.

### 5.- Revisar capacidad a carga axial máxima.

$$P_u \text{ no debe exceder } \phi P_{n(\max)} = 0.85 \phi [0.85 f'_c (A_g - A_{st}) + f_y (A_{st})]$$

La línea horizontal superior del diagrama de interacción representa  $\phi P_{n(max)}$  y la sección falla arriba de este límite. Al usar el diagrama de interacción se ve que  $P_u$  no excede  $\phi P_{n(max)}$ .

## 6.- Diseñar traslapes de varillas.

En los diagramas de interacción, los esfuerzos en las varillas adyacentes a la cara de tensión para  $P_u/bh = 1.367$  y  $M_u/bh^2 = 0.322$  están cerca de  $0.2f_y$ , en tensión. En las Secciones. 12.17.2.2 y 12.17.2.3, el traslape debe ser Clase B si más de la mitad de las varillas son traslapadas en cualquier sección o clase A si menos de la mitad son traslapadas. Normalmente todas las varillas son traslapadas en la misma sección. Consideraremos que esto se da. El traslape debe ser  $1.3\ell_d$ .

Del ACI Sección 12.2.2,  $\ell_d$  para varillas #7 es:

$$\ell_d = \frac{(f_y \alpha \beta \lambda)}{(20 \sqrt{f_c})} d_b = \frac{(60,000 \times 1.0 \times 1.0 \times 1.0)}{(20 \sqrt{3,000})} \times 0.875$$

$$\ell_d = 47.9 \text{ pulg.}$$

$$1.3 \ell_d = 1.3 \times 47.9 = 62.3 \text{ pulg.}$$

Este traslape es muy grande, casi media altura de entrepiso. Por esta razón, consideraremos el uso de 8 varillas #6, cuatro en cada cara. Con un espaciamiento libre de 3.08 pulg. ( $\approx 8$  cm) el cual excede  $1.5d_b$ .

Para las varillas #6,  $\ell_d$  es:

$$\ell_d = \frac{(f_y \alpha \beta \lambda)}{(25 \sqrt{f_c})} d_b = 38.3 \text{ pulg.}$$

La longitud del traslape es  $1.3 \times 38.3 = 49.8$  pulg.  $\approx 50$  pulg.

## 7.- Estribos.

El ACI Sección 7.10.5.1 especifica que el estribo mínimo a usar es el #3. Espaciamiento mínimo (ACI Sec. 7.10.5.2) el menor de :

- 6 diámetros varilla longitudinal =  $16 \times \frac{3}{4} = 12$  pulg.
- 48 diámetros estribo =  $48 \times \frac{3}{8} = 18$  pulg.
- Dimensión mínima de columna = 16 pulg.

Si  $V_u > 0.5\phi V_c$  los estribos deben satisfacer el ACI Capítulo 11 y también el ACI Sección 7.10.5.

$$V_c = 2 \left( 1 + \frac{N_u}{2000 A_g} \right) \sqrt{f'_c} b_w d$$

$$= 2 \left( 1 + \frac{350,000}{2000 \times 16 \times 16} \right) \sqrt{3,000} \times 16 \times 13.6 = 40.1 \text{ KLbs}$$

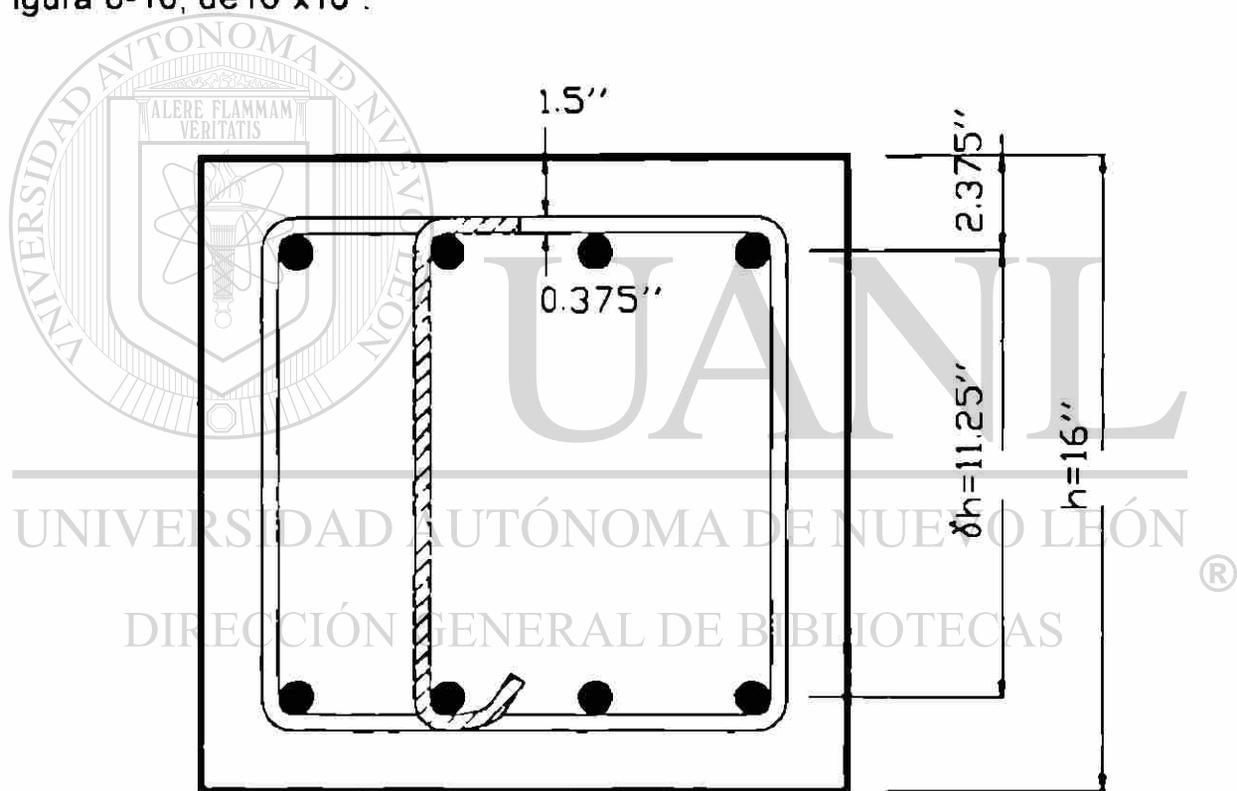
$V_u = 16 \text{ KLbs}$  es menor que  $0.5\phi V_c = 0.5 \times 0.85 \times 40.1$

$$= 17.1 \text{ KLbs}$$

Entonces, la Sección 7.10.5 del ACI rige.

(Si  $0.5\phi V_c < V_u \leq \phi V_c$ , sería necesario satisfacer las Secciones 7.10.5, 11.5.4.1 y 11.5.5.3 del ACI)

Usar estribos #3 @ 12 pulg. c.a.c., y 8 varillas #6 para la columna mostrada en la Figura 8-10, de 16"x16".



ACI SEC. 7.10.5.3

TRASLAPES DE 50" EN TODAS LAS VARILLAS LONGITUDINALES.

FIGURA 8-10

**Ejemplo 8-2.** Diseño de una columna con espiral para carga axial grande y momento pequeño.

$$P_u = 1600 \text{ KLbs}$$

$$M_u = 150 \text{ KLbs - pie.}$$

1.- Proponer sección:

Proponiendo  $\rho_t = 0.04$

$$A_g \text{ (tanteo)} = \frac{P_u}{0.55 (f'_c + f_y \rho_t)} = 455 \text{ pulg}^2$$

Esta corresponde a un diámetro de 24.1 pulg.

Se propone  $d = 24$  pulg.

2.- Calcular  $\gamma$

Suponiendo espiral de varilla #3 y refuerzo longitudinal con varillas #10:

$$\gamma = \frac{24 - 2(1.5 + 0.375 + 1.27/2)}{24} = 0.791$$

3.- Calcular  $\rho_t$ :

Usando los diagramas de interacción:

$$\frac{P_u}{A_g} = \frac{1600}{\pi(12)^2} = 3.54$$

$$\frac{M_u}{A_g x h} = \frac{150 \times 12}{\pi(12)^2 \times 24} = 0.166$$

Interpolando entre las figuras A-13 y A-14 (Diagramas de interacción con  $\gamma = 0.75$  y  $0.90$  de las ayudas de diseño al final) da  $\rho_t = 0.038$ . Debido a que los valores de  $P_u/A_g$  y  $M_u/A_g h$  quedan arriba de la línea horizontal del diagrama de interacción, se usará la capacidad a carga axial máxima para calcular  $A_{st}$ .

4.- Acero de refuerzo.

$$A_{st} = \rho_t \times A_g.$$

$$= 0.038 \times \pi (12)^2 = 17.19 \text{ pulg}^2$$

11 varillas #11 dan  $A_{st} = 17.16 \text{ pulg}^2$  y la tabla A-21 muestra que se acomodan correctamente en una columna de 24 pulg. de diámetro.

5.- Revisión de la capacidad máxima a carga axial.

$$\begin{aligned}\phi P_{n(\max)} &= 0.85 \times 0.75 [0.85 \times 4(\pi \times 12^2 - 17.16) + 60 \times 17.16] \\ &= 1600 \text{ KLbs}\end{aligned}$$

6.- Cálculo de la espiral:

El tamaño mínimo de la espiral es la #3 (ACI Sección 7.10.4.2) el paso,  $s$ , está dado por la ecuación:

$$s < \frac{\pi (d_{sp})^2 f_y}{0.45 D_c f_c [(A_g/A_c) - 1]} \quad \text{donde:}$$

$d_{sp}$  = Diámetro de la espiral = 0.375 pulg.

$f_y$  = Esfuerzo de fluencia del acero de la espiral

$D_c$  = Diámetro del núcleo (al exterior de la espiral)

$$= 24 - 2 \times 1.5 = 21 \text{ pulg.}$$

$$A_g = \text{Area total} = \pi (12)^2 = 452 \text{ pulg}^2$$

$$A_c = \text{Area del núcleo} = (10.5)^2 \pi = 346 \text{ pulg}^2$$

Entonces:

$$s \leq \frac{\pi (0.375)^2 \times 60,000}{0.45 \times 21 \times 4000 [(452/346) - 1]} \leq 2.29 \text{ pulg.}$$

Entonces, centro a centro de la espiral no debe exceder 2.29 pulg. revisando los pasos de la espiral, tenemos: ACI Sección 7.10.4.3 es 3 pulg. Paso max. =  $3.0 + 0.375 = 3.375 \text{ pulg.}$

Paso mínimo: ACI Sección 7.10.4.3 es 1 pulg., ó 11/3 veces el tamaño máximo del agregado grueso (ACI Sección 3.3.3). Para 3/4 pulg., del agregado grueso el paso mínimo es 1.375 pulg.

Usar espiral No. 3 con 2 1/4 pulg., de paso.

## 7.-Traslapes:

Con el diagrama de interacción  $f_y$ , está en compresión. Entonces, para traslape en compresión (ACI Sección 12.6.1).

De la tabla A-19.

Longitud de traslape = 42.3 pulg.

Para varillas dentro de espiral (ACI Sección 12.17.2.5)

Factor = 0.75

$\ell_{(\text{traslape})} = 0.75 \times 42.3 = 31.7$  pulg.

## 8.6.- SOLUCIÓN APROXIMADA PARA COLUMNAS CON ESTRIBOS. FALLA POR COMPRESIÓN.

El diagrama de interacción calcula la capacidad de secciones transversales de columnas, esto es teóricamente correcto, pero no da una solución directa para el diseño de la columna. En 1942 Whitney desarrolló una ecuación aproximada para la parte del diagrama de interacción en falla por compresión. Este análisis considera  $f_y = 50,000$  Lbs/pulg<sup>2</sup> ( $f_y = 3500$  Kg/cm<sup>2</sup>). Actualmente muchas columnas son diseñadas con  $f_y = 60,000$  Lbs/pulg<sup>2</sup>. Por esta razón, la ecuación de Whitney modificada basada en  $f_y = 60,000$  Lbs/pulg<sup>2</sup> se presenta aquí. Las siguientes consideraciones son necesarias:

- 1.- La columna tiene una sección transversal rectangular con refuerzo en dos caras paralelas al eje de flexión y a la misma distancia de él.
- 2.- El refuerzo en compresión ha fluido. Esto es generalmente cierto para fallas en compresión, particularmente para excentricidades pequeñas.
- 3.- el área de concreto desplazada por el acero en compresión puede ser despreciada.
- 4.- El diagrama de interacción para fallas en compresión puede ser representado por una línea recta para la capacidad a carga axial pura  $P_{no}$ , y momento correspondiente a la falla balanceada.

5.- La profundidad del bloque de esfuerzos en compresión para falla balanceada es  $a = \beta_1 c$ . De la compatibilidad de deformaciones consideramos que  $f_c \leq 4000 \text{ Lbs/pulg}^2$  y  $f_y = 60,000 \text{ Lbs/pulg}^2$   $a = 0.51d$ .

Sumando momentos con respecto al eje del refuerzo en tensión da:

$$P_n \frac{(e+d-d')}{2} = c(d-a/2) + C_s(d-d')$$

$$\text{ó } P_n = \frac{C(d-a/2)}{e + [(d-d')/2]} + \frac{C_s}{[e/(d-d')] + 1/2}$$

Sustituyendo los valores en la fluencia:

$$c(d-a/2) = [0.85 f_c (0.51d) b] \frac{(d-0.51d)}{2} = 0.323 f_c b d^2$$

y,  $C_s = A'_s f_y$ , esto da:

$$P_n = \frac{0.323 f_c b d^2}{e+1/2(d-d')} + \frac{A'_s f_y}{[e/(d-d')] + 1/2}$$

lo cual puede escribirse como:

$$P_n = \frac{0.323 f_c b h}{(eh/d^2) + [(d-d')h]/2d^2} + \frac{A'_s f_y}{[e/(d-d')] + 1/2} \quad \text{----- (A)}$$

Si la excentricidad correspondiente a la falla balanceada se conoce,  $P_{nb}$ . Para esta ecuación corresponde al rango entre  $P_{no}$  y  $P_{nb}$  y es necesario satisfacer para la condición límite  $e = 0$ . Entonces:  $P_n = 0.85 f_c b h + 2 f_y A'_s$ .

Sustituyendo  $e = 0$  y este valor de  $P_n$ , la ecuación (A) da:

$$\frac{(d-d')h}{2d^2} = 0.38$$

Sustituyendo este valor dentro de la ecuación (A) y considerando que  $A_{st} = 2A'_s$ , da la ecuación de Whitney modificada:

$$P_n = \frac{0.323 f_c b h}{eh/d^2 + 0.38} + \frac{A_{st} f_y}{1 + 2e/(d-d')}$$

**Ejemplo 8-3.** Usando la ecuación de Whitney modificada seleccionar el refuerzo de una columna.

$$P_u = 560 \text{ KLbs}$$

$$M_u = 210 \text{ KLbs - pie}$$

$$f_c = 5000 \text{ Lbs/pulg}^2$$

$$f_y = 60,000 \text{ Lbs/pulg}^2$$

1.- Seleccionar sección:

$$A_{g(\text{tanteo})} \geq \frac{P_u}{0.45(f'_c + f_v \rho_t)}$$

$$\text{con } \rho_t = 0.02 \quad A_{g(\text{tanteo})} \geq \frac{560,000}{0.45 + (5000 + 60,000 \times 0.02)}$$

$$A_{g(\text{tanteo})} \geq 200.72 \text{ pulg}^2$$

$$h = \sqrt{A_g} = \sqrt{200.72} = 14.1 \text{ pulg.}$$

Proponemos una columna de 16 x 16 pulg.

$$d = 16'' - 2.5'' = 13.5'' \quad d - d' = 11.0 \text{ pulg.}$$

$$\text{excentricidad, } e = \frac{M_u}{P_u} = \frac{210 \times 12}{560} = 4.5 \text{ pulg.}$$

2.- ¿Es aplicable la ecuación modificada de Whitney?

Es aplicable si  $P_n \geq 0.6 f'_c b h$

$$0.6 \times 5 \times 16 \times 16 = 768 \text{ KLbs.}$$

$$P_n = \frac{P_u}{\phi} = \frac{560}{0.7} = 800 \text{ KLbs}$$

Por lo tanto, si es aplicable.

3.- Cálculo de  $A_{st}$ :

$$800 = \frac{0.323 \times 5 \times 16 \times 16}{[(4.5 \times 16) / (13.5)^2] + 0.38} + \frac{A_{st} \times 60}{1 + [(2 \times 4.5) / 11.0]}$$

$$800 = 533 + 33A_{st}$$

$$A_{st} = 8.08 \text{ pulg}^2$$

Usar una columna cuadrada de 16" X 16" con  $A_{st} = 8.08 \text{ pulg}^2$

Usando el diagrama de interacción  $A_{st} = 8.00 \text{ pulg}^2$ . En este caso la ecuación aproximada de Whitney es más precisa.

Se pueden deducir ecuaciones similares para la falla por tensión, pero son menos precisos y como la mayoría de las columnas fallan por compresión, no son tan necesarias. En caso de falla por tensión se recomienda usar los diagramas de interacción.

## 8.7.- COLUMNAS CARGADAS BIAIXIALMENTE.

Este tipo de columnas están sujetas a carga axial y flexión en dos ejes perpendiculares.

Un ejemplo común es el caso de una columna de esquina de un marco. Para una sección transversal dada, podemos dibujar el diagrama de interacción con la carga axial y los momentos en ambos ejes, como se muestra en la figura 8-11:

El cálculo de cada punto en la superficie involucra una doble interacción: (1) el gradiente de deformación a través de la sección es variable y (2) El ángulo del eje neutro es variable.

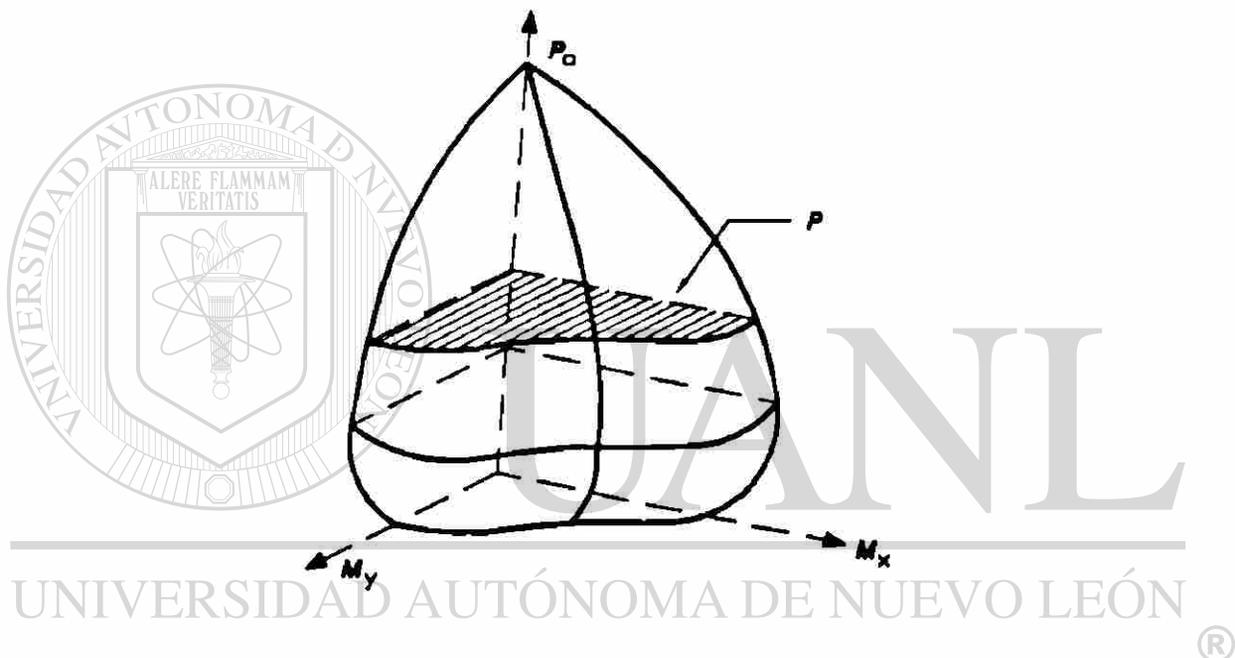


FIGURA 8-11

DIAGRAMA DE INTERACCION CON LA CARGA AXIAL Y LOS MOMENTOS EN AMBOS EJES

Una sección horizontal a través del diagrama de interacción genera, o se asemeja a un cuadrante de círculo o de una elipse y de altura la carga axial, y dependiendo del arreglo de las varillas.

Tres procedimientos son comúnmente usados para diseñar columnas rectangulares sujetas a cargas biaxiales.

1.- Las excentricidades biaxiales,  $e_x$  y  $e_y$ , pueden ser reemplazadas por una excentricidad uniaxial equivalente,  $e_{\alpha}$ , y la columna se diseña para flexión

uniaxial y carga axial. Definiremos como  $e_x$ , la excentricidad paralela al eje x, como se muestra en la figura 8-12:

Donde el momento  $M_y$ , es con respecto al eje y

$$\begin{aligned} M_{uy} &= P_u e_x \\ M_{ux} &= P_u e_y \\ \text{si } \frac{e_x}{x} &\geq \frac{e_y}{y} \end{aligned} \quad \text{-----(D)}$$

Entonces la columna podrá diseñarse para  $P_u$  y un momento

$$M_{oy} = P_u e_{\alpha x}, \text{ donde } e_{\alpha x} = e_x (\alpha e_y / y) x \quad \text{----- (E)}$$

donde, para  $\frac{P_u}{f_c A_g} \leq 0.4$

$$\alpha = \left(0.5 + \frac{P_u}{f_c A_g}\right) \frac{f_y + 40,000}{100,000} \geq 0.6$$

y para  $P_u / f_c A_g > 0.4$

$$\alpha = \left(1.3 - \frac{P_u}{f_c A_g}\right) \frac{f_y + 40,000}{100,000} \geq 0.5$$

En estas ecuaciones  $f_y$  esta en  $\text{Lbs/pulg}^2$  si la desigualdad (D) no se satisface, las x's y las y's se intercambian en la ecuación (E).

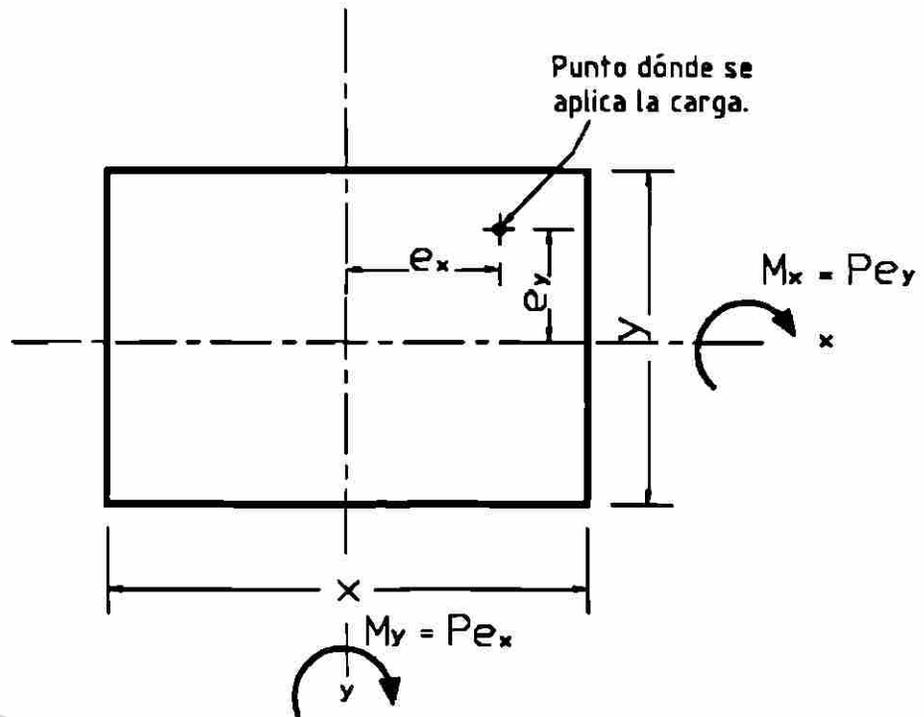
Este procedimiento se limita a columnas simétricas en ambos ejes y con relaciones x/y entre 0.5 y 2.0. El refuerzo debe colocarse en las cuatro caras de la columna.

2.- Las relaciones de Charts trazando secciones a  $45^\circ$  en el diagrama de interacción ( $M_x$  y  $M_y$  del punto A de la figura 8-13) y en esto se basa el diseño.

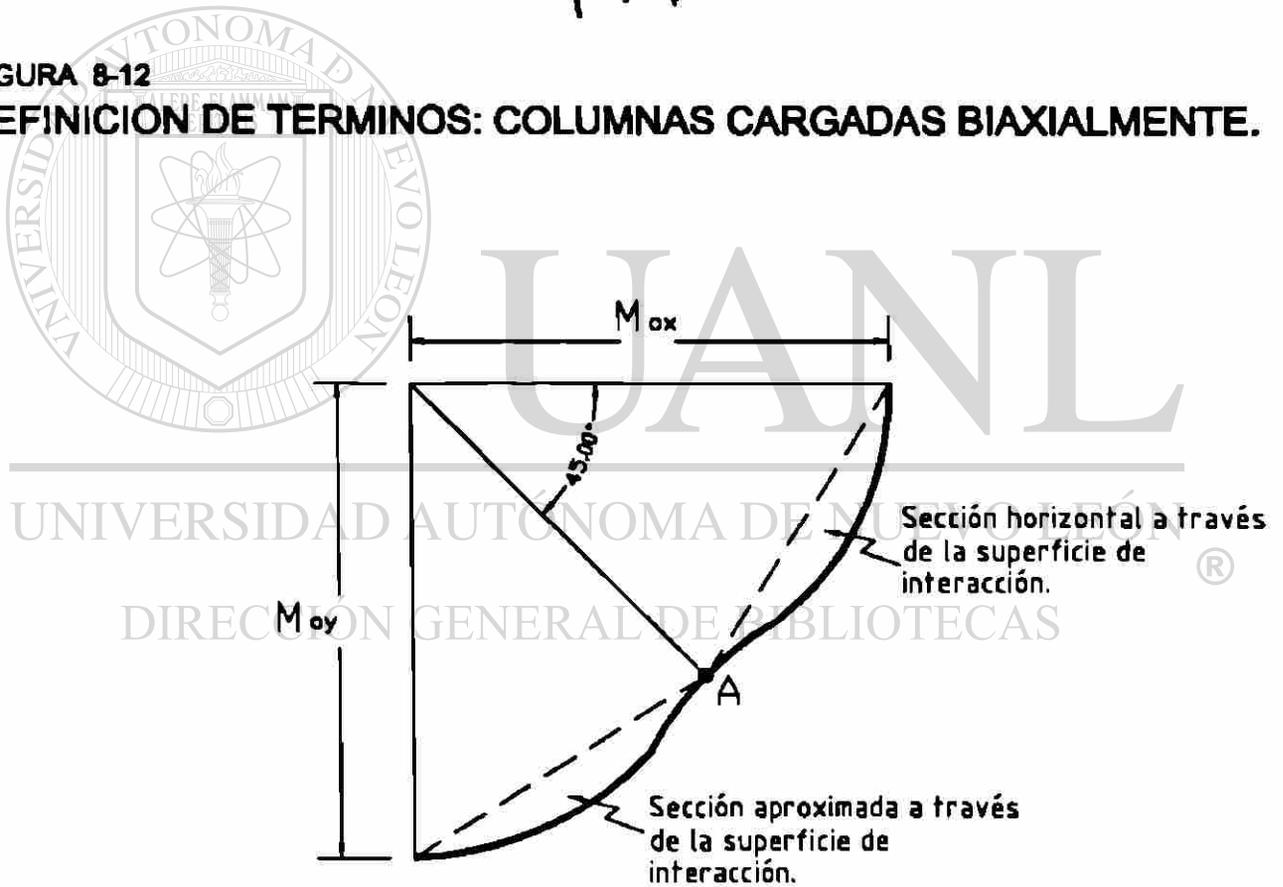
3.- Los comentarios del ACI Secciones 10.3.5 y 10.3.6 presentan la siguiente ecuación, originalmente presentada por Bresler, para calcular la capacidad para flexión biaxial:

$$\frac{1}{P_u} = \frac{1}{\phi P_{rx}} + \frac{1}{\phi P_{ry}} - \frac{1}{\phi P_{ro}}$$

donde:



**FIGURA 8-12**  
**DEFINICIÓN DE TERMINOS: COLUMNAS CARGADAS BIAXIALMENTE.**



**FIGURA 8-13**  
**APROXIMACIÓN DE LA SECCIÓN A TRAVÉS DE LA SUPERFICIE DE INTERACCIÓN.**

$P_u$  = Carga axial factorizada.

$\phi P_{nx}$  = Capacidad a carga axial factorizada correspondiente a la excentricidad  $e_x$  y el acero correspondiente con  $e_y = 0$ .

$\phi P_{ny}$  = Capacidad a carga axial factorizada correspondiente a la excentricidad  $e_y$  y el acero correspondiente con  $e_x = 0$ .

$\phi P_{no}$  = Capacidad a carga axial factorizada para  $e_x = 0$  y  $e_y = 0$ .

$M_{nx}$  = Momento con respecto al eje x, ( $P_u e_y$ ).

$e_x$  = Excentricidad medida paralela al eje y.

x = Dimensión de la columna paralela al eje x

y = Dimensión de la columna paralela al eje y.

#### Ejemplo 8-4: Diseño de una columna cargada biaxialmente. Método de la excentricidad.

Seleccionar la sección transversal de una columna con estribos para resistir las cargas y momentos factorizados  $P_u = 360$  KLbs,  $M_{ux} = 70$  KLbs-pie,  $M_{uy} = 80$  KLbs-pie. Usar  $f_y = 60$  KLbs/pulg<sup>2</sup>,  $f_c = 3$  KLbs/pulg<sup>2</sup>

##### 1.- Sección propuesta:

Considerando  $\rho_t = 0.015$ . La sección será reforzada en las cuatro caras ya está cargada biaxialmente.

$$A_g \text{ (tanteo)} \geq \frac{P_u}{0.45 (f_c + f_y \rho_t)}$$
$$\geq \frac{360}{0.45 (3+60 \times 0.015)}$$

$$\geq 205 \text{ pulg}^2 \text{ ó } 14.3 \text{ pulg. de lado.}$$

Se propone una columna cuadrada de 16x16 pulg.

##### 2.- Cálculo de $\gamma$ :

$$\gamma = 0.703 \quad (\text{Ejemplo anterior})$$

##### 3.- Calcular $e_x$ , $e_y$ , $e_{ox}$ y $e_{oy}$ :

$$e_x = \frac{M_{uy}}{P_u} = \frac{80 \times 12}{360} = 2.67 \text{ pulg.}$$

$$e_y = \frac{M_{ux}}{P_u} = \frac{70 \times 12}{360} = 2.33 \text{ pulg.}$$

Por inspección  $e_x/x \geq e_y/y$ , entonces:

$$\frac{P_u}{f_c A_g} = \frac{360}{3 \times 256} = 0.469 > 0.4$$

$$\alpha = (1.3 - \frac{P_u}{f_c A_g}) \frac{f_y + 40,000}{100,000} \text{ pero no menor de } 0.5$$

$$= (1.3 - 0.469) \frac{60,000 + 40,000}{100,000} = 0.831$$

$$e_{\alpha} = e_x + \frac{\alpha e_y x}{y} = 2.67 + \frac{0.831 \times 2.33 \times 16}{16} = 4.61 \text{ pulg.}$$

Entonces, el momento equivalente uniaxial es:

$$M_{oy} = P_u e_{\alpha} = 360 \times 4.61 = 1658 \text{ KLbs-pulg.}$$

La columna se diseñará para  $P_u = 360 \text{ KLbs}$  y  $M_{oy} = 1658 \text{ KLbs-pulg.}$

4.- Usar diagramas de interacción para determinar  $\rho_t$ :

$$\frac{P_u}{A_g} = \frac{360}{256} = 1.41 \text{ KLbs/pulg}^2$$

$$\frac{M_{oy}}{A_g h} = \frac{1658}{(16)^3} = 0.405 \text{ KLbs/pulg}^2$$

De las figuras A-9 y A-10.

$$\text{Para } \gamma = 0.60 \quad \rho_t = 0.033$$

$$\text{Para } \gamma = 0.75 \quad \rho_t = 0.026$$

Usando interpolación lineal,  $\rho_t = 0.031$  para  $\gamma = 0.703$ .

5.- Calcular  $A_{st}$  y seleccionar el refuerzo.

$$A_{st} = \rho_t A_g = 7.94 \text{ pulg}^2$$

De la tabla A-22, seleccionar 8 varillas #9, tres en cada cara,  $A_{st} = 8.00 \text{ pulg}^2$ .  
 Diseñar estribos y traslapes como ejemplos anteriores.

**Ejemplo 8-5.- Diseño de una columna cargada biaxialmente. Método de la carga reciproca de Bresler.**

Mismos datos de ejemplo anterior.

1.- Proponer sección:

Se propone sección de 16"x16", usando la misma ecuación que ejemplo 8-4.

2.- Calcular  $\gamma$ :  $\gamma = 0.703$

3.- Calcular  $\phi P_{nx}$ :

$\phi P_{nx}$ , es la capacidad a carga axial factorizada correspondiente a  $e_x$  y  $\rho_t$ .

$$\rho_t = \frac{8 \times 0.79}{16 \times 16} = 0.0247$$

$$\frac{e_x}{x} = \frac{M_{uy}}{P_{ux}} = \frac{80 \times 12}{360 \times 16} = 0.167$$

De la figura A-9, para  $e_x/x = 0.167$  y  $\rho_t = 0.0247$  da  $\phi P_{nx}/bh = 1.76$  para  $\gamma = 0.60$ .  
 De la figura A-10,  $\phi P_{nx}/bh = 1.85$  para  $\gamma = 0.75$ . Interpolando da  $\phi P_{nx}/bh = 1.82$   
 y  $\phi P_{nx} = 466 \text{ KLbs}$

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

4.- Calcular  $\phi P_{ny}$ :

$$\frac{e_y}{y} = \frac{M_{ux}}{P_{uy}} = \frac{70 \times 12}{360 \times 16} = 0.146$$

De la figura A-9,  $\phi P_{ny}/bh = 1.88$  para  $\gamma = 0.60$   
 De la figura A-10,  $\phi P_{ny}/bh = 1.95$  para  $\gamma = 0.75$   
 Interpolando da  $\phi P_{ny}/bh = 1.93$  y  $\phi P_{ny} = 494 \text{ KLbs}$ .

5.- Calcular  $\phi P_{no}$  :

De las figuras A-9 y A-10,  $\phi P_{no}$  es el punto de intersección con la curva para  $\rho_t = 0.0247$  interseca el eje vertical,  $\phi P_{no}/bh = 2.75$  y  $\phi P_{no} = 704 \text{ KLbs}$ .

6.-Calcular  $P_u$

$$\frac{1}{P_u} = \frac{1}{\phi P_{rx}} + \frac{1}{\phi P_{ry}} - \frac{1}{\phi P_{no}}$$

$$= \frac{1}{466} + \frac{1}{494} + \frac{1}{704}$$

$$P_u = 364 \text{ KLbs.}$$

La capacidad requerida es 360 KLbs; entonces, el diseño de la columna es adecuado.

Usar 8 varillas #8, tres en cada cara,  $A_{st} = 6.32 \text{ pulg}^2$

\*La cantidad de acero usada por los dos métodos difiere en 25%. Ambos métodos son empíricos, no es posible establecer cual diseño es el mejor.

**PROBLEMAS.**

8-1.- La columna mostrada en la Figura P8-1 está hecha con concreto de  $280 \text{ kg/cm}^2$  y acero grado 60

(a) Calcular la capacidad teórica a carga axial pura.

(b) Calcular  $\phi P_n$  máxima permisible para la columna.

8-2.- Calcular la carga axial balanceada y la capacidad a momento de la columna del problema anterior.  $f_c = 280 \text{ kg/cm}^2$ ,  $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$ .

8-3.- Usar los diagramas de interacción para calcular el momento máximo,  $M_u$  que puede soportar la columna del problema 8-1

(a)  $P_u = 260 \text{ ton.}$

(b)  $P_u = 58 \text{ tons.}$

(c)  $e = 10 \text{ cm.}$  Usar  $f_c = 210 \text{ kg/cm}^2$ ,  $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$

8-4.- Usar diagramas de interacción para diseñar una columna para las cargas dadas abajo. Usar  $f_c = 210 \text{ kg/cm}^2$  y  $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$ . Diseñar

estribos. Calcular los traslapes requeridos, dibujar la sección transversal mostrando refuerzo principal y estribos.

(a)  $P_u = 175$  tons.  $M_u = 30$  ton-m., Columna cuadrada con varillas en dos caras.

b)  $P_u = 320$  tons.  $M_u = 7$  ton-m. Columna cuadrada con varillas en las cuatro caras.

(c)  $P_u = 58$  tons.  $M_u = 33$  ton-m. Columna cuadrada con varillas en las cuatro caras.

8-5.- Usar los diagramas de interacción para diseñar una columna con espiral para soportar las cargas dadas abajo. En cada caso, usar  $f'_c = 280$  kg/cm<sup>2</sup> y  $f_y = 4200$  kg/cm<sup>2</sup>. Diseñar espiral, calcular traslapes y dibujar la sección transversal típica mostrando varillas y espiral.

(a)  $P_u = 270$  tons.  $M_u = 9$  ton-m.

(b)  $P_u = 225$  tons.  $M_u = 67$  ton-m.

8-6.- Usar la ecuación modificada de Whitney para diseñar la sección transversal y el refuerzo de una columna que soporta  $P_u = 175$  tons.  $M_u = 30$  ton-m. Usar  $f'_c = 210$  Kg/cm<sup>2</sup>,  $f_y = 4200$  kg/cm<sup>2</sup>

8-7.- Seleccionar la sección transversal y el refuerzo para soportar  $P_u = 200$  tons,  $M_{ux} = 45$  ton-m,  $M_{uy} = 58$  ton-m. Usar  $f'_c = 210$  kg/cm<sup>2</sup>,  $f_y = 4200$  kg/cm<sup>2</sup>.

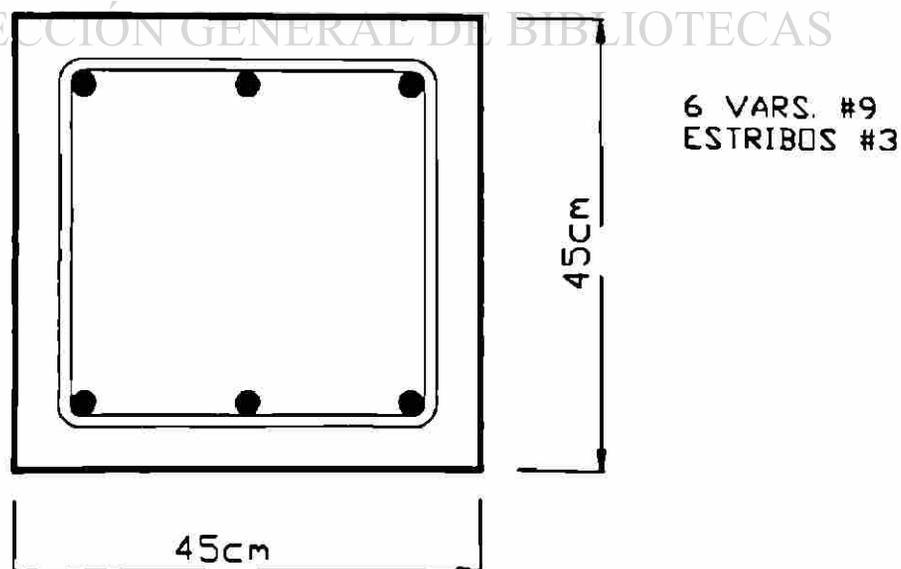


FIGURA P8-1

# TEMA 9

## Columnas esbeltas

9.1.- Introducción.

9.2.- Comportamiento y análisis de columnas articuladas.

9.3.- Diseño de columnas de marcos arriostrados (sin desplazamiento).

---

9.4.- Ejemplo de diseño de una columna de un marco no arriostrado (con desplazamiento).

9.5.- Problemas.

## 9.1.- INTRODUCCION

### Definición de Columna Esbelta.

Una columna cargada excéntricamente como se muestra en la Figura 9-1a en la que los momentos en los extremos son:

$$M_e = Pe$$

Cuando las cargas  $P$  son aplicadas, la columna se flexiona lateralmente una cantidad  $\Delta$  como se muestra. Por equilibrio, el momento interno a la mitad de la altura es (Figura 9-1a).

$$M_c = P(e+\Delta)$$

La deflexión incrementa los momentos para los que la columna será diseñada. Para esta columna simétrica el momento máximo ocurre a la mitad de la altura.

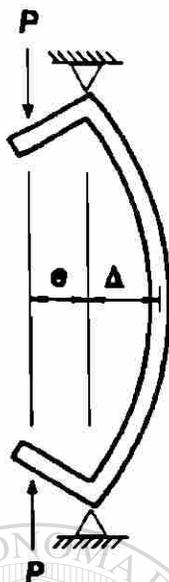
En la Figura 9-2 se muestra un diagrama de interacción para una columna de concreto reforzado. Este diagrama da las combinaciones de carga axial y momento requeridas para causar la falla de la sección transversal de la columna. La línea radial O-A representa los momentos en los extremos de la columna como se muestra en la Figura 9-1. Mientras esta carga se aplique con una excentricidad constante,  $e$ , el momento extremo,  $M_e$ , es una función lineal de  $P$ ,  $M_e = Pe$

La línea curva O-B continua, es el momento  $M_c$ , a la mitad de la altura de la columna, dado por la ecuación:  $M_c = P(e+\Delta)$

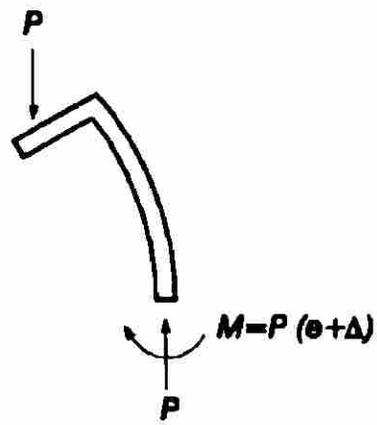
Para cualquier valor dado de  $P$ , el momento a la mitad de la altura es la suma del momento en el extremo,  $Pe$ , y el momento debido a las deflexiones,  $P\Delta$ . La línea O-A se conoce como "curva carga-momento" para el momento extremo, mientras que la línea O-B es la "curva carga-momento" para el momento máximo en la columna.

La falla ocurre cuando la curva carga-momento O-B para el punto de momento máximo intersecta el diagrama de interacción para la sección transversal. Entonces, la carga y el momento correspondientes a la falla están representados por el punto B de la Figura 9-2.

Debido al incremento en el momento máximo por las deflexiones, la capacidad a carga axial se reduce de A a B. Esta reducción en la capacidad a carga axial se le conoce como "efecto de esbeltez".



(a) COLUMNA



(b) DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE

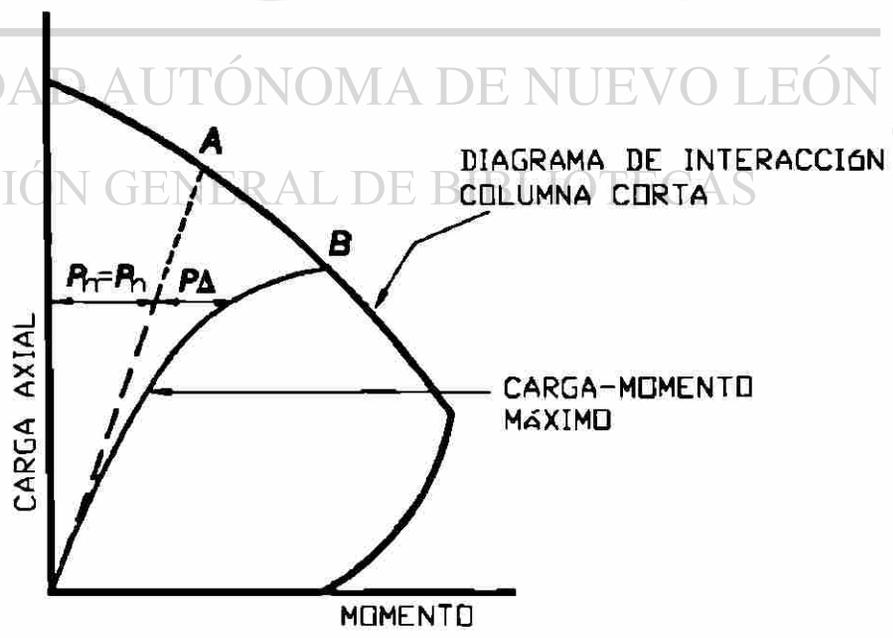
**FIGURA 9-1 FUERZAS EN LA COLUMNA SECCIONADA.**



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

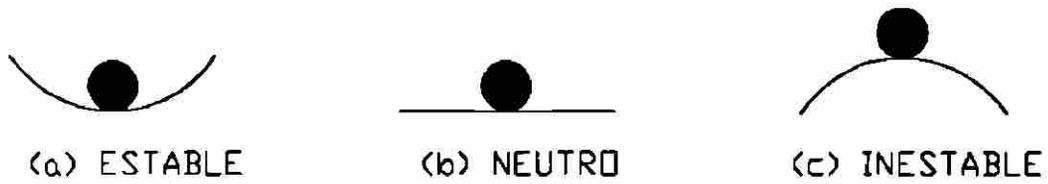
DIRECCIÓN GENERAL DE BENTONICAS



**FIGURA 9-2 CARGA Y MOMENTO EN UNA COLUMNA.**

Una columna esbelta se define como una columna que tiene una "reducción significativa" en su capacidad a carga axial debida a los momentos resultantes de deflexiones laterales de la columna.

En la figura 9-3 se ilustran tres estados de equilibrio.

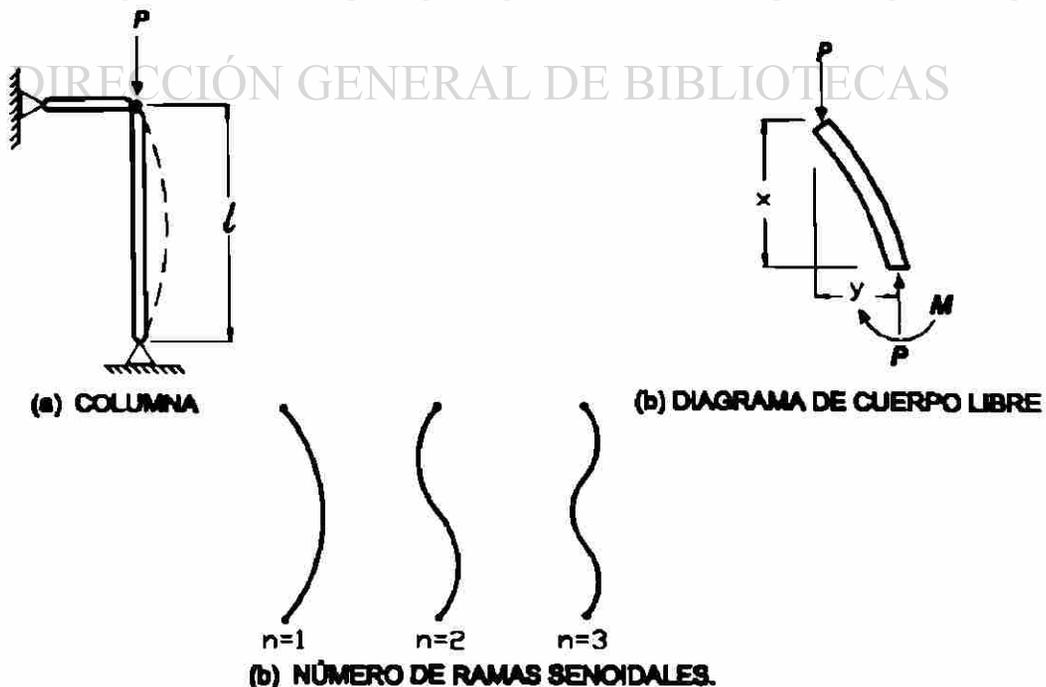


**FIGURA 9-3  
ESTADOS DE EQUILIBRIO.**

Si la bola de la Figura 9-3a se desplaza lateralmente y se suelta, regresa a su posición original. Esto es equilibrio estable. Si la bola de la Figura 9-3c se desplaza lateralmente y se suelta, la bola abandona la superficie. Esto es equilibrio inestable. La transición entre equilibrio estable e inestable es equilibrio neutro, se ilustra en la Figura 9-3b. Aquí la bola se desplaza y ahí permanece. Estados de equilibrio similares existen para una columna cargada axialmente como en la Figura 9-4a. Si la columna regresa a su posición original cuando es empujada lateralmente a la mitad de su altura y regresa está en equilibrio estable.

La figura 9-4b muestra una porción de la columna en estado de equilibrio estable.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



**FIGURA 9-4  
PANDEO DE UNA COLUMNA ARTICULADA.**

La ecuación diferencial para esta columna es:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -Py$$

En 1744, Leonhard Euler derivó la ecuación anterior y su solución es:

$$P_c = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2}$$

donde:

$EI$  = rigidez a flexión

$l$  = longitud de la columna.

$n$  = número de ondas senoidales en la longitud de la columna.

Casos con  $n=1, 2$  y  $3$  son ilustrados en la Figura 9-4c.

El valor menor de  $P_c$  ocurrirá con  $n=1.0$  esto da lo que se conoce como "carga de pandeo de Euler":

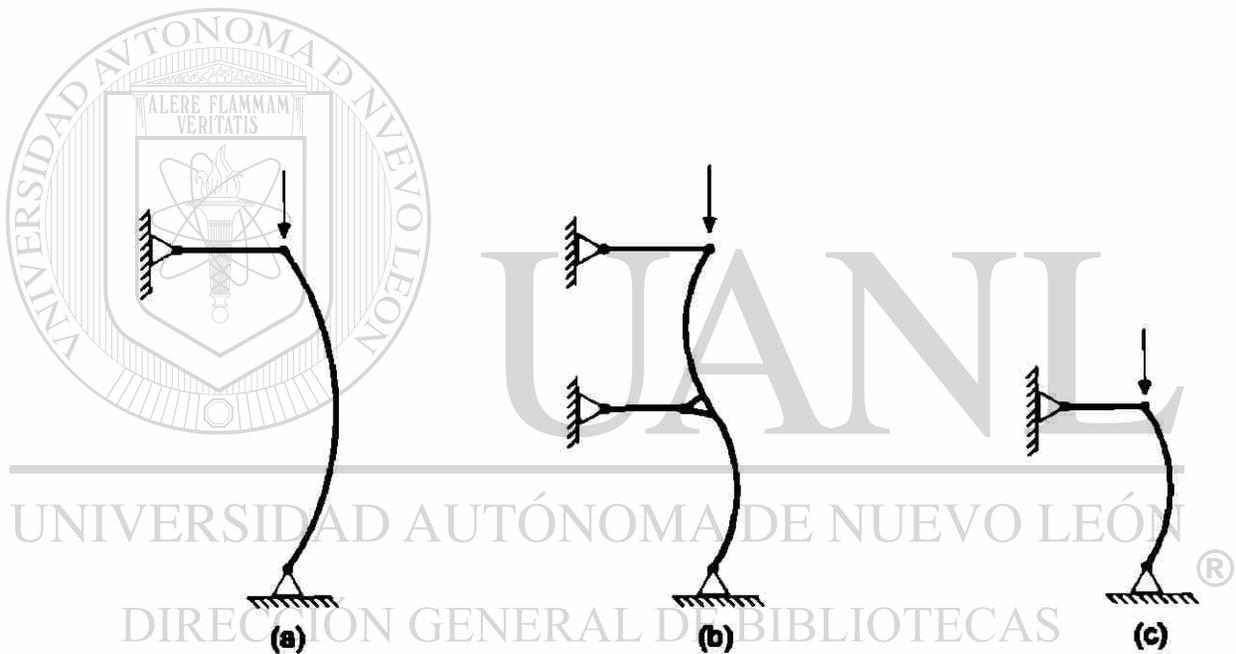
$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

Si a la columna mostrada en la Figura 9-5a se le coloca una riostra a la mitad de la altura como se muestra en la Figura 9-5b, el valor de  $n=2$  y la carga de pandeo sería:

$$P_c = \frac{(2)^2 \pi^2 EI}{l^2}$$

La cual es cuatro veces la carga crítica de la misma columna sin la riostra.

Otra factor que influye en el pandeo de una columna es el concepto de "Longitud efectiva" de la columna. La longitud efectiva es la longitud entre extremos articulados de la columna que tienen la misma carga de pandeo. Entonces la longitud efectiva de la columna de la Figura 9-5c tiene la misma carga de pandeo que la de la Figura 9-5b, la longitud efectiva es en este caso  $l/2$ , donde  $l/2$  es la longitud de cada onda senoidal de la deformada de la columna de la Figura 9-5b.



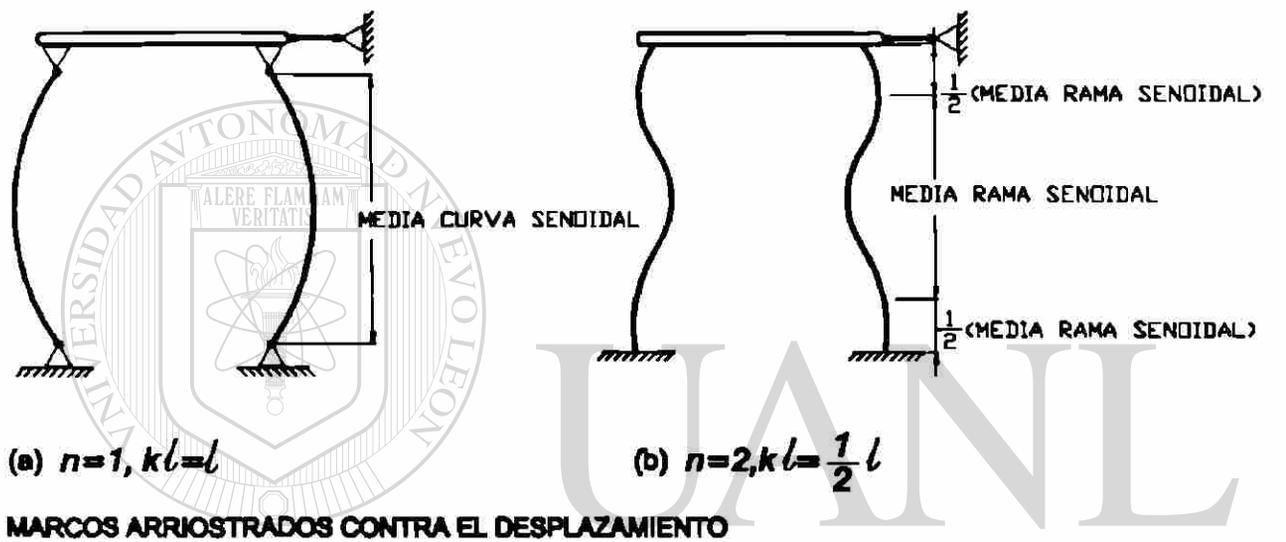
**FIGURA 9-5**  
**LONGITUD EFECTIVA DE COLUMNAS.**

La longitud efectiva,  $kl$ , es igual  $l/n$ . El factor de longitud efectiva es  $K=1/n$ .

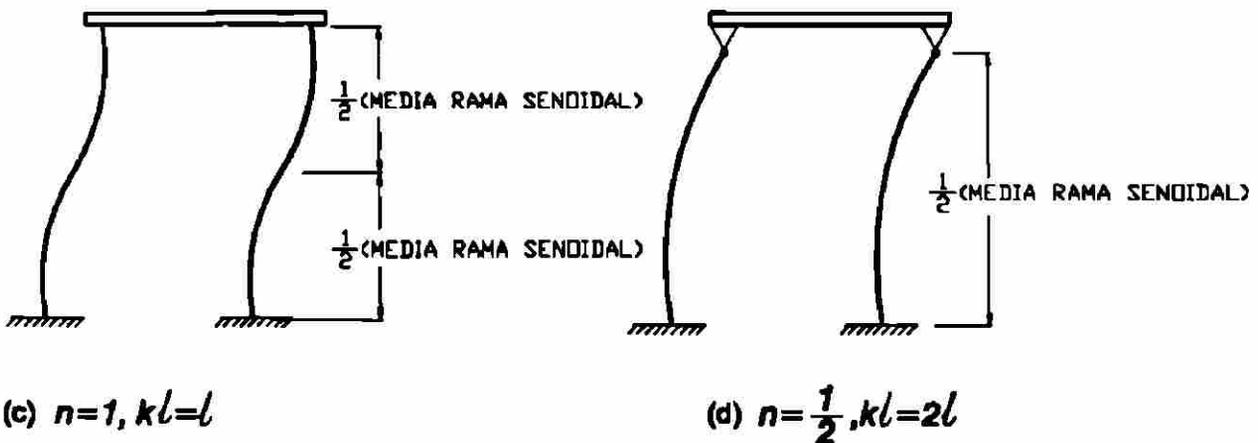
La ecuación de la carga crítica de Euler se escribe generalmente como:

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(kl)^2}$$

Cuatro casos idealizados se muestran en la Figura 9-6 con sus correspondientes valores de  $kl$ .



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



MARCOS LIBRES DE DESPLAZARSE LATERALMENTE

FIGURA 9-6  
LONGITUDES EFECTIVAS DE COLUMNAS IDEALIZADAS.

Los marcos (a) y (b) están prevenidos contra el desplazamiento lateral. Se dice que el marco esta "arriostrado".

Los marcos (c) y (d) están libres de desplazarse lateralmente. Son llamados "no arriostrados".

Las cargas críticas de las columnas mostradas en la Fig. 9-6; guardan una relación de  $1:4:1:1/4$ .

Entonces podemos ver que las restricciones a las rotaciones de los extremos y el desplazamiento lateral tiene un mayor efecto en la carga de pandeo en una columna elástica cargada axialmente.

## 9.2.- COMPORTAMIENTO Y ANÁLISIS DE COLUMNAS ARTICULADAS.

Si la carga axial aplicada a una columna está por abajo de la carga crítica, el proceso convergerá en una situación estable. Si la carga es mayor que la carga crítica, esto no ocurrirá. Esto se conoce como proceso de "segundo orden", porque se describe por la ecuación diferencial de segundo orden:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -Py$$

### Fallas de material y fallas de estabilidad

Las curvas carga-momento para columnas con tres longitudes se muestran en la Figura 9-7, todas con la misma excentricidad, e.

La curva carga-momento O-A es para una columna corta y es prácticamente la misma que la línea Pe.

Para una columna de longitud moderada, línea O-B, las deflexiones comienzan a ser significativas, reduciendo la carga de falla. Esta columna falla cuando la curva carga-momento interseca el diagrama de interacción en el punto B. Esta es llamada "falla del material" y es común en columnas de marcos arriostrados. Si la columna es muy esbelta, y puede alcanzar una deflexión  $\Delta$  en la cual un valor de  $\partial M / \partial P$  tiende a infinito o comienza a hacerse negativo. Cuando esto ocurre, la columna se vuelve inestable y para pequeñas deflexiones la capacidad a momento baja.

Este tipo de falla se conoce como "falla de estabilidad" y ocurre solamente en columnas arriostradas, pero muy esbeltas o columnas esbeltas de marcos con desplazamiento.

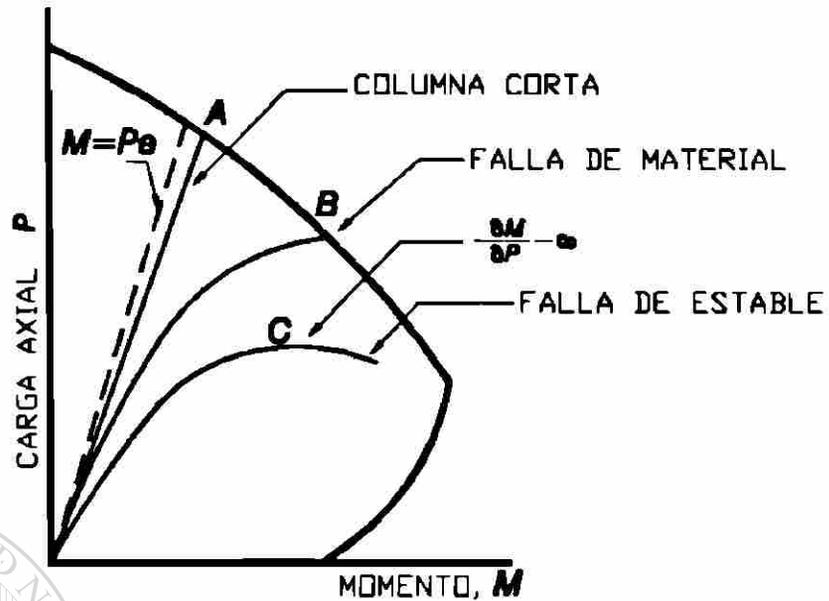


FIGURA 9-7  
FALLAS DE MATERIAL Y DE ESTABILIDAD.

### Curvas de interacción para columnas esbeltas

Para visualizar los efectos que influyen en la resistencia de una columna, es algunas veces conveniente usar las curvas de interacción para columnas esbeltas. La línea 0-B, en la Figura 9 - 8a muestra la curva carga-momento máximo para una columna con esbeltez  $l/h = 30$  y está dada por la excentricidad en el extremo  $e_1$ .

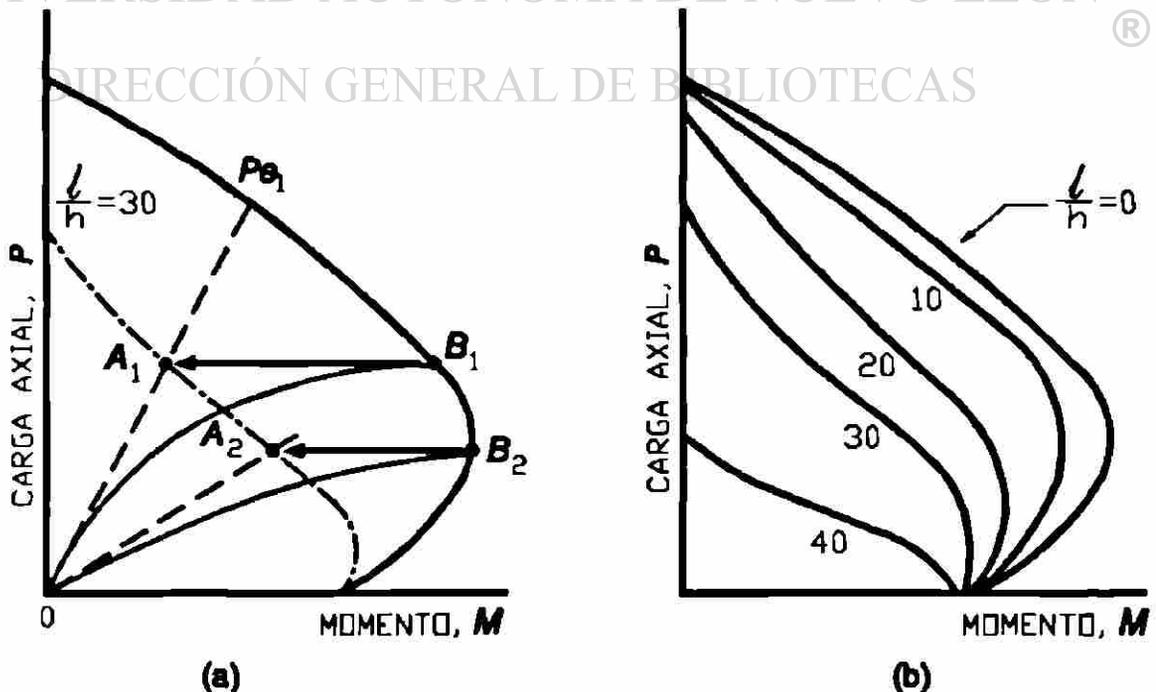


FIGURA 9-8  
CURVAS DE INTERACCIÓN PARA COLUMNAS ESBELTAS.

Esta columna falla cuando la curva carga-momento interseca el diagrama de interacción en el punto  $B_1$ . Al momento de la falla, la carga y el momento en el extremo están dados por el punto  $A_1$ . Si este proceso se repite un número de veces podemos pasar de  $A_1$  a  $A_2$  como se muestra por la línea punteada del diagrama de interacción. Una familia de diagramas de interacción para columnas esbeltas se muestra en la Figura 9-8b para columnas con la misma sección transversal pero diferentes relaciones de esbeltez.

### Momento amplificado para viga-columna articulada cargada simétricamente

En la figura 9-9a se muestra una columna bajo la acción de momentos en los extremos  $M_0$ , que producen una deflexión  $\Delta_0$ . Esta será llamada como deflexión de "primer orden".

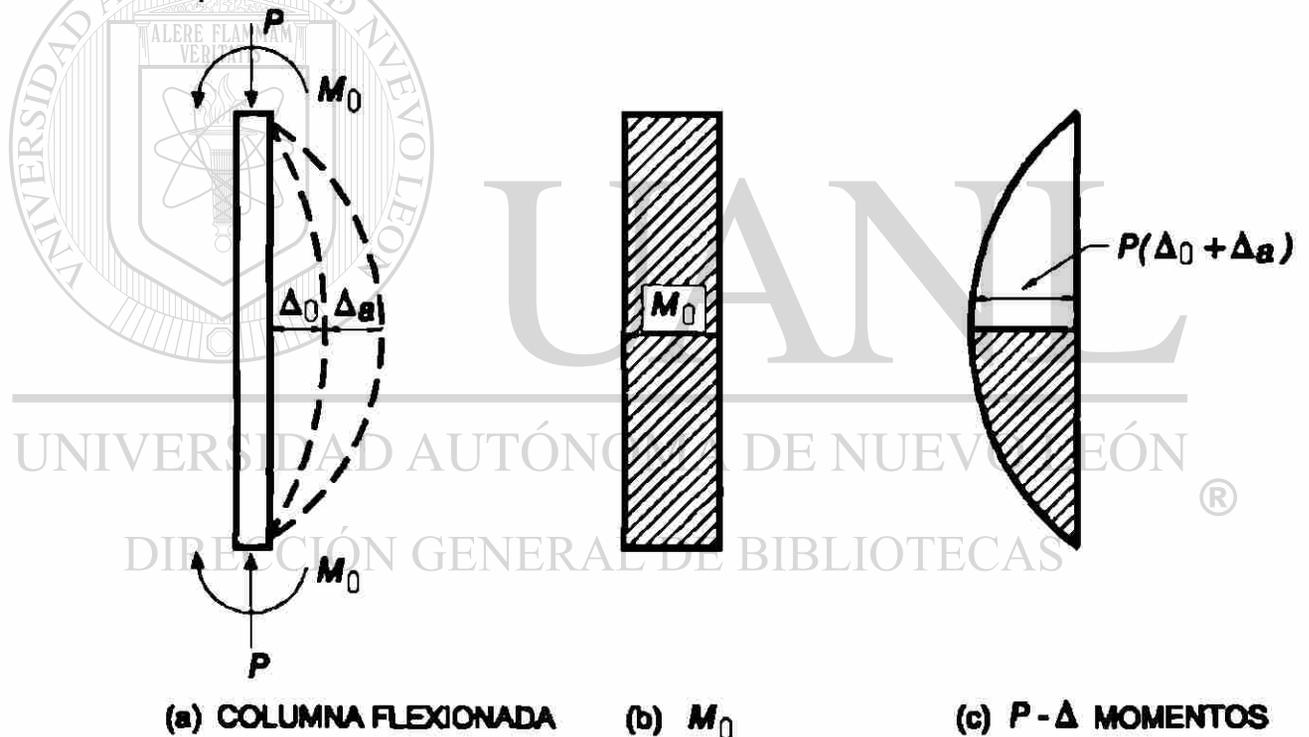


FIGURA 9-9  
MOMENTOS EN COLUMNA FLEXIONADA.

Cuando las cargas axiales  $P$  son aplicadas, la deflexión se incrementa una cantidad  $\Delta_1$ .

La deflexión final a la mitad de la altura es  $\Delta = \Delta_0 + \Delta_1$ . Esta deflexión total se referirá como "deflexión de segundo orden". Se considerará que la deformada final adopta una onda senoidal.

El diagrama de momento primario,  $M_0$ , se muestra en la Figura 9-9b, y los momentos secundarios,  $P\Delta$ ; se muestran en la Figura 9-9c. Si se considera que la deformada es una onda senoidal el diagrama de momentos  $P\Delta$  es también senoidal. Usando el método Area-Momento y observando que la deformada es simétrica, la deflexión  $\Delta_s$  es el momento con respecto al apoyo del diagrama  $M/EI$  entre el apoyo y el centro del claro, mostrado por el área achurada de la Figura 9-9c. El área de esta porción es:

$$\text{área} = [(P/EI) (\Delta_0 + \Delta_s)] l/2 \times 2/\pi$$

donde el centroide se localiza a  $l/\pi$  del apoyo.

Entonces:

$$\Delta_s = [(P/EI) (\Delta_0 + \Delta_s) l/2 \times 2/\pi] (l/\pi)$$

y haciendo  $P_E = \pi^2 EI/l^2$

$$\Delta_s = \frac{Pl^2}{\pi^2 EI} (\Delta_0 + \Delta_s) = (\Delta_0 + \Delta_s) \frac{P}{P_E}$$

Despejando  $\Delta_s$ ;  $\Delta_s = \Delta_0((P/P_E)/(1-P/P_E))$

y la deflexión final  $\Delta$ , es:

$$\Delta = \Delta_s + \Delta_0 = \Delta_0 + \Delta_0 \frac{P/P_E}{1 - P/P_E} \quad \text{ó}$$

$$\Delta = \frac{\Delta_0}{1 - P/P_E}$$

Esta ecuación da la deflexión de segundo orden  $\Delta$ , la cual se incrementa conforme  $P/P_E$  se incrementa, y alcanza un valor infinito cuando  $P = P_E$ .

El momento flexionante máximo es:  $M_c = M_0 + P\Delta$

Aquí  $M_c$  se refiere como "momento de segundo orden", y  $M_0$  se refiere como "momento de primer orden".

Sustituyendo el valor de  $\Delta$  en la ecuación anterior.

$$M_c = M_0 + \frac{P\Delta_0}{1 - P/P_E}$$

Para el diagrama de momentos mostrado anteriormente

$$\Delta_0 = \frac{M_0 l^2}{8EI}$$

Sustituyendo este valor y  $P = (P/P_E) \pi^2 EI / l^2$  en la ecuación de  $M_c$ , da:

$$M_c = \frac{M_0(1+0.23 P/P_E)}{1 - P/P_E}$$

El coeficiente 0.23 es una función de la forma del diagrama de  $M_0$ . Este comienza con -0.38, por ejemplo, para un diagrama triangular con  $M_0$  en un extremo y cero en el otro.

En el Código ACI el término  $(1+0.23 P/P_E)$  se omite porque el factor 0.23 varía con el diagrama de momentos y el valor de  $M_c$  queda como:

$$M_c = \delta M_0 \quad \text{donde:}$$

$\delta$  es un factor de amplificación de momento dado por:

$$\delta = \frac{1}{1 - P/P_c} \quad \text{donde:}$$

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(kl)^2} \quad \text{para una columna articulada.}$$

La ecuación anterior considera momentos iguales en los extremos de la columna.

### **Efecto de momentos desiguales en la resistencia de una columna esbelta**

En el punto anterior se consideró que la columna está sujeta a momentos iguales en los extremos.

Esto es un caso muy especial para el cual el máximo momento  $P\Delta$ , ocurre en una sección donde el momento debido a la carga aplicada  $P_e$ , también es un máximo por lo que estas cantidades se pueden sumar directamente.

Un caso usual, en que la excentricidad es  $e_1 = M_1/P$  y  $e_2 = M_2/P$ , no son iguales, esta dado por los diagramas de momentos mostrado en la Figura 9-10b y c.

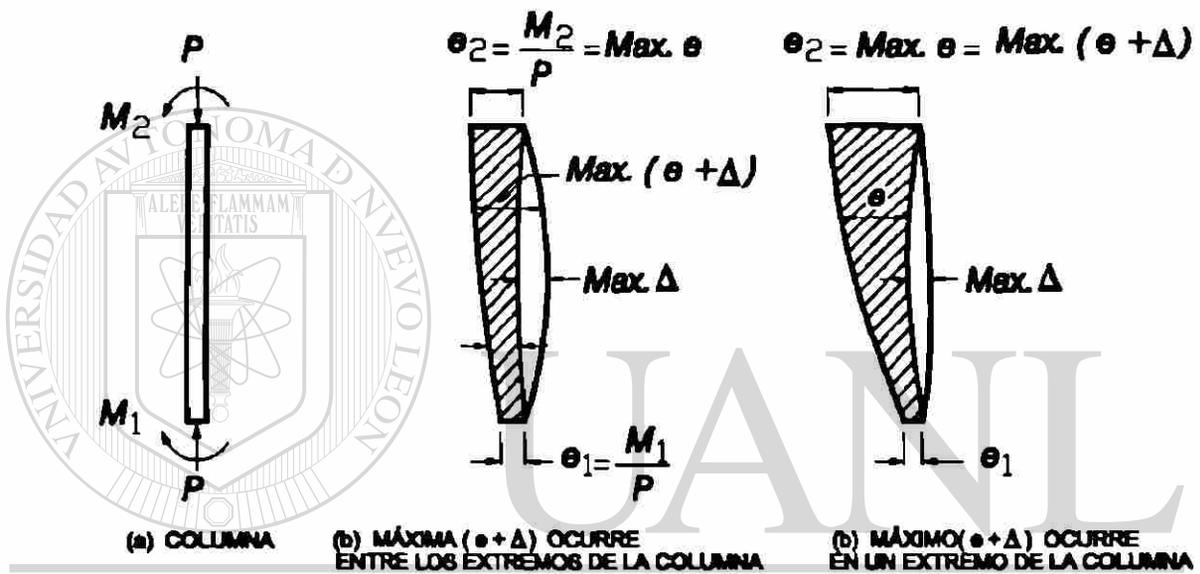


FIGURA 9-10 MOMENTOS EN COLUMNAS CON MOMENTOS EN LOS EXTREMOS DESIGUALES.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

El máximo valor de  $\Delta$  ocurre entre los extremos de la columna mientras que el máximo valor de  $e$  ocurre en uno de los extremos de la columna.

Por esta razón  $e_{\text{max}}$  y  $\Delta_{\text{max}}$  no pueden ser sumados directamente. Existen dos casos diferentes.

Para una columna esbelta con pequeñas excentricidades en los extremos, la suma máxima de  $e + \Delta$  ocurrirá en un extremo de la columna como se muestra en la Figura 9-10c.

Estos dos tipos de comportamiento pueden ser identificados en los diagramas de interacción para una columna esbelta mostrados en las Figuras 9-8 y 9-11.

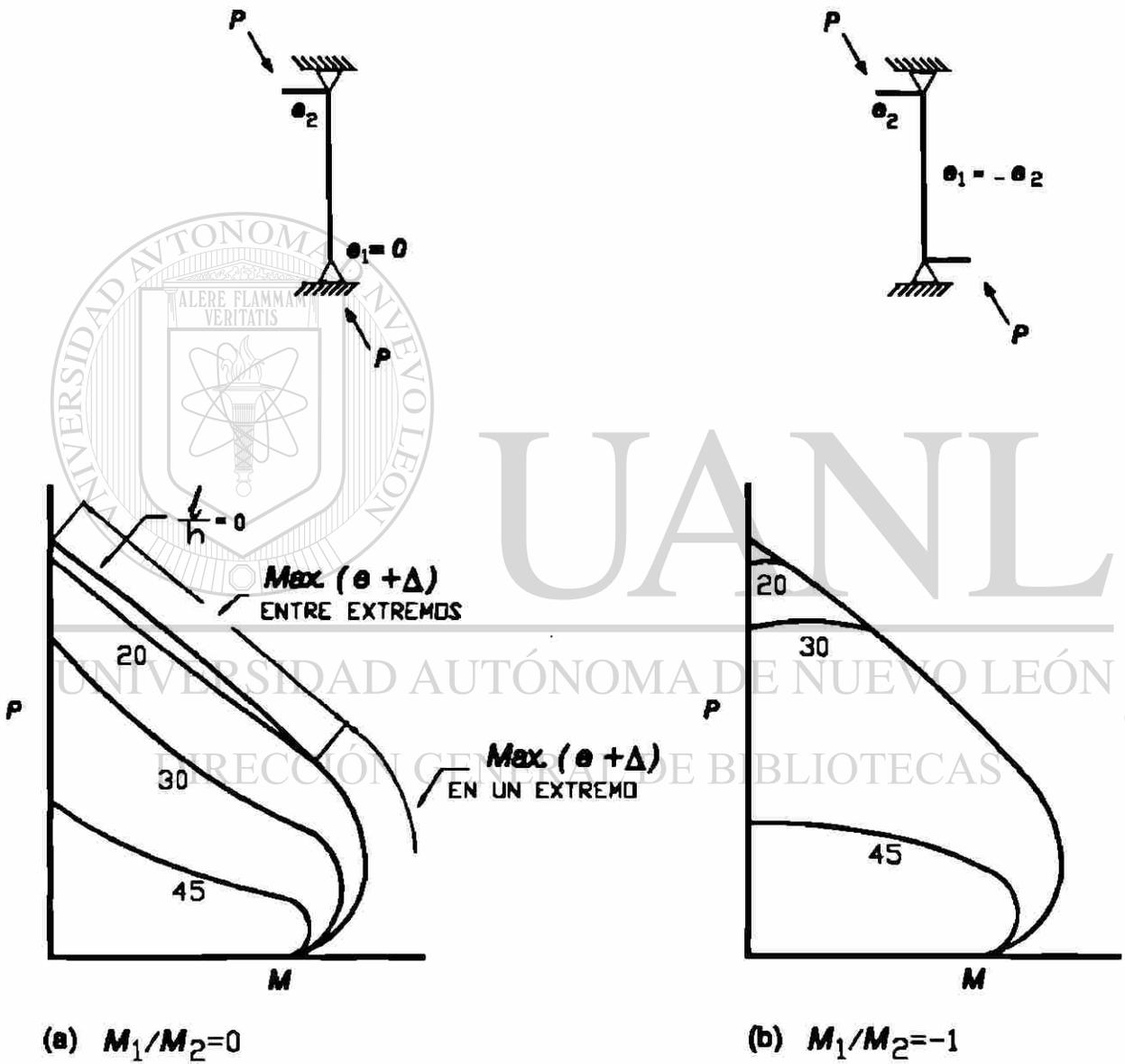


FIGURA 9-11  
EFFECTO DE LA RELACION  $M_1/M_2$  EN LOS DIAGRAMAS DE INTERACCION PARA COLUMNAS ESBELTAS ARTICULADAS.

Para  $e_1 = e_2$  (Figura 9-11b) en el diagrama de interacción para  $l/h = 20$ , por ejemplo, muestra una reducción en la resistencia a través del rango de excentricidades. Para un solo momento en el extremo ( $e_1/e_2 = 0$ , Figura 9-11a), la máxima excentricidad  $e+\Delta$  ocurre entre los extremos de la columna para excentricidades pequeñas, y en un extremo para excentricidades grandes.

Un caso posterior es cuando no hay efectos de esbeltez y la columna se considera como "columna corta".

En el caso de curvatura invertida con  $e_1/e_2 = -1$  el rango de columna esbelta es a menudo muy pequeño, por eso una columna con  $\lambda/h = 20$  sujeta a curvatura invertida no tiene efectos de esbeltez como se muestra en la Figura 9-11b.

En el procedimiento de diseño por amplificación de momento, una columna sujeta a momentos desiguales en sus extremos como se muestra en la Figura 9-12a se reemplaza por otra columna sujeta a momentos iguales a  $C_m M_2$  en ambos extremos como se muestra en la Figura 9-12b.

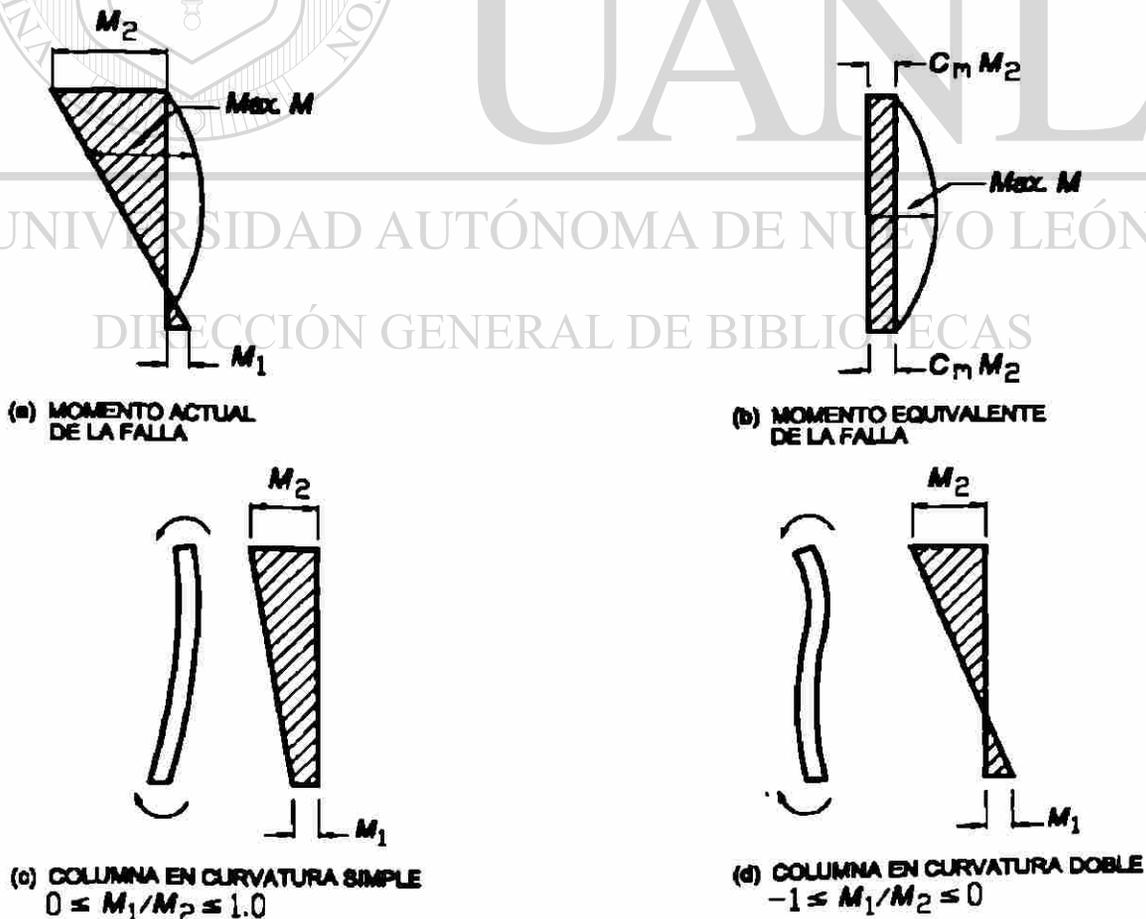


FIGURA 9-12  
 FACTOR DE MOMENTO EQUIVALENTE  $C_m$ .

Los momentos,  $C_m M_2$ , son escogidos de manera que el momento máximo amplificado es el mismo en ambas columnas.

La expresión de el "factor de momento equivalente  $C_m$ ", fue originalmente derivada para usarse en el diseño de vigas-columna de acero y después fue adoptada para diseño de concreto sin cambios (ACI Sec. 10.12.3.1):

$$C_m = 0.6 + 0.4(M_1/M_2) \geq 0.4 \quad (\text{ACI Ec. 10 - 14})$$

En esta ecuación los momentos  $M_1$  y  $M_2$  son el menor y mayor de los momentos en los extremos, respectivamente, calculados usando un análisis convencional elástico de primer orden.

La convención de signos para la relación de  $M_1/M_2$  se ilustra en la Figura 9 - 12c. Si los momentos  $M_1$  y  $M_2$  producen flexión en curvatura simple sin punto de inflexión entre los extremos, como se muestra en la Figura 9-12c,  $M_1/M_2$  es positiva. Si los momentos  $M_1$  y  $M_2$  flexionan la columna en curvatura doble con un punto de momento cero entre sus extremos, como se muestra en la Figura 9 - 12d  $M_1/M_2$  es negativa.

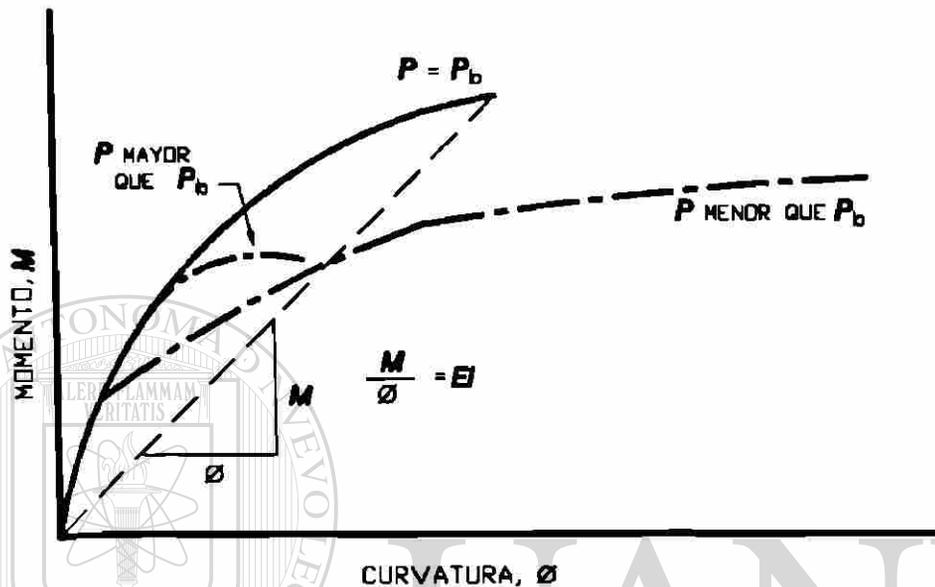
La ecuación  $C_m = 0.6 + 0.4M_1/M_2$  se aplica solamente a columnas articuladas o columnas de marcos arriostrados, cargados con carga axial y momentos en sus extremos. En todos los demás casos, incluyendo columnas sujetas a cargas transversales entre sus extremos y cargadas concéntricamente (sin momentos extremos),  $C_m$  se toma igual a 1. (ACI Sec. 10.12.3.1). El término  $C_m$  no se incluye en la ecuación de momento amplificado para marcos no arriostrados.

## DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

### Rigidez de la columna, EI

Para calcular la carga crítica,  $P_c$ , usando la ecuación  $P_c = \pi^2 EI / (kl)^2$  involucra la rigidez a flexión EI, de la columna. El valor de EI se escoge para una sección dada de columna, a nivel de carga axial y la esbeltez puede ser aproximada para el EI de la columna al momento de la falla, tomando en cuenta el tipo de falla (del material o estabilidad) y el efecto de agrietamiento, flujo y distribución no lineal de la curva esfuerzo-deformación en el momento de la falla. En la Figura 9-13 se muestran los diagramas momento-curvatura para tres diferentes niveles de carga para una sección típica de columna. ( $P_b$  es la carga en la falla balanceada). La línea radial mostrada en el diagrama tiene pendiente  $M/\phi = EI$ . El valor de EI depende entonces de la línea radial seleccionada. En "falla de material", esta falla se presenta cuando la sección es altamente esforzada (punto B de la Figura 9-7).

Para este caso, la línea radial apropiada será la que intersecte el extremo del diagrama momento-curvatura como se muestra para  $P=P_b$  (carga balanceada) en la Figura 9-13.



**FIGURA 9-13**  
**DIAGRAMA DE MOMENTO DE CURVATURA PARA UNA SECCIÓN DE COLUMNA.**

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
 DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Por otro lado, una “falla de estabilidad” ocurre antes de que la sección transversal falle (punto C de la Figura 9-7). Esta corresponde a la línea con pendiente alta de la Figura 9-13 con un valor alto de EI. Una multitud de líneas radiales pueden dibujarse en la Figura 9-13 pero no todas corresponden al valor de EI de la columna. Los Códigos Australiano y Suizo basan sus valores de EI en la gráfica momento-curvatura en la falla balanceada, dados por la línea interrumpida de la Figura 9-13.

Las expresiones adoptadas por el Comité del Código ACI en 1971 fueron:

$$EI = (0.2 E_c I_g + E_s I_{se}) / (1 + \beta_d) \quad (\text{ACI Ec. 10-12})$$

$$o \quad EI = (0.4 E_c I_g) / (1 + \beta_d) \quad (\text{ACI Ec. 10-13})$$

donde:

$E_c, E_s$  = Módulos de elasticidad del concreto (ACI Sec. 8.5.1) y  
acero, respectivamente.

$I_g$  = Momento de inercia de la sección de concreto con respecto al eje  
centroidal ignorando el acero.

$I_{so}$  = Momento de inercia del acero con respecto al eje centroidal.

El término  $(1+\beta_d)$  refleja el efecto del flujo plástico del concreto en las  
deflexiones de la columna.

La ecuación (10-12) del ACI es más aproximada que la ecuación (10-13)  
pero es más laboriosa porque se supone el acero para calcular  $I_{cr}$ .

La Sección 10.11.1 del ACI da varios valores de momento de inercia,  $I$ ,  
para usarse:

- (a) En análisis de marco elástico para calcular los momentos en vigas y  
columnas, y deflexiones laterales en marcos, y
- (b) Para calcular el valor de  $\psi$  que se usa al calcular el factor de longitud  
efectiva,  $k$ .

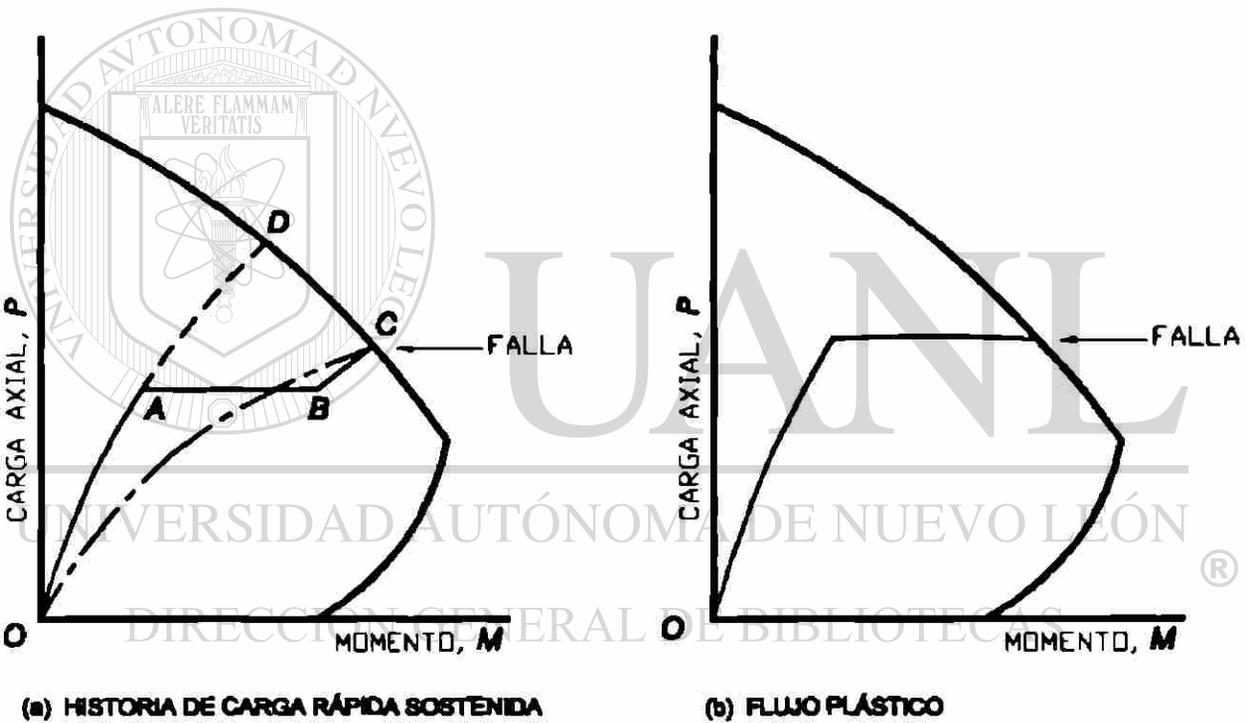
La deflexión lateral de un marco es afectada por las rigideces de todas  
las vigas y columnas del marco. Por esta razón, los momentos de inercia de la  
Sec. 10.11.1 del ACI se recomiendan para representar un promedio de los  
valores de  $I$  en cada tipo del miembro del marco. De forma similar, la longitud  
efectiva de una columna de marco se ve afectada por las rigideces a flexión de  
vigas y columnas. Es incorrecto usar los valores de  $I$  de la Sección 10.11.1  
del ACI para calcular la carga crítica de Euler en una columna.

### **Efecto de las cargas sostenidas en columnas articuladas**

Lo tratado anteriormente considera fallas en las columnas bajo cargas  
de corta duración.

Las columnas de las estructuras, por otro lado, están sujetas a cargas  
muertas sostenidas y algunas veces a cargas vivas sostenidas.

El flujo plástico del concreto bajo cargas sostenidas incrementa las deflexiones de las columnas, incrementando el momento  $M = P(e + \Delta)$ , y entonces debilita la columna. La gráfica carga - momento de la Figura 9-2 puede ser redibujada, como se muestra en la Figura 9-14, para columnas sujetas a cargas sostenidas.



**FIGURA 9-14**  
**COMPORTAMIENTO CARGA-MOMENTO PARA COLUMNAS SUJETAS**  
**A CARGAS SOSTENIDAS.**

En la figura 9-14a, la columna es cargada rápidamente con la carga de servicio (línea 0-A).

La carga de servicio actúa por un número de años y durante este tiempo las deflexiones por flujo plástico y los efectos resultantes de segundo orden incrementan el momento, como se muestra por la línea A-B.

Finalmente, la columna es rápidamente cargada hasta la falla, como lo muestra la línea B-C. La carga de falla corresponde al punto C. La columna ha sido cargada rápidamente sin el período de carga de servicio sostenida, la gráfica carga - momento sería semejante a la línea O-A-D con la falla correspondiente en el punto D. El efecto de las cargas sostenidas ha incrementado las deflexiones a la mitad de la altura de la columna y los momentos, causando una reducción en la carga de falla de D a C. Al volverse a cargar (recargado), las deflexiones de la columna son gobernadas por el EI correspondiente, debidas a las cargas aplicadas rápidamente.

El segundo tipo de comportamiento de la columna bajo cargas sostenidas se refiere al pandeo por flujo plástico. Aquí, como se muestra en la Figura 9-14b, las deflexiones en la columna continúan incrementándose bajo la carga sostenida, causando por esto, la falla. Esto ocurre solamente bajo cargas sostenidas altas que fluctúan alrededor de un 70% de la capacidad a corto plazo representada por el punto D.

Si la carga sostenida se excediera el factor de reducción de resistencia,  $\phi$ , se divide entre el factor de carga muerta,  $0.70/1.4 = 0.5$  veces la capacidad de la columna, este tipo de falla no es especialmente considerado en los procedimientos de diseño del Código ACI.

Dos procedimientos de diseño diferentes son ampliamente usados para considerar los efectos de flujo plástico. En el procedimiento de "Módulo Reducido", el valor de E para calcular  $P_{c,cr}$ , se reduce para considerar la correcta carga de falla.

Este procedimiento lo ilustra la línea interrumpida O-C, de la Figura 9-14a.

El segundo procedimiento, reemplaza la excentricidad de la columna cargada  $e$ , por una carga con una excentricidad  $e + \Delta_{o,cr}$  donde  $\Delta_{o,cr}$  es la deflexión por flujo plástico de la columna, en la Fig. 9-14a, no se cargaría después del punto B.

El procedimiento de momento amplificado del Código ACI usa el "Módulo Reducido". El valor de EI se reduce dividiéndolo entre  $(1 + \beta_d)$ , como se muestra en las ecuaciones (10-12) y (10-13) del ACI, donde para columnas articuladas y columnas de marcos restringidos,  $\beta_d$  se define como la relación de la carga axial factorizada debida a la carga muerta, y la carga total axial factorizada.

La Sección 10.0 del ACI, da tres definiciones para  $\beta_d$ , dependiendo principalmente si el marco tiene o no desplazamiento. Para condiciones estables, una columna articulada puede considerarse que sus extremos no se desplazan, y en este caso  $\beta_d$ , definido por la Sección 10.0 del ACI es la relación entre la carga máxima axial factorizada muerta y la carga total axial factorizada.

### **Límites de relación de esbeltez para columnas esbeltas.**

Algunas columnas de estructuras son tan cortas que no les afecta su esbeltez. El ACI en la Sec. 10.12.2 permite ignorar los efectos de esbeltez en columnas articuladas o columnas de marcos arriostrados cuando:

$$kl_u/r < 34-12(M_1/M_2)$$

Donde,  $k$  es el factor de longitud efectiva, el cual es 1.0 para columnas articuladas (ACI Sec. 10.12.1),  $l_u$  es la longitud de la columna no-apoyada, (ACI Sec. 10.11.3.1) y  $r$  es el radio de giro, se toma  $0.3h$  para secciones rectangulares y  $0.25h$  para secciones circulares (ACI Sec. 10.11.2). Para otras formas el valor de  $r$  se calcula con la raíz cuadrada del momento de inercia entre el área,  $r = \sqrt{I/A}$ .

### **Secciones 10.10 Y 10.13 del Código ACI.**

En el Código ACI 1995, las secciones especificadas para el diseño de columnas esbeltas son completamente detalladas. El ACI en la Sec. 10.10 lo cubre totalmente. Especifica utilizar un análisis de segundo orden tomando en cuenta las características no-lineales y el agrietamiento de los materiales, así como los efectos de curvatura del elemento y el desplazamiento de entrepiso, duración de cargas, contracción, fluencia e interacción con la cimentación (10.10.1) y permite usar un análisis más aproximado de momento amplificado descrito en ACI Secciones 10.11, 10.12 y 10.13.

El ACI en la Sec. 10.11 "**Momentos amplificados - Generalidades**" da los lineamientos generales para el diseño de columnas esbeltas de marcos con y sin desplazamiento. Si una columna pertenece a un marco que no tiene desplazamiento, su diseño debe basarse en las Secciones 10.11 y 10.12, "**Momentos amplificados- Marcos contraventeados**". Si la columna es de un marco con desplazamiento, su diseño involucra las Secs. 10.11 y 10.13 "**Momentos amplificados - Marcos no contraventeados**" (Con desplazamiento).

En algunos casos poco comunes que involucran el diseño de columnas esbeltas de marcos no-contraventeados, el ACI Sec. 10.13.5 requiere calcular un momento amplificado adicional usando la Sec. 10.12.3 del ACI.

### **Diseño por amplificación de momento. Procedimiento para columnas esbeltas articuladas.**

Una columna articulada puede ser arriostrada por un marco u otra estructura para que permanezca estable. Siendo así será diseñada usando el ACI Sec. 10.11 "Momentos amplificados - Generalidades" y el ACI Sec. 10.12 "Momentos amplificados - Marcos contraventeados".

**1.- Longitud de columna.** La longitud de columna no apoyada  $\lambda_u$  es la distancia libre entre miembros capaces de dar apoyo lateral (ACI Sección 10.11.3.1) es la distancia entre articulaciones.

**2.- Longitud efectiva.** Para una columna articulada el factor de longitud efectiva  $k = 1.0$  (ACI Sec. 10.11.2)

**3.- Radio de giro.** Para una sección rectangular  $r = 0.3h$ , y para una sección circular  $r = 0.25h$  (ver ACI Sec. 10.11.2) para otras secciones  $r$  puede ser calculado con la raíz cuadrada del momento de inercia entre el área  $r = \sqrt{I_g/A_g}$ .

**4.- Consideración del efecto de esbeltez.** Para una columna articulada, ACI Sec. 10.12.2 permite ignorar la esbeltez si  $kl_u/r$  satisface la ecuación:

$$kl_u/r < 34-12(M_1/M_2)$$

El ACI Sec. 10.11.5 da como límite superior del  $kl_u/r = 100$  para columnas diseñadas de acuerdo con la Sec. 10.11 a 10.13.

**5.- Momento mínimo:** El ACI Sec. 10.12.3.2 requiere que el momento máximo en el extremo de la columna,  $M_2$  no será menor que:

$$M_{2,min} = P_u (0.6 + 0.03h) \quad (\text{sistema métrico}) \quad (\text{ACI Ec. 10-15})$$

Donde 0.6 y  $h$  son pulgadas. Para elementos en los cuales  $M_{2,min}$  excede  $M_2$  el valor de  $C_m$ ; de la ecuación  $C_m = 0.6 + 0.4 M_1/M_2$  deberá tomarse igual a 1.0 o evaluarse de acuerdo con los momentos extremos.

**6.- Ecuación de momento amplificado:** El ACI Sec. 10.12.3 establece que la columna será diseñada para una carga axial factorizada,  $P_u$  y un momento amplificado  $M_c$ , definido por:

$$M_c = \delta_{ms} M_2 \quad (\text{ACI Ec. 10-9})$$

Donde el subíndice *ns* se refiere a no desplazamiento (contraventeado)  $M_2$  se define como el mayor de los que actúan en el extremo de la columna. El ACI Sec. 10.12.3 define  $\delta_{ns}$  como:

$$\delta_{ns} = \frac{C_m}{1 - P_u/0.75 P_c} \geq 1.0 \quad (\text{ACI Ec. 10-10})$$

donde:  $C_m = 0.6 + 0.4 M_1/M_2 \geq 0.4 \quad (\text{ACI Ec. 10-14})$

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(kl_u)^2} \quad (\text{ACI Ec. 10.11})$$

y  $EI = (0.2 E_c I_g + E_s I_{sc})/1 + \beta_d \quad (\text{ACI Ec. 10-12})$

ó  $EI = (0.4 E_c I_g)/1 + \beta_d \quad (\text{ACI Ec. 10-13})$

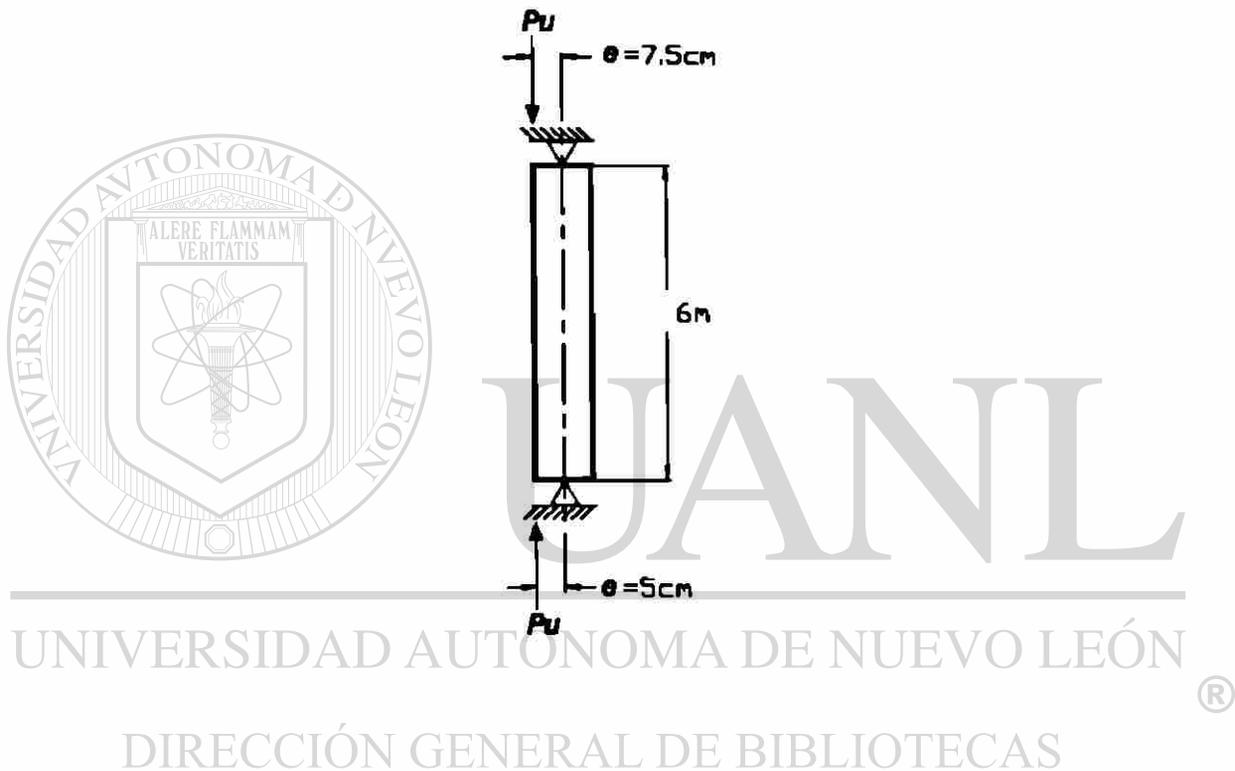
El valor de 0.75 ha sido usado en la ecuación ACI 10-10 en lugar del símbolo  $\phi$ , para evitar confusión con el factor  $\phi$  usado para diseñar la sección transversal de la columna, el cuál es 0.70 para columnas con estribos y 0.75 para columnas con espiral.

## DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Si se calcula  $\delta_{ns}$  y es menor que 1.0 el momento máximo ocurre, en el extremo de la columna. En éste caso  $\delta_{ns}$  se toma igual a 1.0

### Ejemplo 9-1.-Diseño de una columna esbelta articulada.

Diseñar una columna de 6.00m para soportar una carga muerta no factorizada de 40 ton y una carga viva no factorizada de 34 ton, las cargas tienen una excentricidad de 7.5 cm en la cara superior y 5 cm en la cara inferior. Usar  $f_c = 210 \text{ kg/cm}^2$  y  $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$



1.- Calcular  $P_u$  y  $M_1/M_2$ :

$$P_u = 1.4 \times 40 + 1.7 \times 34 = 113.8 \text{ ton}$$

$$M_{\text{sup}} = 113.8 \times 0.075 = 8.535 \text{ ton-m}$$

$$M_{\text{inf}} = 113.8 \times 0.05 = 5.690 \text{ ton-m}$$

$$M_1 / M_2 = 5.690 / 8.535 = 0.667$$

## 2.- Estimar tamaño de columna.

Considerando  $\rho_t = 0.015$

$$A_{g \text{ (aprox)}} \geq \frac{P_u}{0.45 (f'_c + f_y \rho_t)}$$

$$A_{g \text{ (aprox)}} \geq \frac{113.800}{0.45(210+0.015 \times 4200)} \geq 926 \text{ cm}^2$$

Esto sugiere que una columna de 30cmx30cm puede ser satisfactoria

## 3.- ¿Es la columna esbelta?

$$kl_u/r < 34 - 12 M_1/M_2$$

$$kl_u/r = 1.0 (600)/0.3 \times 30 = 67$$

$$34 - 12 (0.667) = 26$$

Como  $kl_u/r = 67$  es mayor que 26 la columna es bastante esbelta por lo que la sección de 30x30 cm puede ser inadecuada debido a que  $A_{g \text{ (aprox)}}$  se basa en columnas cortas se sugiere una de 40x40cm como primer tanteo.

## 4.- Revisar momento mínimo.

Esto equivale a revisar

$$\begin{aligned} e_{\min} &= 0.6 + 0.03h \\ &= 0.6 + 0.03 \times 40 \\ &= 1.8 \text{ cm} < e \end{aligned}$$

según ACI Sec. 10.12.3.2.®

rige  $M_2 = 8.535 \text{ ton-m}$

## 5.- Calcular EI.

En este paso el área de refuerzo no se conoce y no se puede usar la ecuación 10-12 del ACI pero si se puede usar la ecuación 10-13.

$$EI = 0.40 E_c I_g / (1 + \beta_d)$$

$$\text{De ACI Sec. 8.5.1, } E_c = 15,100 \sqrt{f'_c}$$

$$= 15,100 \sqrt{210} = 218,820 \text{ kg/cm}^2$$

$$I_g = \frac{1}{12} (40)^4 = 213,333 \text{ cm}^4$$

$$\beta_d = \frac{1.4 \times 40}{113.8} = 0.492$$

$$EI = \frac{0.40 \times 218,820 \times 213,333}{1.492} = 1.2515 \times 10^{10} \text{ Kg} \cdot \text{cm}^2$$

6.- Momento amplificado:

$$M_c = \delta_{ns} M_2$$

$$\delta_{ns} = (C_m) / (1 - P_u / 0.75 P_c)$$

$$C_m = 0.6 + 0.4 M_1 / M_2 = 0.6 + 0.4 (0.667) = 0.867$$

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(kl_u)^2} = \frac{\pi^2 \times 1.2515 \times 10^{10}}{(1 \times 600)^2} = \frac{\pi^2 \times 1.2515 \times [(10)^2]^{15}}{(1 \times 6)^2 (100)^2}$$

$$P_c = \frac{\pi^2 \times 1.2515 \times (100)^3}{36} = 343,107 \text{ kg}$$

$$= 343 \text{ ton}$$

$$\delta_{ns} = \frac{0.867}{1 - 113.8(0.75 \times 343.1)} = 1.554 > 1.0$$

Si  $\delta_{ns}$  excede de 2.0 será necesario una sección transversal mayor.

$$M_c = 1.554 \times 8.535 = 13.267 \text{ ton-m.}$$

## 7.- Refuerzo de la columna

Como se tienen diagramas de interacción en sistema inglés;

$$P_u = 113.8 \text{ ton} = 113.8 \times 2.2$$

$$= 250.36 \text{ Klbs.}$$

$$M_c = 13.267 \times 7.233 = 95.96 \text{ Klbs-pie}$$

$$(P_n)_{\text{req}} = \frac{P_u}{\phi} = \frac{250.36}{0.7} = 357.66 \text{ klbs}$$

$$(M_n)_{\text{req}} = \frac{M_u}{\phi} = \frac{95.96}{0.70} = 137.08 \text{ klbs-pie}$$

Para entrar a los diagramas de interacción requerimos:

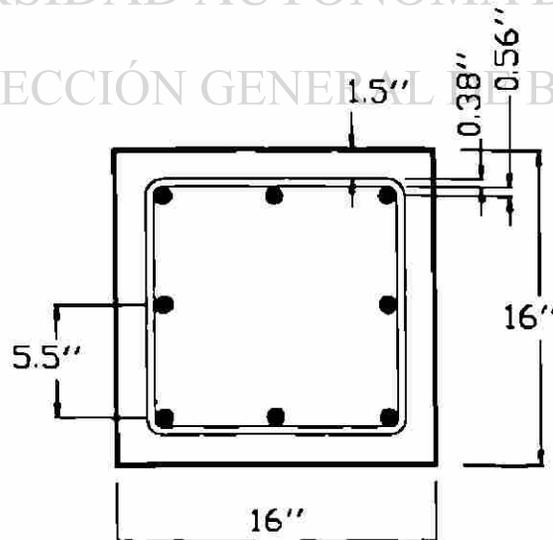
$$\gamma = \frac{11}{16} = 0.6875 = 0.69$$



# UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



Considerando 8 Varillas #8

$$P = \frac{8 \times 1.0}{(16)^2} = 0.031$$

$$\frac{\phi P_n}{A_g} = \frac{250.36}{(16)^2} = 0.978$$

$$\text{Para } \gamma = .60 \quad \frac{\phi M_n}{A_g \cdot h} = 0.58$$

$$\text{Para } \gamma = 0.75 \quad \frac{\phi M_n}{A_g \cdot h} = 0.67$$

Interpolando: Para  $\gamma = 0.69$

$$\frac{\phi M_n}{A_g \cdot h} = 0.63$$

$$M_n = \frac{0.63 \times 256 \times 16}{0.70 \times 12} = 307.2 \text{ Klbs-pie}$$

$$= 307.2 \times 0.138 = 42.39 \text{ ton-m.}$$

$$42.39 > 13.267 \text{ ton-m.}$$

La sección está sobrada, considerando ahora 4 Varillas #8.

$$\rho = \frac{4 \times 1}{(16)^2} = 0.0156$$

$$\text{Para } \gamma = 0.60 \quad \frac{\phi M_n}{A_g \cdot h} = 0.45$$

$$\text{Para } \gamma = 0.75 \quad \frac{\phi M_n}{A_g \cdot h} = 0.48$$

Interpolando: Para  $\gamma = 0.69$ ,  $\frac{\phi M_n}{A_g \cdot h} = 0.47$

$$M_n = \frac{0.47 \times 256 \times 16}{0.70 \times 12} = 229.2 \text{ kLbs-pie x factor de conversión}$$

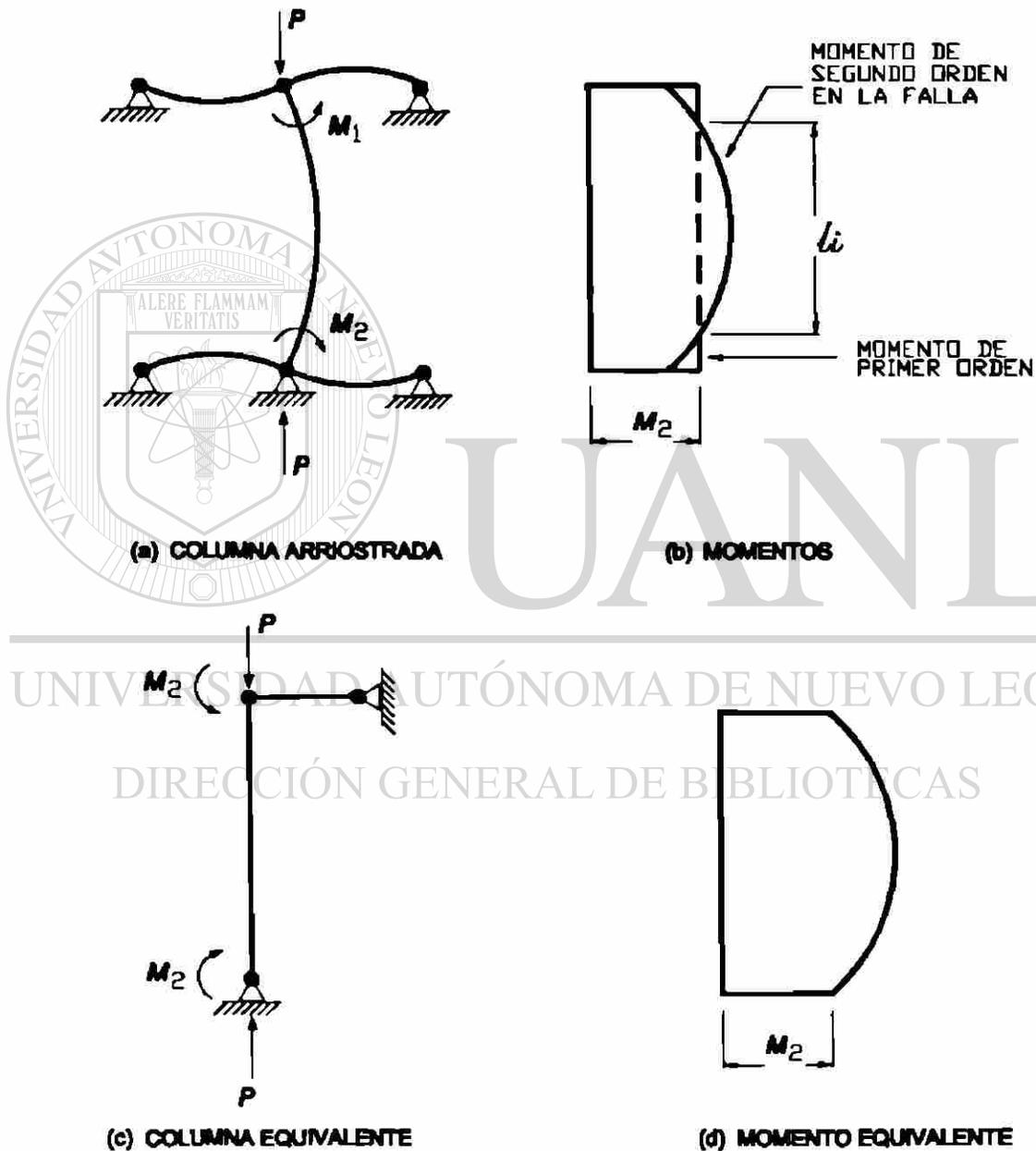
$$= 229.2 \times 0.138 = 31.62 \text{ ton-m.} > 13.26 \text{ ton-m.}$$

Usar una sección de 40x40 cm con 4 Varillas #8.

**9-3.- DISEÑO DE COLUMNAS DE MARCOS ARRIOSTRADOS (SIN DESPLAZAMIENTO).**

Diseño aproximado por efecto de restricción en los extremos.

En la figura 9-15 se muestra una columna arriostrada en un marco.



**FIGURA 9-15  
SUSTITUCION DE UNA COLUMNA ARRIOSTRADA  
POR UNA ARTICULADA**

La línea continua de la Figura 9-15b es el diagrama de momentos (incluyendo efectos de esbeltez) para esta columna en la falla. Superponiendo a éste el diagrama de momentos de primer orden para el mismo nivel de carga. Para diseñar es conveniente reemplazar la columna restringida por una articulada equivalente de longitud  $l_1$ , que es la distancia entre los puntos en que el diagrama de momentos de segundo orden son iguales a los momentos del diagrama de primer orden. La columna articulada equivalente será entonces diseñada para una carga axial,  $P$ , y momentos en los extremos  $M_2$ , del análisis de primer orden.

Desafortunadamente, la longitud  $l_1$  es difícil de calcular. En los códigos modernos sobre concreto y acero se hacen consideraciones empíricas haciendo que  $l_1$  se tome como la longitud efectiva por pandeo elástico,  $kl$ . La longitud efectiva de una columna  $kl_u$  se define como la longitud de una columna articulada equivalente que tiene la misma carga de pandeo.

Como se puede apreciar en la Figura 9-16 cuando se tiene un empotramiento las longitudes efectivas son mayores que cuando se tienen ambos extremos empotrados.

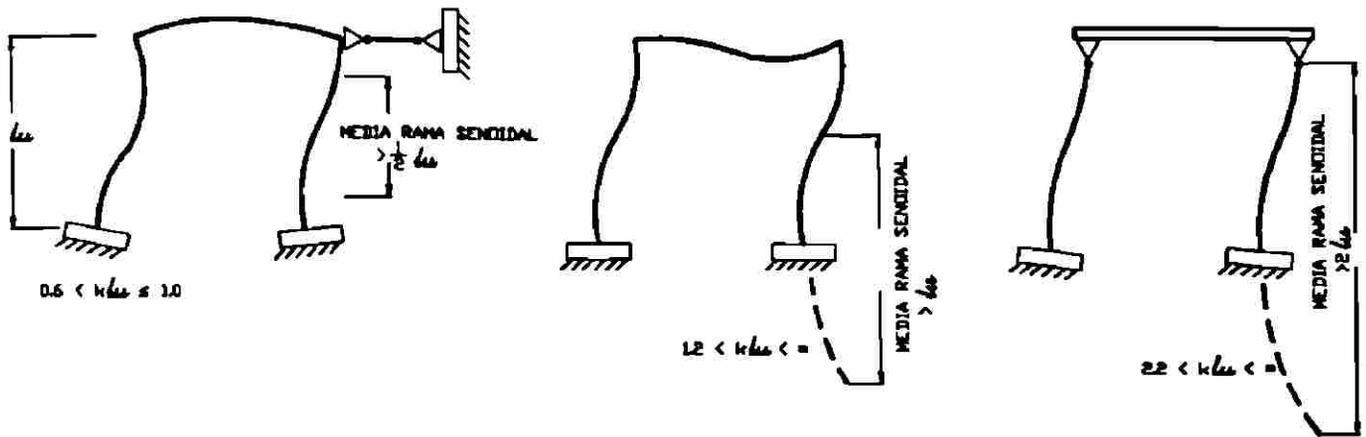
El valor actual de  $k$  para una columna elástica es una función de la rigidez relativa,  $\Psi$ , de las vigas y las columnas en cada extremo de la columna, donde  $\Psi$  es:

$$\Psi = \frac{\sum (E_c I_c / l_c)}{\sum (E_b I_b / l_b)}$$

Donde los subíndices  $b$  y  $c$  se refieren a vigas y columnas, respectivamente, y las longitudes  $l_b$  y  $l_c$  se miden centro a centro de las juntas. Si  $\Psi = 0$  en un extremo de una columna, la columna está completamente empotrada en ese extremo.

Similarmente,  $\Psi = \infty$  denota una articulación perfecta. Entonces, si  $\Psi = 0$  en los dos extremos de una columna en un marco arriostrado,  $k$  se toma como 0.5. Análogamente, cuando  $\Psi = \infty$  en los dos extremos de una columna,  $k$  se toma igual a 1.0, el valor para una columna articulada. Esto está ilustrado en la Tabla 9-1.

En estructuras prácticas o reales no existe el extremo completamente empotrado y ni el extremo completamente articulado. Valores razonables de  $\Psi$  varían de 20 y 0.2. Para columnas de marcos arriostrados,  $k$  nunca será tomado menor de 0.6. En marcos con desplazamiento  $k$  nunca será tomado menor de 1.2 en columnas con ambos extremos restringidos.



(a) MARCO ARRIOSTRADO

(b) , (c) MARCOS CON DESPLAZAMIENTO

FIGURA 9-16  
LONGITUD EFECTIVA EN COLUMNAS DE MARCOS.

TABLA 9-1  
FACTORES DE LONGITUD EFECTIVA DE MARCOS ARRIOSTRADOS.

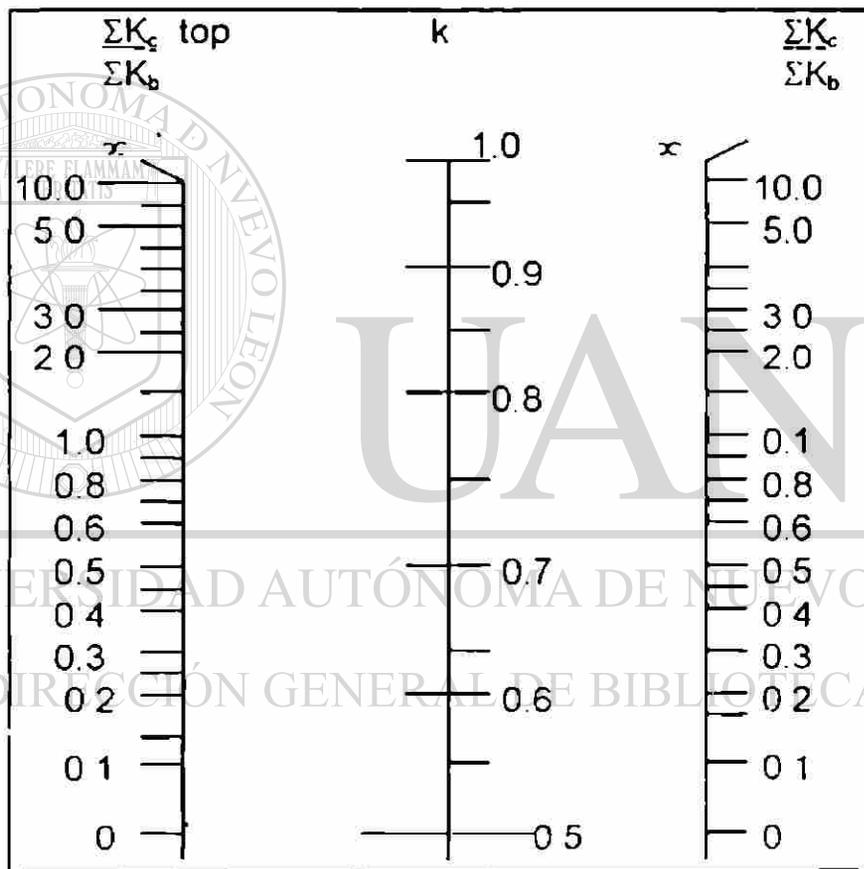
APOYO SUPERIOR	k				
ARTICULADO 	0.70	0.81	0.91	0.95	1.00
ELASTICO $\psi=3.1$ 	0.67	0.77	0.86	0.90	0.95
ELASTICO $\psi=1.6$ 	0.65	0.74	0.83	0.86	0.91
RIGIDO $\psi=0.4$ 	0.58	0.67	0.74	0.77	0.81
EMPOTRADO 	0.50	0.58	0.65	0.37	0.70
	EMPOTRADO	RIGIDO	ELASTICO	ELASTICO	ARTICULADO

**Cálculo de los valores de  $k_1$  usando nomogramas.**

Los nomogramas dados en la Figura 9-17 se usan también para calcular  $k$ . Para usar estos nomogramas  $\Psi$  se calcula en ambos extremos de la columna usando la ecuación.

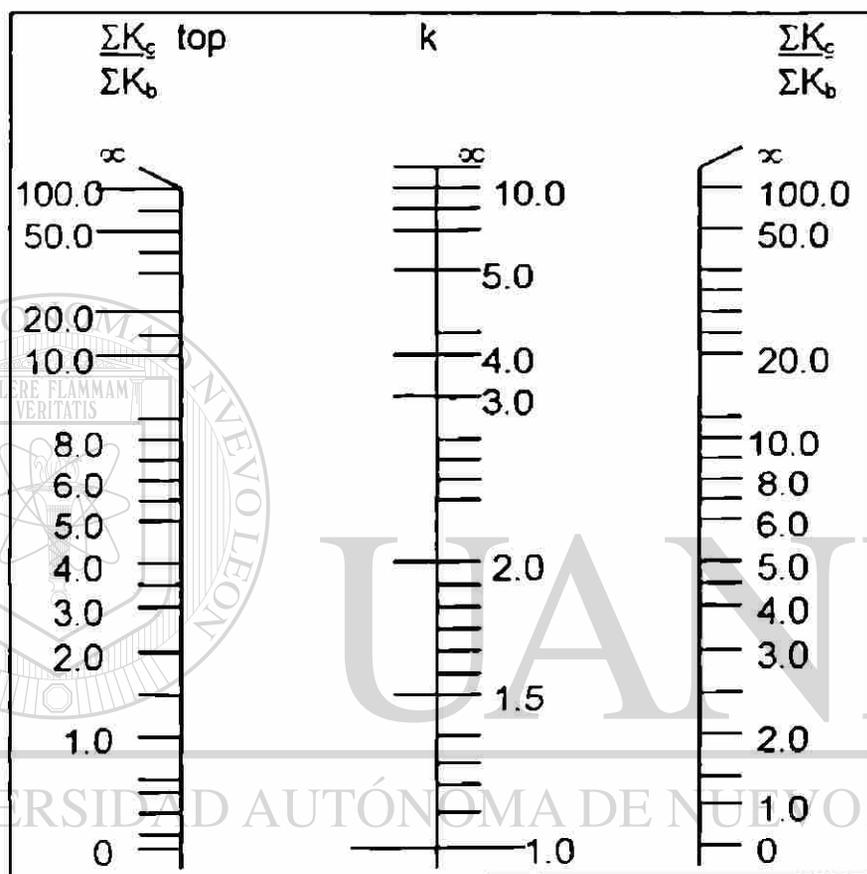
$$\Psi = \frac{\sum (E_c I_c / l_c)}{\sum (E_b I_b / l_b)}$$

y el valor, de  $k$  apropiado se encuentra en la intersección de la línea intermedia.



(a)

**MARCOS ARRIOSTRADOS**



(b)  
**MARCOS NO ARRIOSTRADOS**

Figura 9-17: Nomogramas para factores de longitud efectiva.

Los nomogramas se derivaron considerando una columna típica interior de un marco infinitamente alto y ancho, en el cual todas las columnas se consideraron de la misma sección transversal y longitud, así como en todas las vigas.

Se aplicaron iguales cargas en ambos extremos de cada columna, mientras que las vigas no se cargaron. Todas las columnas se considera que se pandearon para el mismo momento. Puesto que esto es muy idealizado y las consideraciones son poco reales, los nomogramas tienden a subestimar el valor de  $k$  para marcos elásticos con respecto a las dimensiones prácticas arriba del 15%. Esto entonces subestima los momentos amplificados  $M_c$ .

Un valor práctico mínimo para  $k$ , en un marco no arriostrado cuando se obtengan valores más pequeños que los dados por los nomogramas es buena práctica usar 1.2.

### Ecuaciones para $k$

Ecuaciones aproximadas para  $k$  están presentadas en la Sec. R 10.12.1 de los Comentarios del ACI.

Estas han sido derivadas considerando un factor aproximado y conservador de longitud efectiva.

Las siguientes ecuaciones se obtuvieron del Código British Standard of Practice, para columnas arriostradas como el menor de:

$$k = 0.7 + 0.05 (\psi_A + \psi_B) \leq 1.0$$

$$k = 0.85 + 0.05 \psi_{\min} \leq 1.0$$

donde:  $\psi_A$  y  $\psi_B$  son los valores de  $\psi$  en los dos extremos de la columna y  $\psi_{\min}$  es el menor de los dos valores.

Del ACI Stengh Design Handbook para miembros en compresión no - arriostrados con ambos extremos restringidos, la longitud efectiva puede ser tomada como:

Para  $\psi_m < 2$ :

$$k = \frac{20 - \psi_m \sqrt{1 + \psi_m}}{20}$$

Para  $\psi_m \geq 2$ :

$$k = 0.9 \sqrt{1 + \psi_m}$$

donde  $\psi_m$  es el promedio de los valores de  $\psi$  en ambos extremos de la columna.

Para miembros en compresión no arriostrados con un extremo libre o articulado,  $k$  puede tomarse como:

$$k = 2.0 + 0.3 \psi, \quad \text{donde } \psi \text{ es el valor para el extremo restringido.}$$

### Cálculo de $\psi$ .

La relación de rigideces  $\psi$ , calculada usando la ecuación:

$$\psi = \frac{\sum (E_c I_c / l_c)}{\sum (E_b I_b / l_b)}$$

Los valores de  $E_c I_c$  y  $E_b I_b$  serán reales para el cargado inmediatamente antes de la falla de la columna. Generalmente para éste estado de carga, las grietas de las vigas son progresivas y las columnas o no se agrietan o se agrietan ligeramente. Realmente, los valores de  $EI$  serán un reflejo del grado de agrietamiento y de la cantidad de refuerzo presente.

Esto no es práctico, sin embargo, mientras no se tenga información para esta etapa de diseño el ACI Secs. 10.12.1 y 10.13.1 establece que el cálculo de  $k$  estará basado en los valores de  $\psi$  con los valores de  $E$  y de  $I$  dados por la Sec. 10.11.1 del ACI. Cuando se calcule  $\psi$ ,  $\beta_d$  puede tomarse como cero.

Cuando se calcula  $I_b$  para una viga T, el ancho del patín puede tomarse como se define en las Secciones 8.10.2 u 8.10.3 del ACI. Para relaciones comunes de ancho de patín a peralte,  $h$ , y de ancho a ancho del alma  $b_w$ , el momento de Inercia,  $I_g$ , es aproximadamente dos veces el momento de Inercia de una sección rectangular con dimensiones  $b_w$  y  $h$ .

El valor de  $\psi$  en la parte inferior de una columna apoyada en una zapata puede calcularse por las relaciones presentadas en el PCI Desing Handbook.

$$\psi = \frac{\sum K_g}{\sum K_b}$$

donde  $\Sigma K_c$  y  $\Sigma K_b$  son las sumas de las rigideces a flexión de las columnas y de los miembros restringidos (vigas) en una junta. En una junta de columna-zapata,  $\Sigma K_c = 4E_c I_c / l_c$  para una columna arriostrada restringida en su apoyo superior y  $\Sigma K_b$  se reemplaza por la rigidez torsional de la zapata y suelo, tomada igual a:

$$K_r = \frac{M}{\theta_r}$$

Donde  $M$  es el momento aplicado a la zapata y  $\theta_r$  es la rotación de la zapata. El esfuerzo bajo la zapata es la suma de  $\sigma = P/A$  el cual causa un asentamiento hacia abajo uniforme y  $\sigma = My/I$  el cual causa una rotación. La rotación  $\theta_r$  es:

$$\theta_r = \frac{\Delta}{y}$$

Donde " $y$ " es la distancia al centroide del área de la zapata. Si  $K_s$  es el módulo subgrado, definido como el esfuerzo requerido de compresión del suelo por una cantidad unitaria ( $K_s = \sigma/\Delta$ ), entonces:

$$\theta_r = \frac{\sigma}{k_s y} = \frac{My}{I_r} \times \frac{1}{k_s y}$$

entonces:  $k_r = I_r \times k_s$

Donde  $I_r$  es el momento de inercia del área en contacto de la base de la zapata y el suelo y  $k_s$  es el módulo subgrado. Entonces el valor de  $\psi$  para una junta columna-zapata donde la columna este restringida en el extremo superior es:

$$\psi = \frac{4E_c I_c / l_c}{I_r k_s}$$

Un valor de  $\psi = 10$  es usado frecuentemente para extremos articulados, en vez de  $\psi = \infty$ .

## **Definición de marcos arriostrados y no-arriostrados.**

En las discusiones anteriores el comportamiento de una columna y los factores de longitud efectiva están basados en la consideración de que los marcos son "completamente arriostrados" o "completamente no arriostrados".

Una columna puede considerarse "arriostrada" en una dirección dada si la estabilidad lateral de la estructura se garantiza por muros, riostras o contrafuertes diseñados para resistir todas las fuerzas laterales en esa dirección.

Una columna es completamente "no arriostrada" en un plano dado si toda la resistencia a cargas laterales depende de la flexión de las columnas.

De hecho no existe un marco "completamente arriostrado", y no existen límites claros entre marcos arriostrados y no arriostrados. Algunos marcos claramente no están arriostrados, como los de la figura 9-16 (b) y (c).

Otros marcos están conectados a muros de cortante en la zona de elevadores y restringen los movimientos laterales como el marco mostrado también en la figura 9-16(a).

### **DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS**

Aunque un muro de cortante sea completamente rígido, no siempre evita los desplazamientos laterales de un marco arriostrado, resultando algunos momentos  $P\Delta$ , debidos a estas deflexiones laterales.

Para propósitos de diseño, un marco es considerado "arriostrado" si los desplazamientos horizontales no reducen significativamente la capacidad a carga vertical de la estructura.

El procedimiento de diseño del Código ACI considera la esbeltez aplicando el momento, por lo que éste criterio considera que: Un marco puede ser considerado "arriostrado" si los momentos  $P\Delta$  debidos a deflexiones laterales son pequeños comparados con los momentos de primer orden debidos a las cargas laterales.

El ACI en la Sec. 10.11.4.1 permite a los diseñadores considerar que un marco no tiene desplazamiento si el incremento en los momentos extremos debidos a efectos de segundo orden no exceden el 5% de los momentos de primer orden. Esto se revisa en el extremo de la columna donde el momento es mayor.

Alternativamente el ACI Sec. 10.11.4.2 permite a los diseñadores que un marco no se desplace (contraventeado) si:

$$Q = (\Sigma P_u \Delta_0) / V_u l_c \quad (\text{ACI Ec.10.7})$$

es menor o igual que 0.05, donde  $Q$  es un “índice de estabilidad”,  $\Sigma P_u$  es la carga total vertical en todas las columnas y muros, en un entrepiso  $V_u$  es el cortante debido a las cargas laterales,  $\Delta_0$  es la deflexión relativa de primer orden entre la parte alta y baja del entrepiso debida a  $V_u$ , y  $l_c$  es la altura de la columna medida centro a centro de juntas del marco.

El ACI en los comentarios Sec. R 10.11.4 sugiere que, frecuentemente, una prueba de que un entrepiso tiene o no desplazamiento, puede darse por una inspección comparando la rigidez lateral total de todas las columnas en el entrepiso y la de los elementos arriostrantes en ese entrepiso, como son muros de cortante o diagonales (armaduras).

En los comentarios de los Códigos ACI 1971 a 1989 sugieren que un entrepiso no tiene desplazamiento (arriostrado) si la suma de las rigideces laterales,  $\Sigma k_l$ , de los elementos de arriostramiento, excede seis veces  $\Sigma k_l$  de las columnas en la dirección considerada.

La rigidez lateral de una columna o elemento arriostrado es  $k_l = V/\Delta$ , donde  $V$  es el cortante en el miembro y  $\Delta$  es el desplazamiento lateral relativo en los extremos de la columna debido al cortante.

## Procedimiento de diseño por momento amplificado. Columnas esbeltas en marcos arriostrados

Si una columna esta en un marco sin desplazamiento, el diseño involucra la Sec. 10.11 del ACI "Momento Amplificado - Generalidades" y la 10.12 "Momento Amplificado - Marcos Contraventados".

### 1.- Longitud de columna.

La longitud no apoyada,  $l_u$ , esta definida en la Sec. 10.11.3.1 del ACI como la altura libre entre losas o vigas capaz de dar apoyo lateral a la columna.

### 2.- Longitud efectiva.

El ACI Sec. 10.12.1 establece que los factores de longitud efectiva,  $k$ , de columnas en marcos sin desplazamiento serán 1.0 o menores. Los factores de longitud efectiva pueden estimarse de acuerdo con los conceptos antes descritos. Los dos procedimientos anteriores requieren que la relación  $\psi$ , de  $EI/l$  de las columnas y vigas se conozcan. Este factor esta dado por el ACI Sec. 10.12.1 y especifica que  $\psi$  estará basado en los valores de  $E$  e  $I$  del ACI Sec.10.11.1.

### 3.- Determinar si el marco esta arriostrado:

Frecuentemente, esto se da por simple inspección observando los elementos que arriostran, tales como muros, los cuales son considerablemente más rígidos que las columnas. Alternativamente, el marco se considera que no tiene desplazamiento si:

$$Q = \frac{\sum P_u \Delta_p}{V_{ulc}} \text{ es menor o igual que } 0.05.$$

### 4.- Radio de giro:

Para una sección rectangular,  $r = 0.3h$ , y para una sección circular,  $r = 0.25h$ . Para otras secciones,  $r$  puede ser calculado con el área y el momento de inercia con:

$$r = \sqrt{I_g/A} \quad (\text{ACI Sec. 10.11.2})$$

### 5.- Consideración de los efectos de esbeltez:

Para columnas en marcos arriostrados, el ACI Sec. 10.12.2 permite despreciar el efecto de esbeltez si :

$$\frac{k l_u}{r} < 34 - 12 \frac{M_1}{M_2}$$

Para columnas en marcos no arriostrados, el ACI Sec.10.12.2 permite despreciar el efecto de esbeltez si  $kl_u/r$  es menor de 22.

Si  $kl_u/r$  excede 100, el diseño se basara en un análisis de segundo orden.

**6.- Ecuación de momento amplificado:**

El ACI Sec. 10.12.3 establece que las columnas de marcos sin desplazamiento deberán diseñarse para una carga axial,  $P_u$ , y un momento factorizado amplificado,  $M_c$ , dado por:

$$M_c = \delta_{ns} M_2 \tag{ACI Ec. 10-9}$$

donde  $M_2$  es el mayor de los momentos extremos, y  $\delta_{ns}$  esta dada por:

$$\delta_{ns} = \frac{C_m}{1 - P_u/0.75 P_c} \geq 1.0 \tag{ACI Ec. 10-10}$$

$$C_m = 0.6 + 0.4(M_1/M_2) \geq 0.4 \tag{ACI Ec. 10-14}$$

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(kl_u)^2} \tag{ACI Ec. 10-11}$$

$$EI = \frac{0.2 E_c I_g + E_s I_g}{1 + \beta_d} \tag{ACI Ec. 10-12}$$

$$\text{ó } EI = \frac{0.40 E_c I_g}{1 + \beta_d} \tag{ACI Ec. 10-13}$$

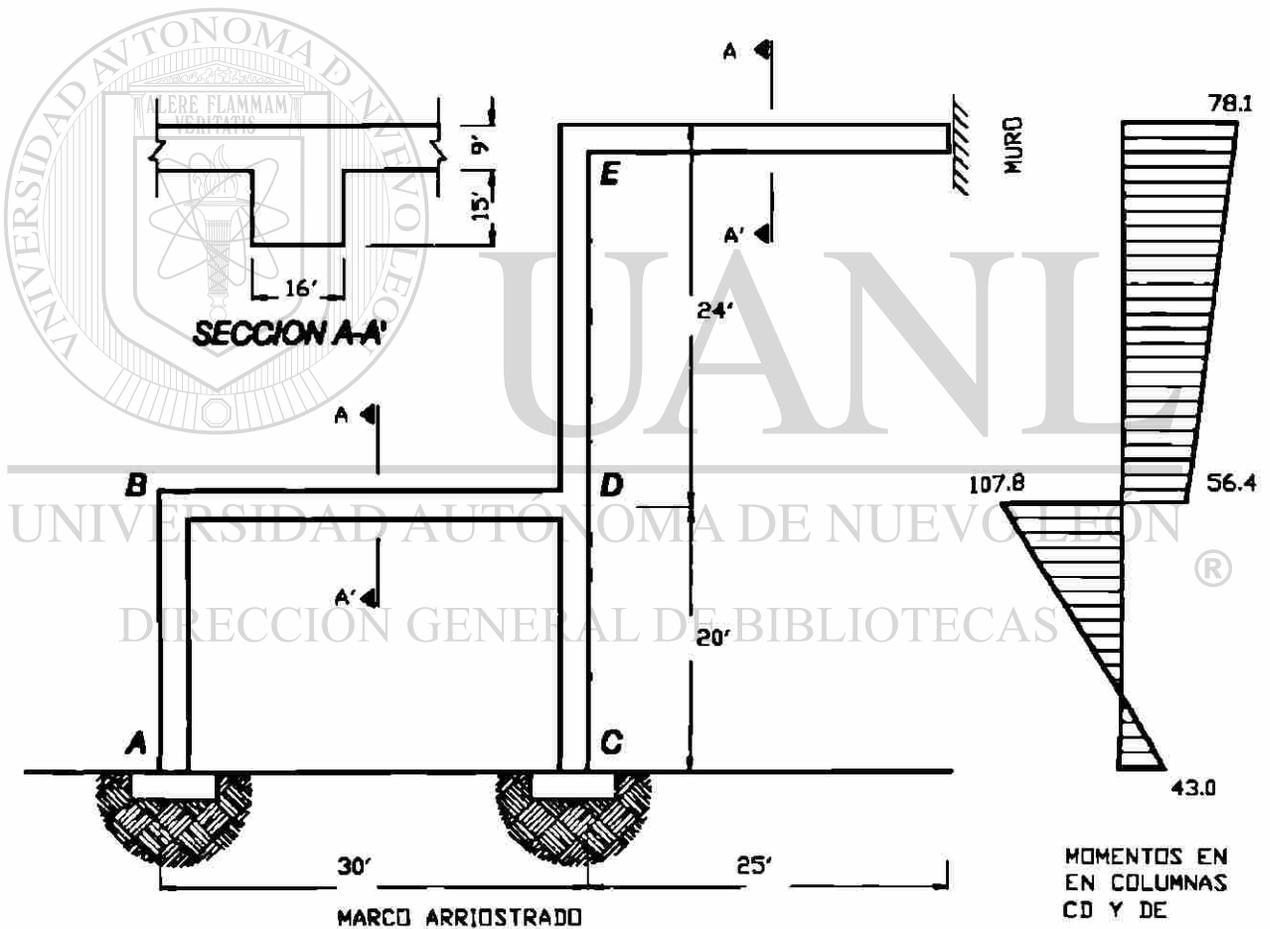
El término  $\beta_d$  tiene tres definiciones, solamente una de ellas se aplica a columnas de marcos sin desplazamiento. Para estas columnas:

$$\beta_d = \frac{\text{Carga muerta máxima axial factorizada}}{\text{Carga total axial factorizada en la columna}}$$

Si  $P_u$  excede  $0.75P_c$ ,  $\delta_{ns}$  será negativa. La rigidez será más baja de lo requerido y la columna será inestable. Entonces, si  $P_u$  excede  $0.75P_c$  la sección transversal de la columna debe aumentarse, si  $\delta_{ns}$  excede 2.0 también debe aumentarse la sección.

### Ejemplo 9-2.- Diseño de columnas de un marco arriostrado.

A continuación se muestra un marco típico de un edificio industrial.



**EJEMPLO 9-2**  
**DISEÑO DE COLUMNAS DE UN MARCO ARRIOSTRADO.**

1.- Cargas en la columna del marco analizado

	Columna CD	Columna DE
Cargas de Servicio, P	Muerta = 80 Klbs Viva = 24 Klbs	Muerta = 50 Klbs Viva = 14 Klbs
Momentos de Servicio en cara superior	Muerta = -60 Klbs -pie Viva = -14 Klbs -pie	Muerta = 42.4 Klbs -pie Viva = 11.0 Klbs -pie
Momentos de Servicio en cara inferior	Muerta = - 21 Klbs -pie Viva = - 8 Klbs -pie	Muerta = -32 Klbs -pie Viva = -8 Klbs -pie

\*Momentos a favor de manecillas son positivos.

Todas las fuerzas de viento se considera que son resistidas por los muros extremos del edificio.

2.- Cargas factorizadas.

(a) Columna CD:

$$P_u = 1.4 \times 80 + 1.7 \times 24 = 152.8 \text{ Klbs}$$

$$M_{sup} = 1.4 (-60) + 1.7 (-14) = -107.8 \text{ Kips-pie}$$

$$M_{inf} = 1.4 (-21) + 1.7 (-8) = -43.0 \text{ Klbs-pie}$$

(b) Columna DE:

$$P_u = 93.8 \text{ Klbs.}$$

$$M_{sup} = +78.1 \text{ Klbs-pie.}$$

$$M_{inf} = -58.4 \text{ Klbs-pie.}$$

Por definición (ACI Sec. 10.0)  $M_2$  es siempre positivo y  $M_1$  es positivo si la columna se flexiona en curvatura simple. Como la columna CD se flexiona en curvatura doble,  $M_{1b}$  es negativo. Entonces, para diseño de columna esbelta  $M_2 = +107.8 \text{ Klb-pie}$  y  $M_1 = -43.0 \text{ Klbs-pie}$ .

Entonces para columna DE:  $M_2 = +78.1 \text{ Klbs-pie}$  y  $M_1 = +58.4 \text{ Klbs-pie}$

$M_1$  es positivo mientras la columna este en curvatura simple.

### 3.- Proponer sección.

Poniendo  $\rho_t = 0.015$

$$A_g \text{ (tanteo)} \geq \frac{P_u}{0.45 (f'_c + f_y \rho_t)} = \frac{152.8}{0.45 (3 + 0.015 \times 60)} \\ = 87.1 \text{ pulg}^2$$

ó = 9.3 pulg., por lado

Debido a la esbeltez y porque los momentos son grandes se revisará una columna de 14x14 pulg.

### 4.- Revisión de esbeltez.

En ACI Sec. 10.12.2 una columna de un marco arriostrado es corta si:  $kl_u/r < 34-12 M_1/M_2$

(a) Columna CD:

$$l_u = 20 - 2 = 18 \text{ pies} = 216 \text{ pulg.} \\ r = 0.3 \times 14 = 4.2 \text{ pulg.}$$

De la tabla de factores de longitud efectiva para marcos arriostrados, (siguiente página)  $k = 0.77$ , entonces:

$$\frac{kl_u}{r} = \frac{0.77 \times 216}{4.2} = 39.6$$

$$34-12 (M_1/M_2) = 32-12 (-43.0/107.8) = 38.8$$

$39.6 > 38.8$ . La columna es esbelta.

## FACTORES DE LONGITUD EFECTIVA DE MARCOS ARRIOSTRADOS.

APOYO SUPERIOR	k				
ARTICULADO  	0.70	0.81	0.91	0.95	1.00
ELASTICO $\psi=3.1$ 	0.67	0.77	0.86	0.90	0.95
ELASTICO $\psi=1.6$ 	0.65	0.74	0.83	0.86	0.91
RIGIDO $\psi=0.4$ 	0.58	0.67	0.74	0.77	0.81
EMPOTRADO 	0.50	0.58	0.65	0.70	0.70
	 EMPOTRADO	 RIGIDO	 ELASTICO	 ELASTICO	  ARTICULADO

(b) Columna DE:

$$l_u = 24 \text{ pies} - 2 \text{ pies} = 264 \text{ pulg.}$$

$$k = 0.86$$

$$\frac{kl_u}{r} = \frac{0.86 \times 264}{4.2} = 54.1$$

$$34 - 12 \frac{M_1}{M_2} = 34 - 12 \frac{58.4}{78.1} = 25.0$$

Entonces la columna DE es también esbelta.

Ninguna excede  $kl_u/r = 100$  según ACI Sec. 10.11.5.

5.- Momento mínimo.

El ACI Sec. 10.12.3.2 requiere que una columna de marco arriostrado deberá diseñarse para una excentricidad mínima de  $(0.6 + 0.03h)$  pulg. Para 14 pulg., esta da 1.02 pulg.

$$P_{ue_{min}} = 152.8 \times 1.02 = 13.0 \text{ KLbs-pie}$$

y para la columna DE este  $M_{min}$  da 8.0 KLbs-pie entonces las columnas deberán diseñarse para los momentos actuantes.

6.- Calcular EI.

Como el refuerzo no se conoce podemos usar:

$$EI = 0.40 E_c I_g / (1 + \beta_d)$$

donde:

$$E_c = 57,000 \sqrt{f'_c} = 3.12 \times 10^6 \text{ Lbs/pulg}^2$$

$$I_g = (14)^4 / 12 = 3201 \text{ pulg}^4$$

$$0.40 E_c I_g = 4.00 \times 10^9 \text{ Lbs-pulg}^2$$

(a) Columna CD:

$$\beta_d = \frac{1.4 \times 80}{152.8} = 0.733$$

$$EI = \frac{4.00 \times 10^9}{1 + 0.733} = 2.31 \times 10^9 \text{ Lbs-pulg}^2$$

(b) Columna DE:

$$\beta_d = \frac{1.4 \times 50}{93.8} = 0.746$$

$$EI = \frac{4.00 \times 10^9}{1.746} = 2.29 \times 10^9 \text{ Lbs-pulg}^2$$

7.- Factores de longitud efectiva.

$$\psi = \frac{\sum E_c I_c / l_c}{\sum E_b I_b / l_b}$$

Donde el ACI Sec. 10.12.1 dice que E e I serán de acuerdo a ACI Sec. 10.11.1. Entonces,  $I_c = 0.70I_g$ , e  $I_b = 0.35I_g$ , donde  $I_g$  es el momento de inercia de la sección transversal dada la cual tiene un ancho efectivo de 90 pulg. Usando este ancho  $I_g = 36,000 \text{ pulg}^4$  de donde  $I_b = 0.35 \times 36,000 = 12,810 \text{ pulg}^4$ . Análogamente,  $I_c = 0.70 \times (14)^4 / 12$ ,  $I_c = 2,240 \text{ pulg}^4$ ,  $l_c$  y  $l_b$  son los claros de las columnas y vigas respectivamente, medidos centro a centro de juntas en el marco.

(a) Columna DE: El valor de  $\psi$  por E es:

$$\psi E = \frac{E_c \times 2,240 / 24 \times 12}{E_b \times 12,810 / 300}$$

donde  $E_c = E_b$  Entonces  $\psi E = 0.182$

El valor de  $\psi$  en D es:

$$\psi_D = \frac{E_c \times 2,240 / 288 + E_c \times 2,240 / 240}{E_b \times 12,810 / 460} = 0.481$$

Del nomograma para factor de longitud efectiva  $k = 0.63$ . El cual por ecuación da:

$$k = 0.7 + 0.05 (0.182 + 0.481) = 0.733 \text{ y con la tabla da } k = 0.86.$$

Un punto de discusión de los nomogramas es que tienden a reducir los valores de k para vigas columnas de marcos prácticos.

El análisis de viga columna elástico (ecuaciones para k) tiende a mejorar los valores de k.

Los valores de k dados por la tabla son razonables sin necesidad de calcular  $\psi$ . Entonces se usará  $k = 0.86$  para la columna DE.

(b) Columna CD:

El valor de  $\psi$  de D es :  $\psi_D = 0.481$

La columna está restringida en C por la resistencia torsional del suelo bajo la zapata y es continua en D.

$$\psi = \frac{4 E_c I_c / l_c}{I_r k_s}$$

Donde  $I_r$  es el momento de inercia del área de contacto entre la zapata y el suelo y  $k_s$ , es el módulo subgrado, por lo tanto:

$$I_r = \frac{(48)^4}{12} = 442,400 \text{ pulg}^4$$

$$\psi_c = \frac{4 \times 3.122 \times 10^6 \times 3201 / 240}{48^4 / 12 \times 160} = 2.35$$

De los nomogramas:  $k = 0.76$

De la ecuación:  $k = 0.7 + 0.05 (\psi_A + \psi_B) = 0.84$

De la tabla de factores de longitud efectiva:  $k = 0.77$

Por lo que se usará  $k = 0.77$  para la columna CD.

8.- Cálculo de momentos amplificados.

$$M_c = \delta_{ms} M_2 \quad \text{donde:}$$

$$\delta_{ms} = \frac{C_m}{1 - (P_u / 0.75 P_c)} \geq 1.0 \quad (\text{ACI Ec. 10 - 10})$$

(a) Columna CD:

$$C_m = 0.6 + 0.4 (-43.0/107.8) \geq 0.4 \quad (\text{ACI Ec. 10 - 14})$$

$$C_m = 0.440$$

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(kl_u)^2} \quad (\text{ACI Ec. 10 - 11})$$

$$l_u = 18 \text{ pies} = 216 \text{ pulg.}$$

$$P_c = \frac{\pi^2 \cdot 2.31 \cdot 10^9 \text{ lb-pulg}^2}{(0.77 \cdot 216 \text{ pulg})^2}$$

$$= 823,500 = 824 \text{ Klbs}$$

$$\delta_{ns} = \frac{0.440}{1 - 152.8 / (0.75 \cdot 824)}$$

Entonces  $\delta_{ns} = 1.0$ . Esto significa que la sección tiene el momento máximo en el extremo, por lo que:  $M_c = 1.0 \cdot 107.80 = 170.80 \text{ Klbs-pie.}$

La columna CD será diseñada para:

$$P_u = 152.8 \text{ Klbs} \text{ y } M_u = M_c = 107.80 \text{ Klbs-pie.}$$

(b) Columna DE:

$$C_m = 0.6 + 0.4 (58.4/78.1) = 0.899$$

$$P_c = \frac{\pi^2 \cdot 2.29 \cdot 10^9}{(0.86 \cdot 264)^2} = 439 \text{ kips}$$

$$\delta_{ns} = \frac{0.899}{1 - 93.8 / (0.75 \cdot 439)} \geq 1.0$$

$$\delta_{ns} = 1.257$$

Esta columna está afectada por esbeltez.

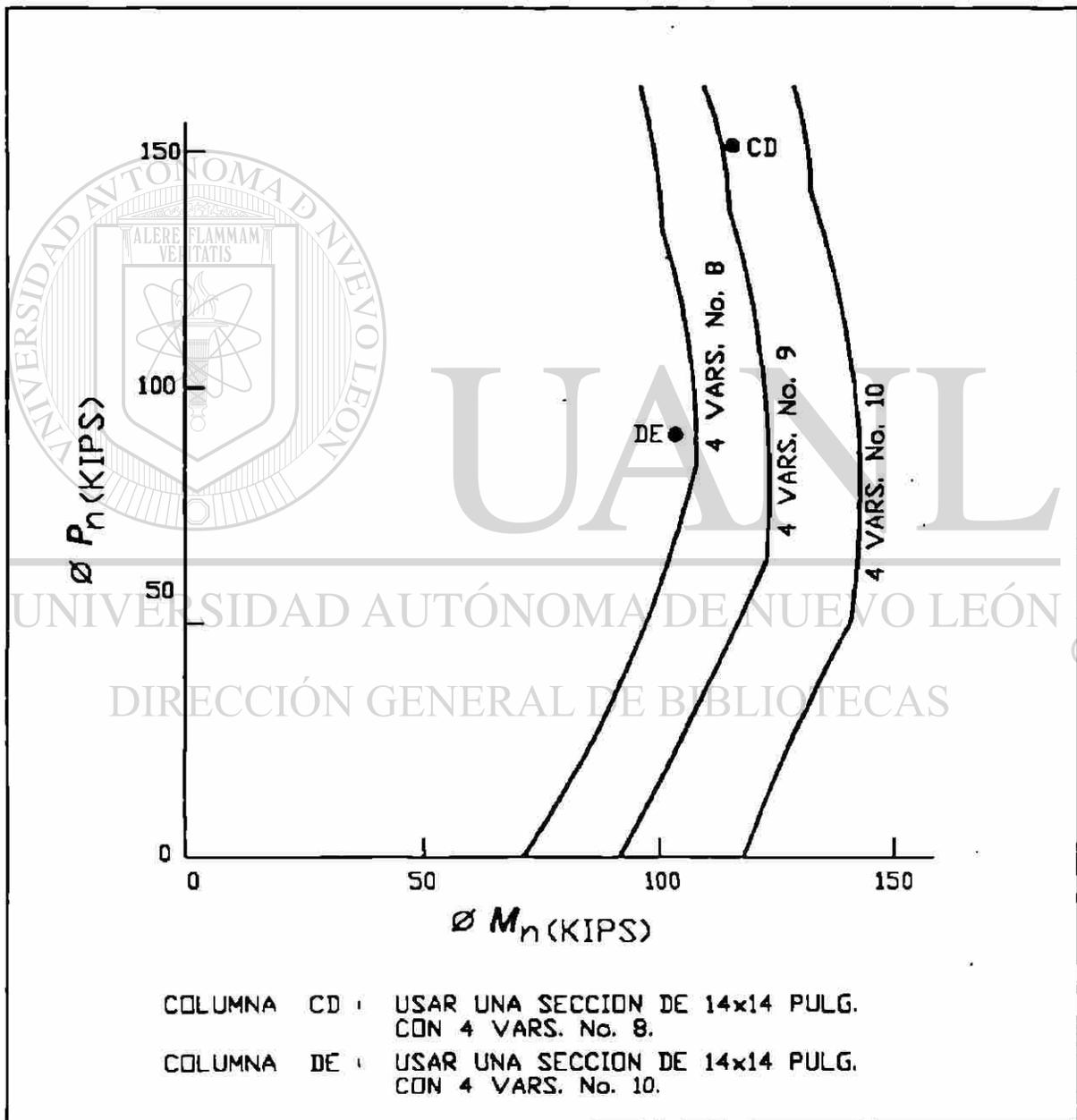
$$M_u = 1.257 \cdot 78.1 = 98.2 \text{ Klbs-pie.}$$

La columna DE será diseñada para:

$$P_u = 93.8 \text{ KLB y } M_u = M_c = 98.2 \text{ KLB-pie.}$$

### 9.- Selección del refuerzo.

En la siguiente figura se muestran los diagramas de interacción para tres columnas con sección de 14x14pulg para 4 varillas No. 8, y 4 varillas No. 9 y 4 varillas No. 10.



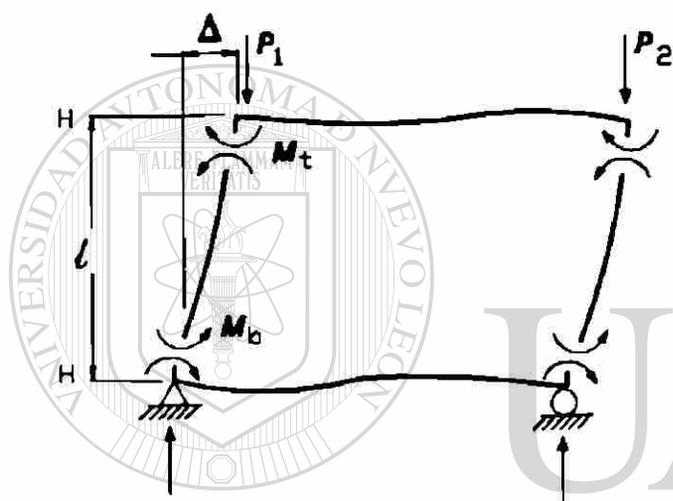
Columna CD: Usar una sección de 14 x 14 pulg con 4 vars No. 8.

Columna CE: Usar una sección de 14 x 14 pulg con 4 vars. No. 10.

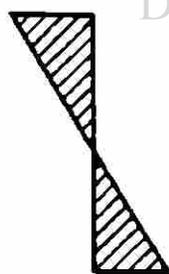
# Comportamiento de columnas restringidas en marcos con desplazamiento.

## Estática de marcos con desplazamiento.

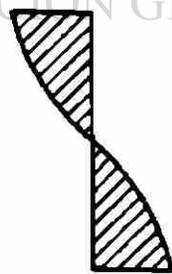
Un marco no arriostrado depende de los momentos en las columnas para resistir las cargas laterales y las deflexiones laterales. Como en el marco mostrado en la siguiente figura.



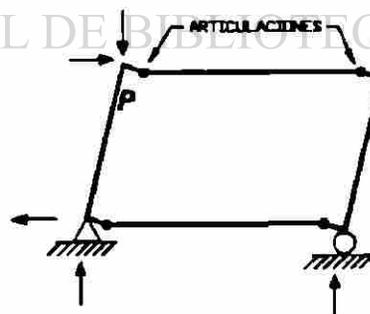
(a) MOMENTOS EN LAS COLUMNAS EN UN MARCO CON DESPLAZAMIENTO.



(b) MOMENTOS  $Hl$ .



(c) MOMENTOS  $P-\Delta$ .



(d) EFECTO DE ARTICULACIONES DE VIGA.

## MOMENTOS EN COLUMNA DE MARCO CON DESPLAZAMIENTO.

La suma de los momentos en los extremos de todas las columnas serán los necesarios para equilibrar el momento debido a la carga lateral  $Hl$ , más el momento debido a las cargas verticales,  $\Sigma P\Delta$ . Entonces:

$$\Sigma(M_{sup} + M_{inf}) = Hl + \Sigma P\Delta$$

Nótese que ambas columnas se desplazan lateralmente la misma cantidad  $\Delta$ . Por esta razón no es posible considerar las columnas independientes en un marco no arriostrado.

Si un marco tiene algún sistema de articulación en los extremos de las columnas, como es el caso de un edificio prefabricado, las cargas verticales para las columnas articuladas son incluidas en la  $\Sigma P$ , de la ecuación anterior y de la ecuación (10-7 ACI). Estas columnas son conocidas como *columnas inclinadas* porque dependen de la estabilidad del marco.

En la figura anterior se pueden apreciar los diagramas de momentos debido a las cargas laterales (b), y los momentos  $P\Delta$  en el inciso (c). Estos pueden sumarse directamente por lo cual el máximo momento debido a carga lateral y el máximo momento  $P\Delta$  ocurre en los extremos de la columna.

Por esta razón, el factor de momento equivalente,  $C_m$ , no se aplica a columnas con desplazamiento si los momentos máximos debidos a cargas laterales y al efecto  $P\Delta$  se suman directamente. Por otro lado la ecuación:

$$M_c = M_0 \left( \frac{1+0.23 P/P_E}{1 + P/P_E} \right) \quad (A)$$

Se convierte en :

$$M_c = M_0 \left( \frac{1-0.18 P/P_E}{1-P/P_E} \right) \quad (B)$$

El término  $1-0.18P/P_E$  refleja la forma de diagrama de momentos  $Hl$  del diagrama de momentos inciso (b), el cual difiere de un diagrama de momentos rectangular considerado al derivar la ecuación (A) anterior. Otra vez este término ha sido despreciado por el Código ACI. Lo cual es conservador.

Es también importante notar que si las articulaciones se forman en los extremos de las vigas como se muestra en el inciso (d) de la figura anterior, el marco será inestable. Entonces las vigas deberán diseñarse, para resistir el total del momento amplificado de los extremos de las columnas para que el marco permanezca estable (ACI Sec. 10.13.7).

Las cargas que causan desplazamiento raramente son sostenidas. Si una carga sostenida actúa en un marco no arriostrado, las deflexiones se incrementan con el tiempo, y esto incrementa directamente el momento  $P\Delta$ . Este proceso es muy sensible para pequeñas variaciones en las propiedades del material y las cargas. Debido a esto, las estructuras sujetas a cargas laterales sostenidas serán siempre arriostradas. Indudablemente, los marcos arriostrados deberán usarse siempre que sea posible, independientemente si las cargas son a corto plazo o sostenidas.

### **Momentos $M_{ns}$ y $M_s$ :**

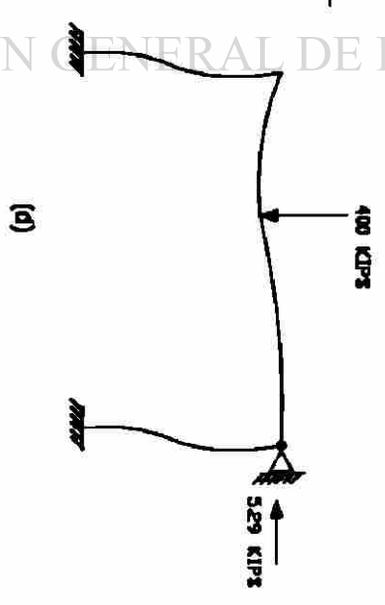
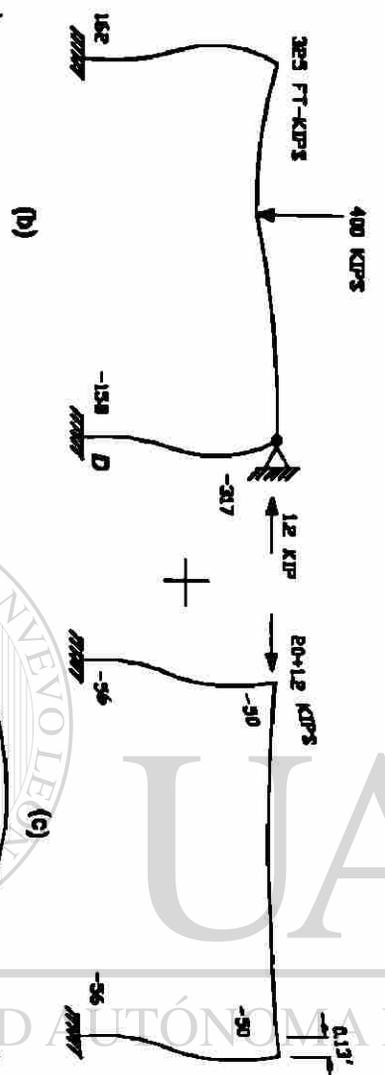
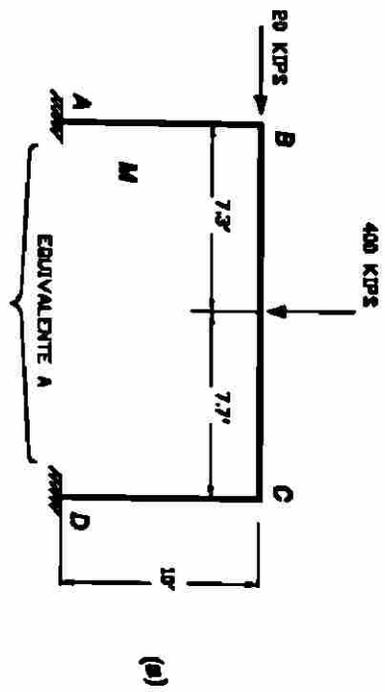
Dos diferentes tipos de momentos pueden ocurrir en marcos:

- 1.- Momentos debidos a cargas que no causan desplazamiento,  $M_{ns}$ .
- 2.- Momentos debidos a cargas que causan desplazamiento apreciable,  $M_s$ .

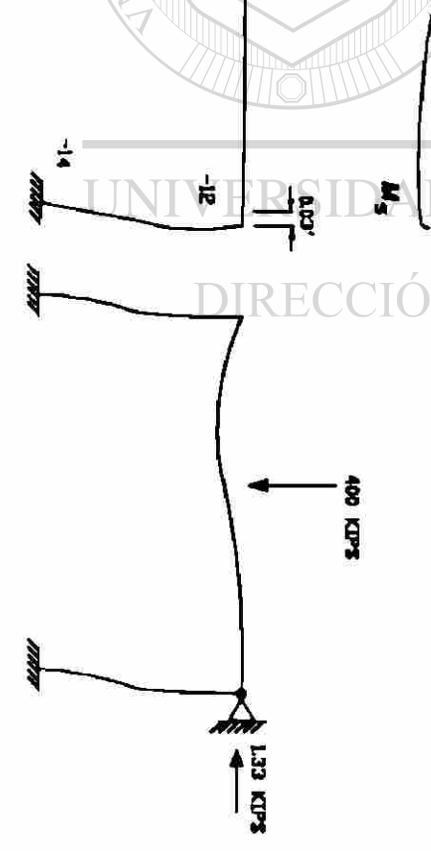
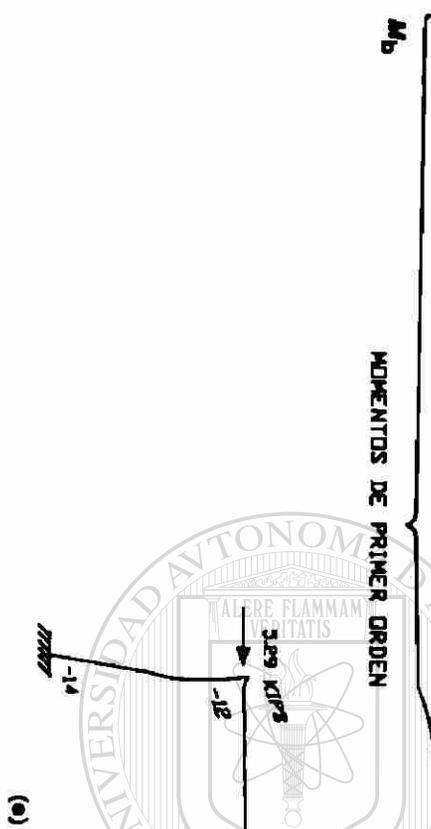
Estos momentos son considerados separadamente en el procedimiento de diseño del Código ACI porque hay una gran diferencia, en como se flexionan los marcos. Esto se ilustra en la siguiente figura: Un análisis convencional de distribución de momentos del marco se muestra en esta figura en dos pasos o efectos.

El marco es arriostrado contra el desplazamiento primero, por ejemplo, en C aplicando las cargas de gravedad, dando el diagrama de momentos mostrado en la Figura inciso (b). Si la carga de 400 KLbs no actúa simétricamente en el marco se requiere una reacción de 1.2 KLbs para evitar el desplazamiento. En el segundo paso, se aplica la carga lateral de 20 KLbs más esa reacción horizontal de 1.2 KLbs. El cual es ahora libre de desplazarse. Esto da los momentos y deflexiones del inciso (c). Los momentos obtenidos de un análisis convencional de distribución de momentos son la suma de los momentos de las figuras (b) y (c).

Cuando la carga de 400 KLbs actúa en el marco desplazado lateralmente, una nueva fuerza de 5.29 KLbs es requerida para prevenir cualquier desplazamiento lateral, como se muestra en el inciso (d). Esta fuerza puede ser cancelada exteriormente añadiendo otra carga como lo muestra el caso del inciso (e). La carga de 400 KLbs interactúa con esta nueva deflexión para dar otra fuerza arriostradora del inciso (f), y así sucesivamente. Los momentos amplificados por desplazamiento  $\delta_s M_s$  son la suma de los momentos de las figuras (c) y (e) y subsecuentes. Los momentos de las figuras (e) y (g) (no mostrada) y siguientes, son proporcionales a los del inciso (c) al soltar el apoyo del inciso (b). Por esta razón el Código ACI diferencia los momentos  $M_{ns}$  y  $M_s$ .



MOMENTOS DE PRIMER ORDEN



MOMENTOS M<sub>2</sub> Y M<sub>3</sub> EN UN MARCO.

Actualmente, muchos marcos son analizados por el método directo de rigideces el cual no involucra fuerzas de arriostramiento. Para simplificar la subdivisión de momentos, el Código ACI denomina a las fuerzas de arriostramiento como "cargas que resultan de un desplazamiento no apreciable". Cuando esto se da, los momentos  $M_{ns}$  se obtienen directamente por un análisis directo de rigideces de primer orden del marco.

El término "desplazamiento no apreciable" no está definido en el Código o comentarios. Los reglamentos de 1977 a 1989 en los comentarios definen "desplazamiento no apreciable" como aquel con deflexión lateral  $\Delta \leq 1/1500$  de la altura flexionada por las cargas factorizadas.

### **Cálculo de los momentos en marcos con desplazamiento usando análisis de segundo orden.**

#### **Análisis de primer orden y segundo orden.**

Un análisis de marco de "primer orden" es aquel en el cuál el efecto de deflexiones laterales por carga axial o momento flexionante es ignorado. En un análisis de marco de "segundo orden", el efecto de los momentos por deflexiones son considerados. Los momentos y deflexiones resultantes incluyen los efectos de esbeltez y por lo tanto son no lineales con respecto a la carga aplicada.

#### **Análisis de segundo orden**

##### **Nivel de carga para el análisis**

En un análisis de segundo orden, los momentos en las columnas y las deflexiones laterales del marco se incrementan más rápidamente que las cargas. Entonces es necesario calcular los efectos de segundo orden a nivel de carga factorizada. Usando los factores de carga del Código ACI y considerando que las deflexiones laterales son debidas al viento, el análisis se hará para los niveles de carga:

$$U = 0.75(1.4D+1.7L+1.7W)$$

$$= 1.05D+1.275L+1.275W$$

$$U = 0.9D+1.3W$$

y también es necesario revisar :

$$U = 1.4D+1.7L$$

## Factor de reducción de rigidez

El término 0.75 en el denominador de la ecuación:

$$\delta_{ns} = \frac{C_m}{1 - P_u/0.75P_c} \geq 1.0$$

es un factor de reducción de rigidez,  $\phi_k$ , el cual considera la variación de la carga crítica,  $P_c$ , y la variación introducida por las consideraciones en el cálculo del momento amplificado.

Este factor es importante porque incrementa el momento amplificado. Un factor de reducción de resistencia similar se necesita cuando se hace un análisis de segundo orden. Primero, el módulo de elasticidad,  $E_c$ , usado en el análisis del marco está basado en la resistencia especificada,  $f'_c$ , mientras que las deflexiones son una función de el  $E_c$  basado en el promedio de las resistencias del concreto que oscilan entre 600 a 1400 KLbs/pulg<sup>2</sup>. Segundo, el análisis de segundo orden es la mejor representación del comportamiento del marco en el que el momento amplificado está dado por la ecuación:

$$\delta_s M_s = \frac{M_s}{1 - \Sigma P_u/0.75 \Sigma P_c} \geq M_s \quad (\text{ACI Ec. 10-19})$$

Los momentos de inercia de la Sec. 10.11.1 del ACI han sido multiplicados por 0.875, lo cual implica subestimar el  $E_c$ , y sobrestimar las deflexiones de segundo orden en un 20 a 25%, correspondientes a un valor de  $\phi_k$  de 0.80 a 0.85.

## Rigidez de los miembros

**Estado límite último.** La rigidez apropiada para calcular la resistencia debe seleccionarse estimando las deflexiones laterales a nivel de carga factorizada.

Esto no es simple, porque el marco tiene varias secciones transversales con diferente cantidad de refuerzo y diferente grado de agrietamiento. Además, la cantidad de refuerzo y su distribución no se conocen al momento de hacer el análisis.

Basándose en estudios de rigidez a flexión de vigas con regiones agrietadas y no agrietadas, MacGregor y Hagl recomiendan que la rigidez de la viga se tome como  $0.4E_c I_g$ , cuando se haga un análisis de segundo orden. En el ACI Sec. 10.11.1 este valor ha sido multiplicado por un factor de reducción de 0.875, dando  $I = 0.35 I_g$

Dos niveles de comportamiento se distinguen al seleccionar el EI de columnas. Las deflexiones laterales del marco son influenciadas por la rigidez de todos los miembros en el marco y por el grado variable, de agrietamiento de esos miembros. Entonces el EI usado en el análisis del marco será un valor promedio. Por otro lado, cuando se diseña una columna individual en un marco usando la ecuación :

$$\delta_{ns} = \frac{C_m}{1 - P_u/0.75P_c} \geq 1.0$$

el EI usado para calcular  $\delta_{ns}$  será el de esa columna. Este EI refleja que esta columna es la más agrietada, y por lo tanto que es menor que el promedio de los EI de todas las columnas involucradas. El ACI en la Sec. 10.11.1 da este valor multiplicado por 0.875, o EI = 0.70  $E_c I_g$  para este propósito. Por otro lado cuando se calculan los factores de amplificación de momento  $\delta_{ns}$  y  $\delta_s$ , EI debe calcularse con las ecuaciones 10-12 y 10-13 del ACI.

### Estado límite de servicio

Los momentos de inercia dados por el ACI Sec. 10.11.1 son para un estado límite último. En cargas de servicio, los miembros se agrietan menos que con cargas últimas (factorizadas). Cuando se calculan las deflexiones o vibraciones en cargas de servicio, los valores de I serán representativos del grado de agrietamiento bajo cargas de servicio. En los comentarios R.10.11.1 sugieren que I en cargas de servicio puede tomarse como  $1/0.70 = 1.43$  veces el valor dado por el ACI Sec. 10.11.1

### Rotación de cimentación

Las rotaciones de cimentaciones sujetas a los momentos extremos de las columnas reduce el empotramiento en las cimentaciones y causa mayor desplazamiento lateral. Esto es particularmente importante en el caso de muros de cortante o columnas grandes, los cuales resisten la mayor porción de las cargas laterales.

Los efectos de rotaciones de cimentación pueden incluirse en el análisis modelando cada cimentación con una viga equivalente con una rigidez dada por la ecuación:

$$k_r = I_r k_s$$

## Efecto de cargas sostenidas

Las cargas que causan un desplazamiento apreciable son generalmente cargas de corta duración, así como el viento o sismo, y por esto, no causan deflexiones por flujo plástico (creep). Por el contrario, debido a las cargas laterales sostenidas que actúan en la estructura, los valores de EI usados en el análisis del marco son reducidos. El ACI en la Sec. 10.11.1 establece que en un caso así, I será dividido entre  $(1+\beta_d)$ , donde para este caso,  $\beta_d$  está definido por la sección 10.0, inciso (b), como:

$$\beta_d = \frac{\text{cortante máximo factorizado en el piso}}{\text{cortante total factorizado en el piso}}$$

## Métodos de análisis de segundo orden

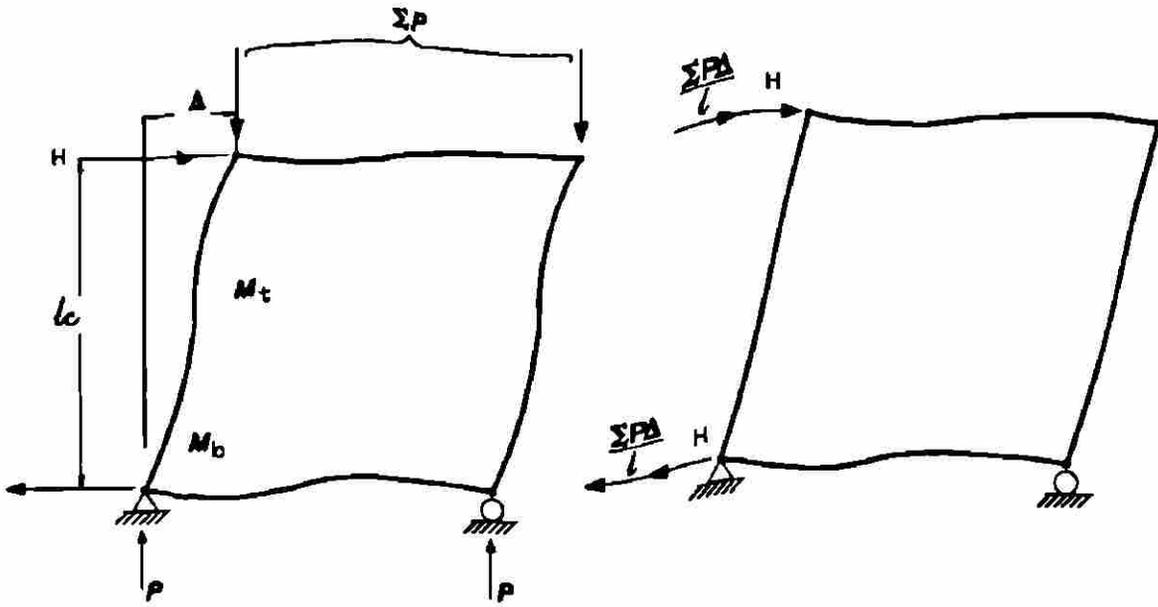
Los programas de computadora son ampliamente apropiados para hacer el análisis de segundo orden. Los principios y el análisis se presentan en los siguientes párrafos.

- **Análisis iterativo P -  $\Delta$**

Cuando un marco se desplaza lateralmente bajo la acción de cargas laterales y verticales, como se muestra en la siguiente figura, los momentos extremos en las columnas serán equilibradas por las cargas laterales y un momento igual a

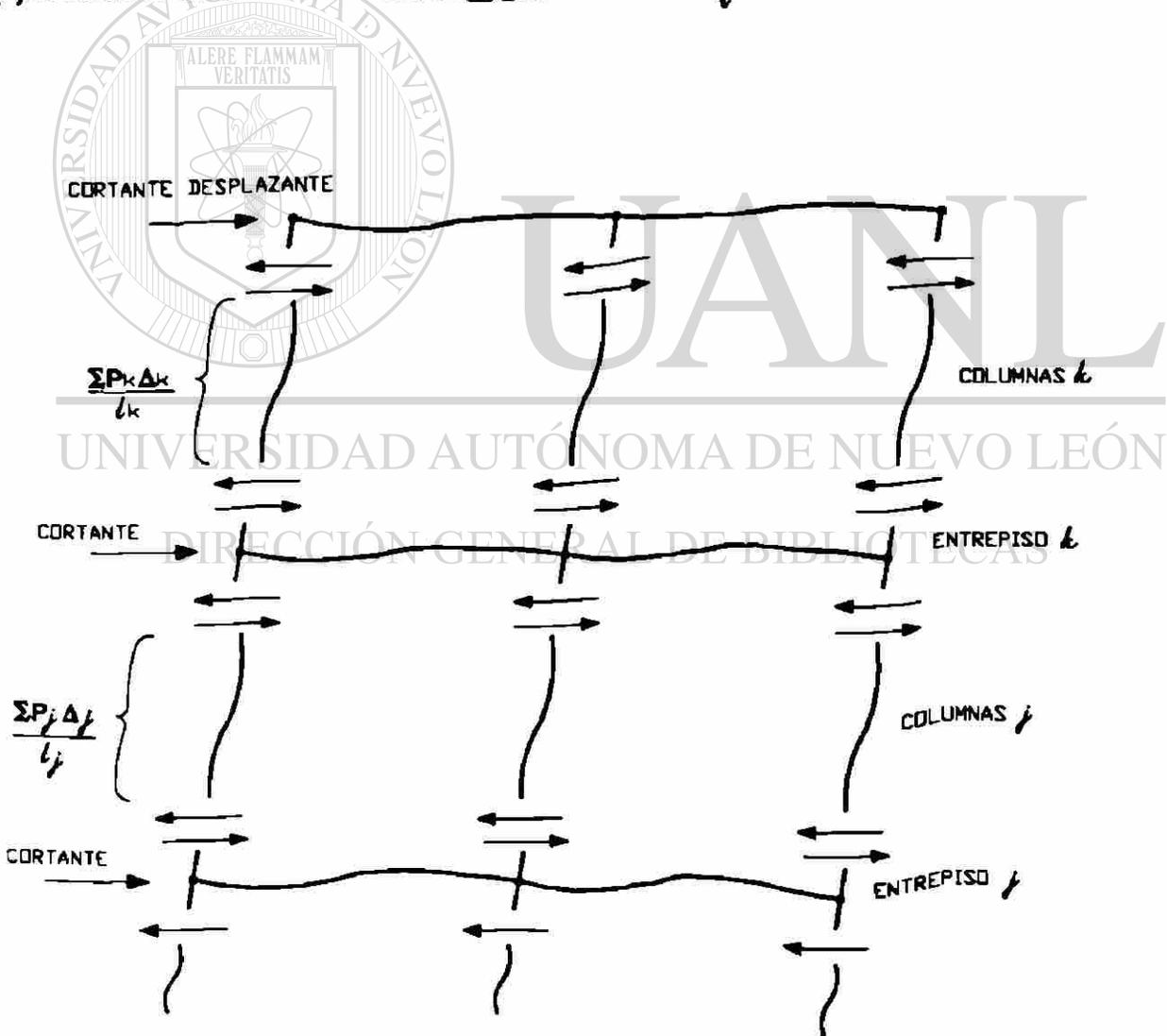
$$\Sigma (M_{\text{sup}} + M_{\text{inf}}) = Hl_c + \Sigma P\Delta$$

donde  $\Delta$  es la deflexión lateral en la parte superior del piso con respecto a la parte inferior. El momento  $\Sigma P\Delta$  puede expresarse en función de las fuerzas cortantes,  $(\Sigma P) \Delta / l_c$ , donde  $l_c$  es la altura del piso. Estos cortantes dan el momento de volteo de  $(\Sigma P \Delta / l_c) / (l_c) = (\Sigma P) \Delta$ .



(a) CARGAS EN EL MARCO DESPLAZADO

(b)  $\frac{\Sigma P \Delta}{l}$  CORTANTES EN EL PISO



(c) CALCULO DE LAS FUERZAS QUE DESPLAZAN.  
ANALISIS ITERATIVO P-Δ .

En la figura siguiente (c) se muestran los cortantes en cada piso para dos entrepisos. La suma algebraica de los cortantes arriba y abajo de cada entrepiso de la fuerza que causa el desplazamiento en el piso. Para el piso  $j$  esta fuerza es:

$$\text{Fuerza desplazante } j = \frac{(\sum P_i)\Delta_i}{l_i} - \frac{(\sum P_j)\Delta_j}{l_j}$$

Las fuerzas desplazantes se suman a las cargas laterales aplicadas en cada nivel, y la estructura es re-analizada dando nuevas deflexiones laterales y se calculan los momentos en la columna. Si las deflexiones se incrementan más del 5%, se calcula un nuevo valor de  $\sum P\Delta/l$  y la estructura se re-analiza por la suma de las cargas laterales aplicadas y nuevas fuerzas desplazantes. Este proceso se continua hasta que se obtenga la convergencia.

La discontinuidad en la rigidez de el edificio o discontinuidad en las cargas aplicadas, hace que la fuerza desplazante pueda ser negativa, es decir, actúa en sentido opuesto a como se muestra en el inciso (c) de la figura correspondiente.

Idealmente, se puede hacer una corrección en este proceso. El diagrama de momentos  $P-\Delta$  para una columna dada tiene la misma forma que la columna flexionada. Mientras que el diagrama de momentos debido a los cortantes  $P\Delta/l$  es una línea recta., similar al diagrama de momentos  $H\lambda$ . De lo que resulta, el área del diagrama de momentos real  $P\Delta$  es mayor que el diagrama de momentos en línea recta. Se puede demostrar por los teoremas de área-momento que las deflexiones debidas al diagrama real serán mayores que las debidas a las de los cortantes  $P\Delta/l$ . El incremento en la deflexión varía desde cero para una columna apoyada en vigas flexibles de poca restricción hasta un 22% para una columna totalmente empotrada restringida a la rotación en cada extremo. Un valor promedio razonable es cerca del 15%. El incremento en la deflexión se puede determinar tomando los cortantes en cada piso con  $\gamma\sum P\Delta/l$ , donde  $\gamma$  es un *factor de flexibilidad* el cual varía entre 1.0 y 1.22 y se puede tomar como 1.15 para marcos prácticos. Desafortunadamente, los programas comerciales de análisis de segundo orden no incluyen esta corrección. Por esta razón, omitiremos  $\gamma$  también.

- **Análisis directo de  $P-\Delta$  para marcos con desplazamiento.**

El procedimiento de cálculo descrito en la sección anterior puede describirse matemáticamente usando series infinitas. La suma de estas series da la deflexión de segundo orden,  $\Delta$ :

$$\Delta = \frac{\Delta_0}{1 - \gamma(\sum P_u)\Delta_0 / N_u l_c} \quad \text{donde:}$$

$V_u$  = Cortante en el piso debido a las cargas de viento, actuando en el marco en el piso en cuestión.

$l_c$  = Altura del piso.

$\Sigma P_u$  = Carga axial total en todas las columnas del piso.

$\gamma \cong 1.15$

$\Delta_0$  = Deflexión de primer orden en el piso por cortante,  $V$ .

$\Delta$  = Deflexión de segundo orden.

Ambas  $\Delta_0$  y  $\Delta$  se refieren a la deflexión lateral relativa del piso superior con respecto al inferior.

Como los momentos en el marco son directamente proporcionales a las deflexiones, los momentos de segundo orden son:

$$M = \delta_s M_s = M_0 / [1 - \gamma(\Sigma P_u \Delta_0) / (V_u l_c)]$$

donde  $M_0$  y  $M$  son los momentos de primer y segundo orden respectivamente.

El ACI Sec. 10.11.4.2 define el índice de estabilidad para un piso como:

$$Q = \frac{\Sigma P_u \Delta_0}{V_u l_c} \quad (\text{ACI Ec. 10-7})$$

Sustituyendo en la ecuación anterior y omitiendo el factor de flexibilidad  $\gamma$  da:

$$\delta_s M_s = 1 / (1 - Q) \geq M_s \quad (\text{ACI Ec. 10-18})$$

- **Análisis directo P-Δ para estructuras arriostradas.**

En una estructura arriostrada, las deflexiones relativas entre el piso superior y el inferior son en gran parte controladas por la pendiente del muro de cortante o el elemento riostra en el piso. En este caso la deflexión relativa de un piso dado no es independiente de los pisos adyacentes y las ecuaciones anteriores no pueden usarse. En el volumen 109 de "Proceedings ASCE Journal of the Structural Division", muestra que los momentos y las deflexiones de un marco entero pueden calcularse usando un factor de amplificación,  $\delta_r$ , dado por:

$$\delta_r = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^n (\sum \gamma P_{u_i} / l_{c_i}) \Delta_{oi}^2 [\sum_{i=1}^n (\sum V_{u_i}) \Delta_{oi}]}$$

El procedimiento para calcular los momentos de segundo orden y las deflexiones es el mismo que para un marco no arriostrado, excepto que el mismo factor de amplificación,  $\delta_r$  se usa en todos los pisos. Este procedimiento se aplica a marcos arriostrados y partes arriostradas o estructuras parcialmente arriostradas.

## **Diseño de columnas en marcos con desplazamiento**

### **Generalidades**

En el Código ACI 1995 las secciones para el diseño de columnas esbeltas han sido completamente modificadas y arregladas. El ACI Sec. 10.10 es la que considera esto. Los requisitos para análisis de esbeltez (ACI Sec. 10.10.1) y permite el uso del análisis aproximado de amplificación de momento descrito en el ACI Secs. 10.11, 10.12, y 10.13. El ACI Sec. 10.11 "Momentos Amplificados - Generalidades" da los requisitos generales para el diseño de columnas esbeltas en marcos con y sin desplazamiento. Si la columna está en un marco con desplazamiento, el diseño involucra las secciones 10.11 y 10.13 "Momentos Amplificados, Marcos no contraventeados". El Código ACI 1995 describe el procedimiento de diseño de columnas esbeltas en marcos con desplazamiento en cinco pasos:

1.- Momento no amplificado,  $M_{ns}$ , debido a cargas que no causan desplazamiento apreciable. Este se calcula usando un análisis de marco de primer orden usando las rigideces de los miembros dado en la Sección 10.11.1 del ACI para la combinación de carga:

$$U = 0.75 (1.4D + 1.7L + 1.7W) = 1.05 D + 1.275 L + 1.275W$$

Los momentos  $M_{ns}$  resultan de  $1.05D + 1.275L$ .

2.- Cálculo de los momentos amplificados,  $\delta_s M_{rs}$ : Tres métodos alternativos pueden usarse dados en la sección 10.13.4 del ACI. Para la combinación del ACI. Para la combinación de carga del paso 1, los momentos  $M_s$  resultan de 1.275W.

3.- Suma de momentos.  $\delta_s M_s + M_{rs}$

Esto para cada extremo de cada columna (ACI Sec. 10.13.3).

4.- Revisar si el máximo momento ocurre entre los extremos de la columna. Normalmente, el momento máximo en la columna se presenta en un extremo y es diseñada para este momento. Sin embargo, si las cargas axiales en la columna son altas y la esbeltez excede el límite dado en la Sección 11.13.5 del ACI, es necesario revisar si el momento está en alguna sección entre los extremos de la columna y si excede el máximo del extremo. Esto aplicando la Sec. 10.12.3 del ACI.

**Cálculo de  $\delta_s M_s$ :**

El ACI Sec. 10.13.4 permite a los diseñadores calcular los momentos amplificados por desplazamiento,  $\delta_s M_s$ , en los marcos por uno de tres procedimientos. En orden son:

\*Análisis de segundo orden.

\*Solución directa por análisis iterativo P- $\Delta$ .

\*Momento Amplificado por desplazamiento,  $\delta_s$ , usado por los Códigos ACI desde 1971.

**Cálculo de  $\delta_s M_s$ , usando análisis de segundo orden**

El ACI en la Sec. 10.13.4.1 permite el uso de análisis de segundo orden para calcular  $\delta_s M_s$ . Si los desplazamientos torsionales en el marco son significativos, un tercer Análisis de segundo orden en tres dimensiones deberá usarse.

No existe un procedimiento fácil para incorporar efectos torsionales en el cálculo de  $\delta_s M_s$  por el ACI Secs. 10.13.4.2 y 10.13.4.3.

### Cálculo de $\delta_s M_s$ usando análisis directo P- $\Delta$

El ACI Sec. 10.13.4.2 permite el uso de un cálculo directo de momentos P- $\Delta$  usando una ecuación similar a la ecuación:

$$M = \delta_s M_s = M_o / [1 - \gamma(\Sigma P_u) \Delta_o / V_u l_c]$$

que puede escribirse como:

$$\delta_s M_s = \frac{M_s}{1 - Q} \geq M_s \quad (\text{ACI Ec. 10-18})$$

donde:  $Q = \frac{\Sigma P_u \Delta_o}{V_u l_c} \quad (\text{ACI Ec. 10-7})$

### Cálculo de $\delta_s M_s$ usando momento amplificado en marco con desplazamiento

El ACI Sección 10.13.4.3 permite el uso tradicional de momento amplificado en un marco con desplazamiento para calcular  $\delta_s M_s$ , donde:

$$\delta_s M_s = \frac{M_s}{1 - \Sigma P_u / (0.75 \Sigma P_c)} \geq M_s \quad (\text{ACI Ec. 10-19})$$

Aquí  $\Sigma P_u$  se refieren a la suma de las cargas axiales y cargas críticas respectivamente, para todas las columnas en el piso analizado. En este caso, los valores de  $P_c$  son calculados usando la longitud efectiva,  $kl_u$ , evaluada para columnas en un marco con desplazamiento y  $\beta_d$  definido en la sec.10.0 del ACI.

En algunos marcos el cortante en el piso se debe a cargas de viento o sismo y no a sostenidas, dando  $\beta_d = 0$ . El uso de la suma de los términos de la ecuación anterior considera el hecho de que la inestabilidad involucra a todas las columnas del piso.

## Momentos en los extremos de las columnas

Los momentos no amplificados sin desplazamiento,  $M_{ns}$ , se suman a los momentos amplificados con desplazamiento,  $\delta_s M_s$ , en cada extremo de la columna usando:

$$M_1 = M_{1ns} + \delta_s M_{1s} \quad (\text{ACI Ec. 10-16})$$

$$M_2 = M_{2ns} + \delta_s M_{2s} \quad (\text{ACI Ec. 10-17})$$

Esta suma se hace para apoyo superior e inferior. La suma de mayor valor absoluto de los momentos resultantes en los extremos es llamada  $M_2$  y la menor es llamada  $M_1$ .

## Momento máximo entre los extremos de la columna

En algunas columnas de marcos con desplazamiento, los momentos máximos ocurren en los extremos de la columna y tienen los siguientes valores:

$$M_1 = M_{1ns} + \delta_s M_{1s} \text{ y } M_2 = M_{2ns} + \delta_s M_{2s}$$

Ocasionalmente, en columnas muy esbeltas y altamente cargadas las deflexiones de la columna pueden causar que el momento máximo se presente entre los extremos. Si:

$$l_u/r > 35/\sqrt{P_u/f' A_g} \quad (\text{ACI Ec. 10-20})$$

El momento en algún punto entre los extremos de la columna puede exceder el mayor de los momentos en los extremos.

Si  $l_u/r$  excede el valor dado por la ecuación anterior el momento máximo a lo largo de la longitud de la columna puede calcularse.

Calculando el factor de momento amplificado sin desplazamiento,  $\delta_{ns}$ , dado por la ecuación 10-10 del ACI. Si  $\delta_{ns} \leq 1.0$ , el momento máximo está en el extremo de la columna. Si  $\delta_{ns} > 1.0$ , estará entre los extremos. La ecuación de  $\delta_{ns}$  incluye la carga crítica  $P_c$ . Esta se calcula usando el factor de longitud efectiva sin desplazamiento,  $k$ , de la sec. 10.12.1 del ACI. Si los momentos en los extremos incluyen los momentos por desplazamiento,  $\beta_d$  es el valor para un marco con desplazamiento dado por la ecuación definida en la Sec. 10.0 del ACI.

## Pandeo lateral bajo cargas de gravedad

Un marco puede flexionarse lateralmente bajo las cargas de gravedad solamente. El ACI Sec. 10.13.6 requiere revisar esta probabilidad. Esto se hace usando la combinación de cargas de gravedad mayor,  $U = 1.4D+1.7L$ . Hay tres métodos para calcular  $\delta_s M_s$ , correspondientes a revisar el desplazamiento:

(a) Si  $\delta_s M_s$  ha sido calculado usando un análisis de segundo orden. El ACI Sec. 10.13.6a limita la relación de las deflexiones de segundo orden y primer orden a 2.5. Esto requiere un análisis especial de segundo orden basado en los valores de EI del ACI Sec. 10.11.1 dividido entre  $(1+\beta_d)$  con  $\beta_d$  dado por ACI Sec. 10.0 definición (c), con una carga de gravedad de  $1.4D + 1.7L$ .

(b) Si  $\delta_s M_s$  se calcula usando un análisis directo P- $\Delta$ , el ACI Sec.10.13.6b limita Q a 0.60, donde Q está basado en  $\Sigma P_u$  con  $1.4D+1.7L$  y  $\Delta_0$  se calcula para algún valor arbitrario de cortante en el piso,  $V_u$ , usando los valores de EI del ACI Sec. 10.11.1 divididos entre  $\beta_d$  del ACI Sec. 10.0 definición (c). En la ecuación:

$$\delta_s M_s = M_s / (1-Q) \geq M_s \quad (\text{ACI Ec. 10-18})$$

se puede ver que  $Q = 0.60$  corresponde a  $\delta_s = 2.5$ .

(c) Si  $\delta_s M_s$  ha sido calculado usando el momento amplificado con desplazamiento, el ACI Sec. 10.13.6c limita  $\delta_s$  por la ecuación 10-19 del ACI a no más de 2.5, donde  $\delta_s$  está basado en  $\Sigma P_u$  para  $1.4D + 1.7L$  y  $\Sigma P_c$  está basado en longitudes efectivas por ACI Sec. 10.13.1 y los valores de EI por las ecuaciones 10-12 y 10-13 del ACI con  $\beta_d$  por ACI Sec. 10.0 definición (c).

## Momento mínimo

El Código ACI especifica un momento mínimo  $M_{2,\min}$  para ser considerado en el diseño de columnas en marcos sin desplazamiento pero no para columnas de marcos con desplazamiento. Esto solamente será un problema para la combinación  $1.4D+1.7L$  actuando en el marco con desplazamiento, ya que esta no involucra  $\delta_s M_s$ . Para esta combinación diseñaremos para el mayor de  $M_2$  y  $M_{2,\min}$ .

### Ejemplo 9-3.- Diseño de las columnas de un marco no arriostrado

En la siguiente página se muestra la planta y elevación de un edificio de cinco pisos. El edificio será recubierto por paneles precolados no estructurales. No hay muros de cortante u otros elementos de arriostramiento. Las vigas en la dirección norte-sur son todas de 18 pulg. de ancho y con un peralte total de 30 pulg. Las losas de piso son de 7 pulg. de espesor. Diseñar una columna exterior y una interior del primer al segundo nivel de el marco en el eje tres para carga muerta, viva y fuerzas de viento en la dirección norte - sur. Usar  $f_c = 4000 \text{ Lbs/pulg}^2$  y  $f_y = 60,000 \text{ Lbs/pulg}^2$ .

1.- Selección aproximada de la sección de la columna.

Una columna preliminar de las cargas de gravedad para las columnas del primer nivel está basada en las áreas tributarias respectivas de la azotea y de cada piso lo cual da una carga muerta no factorizada y una carga viva no-reducida en las columnas correspondientes de:

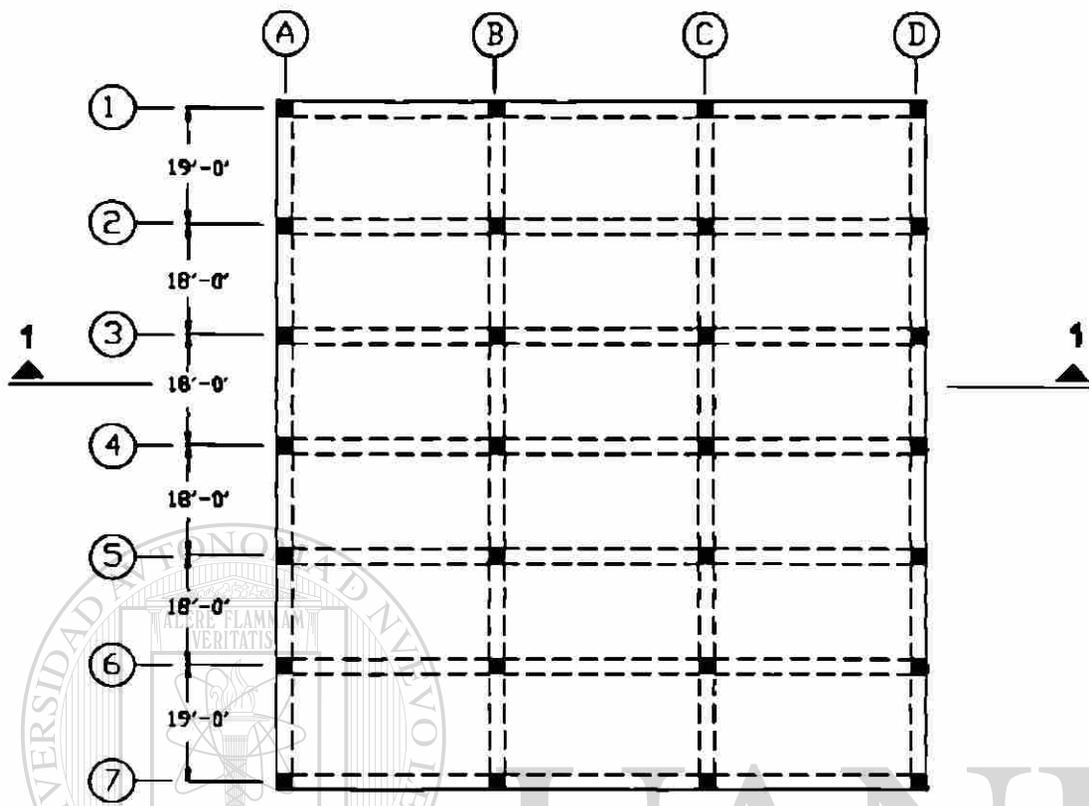
**Columna exterior:** Carga muerta = 176 KLbs.  
Carga viva = 10.5 KLbs de azotea  
104 KLbs de piso

**Columna interior:** Carga muerta = 381 KLbs  
Carga viva = 22.1 KLbs de azotea.  
223 KLbs de piso.

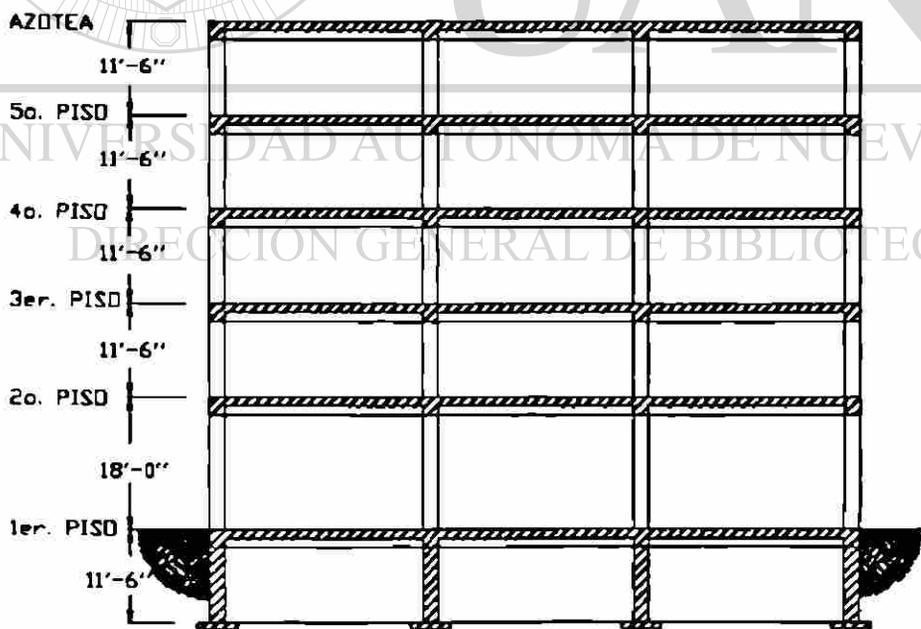
El ASCE 7-95 permite que las cargas vivas sean reducidas en función del área de influencia,  $A_i$ , del piso soportado por las columnas.

Las cargas de nieve no son reducidas. Para una columna, el área de influencia es cuatro veces el área tributaria de la columna. Entonces  $A_i$  es:

$$A_i = 4 (18 \text{ pies}) (30.25/2 \text{ pies}) = 1089 \text{ pie}^2 \text{ por piso} \times 4 \text{ pisos} = 4356 \text{ pie}^2$$



(a) PLANTA



(b) SECCION 1-1

MARCO CON DESPLAZAMIENTO.

La carga viva debida a el uso y ocupación puede ser multiplicada por:

$$L / L_0 = 0.25 + 15/\sqrt{A_i} = 0.477$$

pero menor de 0.50 para columnas soportando un piso, no menor de 0.40 para columnas soportando dos o mas pisos. Para la columna interior el área de influencia es  $A_i = 4 (18 \text{ pies}) (30.12 \text{ pies}) = 4 \text{ pies} = 8676 \text{ pie}^2$  y  $L/L_0 = 0.411$ . Entonces las cargas vivas reducidas y cargas axiales factorizadas en las columnas del primer piso son:

Columna exterior: Carga viva reducida =  $10.5 + 0.477 \times 104 = 60.1 \text{ KLbs}$   
Carga factorizada =  $1.4 \times 176 + 1.7 \times 60.1 = 349 \text{ KLbs}$ .

Columna interior: Carga viva reducida =  $22.1 + 0.411 \times 223 = 113.8 \text{ KLbs}$   
Carga factorizada =  $1.4 \times 381 + 1.7 \times 113.8 = 727 \text{ KLbs}$ .

Para la columna exterior,  $\rho_t = 0.015$

$$A_g (\text{aprox}) \geq \frac{P_u}{0.45(f'_c + \rho_t f_y)} = \frac{349}{0.45(4 + 0.015 \times 60)} = 158 \text{ pulg}^2$$

$$b = h = \sqrt{158} = 12.6 \text{ pulg.}$$

Se propondrá una columna de 18 x 18 pulg. mayor que 12.6 pulg para considerar esbeltez y momentos por viento. Para la columna interior,  $A_g (\text{tanteo}) = 330 \text{ pulg}^2$  ó 18.2 pulg x 18.2 pulg. Se propone también 18 x 18 pulg.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



### Combinaciones de cargas factorizadas

Serán consideradas tres combinaciones :

**Caso 1:** Cargas de gravedad y viento,

$$V = 0.75 ( 1.4D + 1.7L \pm 1.7W)$$

$$= 1.05D + 1.275L \pm 1.275W) \text{ viento de norte - sur.}$$

**Caso 2:** Gravedad + viento,  $V = 0.9D \pm 1.3W$ .

**Caso 3:** Gravedad solamente,  $V = 1.4D + 1.7L$

Como se trata de un marco simétrico, las cargas de gravedad no causan un desplazamiento apreciable. Entonces las cargas viva y muerta causarán los momentos  $M_{ns}$  y las cargas de viento causarán los momentos  $M_s$ .

$$\begin{aligned} \text{CARGA CASO 1: } U &= 0.75 ( 1.4D + 1.7L + 1.7W) \\ &= 1.05D + 1.275L + 1.275W \end{aligned}$$

2.- Tiene el marco desplazamiento o no?

El ACI Sec. 10.11.4 define que un piso de un marco no se desplaza si:

$$Q = \frac{\Sigma P_u \Delta_0}{V_u l_c} \leq 0.05 \quad (\text{ACI Ec. 10-7})$$

donde, para el primer piso,  $\Sigma P_u$  = Carga total reducida factorizada para las 28 columnas del piso = 10,565 KLbs.

$$\Delta_0 = 0.429 \text{ pulg. (de Análisis Elástico de primer orden)}$$

$$V_u = \text{Cortante total factorizado en el piso de los siete marcos} = 188 \text{ KLbs.}$$

$$\begin{aligned} l_c &= \text{Altura del piso centro a centro de juntas.} \\ &= 18 \text{ pies} \times 12 = 216 \text{ pulg.} \end{aligned}$$

$$Q = \frac{10,565 \times 0.429}{188 \times 216} = 0.112$$

Entonces, el primer piso del marco se desplaza.

Por lo que debemos tratar el marco completo como un marco con desplazamiento.

3.- Son las columnas esbeltas?

Para el ACI Sec. 10.11.4.2 una columna de un marco no arriostrado es esbelta si la esbeltez  $kl/\sqrt{r} \geq 22$ . Sin embargo,  $k$  no se conoce en este paso.  $k$  normalmente no será menor de 1.2, usaremos este valor para revisar. Para las columnas debajo del segundo piso.

$$l_u = 18.0 \text{ pies} - 2.5 \text{ pies} = 15.5 \times 12 = 186 \text{ pulg.}$$

Para el ACI Sec. 10.11.3,  $r = 0.3h = 0.3 \times 18$

$$\frac{kl_y}{r} = \frac{1.2 \times 186}{0.3 \times 18} = 41.3$$

Entonces, las columnas son esbeltas.

4.- Cargas axiales factorizadas  $P_u$  y los momentos  $M_{ns}$  de Análisis de marco de primer orden.

Para las columnas del piso principal los valores son:

	Columnas Exteriores	Columnas Internas
Carga axial factorizada, $P_u$ (KLbs) 1.05 Carga muerta	184.8	399.6
1.275 Carga viva reducida	88.5	144.8
Momentos Factorizados $M_{ns}$ (KLbs/pie)		
Arriba	-103.1	12.61
Abajo	-18.5	16.49

Los momentos  $M_s$  serán calculados por análisis de segundo orden en el paso 5. Las cargas axiales vivas se han reducido en función del área de influencia, pero no los momentos  $M_{ns}$  por carga viva. Estos momentos se obtienen con la carga de las vigas y losas en un piso y  $L/L_0$  para las vigas.

5.- Cálculo de  $\delta_s M_s$  y  $M_c$  usando análisis de Segundo orden:

Los momentos  $\delta_s M_s$  se obtienen directamente de análisis de segundo orden para las cargas que causan desplazamiento apreciable. Normalmente se usa un programa comercial de análisis de segundo orden. Para ilustrar este proceso, se usará un análisis iterativo P- $\Delta$ .

(a) Cálculo de  $\Sigma P_u$ ,  $\Sigma P_u \Delta_0 / l_c$ , y fuerzas de desplazamiento.

La carga total en las columnas soportando el segundo piso es 10,565 KLbs. Para las columnas que soportan el tercer piso,  $\Sigma P_u = 8,589$  KLbs.

Las deflexiones horizontales del primero, segundo y tercer pisos, respectivamente, son 0 pulg., 0.429 pulg., y 0.556 pulg.

Los cortantes  $P_u \Delta_0 / l_c$  son:

$$\text{Primer piso: } \frac{\Sigma P_u \Delta_0}{l} = \frac{10,565 (0.429-0)}{18 \times 12}$$

$$= 20.98 \text{ KLbs.}$$

$$\text{Segundo piso: } \frac{\Sigma P_u \Delta_0}{l} = \frac{8589 (0.556 - 0.429)}{11.5 \times 12}$$

$$= 7.90 \text{ KLbs.}$$

Fuerza de desplazamiento para el segundo nivel =  $22.64 - 7.90 = 13.08 \text{ KLbs.}$

El cálculo de la fuerza de desplazamiento para el edificio completo se puede tabular como sigue:

PISO	NIVEL	$\Sigma p_u$ (KLbs)	$\Delta$ DE PISO (Pulg)	$\Delta$ NIVEL (Pulg)	$\frac{\Sigma P_u \Delta_0}{l_c}$	FUERZA
Azotea	5to.	2,047	0.721	0.024	0.356	0.356
5to.	4°	4,461	0.697	0.055	1.778	1.422
4°	3°	6,544	0.642	0.086	4.078	2.300
3°	2°	8,589	0.556	0.127	7.904	3.826
2°	1°	10,565	0.429	0.429	20.98	13.076
Mezanine						

## UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

Este marco se re-analiza ahora para 1.275W más las fuerzas de desplazamiento. Las cargas de viento no factorizadas en cada piso son: azotea, 25.6 KLbs; 3°, 4° y 5° pisos, 37.9 KLbs cada uno; y segundo piso, 48.7 KLbs.

Las fuerzas totales de viento factorizadas en cada piso son:

$$\text{Azotea: } 1.275 \times 25.6 + 0.356 = 33.0 \text{ KLbs}$$

$$5^\circ \text{ piso: } 1.275 \times 37.9 + 1.422 = 49.7 \text{ KLbs.}$$

$$4^\circ \text{ piso: } 1.275 \times 37.9 + 2.300 = 50.6 \text{ KLbs.}$$

$$3^\circ \text{ piso: } 1.275 \times 37.9 + 3.826 = 52.1 \text{ KLbs}$$

$$2^\circ \text{ piso: } 1.275 \times 48.7 + 13.076 = 75.2 \text{ KLbs.}$$

Estas cargas son resistidas por siete marcos en la dirección norte-sur.

**(b) Revisión de convergencia para el segundo ciclo.**

Las deflexiones para los dos ciclos de interacción son:

	$\Delta$ - Primer ciclo (pulg)	$\Delta$ - Segundo ciclo (pulg)	2°/1°
Azotea	0.721	0.769	1.07
2° piso	0.429	0.466	1.09

Esta claro que no convergen.

**(c) Cálculo de la fuerza de desplazamiento y cargas basado en las deflexiones para el 2° ciclo.**

PISO	NIVEL	$\Sigma P_u$ (KLbs)	$\Delta$ de piso	$\Delta$ de nivel	$\frac{\Sigma P_u \Delta_0}{l_c}$	Fuerza desplazamiento
Azotea	5°	2,047	0.769	0.025	0.371	0.371
5°	4°	4,461	0.744	0.055	1.778	1.407
4°	3°	6,544	0.689	0.089	4.220	2.442
3°	2°	8,589	0.600	0.134	8.340	4.120
2°	1°	10,565	0.466	0.466	22.79	14.45
Mezzanine (Losa de sótano)						

Re-analizar la estructura para las siguientes cargas horizontales:

Azotea:  $1.275 \times 25.6 + 0.371 = 33.0$  KLbs.

5° Piso:  $1.275 \times 37.9 + 1.407 = 49.7$  KLbs.

4° Piso:  $1.275 \times 37.9 + 2.442 = 50.8$  KLbs.

3° Piso:  $1.275 \times 37.9 + 4.120 = 52.4$  KLbs.

2° Piso :  $1.275 \times 48.7 + 14.45 = 76.5$  KLbs.

**(d) Revisión de convergencia para el tercer ciclo.**

	$\Delta$ - 2° ciclo (pulg)	$\Delta$ - 3° ciclo (pulg)	3°/2°
Azotea	0.769	0.773	1.005
2° Piso	0.466	0.469	1.006

Este tiene una convergencia adecuada.

(e) Calcular  $M_1$  y  $M_2$ . Los momentos en los extremos de la columna para el tercer ciclo por iteración son:

Columna exterior - 1er. nivel: Para el tercer ciclo de el análisis de segundo orden:

Superior:  $\delta_s M_s = 73.9$  KLbs-pie.

Inferior: 79.5 KLbs-pie

De las ecuaciones 10-16 y 10-17 del ACI, con  $M_{ns}$  del paso 4:

$$M_{\text{extremo}} = M_{ns} + \delta_s M_s$$

Como el viento se considera de norte a sur se tomará como:

$$M_{\text{extremo}} = M_{ns} + \delta_s M_s$$

Superior:  $M_{\text{sup}} = -103.1 - 73.9 = -177$  KLbs-pie= $M_1$

Inferior:  $M_{\text{inf}} = -108.5 - 79.5 = -188$  KLbs-pie= $M_2$ .

Columnas interiores: 1er. Nivel

Superior:  $\delta_s M_s = 91.1$  KLbs-pie

$$M_{\text{sup}} = 12.6 + 91.1 = 103.7 \text{ KLbs-pie} = M_1$$

Inferior:  $\delta_s M_s = 94.1$  KLbs-pie.

$$M_{\text{inf}} = 16.5 + 94.1 = 110.6 \text{ KLbs-pie} = M_2$$

6.- Revisar si el momento máximo esta entre los extremos de la columna.

El ACI Sec. 10.13.5 requiere que se revise si el momento máximo se presenta entre los extremos de la columna y esto ocurre si:

$$l_u / r > 35 / \sqrt{P_u / f'_c A_g} \quad (\text{ACI Ec. 10-20})$$

donde  $l_u = 18 \times 12 - 30 = 186$  pulg. y  $r = 0.30 \times 18 = 5.4$  pulg.

$$l_u / r = \frac{186}{5.4} = 34.4$$

$$f_c = 4 \text{ KLbs/pulg}^2$$

$$A_g = 324 \text{ pulg}^2$$

Para la columna exterior,  $P_u = 273.3 \text{ KLbs}$  y

$$35/\sqrt{P_u/f_c A_g} = 35/\sqrt{273.3/4 \times 324} = 76.2$$

Como  $l_u/r = 34.4$  es menor que 76.2, el máximo momento está en un extremo y es  $M_2 = 188 \text{ KLbs-pie}$ .

Para la columna interior,  $P_u = 544.4 \text{ KLbs}$  y

$$35/\sqrt{544.4/4 \times 324} = 54.0 \text{ como } l_u/r = 34.4$$

el momento máximo en la columna interior es  $M_2 = 110.6 \text{ KLbs-pie}$ .

Si  $l_u/r$  hubiera sido mayor que este límite, sería necesario calcular el momento máximo en la longitud de la columna.

De acuerdo con el ACI Sec. 10.3.5, ecuación 10-10,  $\beta_d$  se define con la combinación de carga considerada, y  $k$  se define de acuerdo al ACI Sec. 10.12.1.

El máximo momento en la columna está dado por:

$$M_c = \delta_{ns} M_2 \quad (\text{ACI Ec. 10-9})$$

donde: 
$$\delta_{ns} = \frac{C_m}{1 - P_u/0.75P_c} \geq 1.0 \quad (\text{ACI Ec. 10-10})$$

$$C_m = 0.6 + 0.4 (M_1/M_2) \geq 0.4$$

$$= 0.6 + 0.4 (91.1/103.7) \geq 0.4$$

$$= 0.249 \geq 0.4$$

$$C_m = 0.4$$

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(kl_u)^2} \quad (\text{ACI Ec. 10-11})$$

$$EI = \frac{0.40 E_c I_g}{1 + \beta_d} \quad (\text{ACI Ec. 10-13})$$

Este es un marco no arriostrado y de acuerdo a la definición (b) para  $\beta_d$  en ACI Sec. 10.0.

$\beta_d = \frac{\text{Cortante máximo factorizado - sostenido en el piso.}}{\text{Cortante total factorizado en el piso.}}$

donde el cortante es debido a las cargas de viento aplicadas rápidamente y el cortante sostenido es entonces cero, dando:  $\beta_d = 0$

$$\text{y } EI = \frac{0.40 \times (57,000 \sqrt{4000}) \times 18^4 / 12}{1 + 0.0}$$

$$= 12.61 \times 10^9 \text{ Lb-pulg}^2$$

El ACI Sec. 10.13.5 dice que k puede determinarse de acuerdo al ACI Sec. 10.12.1 el cuál da  $k \leq 1.0$ . Podemos considerar  $k = 1.0$  como un primer tanteo. Si  $\delta_{ns} > 1.0$  repetimos el cálculo.

$$P_c = \frac{\pi^2 \times 12.61 \times 10^6 \text{ Lbs-pulg}^2}{(1.0 \times 186 \text{ pulg})^2} = 3,597 \text{ KLbs.}$$

$$\delta_{ns} = \frac{1.40}{1 - 544.4 / 0.75 \times 3597} \geq 1.0$$

$$= 0.501 \geq 1.0$$

$\delta_{ns} = 1.0$ , el máximo momento en la columna es  $M_2 = 103.7 \text{ KLBbs-pie}$ .

### Resumen para combinación de carga del Caso 1.

Columnas exteriores:  $P_u = 273 \text{ KLbs}$ ,  $M_c = 188 \text{ KLbs-pie}$

Columnas interiores:  $P_u = 544 \text{ KLbs}$ ,  $M_c = 103.7 \text{ KLbs-pie}$

La sección transversal de la columna se definirá cuando se revisen las tres combinaciones de carga.

**Caso 2:**  $U = 0.9D \pm 1.3W$

Los pasos 4, 5 y 6 serán repetidos.

4.- Cálculo de las cargas axiales factorizadas  $P_u$  y los momentos  $M_{ns}$  por análisis de primer orden del marco.

	Cols. exteriores	Cols. Interiores
Carga axial factorizada, $P_u$ (KLbs) 0.90D	158.4	342.5
Momentos por carga factorizada (KLbs-pie)		
Superior	-47.0	5.57
Inferior	-49.4	7.37

5.- Cálculo de  $\delta_s M_s$  y  $M_c$  usando análisis de segundo orden.

(a) Cálculo de  $\Sigma P_u$ ,  $\Sigma P_u \Delta_0 / l_c$ , y fuerzas de desplazamiento.

(b)

Piso	Entrepiso	$\Sigma P_u$ (KLbs)	$\Delta$ piso (pulg)	$\Delta$ Entrepiso (pulg)	$\frac{\Sigma P_u \Delta_0}{l_c}$	Fuerza desplazante
Azotea	5°	1384	0.735	0.025	0.251	0.251
5°	4°	2588	0.710	0.055	1.031	0.780
4°	3°	3884	0.655	0.088	2.477	1.446
3°	2°	5178	0.567	0.129	4.840	2.363
2°	1°	6472	0.438	0.438	13.12	8.280®
1°			0.00			

Las fuerzas de viento totales factorizadas más las fuerzas de desplazamiento en cada piso son:

Azotea:  $1.3 \times 25.6 + 0.251 = 33.5$  KLbs.

5° Piso:  $1.3 \times 37.9 + 0.780 = 50.1$  KLbs.

4° Piso:  $1.3 \times 37.9 + 1.446 = 50.7$  KLbs.

3° Piso:  $1.3 \times 37.9 + 2.363 = 51.6$  KLbs.

2° Piso:  $1.3 \times 48.7 + 8.280 = 71.6$  KLbs.

Estas cargas son resistidas por siete marcos en la dirección norte - sur. El marco es ahora re-analizado para estas fuerzas.

(b) Revisar convergencia para el segundo ciclo.

Las deflexiones para los dos ciclos de iteración son:

	$\Delta$ -Primer ciclo (pulg)	$\Delta$ -Segundo ciclo (pulg)	2°/1°
Azotea	0.735	0.765	1.04
2° Piso	0.438	0.461	1.05

Esto no converge.

(c) Revisar convergencia para el tercer ciclo.

Las deflexiones convergen después del tercer ciclo.

(d) Cálculo de  $M_1$  y  $M_2$ :

Los momentos en los extremos de las columnas para el tercer ciclo de iteración son:

Columnas exteriores. Primer piso:

Superior  $\delta_s M_s = 72.6$  KLbs-pie.

Inferior = 78.2 KLbs-pie

$M_{\text{extremo}} = M_{ns} \pm \delta_s M_s$

Superior:  $M_{\text{extremo}} = -47.0 - 72.6 = -120$  KLbs-pie =  $M_1$ .

Inferior:  $M_{\text{extremo}} = -49.4 - 78.2 = -128$  KLbs-pie =  $M_2$ .

Columnas interiores. 1er Piso:

Superior:  $\delta_s M_s = 89.7$  KLbs-pie

$M_{\text{sup}} = 5.57 + 89.7 = 95.3$  KLbs-pie =  $M_1$ .

Inferior:  $\delta_s M_s = 92.6$  KLbs - pie.

$M_{\text{inf}} = 7.37 + 92.6 = 100$  KLbs-pie =  $M_2$ .

6.- Revisar si el momento máximo está entre los extremos de la columna.

Por la revisión hecha para la combinación de carga del Caso 1, el cual tiene un valor mayor de  $P_u$  el momento máximo está en un extremo de la columna, para este caso 2, también.

### Resumen para carga del Caso 2:

Columnas exteriores:  $P_u = 158.4$  KLbs.  $M_2 = 128$  KLbs-pie.

Columnas interiores:  $P_u = 342.5$  KLbs  $M_2 = 100$  KLbs-pie.

**Caso 3:**  $U = 1.4D + 1.7L$ .

Como este caso no incluye cargas laterales, las columnas serán diseñadas para  $P_u$  y  $M_2$  para esta combinación de carga. Además, esta combinación se usará para revisar el desplazamiento del marco para cargas de gravedad ya que implica a las mayores (cargas de gravedad). El ACI Sec. 10.13.6 presenta tres procedimientos para revisar la tendencia al desplazamiento lateral, dependiendo del método usado para calcular  $\delta_s M_s$ . Cuando  $\delta_s M_s$  ha sido calculado usando un análisis de segundo orden, el ACI Sec. 10.13.6 (a) requiere que:

Deflexiones laterales de segundo orden  $\leq 2.5$

Deflexiones laterales de primer orden

Cuando se consideran para este cálculo las cargas de gravedad  $1.4D + 1.7L$  más cualquier carga lateral arbitraria.

En este cálculo se toma la carga lateral como  $1.275W$ .

El ACI Sec. 10.3.6 especifica que la rigidez del miembro se tome como  $EI/(1+\beta_d)$  donde  $EI$  está dado por ACI Sec. 10.11.1 en donde, se revisa el desplazamiento lateral para las cargas de gravedad, con:

$$\beta_d = \frac{\text{Máxima carga axial factorizada sostenida}}{\text{Carga axial total factorizada}}$$

[ver ACI Sec. 10.13.6 o definición (c) en ACI Sec. 10.1]

Porque el factor de reducción de carga viva cambia de un piso a otro,  $\beta_d$  también cambia de un piso a otro.

Para las columnas del primer piso:

Carga total axial sostenida en todas las columnas del primer piso= 10,400 KLbs.

Carga total factorizada en todas las columnas del primer piso = 14,420 KLbs.

$$\beta_d = \frac{10,400}{14,420} = 0.721$$

Entonces todas las rigideces de los miembros serán divididas entre  $(1+0.721) = (1+\beta_d)$ . Esto dará deflexiones laterales que serán 1.721 veces las calculadas para una carga de 1.275W. Por esto, los efectos de segundo orden serán mayores.

4.- Cálculo de las cargas axiales factorizadas  $P_u$  y los momentos  $M_{rs}$  para análisis de marco de primer orden.

	Columnas Exteriores	Columnas Interiores
Carga axial factorizada, $P_u$ (klbs): 1.4D	246.4	533
1.7 Carga Viva Reducida	118.0	193
Momentos Factorizados, $M_{rs}$ (KLbs-pie)		
Superior	-137.5	16.81
Inferior	-144.6	21.99

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

5.- Cálculo de  $\delta_s M_s$  y  $M_c$  usando análisis de segundo orden.

(a) Cálculo de  $\Sigma P_u$ ,  $\Sigma P_u \Delta_0 / l_c$ , y fuerzas de desplazamiento.

Piso	Entrepiso	$\Sigma P_u$ (KLbs)	$\Delta$ de piso (pulg)	$\Delta$ de entrepiso (pulg)	$\frac{\Sigma P_u \Delta_0}{l_c}$	Fuerza de desplazamiento
Azotea	5°	2,729	1.241	0.041	0.811	0.81
5°	4°	5,948	1.200	0.095	4.095	3.28
4°	3°	8,725	1.105	0.148	9.357	5.26
3°	2°	11,426	0.957	0.219	18.133	8.78
2°	1°	14,420	0.738	0.738	49.268	31.14
Principal			0.00			

Las fuerzas de viento totales factorizadas más las fuerzas de desplazamiento en cada piso son:

Azotea:  $1.275 \times 25.6 + 0.81 = 33.5$  KLbs.

5° Piso:  $1.275 \times 37.9 + 3.28 = 51.6$  KLbs.

4° Piso:  $1.275 \times 37.9 + 5.26 = 53.6$  KLbs.

3° Piso:  $1.275 \times 37.9 + 8.78 = 57.1$  KLbs.

2° Piso:  $1.275 \times 48.7 + 31.14 = 93.2$  KLbs.

Estas cargas son resistidas por siete marcos en la dirección norte - sur. El marco es analizado para estas cargas usando los valores reducidos de EI.

**(b) Revisión de convergencia para el segundo ciclo.**

Las deflexiones para los dos ciclos de iteración son:

	$\Delta$ - Primer ciclo (pulg)	$\Delta$ - Segundo ciclo (pulg)	2°/1°
Azotea	1.241	1.435	1.16
2° Piso	0.738	0.887	1.20

Se ve claramente que no converge.

**(c) Tercera Iteración.**

Las deflexiones para la segunda y tercera iteración son:

	$\Delta$ -Segundo ciclo (pulg)	$\Delta$ -tercer ciclo (pulg)	3°/2°
Azotea	1.435	1.469	1.02
2° Piso	0.887	0.917	1.03

Consideramos que esta es una convergencia adecuada.

**(d) Revisar si el pandeo lateral ocurre por cargas de gravedad.**

La relación de las deflexiones laterales de primer orden a las de segundo orden es  $0.917/0.738 = 1.24$  en el segundo piso. Como esta es menor de 2.5, el marco no se desplaza por pandeo por cargas de gravedad.

No es necesario considerar los momentos del análisis de segundo orden por que este no representa un cargado real. Sin embargo, las columnas se diseñaran para las cargas axiales y momentos de primer orden  $M_{ns}$  debidos a

$$U = 1.4D + 1.7L \text{ como se da en el paso 4.}$$

6.- Revisar si el momento máximo se presenta entre los extremos de la columna. Según ACI Sec. 10.13.5, los momentos máximos excederán a los de los extremos si:

$$l_u/r > 35/\sqrt{P_u/f_c A_g}$$

Para el primer piso:  $l_u/r = 216 - 30/0.3 \times 18 = 34.4$

Para una columna interior :  $35/\sqrt{P_u/f_c A_g} = 35/\sqrt{726/4 \times 324} = 46.8$

Como 34.4 es menor que 46.8, el momento máximo está en el extremo de la columna.

7.- Revisión de momento mínimo.

El Código no especifica momento mínimo para el diseño de columnas de un marco con desplazamiento.

Sin embargo, será un criterio conservador diseñarla para el mayor de los momentos calculados y  $M_{2,min}$  dado por la ecuación 10-15 del ACI.

Columnas exteriores:

$$M_{2,min} = P_u (0.6 + 0.03h) = 364 \text{ KLbs } (0.6 + 0.03 \times 18) \text{ pulg.}$$

$$19.8 \text{ KLbs - pie (no gobierna)}$$

Columnas interiores:

$$M_{2,\min} = 726 \text{ KLbs (0.6+0.03x18) pulg.}$$
$$= 69.0 \text{ KLbs-pie (rige)}$$

### Resumen para el caso 3:

Columnas exteriores:  $P_u = 364 \text{ KLbs}$ ,  $M_c = 144.6 \text{ KLbs-pie}$ .

Columnas interiores:  $P_u = 726 \text{ KLbs}$ ,  $M_c = 69.0 \text{ KLbs-pie}$ .

### Resumen de los casos 1, 2 y 3:

Las columnas serán diseñadas para las siguientes combinaciones de carga axial y momento:

Columnas exteriores:

Cargado Caso 1:  $P_u = 273 \text{ KLbs}$ ,  $M_c = 188 \text{ KLbs-pie}$ .

Cargado Caso 2:  $P_u = 158.4 \text{ KLbs}$ ,  $M_c = 128 \text{ KLbs-pie}$ .

Cargado Caso 3:  $P_u = 364 \text{ KLbs}$ ,  $M_c = 144.6 \text{ KLbs-pie}$

Columnas interiores:

Cargado Caso 1:  $P_u = 544 \text{ KLbs}$ ,  $M_c = 103.7 \text{ KLbs-pie}$ .

Cargado Caso 2:  $P_u = 342 \text{ KLbs}$ ,  $M_c = 100.0 \text{ KLbs-pie}$ .

Cargado Caso 3:  $P_u = 726 \text{ KLbs}$ ,  $M_c = 69.0 \text{ KLbs-pie}$ .

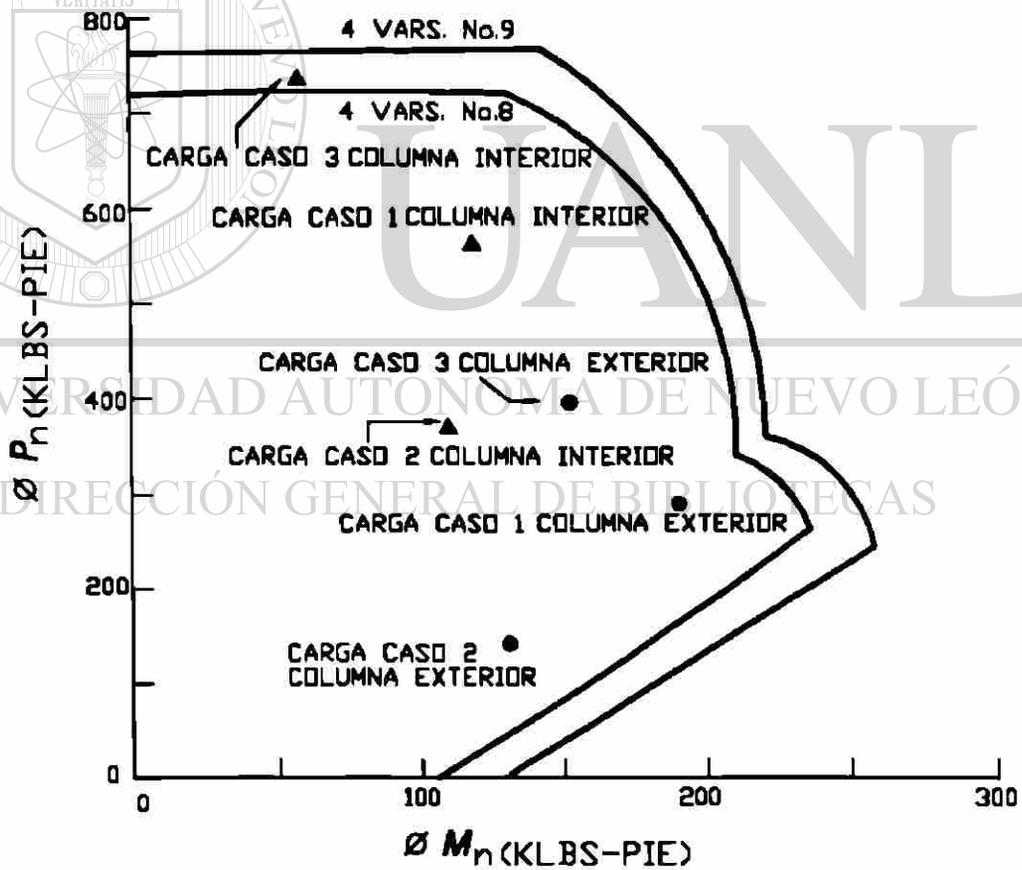
### 8.- Selección de refuerzo.

En la siguiente figura se muestran los diagramas de interacción para dos columnas cuadradas de 18x18 pulg con cuatro varillas #8 y cuatro varillas #9.

Estas columnas satisfacen los requisitos de refuerzo mínimo del ACI Sec. 10.9.1. La reforzada con 4 Varillas 38 satisface las tres combinaciones de carga para columna exterior y la reforzada con 4 varillas #9 para columna interior. Así como también satisfacen la Sec. 10.3.5.2 del ACI, por lo tanto:

Columnas exteriores: Usar columnas de 18x18 pulg. con 4 varillas #8.

Columnas interiores: Usar columnas de 18x18 pulg. con 4 varillas #9.



DIAGRAMAS DE INTERACCION PARA COLUMNAS DEL EJEMPLO.

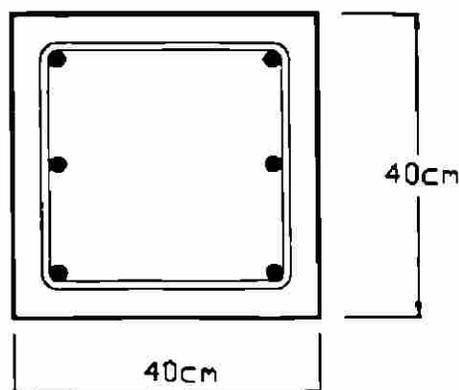
## 9.5.- PROBLEMAS.

- 9.5.1.- Una columna articulada de 5.50m de altura libre soporta una carga muerta no factorizada de 45 ton y una carga viva no factorizada de 27 ton. Estas cargas son aplicadas a una excentricidad de 5 cm inferior y 10 cm superior. Ambas excentricidades del mismo lado de la línea de centros de la columna. Diseñar una columna con estribos con  $f_c = 210 \text{ kg/cm}^2$  y  $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$ .
- 9.5.2.- Repartir el problema anterior con una excentricidad a la derecha y otra a la izquierda de la línea o eje centroidal de la columna.
- 9.5.3.- La columna de 40 x 40 cm debe extenderse desde nivel de zapata hasta el segundo piso de un marco arriostrado con una longitud no apoyada de 6.25 m. Los requisitos de exposición exterior exigen un recubrimiento libre de 50 cm para el acero más extremo. El análisis indica que para la condición más crítica de carga se generan las siguientes cargas de servicio :

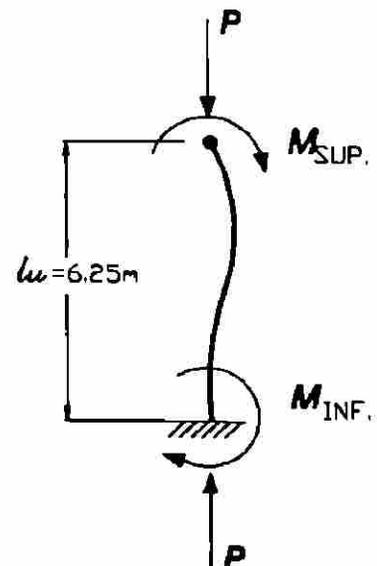
(a) Cargas muertas,  $P = 67 \text{ ton}$ ,  $M_{\text{sup}} = 4 \text{ ton-m}$ ,  $M_{\text{inf}} = 2 \text{ ton-m}$ .

(b) Cargas vivas,  $P = 40 \text{ ton}$ ,  $M_{\text{sup}} = 7 \text{ ton-m}$ ,  $M_{\text{inf}} = 3.5 \text{ ton-m}$ , la columna se flexiona en curvatura doble como se muestra.

El factor  $k$  de longitud efectiva determinado a partir de los cálculos preliminares es 0.90,  $f_c = 280 \text{ kg/cm}^2$  y  $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$ . Por el método de amplificación de momentos del Código ACI, determine si la columna es adecuada para resistir estas cargas.



6 VARILLAS #10  
ESTRIBOS #3  
REC. LIBRE 5cm



9.5.4.-

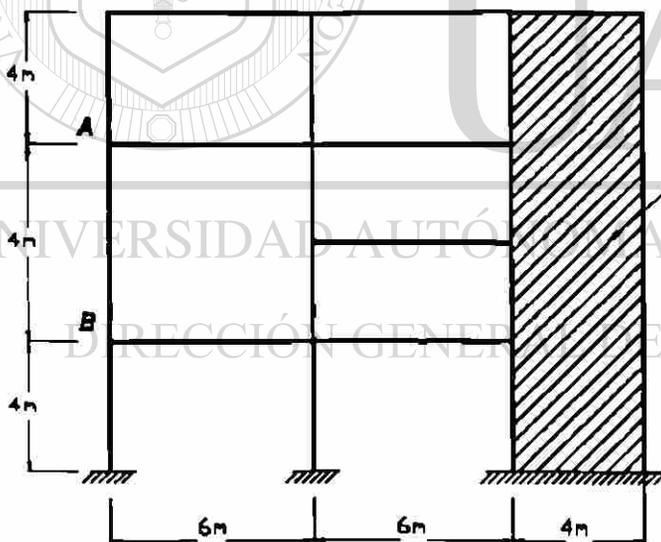
La estructura mostrada tiene columnas esbeltas del lado izquierdo. Esta totalmente arriostrada por muros estructurales a la derecha. Todas las columnas son de 40 x 40 cm como se muestra en el inciso (b) y las vigas son de 45 cm de peralte por 60 cm de ancho con una losa monolítica de piso de 15 cm como se muestra en el inciso (c). Los cálculos preliminares realizados exigen que la colocación del refuerzo sea como se muestra y para la viga es  $A_s = 38.7 \text{ cm}^2$  para la flexión positiva y negativa, con un peralte efectivo de 30 cm. Del análisis para las diferentes combinaciones de carga resulta que para la columna AB, flexionada en curvatura simple los siguientes efectos de servicio:

Por carga muerta :  $P = 62.0 \text{ ton}$ ,  $M_{\text{sup}} = 91.0 \text{ ton-m}$ ,  $M_{\text{inf}} = 60.0 \text{ ton-m}$ .

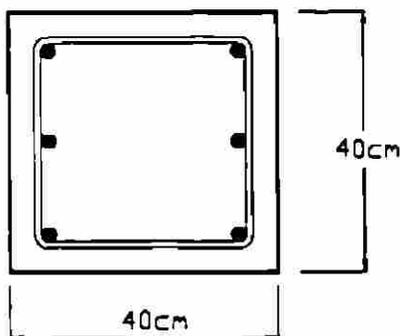
Por carga viva :  $P = 93.0 \text{ ton}$ ,  $M_{\text{sup}} = 60.0 \text{ ton-m}$ ,  $M_{\text{inf}} = 40.0 \text{ ton-m}$

Materiales : concreto  $f_c = 280 \text{ kg/cm}^2$ , acero de refuerzo,  $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$

Revisar si la sección propuesta es satisfactoria para resistir las cargas.

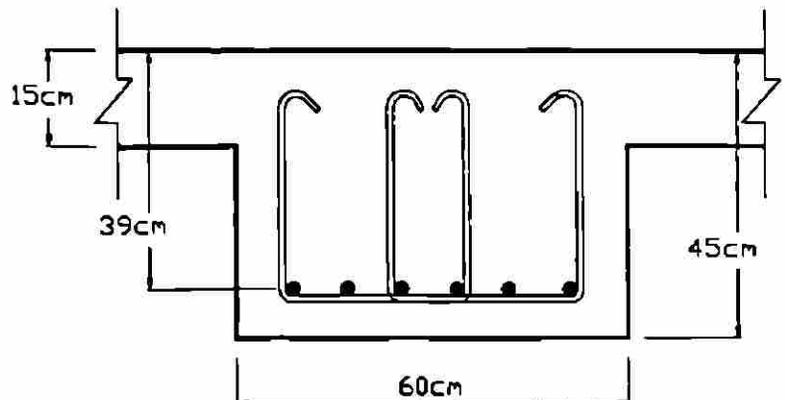


(a)



6 VARILLAS #11  
ESTRIBOS #3  
REC. LIBRE 4cm

(b)



**9.5.5.-** Una columna interior de un marco arriostrado tiene una longitud libre de 6.00 m con los siguientes efectos de servicio :

(a) Por carga muerta :  $P = 80 \text{ ton}$   
 $M_{\text{sup}} = 3.80 \text{ ton-m}$   
 $M_{\text{inf}} = 3.80 \text{ ton-m}$

(b) por carga viva :  $P = 100 \text{ ton}$   
 $M_{\text{sup}} = 15.0 \text{ ton-m}$   
 $M_{\text{inf}} = 15.0 \text{ ton-m}$

La columna se flexiona en curvatura simple.

El factor de restricción en los extremos puede tomarse como  $k= 1.0$ . Diseñar una columna cuadrada con estribos para soportar las cargas anteriores.

Considerar  $\rho = 0.02$ ,  $f_c = 280 \text{ kg/cm}^2$ ,  $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$ .

#### REFERENCIAS :

9.1.- S. P. Timoshenko and J. M. Gere Theory of Elastic Stability. 3 de Mc Graw Hill, New York 1969.

9.2.- J.G. McGregor, Reinforced Concrete, Prentice Hall Englewood Cliffs. N.J.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

# APENDICE A

## AYUDAS DE DISEÑO

Tomadas de Reinforced Concrete (Mechanics and Design) 3<sup>a</sup> Edición.

Por James MacGregor.

Ed. Prentice Hall.

Table A-1	Areas, Weights, and Dimensions of Reinforcing Bars
Table A-1M	Areas, Weights, and Dimensions of Reinforcing Bars—SI Units
Table A-2	Welded-Wire Fabric
Table A-3	Values of $\phi k_n$ and $j$
Table A-3M	Values of $\phi k_n$ and $j$ —SI Units
Table A-4	Ratio of Depth of Rectangular Stress Block for Balanced Failures Limit ( $a_{cc}$ ), and Tension-Controlled Limit ( $a_{tc}$ ) to Effective Depth ( $d$ ) or Depth to Extreme Tension Steel Layer ( $d_s$ )
Table A-4M	Ratio of Depth of Rectangular Stress Block for Balanced Failure ( $a_b$ ), Compression-Controlled Limit ( $a_{cc}$ ), and Tension-Controlled Limit ( $a_{tc}$ ) to Effective Depth ( $d$ ) or Depth to Extreme Tension Steel Layer ( $d_s$ )—SI Units
Table A-5	Steel Ratios at Balanced Condition ( $\rho_b$ ), Compression-Controlled Limit ( $\rho_{cc}$ ), and Tension-Controlled Limit ( $\rho_{tc}$ ) for Rectangular Beams with Tension Reinforcement Only
Table A-5M	Steel Ratios at Balanced Condition ( $\rho_b$ ), Compression-Controlled Limit ( $\rho_{cc}$ ), and Tension-Controlled Limit ( $\rho_{tc}$ ) for Rectangular Beams with Tension Reinforcement Only—SI Units
Table A-6	Minimum Beam Web Widths, $b_w$ , for Various Bar Combinations, Interior Exposure, Minimum Bar Spacing (in.)
Table A-6M	Minimum Beam Web Widths, $b_w$ , for Various Bar Combinations, Interior Exposure, Minimum Bar Spacing—SI Units (mm)
Table A-7	Values of $bd^2$ , 12,000 for Use in Choosing Beam Sizes
Table A-7M	Values of $bd^2/10^6$ for Use in Choosing Beam Sizes—SI Units
Table A-8	Cross-Sectional Areas, $A_n$ , for Various Combinations of Bars (in. <sup>2</sup> )

Table A-8M	Cross-Sectional Areas, $A_s$ , for Various Combinations of Bars—SI Units ( $\text{mm}^2$ )
Table A-9	Areas of Bars in a Section 1 ft Wide ( $\text{in.}^2/\text{ft}$ )
Table A-9M	Areas of Bars in a Section 1 m Wide—SI Units ( $\text{mm}^2/\text{m}$ )
Table A-10	Limiting Values of $d'/a$ for Checking if Compression Steel Yields
Table A-10M	Limiting Values of $d'/a$ for Checking if Compression Steel Yields—SI Units
Table A-11	Basic Tension Development Length Ratio, $\ell_{db}/d_b$ (in./in.)
Table A-11M	Basic Tension Development Length Ratio, $\ell_{db}/d_b$ —SI Units ( $\text{mm}/\text{mm}$ )
Table A-12	Basic Compression Development Length, $\ell_{dbc}$ (in.)
Table A-12M	Basic Compression Development Length, $\ell_{dbc}$ —SI Units (mm)
Table A-13	Basic Development Lengths for Hooked Bars, $\ell_{hb}$ (in.)
Table A-13M	Basic Development Lengths for Hooked Bars, $\ell_{hb}$ —SI Units (mm)
Table A-14	Minimum Thicknesses of Non-Prestressed Beams or One-Way Slabs Unless Deflections Are Computed
Table A-15	Maximum Allowable Spiral Pitch, $s$ (in.), for Circular Spiral Columns, Grade 60 Spirals
Table A-16	Maximum Number of Bars That Can Be Placed in Square Columns with the Same Number of Bars in Each Face, Based on Normal (Radial) Lap Splices, Minimum Bar Spacing
Table A-17	Maximum Number of Bars That Can Be Placed in Circular Columns, Based on Normal (Radial) Lap Splices, Minimum Bar Spacing
Table A-18	Number of Bars Required to Provide a Given Area of Steel
Table A-19	Lap Splice Lengths for Grade 60 Bars in Columns (in.)
Table A-20	Moment Distribution Factors for Slabs without Drop Panels
Table A-21	Moment Distribution Factors for Slabs with Drop Panels, $h_1 = 1.25h$
Table A-22	Moment Distribution Factors for Slabs with Drop Panels, $h_1 = 1.5h$
Table A-23	Stiffness and Carryover Factors for Columns
Fig. A-1	Bending moment envelope for typical interior span (moment coefficients: $-1/11, +1/16, -1/11$ ).
Fig. A-2	Bending moment envelope for exterior span with exterior support built integrally with a column (moment coefficients: $-1/16, +1/14, -1/10$ ).
Fig. A-3	Bending moment envelope for exterior span with exterior support built integrally with a spandrel beam or girder (moment coefficients: $-1/24, +1/14, -1/10$ ).
Fig. A-4	Bending moment envelope for exterior span with discontinuous end unrestrained (moment coefficients: $0, +1/11, -1/10$ ).
Fig. A-5	Standard bar details.
Fig. A-6	Nondimensional interaction diagram for tied columns with bars in two faces, $\gamma = 0.60$ .
Fig. A-7	Nondimensional interaction diagram for tied columns with two bars in two faces, $\gamma = 0.75$ .
Fig. A-8	Nondimensional interaction diagram for tied columns with bars in two faces, $\gamma = 0.90$ .
Fig. A-9	Nondimensional interaction diagram for tied columns with bars in four faces, $\gamma = 0.60$ .
Fig. A-10	Nondimensional interaction diagram for tied columns with bars in four faces, $\gamma = 0.75$ .

- Fig. A-11 Nondimensional interaction diagram for tied columns with bars in four faces,  $\gamma = 0.90$ .
- Fig. A-12 Nondimensional interaction diagram for circular *spiral* columns,  $\gamma = 0.60$ .
- Fig. A-13 Nondimensional interaction diagram for circular *spiral* columns,  $\gamma = 0.75$ .
- Fig. A-14 Nondimensional interaction diagram for circular *spiral* columns,  $\gamma = 0.90$ .

TABLE A-1 Areas, Weights, and Dimensions of Reinforcing Bars

Bar Size Designation No. <sup>b</sup>	Grades	Weight (lb/ft)	Nominal Dimensions <sup>a</sup>	
			Diameter (in.)	Cross-Sectional Area (in. <sup>2</sup> )
3	40, 60	0.376	0.375	0.11
4	40, 60	0.668	0.500	0.20
5	40, 60	1.043	0.625	0.31
6	40, 60, 75	1.502	0.750	0.44
7	60, 75	2.044	0.875	0.60
8	60, 75	2.67	1.000	0.79
9	60, 75	3.40	1.128	1.00
10	60, 75	4.30	1.270	1.27
11	60, 75	5.31	1.410	1.56
14	60, 75	7.65	1.693	2.25
18	60, 75	13.60	2.257	4.00

<sup>a</sup>The nominal dimensions of a deformed bar are equivalent to those of a plain round bar having the same weight per foot as the deformed bar.

<sup>b</sup>Bar numbers are based on the number of eighths of an inch included in the nominal diameter.

TABLE A-1M Areas, Weights, and Dimensions of Reinforcing Bars—SI Units

Bar Size Designation No. <sup>b</sup>	Grades	Nominal Mass (kg/m)	Nominal Dimensions <sup>a</sup>	
			Diameter (mm)	Cross-Sectional Area (mm <sup>2</sup> )
10	300, 400	0.785	11.3	100
15	300, 400	1.570	16.0	200
20	300, 400, 500	2.355	19.5	300
25	400, 500	3.925	25.2	500
30	400, 500	5.495	29.9	700
35	400, 500	7.850	35.7	1000
45	400, 500	11.775	43.7	1500
55	400, 500	19.625	56.4	2500

<sup>a</sup>The nominal dimensions of a deformed bar are equivalent to those of a plain round bar having the same mass per metre as the deformed bar.

<sup>b</sup>Bar designation numbers are the nominal diameter rounded to the nearest 5 or 10 mm.

**TABLE A-2 Welded-Wire Fabric**  
**(a) Wires**

Wire Size Number*		Nominal Diameter (in.)	Area (in. <sup>2</sup> per ft of width for center-to-center spacing, in.)			
			4	6	10	12
W31	D31	0.628	0.93	0.62	0.372	0.31
W11	D11	0.374	0.33	0.22	0.132	0.11
W10	D10	0.356	0.30	0.20	0.12	0.10
W9	D9	0.338	0.27	0.18	0.108	0.09
W8	D8	0.319	0.24	0.16	0.096	0.08
W7	D7	0.298	0.21	0.14	0.084	0.07
W6	D6	0.276	0.18	0.12	0.072	0.06
W5.5		0.264	0.165	0.11	0.066	0.055
W5	D5	0.252	0.15	0.10	0.06	0.05
W4	D4	0.225	0.12	0.08	0.048	0.04
W3.5		0.211	0.105	0.07	0.042	0.035
W2.9		0.192	0.087	0.058	0.035	0.029
W2.5		0.178	0.075	0.05	0.03	0.025
W2.1		0.162	0.063	0.042	0.025	0.021
W1.4		0.135	0.042	0.028	0.017	0.014

\*Wire size number is 100 times the wire area in in.<sup>2</sup>.

**(b) Common Stock Welded-Wire Fabric**

Style Designation*	Steel Area (in. <sup>2</sup> /ft)		Approximate Weight (lb/100 ft <sup>2</sup> )
	Longitudinal	Transverse	
6 × 6—W2.9 × W2.9	0.058	0.058	42
4 × 4—W2.1 × W2.1	0.062	0.062	44
6 × 6—W4 × W4	0.080	0.080	58
4 × 4—W2.9 × W2.9	0.087	0.087	62
6 × 6—W5.5 × W5.5	0.110	0.110	80
4 × 4—W4 × W4	0.120	0.120	85
4 × 4—W5.5 × W5.5	0.165	0.165	119

\*The numbers in the style designation refer to: longitudinal wire spacing × transverse wire spacing — longitudinal wire size × transverse wire size.

TABLE A-3 Values of  $\phi k_n$  and  $j$

$$\omega = \frac{\rho f_y}{f_c} \phi k_n = \phi [f_c \omega (1 - 0.59 \omega)] \quad M_n = \frac{bd^2}{\phi k_n} \quad j = 1 - 0.59 \omega \quad A_s = \frac{M_u}{\phi f_y d}$$

$\rho$	$f_y = 40,000$ psi						$f_y = 60,000$ psi							
	3000 psi		3750 psi		4000 psi		3750 psi		4000 psi		5000 psi		6000 psi	
	$\phi k_n$	$j$	$\phi k_n$	$j$	$\phi k_n$	$j$	$\phi k_n$	$j$	$\phi k_n$	$j$	$\phi k_n$	$j$	$\phi k_n$	$j$
0.0033			171	0.961	173	0.969	173	0.971	174	0.977	175	0.981		
0.004			206	0.953	208	0.962	208	0.965	210	0.972	211	0.976		
0.005	173	0.961	174	0.969	257	0.953	258	0.956	260	0.965	262	0.971		
0.006	206	0.953	208	0.962	301	0.943	307	0.947	310	0.958	313	0.965		
0.007	238	0.945	241	0.956	347	0.934	355	0.938	359	0.950	362	0.959		
0.008	270	0.937	274	0.950	391	0.924	401	0.929	408	0.943	412	0.953		
0.009	301	0.929	306	0.943	434	0.915	447	0.920	455	0.936	460	0.947		
0.010	332	0.921	337	0.937	476	0.906	492	0.912	502	0.929	508	0.941		
0.011	362	0.913	369	0.931	517	0.896	536	0.903	548	0.922	555	0.935		
0.012	391	0.906	399	0.924	556	0.887	579	0.894	593	0.915	602	0.929		
0.013	420	0.898	430	0.918	594	0.877	621	0.885	637	0.908	648	0.923		
0.014	448	0.890	460	0.912	656	0.868	662	0.876	681	0.901	694	0.917		
0.015	476	0.882	489	0.906	695	0.858	702	0.867	724	0.894	738	0.912		
0.016	504	0.894	518	0.899	734	0.849	742	0.858	766	0.887	782	0.906		
0.017	530	0.866	547	0.893			780	0.850	808	0.880	826	0.900		
0.018	556	0.858	575	0.887			817	0.841	848	0.873	869	0.894		
0.019	582	0.851	602	0.880					888	0.865	911	0.888		
0.020	607	0.843	629	0.874					927	0.858	953	0.882		
0.021			656	0.868					965	0.851	993	0.876		
0.022			682	0.862							1030	0.870		
0.023			708	0.855							1070	0.864		
0.024			734	0.849										
0.025			758	0.847										

\*Upper line in each column is below the entry for  $\rho = 0.35\%$ ; lower line is below the entry for  $\rho = 0.5\%$ ; bottom entry is the tension-controlled limit. Larger values of  $\rho$  can be used but require  $\phi$  to be evaluated.

TABLE A-3M Values of  $\phi k_n$  and  $j$ —SI Units\*

$\rho$	$\omega = \frac{\nu_y}{f_c}$		$\phi k = \phi [f_c \omega (1 - 0.59\omega)]$		$\frac{M_u}{\phi k_n} = \frac{bd^2}{10^6}$		$j = 1 - 0.59\omega$		$A_s = \frac{M_u}{\phi f_y d}$				
	$f_y = 300 \text{ MPa}$												
	$f_c = 20 \text{ MPa}$	$f_c = 25 \text{ MPa}$	$\phi k_n$	$j$	$f_c = 20 \text{ MPa}$	$f_c = 25 \text{ MPa}$	$\phi k_n$	$j$	$f_c = 30 \text{ MPa}$	$f_c = 35 \text{ MPa}$	$f_c = 40 \text{ MPa}$		
0.0033				1.14	0.961	1.15	0.969	1.16	0.974	1.16	0.978	1.16	0.981
0.004				1.37	0.953	1.39	0.962	1.39	0.969	1.40	0.973	1.41	0.976
0.005	1.29	0.956	1.30	0.965	1.69	0.941	0.953	1.73	0.961	1.74	0.966	1.75	0.970
0.006	1.53	0.947	1.55	0.958	2.01	0.929	0.943	2.06	0.953	2.07	0.960	2.08	0.965
0.007	1.77	0.938	1.80	0.950	2.31	0.917	0.934	2.38	0.945	2.40	0.953	2.42	0.959
0.008	2.01	0.929	2.04	0.943	2.61	0.906	0.924	2.70	0.937	2.72	0.946	2.74	0.953
0.009	2.24	0.920	2.28	0.936	2.90	0.894	0.915	3.01	0.929	3.04	0.939	3.07	0.947
0.010	2.46	0.911	2.51	0.929	3.18	0.882	0.906	3.32	0.921	3.36	0.933	3.39	0.941
0.011	2.68	0.903	2.74	0.922	3.45	0.870	0.896	3.62	0.913	3.67	0.926	3.70	0.935
0.012	2.90	0.894	2.96	0.915	3.71	0.858	0.887	3.91	0.906	3.97	0.919	4.01	0.929
0.013	3.11	0.885	3.19	0.908	3.96	0.847	0.877	4.20	0.898	4.27	0.912	4.32	0.923
0.014	3.31	0.876	3.41	0.901				4.48	0.890	4.56	0.906	4.62	0.917
0.015	3.51	0.867	3.62	0.894				4.76	0.882	4.85	0.899	4.92	0.911
0.016	3.71	0.858	3.83	0.887				5.04	0.874	5.14	0.892	5.22	0.906
0.017	3.90	0.850	4.04	0.880				5.30	0.866	5.42	0.885	5.51	0.900
0.018	4.09	0.841	4.24	0.873				5.56	0.858	5.69	0.879	5.79	0.894
0.019			4.44	0.865				5.82	0.851	5.96	0.872	6.07	0.888
0.020			4.64	0.858				6.07	0.843	6.23	0.865	6.35	0.882
0.021			4.83	0.851				6.49	0.858	6.62	0.858	6.62	0.876
0.022			5.01	0.844				6.75	0.852	6.89	0.852	6.89	0.870
0.023								7.16		7.16		7.16	0.864
0.024								7.42		7.42		7.42	0.858

\*Upper line in each column is below the entry for  $\rho = 0.35\rho_b$ ; lower line is below the entry for  $\rho = 0.5\rho_b$ ; bottom entry is the tension-controlled limit. Larger values of  $\rho$  can be used but require  $\phi$  to be evaluated.

TABLE A-4 Ratio of Depth of Rectangular Stress Block for Balanced Failure ( $a_b$ ), Compression-Controlled Limit ( $a_{ccl}$ ), and Tension-Controlled Limit ( $a_{ctl}$ ) to Effective Depth ( $d$ ) or Depth to Extreme Tension Steel Layer ( $d_t$ )<sup>a</sup>

$f_y$ (psi)		$f_c$ (psi)			
		Less than or equal to 4000	5000	6000	8000
40,000	$a_b/d, a_{ccl}/d_t$	0.582	0.548	0.514	0.445
	$0.75a_b/d$	0.437	0.411	0.385	0.334
	$a_{ctl}/d_t$	0.319	0.300	0.281	0.244
	$0.50a_b/d$	0.291	0.274	0.257	0.223
	$0.35a_b/d$	0.204	0.192	0.180	0.156
60,000	$a_b/d, a_{ccl}/d_t$	0.503	0.474	0.444	0.385
	$0.75a_b/d$	0.377	0.355	0.333	0.288
	$a_{ctl}/d_t$	0.319	0.300	0.281	0.244
	$0.50a_b/d$	0.252	0.237	0.222	0.192
	$0.35a_b/d$	0.176	0.166	0.155	0.135
	$\beta_1$	0.85	0.80	0.75	0.65

<sup>a</sup> $a_b, d$  from Eq. 4-21; desirable range for beams  $a/d$  from 0.35 to 0.50  $a_b/d$ ;  $a_{ccl}/d_t$  and  $a_{ctl}/d_t$  from Eqs. 4-22 and 4-23. ACI Appendix B requires  $\phi < 0.9$  if  $a/d_t > a_{ctl}/d_t$ .

TABLE A-4M Ratio of Depth of Rectangular Stress Block for Balanced Failure ( $a_b$ ), Compression-Controlled Limit ( $a_{ccl}$ ), and Tension Controlled Limit ( $a_{ctl}$ ) to Effective Depth ( $d$ ) or Depth to Extreme Tension Steel Layer ( $d_t$ )—SI Units<sup>a</sup>

$f_y$ (MPa)		$f_c$ (MPa)			
		Less than or equal to 30	35	40	50
300	$a_b/d, a_{ccl}/d_t$	0.567	0.540	0.513	0.460
	$0.75a_b/d$	0.425	0.405	0.385	0.345
	$a_{ctl}/d_t$	0.319	0.304	0.289	0.259
	$0.50a_b/d$	0.283	0.270	0.256	0.230
	$0.35a_b/d$	0.198	0.189	0.180	0.161
400	$a_b/d, a_{ccl}/d_t$	0.510	0.486	0.462	0.414
	$0.75a_b/d$	0.382	0.364	0.346	0.310
	$a_{ctl}/d_t$	0.319	0.304	0.289	0.259
	$0.50a_b/d$	0.255	0.243	0.231	0.207
	$0.35a_b/d$	0.178	0.170	0.162	0.145
	$\beta_1$	0.85	0.80	0.77	0.69

<sup>a</sup> $a_b, d$  from Eq. 4-21M; desirable range of  $a/d$  for beams from 0.35 to 0.50  $a_b/d$ ;  $a_{ccl}/d_t$  and  $a_{ctl}/d_t$  from Eqs. 4-22M and 4-23. ACI Appendix B requires  $\phi < 0.9$  if  $a/d_t > a_{ctl}/d_t$ .

TABLE A-5 Steel Ratios at Balanced Condition ( $\rho_b$ ), Compression-Controlled Limit ( $\rho_{cc}$ ) and Tension-Controlled Limit ( $\rho_{ct}$ ) for Rectangular Beams with Tension Reinforcement Only\*

$f_y$ (psi)		3000	3750	4000	5000	6000	8000
40,000	$\rho_b, \rho_{cc}$	0.0371	0.0464	0.0495	0.0582	0.0655	0.0703
	0.75 $\rho_b$	0.0278	0.0348	0.0371	0.0437	0.0491	0.0527
	$\rho_{ct}$	0.0203	0.0254	0.0271	0.0319	0.0359	0.0414
	0.50 $\rho_b$	0.0186	0.0232	0.0247	0.0291	0.0328	0.0352
	0.35 $\rho_b$	0.0130	0.0162	0.0173	0.0204	0.0229	0.0246
60,000	$\rho_b, \rho_{cc}$	0.0214	0.0267	0.0285	0.0335	0.0377	0.0405
	0.75 $\rho_b$	0.0161	0.0200	0.0214	0.0251	0.0283	0.0307
	$\rho_{ct}$	0.0135	0.0169	0.0181	0.0213	0.0239	0.0276
	0.50 $\rho_b$	0.0107	0.0134	0.0143	0.0168	0.0189	0.0202
	0.35 $\rho_b$	0.0075	0.0094	0.0100	0.0117	0.0132	0.0142
	$\beta_1$	0.85	0.85	0.85	0.80	0.75	0.65

\* $\rho = A_s/bd, \rho_b$  from Eq. 4-25; desirable steel ratio for beams,  $\rho = 0.35$  to  $0.50\rho_b$ .

TABLE A-5M Steel Ratios at Balanced Condition ( $\rho_b$ ), Compression-Controlled Limit ( $\rho_{ccf}$ ), and Tension-Controlled Limit ( $\rho_{tef}$ ) for Rectangular Beams with Tension Reinforcement Only—SI Units

$f_y$ (MPa)		$f_c$ (MPa)				
		20	25	30	35	40
300	$\rho_b, \rho_{ccf}$	0.0321	0.0401	0.0482	0.0535	0.0582
	$0.75\rho_b$	0.241	0.0301	0.0361	0.0401	0.0436
	$\rho_{tef}$	0.0181	0.0226	0.0271	0.0301	0.0327
	$0.5\rho_b$	0.0160	0.0200	0.0241	0.0267	0.0291
	$0.35\rho_b$	0.0112	0.0140	0.0169	0.0187	0.0204
400	$\rho_b, \rho_{ccf}$	0.0217	0.0271	0.0325	0.0361	0.0393
	$0.75\rho_b$	0.0163	0.0203	0.0244	0.0271	0.0295
	$\rho_{tef}$	0.0136	0.0169	0.0203	0.0226	0.0245
	$0.5\rho_b$	0.0109	0.0135	0.0162	0.0180	0.0196
	$0.35\rho_b$	0.0076	0.0095	0.0114	0.0126	0.0138
	$\beta_1$	0.85	0.85	0.85	0.81	0.77

\* $\rho = A_s/bd$ ,  $\rho_b$  from Eq. 4-25M; desirable  $\rho$  for beams,  $\rho = 0.35$  to  $0.50\rho_b$ ; ACI Appendix B requires  $\phi < 0.9$  for  $\rho > \rho_{ccf}$ .

**TABLE A-6 Minimum Beam Web Widths,  $b_w$ , for Various Bar Combinations, Interior Exposure, Minimum Bar Spacing (in.)<sup>a,b</sup>**

No. of Bars	A		B					C							
	Bar No.	0	5	Bar No.	1	2	3	4	5	Bar No.	1	2	3	4	5
1	4	5.5	13.0	3	7.0	8.5	9.5	11.0	12.5						
2		7.0	14.5		8.5	9.5	11.0	12.5	14.0						
3		8.5	16.0		10.0	11.0	12.5	14.0	15.5						
4		10.0	17.5		11.5	12.5	14.0	15.5	17.0						
5		11.5	19.0		13.0	14.0	15.5	17.0	18.5						
1	5	5.5	13.5	4	7.0	8.5	10.0	11.5	13.0	3	7.0	8.5	9.5	11.0	12.5
2		7.0	15.0		8.5	10.0	11.5	13.0	14.5		8.5	10.0	11.0	12.5	14.0
3		8.5	17.0		10.0	11.5	13.0	14.5	16.0		10.0	11.5	13.0	14.0	15.5
4		10.5	18.5		12.0	13.5	15.0	16.5	18.0		11.5	13.0	14.5	16.0	17.0
5		12.0	20.0		13.5	15.0	16.5	18.0	19.5		13.5	14.5	16.5	17.5	19.0
1	6	5.5	14.0	5	7.0	9.0	10.5	12.0	13.5	4	7.0	8.5	10.0	11.5	13.0
2		7.0	16.0		9.0	10.5	12.0	13.5	15.5		8.5	10.0	11.5	13.0	14.5
3		9.0	17.5		10.5	12.0	14.0	15.5	17.0		10.5	12.0	13.5	15.0	16.5
4		10.5	19.5		12.5	14.0	15.5	17.0	19.0		12.0	13.5	15.0	16.5	18.0
5		12.5	21.0		14.0	15.5	17.5	19.0	20.5		14.0	15.5	17.0	18.5	20.0
1	7	5.5	15.0	6	7.5	9.0	11.0	12.5	14.5	5	7.0	9.0	10.5	12.0	13.5
2		7.5	16.5		9.0	11.0	12.5	14.5	16.0		9.0	10.5	12.0	14.0	15.5
3		9.0	18.5		11.0	12.5	14.5	16.0	18.0		11.0	12.5	14.0	15.5	17.5
4		11.0	20.5		13.0	14.5	16.5	18.0	20.0		12.5	14.5	16.0	17.5	19.0
5		13.0	22.5		14.5	16.5	18.0	20.0	21.5		14.5	16.0	18.0	19.5	21.0
1	8	5.5	15.5	7	7.5	9.5	11.0	13.0	15.0	6	7.5	9.0	11.0	12.5	14.5
2		7.5	17.5		9.5	11.0	13.0	15.0	17.0		9.0	11.0	12.5	14.5	16.0
3		9.5	19.5		11.5	13.0	15.0	17.0	19.0		11.0	13.0	14.5	16.5	18.0
4		11.5	21.5		13.5	15.0	17.0	19.0	21.0		13.0	15.0	16.5	18.5	20.0
5		13.5	23.5		15.5	17.0	19.0	21.0	23.0		15.0	17.0	18.5	20.5	22.0
1	9	5.5	17.0	8	7.5	9.5	11.5	13.5	15.5	7	7.5	9.5	11.5	13.0	15.0
2		8.0	19.0		10.0	12.0	14.0	16.0	18.0		9.5	11.5	13.5	15.5	17.0
3		10.0	21.5		12.0	14.0	16.0	18.0	20.0		12.0	14.0	15.5	17.5	19.5
4		12.5	23.5		14.5	16.5	18.5	20.5	22.5		14.0	16.0	18.0	20.0	21.5
5		14.5	26.0		16.5	18.5	20.5	22.5	24.5		16.5	18.5	20.0	22.0	24.0
1	10	5.5	18.0	9	8.0	10.0	12.5	14.5	17.0	8	8.0	10.0	12.0	14.0	16.0
2		8.0	20.5		10.5	12.5	15.0	17.0	19.5		10.0	12.0	14.0	16.0	18.0
3		10.5	23.5		13.0	15.0	17.5	19.5	22.0		12.5	14.5	16.5	18.5	20.5
4		13.0	26.0		15.5	17.5	20.0	22.0	24.5		15.0	17.0	19.0	21.0	23.0
5		15.5	28.5		18.0	20.0	22.5	24.5	27.0		17.5	19.5	21.5	23.5	25.5
1	11	5.5	19.5	10	8.0	10.5	13.0	15.5	18.0	9	8.0	10.5	12.5	15.0	17.0
2		8.5	22.5		11.0	13.5	16.0	18.5	21.0		10.5	13.0	15.0	17.5	19.5
3		11.0	25.0		13.5	16.0	19.0	21.5	24.0		13.5	15.5	18.0	20.0	22.5
4		14.0	28.0		16.5	19.0	21.5	24.0	26.5		16.0	18.5	20.5	23.0	25.0
5		17.0	31.0		19.5	22.0	24.5	27.0	29.5		19.0	21.5	23.5	26.0	28.0

<sup>a</sup>Clear cover,  $1\frac{1}{2}$  in.; No. 3 double-leg stirrup;  $\frac{3}{4}$  in.-maximum-size aggregate.

<sup>b</sup>This table consists of three basic parts: Part A lists the web widths required for 1 to 5 bars of the sizes given in the left margin of part A. Example: 3 No. 5,  $\min b_w = 8.5$  in. Part A also lists the minimum  $b_w$  for 1 to 5 bars of the size given in the left margin plus 5 bars of the same size. Example: 3 No. 5 plus 5 No. 5,  $\min b_w = 17.0$  in. Part B lists the minimum  $b_w$  of 1 to 5 bars of the size given in the left margin of part A plus 1 to 5 bars of the size listed in the left margin of part B. Example: 3 No. 5 plus 2 No. 4,  $\min b_w = 11.5$  in. Part C is similar to part B.

Source: Based on a table from Ref. 4-11, used with the permission of the American Concrete Institute.

TABLE A 6M Minimum Beam Web Widths,  $b_w$ , for Various Bar Combinations, Interior Exposure, Minimum Bar Spacing—SI Units (mm)<sup>a,b</sup>

No. of Bars	A					B					C						
	Bar No.	0	5	10	15	Bar No.	1	2	3	4	5	Bar No.	1	2	3	4	5
1		140	340				180	210	250	280	340		175	210	245	280	315
2		180	380				220	250	290	320	380		220	255	290	325	360
3	15	220	420	10			260	290	330	360	420	10	265	300	335	370	405
4		260	460				300	330	370	400	460		310	345	380	415	450
5		300	500				340	370	410	440	500		355	390	425	460	495
1		140	365				180	220	260	300	340		180	220	260	300	340
2		185	410				225	265	305	345	385		230	270	310	350	390
3	20	230	455	15			270	310	350	390	430	15	280	320	360	400	440
4		275	500				310	355	395	435	475		330	370	410	450	490
5		320	545				360	400	440	480	520		380	420	460	500	540
1		140	390				185	230	275	320	365		190	240	290	340	390
2		190	440				235	280	325	370	415		250	300	350	400	450
3	25	240	490	20			285	330	375	420	465	20	310	360	410	460	510
4		290	540				335	380	425	470	515		370	420	470	520	570
5		340	590				385	430	475	520	565		430	480	530	580	630
1		140	440				195	250	305	360	415		200	260	320	380	440
2		200	500				255	310	365	420	475		270	330	390	450	510
3	30	260	560	25			315	370	425	480	535	25	340	400	460	520	580
4		320	620				375	430	485	540	595		410	470	530	590	650
5		380	680				435	490	545	600	655		480	540	600	660	720
1		140	490				205	270	335	400	465		200	260	320	380	440
2		210	560				275	340	405	470	535		270	330	390	450	510
3	35	280	630	30			345	410	475	540	605	25	340	400	460	520	580
4		350	700				415	480	545	610	675		410	470	530	590	650
5		420	770				485	550	615	680	745		480	540	600	660	720

<sup>a</sup>Clear cover, 40 mm; No. 10 double leg stirrup; 19 mm maximum size aggregate; spacing based on the diameter of the largest bars.

<sup>b</sup>For directions on how to use this table, see Table A 6, footnote b.

TABLE A-7 Values of  $bd^2/12,000$  for Use in Choosing Beam Sizes

$d$	$\phi M_n = \frac{bd^2}{12,000}$ or $\frac{M_n}{\phi k_n}$ where $\phi k_n$ is from Table A-3		$b$ (in.)															
	11	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	36	48					
5	0.013	0.015	0.017	0.019	0.021	0.023	0.025	0.027	0.033	0.037	0.042	0.046	0.050	0.054	0.058	0.062	0.075	0.100
6	0.018	0.021	0.024	0.027	0.030	0.033	0.036	0.042	0.048	0.054	0.060	0.066	0.072	0.078	0.084	0.090	0.108	0.144
7	0.025	0.029	0.033	0.037	0.041	0.045	0.049	0.057	0.065	0.073	0.082	0.090	0.098	0.106	0.114	0.123	0.147	0.196
8	0.032	0.037	0.043	0.048	0.053	0.059	0.064	0.075	0.085	0.096	0.107	0.117	0.128	0.139	0.149	0.160	0.192	0.256
9	0.041	0.047	0.054	0.061	0.068	0.074	0.081	0.095	0.108	0.122	0.135	0.149	0.162	0.176	0.189	0.203	0.243	0.324
10	0.050	0.058	0.067	0.075	0.083	0.092	0.100	0.117	0.133	0.150	0.167	0.183	0.200	0.217	0.233	0.250	0.300	0.400
11	0.061	0.071	0.081	0.091	0.101	0.111	0.121	0.141	0.161	0.181	0.202	0.222	0.242	0.262	0.282	0.303	0.363	0.484
12	0.072	0.084	0.096	0.108	0.120	0.132	0.144	0.168	0.192	0.216	0.240	0.264	0.288	0.312	0.336	0.360	0.432	0.576
13	0.085	0.099	0.113	0.127	0.141	0.155	0.169	0.197	0.225	0.253	0.282	0.310	0.338	0.366	0.394	0.423	0.507	0.676
14	0.098	0.114	0.131	0.147	0.163	0.180	0.196	0.229	0.261	0.294	0.327	0.359	0.392	0.425	0.457	0.490	0.588	0.784
15	0.113	0.131	0.150	0.169	0.188	0.206	0.225	0.263	0.300	0.338	0.375	0.413	0.450	0.488	0.525	0.563	0.675	0.900
16	0.128	0.149	0.171	0.192	0.213	0.235	0.256	0.299	0.341	0.384	0.427	0.469	0.512	0.555	0.597	0.640	0.768	1.02
18	0.162	0.189	0.216	0.243	0.270	0.297	0.324	0.378	0.432	0.486	0.540	0.594	0.648	0.702	0.756	0.810	0.972	1.30
20	0.200	0.233	0.267	0.300	0.333	0.367	0.400	0.467	0.533	0.600	0.667	0.733	0.800	0.867	0.933	1.00	1.20	1.60
22	0.282	0.327	0.374	0.421	0.468	0.514	0.561	0.565	0.645	0.726	0.807	0.887	0.968	1.05	1.13	1.21	1.45	1.94
24	0.336	0.384	0.432	0.472	0.480	0.528	0.576	0.672	0.768	0.864	0.960	1.06	1.15	1.25	1.34	1.44	1.73	2.30
26	0.451	0.507	0.563	0.607	0.620	0.676	0.726	0.789	0.901	1.01	1.13	1.24	1.35	1.46	1.58	1.69	2.03	2.70
28	0.523	0.588	0.653	0.719	0.749	0.814	0.884	0.915	1.04	1.18	1.31	1.44	1.57	1.70	1.83	1.96	2.35	3.14
30	0.675	0.750	0.825	0.899	0.939	1.02	1.10	1.05	1.20	1.35	1.50	1.65	1.80	1.95	2.10	2.25	2.70	3.60
32	0.768	0.853	0.939	1.02	1.06	1.16	1.25	1.19	1.37	1.54	1.71	1.88	2.05	2.22	2.39	2.56	3.07	4.10
34	0.963	1.06	1.16	1.25	1.28	1.38	1.47	1.35	1.54	1.73	1.93	2.12	2.31	2.50	2.70	2.89	3.47	4.62
36	1.08	1.19	1.30	1.41	1.44	1.54	1.64	1.51	1.73	1.94	2.16	2.38	2.59	2.81	3.02	3.24	3.89	5.18
38	1.32	1.41	1.52	1.63	1.66	1.76	1.86	1.68	1.93	2.17	2.41	2.65	2.89	3.13	3.37	3.61	4.33	5.78
40	1.47	1.60	1.73	1.87	1.90	2.00	2.10	1.87	2.13	2.40	2.67	2.93	3.20	3.47	3.73	4.00	4.80	6.40
45	2.07	2.23	2.36	2.50	2.53	2.66	2.79	2.36	2.70	3.04	3.38	3.71	4.05	4.39	4.73	5.06	6.08	8.10
50	2.50	2.67	2.82	2.97	3.00	3.14	3.28	2.92	3.33	3.75	4.17	4.58	5.00	5.42	5.83	6.25	7.50	10.0
55	3.03	3.20	3.36	3.53	3.56	3.72	3.87	3.53	4.03	4.54	5.04	5.55	6.05	6.55	7.06	7.56	9.07	12.1
60	3.30	3.47	3.64	3.81	3.84	4.01	4.18	4.20	4.80	5.40	6.00	6.60	7.20	7.80	8.40	9.00	10.8	14.4

Source: Based on a Table in Ref. 4-12, used with the permission of the American Concrete Institute.

TABLE A-7M Values of  $bd^2/10^6$  for Use in Choosing Beam Sizes—SI Units

$\phi M_n = bd^2$  or  $M_u = bd^2$  where  $\phi k_n$  is from Table A-3M  
 $\phi k_n = 10^6$  or  $\phi k_n = 10^8$

d (mm)	b (mm)																
	150	175	200	225	250	275	300	350	400	450	500	600	700	800	900	1000	1500
125	2.34	2.73	3.13	3.52	3.91	4.30	4.69	5.47	6.25	7.03	7.81	9.38	10.94	12.50	14.06	15.63	23.44
150	3.38	3.94	4.50	5.06	5.63	6.19	6.75	7.88	9.00	10.13	11.25	13.50	15.75	18.00	20.25	22.50	33.75
175	4.59	5.36	6.13	6.89	7.66	8.42	9.19	10.72	12.25	13.78	15.31	18.38	21.44	24.50	27.56	30.63	45.94
200	6.00	7.00	8.00	9.00	10.00	11.00	12.00	14.00	16.00	18.000	20.00	24.00	28.00	32.00	36.00	40.00	60.00
225	7.59	8.86	10.13	11.39	12.66	13.92	15.19	17.72	20.25	22.78	25.31	30.38	35.44	40.50	45.56	50.63	75.94
250	9.38	10.94	12.50	14.06	15.63	17.19	18.75	21.88	25.00	28.13	31.25	37.50	43.75	50.00	56.25	62.50	93.75
275	11.34	13.23	15.13	17.02	18.91	20.80	22.69	26.47	30.25	34.03	37.81	45.38	52.94	60.50	68.06	75.63	113
300	13.50	15.75	18.00	20.25	22.50	24.75	27.00	31.50	36.00	40.50	45.00	54.00	63.00	72.00	81.00	90.00	135
325	15.84	18.48	21.13	23.77	26.41	29.05	31.69	36.97	42.25	47.53	52.81	63.38	73.94	84.50	95.06	106	158
350	18.38	21.44	24.50	27.56	30.63	33.69	36.75	42.88	49.00	55.13	61.25	73.50	85.75	98.00	110	123	184
375	21.09	24.61	28.13	31.64	35.16	38.67	42.19	49.22	56.25	63.28	70.31	84.38	98.44	113	127	141	211
400	24.00	28.00	32.00	36.00	40.00	44.00	48.00	56.00	64.00	72.00	80.00	96.00	112	128	144	160	240
450	30.38	35.44	40.50	45.56	50.63	55.69	60.75	70.88	81.00	91.13	101	122	142	162	182	203	304
500	37.50	43.75	50.00	56.25	62.50	68.75	75.00	87.50	100	113	125	150	175	200	225	250	375
550	45.38	52.94	60.50	68.06	75.63	83.19	90.75	106	121	136	151	182	212	242	272	303	454
600	54.00	63.00	72.00	81.00	90.00	99.00	108	126	144	162	180	216	252	288	324	360	540
650	63.38	73.94	84.50	95.06	106	116	127	148	169	190	211	254	296	338	380	423	634
700	73.50	85.75	98.00	110	123	135	147	172	196	221	245	294	343	392	441	490	735
800	96.00	112	128	144	160	176	192	224	256	288	320	384	448	512	576	640	960
900	122	142	162	182	203	223	243	284	324	365	405	486	567	648	729	810	1215
1000			200	225	250	275	300	350	400	450	500	600	700	800	900	1000	1500
1200				360	360	396	432	504	576	648	720	864	1008	1152	1296	1440	2160
1400				490	490	539	588	686	784	882	980	1176	1372	1568	1764	1960	2940
1500				563	563	619	675	788	900	1013	1125	1350	1575	1800	2025	2250	3375
2000						1100	1200	1400	1600	1800	2000	2400	2800	3200	3600	4000	6000

TABLE A-8 Cross-Sectional Areas,  $A_s$ , for Various Combinations of Bars (in.<sup>2</sup>)<sup>a</sup>

No. of Bars	A		B					C							
	Bar No.	0	5	Bar No.	1	2	3	4	5	Bar No.	1	2	3	4	5
1		0.20	1.20		0.31	0.42	0.53	0.64	0.75						
2		0.40	1.40		0.51	0.62	0.73	0.84	0.95						
3	4	0.60	1.60	3	0.71	0.82	0.93	1.04	1.15						
4		0.80	1.80		0.91	1.02	1.13	1.24	1.35						
5		1.00	2.00		1.11	1.22	1.33	1.44	1.55						
1		0.31	1.86		0.51	0.71	0.91	1.11	1.31		0.42	0.53	0.64	0.75	0.8
2		0.62	2.17		0.82	1.02	1.22	1.42	1.62		0.73	0.84	0.95	1.06	1.1
3	5	0.93	2.48	4	1.13	1.33	1.53	1.73	1.93	3	1.04	1.15	1.26	1.37	1.4
4		1.24	2.79		1.44	1.64	1.84	2.04	2.24		1.35	1.46	1.57	1.68	1.7
5		1.55	3.10		1.75	1.95	2.15	2.35	2.55		1.66	1.77	1.88	1.99	2.1
1		0.44	2.64		0.75	1.06	1.37	1.68	1.99		0.64	0.84	1.04	1.24	1.4
2		0.88	3.08		1.19	1.50	1.81	2.12	2.43		1.08	1.28	1.48	1.68	1.8
3	6	1.32	3.52	5	1.63	1.94	2.25	2.56	2.87	4	1.52	1.72	1.92	2.12	2.3
4		1.76	3.96		2.07	2.38	2.69	3.00	3.31		1.96	2.16	2.36	2.56	2.7
5		2.20	4.40		2.51	2.82	3.13	3.44	3.75		2.40	2.60	2.80	3.00	3.2
1		0.60	3.60		1.04	1.48	1.92	2.36	2.80		0.91	1.22	1.53	1.84	2.1
2		1.20	4.20		1.64	2.08	2.52	2.96	3.40		1.51	1.82	2.13	2.44	2.7
3	7	1.80	4.80	6	2.24	2.68	3.12	3.56	4.00	5	2.11	2.42	2.73	3.04	3.3
4		2.40	5.40		2.84	3.28	3.72	4.16	4.60		2.71	3.02	3.33	3.64	3.9
5		3.00	6.00		3.44	3.88	4.32	4.76	5.20		3.31	3.62	3.93	4.24	4.5
1		0.79	4.74		1.39	1.99	2.59	3.19	3.79		1.23	1.67	2.11	2.55	2.9
2		1.58	5.53		2.18	2.78	3.38	3.98	4.58		2.02	2.46	2.90	3.34	3.7
3	8	2.37	6.32	7	2.97	3.57	4.17	4.77	5.37	6	2.81	3.25	3.69	4.13	4.5
4		3.16	7.11		3.76	4.36	4.96	5.56	6.16		3.60	4.04	4.48	4.92	5.3
5		3.95	7.90		4.55	5.15	5.75	6.35	6.95		4.39	4.83	5.27	5.71	6.1
1		1.00	6.00		1.79	2.58	3.37	4.16	4.95		1.60	2.20	2.80	3.40	4.0
2		2.00	7.00		2.79	3.58	4.37	5.16	5.95		2.60	3.20	3.80	4.40	5.0
3	9	3.00	8.00	8	3.79	4.58	5.37	6.16	6.95	7	3.60	4.20	4.80	5.40	6.0
4		4.00	9.00		4.79	5.58	6.37	7.16	7.95		4.60	5.20	5.80	6.40	7.0
5		5.00	10.00		5.79	6.58	7.37	8.16	8.95		5.60	6.20	6.80	7.40	8.0
1		1.27	7.62		2.27	3.27	4.27	5.27	6.27		2.06	2.85	3.64	4.43	5.2
2		2.54	8.89		3.54	4.54	5.54	6.54	7.54		3.33	4.12	4.91	5.70	6.4
3	10	3.81	10.16	9	4.81	5.81	6.81	7.81	8.81	8	4.60	5.39	6.18	6.97	7.7
4		5.08	11.43		6.08	7.08	8.08	9.08	10.08		5.87	6.66	7.45	8.24	9.0
5		6.35	12.70		7.35	8.35	9.35	10.35	11.35		7.14	7.93	8.72	9.51	10.3
1		1.56	9.36		2.83	4.10	5.37	6.64	7.91		2.56	3.56	4.56	5.56	6.1
2		3.12	10.92		4.39	5.66	6.93	8.20	9.47		4.12	5.12	6.12	7.12	8.1
3	11	4.68	12.48	10	5.95	7.22	8.49	9.76	11.03	9	5.68	6.68	7.68	8.68	9.6
4		6.24	14.04		7.51	8.78	10.05	11.32	12.59		7.24	8.24	9.24	10.24	11.2
5		7.80	15.60		9.07	10.34	11.61	12.88	14.15		8.80	9.80	10.80	11.80	12.5

<sup>a</sup>For directions on how to use this table, see Table A-6, footnote b.

Source: Based on a table from Ref. 4-12; used with the permission of the American Concrete Institute.

TABLE A-8M Cross-Sectional Areas, A<sub>c</sub>, for Various Combinations of Bars—SI Units (mm<sup>2</sup>)\*

No. of Bars	A					B					C					
	Bar No.	0	5	5	Bar No.	1	2	3	4	5	Bar No.	1	2	3	4	5
1		200	1200			300	400	500	600	700						
2		400	1400			500	600	700	800	900						
3	15	600	1600		10	700	800	900	1000	1100						
4		800	1800			900	1000	1100	1200	1300						
5		1000	2000			1100	1200	1300	1400	1500						
1		300	1800			500	700	900	1100	1300		400	500	600	700	800
2		600	2100			800	1000	1200	1400	1600		700	800	900	1000	1100
3	20	900	2400		15	1100	1300	1500	1700	1900		1000	1100	1200	1300	1400
4		1200	2700			1400	1600	1800	2000	2200		1300	1400	1500	1600	1700
5		1500	3000			1700	1900	2100	2300	2500		1600	1700	1800	1900	2000
1		500	3000			800	1100	1400	1700	2000		700	900	1100	1300	1500
2		1000	3500			1300	1600	1900	2200	2500		1200	1400	1600	1800	2000
3	25	1500	4000		20	1800	2100	2400	2700	3000		1700	1900	2100	2300	2500
4		2000	4500			2300	2600	2900	3200	3500		2200	2400	2600	2800	3000
5		2500	5000			2800	3100	3400	3700	4000		2700	2900	3100	3300	3500
1		700	4200			1200	1700	2200	2700	3200		1000	1300	1600	1900	2200
2		1400	4900			1900	2400	2900	3400	3900		1700	2000	2300	2600	2900
3	30	2100	5600		25	2600	3100	3600	4100	4600		2400	2700	3000	3300	3600
4		2800	6300			3300	3800	4300	4800	5300		3100	3400	3700	4000	4300
5		3500	7000			4000	4500	5000	5500	6000		3800	4100	4400	4700	5000
1		1000	6000			1700	2400	3100	3800	4500		1500	2000	2500	3000	3500
2		2000	7000			2700	3400	4100	4800	5500		2500	3000	3500	4000	4500
3	35	3000	8000		30	3700	4400	5100	5800	6500		3500	4000	4500	5000	5500
4		4000	9000			4700	5400	6100	6800	7500		4500	5000	5500	6000	6500
5		5000	10000			5700	6400	7100	7800	8500		5500	6000	6500	7000	7500

\*For directions on how to use this table, see Table A-6, footnote b.

**TABLE A-9 Areas of Bars in a Section 1 ft Wide (in.<sup>2</sup>/ft)**

Bar Spacing (in.)	Bar No.				
	3	4	5	6	7
4	0.33	0.60	0.93	1.32	1.80
4 $\frac{1}{2}$	0.29	0.53	0.83	1.17	1.60
5	0.26	0.48	0.74	1.06	1.44
5 $\frac{1}{2}$	0.24	0.44	0.68	0.96	1.31
6	0.22	0.40	0.62	0.88	1.20
6 $\frac{1}{2}$	0.20	0.37	0.57	0.81	1.11
7	0.19	0.34	0.53	0.75	1.03
7 $\frac{1}{2}$	0.18	0.32	0.50	0.70	0.96
8	0.17	0.30	0.47	0.66	0.90
8 $\frac{1}{2}$	0.16	0.28	0.44	0.62	0.85
9	0.15	0.27	0.41	0.59	0.80
9 $\frac{1}{2}$	0.14	0.25	0.39	0.56	0.76
10	0.13	0.24	0.37	0.53	0.72
10 $\frac{1}{2}$	0.13	0.23	0.35	0.50	0.69
11	0.12	0.22	0.34	0.48	0.65
11 $\frac{1}{2}$	0.11	0.21	0.32	0.46	0.63
12	0.11	0.20	0.31	0.44	0.60
13	0.10	0.18	0.29	0.41	0.55
14	0.09	0.17	0.27	0.38	0.51
15	0.09	0.16	0.25	0.35	0.48
16	0.08	0.15	0.23	0.33	0.45
17	0.08	0.14	0.22	0.31	0.42
18	0.07	0.13	0.21	0.29	0.40



UNAL

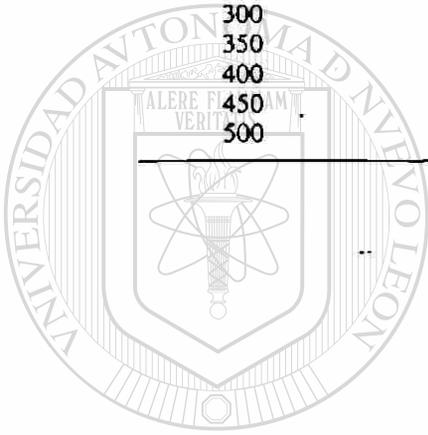
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



TABLE A-9M Areas of Bars in a Section 1 m Wide—  
SI Units (mm<sup>2</sup>/m)

Bar Spacing (mm)	Bar No.			
	10	15	20	25
100	1000	2000	3000	5000
110	909	1818	2727	4545
120	833	1667	2500	4167
130	769	1538	2308	3846
140	714	1429	2143	3571
150	667	1333	2000	3333
160	625	1250	1875	3125
180	556	1111	1667	2778
200	500	1000	1500	2500
220	455	909	1364	2273
240	417	833	1250	2083
250	400	800	1200	2000
260	385	769	1154	1923
280	357	714	1071	1786
300	333	667	1000	1667
350	286	571	857	1429
400	250	500	750	1250
450	222	444	667	1111
500	200	400	600	1000



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

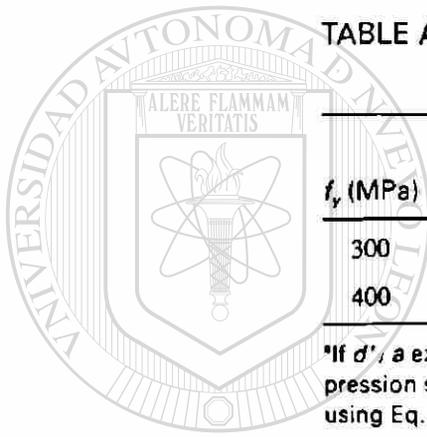


DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

**TABLE A-10** Limiting Values of  $d'/a$  for Checking if Compression Steel Yields<sup>a</sup>

$f_y$ (psi)	$f'_c$ (psi)			
	≤ 4000	5000	6000	8000
40,000	0.636	0.675	0.720	0.831
50,000	0.500	0.532	0.567	0.654
60,000	0.365	0.388	0.414	0.477

<sup>a</sup>If  $d'/a$  exceeds the values given in this table, the compression steel will not yield before failure; calculated using Eq. 5-9.



**TABLE A-10M** Limiting Values of  $d'/a$  for Checking if Compression Steel Yields—SI Units<sup>a</sup>

$f_y$ (MPa)	$f'_c$ (MPa)			
	≤ 30	35	40	50
300	0.588	0.625	0.649	0.725
400	0.392	0.417	0.433	0.483

<sup>a</sup>If  $d'/a$  exceeds the values given in this table, the compression steel will not yield before failure; calculated using Eq. 5-9M.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN<sup>®</sup>  
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

TABLE A-11 Basic Tension Development Length Ratio,  $\ell_{db}/d_b$  (in./in.)

Bar No.	$f_c = 3000$ psi						$f_c = 3750$ psi						$f_c = 4000$ psi						$f_c = 5000$ psi						$f_c = 6000$ psi																																		
	Bottom Bar		Top Bar		Bottom Bar		Top Bar		Bottom Bar		Top Bar		Bottom Bar		Top Bar		Bottom Bar		Top Bar		Bottom Bar		Top Bar		Bottom Bar		Top Bar		Bottom Bar		Top Bar		Bottom Bar																										
	$\ell_{db}/d_b$												$\ell_{db}/d_b$												$\ell_{db}/d_b$												$\ell_{db}/d_b$												$\ell_{db}/d_b$										
3 to 6	43.8	57.0	39.2	50.9	37.9	49.3	33.9	44.1	31.0	40.3	29.2	38.0	26.1	34.0	25.3	32.9	22.6	29.4	20.7	26.9	43.8	57.0	39.2	50.9	37.9	49.3	33.9	44.1	31.0	40.3	29.2	38.0	26.1	34.0	25.3	32.9	22.6	29.4	20.7	26.9																			
7 to 18	54.8	71.2	49.0	63.7	47.4	61.7	42.4	55.2	38.7	50.3	54.8	71.2	49.0	63.7	47.4	61.7	42.4	55.2	38.7	50.3	54.8	71.2	49.0	63.7	47.4	61.7	42.4	55.2	38.7	50.3	54.8	71.2	49.0	63.7	47.4	61.7	42.4	55.2	38.7	50.3																			
3 to 6	29.2	38.0	26.1	34.0	25.3	32.9	22.6	29.4	20.7	26.9	29.2	38.0	26.1	34.0	25.3	32.9	22.6	29.4	20.7	26.9	29.2	38.0	26.1	34.0	25.3	32.9	22.6	29.4	20.7	26.9	29.2	38.0	26.1	34.0	25.3	32.9	22.6	29.4	20.7	26.9																			
3 to 6	65.7	85.5	58.8	76.4	56.9	74.0	50.9	66.2	46.5	60.5	65.7	85.5	58.8	76.4	56.9	74.0	50.9	66.2	46.5	60.5	65.7	85.5	58.8	76.4	56.9	74.0	50.9	66.2	46.5	60.5	65.7	85.5	58.8	76.4	56.9	74.0	50.9	66.2	46.5	60.5																			
7 to 18	82.2	106.8	73.5	95.6	71.1	92.6	63.6	82.8	58.1	75.5	82.2	106.8	73.5	95.6	71.1	92.6	63.6	82.8	58.1	75.5	82.2	106.8	73.5	95.6	71.1	92.6	63.6	82.8	58.1	75.5	82.2	106.8	73.5	95.6	71.1	92.6	63.6	82.8	58.1	75.5																			
3 to 6	43.8	57.0	39.2	50.9	37.9	49.3	33.9	44.1	31.0	40.3	43.8	57.0	39.2	50.9	37.9	49.3	33.9	44.1	31.0	40.3	43.8	57.0	39.2	50.9	37.9	49.3	33.9	44.1	31.0	40.3	43.8	57.0	39.2	50.9	37.9	49.3	33.9	44.1	31.0	40.3																			

Case 1: Clear spacing of bars being developed or spliced not less than  $d_b$ , clear cover not less than  $d_b$ , and stirrups or ties throughout  $\ell_d$  not less than the Code minimum,

or

Case 2: Clear spacing of bars being developed or spliced not less than  $2d_b$ , and clear cover not less than  $d_b$ .

$f_y = 60,000$  psi, uncoated bars, normal-weight concrete

$f_y = 40,000$  psi, uncoated bars, normal-weight concrete

Other Cases

$f_y = 60,000$  psi, uncoated bars, normal-weight concrete

$f_y = 40,000$  psi, uncoated bars, normal-weight concrete

\* $\beta$ , coating factor;  $\lambda$ , lightweight concrete factor.

TABLE A 11M Basic Tension Development Length Ratio,  $\ell_{db}/d_b$  SI Units (mm/mm)

Bar No.	$\ell_{dt} = \frac{\ell_{db}}{d_b} \times \beta \lambda \times f_c$ , but not less than 300 mm*																			
	$f_c = 20$ MPa			$f_c = 25$ MPa			$f_c = 30$ MPa			$f_c = 35$ MPa			$f_c = 40$ MPa							
	Bottom Bar	Top Bar	Bottom Bar	Top Bar	Bottom Bar	Top Bar	Bottom Bar	Top Bar	Bottom Bar	Top Bar	Bottom Bar	Top Bar	Bottom Bar	Top Bar						
10 to 20	42.9	55.8	38.4	49.9	35.1	45.6	32.5	42.2	30.4	39.5	25 to 45	53.7	69.8	48.0	62.4	43.8	57.0	40.6	37.9	49.3
10 to 20	32.2	41.9	28.8	37.4	26.3	34.2	24.3	31.6	222.8	29.6	<p>Case 1: Clear spacing of bars being developed or spliced not less than <math>d_b</math>, clear cover not less than <math>d_b</math>, and stirrups or ties throughout <math>\ell_d</math> not less than the Code minimum, or</p> <p>Case 2: Clear spacing of bars being developed or spliced not less than <math>2d_b</math> and clear cover not less than <math>d_b</math>.</p>									
10 to 20	64.4	83.7	57.6	74.9	52.6	68.4	48.7	63.3	45.5	59.2										
25 to 45	80.5	104.6	72.0	93.6	65.7	85.4	60.9	79.1	56.9	74.0	<p><math>f_c = 300</math> MPa, uncoated bars, normal-weight concrete</p>									
10 to 20	48.3	62.8	43.2	56.2	39.4	51.3	36.5	47.5	34.2	44.4	<p>Other Cases</p>									
10 to 20	48.3	62.8	43.2	56.2	39.4	51.3	36.5	47.5	34.2	44.4	<p><math>f_c = 400</math> MPa, uncoated bars, normal-weight concrete</p>									
10 to 20	48.3	62.8	43.2	56.2	39.4	51.3	36.5	47.5	34.2	44.4	<p><math>f_c = 300</math> MPa, uncoated bars, normal-weight concrete</p>									

\* $\beta$ , coating factor;  $\lambda$ , lightweight concrete factor.

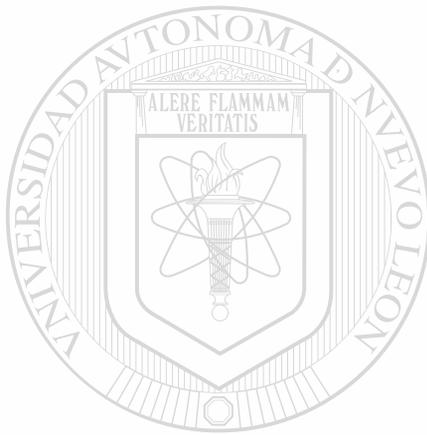
**TABLE A-12 Basic Compression Development Length,  $\ell_{dbc}$  (in.)<sup>a</sup>**

$$\ell_d = \ell_{dbc} \times (\text{Factors in ACI Sec. 12.3.3})$$

$$f_c \text{ (psi)}$$

Bar No.	$f_c$ (psi)		
	3000	4000	5000 psi and up
$f_y = 60,000$ psi			
3	8	8	8
4	11	9	9
5	14	12	11
6	16	14	14
7	19	17	16
8	22	19	18
9	25	21	20
10	28	24	23
11	34	27	25
14	37	32	30
18	49	43	41
$f_y = 40,000$ psi			
3	8	8	8
4	8	8	8
5	9	8	8
6	11	9	9

<sup>a</sup>Lengths may be reduced if excess reinforcement is anchored or if the splice is enclosed in a spiral. See ACI Sec. 12.3.3. Reduced length shall not be less than 8 in.



**TABLE A-12M Basic Compression Development Length,  $\ell_{dbc}$ —SI Units (mm)<sup>a</sup>**

$$\ell_d = \ell_{dbc} \times (\text{Factors in ACI Sec. 12.3.3})$$

$$f_c \text{ (MPa)}$$

Bar No.	$f_c$ (MPa)				
	20	25	30	35	40
$f_y = 400$ (MPa)					
10	224	200	200	200	200
15	335	300	274	254	240
20	447	400	365	338	320
25	559	500	456	425	400
30	671	600	548	507	480
35	783	700	639	592	560
45	1006	900	822	761	720
55	1261	1128	1030	955	892
$f_y = 300$ (MPa)					
10	200	200	200	200	200
15	252	225	205	200	200
20	335	300	274	254	240

<sup>a</sup>Lengths may be reduced if excess reinforcement is anchored or if the splice is enclosed in a spiral. See ACI Sec. 12.3.3. Reduced length shall not be less than 200 mm.

**TABLE A-13 Basic Development Lengths for Hooked Bars,  $\ell_{hb}$  (in.)**

$\ell_{dh} = \ell_{hb} \times (\text{Factors in 12.5.3})^*$   
 Normal-weight concrete,  $f_y = 60,000$  psi  
 Standard 90° or 180° Hooks

Bar No.	$f'_c$ (psi)			
	3000	4000	5000	6000
3	8.2	7.1	6.4	5.8
4	11	9.5	8.5	7.8
5	13.7	11.9	10.6	9.7
6	16.4	14.2	12.7	11.6
7	19.2	16.6	14.9	13.6
8	22	19	17	15.5
9	25	21	19	17.5
10	28	24	22	20
11	31	27	24	22
14	37	32	29	26
18	49	43	38	35

\* $\ell_{dh}$  is defined in Fig. 8-12a. The development length of a hook,  $\ell_{dh}$ , is the product of  $\ell_{hb}$  from this table and factors relating to bar yield strength, cover, presence of stirrups, and type of concrete given in ACI Sec. 12.5.3. The resulting length  $\ell_{dh}$  shall not be less than the larger of 8 bar diameters or 6 in.

**TABLE A-13M Basic Development Lengths for Hooked Bars,  $\ell_{hb}$ —SI Units (mm)**

$\ell_{dh} = \ell_{hb} \times (\text{Factors in 12.5.3})^*$   
 Normal-weight concrete,  $f_y = 400$  MPa  
 Standard 90° or 180° hooks

Bar No.	$f'_c$ (MPa)				
	20	25	30	35	40
10	253	226	206	191	179
15	358	320	292	270	253
20	436	390	356	330	308
25	563	504	460	426	398
30	669	598	546	505	473
35	798	714	652	603	564
45	977	874	798	739	691
55	1261	1128	1030	953	892

\* $\ell_{dh}$  is defined in Fig. 8-12a. The development length of a hook,  $\ell_{dh}$ , is the product of  $\ell_{hb}$  from this table and factors relating to bar yield strength, cover, presence of stirrups, and type of concrete given in ACI Sec. 12.5.3. The resulting length  $\ell_{dh}$  shall not be less than the larger of 8 bar diameters or 150 mm.

TABLE A-14 Minimum Thicknesses of Non-Prestressed Beams or One-Way Slabs Unless Deflections Are Computed

Exposure	Member	Minimum Thickness, $h$				Source
		Simply Supported	One End Continuous	Both Ends Continuous	Cantilever	
Not supporting or attached to partitions or other construction likely to be damaged by large deflections	Solid one-way slabs	$l/20$	$l/24$	$l/28$	$l/10$	ACI Table 9.5(a)
	Beams or ribbed one-way slabs	$l/16$	$l/18.5$	$l/21$	$l/8$	
Supporting or attached to partitions or other construction likely to be damaged by large deflections	All members: $\omega \leq 0.12^a$ and <u>sustained load</u> / <u>total load</u> < 0.5	$l/10$	$l/13$	$l/16$	$l/4$	Ref. 9-20
	All members: <u>sustained load</u> / <u>total load</u> > 0.5	$l/6$	$l/8$	$l/10$	$l/3$	

$^a \omega = \rho f_s / f_c'$

TABLE A-15 Maximum Allowable Spiral Pitch,  $s$  (in.), for Circular Spiral Columns, Grade 60 Spirals<sup>a</sup>

Column Diameter (in.)	Core Diameter (in.)	$f_c'$ (psi)					
		4000 Spiral Size		5000 Spiral Size		6000 Spiral Size	
		No. 3	No. 4	No. 3	No. 4	No. 3	No. 4 No. 5
12	9	2	3 $\frac{1}{2}$	1 $\frac{1}{2}$ *	2 $\frac{3}{4}$	—	2 $\frac{1}{2}$ 3 $\frac{1}{4}$
14	11	2	3 $\frac{1}{2}$	1 $\frac{1}{2}$ *	3	—	2 $\frac{1}{2}$ 3 $\frac{1}{4}$
16	13	2	3 $\frac{1}{2}$	1 $\frac{1}{2}$ *	3	—	2 $\frac{1}{2}$ 3 $\frac{1}{4}$
18	15	2	3 $\frac{1}{2}$	1 $\frac{1}{2}$ *	3	—	2 $\frac{1}{2}$ 3 $\frac{1}{4}$
20	17	2	3 $\frac{1}{2}$	1 $\frac{1}{2}$ *	3	—	2 $\frac{1}{2}$ 3 $\frac{1}{4}$
22	19	2	3 $\frac{1}{2}$	1 $\frac{1}{2}$ *	3	—	2 $\frac{1}{2}$ 3 $\frac{1}{4}$
24	21	2	3 $\frac{1}{2}$	1 $\frac{1}{2}$ *	3	—	2 $\frac{1}{2}$ 3 $\frac{1}{4}$
26	23	2 $\frac{1}{2}$	3 $\frac{1}{2}$	1 $\frac{3}{4}$ *	3 $\frac{1}{4}$	1 $\frac{1}{2}$ *	2 $\frac{1}{2}$ 3 $\frac{1}{4}$
28	25	2 $\frac{1}{2}$	3 $\frac{1}{2}$	1 $\frac{1}{2}$ *	3 $\frac{1}{4}$	1 $\frac{1}{2}$ *	2 $\frac{1}{2}$ 3 $\frac{1}{4}$
30	27	2 $\frac{1}{2}$	3 $\frac{1}{2}$	1 $\frac{1}{2}$ *	3 $\frac{1}{4}$	1 $\frac{1}{2}$ *	2 $\frac{1}{2}$ 3 $\frac{1}{4}$
32	29	2 $\frac{1}{2}$	3 $\frac{1}{2}$	1 $\frac{1}{2}$ *	3 $\frac{1}{4}$	1 $\frac{1}{2}$ *	2 $\frac{1}{2}$ 3 $\frac{1}{4}$
34	31	2 $\frac{1}{2}$	3 $\frac{1}{2}$	1 $\frac{1}{2}$ *	3 $\frac{1}{4}$	1 $\frac{1}{2}$ *	2 $\frac{1}{2}$ 3 $\frac{1}{4}$
36	33	2 $\frac{1}{2}$	3 $\frac{1}{2}$	1 $\frac{1}{2}$ *	3 $\frac{1}{4}$	1 $\frac{1}{2}$ *	2 $\frac{1}{2}$ 3 $\frac{1}{4}$
38	35	2 $\frac{1}{2}$	3 $\frac{1}{2}$	1 $\frac{1}{2}$ *	3 $\frac{1}{4}$	1 $\frac{1}{2}$ *	2 $\frac{1}{2}$ 3 $\frac{1}{4}$
40	37	2 $\frac{1}{2}$	3 $\frac{1}{2}$	1 $\frac{1}{2}$ *	3 $\frac{1}{4}$	1 $\frac{1}{2}$ *	2 $\frac{1}{2}$ 3 $\frac{1}{4}$

<sup>a</sup>The pitch is measured center to center of consecutive turns. Cover 1 $\frac{1}{2}$  in. to spiral. The tabulated values can be used with 1-in.-maximum-size aggregate, except that values marked with an asterisk require  $\frac{3}{4}$ -in.-maximum aggregate.

Source: From Ref. 11-4. Ref. 11-4 is the Design Handbook, reprinted with permission of the American Concrete Institute.

Table A-16 Maximum Number of Bars That Can Be Placed in Square Columns with the Same Number of Bars in Each Face, Based on Normal (Radial) Lap Splices, Minimum Bar Spacing<sup>a</sup>

b (in.)	A <sub>g</sub> (in. <sup>2</sup> )		Bar No.								
			5	6	7	8	9	10	11		
10	100	<i>n</i> <sub>max</sub>	8	4	4	4	4				
		A <sub>st</sub>	2.48	1.76	2.40	3.16	4.00				
		ρ <sub>i</sub>	0.025	0.018	0.024	0.032	0.040				
12	144	<i>n</i> <sub>max</sub>	12	8	8	8	4	4			
		A <sub>st</sub>	3.72	3.52	4.80	6.32	4.00	5.08	6.24		
		ρ <sub>i</sub>	0.026	0.024	0.033	0.044	0.028	0.035	0.043		
14	196	<i>n</i> <sub>max</sub>	16	12	12	12	8	8			
		A <sub>st</sub>	4.96	5.28	7.20	9.48	8.00	10.16	6.24		
		ρ <sub>i</sub>	0.025	0.027	0.037	0.048	0.041	0.052	0.032		
16	256	<i>n</i> <sub>max</sub>	—	16	16	12	12	8	8		
		A <sub>st</sub>	—	7.04	9.60	9.48	12.00	10.16	12.48		
		ρ <sub>i</sub>	—	0.028	0.038	0.037	0.047	0.040	0.049		
18	324	<i>n</i> <sub>max</sub>	—	20	20	16	16	12	12		
		A <sub>st</sub>	—	8.80	12.00	12.64	16.00	15.24	18.72		
		ρ <sub>i</sub>	—	0.027	0.037	0.039	0.049	0.047	0.058		
20	400	<i>n</i> <sub>max</sub>	—	—	20	20	16	16	16		
		A <sub>st</sub>	—	—	12.0	15.80	16.00	20.32	18.72		
		ρ <sub>i</sub>	—	—	0.030	0.039	0.040	0.051	0.047		
22	484	<i>n</i> <sub>max</sub>	—	—	24	24	20	16	16		
		A <sub>st</sub>	—	—	14.40	18.96	20.00	20.32	24.96		
		ρ <sub>i</sub>	—	—	0.030	0.039	0.041	0.042	0.052		
24	576	<i>n</i> <sub>max</sub>	—	—	28	28	24	20	20		
		A <sub>st</sub>	—	—	16.80	22.12	24.00	25.40	24.96		
		ρ <sub>i</sub>	—	—	0.029	0.038	0.042	0.044	0.043		
26	676	<i>n</i> <sub>max</sub>	—	—	32	28	24	20	20		
		A <sub>st</sub>	—	—	19.20	22.12	24.00	25.40	31.20		
		ρ <sub>i</sub>	—	—	0.028	0.033	0.036	0.038	0.046		
28	784	<i>n</i> <sub>max</sub>	—	—	36	32	28	24	20		
		A <sub>st</sub>	—	—	21.60	25.28	28.00	30.48	31.20		
		ρ <sub>i</sub>	—	—	0.028	0.032	0.036	0.039	0.040		
30	900	<i>n</i> <sub>max</sub>	—	—	—	36	32	28	24	24	
		A <sub>st</sub>	—	—	—	28.44	32.00	35.56	37.44		
		ρ <sub>i</sub>	—	—	—	0.032	0.036	0.039	0.042		
32	1024	<i>n</i> <sub>max</sub>	—	—	—	40	32	28	28	28	
		A <sub>st</sub>	—	—	—	31.60	32.00	35.56	43.68		
		ρ <sub>i</sub>	—	—	—	0.031	0.031	0.035	0.043		

<sup>a</sup>Based on 1-in.-maximum-size aggregate.

Source: From Ref. 11-4. Ref. 11-4 is the Design Handbook, reprinted with permission of the American Concrete Institute.

**TABLE A-17 Maximum Number of Bars That Can Be Placed in Circular Columns, Based on Normal (Radial) Lap Splices, Minimum Bar Spacing\***

Diameter (in.)	$A_g$ (in. <sup>2</sup> )		Bar Size						
			5	6	7	8	9	10	11
12	113	$n_{max}$	8	7	6	6	—	—	—
		$A_{st}$	2.48	3.08	3.60	4.74	—	—	—
		$\rho_l$	0.022	0.027	0.032	0.042	—	—	—
14	154	$n_{max}$	11	10	9	8	7	—	—
		$A_{st}$	3.41	4.40	5.40	6.32	7.00	—	—
		$\rho_l$	0.022	0.029	0.035	0.041	0.046	—	—
16	201	$n_{max}$	14	13	12	11	9	7	6
		$A_{st}$	4.34	5.72	7.20	8.69	9.00	8.89	9.36
		$\rho_l$	0.022	0.029	0.036	0.043	0.045	0.044	0.047
18	254	$n_{max}$	—	16	14	13	11	9	8
		$A_{st}$	—	7.04	8.40	10.27	11.00	11.43	12.48
		$\rho_l$	—	0.028	0.033	0.040	0.043	0.045	0.049
20	314	$n_{max}$	—	—	17	16	13	11	10
		$A_{st}$	—	—	10.20	12.64	13.00	13.97	15.60
		$\rho_l$	—	—	0.033	0.040	0.041	0.044	0.050
22	380	$n_{max}$	—	—	20	18	16	13	12
		$A_{st}$	—	—	12.00	14.22	16.00	16.51	18.72
		$\rho_l$	—	—	0.032	0.037	0.042	0.043	0.049
24	452	$n_{max}$	—	—	22	21	18	15	13
		$A_{st}$	—	—	13.20	16.59	18.00	19.05	20.28
		$\rho_l$	—	—	0.029	0.037	0.040	0.042	0.045
26	531	$n_{max}$	—	—	25	23	20	17	15
		$A_{st}$	—	—	15.00	18.17	20.00	21.59	23.40
		$\rho_l$	—	—	0.028	0.034	0.038	0.041	0.044
28	616	$n_{max}$	—	—	28	26	22	19	17
		$A_{st}$	—	—	16.80	20.54	22.00	24.13	26.52
		$\rho_l$	—	—	0.027	0.033	0.036	0.039	0.043
30	707	$n_{max}$	—	—	—	28	25	21	19
		$A_{st}$	—	—	—	22.12	25.00	26.67	29.64
		$\rho_l$	—	—	—	0.031	0.035	0.038	0.042
32	804	$n_{max}$	—	—	—	31	27	23	21
		$A_{st}$	—	—	—	24.29	27.00	29.21	32.76
		$\rho_l$	—	—	—	0.031	0.034	0.036	0.041

\*Based on No. 4 spirals or ties, 1-in.-maximum-size aggregate, and 1 1/2-in. clear cover to spirals.

Source: This table is an abridged version of a table in Ref. 11-4 and is printed with the permission of the American Concrete Institute.

TABLE A-18 Number of Bars Required to Provide a Given Area of Steel\*

Area (in. <sup>2</sup> )	Bar No.					Area (in. <sup>2</sup> )	Bar No.				
	5	6	7	8	9		8	9	10	11	14
1.24	4					10.16			8		
1.76		4				10.27	13				
1.86	6					11.00		11			
2.17	7					11.06	14				
2.40						11.43			9		
2.48	8		4			11.85	15				
2.64		6				12.00		12			
3.08		7				12.48				8	
3.16				4		12.64	16				
3.41	11					12.70			10		
3.52		8				13.00		13			
3.60			6			13.43	17				
3.72	12					13.50					6
3.96		9				13.97			11		
4.00	13				4	14.00		14		9	
4.20			7			14.22	18				
4.40		10				15.00	19	15			
4.65	15					15.24			12		
4.74						15.60				10	
4.80						15.75					7
5.28		12				15.80	20				
5.40						16.00		16			
5.53						16.51			13		
5.72		13				16.59	21				
6.00					6	17.00		17			
6.32						17.16				11	
7.00					7	17.78			14		
7.04		16				18.00		18			8
7.20			12			18.72				12	
7.48		17				19.00		19	15		
7.80			13			20.00		20			
7.90				10		20.25				13 <sup>®</sup>	9
8.00					8	20.32				16	
8.40			14			21.00		21			
8.69					11	21.59			17		
8.80		20				21.84				14	
9.00			15		9	22.00		22			
9.48				12		22.50					10
9.60			16			22.86			18		
10.00					10	24.00		24			
10.80			18			24.96				16	

\*Bold figures denote combinations that will give an equal number of bars in each side of a square column.

**TABLE A-19 Lap Splice Lengths for Grade 60 Bars in Columns (in.)**

$f'_c$ (psi)	Bar No.						
	5	6	7	8	9	10	11

**Compression lap splices**

Lap splice length = (length from table) × (factors in note a)

< 3000	26	31	35	40	46	51	56
≥ 3000	19	23	26	30	34	38	42

**Tension lap splices**

Lap splice length = (length from table) ×  $\beta\lambda^b$

**Class A tension lap splice: half or fewer of the bars spliced at any location and  $0 \leq f_t \leq 0.5f_y$  in tension, (ACI Sec. 12.17.2.2)**

3000	27.4	32.9	48.0	54.8	61.8	69.6	77.3
4000	23.7	28.4	41.5	47.4	53.5	60.2	66.8
5000	21.2	25.4	37.1	42.4	47.8	53.8	59.8
6000	19.4	23.3	33.9	38.7	43.7	49.1	54.6

**Class B tension lap splices: more than half of the bars spliced at any section and/or  $f_t$  greater than  $0.5f_y$  in tension, (ACI Sec. 12.17.2.2)**

3000	35.6	42.7	62.3	71.2	80.4	90.5	100.4
4000	30.8	37.0	53.9	61.6	69.5	78.3	86.9
5000	27.5	33.0	48.2	55.1	61.2	70.0	77.7
6000	25.2	30.2	44.0	50.3	56.7	63.9	70.9

\*Compression lap splices may be multiplied by 0.83 or 0.75 if enclosed by ties or spirals satisfying ACI Secs. 12.17.2.4 or 12.17.2.5.

<sup>b</sup> $\beta$  = coating factor,  $\lambda$  = lightweight concrete factor.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

TABLE A-20 Moment Distribution Factors for Slabs without Drop Panels<sup>a</sup>

		FEM (uniform load $w$ ) = $Mw\ell_2\ell_1^2$		K (stiffness) = $k\ell_2t^3/12\ell_1$		Carryover factor = COF	
		$c_2/\ell_2$					
$c_1/\ell_1$		0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25
0.00	<i>M</i>	0.083	0.083	0.083	0.083	0.083	0.083
	<i>k</i>	4.000	4.000	4.000	4.000	4.000	4.000
	<i>COF</i>	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500
0.05	<i>M</i>	0.083	0.084	0.084	0.084	0.085	0.085
	<i>k</i>	4.000	4.047	4.093	4.138	4.181	4.222
	<i>COF</i>	0.500	0.503	0.507	0.510	0.513	0.516
0.10	<i>M</i>	0.083	0.084	0.085	0.085	0.086	0.087
	<i>k</i>	4.000	4.091	4.182	4.272	4.362	4.449
	<i>COF</i>	0.500	0.506	0.513	0.519	0.524	0.530
0.15	<i>M</i>	0.083	0.084	0.085	0.086	0.087	0.088
	<i>k</i>	4.000	4.132	4.267	4.403	4.541	4.680
	<i>COF</i>	0.500	0.509	0.517	0.526	0.534	0.543
0.20	<i>M</i>	0.083	0.085	0.086	0.087	0.088	0.089
	<i>k</i>	4.000	4.170	4.346	4.529	4.717	4.910
	<i>COF</i>	0.500	0.511	0.522	0.532	0.543	0.554
0.25	<i>M</i>	0.083	0.085	0.086	0.087	0.089	0.090
	<i>k</i>	4.000	4.204	4.420	4.648	4.887	5.138
	<i>COF</i>	0.500	0.512	0.525	0.538	0.550	0.563
$x = (1 - c_2/\ell_2^3)$		1.000	0.856	0.729	0.613	0.512	0.421

<sup>a</sup> $c_1$  and  $c_2$  are the widths of the column measured parallel to  $\ell_1$  and  $\ell_2$ .

Source: Ref. 14-8.

TABLE A-21 Moment Distribution Factors for Slabs with Drop Panels,  $h_1 = 1.25h^*$

		FEM (uniform load $w$ ) = $Mw\ell_2\ell_1^2$		K (stiffness) = $kE\ell_2t^3/12\ell_1$		Carryover factor = COF		
		$c_2 \ell_2$						
$c_1 \ell_1$		0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
0.00	<i>M</i>	0.088	0.088	0.088	0.088	0.088	0.088	0.088
	<i>k</i>	4.795	4.795	4.795	4.795	4.795	4.795	4.795
	COF	0.542	0.542	0.542	0.542	0.542	0.542	0.542
0.05	<i>M</i>	0.088	0.088	0.089	0.089	0.089	0.089	0.089
	<i>k</i>	4.795	4.846	4.896	4.944	4.990	5.035	5.077
	COF	0.542	0.545	0.548	0.551	0.553	0.556	0.558
0.10	<i>M</i>	0.088	0.088	0.089	0.090	0.090	0.091	0.091
	<i>k</i>	4.795	4.894	4.992	5.039	5.184	5.278	5.368
	COF	0.542	0.548	0.553	0.559	0.564	0.569	0.573
0.15	<i>M</i>	0.088	0.089	0.090	0.090	0.091	0.092	0.092
	<i>k</i>	4.795	4.938	5.082	5.228	5.374	5.520	5.665
	COF	0.542	0.550	0.558	0.565	0.573	0.580	0.587
0.20	<i>M</i>	0.088	0.089	0.090	0.091	0.092	0.093	0.094
	<i>k</i>	4.795	4.978	5.167	5.361	5.558	5.760	5.962
	COF	0.542	0.552	0.562	0.571	0.581	0.590	0.600
0.25	<i>M</i>	0.088	0.089	0.090	0.091	0.092	0.094	0.095
	<i>k</i>	4.795	5.015	5.245	5.485	5.735	5.994	6.261
	COF	0.542	0.553	0.565	0.576	0.587	0.598	0.609
0.30	<i>M</i>	0.088	0.089	0.090	0.092	0.093	0.094	0.095
	<i>k</i>	4.795	5.048	5.317	5.601	5.902	6.219	6.550
	COF	0.542	0.554	0.567	0.580	0.593	0.605	0.618

\* $h$ , Slab thickness;  $h_1$ , total thickness in drop panel.

Source: Ref. 14-8.

TABLE A-22 Moment Distribution Factors for Slabs with Drop Panels,  $h_1 = 1.5h^a$

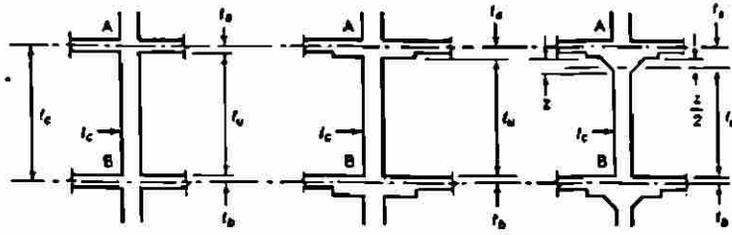
		FEM (uniform load $w$ ) = $Mwl_2l_1^2$ $K$ (stiffness) = $kEl_2t^3/12l_1$ Carryover factor = COF					
		$c_2/l_2$					
$c_1/l_1$		0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25
0.00	<i>M</i>	0.093	0.093	0.093	0.093	0.093	0.093
	<i>k</i>	5.837	5.837	5.837	5.837	5.837	5.837
	COF	0.589	0.589	0.589	0.589	0.589	0.589
0.05	<i>M</i>	0.093	0.093	0.093	0.093	0.094	0.094
	<i>k</i>	5.837	5.890	5.942	5.993	6.041	6.087
	COF	0.589	0.591	0.594	0.596	0.598	0.600
0.10	<i>M</i>	0.093	0.093	0.094	0.094	0.094	0.095
	<i>k</i>	5.837	5.940	6.024	6.142	6.240	6.335
	COF	0.589	0.593	0.598	0.602	0.607	0.611
0.15	<i>M</i>	0.093	0.093	0.094	0.095	0.095	0.096
	<i>k</i>	5.837	5.986	6.135	6.284	6.432	6.579
	COF	0.589	0.595	0.602	0.608	0.614	0.620
0.20	<i>M</i>	0.093	0.093	0.094	0.095	0.096	0.096
	<i>k</i>	5.837	6.027	6.221	6.418	6.616	6.816
	COF	0.589	0.597	0.605	0.613	0.621	0.628
0.25	<i>M</i>	0.093	0.094	0.094	0.095	0.096	0.097
	<i>k</i>	5.837	6.065	6.300	6.543	6.790	7.043
	COF	0.589	0.598	0.608	0.617	0.626	0.635

<sup>a</sup>*h*, Slab thickness; *h*<sub>1</sub>, total thickness in drop panel.

Source: Ref. 14-8.

TABLE A-23 Stiffness and Carryover Factors for Columns

$$K_c = k \frac{EL_c}{\ell_c}$$



		$\ell_c/\ell_u$								
$t_a/t_b$		1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30	1.35	1.40	1.45
0.00	$k_{AB}$	4.20	4.40	4.60	4.80	5.00	5.20	5.40	5.60	5.80
	$C_{AB}$	0.57	0.65	0.73	0.80	0.87	0.95	1.03	1.10	1.17
0.2	$k_{AB}$	4.31	4.62	4.95	5.30	5.65	6.02	6.40	6.79	7.20
	$C_{AB}$	0.56	0.62	0.68	0.74	0.80	0.85	0.91	0.96	1.01
0.4	$k_{AB}$	4.38	4.79	5.22	5.67	6.15	6.65	7.18	7.74	8.32
	$C_{AB}$	0.55	0.60	0.65	0.70	0.74	0.79	0.83	0.87	0.91
0.6	$k_{AB}$	4.44	4.91	5.42	5.96	6.54	7.15	7.81	8.50	9.23
	$C_{AB}$	0.55	0.59	0.63	0.67	0.70	0.74	0.77	0.80	0.83
0.8	$k_{AB}$	4.49	5.01	5.58	6.19	6.85	7.56	8.31	9.12	9.98
	$C_{AB}$	0.54	0.58	0.61	0.64	0.67	0.70	0.72	0.75	0.77
1.0	$k_{AB}$	4.52	5.09	5.71	6.38	7.11	7.89	8.73	9.63	10.60
	$C_{AB}$	0.54	0.57	0.60	0.62	0.65	0.67	0.69	0.71	0.73
1.2	$k_{AB}$	4.55	5.16	5.82	6.54	7.32	8.17	9.08	10.07	11.12
	$C_{AB}$	0.53	0.56	0.59	0.61	0.63	0.65	0.66	0.68	0.69
1.4	$k_{AB}$	4.58	5.21	5.91	6.68	7.51	8.41	9.38	10.43	11.57
	$C_{AB}$	0.53	0.55	0.58	0.60	0.61	0.63	0.64	0.65	0.66
1.6	$k_{AB}$	4.60	5.26	5.99	6.79	7.66	8.61	9.64	10.75	11.95
	$C_{AB}$	0.53	0.55	0.57	0.59	0.60	0.61	0.62	0.63	0.64
1.8	$k_{AB}$	4.62	5.30	6.06	6.89	7.80	8.79	9.87	11.03	12.29
	$C_{AB}$	0.52	0.55	0.56	0.58	0.59	0.60	0.61	0.61	0.62
2.0	$k_{AB}$	4.63	5.34	6.12	6.98	7.92	8.94	10.06	11.27	12.59
	$C_{AB}$	0.52	0.54	0.56	0.57	0.58	0.59	0.59	0.60	0.60
2.2	$k_{AB}$	4.65	5.37	6.17	7.05	8.02	9.08	10.24	11.49	12.85
	$C_{AB}$	0.52	0.54	0.55	0.56	0.57	0.58	0.58	0.59	0.59
2.4	$k_{AB}$	4.66	5.40	6.22	7.12	8.11	9.20	10.39	11.68	13.08
	$C_{AB}$	0.52	0.53	0.55	0.56	0.56	0.57	0.57	0.58	0.58
2.6	$k_{AB}$	4.67	5.42	6.26	7.18	8.20	9.31	10.53	11.86	13.29
	$C_{AB}$	0.52	0.53	0.54	0.55	0.56	0.56	0.56	0.57	0.57
2.8	$k_{AB}$	4.68	5.44	6.29	7.23	8.27	9.41	10.66	12.01	13.48
	$C_{AB}$	0.52	0.53	0.54	0.55	0.55	0.55	0.56	0.56	0.56
3.0	$k_{AB}$	4.69	5.46	6.33	7.28	8.34	9.50	10.77	12.15	13.65
	$C_{AB}$	0.52	0.53	0.54	0.54	0.55	0.55	0.55	0.55	0.55
3.5	$k_{AB}$	4.71	5.50	6.40	7.39	8.48	9.69	11.01	12.46	14.02
	$C_{AB}$	0.51	0.52	0.53	0.53	0.54	0.54	0.54	0.53	0.53
4.0	$k_{AB}$	4.72	5.54	6.45	7.47	8.60	9.84	11.21	12.70	14.32
	$C_{AB}$	0.51	0.52	0.52	0.53	0.53	0.52	0.52	0.52	0.52
4.5	$k_{AB}$	4.73	5.56	6.50	7.54	8.69	9.97	11.37	12.89	14.57
	$C_{AB}$	0.51	0.52	0.52	0.52	0.52	0.52	0.51	0.51	0.51
5.0	$k_{AB}$	4.75	5.59	6.54	7.60	8.78	10.07	11.50	13.07	14.77
	$C_{AB}$	0.51	0.51	0.52	0.52	0.51	0.51	0.51	0.50	0.49
6.0	$k_{AB}$	4.76	5.63	6.60	7.69	8.90	10.24	11.72	13.33	15.1
	$C_{AB}$	0.51	0.51	0.51	0.51	0.50	0.50	0.49	0.49	0.48
7.0	$k_{AB}$	4.78	5.66	6.65	7.76	9.00	10.37	11.88	13.54	15.34
	$C_{AB}$	0.51	0.51	0.51	0.50	0.50	0.49	0.48	0.48	0.47
8.0	$k_{AB}$	4.78	5.68	6.69	7.82	9.07	10.47	12.01	13.70	15.54
	$C_{AB}$	0.51	0.51	0.50	0.50	0.49	0.49	0.48	0.47	0.46
9.0	$k_{AB}$	4.80	5.71	6.74	7.89	9.18	10.61	12.19	13.93	15.83
	$C_{AB}$	0.50	0.50	0.50	0.49	0.48	0.48	0.47	0.46	0.45

Source: Ref. 14-7. Courtesy of the Portland Cement Association.

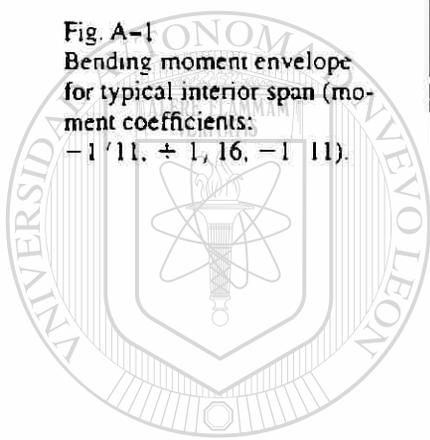
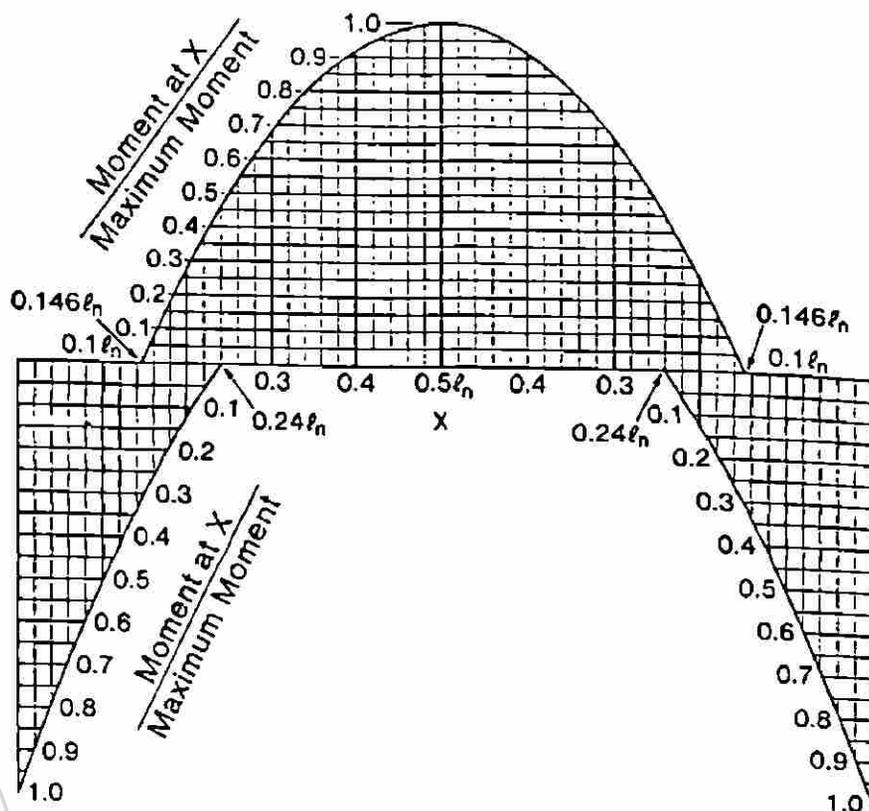
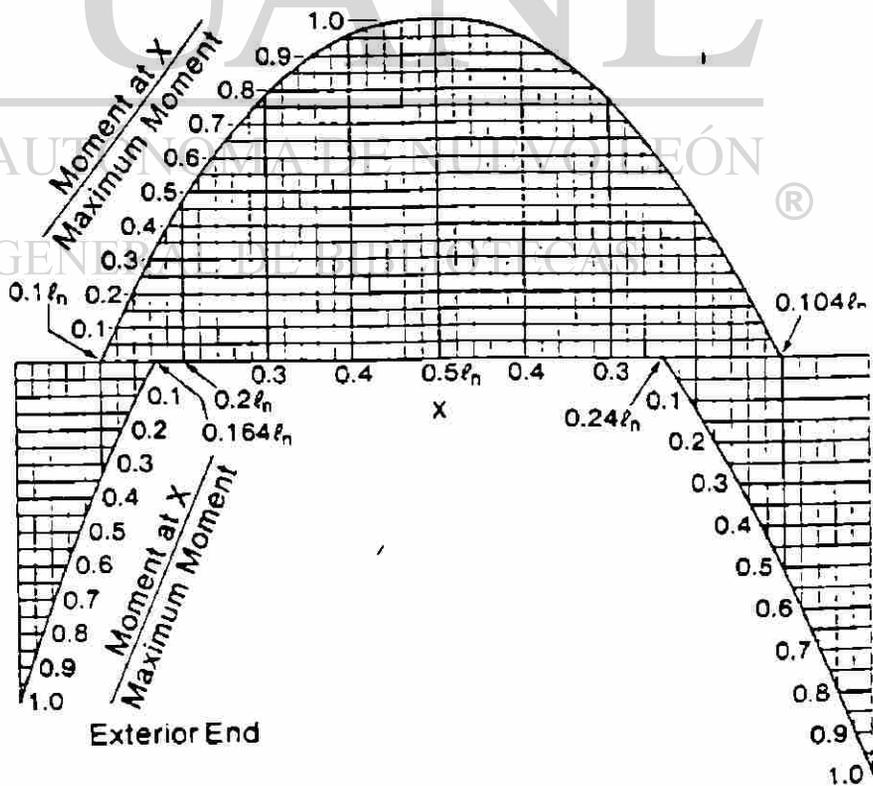


Fig. A-1  
Bending moment envelope  
for typical interior span (mo-  
ment coefficients:  
 $-1/11, +1/16, -1/11$ ).



UANL  
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE TLAXCALA  
DIRECCIÓN GENERAL DE INVESTIGACIÓN

Fig. A-2  
Bending moment envelope  
for exterior span with exterior  
support built integrally with a  
column (moment coefficients:  
 $-1/16, -1/14, -1/10$ ).



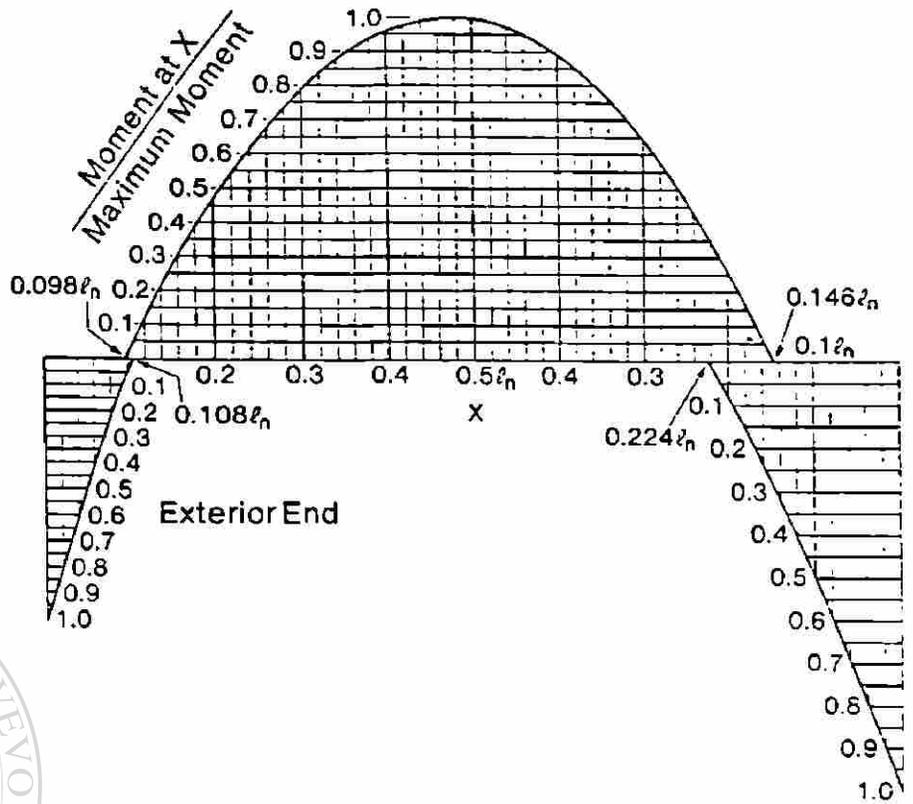


Fig. A-3  
 Bending moment envelope  
 for exterior span with exterior  
 support built integrally with a  
 spandrel beam or girder (mo-  
 ment coefficients:  
 -1/24, -1/14, -1/10).

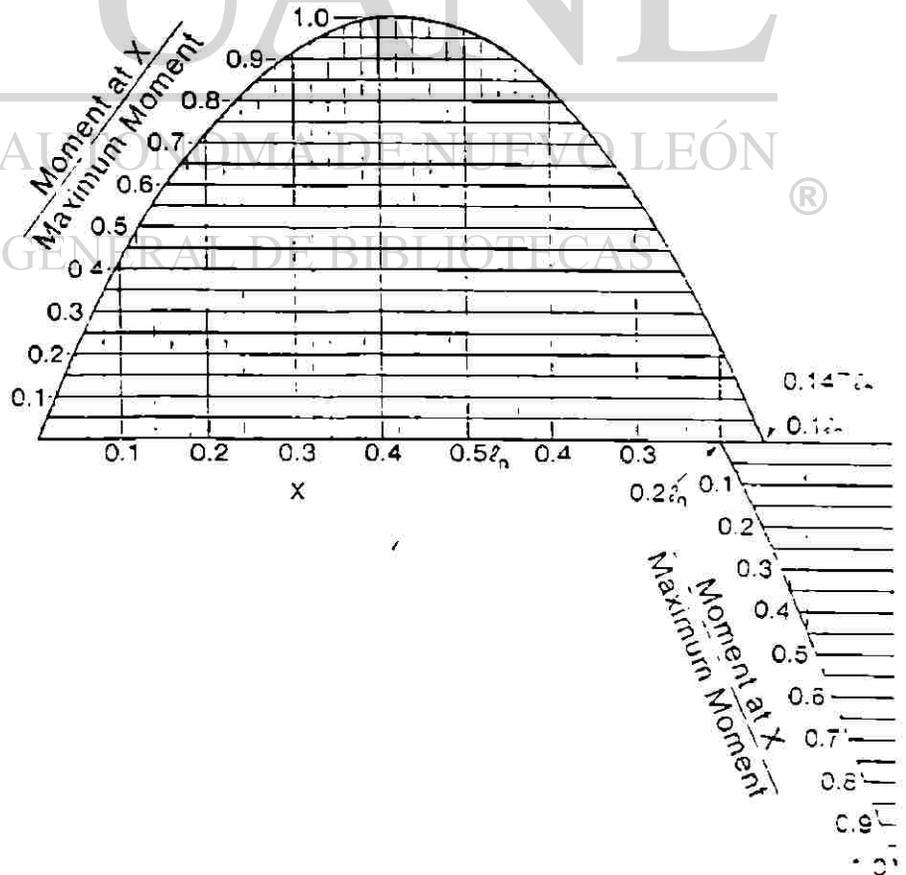
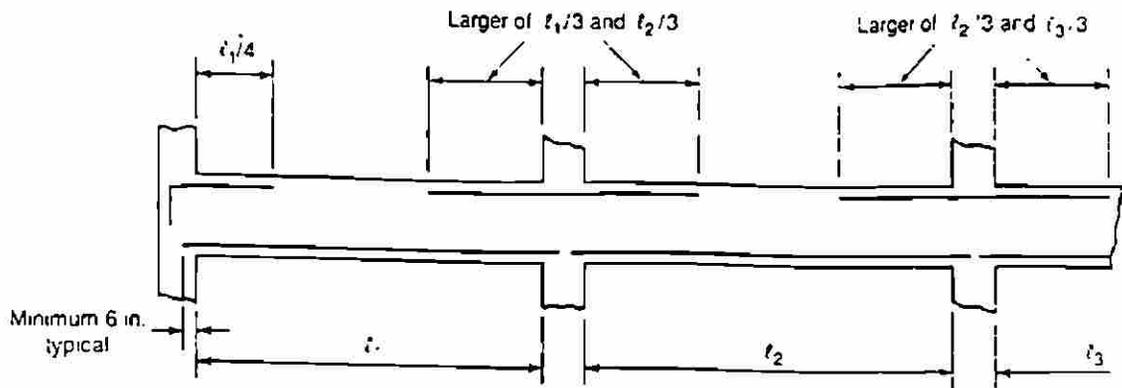
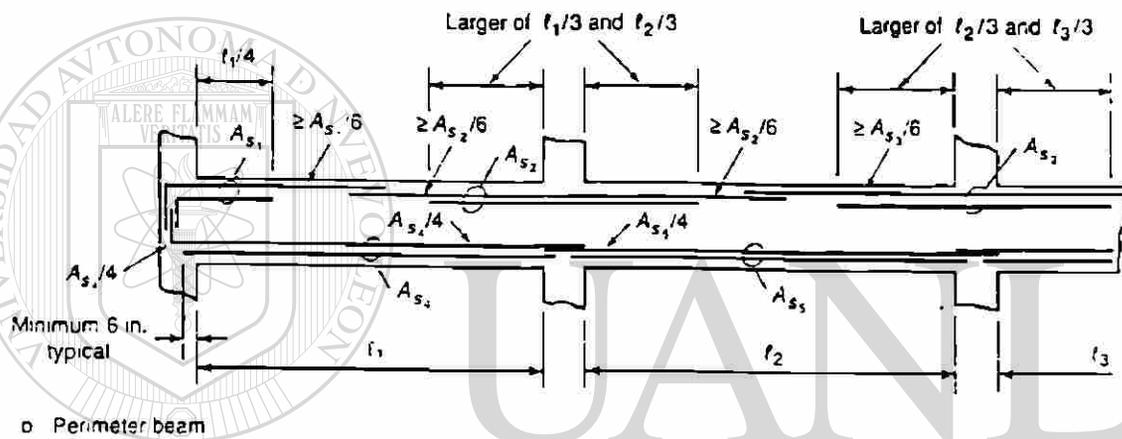


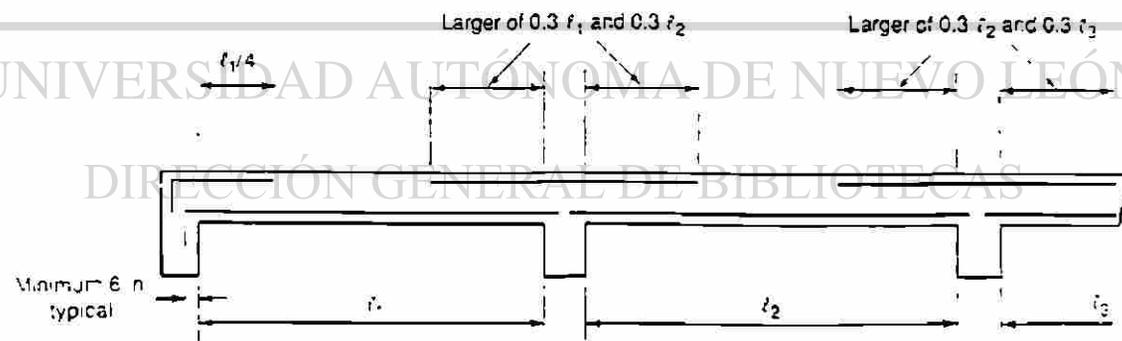
Fig. A-4  
 Bending moment envelope  
 for exterior span with discontin-  
 uous end unrestrained  
 (moment coefficients:  
 0, -1/11, -1/10).



(a) Beam with closed stirrups.  
If closed stirrups are not provided, see ACI Sec 7.13



(b) Perimeter beam



(c) One-way slab

E - A - 5  
Standard bar details

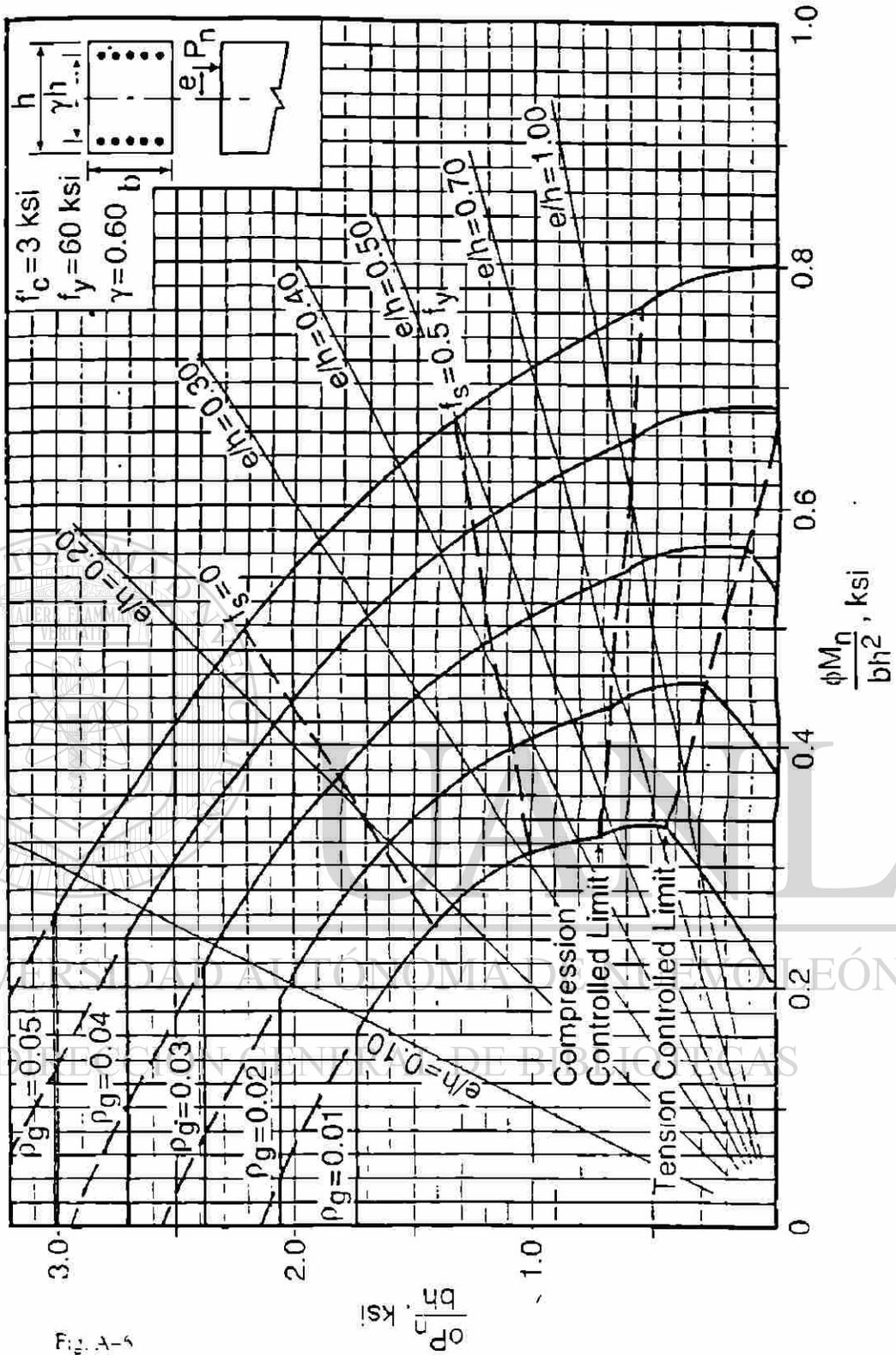


Fig. A-5  
 Non-dimensional interaction  
 diagram for tied columns  
 with bars in two faces.  
 $\gamma = 0.60$

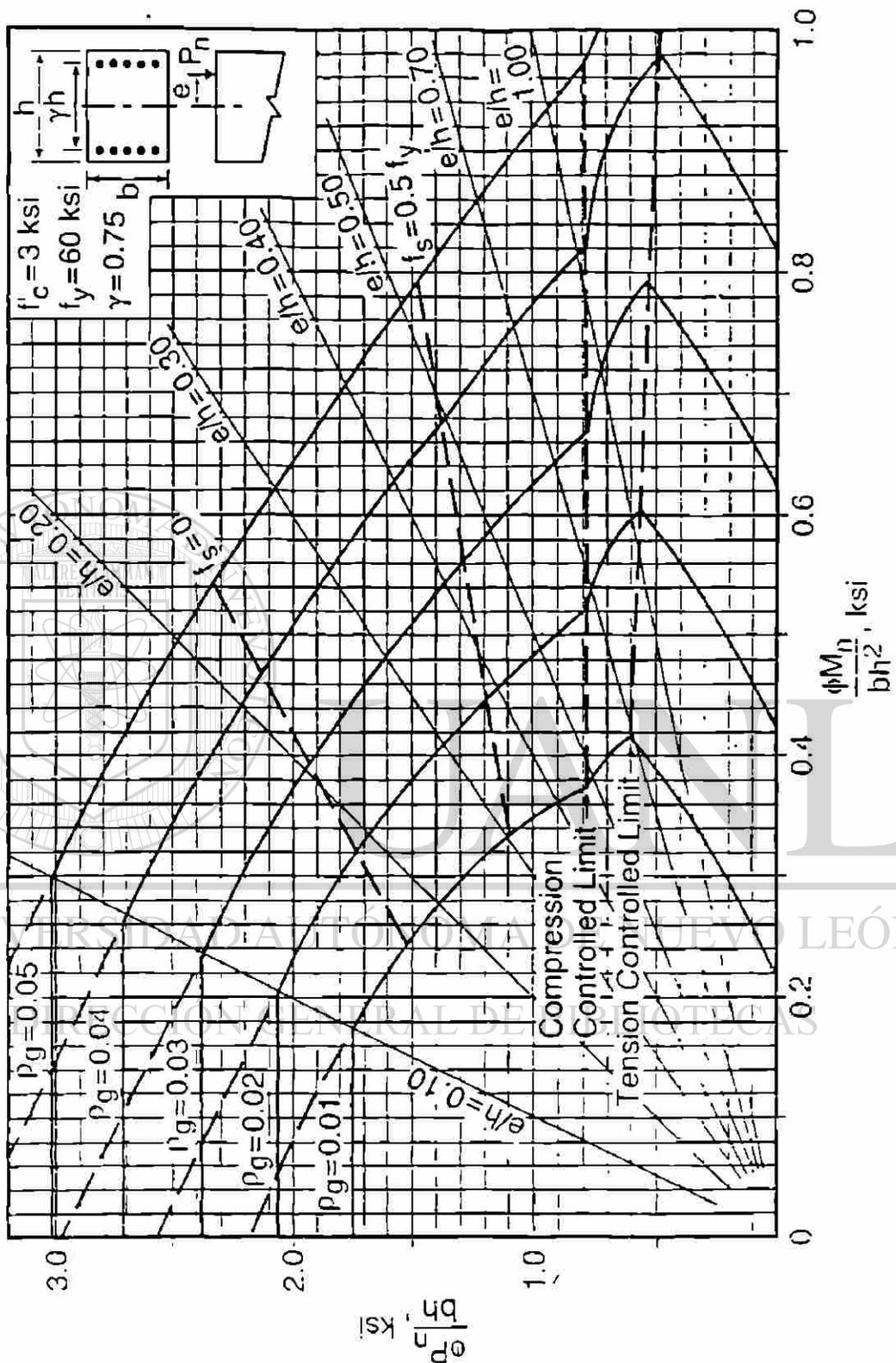


Fig. A 7  
 Nondimensional interaction  
 diagram for tied columns  
 with bars in two faces.  
 $\gamma = 0.75$

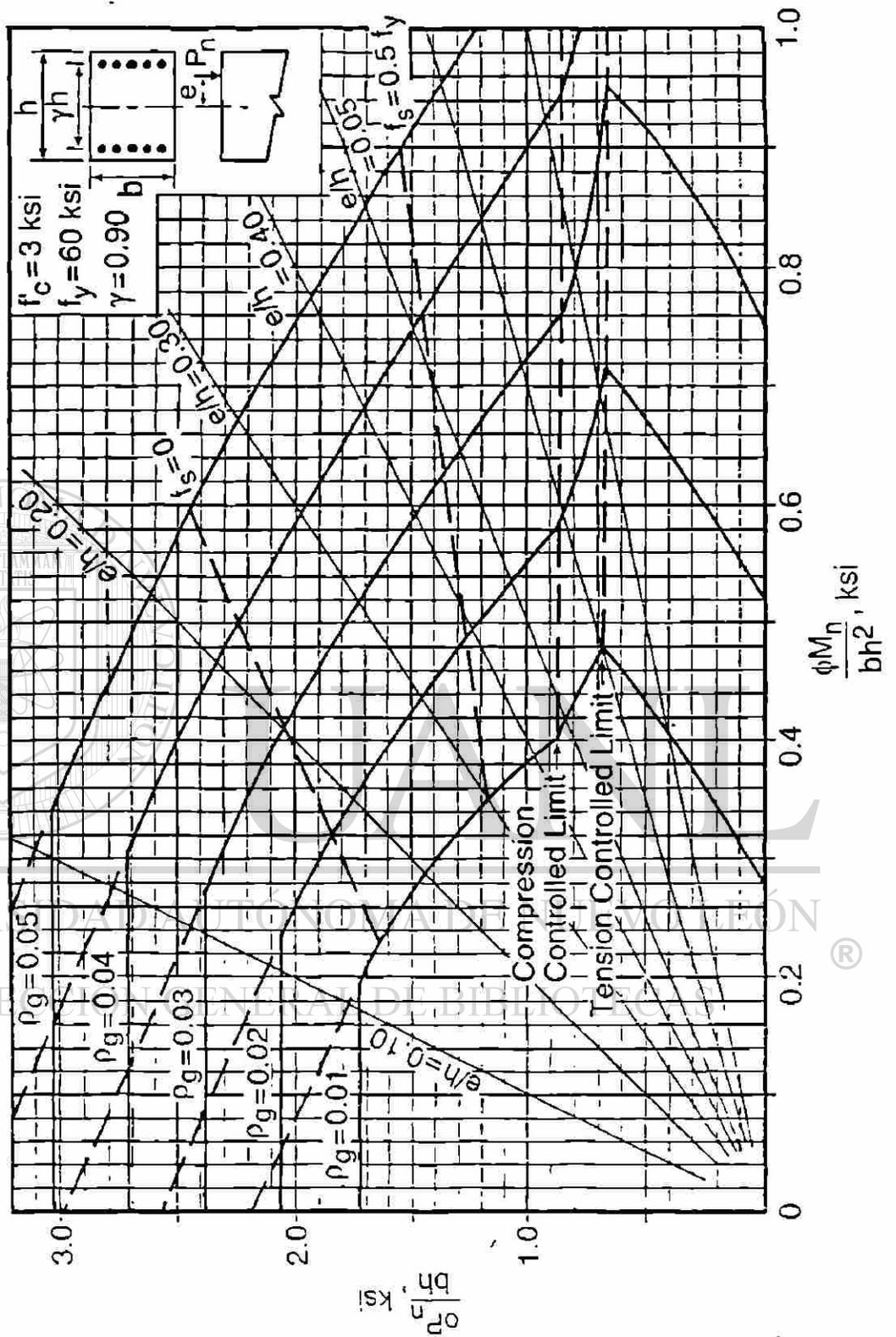


Fig A-8  
 Interaction diagram for tied  
 columns with bars in two  
 faces,  $\gamma = 0.90$ .



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECA

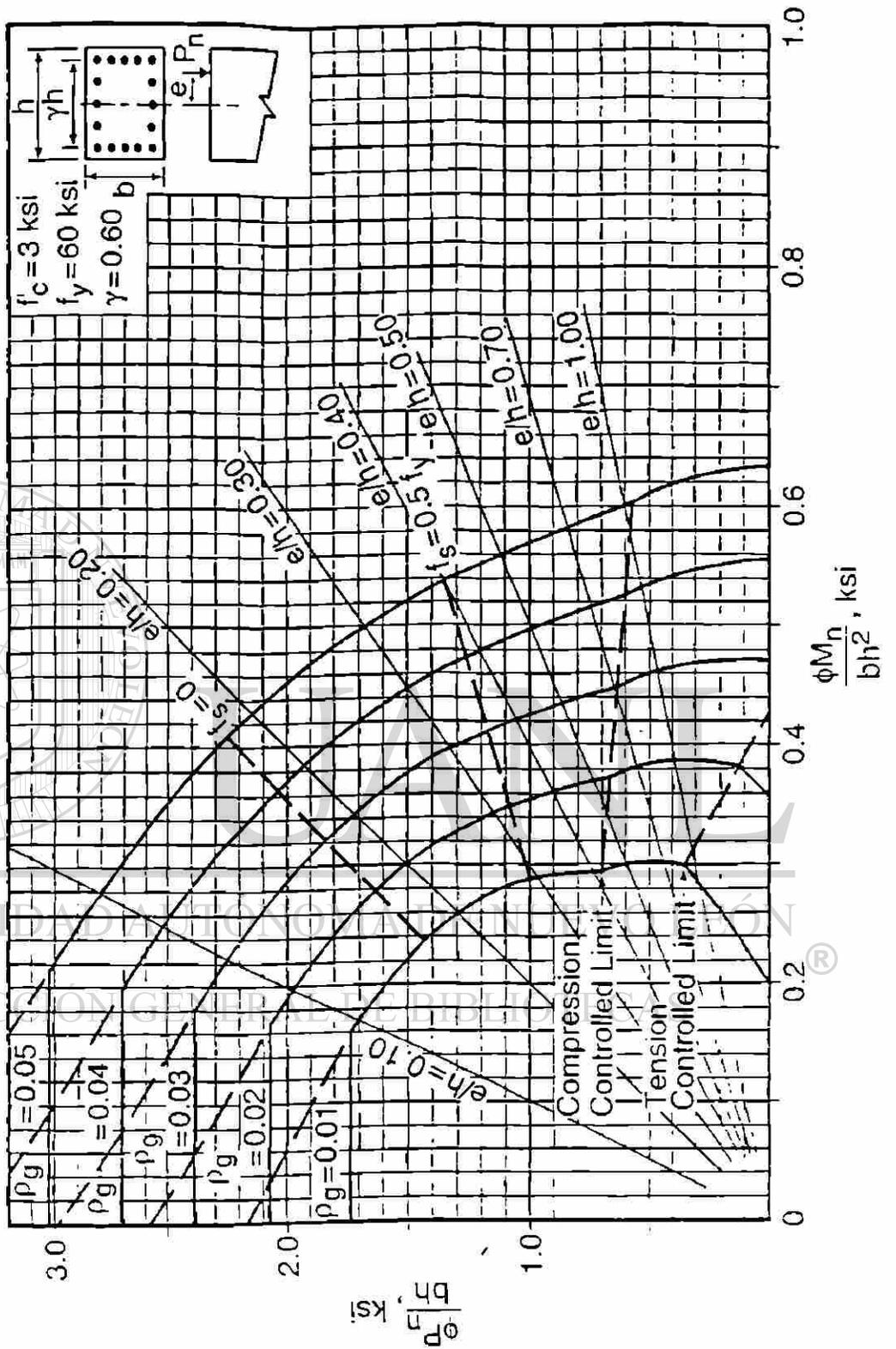


Fig. A-9  
 Interaction diagram for tied  
 columns with bars in four  
 faces.  $\gamma = 0.60$ .

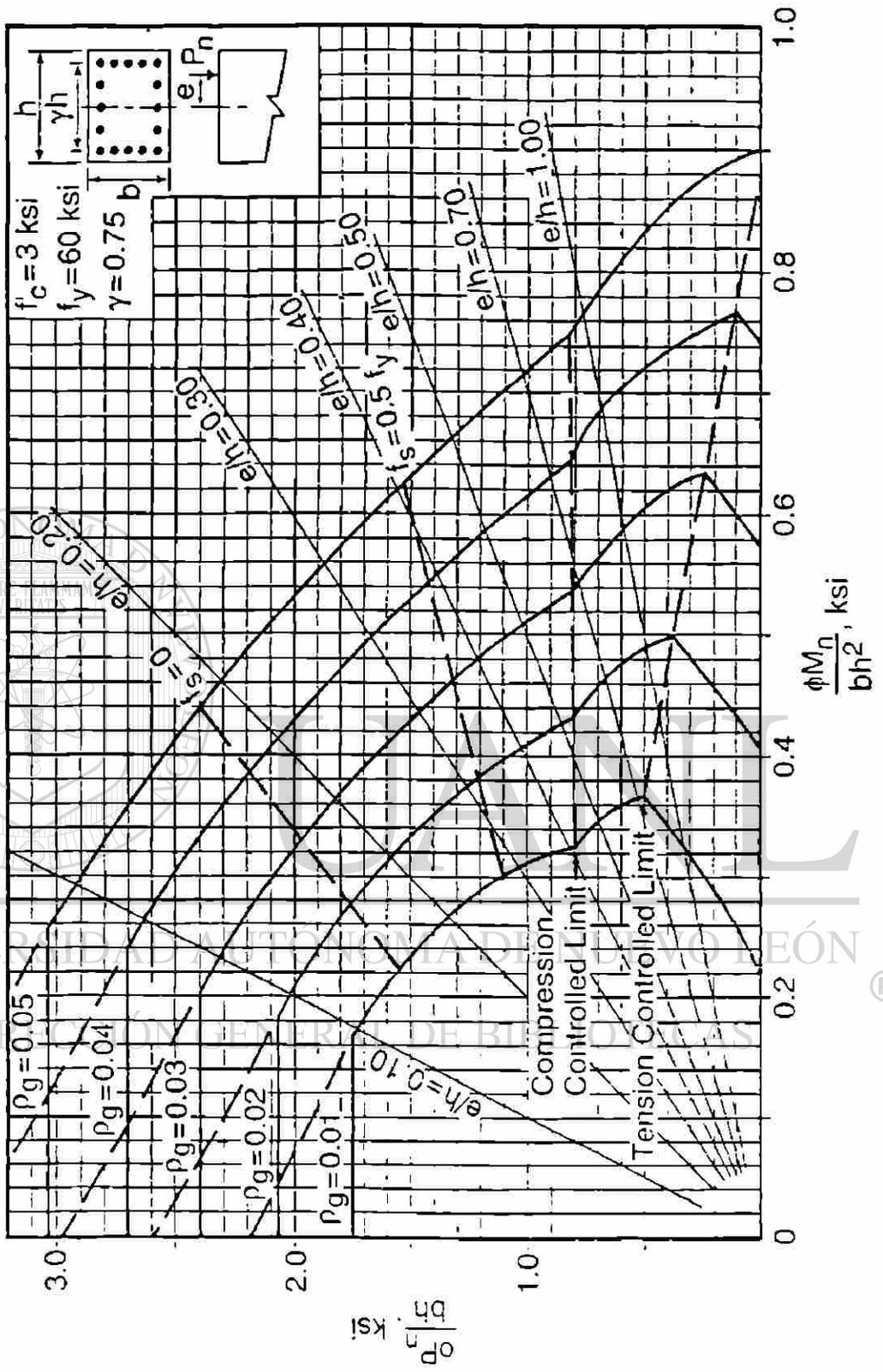


Fig. A-10  
 Interaction diagram for tied  
 columns with bars in four  
 faces.  $\gamma = 0.75$ .

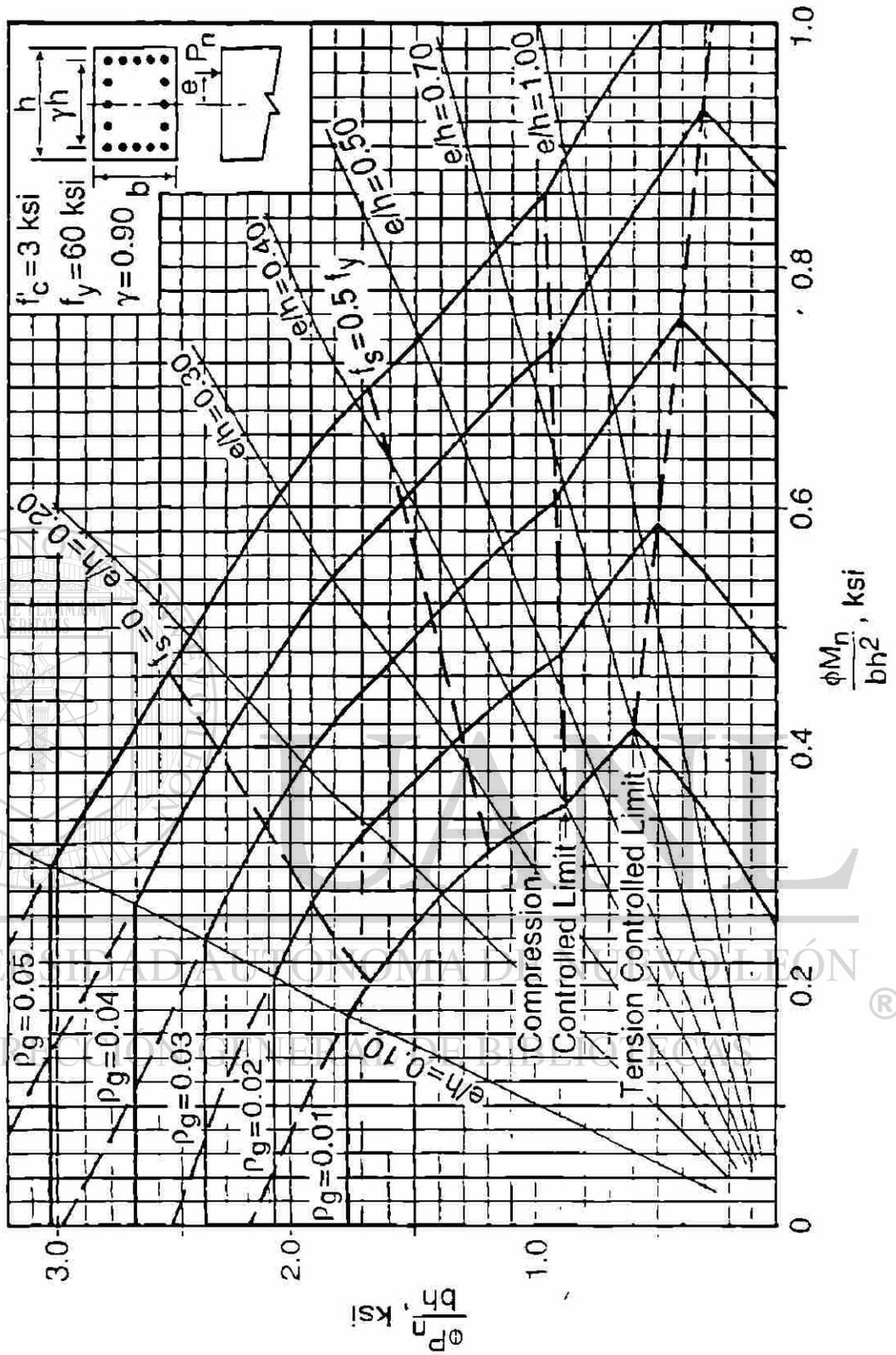


Fig. A-11  
 Interaction diagram for tied  
 columns with bars in four  
 faces.  $\gamma = 0.90$ .

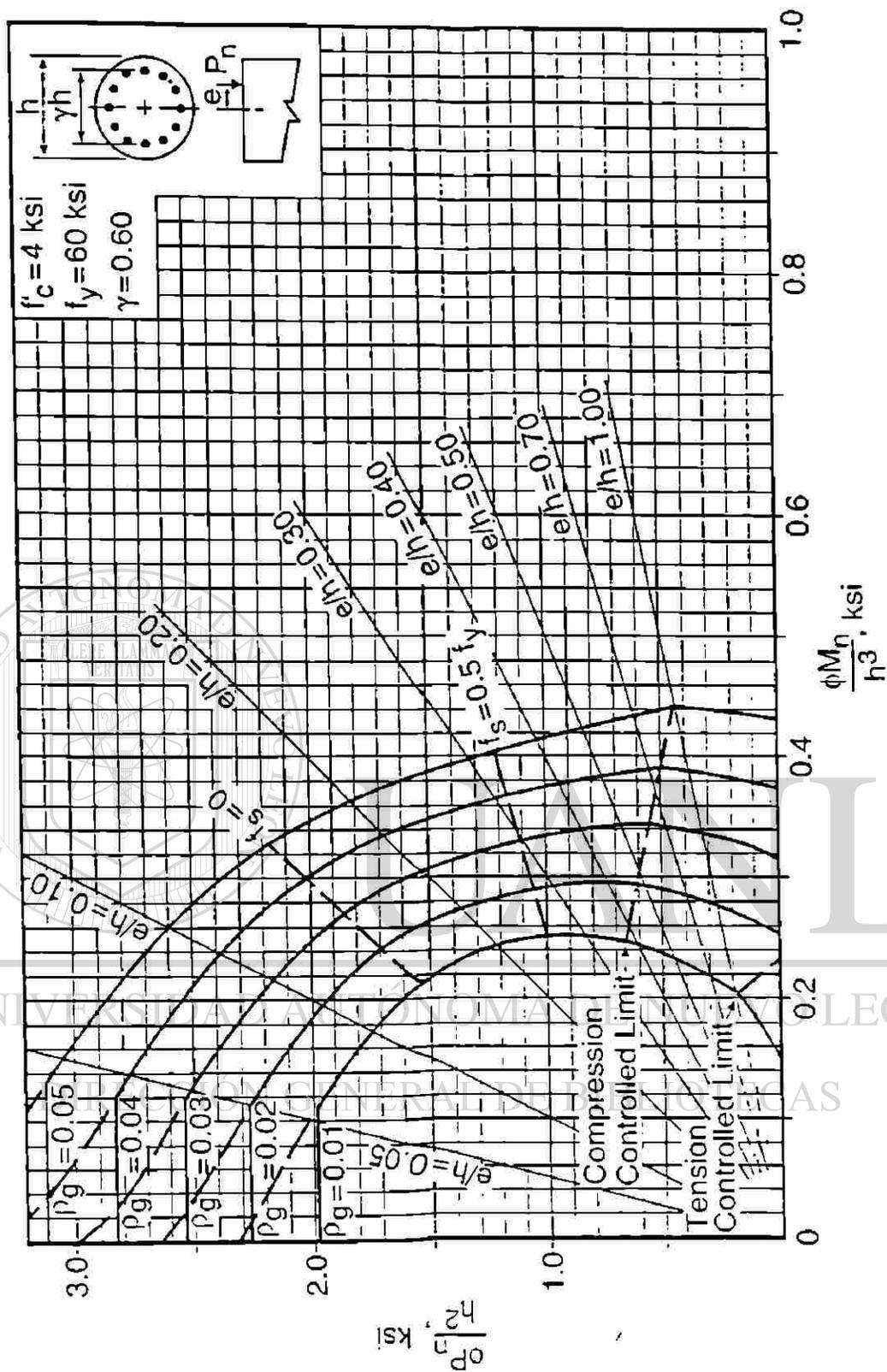


Fig. A-12  
 Interaction diagrams for spiral columns,  $\gamma = 0.60$ .

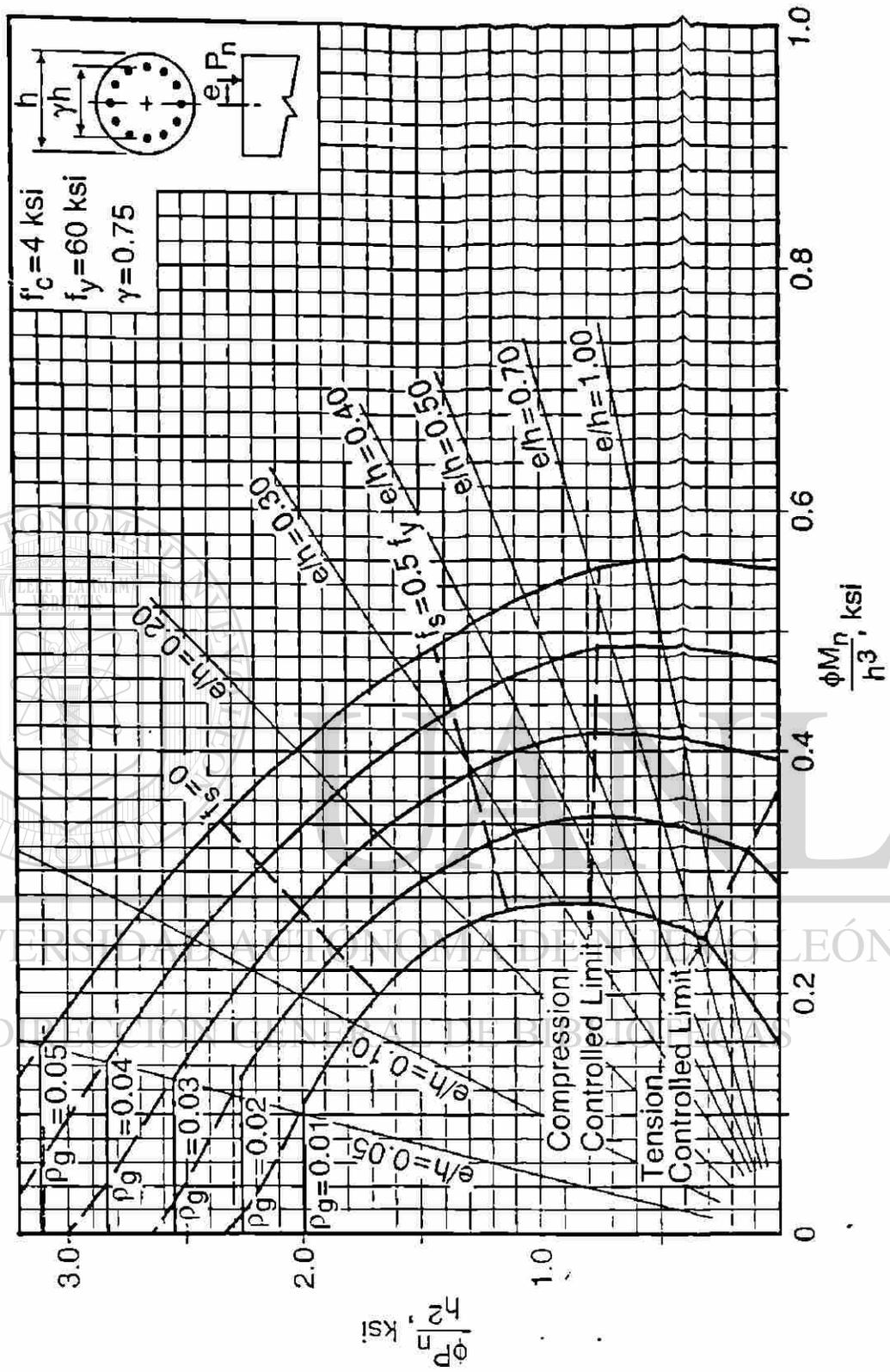


Fig. A-12  
 Interaction diagrams for spiral columns,  $\gamma = 0.75$ .

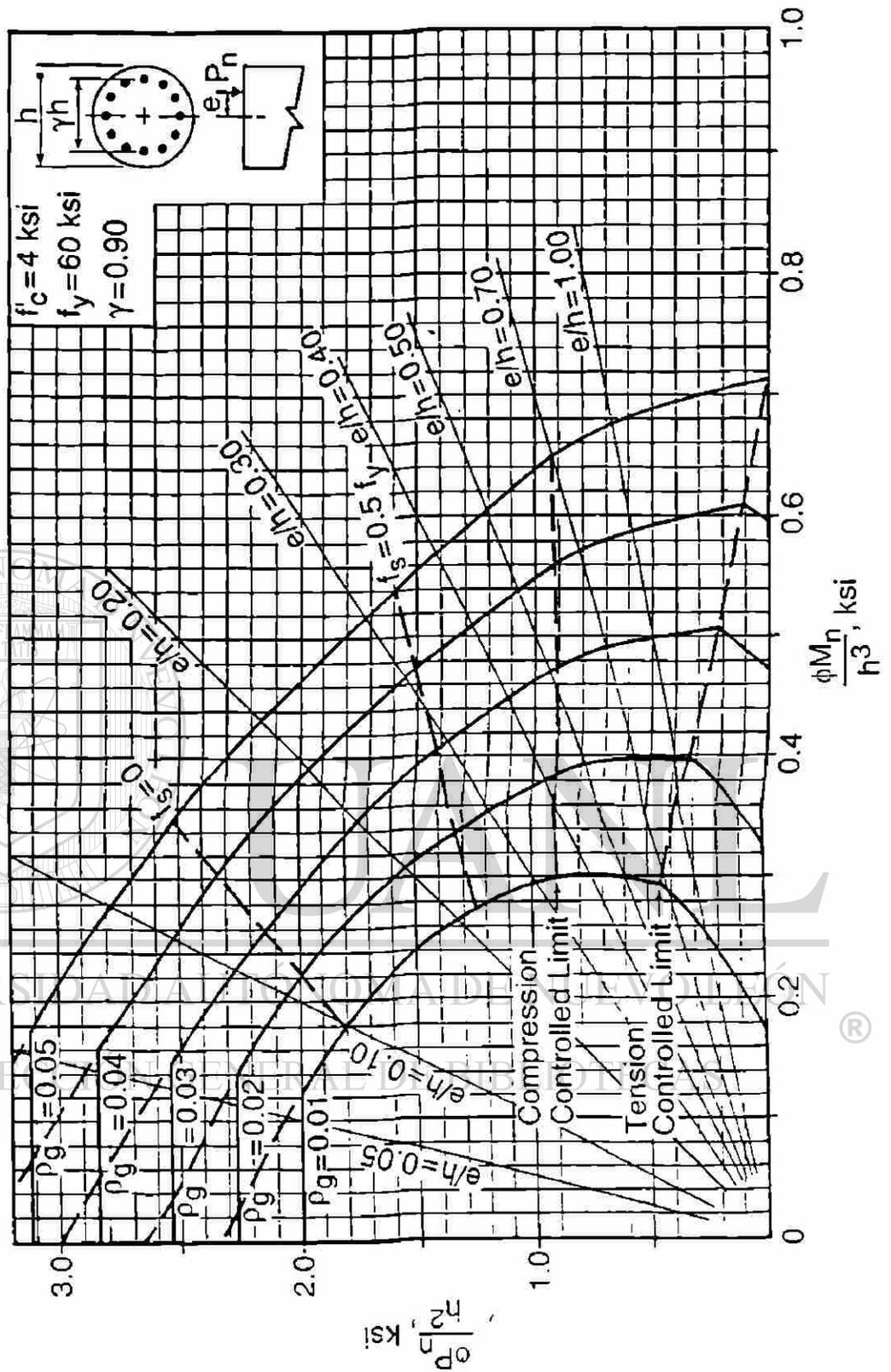


Fig. A-14  
 Interaction diagrams for spiral columns,  $\gamma = 0.90$ .

**APENDICE B**



**PRUEBAS DE LABORATORIO REQUERIDAS PARA  
DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO.**

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Se presenta en este Apéndice una relación de las especificaciones de la Norma Oficial Mexicana que deben cumplir los agregados naturales fino y grueso para usarse en la fabricación de concreto hidráulico, exceptuando los agregados ligeros, así como los requisitos que deben cumplir las varillas corrugadas y lisas de acero, de los grados 30, 42 y 52, para refuerzo de concreto.

REFERENCIA	TITULO
NOM-C-30	Muestreo de agregados
NOM-C-71	Método de prueba para determinar terrones de arcilla en agregados naturales.
NOM-C-72	Método de prueba para determinación de partícula ligeras en los agregados.
NOM-C-73	Determinación del peso unitario de los agregados.
NOM-C-75	Determinación de la sanidad de los agregados por medio del sulfato de sodio o del sulfato de magnesio.
NOM-C-76	Método de prueba para determinar el efecto de las impurezas orgánicas en los agregados finos sobre la resistencia de los morteros.
NOM-C-77	Método de prueba para análisis granulométrico de agregados fino y grueso.
NOM-C-83	Determinación de la resistencia a la compresión de cilindros de concreto.
NOM-C-84	Método de prueba para determinar por medio de lavado de materiales que pasan la malla No. 200 en agregados minerales.
NOM-C-88	Determinación de impurezas orgánicas en el agregado fino (Arena), para concretos.
NOM-C-164	Determinación del peso específico y de la absorción del agregado grueso.
NOM-C-165	Determinación del peso específico y absorción del agregado fino.
NOM-C-166	Determinación del contenido total de humedad de los agregados, mediante secado.
NOM-C-170	Reducción de las muestras de agregados, obtenidas en el campo, al tamaño requerido para las pruebas.
NOM-C-180	Método de prueba para la determinación de la reactividad potencial de los agregados con los álcalis del cemento por medio de barras de mortero.

NOM-C-191	Determinación de la resistencia a la flexión del concreto (usando una viga simple, con carga en los tercios del claro).
NOM-C-196	Resistencia a la abrasión de los agregados gruesos de tamaño grande usando la máquina de los angeles.
NOM-C-205	Determinación de la resistencia del concreto a la congelación y deshielo acelerados.
NOM-C-219	Resistencia a la abrasión de agregados gruesos de tamaño pequeño usando la máquina de los angeles.
NOM-C-265	Examen petrografico de los agregados para concreto.
NOM-C-270	Resistencia al rayado de las partículas del agregado grueso.
NOM-C-271	Agregadps - Reactividad potencial (método químico).
NOM-C-272	Reactividad potencial de rocas de carbonatos en agregados para concreto con los alcalis (Método de cilindro de roca).
NOM-C-282	Agregados para concreto - Cambio potencial de volumen de combinaciones cemento-agregado.
NOM-C-231	Industria siderurgica - Cribas de laboratorio para clasificación de materiales granulares - Especificaciones.
NOM-B-1	Métodos de análisis químico para determinar la composición de aceros y fundiciones.
NOM-B-78	Métodos de análisis fotométricos para determinar la composición química de aceros y fundiciones.
NOM-B-113	Prueba de doblado para productos de acero
NOM-B-310	Métodos de prueba a la tensión para productos de acero
NOM-B-434	Método de prueba para determinar el peso unitario y el área transversal de las varillas lisas y corrugadas para refuerzo de concreto.

Se recomienda al lector consultar las especificaciones de la ASTM (American Society of Testing Materials) para complementar estas Pruebas.

## APENDICE C.

### BIBLIOGRAFIA

- C – 1.- Reglamento para las construcciones de Concreto Estructural y comentarios ACI 318 – 95 y ACI 318 R – 95.
- C – 2.- Reinforced Concrete Mechanics and design.  
Third Edition, Jamex G. Mc. Gregor.
- C – 3.- Aspectos Fundamentales del Concreto Reforzado.  
Tercera Edición.  
González Cuevas – Robles.  
Limusa.
- C – 4.- Concreto Reforzado  
Edward G. Nawy  
Prentice Hall.
- C – 5.- Diseño de Estructuras de Concreto.  
Arthur H. Nilson – George Winter.  
11ª. Edition.  
Mc. Graw Hill.
- 
- C – 6.- Theory of Elastic Stability.  
S.P. Timoshenki and J. M. Gere.  
3ª. Ed. Mc. Graw Hill.
- C – 7.- Mecánica de Materiales.  
Gere – Timoshenko  
3ª. Ed. Grupo Editorial Iberoamérica.
- C – 8 - CRSI Handbook  
7ª Ed Concrete Reinforcing Steel Insitute
- C – 9 - Concreto Reforzado en Ingenieria  
Boris Bresler. Ed. Limusa
- C – 10 - Estructuras de Concreto Reforzado  
R Park y T Paulay Ed Limusa
- C – 11 - Fundamentos de Concreto Reforzado  
Phil M. Ferguson. CECSA

## CONCLUSIONES

Se pretende en el presente trabajo aplicar en forma directa a las leyes de la estática y el comportamiento del concreto reforzado.

Tomando en cuenta no solo las ecuaciones de diseño sino también aspectos prácticos de la construcción.

Se cubre lo necesario para un primer curso a nivel Licenciatura de Concreto Reforzado en lo referente a flexión, cortante, desarrollo, columnas y análisis P- $\Delta$  de marcos.

Se intenta que sean de utilidad para el lector los ejemplos completos y detallados paso a paso que aunque algunos se presentan en el Sistema Inglés o internacional, se pretende que al estudiante le sirva de práctica la conversión al sistema métrico utilizando el Reglamento ACI 318-95 en su versión en español.

Se recomienda al lector documentarse en el estudio de los materiales (concreto y acero de refuerzo), serviciabilidad (agrietamiento) vigas continuas y losas en una dirección, losas en dos direcciones, cimentaciones, juntas, ménsulas, muros de cortante y en el diseño de estructuras de concreto resistentes a sismos para intentar lograr un nivel competitivo que requiere la práctica de un Diseñador Profesional.

Agradezco la crítica y los comentarios que enriquezcan la calidad y amplitud de este modesto trabajo con la sana intención de hacerlo más útil (tanto como consulta para cualquier lector interesado como y en forma especial) para mejorar el nivel académico de nuestros estudiantes de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Nuevo León, de la cual me siento orgulloso de pertenecer.

**Javier Garza Cortina.**

# RESUMEN AUTOBIOGRAFICO

## JAVIER GARZA CORTINA

Candidato para el Grado de Maestro en Ciencias con Especialidad en  
Ingeniería Estructural



Tesis: UN TEXTO PARA LA ENSEÑANZA DEL DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO REFORZADO CONFORME AL REGLAMENTO ACI 318-95.

Campo de Estudio: Ingeniería Estructural

Biografía: Datos personales: Nace en Pesquería, Nuevo León, hijo de Irineo Garza Gómez y Alicia Cortina Gutiérrez.

Educación: Egresado de la Universidad Autónoma de Nuevo León, con Licenciatura en Ingeniería Civil en 1970, estudiando posteriormente la Especialidad en Vías Terrestres y la Maestría en Ingeniería Estructural.

### Experiencia

Profesional: De 1968 a 1975 Director de la Empresa Concreto, S.A., filial del Grupo Industrial de la Construcción. De 1975 a 1978 Calculista de la Empresa Losas Reticulares, S.A. de C.V. Desde 1973 a la fecha Catedrático de la Facultad de Ingeniería Civil de la U.A.N.L. en Álgebra, Estática, Resistencia de Materiales, Cálculo Diferencial e Integral, Dibujo, Análisis Estructural y Diseño de Estructuras de Acero y Concreto Reforzado. Diseño, Supervisión y Construcción de Obras en la localidad desde 1969.

