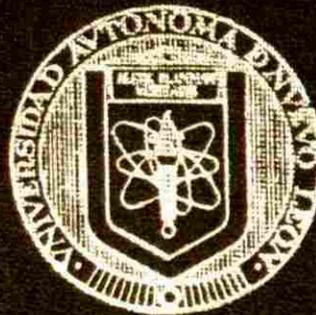


UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE INGENIERIA CIVIL



ESTUDIO ANALITICO DE LOS EFECTOS CAUSADOS  
POR EL AISLAMIENTO DE LAS VIBRACIONES EN  
CIMENTACIONES PARA MAQUINARIA INDUSTRIAL

POR

CESAR ANTONIO JUAREZ ALVARADO

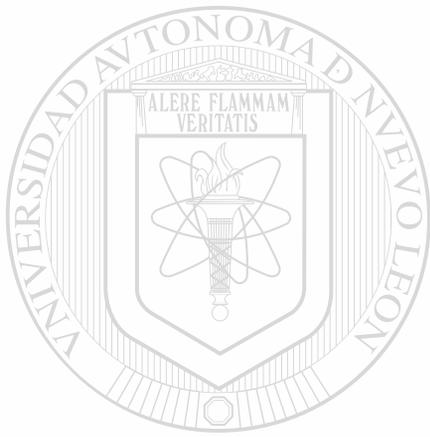
COMO REQUISITO PARCIAL  
PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRIA EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN  
INGENIERIA ESTRUCTURAL

DICIEMBRE DE 1998

TM  
TJ249  
.J8  
1998  
c.1

ESTUDIO ANALITICO DE LOS EFECTOS CAUSADOS  
POR EL AISLAMIENTO DE LAS VIBRACIONES EN  
CIMENTACIONES PARA MAQUINARIA INDUSTRIAL

C  
A  
S  
A



# UANL

---

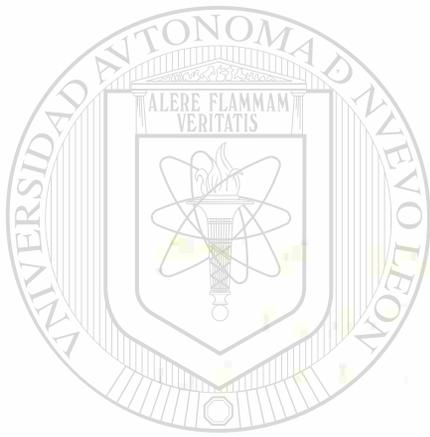
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERIA CIVIL



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

REQUISITO PARCIAL

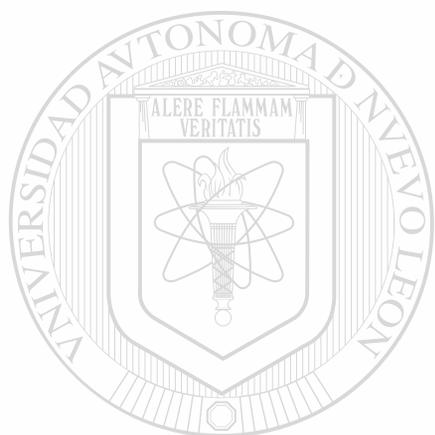
DE TENER EL GRADO

DE MAESTRÍA EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN

INGENIERIA ESTRUCTURAL

INSTRUMENTACIÓN

TM  
TJ249  
J8  
199  
.1



# UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



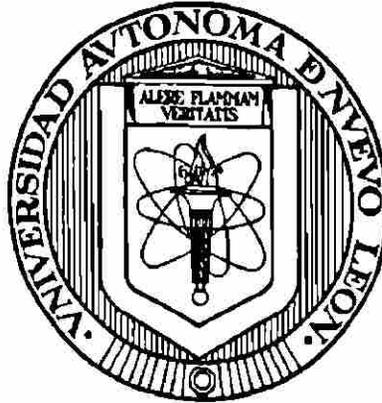
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

MURÚ RANGEL  
ERIS



**UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON**

**FACULTAD DE INGENIERIA CIVIL**



**ESTUDIO ANALÍTICO DE LOS EFECTOS CAUSADOS POR EL  
AISLAMIENTO DE LAS VIBRACIONES EN CIMENTACIONES  
PARA MAQUINARIA INDUSTRIAL**

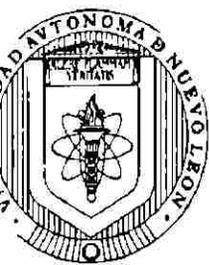
Por

**CÉSAR ANTONIO JUÁREZ ALVARADO**

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

**Como requisito parcial para obtener el Grado de  
MAESTRIA EN CIENCIAS con Especialidad en  
Ingeniería Estructural**

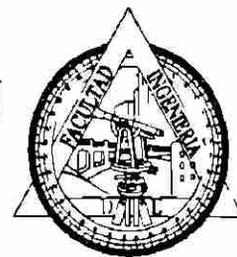
**Diciembre, 1998**



UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

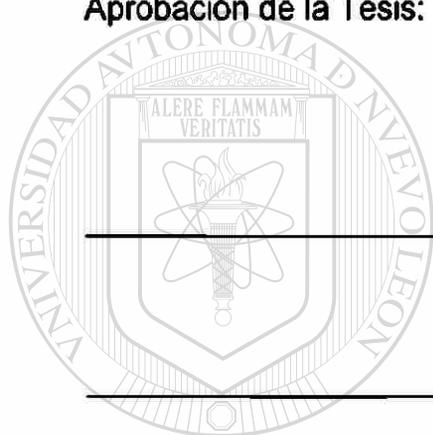
FACULTAD DE INGENIERIA CIVIL U.A.N.L.

SECRETARIA DE ESTUDIOS DE POSTGRADO



**ESTUDIO ANALÍTICO DE LOS EFECTOS CAUSADOS POR EL  
AISLAMIENTO DE LAS VIBRACIONES EN CIMENTACIONES  
PARA MAQUINARIA INDUSTRIAL**

**Aprobación de la Tesis:**

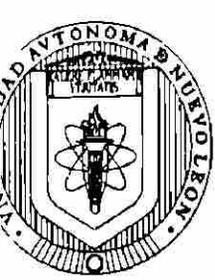


Asesor de la Tesis  
Dr. Ricardo González Alcorta

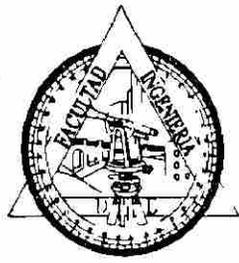
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Secretario de la División de Estudios de Postgrado  
Dr. Ricardo González Alcorta



UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON  
 FACULTAD DE INGENIERIA CIVIL  
 SECRETARIA DE ESTUDIOS DE POSTGRADO



COMPROBANTE DE CORRECCION

Tesista: CÉSAR ANTONIO JUÁREZ ALVARADO

Tema de la tesis: ESTUDIO ANALÍTICO DE LOS EFECTOS CAUSADOS POR EL AISLAMIENTO DE LAS VIBRACIONES EN CIMENTACIONES PARA MAQUINARIA INDUSTRIAL

Este documento certifica la corrección DEFINITIVA del trabajo de tesis arriba identificado, en los aspectos: ortográfico, metodológico y estilístico.

Recomendaciones adicionales:

NINGUNA

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
 DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Nombre y firma de quien corrigió:

*Ramón Longoria*  
 Arq. Ramón Longoria Ramírez

El Secretario de Posgrado:

*Ricardo*  
 Dr. Ricardo González Alcorta

Ciudad Universitaria, a 7 de diciembre de 1998.

San Nicolás de los Garza, N.L. a 4 de diciembre de 1998

DR. RICARDO GONZÁLEZ ALCORTA  
SECRETARIO DE LOS ESTUDIOS DE POSTGRADO  
FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL  
UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEÓN

Estimado Dr. González:

Por medio de la presente, solicito a Usted la tramitación correspondiente, para sustentar mi examen de grado, ya que he concluido con la elaboración de mi tesis titulada "Estudio Analítico de los Efectos Causados por el Aislamiento de las Vibraciones en Cimentaciones para Maquinaria Industrial"; la que elaboré como requisito para obtener el grado de Maestro en Ciencias con Especialidad en Ingeniería Estructural, habiendo sido aprobada en el aspecto técnico por mi asesor el Dr. Ricardo González Alcorta y en el aspecto ortográfico, metodológico y estilístico por el Arq. Ramón Longoria Ramírez.

Agradeciendo de antemano las atenciones que se sirva dar a la presente, me despido de usted quedando como su más y seguro servidor.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

ATENTAMENTE



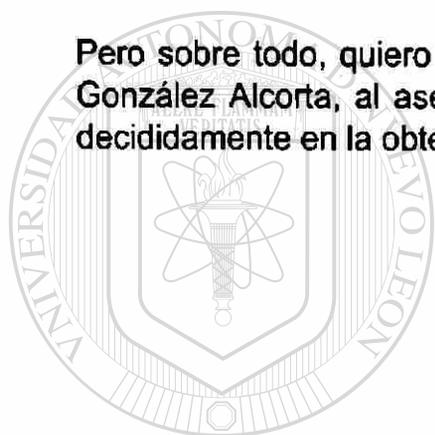
Ing. César A. Juárez Alvarado

## **AGRADECIMIENTOS**

De manera muy especial quiero agradecer a la Universidad Autónoma de Nuevo León y a su Facultad de Ingeniería Civil que me permitieron cursar esta Maestría.

A todos los maestros que, con sus consejos y conocimientos, me motivaron para finalizar mis estudios.

Pero sobre todo, quiero agradecer la valiosa ayuda que recibí del Dr. Ricardo González Alcorta, al asesorarme en el desarrollo de este trabajo y apoyarme decididamente en la obtención de este objetivo.



# UANL

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

## DEDICATORIA

***A mi amada esposa Gladys por todo el apoyo y la paciencia que me brindo para conseguir esta meta.***



***A mi querido hijo César Antonio que con su amor me motivo para tratar de ser un ejemplo para él***

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

®

***A mi familia que aunque se encuentra lejos su apoyo y su cariño nunca me faltaron.***

***Al recuerdo de mi adorada madre que siempre me ha impulsado para la obtención de mis objetivos.***

## RESUMEN

César Antonio Juárez Alvarado

Fecha de Graduación: diciembre, 1998

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ingeniería Civil

**Título del Estudio: ESTUDIO ANALÍTICO DE LOS EFECTOS CAUSADOS POR EL AISLAMIENTO DE LAS VIBRACIONES EN CIMENTACIONES PARA MAQUINARIA**

**Número de páginas: 255**

**Candidato para el Grado de Maestría en Ciencias con Especialidad en Ingeniería Estructural.**

**Area de Estudio: Dinámica Estructural**

**Propósito y Método del Estudio:** Las cimentaciones de maquinaria requieren una atención especial del ingeniero diseñador, ya que la operación del equipo genera fuerzas y momentos dinámicos desbalanceados. La cimentación de la maquinaria transmite las cargas dinámicas al suelo de desplante y éstas se adicionan a las cargas estáticas debidas a la combinación del peso de la maquinaria y del bloque de soporte. La práctica común en el diseño y construcción de cimentaciones para maquinaria fue la de proporcionar grandes masas de concreto para controlar las amplitudes de vibración. Aunque esto resultó satisfactorio durante algún tiempo, actualmente se buscan las soluciones más eficientes y económicas. Es así como se ha extendido el uso de los sistemas de aisladores de vibración, con la idea fundamental de reducir las amplitudes y tener menores masas de concreto en la cimentación. En este trabajo se evaluó analíticamente los modelos dinámicos de cimentaciones para maquinaria con y sin aislamiento y, se determinó el efecto del aislamiento de la vibración.

**Contribuciones y Conclusiones:** La veracidad de los resultados obtenidos de los modelos matemáticos discretos, depende en gran medida de los valores elegidos o calculados para la masa, el coeficiente de amortiguamiento y la constante de rigidez. La necesidad de predecir más exacta y completamente el comportamiento dinámico de las cimentaciones para maquinaria, trae inevitablemente consigo el planteamiento de nuevos y más complicados problemas que se deben resolver. Por tal motivo es esencial entender el verdadero núcleo del problema, esto es, la evaluación de la respuesta del cimiento sujeto a efectos dinámicos.

FIRMA DEL ASESOR:



## PROLOGO

El propósito fundamental que se persigue en este trabajo es el de aportar algunas ideas relacionadas con el aislamiento de vibraciones en maquinarias, aplicando conceptos teóricos que pudieran ser de utilidad al lector, en la solución de problemas prácticos, a los cuales se tenga que enfrentar.

Esta tesis se divide en nueve capítulos, los cuales se describirán brevemente a continuación:

**Capítulo 1. *Introducción.***- En este capítulo se menciona la relevancia que tiene el diseño de una cimentación para maquinaria, y los inconvenientes resultantes de los descuidos en el diseño y la construcción. Así también contiene información sobre el alcance y los objetivos de la tesis.

**Capítulo 2. *Los Tipos de Maquinaria y sus Cimentaciones.***- Se hace una breve descripción de los diferentes tipos de maquinaria que pueden originar vibraciones clasificándolas de acuerdo con su funcionamiento. También se establecen las características de las cimentaciones que se consideran adecuadas para cada tipo.

**Capítulo 3. *Propiedades Dinámicas del Suelo.***- En este capítulo se describen tanto los ensayos de laboratorio como los de campo, los cuales proporcionarán los parámetros del suelo, necesarios para el diseño.

**Capítulo 4. *Análisis de Vibraciones.***- Se presenta la teoría de las vibraciones para los modos de vibrar de un bloque de concreto. Este capítulo es la base de los capítulos siguientes.

**Capítulo 5. *Análisis del Bloque de Cimentación para Maquinaria.***- Se complementa la información del capítulo anterior y ofrece un procedimiento para el análisis y el diseño de cimentaciones en bloque, para maquinarias.

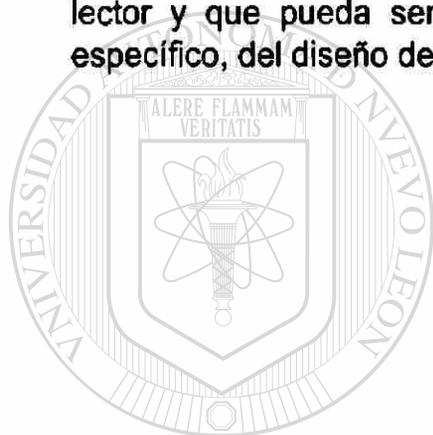
**Capítulo 6. *Sistemas de Aislamiento de Vibración.***- El concepto fundamental de la transmisibilidad de las vibraciones se define en esta parte de la tesis, y se mencionan los tipos de aisladores más usados comercialmente. También, se da un procedimiento de diseño considerando sistemas de aislamiento.

**Capítulo 7. *Evaluación Analítica de los Efectos del Aislamiento.***- Este capítulo es de suma importancia, ya que en el se presenta la aplicación de las teorías estudiadas anteriormente, y se obtienen algunos resultados que servirán para obtener las conclusiones.

**Capítulo 8. *Aspectos Constructivos de Cimentaciones para Maquinaria.***- Se presentan algunas sugerencias y recomendaciones generales para la adecuada construcción de bloques de cimentación, y la posible instalación de aisladores de vibración.

**Capítulo 9. *Discusión de Resultados y Conclusiones.***- Se interpretan los resultados obtenidos en el capítulo 7, y se concluye con respecto a los objetivos planteados en el inicio.

Espero sinceramente que lo tratado en este trabajo sea de utilidad para el lector y que pueda servir de referencia en la solución de algún problema específico, del diseño de cimentaciones para maquinaria.



César A. Juárez A.

UANL

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

# INDICE DE CONTENIDO

PROLOGO	viii
NOMENCLATURA	xiii

Capítulo	Página
1. INTRODUCCION .....	1
1.1 Alcance del Estudio .....	4
1.2 Objetivos .....	5
2. LOS TIPOS DE MAQUINARIA Y SUS CIMENTACIONES .....	6
2.1 Máquinas Reciprocantes .....	6
2.2 Máquinas Rotatorias .....	10
2.3 Máquinas de Impacto.....	16
2.4 Equipos Especiales.....	21
2.5 Tipos de Cimentaciones .....	23
2.6 Requerimientos Generales para Cimentaciones De Maquinaria.....	25
3. PROPIEDADES DINAMICAS DEL SUELO .....	28
3.1 Introducción .....	28
3.2 Procedimientos de Laboratorio.....	31
3.2.1 Ensayes de Pulsos Ultrasónicos .....	31
3.2.2 Ensaye de Columna Resonante.....	33
3.2.3 Ensaye de Péndulo de Torsión .....	37
3.2.4 Ensaye Triaxial Cíclico .....	40
3.2.5 Ensaye de Corte Simple Cíclico.....	44
3.2.6 Ensaye en Mesa Vibradora .....	49
3.3 Métodos de Campo.....	52
3.3.1 Ensayes de Ondas de Superficie .....	52
3.3.2 Ensaye de Refracción Sísmica .....	55
3.3.3 Ensaye de Resonancia Vertical .....	59

3.3.4	Ensaye de Resonancia Horizontal .....	63
3.3.5	Ensayes Up-hole y Down-hole .....	65
3.3.6	Ensaye Cross-hole .....	68
4.	ANALISIS DE VIBRACIONES.....	72
4.1	Modos de Vibración de una Cimentación en Bloque .....	72
4.2	Modo Translacional.....	75
4.2.1	Vibración Vertical .....	75
4.2.2	Vibración Horizontal ( Deslizamiento ) .....	93
4.3	Modo Rotacional.....	97
4.3.1	Vibración por Cabeceo.....	97
4.3.2	Vibración por Torsión .....	100
4.3.3	Vibración por Cabeceo - Deslizamiento .....	103
5.	ANALISIS DEL BLOQUE DE CIMENTACION PARA MAQUINARIA.....	112
5.1	Efecto de la Forma de la Cimentación en la Respuesta.....	112
5.2	Efecto del Encajonamiento de la Cimentación .....	118
5.3	Procedimiento de Diseño para el Bloque de Cimentación .....	120
5.4	Concepto de las Fuerzas Desbalanceadas Producidas por la Maquinaria .....	134
5.5	Amplitud de Vibraciones Permisibles .....	138
6.	SISTEMAS DE AISLAMIENTO DE VIBRACION .....	141
6.1	Transmisibilidad-Aislamiento Activos y Pasivos .....	141
6.2	El Principio de la Absorción de Vibración .....	146
6.3	Métodos Generales de Sistemas de Aislamiento .....	153
6.4	Características de los Aisladores de Vibración más comunes.....	157
6.5	Procedimiento de Diseño para Cimentaciones con Aisladores .....	165
6.6	Reducción de Amplitudes de Vibración en Cimentaciones de Maquinaria Existentes .....	170
7.	EVALUACION ANALITICA DE LOS EFECTOS DEL AISLAMIENTO .....	177
7.1	Planteamiento del Problema.....	177
7.2	Modelos Matemáticos .....	180
7.2.1	Vibración Vertical .....	180

7.2.2	Vibración Vertical + Aislamiento .....	185
7.2.3	Vibración Horizontal + Cabeceo .....	187
7.2.4	Vibración Horizontal + Cabeceo + Aislamiento .....	189
7.3	Solución a Casos Prácticos y Ejemplos Numéricos.....	191
<b>8.</b>	<b>ASPECTOS CONSTRUCTIVOS DE CIMENTACIONES PARA MAQUINARIA.....</b>	<b>222</b>
8.1	Construcción de Bloques de Cimentación .....	222
8.2	Instalación y Conexión de la Maquinaria a la Cimentación .....	226
8.3	Instalación de Resortes Aisladores de Vibración .....	230
8.4	Aspectos Generales.....	234
8.4.1	Cambio a la Frecuencia de la Cimentación.....	234
8.4.2	Adherencia entre Concreto Fresco y Endurecido ....	235
<b>9.</b>	<b>DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS Y CONCLUSIONES .....</b>	<b>236</b>
	<b>REFERENCIAS .....</b>	<b>241</b>
	<b>APENDICES .....</b>	<b>243</b>
	<b>APENDICE A.- Determinación de la Respuesta Dinámica Mediante un Análisis Modal .....</b>	<b>243</b>
	<b>APENDICE B.- Gráficas del Comportamiento Dinámico .....</b>	<b>246</b>
	<b>APENDICE C.- Cálculo de los Periodos y Formas Modales Usando el Programa CAL-91 .....</b>	<b>252</b>

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN <sup>®</sup>  
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

## NOMENCLATURA

$a$	Largo de la cimentación en planta
$a_z$	Aceleración de vibración
$a_h$	Aceleración horizontal
$a_o$	Término dimensional de frecuencia
$a_{o\phi}$	Frecuencia dimensional
$b$	Relación de masa, ancho de la cimentación en planta o del aislador
$d_{1,2,3}$	Espesores de los estratos del suelo
$e$	Relación de vacíos, excentricidad
<hr/>	
$f$	Frecuencia de vibración
$f_m$	Velocidad de operación de la máquina
$f_n$	Frecuencia de resonancia, frecuencia natural del sistema
$f_R$	Frecuencia de resonancia vertical ó horizontal
$f_1, f_2$	Funciones de desplazamiento de Reissner
$g$	Aceleración debido a la gravedad de la tierra
$h$	Altura del espécimen, altura del aislador de hule o goma
$k_x$	Constante de resorte equivalente horizontal
$k_z$	Constante de resorte equivalente vertical

$k_1$	Rigidez equivalente del sistema aislador
$k_2$	Rigidez equivalente del suelo
$k_\phi$	Constante de resorte para el cabeceo
$k_\psi$	Constante de resorte para la torsión
$l$	Largo del aislador de hule o goma
$m$	Masa total de la cimentación y del mecanismo de excitación
$m_e$	Masa rotatoria, relación de la masa desbalanceada

$m_{rec}$  Masa reciprocante vertical

$m_{rot}$  Masa rotatoria

$m_1$  Masa del bloque de cimentación + maquinaria

$m_2$  Masa de la losa de base

$q_c$  Variación del esfuerzo cíclico

---

$r_o$  Radio de la base del oscilador circular apoyado en el semi-espacio

$t$  Tiempo

$t_c$  Tiempo en el ensaye de pulso a compresión

$t_s$  Tiempo en el ensaye de pulso a torsión

$x$  Desplazamiento horizontal

$\dot{x}$  Primera derivada del desplazamiento horizontal ( velocidad )

$\ddot{x}$  Segunda derivada del desplazamiento horizontal ( aceleración )

$x_o$  Desplazamiento de la base

$x_{1,2,3}$  Distancias de la fuente a los puntos de cambio de pendiente

- $z$  Desplazamiento vertical
- $z_p$  Desplazamiento del pistón de un cilindro
- $z_s$  Desplazamiento estático
- $\dot{z}$  Primera derivada del desplazamiento vertical ( velocidad )
- $\ddot{z}$  Segunda derivada del desplazamiento vertical ( aceleración )
- 

- $A_b$  Area de contacto del bloque
- $A_h$  Amplitud de vibración del movimiento horizontal
- $A_r$  Relación de área
- $A_x$  Amplitud amortiguada del deslizamiento acoplado con el cabeceo
- $A_z$  Amplitud de vibración del movimiento vertical
- $A_\phi$  Amplitud amortiguada del cabeceo acoplado con el deslizamiento

---

$A_\psi$  Amplitud de vibración por torsión

- $B$  Ancho del área de contacto del bloque
- $B_x$  Relación de masa modificada para vibración horizontal
- $B_z$  Relación de masa modificada para vibraciones verticales
- $B_\phi$  Relación de masa en rotación
- $B_\psi$  Relación de masa en torsión
- $C$   $J_a h I_p$
- $C_c$  Amortiguamiento crítico

- $C_s$  Coeficiente en función de la relación  $L/B$
- $C_u$  Coeficiente de compresión uniforme elástica
- $C_v$  Coeficiente de cortante
- $C_x$  Constante de amortiguamiento horizontal
- $C_z$  Constante de amortiguamiento vertical
- $C_\phi$  Constante de amortiguamiento por cabeceo
- $C_{\phi c}$  Constante de amortiguamiento crítico por cabeceo

$C_\psi$  Constante de amortiguamiento por torsión

$D$  Diámetro del espécimen

$E_{eq}$  Módulo dinámico equivalente de Young

$G$  Módulo dinámico al esfuerzo cortante

$H$  Altura del bloque de cimentación

---

$I$  Momento de inercia del área de la base

$I_p = \frac{\pi D^4}{32}$

$I_s$  Momento polar de inercia del área de la base

$J$  Momento de inercia del espécimen

$J_a$  Momento de inercia de las masas

$J_o$  Momento de inercia de la cabeza del sistema

$K$  Módulo dinámico de deformación volumétrica

$K_c$  Rigidez a compresión de un aislador de hule o goma

$K_s$  Rigidez a corte de un aislador de hule o goma

$L$	Longitud del espécimen, longitud del área de contacto del bloque
$L_c$	Longitud de onda
$M$	Masa del bloque y del vibrador
$M_m$	Momento de inercia de la masa con respecto al eje que del c.g.s.
$M_{mo}$	Momento de inercia de la masa de la cimentación y de la máquina
$M_{mz}$	Momento polar de inercia de la masa
$M_R$	Momento debido a la resistencia del semi-espacio elástico
$M_x$	Factor de amplificación horizontal
$M_y$	Momento de excitación en el plano ZX
$M_z$	Momento de excitación horizontal actuando alrededor del eje Z
$M_\phi$	Factor de amplificación
$P$	Carga axial
<hr/>	
$PR$	Potencia de entrada
$P_a$	Carga efectiva por resorte
$P_o$	Amplitud de la fuerza total aplicada en el área circular de contacto
$P_x$	Amplitud de la fuerza horizontal
$P_z$	Amplitud de la fuerza vertical
$Q_o$	Fuerza externa oscilatoria
$R$	Reducción relativa de la vibración transmitida
$R_x$	Fuerza resistente horizontal en la base
$T$	Transmisibilidad

$T_{1,2,3}$	Tiempo de intercepción
$V_{r,2,3}$	Velocidades de propagación de los estratos
$V_c$	Velocidad en el ensaye de pulso a compresión
$V_r$	Velocidad de onda Rayleigh
$V_t$	Velocidad en el ensaye de pulso a torsión, Velocidad de onda del esfuerzo cortante
$W$	Peso total del sistema máquina - cimentación
$Z$	Profundidad seleccionada en el ensaye de resonancia vertical, amplitud máxima vertical sin aisladores
$Z_o$	Desplazamiento vertical del oscilador
$Z_1$	Amplitud máxima vertical del bloque + máquina
$Z_2$	Amplitud máxima vertical de la losa base
<hr/>	
$\delta$	Deflexión estática del sistema
$\delta_c$	Deformación axial
$\varepsilon_c$	Variación de la deformación axial cíclica
$\phi$	Angulo de fase, ángulo de rotación
$\dot{\phi}$	Primera derivada del ángulo de rotación
$\ddot{\phi}$	Segunda derivada del ángulo de rotación
$\gamma$	Amplitud de deformación angular
$\gamma_c$	Peso volumétrico del concreto
$\gamma_s$	Peso volumétrico del suelo

$\eta$	Grado de absorción de la vibración
$\lambda$	Relación de amortiguamiento equivalente
$\pi$	3.141593
$\rho$	Densidad de masa del espécimen o del suelo
$\sigma_c$	Presión de confinamiento
$\sigma_d$	Esfuerzo axial cíclico de magnitud conocida
$\sigma_z$	Distribución de presiones bajo la base
$\sigma_{3c}$	Esfuerzo confinante en ensaye triaxial cíclico
$\tau_{xy}$	Esfuerzo cortante
$\nu$	Relación de poisson
$\nu_s$	Velocidad de propagación de la onda de corte en el cuerpo elástico
$\omega$	Deformación angular, frecuencia circular de la fuerza
$\omega_{ad}$	Frecuencia circular amortiguada de calibración
$\omega_e$	Frecuencia de excitación
$\omega_n$	Frecuencia natural no amortiguada del sistema
$\omega_{nd}$	Frecuencia natural amortiguada para el cabeceo y el deslizamiento
$\omega_{nx}$	Frecuencia natural del sistema suelo – cimentación ( horizontal )
$\omega_{nz}$	Frecuencia natural del sistema suelo – cimentación ( vertical )
$\omega_{n\phi}$	Frecuencia natural sin amortiguamiento para el cabeceo
$\omega_{n\psi}$	Frecuencia natural sin amortiguamiento para la torsión
$\omega_{sd}$	Frecuencia circular amortiguada del sistema

- $\omega_{1,2}$  Frecuencia natural del sistema
- $\xi$  Amortiguamiento
- $\xi_x$  Relación de amortiguamiento para vibraciones por deslizamiento
- $\xi_z$  Relación del amortiguamiento vertical
- $\xi_\phi$  Relación del amortiguamiento para el cabeceo
- $\xi_\psi$  Relación de amortiguamiento para la torsión
- $\psi$  Rotación angular de la cimentación alrededor de su eje vertical
- $\psi_s$  Raíz de la ecuación de frecuencias
- $\zeta$  Fracción del amortiguamiento
- $\zeta_a$  Relación de amortiguamiento del instrumento
- $\zeta_s$  Relación de amortiguamiento del sistema

- 
- $\Delta_f$  Ancho de la curva de respuesta
  - $\Delta_u$  Presión de poro

## **CAPITULO 1**

### **INTRODUCCION**

Las cimentaciones de maquinaria requieren una atención especial del ingeniero diseñador, ya que la operación del equipo genera fuerzas y momentos dinámicos desbalanceados. La cimentación de la maquinaria transmite las cargas dinámicas al suelo de desplante y éstas se adicionan a las cargas estáticas debidas a la combinación del peso de la maquinaria y del bloque de soporte. Esta es la consideración que distingue a las cimentaciones de máquinas de otras ordinarias, y hace necesarios procedimientos especiales de diseño.

El comportamiento del suelo de desplante es considerado generalmente elástico, esto es razonable para el intervalo de niveles de vibración asociados con un buen diseño de la cimentación. Los dos parámetros más importantes que deben ser determinados, en cualquier diseño dinámico de una cimentación son: la frecuencia natural y la amplitud de vibración del sistema maquinaria-cimentación-suelo, en condiciones normales de operación.

El costo inicial de la construcción de una cimentación para maquinaria es generalmente una pequeña fracción del costo de la misma máquina, de los accesorios y de la instalación. Sin embargo, la falla de una cimentación, por

causa de un diseño incorrecto o una defectuosa construcción, pueden interrumpir la operación del equipo y ocasionar importantes pérdidas económicas.

El estudio de las cimentaciones para maquinaria debe resolver tres principales problemas:

- a) Que los movimientos de la maquinaria y la cimentación no sean excesivos, ya que originarían fallas y desperfectos en la operación propia del equipo.
- b) Que los asentamientos debidos a los efectos dinámicos estén dentro de los límites permisibles.
- c) Que se disminuyan o, en su caso, se eliminen las vibraciones transmitidas a través del suelo, que pudieran afectar a personas, edificios u otra maquinaria.

Con base en lo anterior, la práctica común en el diseño y construcción de cimentaciones para maquinaria fue la de proporcionar grandes masas de concreto para controlar las amplitudes de vibración. Aunque esto resultó satisfactorio durante algún tiempo, actualmente se buscan las soluciones más eficientes y económicas. Esto, debido a que los espacios para la colocación de equipos en las industrias son cada vez más escasos y pequeños; lo que representa un factor importante en el dimensionamiento de la cimentación, por lo que no resulta adecuado controlar las amplitudes de vibración mediante un gran bloque de concreto, siendo entonces necesaria la utilización de otros medios más económicos y eficientes, que aseguren el control de las

vibraciones. Uno de esos medios puede ser la colocación de aisladores de vibración, teniendo en mente que si la maquinaria es atornillada rígidamente a su cimentación, el movimiento vibratorio en sí mismo puede ser reducido, pero la vibración transmitida a la cimentación puede ser mayor. Esto produciría efectos perjudiciales aún a una distancia considerable del origen de la vibración. De otra manera, si se coloca un soporte flexible bajo la maquinaria o en la cimentación la vibración transmitida será considerablemente reducida, pero esto puede causar un movimiento significativo en la maquinaria durante su operación normal o durante el encendido y el apagado del equipo; por tanto, es necesario lograr un equilibrio entre estos dos requerimientos.

Es así como se ha extendido el uso de los sistemas de aisladores de vibración, con la idea fundamental de reducir las amplitudes y tener menores masas de concreto en la cimentación. Esto origina algunas variantes en la

conceptualización de los modelos de análisis, los cuales son diferentes a los convencionales ya que se agregan los parámetros adicionales del aislador. ®

De esta manera resulta necesario solucionar analíticamente los modelos matemáticos que consideren el aislamiento, para así tener un precedente que permita evaluar en forma conveniente la eficiencia de esta alternativa, en la solución de cimentaciones para maquinaria.

## 1.1 Alcance del Estudio

El presente estudio pretende solucionar analíticamente los modelos discretos de sistemas bajo efectos dinámicos, según se establece en el capítulo 7. No se presentan datos experimentales, ni comparaciones entre los resultados teóricos y los valores reales, medidos en cimentaciones existentes; ya que esto no se encuentra dentro de los objetivos del presente trabajo; sin embargo, resultaría conveniente hacer estas comparaciones en un trabajo posterior, con la finalidad de encontrar un patrón de comportamiento entre lo real y lo teórico. En lo referente a los modelos matemáticos, se consideraron únicamente las vibraciones verticales, las cuales son independientes de los demás modos de vibrar; así también, se consideraron las vibraciones horizontales y por cabeceo, las cuales son acopladas, y su solución es similar en las dos direcciones en que actúan. No se determinó la respuesta debida a las vibraciones por torsión, la

---

cual también es independiente, aunque sí se aportan las ecuaciones generales para su solución.

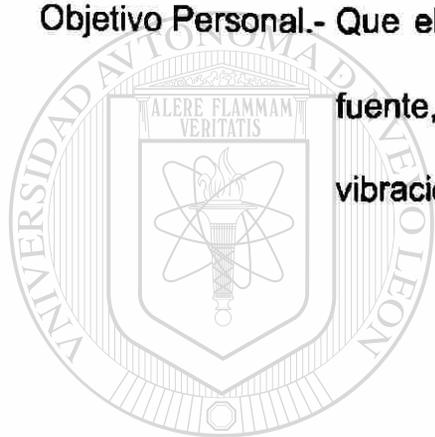
Otros aspectos que no se consideraron, en los modelos matemáticos, son: el efecto del encajonamiento, la proximidad de un estrato muy rígido, y las cimentaciones desplantadas sobre pilotes; ya que cada uno de estos casos representa un estudio independiente por sí solo. De esta manera, es posible plantear los siguientes objetivos, general y particular.

## 1.2 Objetivos

**Objetivo General.-** Determinar y cuantificar el efecto del aislamiento de vibración, en cimentaciones sujetas a efectos dinámicos.

**Objetivo Particular.-** Evaluar analíticamente los modelos dinámicos de cimentaciones para maquinaria, con sistemas de aislamiento y sin él, sujetas a vibraciones verticales, horizontales y por cabeceo.

**Objetivo Personal.-** Que el lector tenga la suficiente información, en una sola fuente, para resolver problemas prácticos referentes a vibraciones en cimentaciones para maquinaria.



UANL

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

## **CAPITULO 2**

### **LOS TIPOS DE MAQUINARIA Y SUS CIMENTACIONES**

Existen muchos tipos de máquinas y cada uno puede requerir un cierto tipo de cimentación. Se describen a continuación los diferentes tipos de maquinaria y sus características especiales, así como también las cimentaciones comúnmente utilizadas.

Los diferentes tipos de maquinarias son excitados normalmente por cargas desbalanceadas; en general, pueden clasificarse dentro de las siguientes categorías:

a) Máquinas Reciprocantes

b) Máquinas Rotatorias

c) Máquinas de Impacto

d) Equipos Especiales

#### **2.1 Máquinas Reciprocantes**

Las máquinas reciprocantes son probablemente las máquinas más antiguamente usadas y es un ejemplo clásico el mecanismo de manivela, el cual se usa para convertir un movimiento translatorio en un movimiento

rotatorio y viceversa. Ejemplos típicos de máquinas reciprocantes son las máquinas de vapor, máquinas de combustión interna (por ejemplo de gasolina, diesel y petróleo), bombas y compresores.

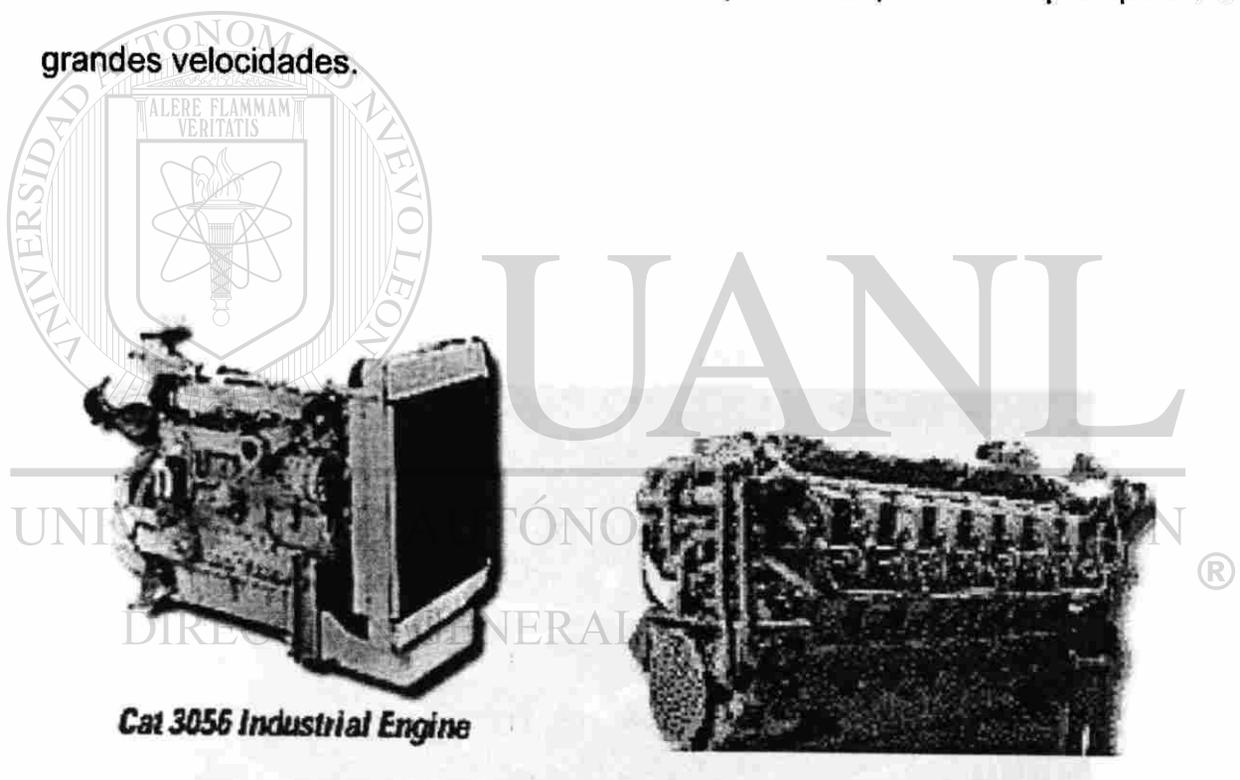


**Fig. 2.1** Máquinas de Vapor

Estas máquinas pueden consistir en un cilindro simple y un pistón, con una acción simple o con doble acción; también pueden ser de múltiples cilindros, con pistones operando en un patrón regular y montados en una manivela común.

Las bombas y los compresores pertenecen a la categoría de máquinas reciprocantes, que pueden ser del tipo de grado simple o grados múltiples, dependiendo si el total de la compresión es desarrollada en una o más de una operación. El arreglo de múltiples grados puede formarse de varios cilindros – pistones operados por una máquina común o por diferentes máquinas.

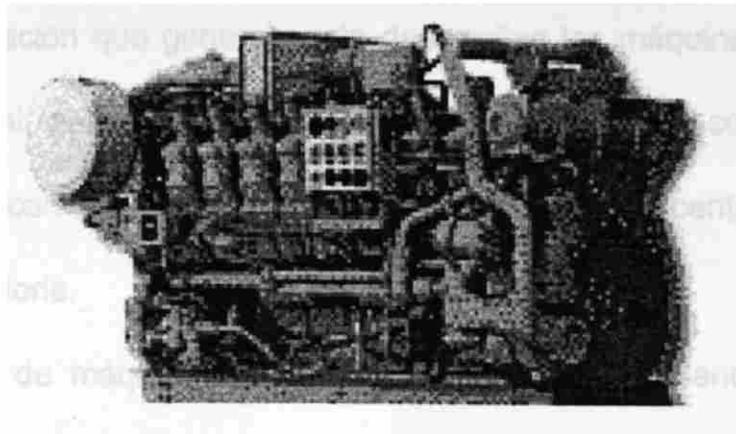
La dirección del movimiento del pistón puede ser horizontal o vertical. Muchas máquinas reciprocantes tienen velocidades de operación no mayores a 1200 – 1500 r.p.m. En ocasiones, se encuentran máquinas reciprocantes que operan a grandes velocidades.



**Fig. 2.2** Máquinas de Combustión Interna

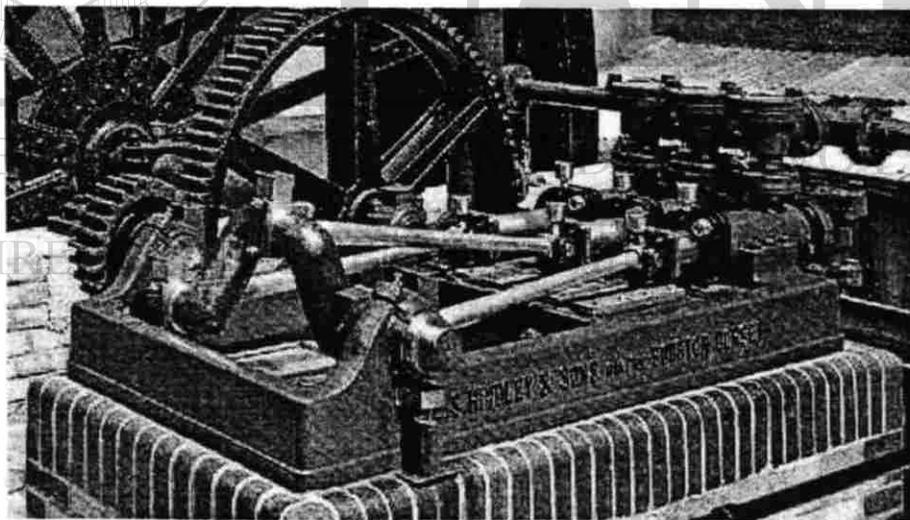
La cimentación para las máquinas reciprocantes usualmente consiste en un bloque de concreto rígido, que tiene preparaciones para montar la maquinaria. Las máquinas pueden ser colocadas directamente en el bloque de concreto o

en un cojinete elástico diseñado adecuadamente. En algunas ocasiones se utilizan cimentaciones en bloque, apoyadas sobre resortes.



**Fig. 2.3** Máquinas de Combustión Interna (tipo V)

Un simple mecanismo de manivela para una máquina de un solo cilindro se muestra en la figura 2.4.



**Fig. 2.4** Mecanismo de Manivela

## 2.2 Máquinas Rotatorias

El tipo de excitación que generalmente desarrollan las máquinas rotatorias es del tipo senoidal; para determinar esta fuerza es necesario conocer la masa rotatoria y la excentricidad, entre el centro de rotación y el centro de gravedad de la masa rotatoria.

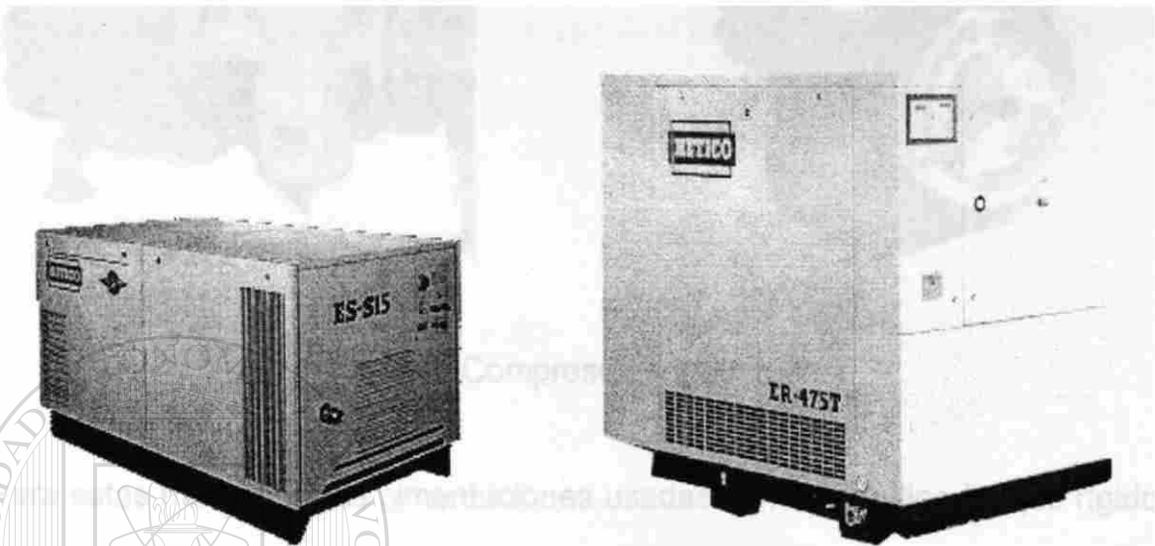
Para este tipo de máquinas es posible, teóricamente, balancear las partes móviles que producen las fuerzas desbalanceadas durante la rotación; sin embargo, en la práctica, es difícil eliminar del todo el desbalanceo, ya que éste se ve afectado por los procedimientos del diseño, de la fabricación, de la instalación y del mantenimiento.

Algunos aspectos que contribuyen al desbalanceo de máquinas rotatorias son: el desalineamiento durante la instalación, el daño o corrosión de las partes móviles y también las deflexiones por gravedad del eje de rotación de la máquina.

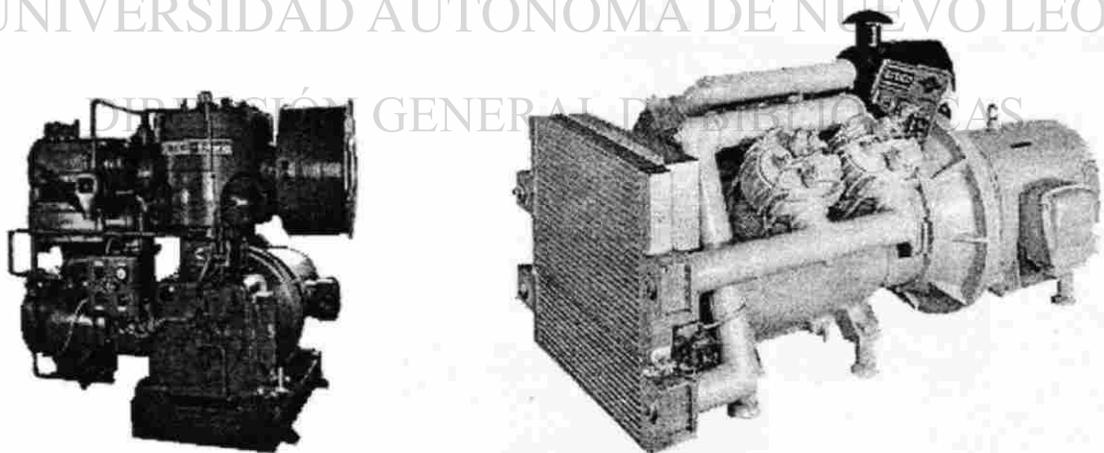
En términos prácticos, las máquinas rotatorias se clasifican de la siguiente manera:

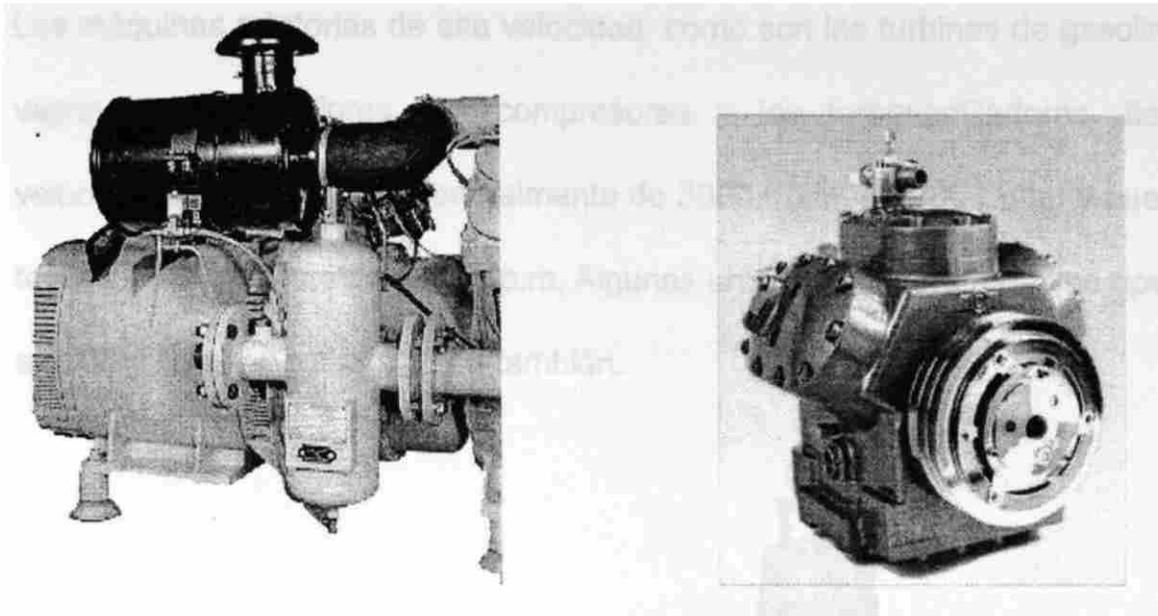
- a) De baja velocidad
- b) De alta velocidad

Las máquinas rotatorias de baja velocidad son aquellas que operan a menos de 1500 r.p.m., como por ejemplo, los motores generadores, las bombas centrífugas y de vacío, los ventiladores, las devanadoras, etc.



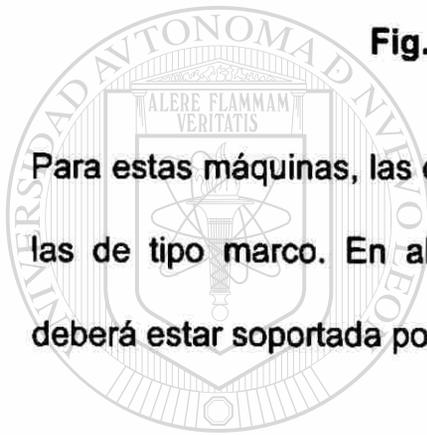
**Fig. 2.5** Compresores W-6 con embrague





**Fig. 2.6 Compresores Industriales**

Para estas máquinas, las cimentaciones usadas son: las de tipo bloque rígido y las de tipo marco. En algunos casos, si esto es necesario la cimentación deberá estar soportada por pilas.



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Las máquinas rotatorias de alta velocidad, como son las turbinas de gasolina o vapor, los generadores, los compresores y los turboventiladores, tienen velocidades de operación generalmente de 3000 r.p.m. ó 3600 r.p.m. y pueden tener un valor de hasta 10000 r.p.m. Algunas unidades de turbinas, que operan a 1500 y 1800 r.p.m. se utilizan también.

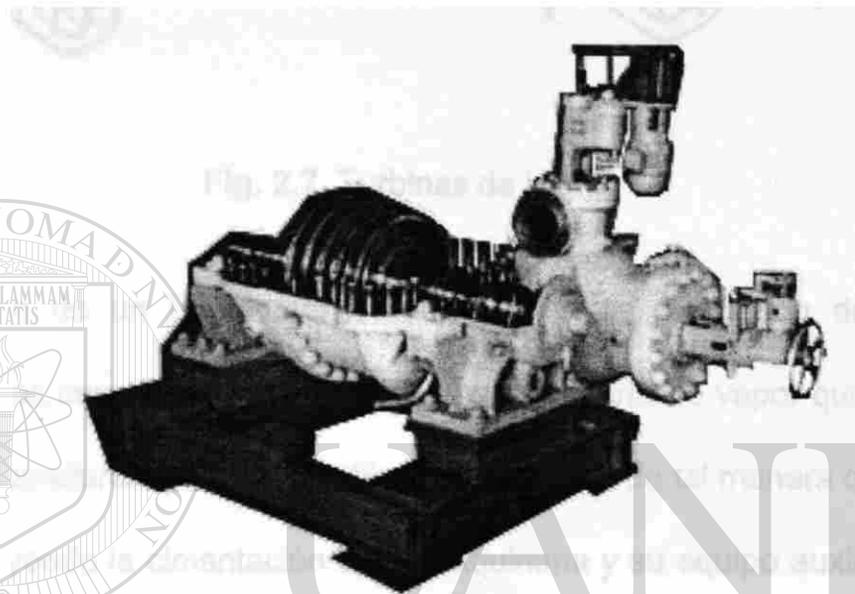
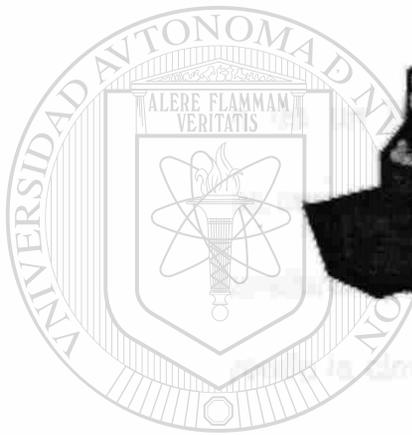


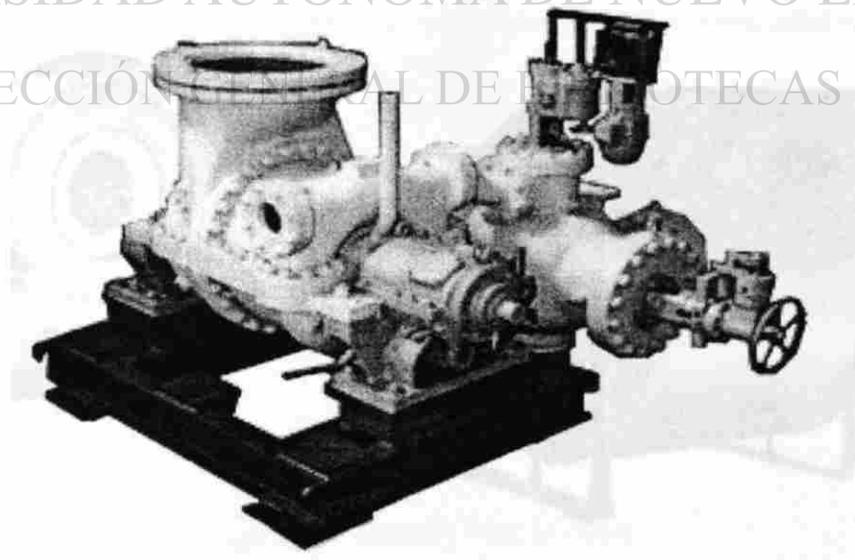
Fig. 2.7 Turbinas de



CANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

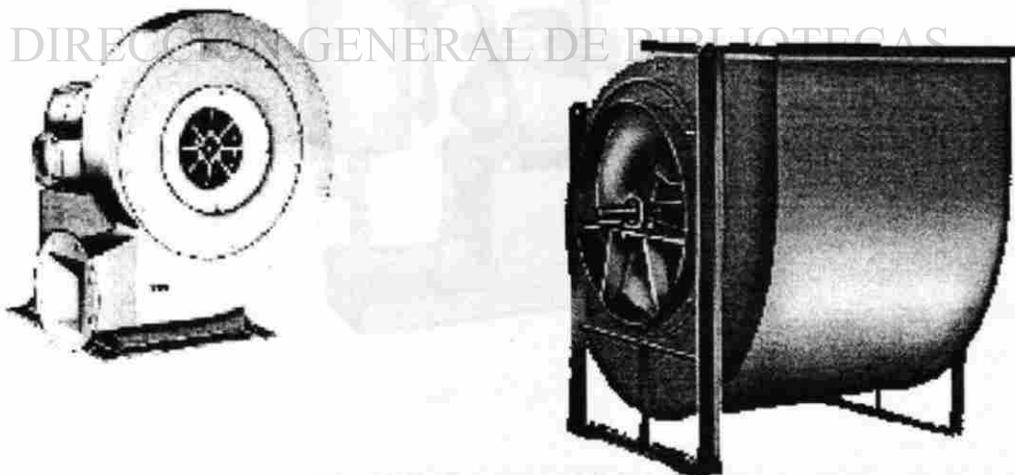
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS





**Fig. 2.7 Turbinas de Vapor**

La instalación de un turbogenerador representa la colocación de equipos auxiliares, tales como condensadores, líneas de tubería de vapor que soportan grandes temperaturas, ductos y ventilas de aire, etc. ; de tal manera que toda la unidad, incluyendo la cimentación de la maquinaria y su equipo auxiliar, deben estar totalmente accesibles para su inspección.

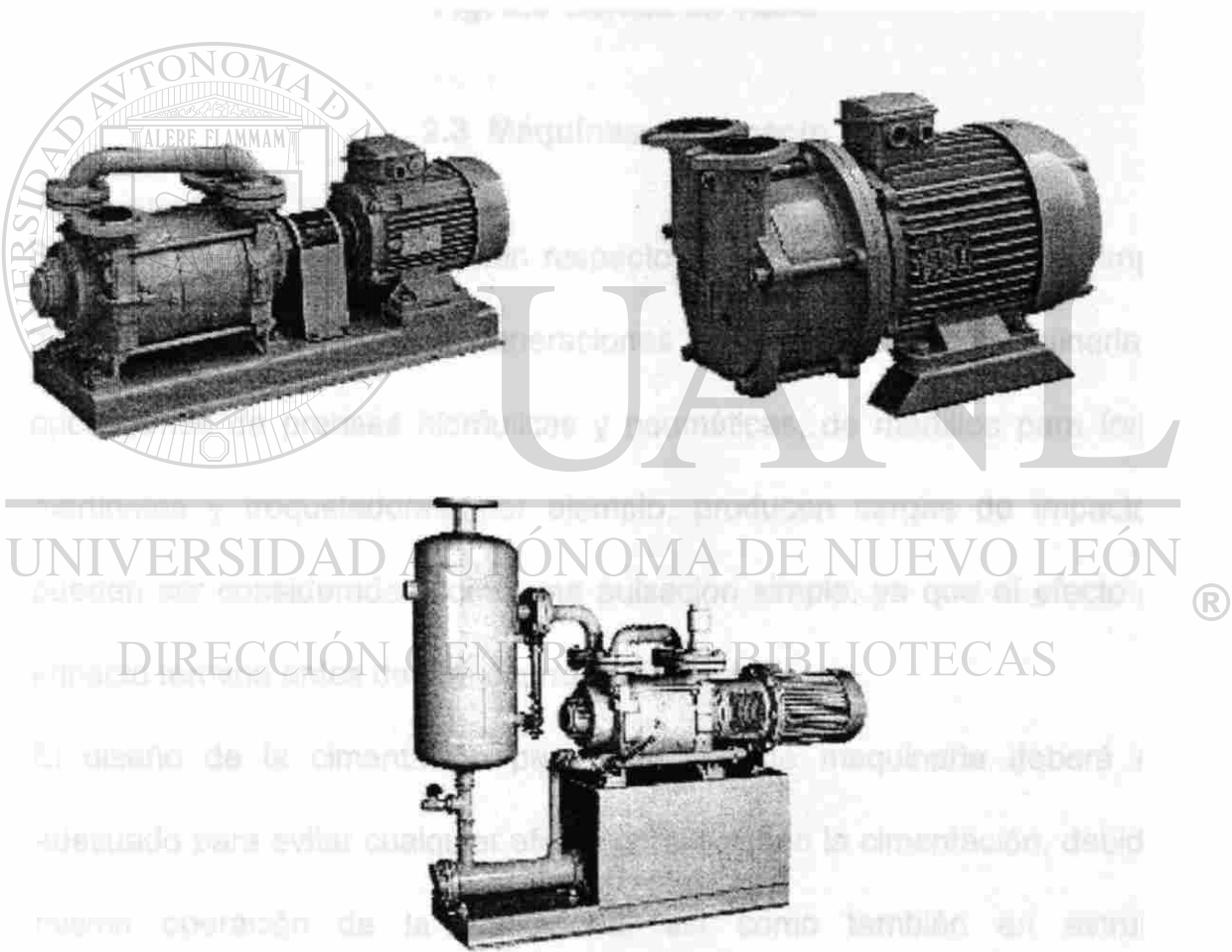


**Fig. 2.8 Bombas Hidráulicas**

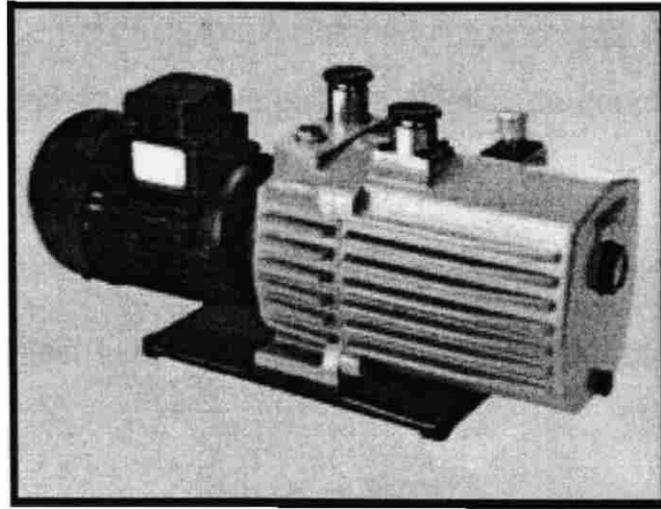
**Fig. 2.8 Ventiladores**

Conociendo estos requerimientos, las cimentaciones de tipo marco son las utilizadas generalmente para las unidades de turbogeneradores. Se prefiere este tipo de cimentación a la de tipo bloque rígido, tomando en cuenta aspectos como el del funcionamiento y la economía.

Las cimentaciones de tipo marco pueden construirse con concreto reforzado o acero, siendo las de concreto reforzado las más comúnmente usadas.



**Fig. 2.5 Bombas Hidráulicas**



**Fig. 2.6** Bomba de Vacío

### **2.3 Máquinas de Impacto**

Se dispone de poca información respecto a cargas transitorias o de impacto, las cuales se generan por operaciones intermitentes de maquinaria. Las operaciones de prensas hidráulicas y neumáticas, de martillos para forja, de martinets y troqueladoras, por ejemplo, producen cargas de impacto que pueden ser consideradas como una pulsación simple, ya que el efecto de un impacto termina antes de que ocurra el siguiente.

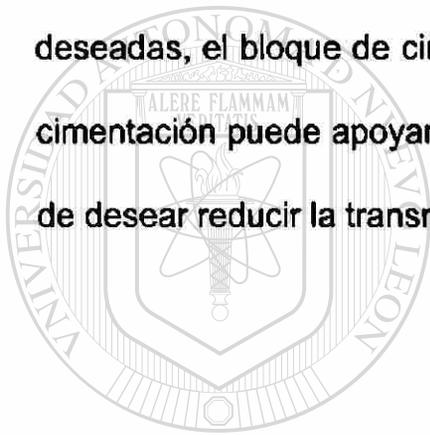
El diseño de la cimentación para este tipo de maquinaria deberá ser el adecuado para evitar cualquier efecto perjudicial en la cimentación, debido a la misma operación de la maquinaria, así como también en estructuras adyacentes o en máquinas y personas que se encuentren cerca.

La cimentación para una máquina de impacto, generalmente, se basa en un bloque de concreto reforzado. En el caso de pequeños martillos, el yunque puede estar montado directamente en el bloque de cimentación, para reducir la

transmisión de los esfuerzos por el impacto en el bloque de concreto y en el marco de la máquina se coloca un cojinete elástico de neopreno, fieltro, corcho o madera, entre el yunque y la cimentación.

En el caso de martillos con gran capacidad, se pueden utilizar algunos aisladores especiales, tales como: resortes y amortiguadores, en lugar de los cojinetes elásticos.

El bloque de cimentación generalmente se diseña para apoyarse directamente en el suelo. Cuando las condiciones del suelo de desplante no son las deseadas, el bloque de cimentación puede ser soportado por pilas. También la cimentación puede apoyarse en cojinetes elásticos o sobre resortes, en el caso de desear reducir la transmisión de las vibraciones.



UANL

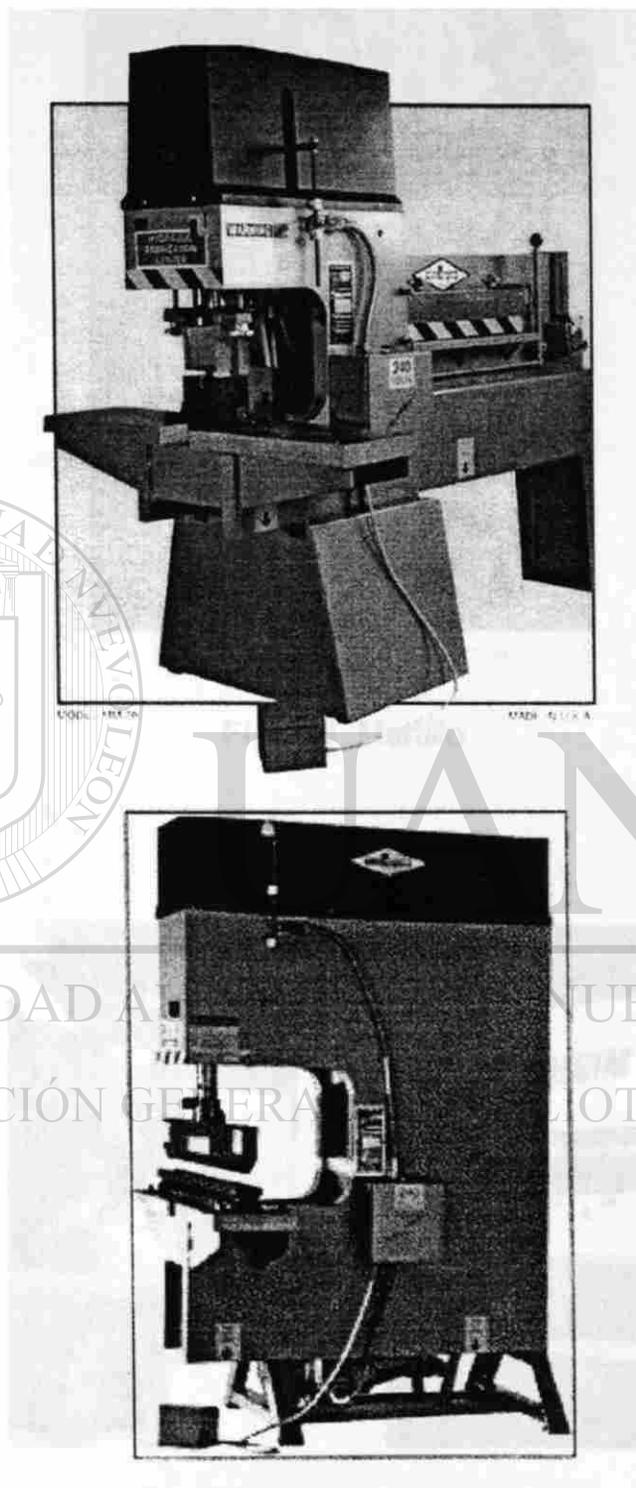
---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

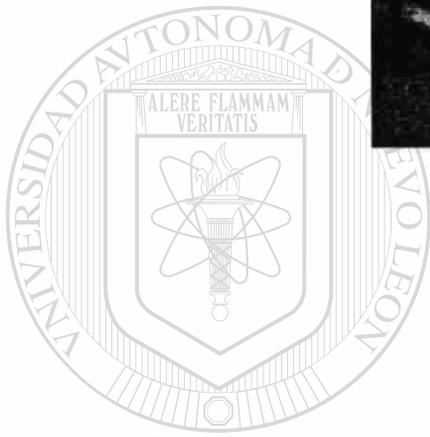
A continuación se presentan algunos tipos de máquinas que se clasifican como de impacto:



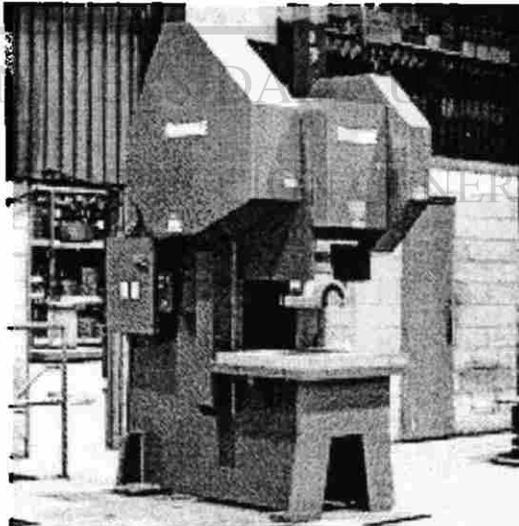
**Fig. 2.7** Prensas Hidráulicas

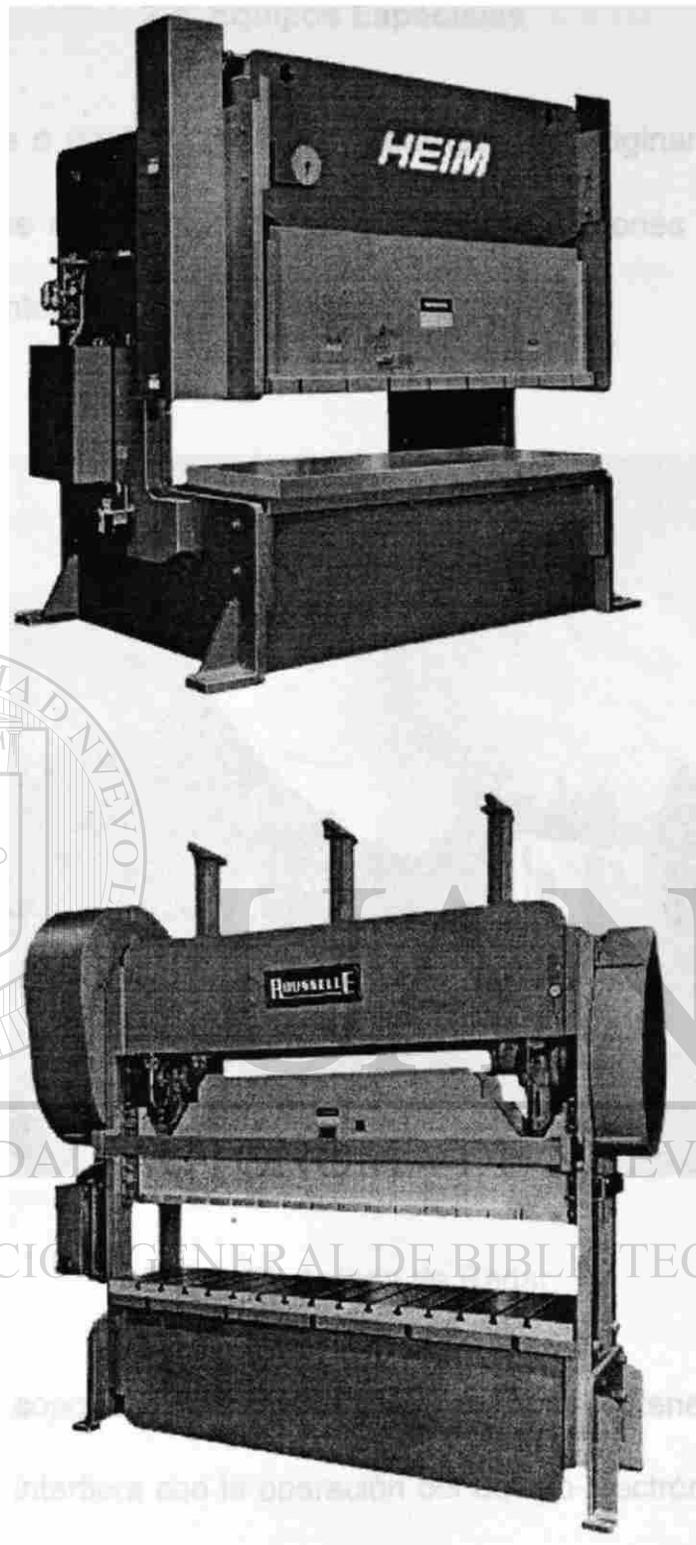


**Fig. 2.8 Martillo**



UANL

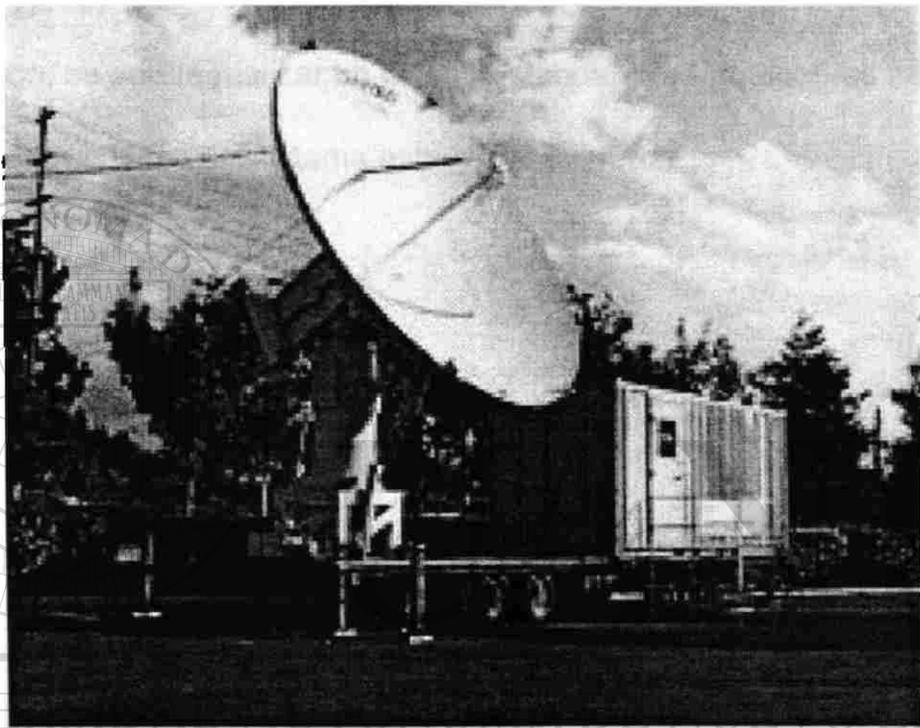




**Fig. 2.9** Máquinas Troqueladoras

## 2.4 Equipos Especiales

Algunas máquinas o equipos especiales, que pueden originar vibraciones en sus soportes y que no fueron consideradas en las secciones anteriores, son, por ejemplo, las antenas de radar.

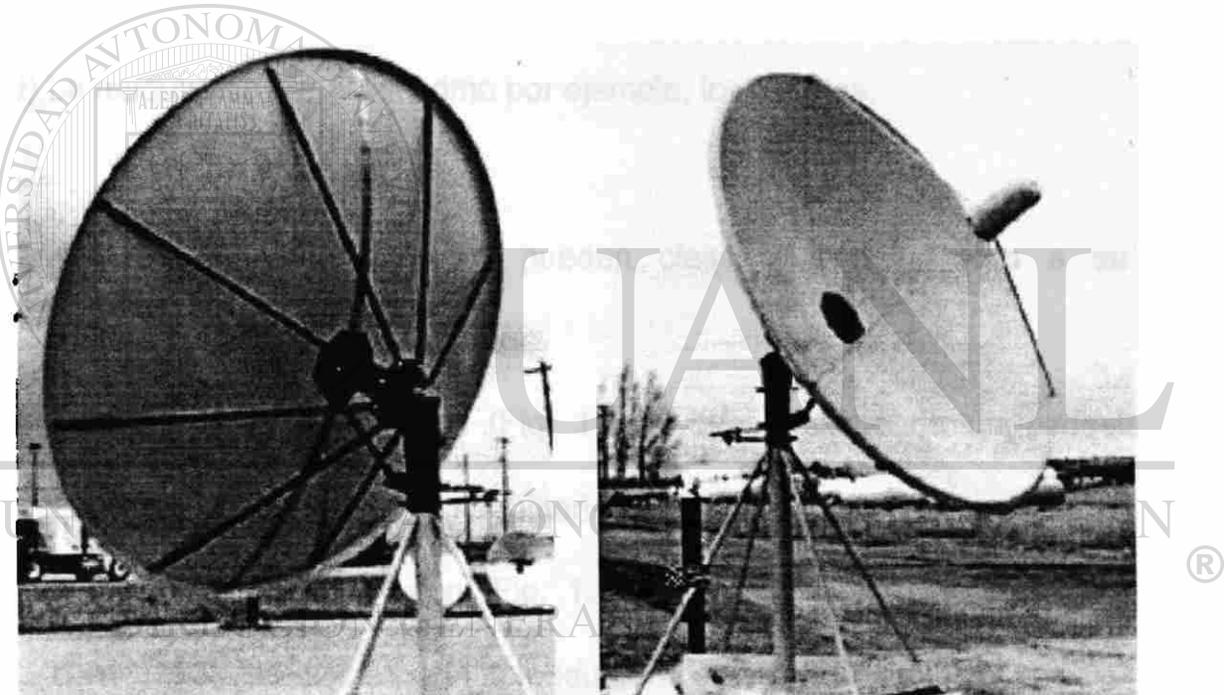


**Fig. 2.10** Antena de Radar

La estructura de soporte para una antena de radar debe tener una respuesta dinámica que no interfiera con la operación del equipo electrónico. El disco del radar debe ser lo suficientemente rígido para que no se afecte indebidamente el mecanismo que controla la elevación y el azimut, la torre vertical debe ser rígida y no permitir la resonancia de la estructura y, finalmente, la cimentación no debe permitir grandes movimientos en toda la estructura.

Las rotaciones permisibles de una antena de radar son a menudo del orden de  $0.00005$  rad. La rotación del radar, con respecto a su eje horizontal, introduce un balanceo transitorio en la antena, lo que puede causar que la torre oscile en su frecuencia natural, esto debido a la conexión flexible entre la cimentación y el suelo de desplante, o debido a la flexibilidad del sistema estructural.

Obviamente, la antena de radar tiene muchos grados de libertad de vibración; sin embargo, se puede realizar un diseño estándar para obtener las frecuencias de resonancia críticas del sistema estructural del radar.



**Fig. 2.11** Antenas de Radar

De tal manera, el diseño de las cimentaciones para este tipo de equipo deberá ser el adecuado, para cubrir todas las especificaciones de servicio y asegurar un funcionamiento satisfactorio.

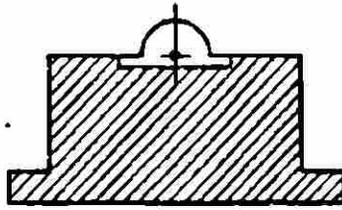
## 2.5 Tipos de Cimentaciones

Basándose en el criterio de diseño de sus cimentaciones, las maquinarias pueden clasificarse como:

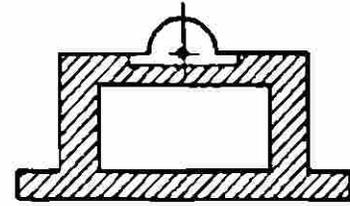
- a) Las que producen fuerzas de impacto, como son los martillos y las prensas.
- b) Las que producen fuerzas periódicas, como los compresores.
- c) La maquinaria de alta velocidad, como las turbinas y los compresores rotatorios.
- d) La maquinaria especial, como por ejemplo, los radares.

A su vez, las cimentaciones pueden clasificarse atendiendo a su tipo estructural, de la siguiente manera:

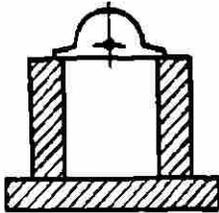
- a) Cimentaciones tipo bloque (Fig. 1.1.a), que consiste de un pedestal de concreto que soporta a la maquinaria.
- b) Cimentación de tipo cajón (Fig. 1.1.b), la cual consiste en un bloque de concreto hueco que soporta la maquinaria en su parte superior.
- c) Cimentación de tipo muro (Fig. 1.1.c), formada por un par de muros que dan soporte a la maquinaria.
- d) Cimentación de tipo marco (Fig. 1.1.d), con base en columnas verticales que soportan en la parte superior una plataforma horizontal, la cual sirve de asiento a la maquinaria.



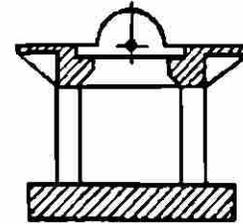
(a)



(b)



(c)



(d)

**Fig. 1.1** Tipos de Cimentaciones para Maquinaria

La maquinaria que produce impactos y fuerzas periódicas de baja velocidad es generalmente montada sobre cimentaciones de tipo bloque. Aquellas que trabajan a altas velocidades y la maquinaria del tipo rotatorio se coloca sobre cimentaciones de marco; sin embargo, para ciertas condiciones particulares, lo anterior puede modificarse; en tal caso, se puede proponer un tipo alternativo de cimentación.

Alguna maquinaria, como los tomos, induce muy poca fuerza dinámica, y pueden ser atomillados directamente al firme, sin necesidad de una cimentación especial.

Por otra parte, basándose en sus frecuencias de operación, la maquinaria puede ser dividida dentro de tres categorías:

a) Grupo 1.- Frecuencias de bajas a medias, con valores de 0-500 r.p.m.

b) Grupo 2.- Frecuencias de medias a altas, con valores de 300-1000 r.p.m.

c) Grupo 3.- Frecuencias muy altas con valores mayores que 1000 r.p.m.

El grupo 1 comprende grandes máquinas reciprocantes, compresores y ventiladores grandes. Las máquinas reciprocantes generalmente operan en un intervalo de frecuencias, entre 50-250 r.p.m. Para este grupo, las cimentaciones de tipo bloque, con grandes áreas de contacto con el suelo de desplante, son las que se utilizan generalmente.

El grupo 2 incluye máquinas reciprocantes de tamaño medio, como son las máquinas de gasolina y diesel. Se recomiendan generalmente las cimentaciones de tipo bloque, desplantadas sobre resortes o placas elásticas como el neopreno, ya que mantienen la frecuencia natural de la cimentación considerablemente menor que la frecuencia de operación.

El grupo 3 incluye máquinas de combustión interna de alta velocidad, motores eléctricos y turbogeneradores. Son recomendables las cimentaciones de tipo bloque, con poca superficie de contacto, aisladas con placas elásticas para bajar la frecuencia natural. La turbo-maquinaria requiere de cimentación de tipo marco para acomodar entre las columnas los equipos auxiliares necesarios.

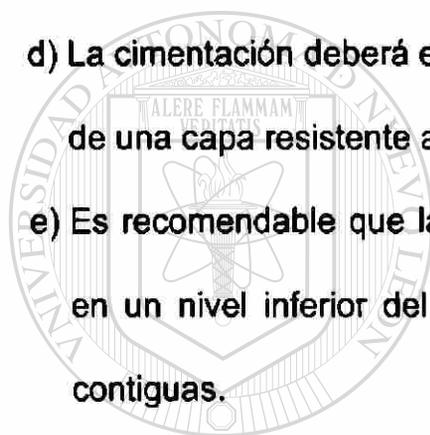
## **2.6 Requerimientos Generales para Cimentaciones de Maquinaria**

Los siguientes requerimientos generales deberán ser satisfechos, desde el punto de vista de diseño:

- a) La cimentación deberá ser capaz de soportar las cargas impuestas, sin tener fallas de corte o de aplastamiento.
- b) Los asentamientos deberán estar dentro de los límites permisibles.
- c) El centro de gravedad de la maquinaria y el de la cimentación deberán estar, en la medida de lo posible, alineados verticalmente con el centro de gravedad de la base.
- d) Deberá evitarse la resonancia; por lo tanto, la frecuencia natural del sistema suelo-cimentación deberá ser o mayor o menor que la frecuencia de operación de la maquinaria. Para maquinaria de baja velocidad, la frecuencia natural deberá ser alta y viceversa.
- e) Las amplitudes de vibración, en las condiciones de servicio, deberán estar dentro de los límites permisibles. Estos límites son generalmente dados por el fabricante de la maquinaria.
- f) Todas las partes rotatorias y reciprocantes de una maquinaria deberán estar bien balanceadas, de modo que minimicen las fuerzas o los momentos desbalanceados.
- g) En lo posible, la cimentación deberá estar proyectada de tal manera que permita una subsecuente alteración a la frecuencia natural, realizando cambios en el área de la base o en la masa de la cimentación si esto se piensa necesario posteriormente.

Desde el punto de vista práctico, deberán cumplirse los siguientes requerimientos:

- a) El nivel freático, en caso de existir, deberá estar tan abajo como sea posible, por lo menos una cuarta parte del ancho de la cimentación a partir del plano de base. Esto limita la propagación de la vibración, ya que el agua subterránea es una buena conductora de las ondas de vibración.
- b) La cimentación para maquinaria deberá estar separada de construcciones adyacentes, por medio de juntas de expansión.
- c) Cualquier tubo de vapor o de aire caliente, embebido en la cimentación deberá estar propiamente aislado.
- d) La cimentación deberá estar protegida del aceite de la maquinaria, por medio de una capa resistente al ácido o por un adecuado tratamiento químico.
- e) Es recomendable que las cimentaciones de maquinaria estén desplantadas en un nivel inferior del desplante de las cimentaciones de construcciones contiguas.



UANL

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN<sup>®</sup>  
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

## **CAPITULO 3**

### **PROPIEDADES DINAMICAS DEL SUELO**

#### **3.1 Introducción**

En las últimas décadas se han realizado grandes avances en el desarrollo de procedimientos analíticos para calcular la respuesta del terreno sujeto a la acción de cargas dinámicas, El uso de tales procedimientos requiere el conocimiento de las propiedades dinámicas del suelo para llegar a soluciones satisfactorias.

El diseño de la cimentación para maquinaria y el comportamiento de un depósito de suelo durante un sismo intenso son dos problemas típicos de la dinámica de suelos, que requieren la determinación de las propiedades dinámicas para valores diferentes de deformación.

Hasta la fecha, se han desarrollado varias técnicas para medir las propiedades dinámicas de los suelos, teniendo en cuenta el valor de las deformaciones características de cada aplicación. Mientras que un sismo intenso puede desarrollar deformaciones del 10 %, la cimentación de un microscopio electrónico es sensible a una deformación del  $10^{-4}$  %.

Las principales propiedades dinámicas de los suelos que se requieren en la práctica profesional son:

- El módulo dinámico equivalente de Young,  $E_{eq}$
- El módulo dinámico al esfuerzo cortante,  $G$
- El módulo dinámico de deformación volumétrica,  $K$
- La relación de Poisson,  $\nu$
- El amortiguamiento,  $\xi$
- Las propiedades esfuerzo-deformación
- Los parámetros de licuación
- La resistencia al esfuerzo cortante en función de la velocidad de aplicación de la carga.

Debe tenerse en cuenta que no existe un ensaye único que cubra todo el intervalo de deformaciones requerido en la solución de los problemas de la dinámica de suelos. El ensaye de los suelos sometidos a carga dinámica puede realizarse mediante técnicas de laboratorio o mediante técnicas de campo, ambos enfoques tienen ventajas y desventajas, las cuales se discutirán a continuación. Las ventajas de las técnicas de laboratorio radican en su economía, en la relativa facilidad con la que las variables de ensaye se puede variar, así como en la definición de las condiciones de frontera; su principal desventaja radica en la alteración provocada por los procedimientos de muestreo, transporte, almacenamiento y ensaye.

Las ventajas de las técnicas de campo radican en el ensaye de un mayor volumen de suelo y que en algunos casos la alteración del suelo puede ser minimizada; su principal desventaja consiste en la dificultad para controlar las condiciones de frontera y los bajos niveles de deformación que se pueden alcanzar.

El ensaye de los suelos tiene dos objetivos:

- a) Proporcionar la información básica para el análisis y diseño.
- b) Obtener la base experimental que permita el desarrollo de ecuaciones constitutivas.

De acuerdo con el primer objetivo, debe reconocerse que las técnicas de ensaye reproducen sólo en forma aproximada las condiciones reales de trabajo que se pueden presentar en el sitio; sin embargo, a partir de resultados de laboratorio y combinados con la experiencia, se pueden proporcionar valores muy útiles para el análisis y el diseño. El segundo objetivo pretende entender, explicar y predecir el comportamiento de los suelos, ante condiciones generales.

En relación con los procedimientos de laboratorio para determinar las propiedades esfuerzo-deformación y de resistencia de los suelos, bajo cargas dinámicas, las variables importantes son: la medición precisa de la carga, la deformación y la presión de poro.

## 3.2 Procedimientos de Laboratorio

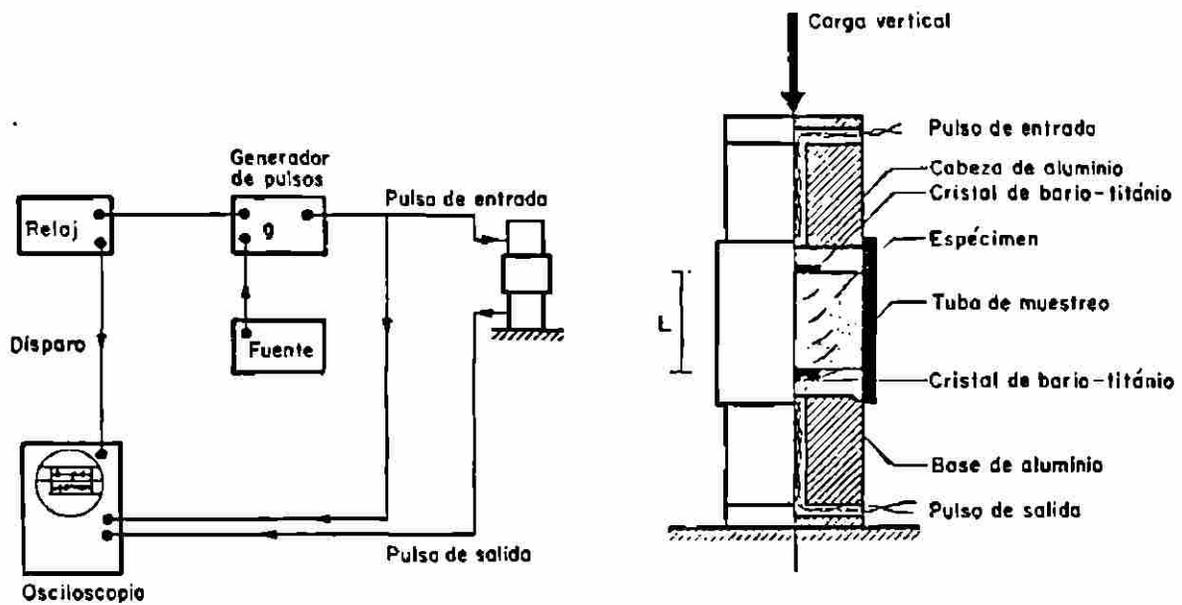
La investigación experimental de las propiedades dinámicas de los suelos es un tema de gran interés, ya que puede afirmarse que las características esfuerzo-deformación de los suelos sometidos a cargas dinámicas son diferentes de aquellas obtenidas bajo cargas estáticas; por tanto, ha sido necesario desarrollar diferente equipo.

### 3.2.1 Ensayes de Pulsos Ultrasónicos.

Este ensaye consiste en generar mediante cristales piezoeléctricos ondas ultrasónicas ya sea longitudinales o de torsión y medir el tiempo  $t$  necesario para la propagación del pulso elástico generado, a través del espécimen de suelo de longitud  $L$ . Lo anterior permite conocer la velocidad de propagación del pulso generado en el espécimen en estudio.

Recíprocamente, si se aplica un campo eléctrico al cristal, se producen deformaciones que dependen de la intensidad del campo aplicado.

Por tanto, el método consiste en aplicar un pulso de carga repentinamente en un extremo del espécimen de suelo mediante un cristal piezoeléctrico; la deformación del espécimen debido a la carga se propaga a través de las ondas de esfuerzo. La llegada del pulso de carga al extremo opuesto del espécimen, al igual que la aplicación del pulso, se registra en un osciloscopio, como se muestra en la figura 3.1.



**Fig. 3.1** Esquema del Equipo Utilizado en el Ensaye de Pulsos

Si el pulso aplicado es de compresión, la velocidad  $V_c$  se obtiene mediante:

$$V_c = \frac{L}{t_c} \quad (3-1)$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
 El módulo equivalente de Young  $E_{eq}$  se obtiene mediante: ®  
 DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$E_{eq} = \rho V_c^2 = \frac{\rho L^2}{t_c^2} \quad (3-2)$$

Si el pulso aplicado es de torsión, la velocidad  $V_s$  se obtiene mediante:

$$V_s = \frac{L}{t_s} \quad (3-3)$$

El módulo al esfuerzo cortante  $G$  se obtiene mediante:

$$G = \rho V_s^2 = \frac{\rho L^2}{t_s^2} \quad (3-4)$$

El ensaye de pulsos se considera un ensaye no destructivo ya que impone deformaciones unitarias del orden de  $10^{-4}$  a  $10^{-3}$ , en por ciento.

### 3.2.2 Ensayo de Columna Resonante.

Este ensaye consiste en someter un espécimen cilíndrico de suelo a un estado de vibración forzada longitudinalmente o torsional, variando la frecuencia de excitación hasta lograr la resonancia del espécimen. El módulo correspondiente se calcula con los datos de la frecuencia de resonancia  $f_n$  la geometría del

espécimen (fig. 3.2) y las características del equipo.

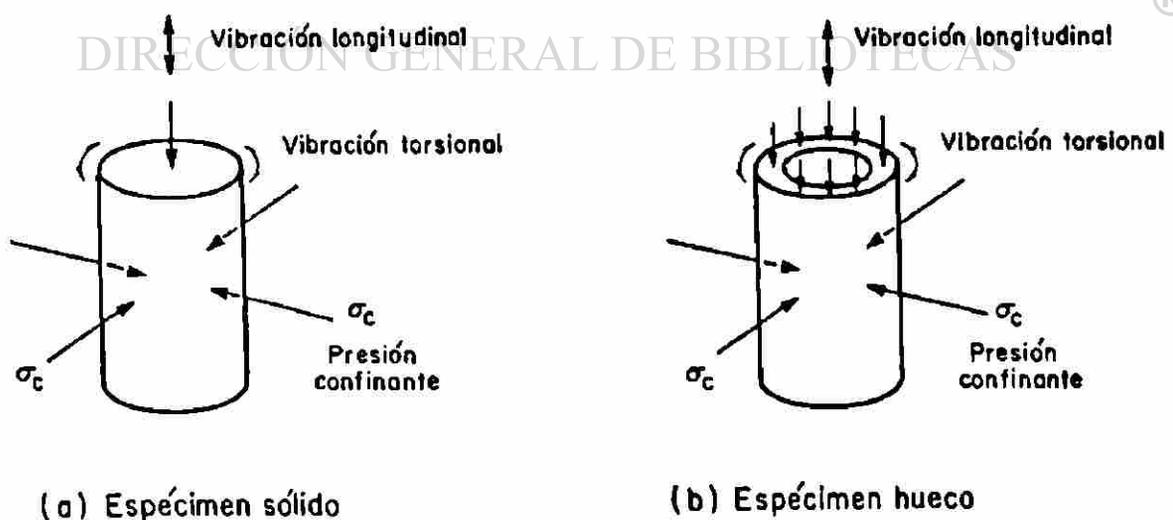
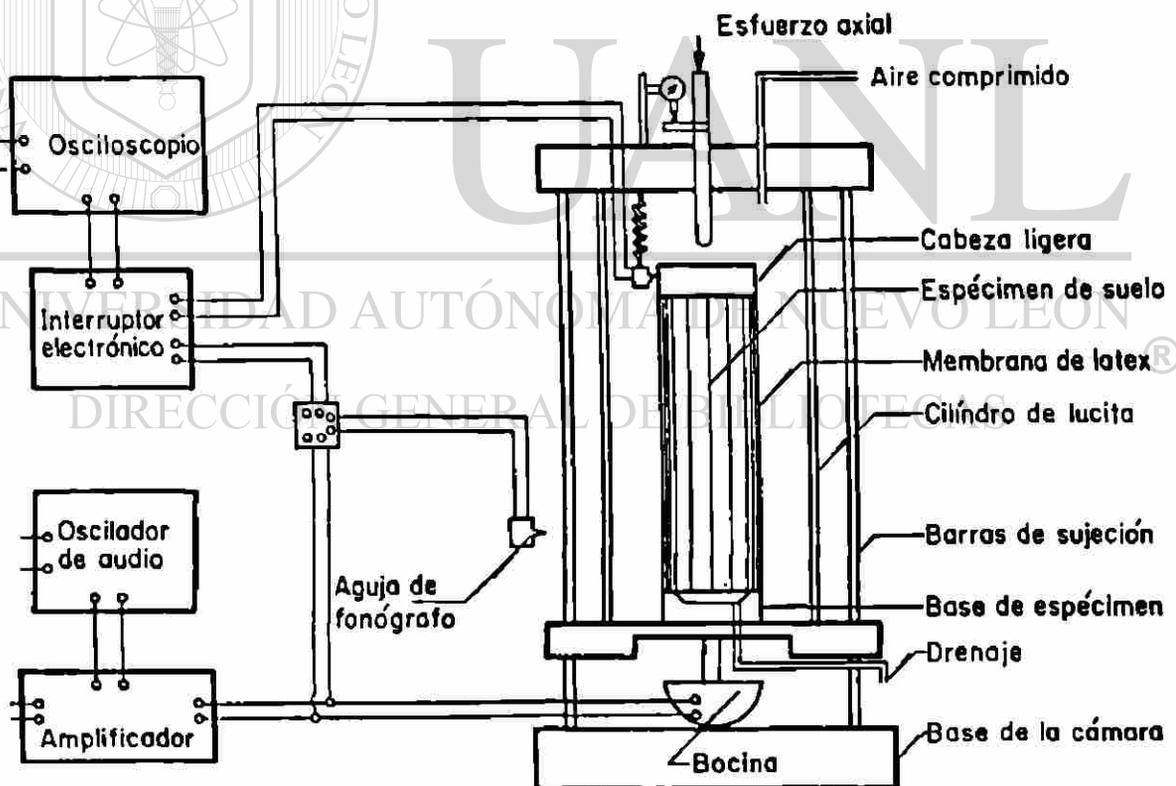


Fig. 3.2 Ensayo de Columna Resonante

Los antecedentes del equipo resonante se remontan a 1937 (ishimoto, M y Lida, K.), posteriormente Bishopp (1959), Hardin (1965), Drnevich, Hall y Richard (1967) y otros, fundamentaron la teoría en que se basa la interpretación de los resultados del equipo resonante. En la fig. 3.3, se muestra el equipo utilizado por Wilson y Dietrich (1960) para ensayos de vibración longitudinal en el que se emplea una bocina para fonógrafo como actuador y dos agujas también de fonógrafo como captadores de la respuesta del espécimen.



**Fig. 3.3** Diagrama Esquemático del Aparato de Columna Resonante.

En general, el procedimiento de ensaye consiste en colocar un espécimen cilíndrico sobre una base rígida. El espécimen puede ser un cilindro sólido o hueco, en cuya parte superior se coloca el dispositivo que comunica la excitación torsional y/o longitudinal. En esta forma se tiene un espécimen de suelo fijo en su extremo inferior y libre en su parte superior.

Mediante un generador de funciones, se produce la forma de la onda con la amplitud y frecuencia requeridas, estas características se observan en la pantalla de un osciloscopio. La respuesta del suelo se mide mediante un acelerómetro, cuya salida se observa en el eje Y del osciloscopio.

La frecuencia de vibración se controla a voluntad, lo cual permite realizar un barrido de frecuencias hasta encontrar la frecuencia de resonancia  $f_n$ , esta frecuencia depende tanto de las características del aparato utilizado como del espécimen mismo. También, mediante la figura X-Y observada en el osciloscopio, se puede conocer cuando el sistema está en resonancia.

Para medir la deformación axial, se emplea un transductor de desplazamientos. La presión de confinamiento se aplica mediante aire comprimido.

Los principales factores que afectan los resultados de la prueba son: la amplitud de deformación angular  $\gamma$ , la presión de confinamiento  $\sigma_c$  y la relación de vacíos  $e$ . Otros factores, tales como la temperatura y el tiempo, afectan los resultados de la prueba, pero de una manera menos importante.

El módulo  $G$  se calcula a partir de la frecuencia de resonancia  $f_n$ , utilizando las expresiones obtenidas por Hardin (1965) de la teoría de vibraciones lineales de un cuerpo cilíndrico.

La ecuación que relaciona la velocidad de propagación de ondas de esfuerzo cortante  $V_s$  con la  $f_n$  queda definido por:

$$V_s = \frac{2\pi f_n L}{\psi_s} \quad (3-5)$$

En donde  $L$  es la longitud del espécimen y  $\psi_s$  es la raíz de la ecuación de frecuencias.

$$\psi_s \tan \psi_s = \frac{J}{J_0} \quad (3-6)$$

En donde  $J$  es el momento de inercia del espécimen y  $J_0$  es el momento de inercia de la cabeza del sistema.

Finalmente:

$$G = V_s^2 \rho \quad (3-7)$$

En donde,  $\rho$  es la densidad de masa del espécimen.

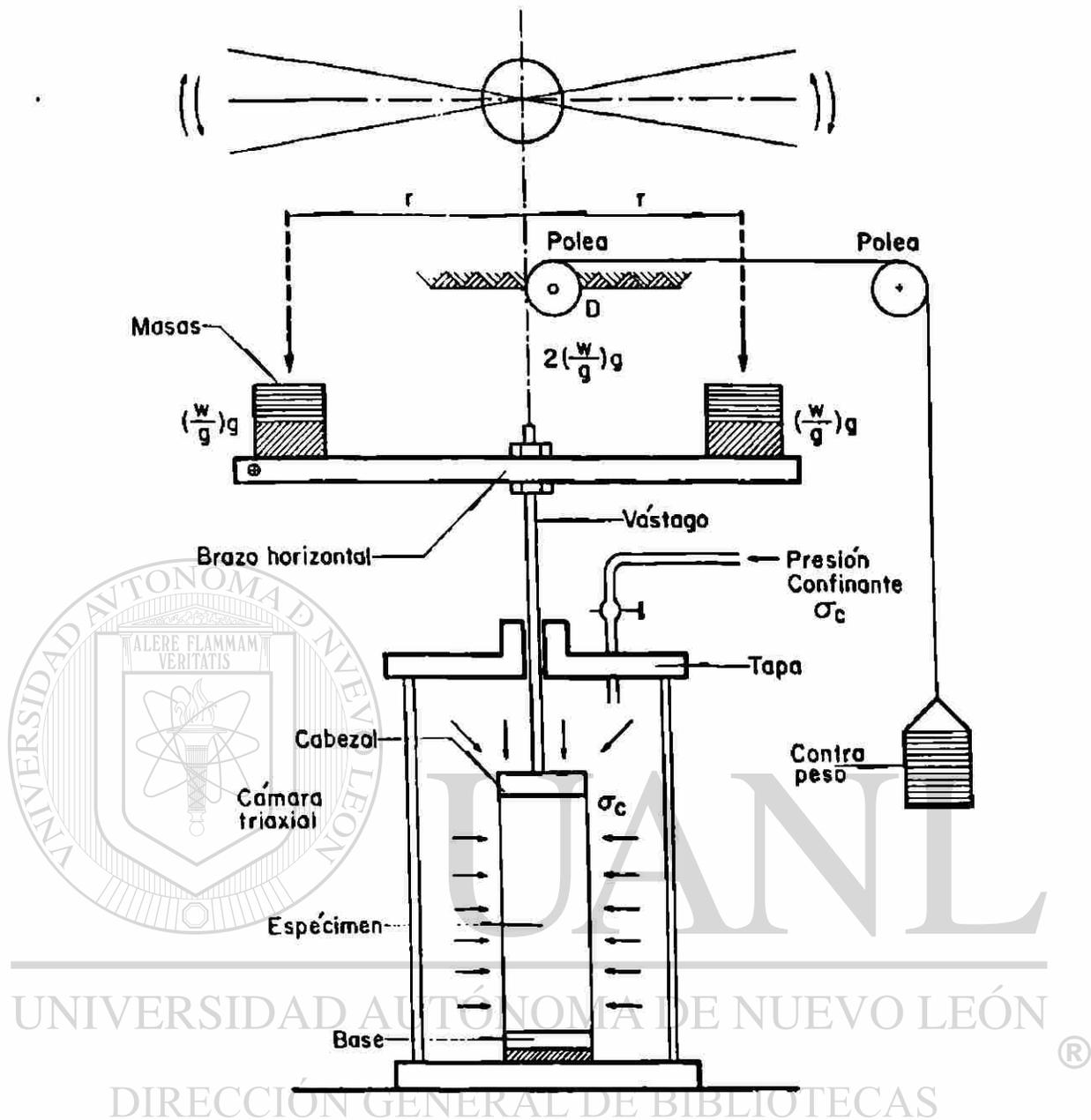
El módulo  $E_{eq}$  se calcula en una forma semejante; la fracción del amortiguamiento se calcula a partir del registro de vibración libre, obtenido al suspender la corriente de excitación y aplicando la expresión del decremento logarítmico. La información detallada del equipo, el procedimiento de calibración, el ensaye de especímenes y el procesamiento de los datos se describen por Drnevich, Hardin y Shippy (1978).

### 3.2.3 Ensaye del Péndulo de Torsión.

Este ensaye consiste en someter un espécimen cilíndrico de suelo a un impulso que le provoque una vibración torsional libre.

La figura 3.4 ilustra el aparato desarrollado por Zeevaert (1967), que consiste en una cámara triaxial modificada, que permite someter la muestra a diferentes presiones de confinamiento  $\sigma_c$ . Esto lleva al conocimiento de la variación del módulo  $G$ , con la presión de confinamiento.

Un vástago, unido firmemente a un brazo horizontal, atraviesa la tapa de la cámara y transmite la vibración torsional libre a la cabeza de la muestra. El brazo horizontal, sobre el cual se colocan masas que guardan simetría con el eje de la muestra, da lugar a un sistema de un grado de libertad. Al brazo se le da un pequeño impulso inicial y esto hace que el sistema vibre libremente, la vibración como respuesta de los elementos elásticos del suelo, es registrada por un pequeño graficador dotado de dos plumillas; una registra la vibración libre del sistema y la otra registra las marcas de tiempo.



**Fig. 3.4** Péndulo de Torsión de Vibración Libre (Zeevaert, 1967)

De los registros típicos para diferentes suelos (fig. 3.5) se obtiene la amplitud, el periodo y el decremento logarítmico de la vibración libre amortiguada del sistema aparato-suelo; de esta información se calcula el módulo  $G$ , de acuerdo con la expresión:

$$G = \frac{\omega_{sd}^2 C}{(1 - \zeta_s^2) - (1 - \zeta_a^2) \left( \frac{\omega_{sd}}{\omega_{ad}} \right)^2} \quad (3-8)$$

donde:

$$C = J_a h I_p$$

$J_a$  = Momento de inercia de las masas.

$h$  = Altura del espécimen.

$$I_p = \pi D^4 / 32$$

$D$  = Diámetro del espécimen.

$\omega_{sd}$  = La frecuencia circular amortiguada del sistema.

$\omega_{ad}$  = La frecuencia circular amortiguada de calibración.

$\zeta_s$  = La relación de amortiguamiento del sistema.

$\zeta_a$  = La relación de amortiguamiento del instrumento.

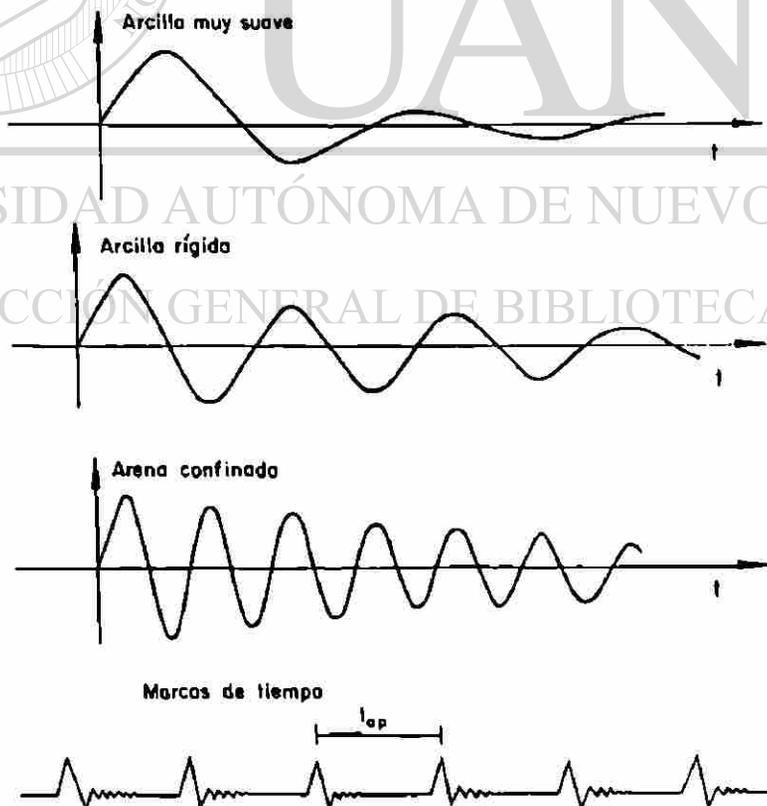


Fig. 3.5 Registros Típicos Obtenidos con el Péndulo de Torsión.

Zeevaert (1984) describe con detalle las consideraciones del funcionamiento del aparato, su uso, detalles de calibración e interpretación de resultados.

### 3.2.4 Ensaye Triaxial Cíclico.

El ensaye triaxial cíclico tiene como finalidad investigar el comportamiento esfuerzo-deformación y la resistencia al esfuerzo cortante de un espécimen cilíndrico de suelo, sometido a cargas axiales cíclicas.

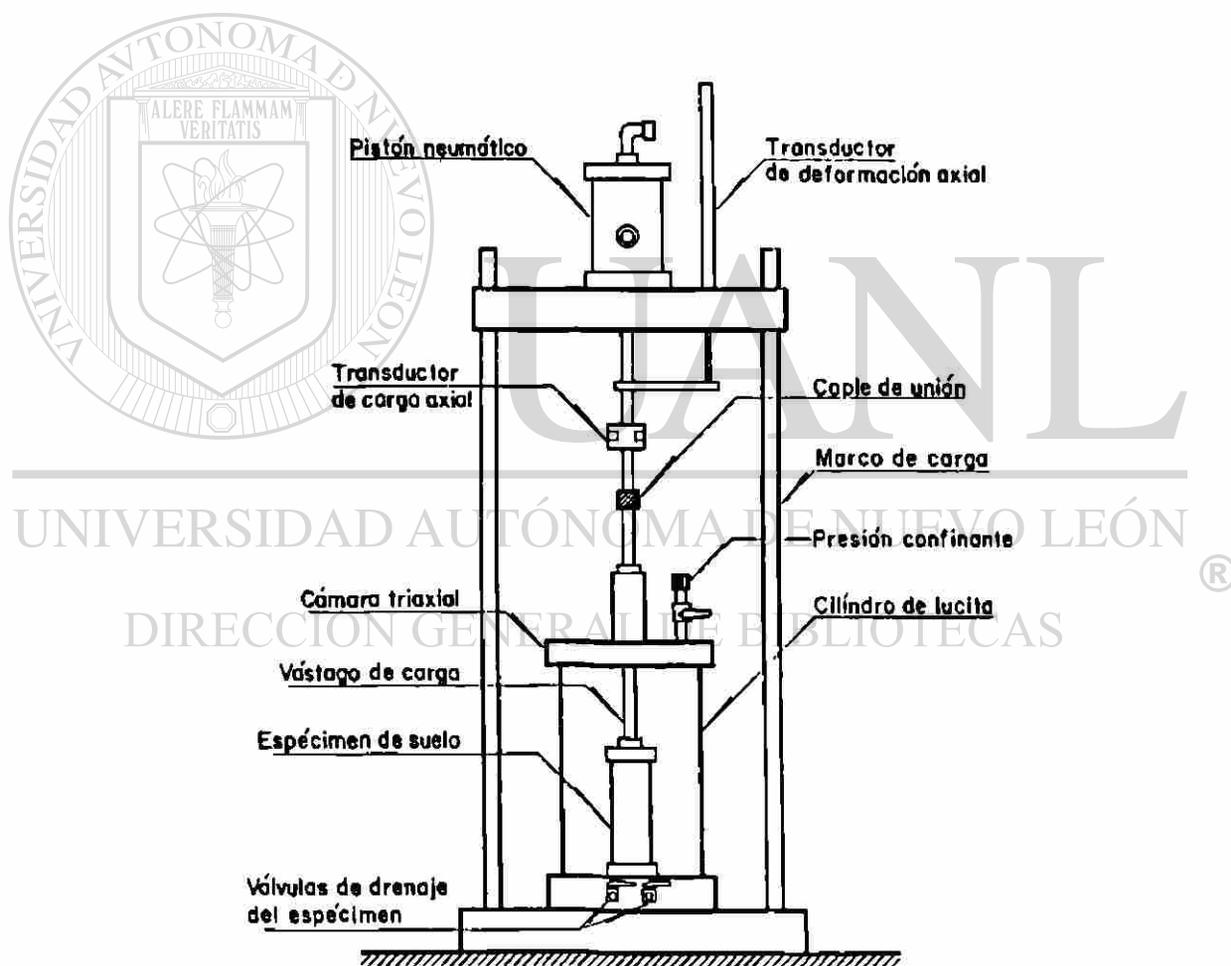
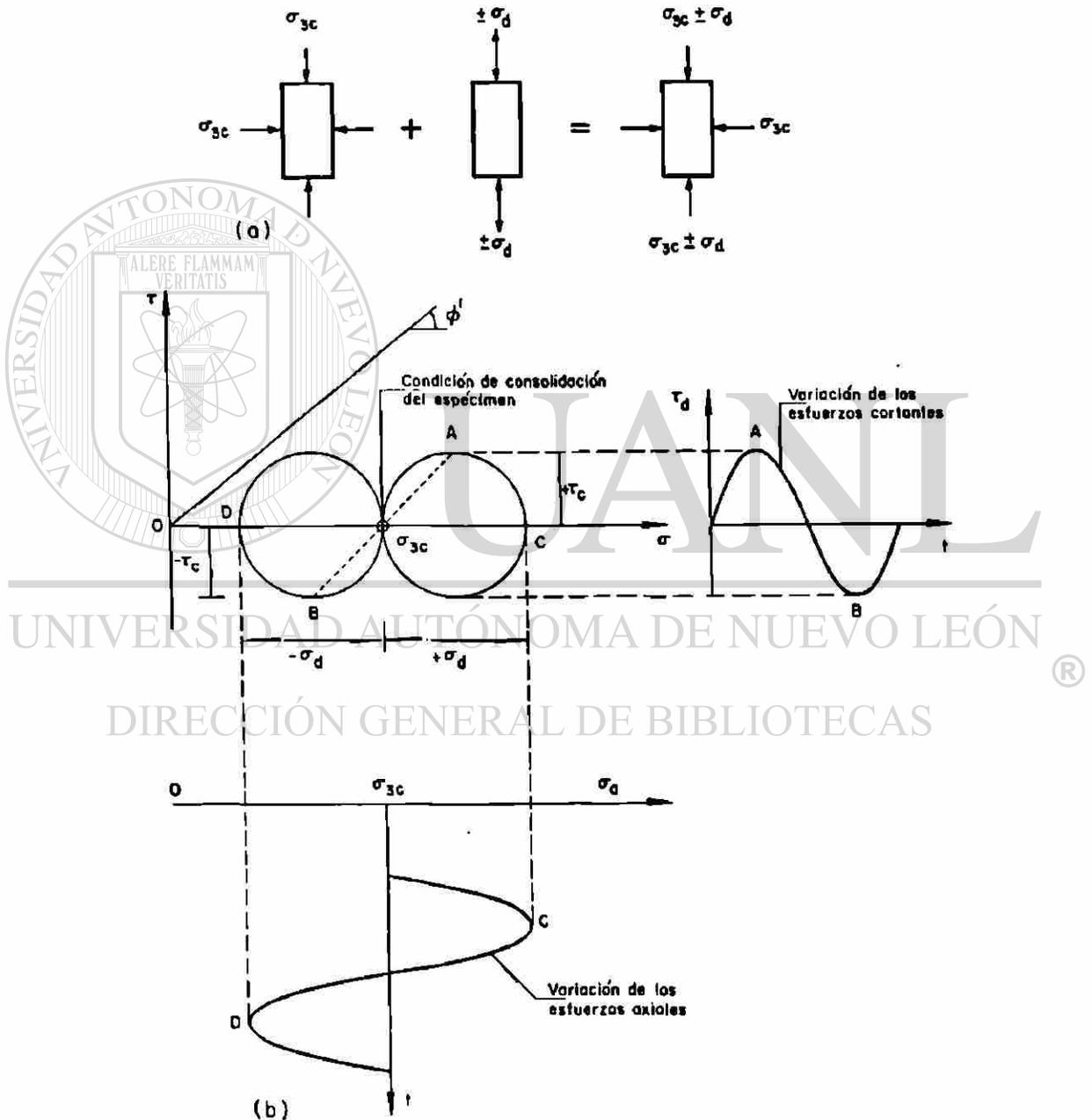


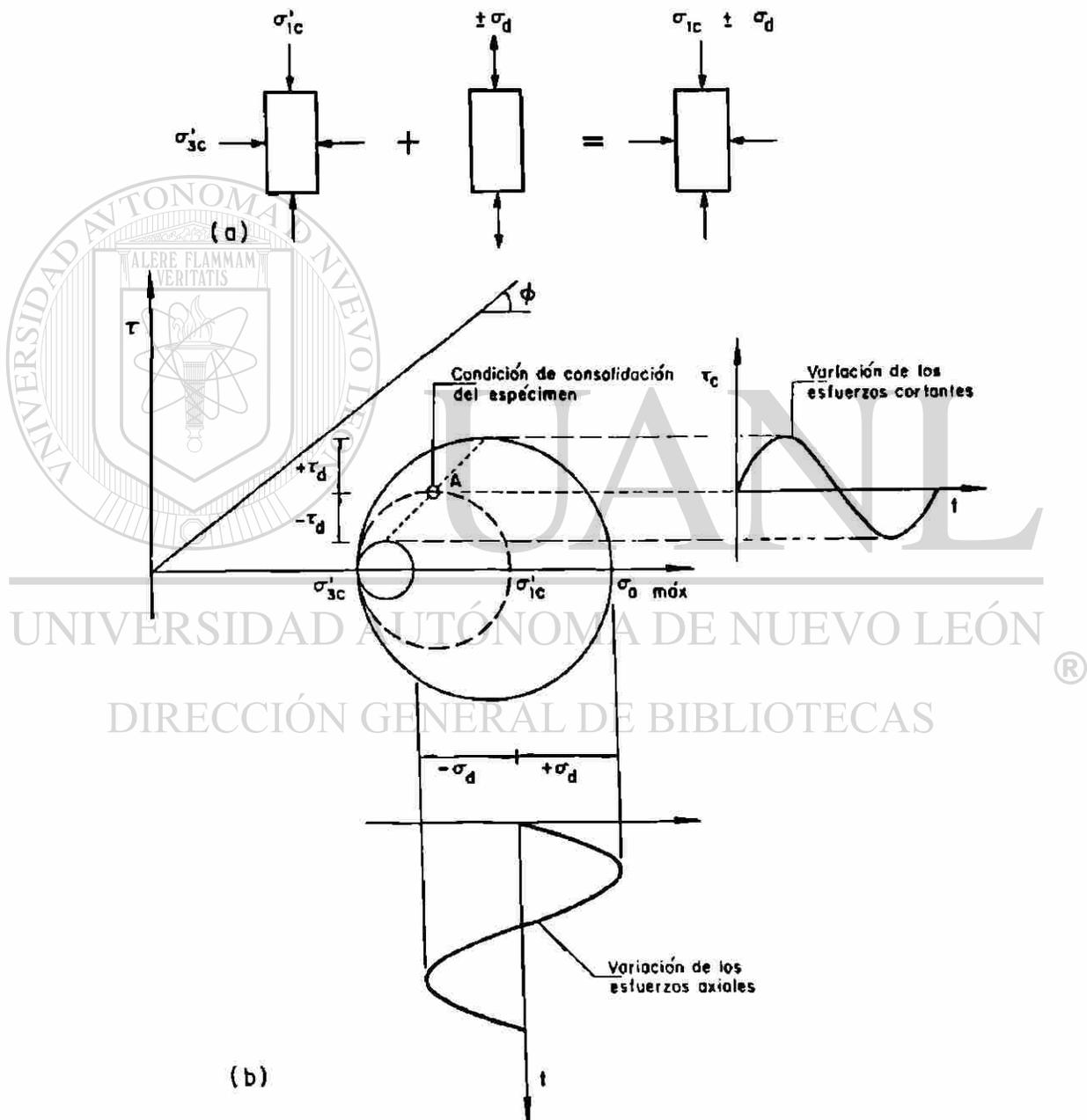
Fig. 3.6 Cámara Triaxial Cíclica

La figura 3.6 muestra un esquema de una cámara triaxial cíclica moderna. El ensaye triaxial cíclico consiste en someter un espécimen de suelo a un esfuerzo de confinamiento  $\sigma_{3c}$  hasta lograr su consolidación, y posteriormente aplicarle un esfuerzo axial cíclico de magnitud conocida  $\sigma_d$  a una frecuencia determinada.



**Fig. 3.7** Esquema Del Ensaye Triaxial Cíclico Convencional Para Especimen Isotrópicamente Consolidado

El ensayo triaxial cíclico se realiza manteniendo la presión de confinamiento  $\sigma_{3c}$  constante y aplicando el esfuerzo axial cíclicamente, con magnitud de  $\pm \sigma_d$  como se indica en la figura 3.7a. La figura 3.8 muestra las condiciones de esfuerzo de un ensayo triaxial cíclico para un espécimen anisotrópicamente consolidado.



**Fig. 3.8** Esquema del Ensayo Triaxial Cíclico Convencional para Espécimen Anisotrópicamente Consolidado

En este ensaye el espécimen se consolida primeramente a una presión isotrópica  $\sigma_{3c}$  y posteriormente se aplica un esfuerzo axial estático adicional bajo condiciones drenadas para lograr el estado de esfuerzos de consolidación anisotrópica (punto A en la figura 3.8b). La condición descrita tiene por objeto simular el estado de esfuerzos cortantes *in situ* a los que estaba sometido el elemento de suelo antes de extraerse mediante muestreo. A partir de la consolidación anisotrópica se aplica al espécimen de suelo un esfuerzo axial cíclico  $\pm \sigma_d$  y se obtiene un registro continuo de las variables en estudio. En general, se obtienen las trazas o registros continuos de la variación de la carga axial aplicada  $P$ , la deformación axial producida  $\delta_c$ , y la presión de poro  $\Delta_u$ , generada durante la aplicación de carga cíclica.

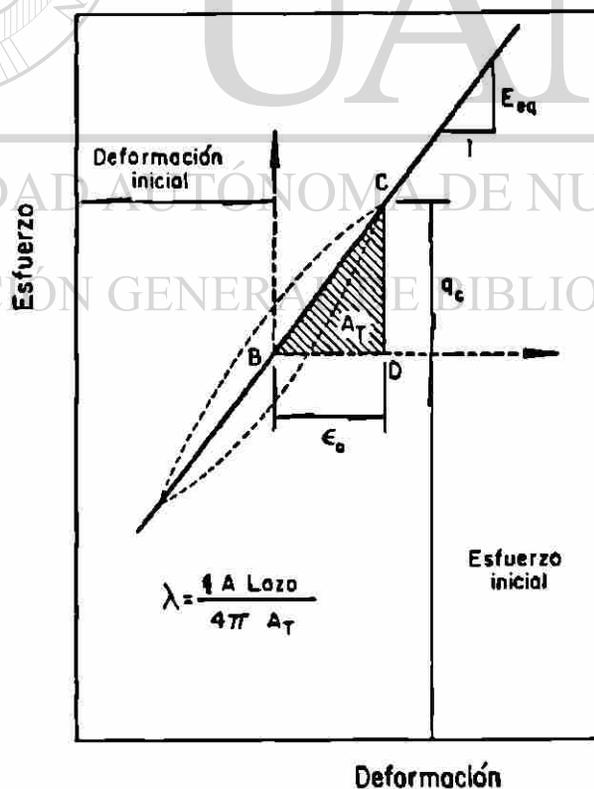


Fig. 3.9 Lazo de Histéresis y Definiciones

La figura 3.9 muestra un lazo de histéresis típico de un ensaye triaxial cíclico. En la figura se presenta el estado inicial de consolidación del espécimen, la variación del esfuerzo cíclico  $q_c$  y la variación de la deformación axial cíclica  $\varepsilon_c$ . El módulo equivalente de Young  $E_{eq}$  se determina a partir de la pendiente de la línea que une los puntos extremos del lazo de histéresis. La relación de amortiguamiento equivalente  $\lambda$  se calcula usando la expresión:

$$\lambda = \frac{1}{4\pi} * \frac{\text{Area - lazo - histeresis}}{\text{Area - triangulo - BCD}} \quad (3-9)$$

A partir de los datos del ensaye también se puede obtener, entre otros, los parámetros de licuación de un suelo granular y los parámetros para los modelos de degradación de suelos cohesivos. La gran cantidad de información proveniente de una serie de ensayos triaxiales cíclicos requiere el uso de un mayor número de aparatos de registro o captura de datos.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

### 3.2.5 Ensaye de Corte Simple Cíclico.

El ensaye de corte simple cíclico tiene como finalidad investigar el comportamiento esfuerzo-deformación y la resistencia al esfuerzo cortante de una muestra de suelo sometido a corte simple.

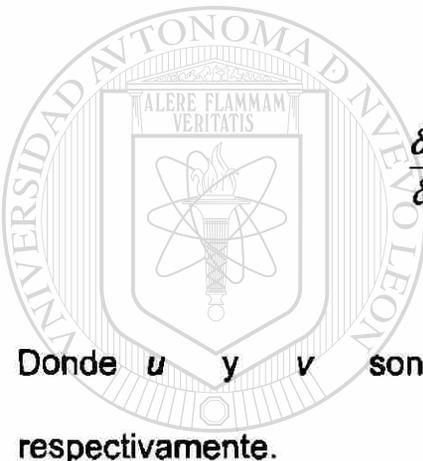
La prueba de corte simple cíclico se desarrolló con la finalidad de conseguir una mayor aproximación a las condiciones de campo en las que se encuentra

un elemento de suelo al ser sometido a la propagación vertical de las ondas esfuerzo cortante, que aquella lograda con la cámara triaxial cíclica.

Las condiciones de corte simple teóricas, que debe cumplir un elemento de suelo en un equipo de corte simple se resumen en:

- a) Estático: simular el estado de esfuerzos iniciales.
- b) Cíclico: imponer condiciones de corte simple.

En el plano xy esta condición queda definida por:


$$\frac{\delta u}{\delta x} = \frac{\delta v}{\delta y} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\delta u}{\delta y} \neq 0 \quad (3-10)$$

Donde  $u$  y  $v$  son los desplazamientos en las direcciones  $x$ ,  $y$ , respectivamente.

Debido a las condiciones no drenadas, el cambio de volumen de la muestra tendrá que ser nulo; por tanto, al ocurrir deformaciones angulares  $\omega$ , no deberán producirse deformaciones verticales, es decir, cada punto de las fronteras inferior y superior, deberá moverse una cantidad de  $\pm \omega h$ . Para conseguir esto último, dichas fronteras deberán ser rugosas para evitar deslizamientos, que darían origen a zonas muertas.

Pickering (1969) realizó ensayos con placas de diferente rugosidad y obtuvo resultados satisfactorios cuando las placas proporcionaban la fricción necesaria para transmitir los esfuerzos cortantes  $\tau_{xy}$ .

Uno de los primeros aparatos de corte simple fue el desarrollado por el Swedish and Norwegian Geotechnical Institute (Kjellman, 1951); sin embargo, este aparato tiene el inconveniente de utilizar muestras cilíndricas y dificultades para lograr que existan los esfuerzos cortantes en una sección horizontal que sean uniformes.

Roscoe (1953) modificó el aparato y utilizó muestras de sección rectangular y paredes rígidas.

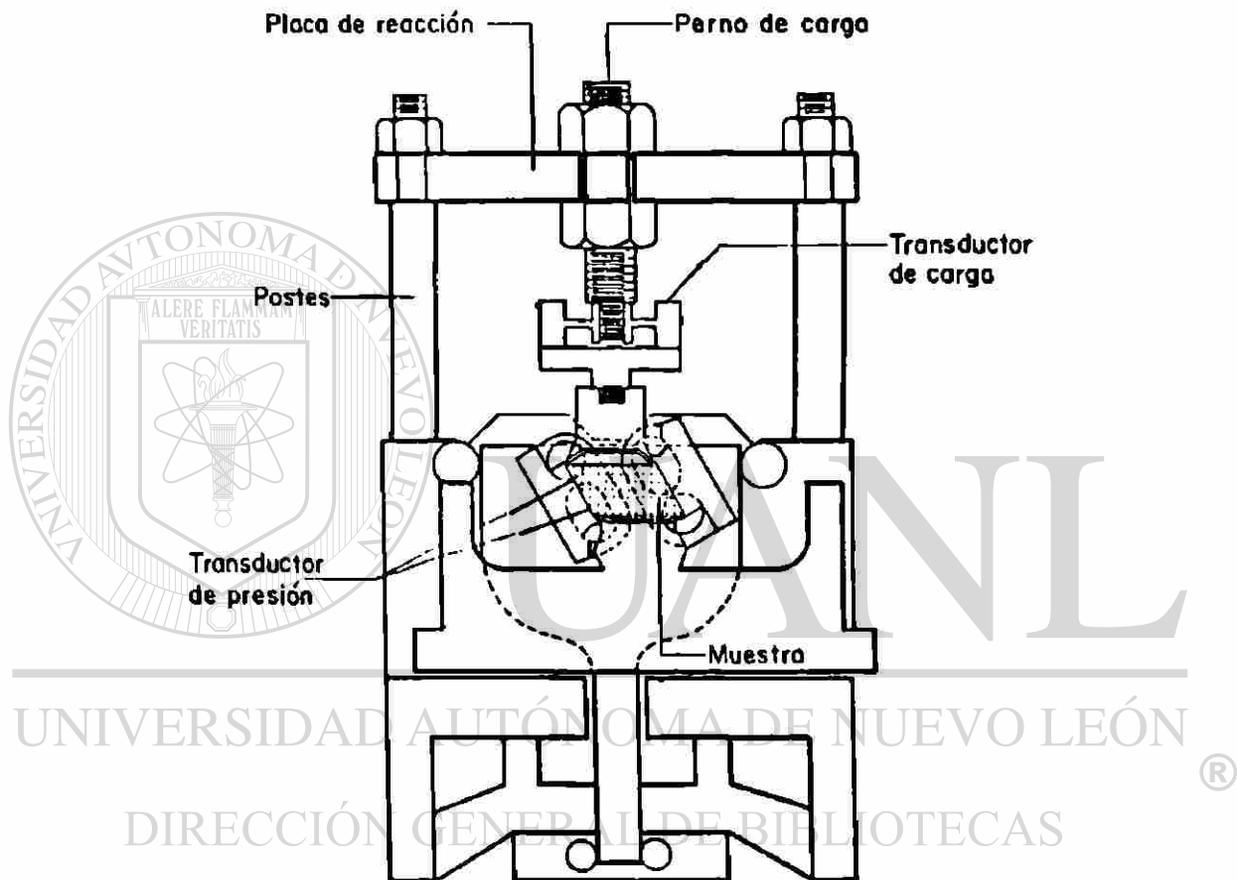
En la Universidad de California, en Berkeley, Peacock y Seed (1968) desarrollaron un aparato de corte simple, que emplearon para examinar la tendencia a licuarse de muestras de arena sometida a este tipo de esfuerzo. También en la Universidad de British Columbia, Pickering (1969), Finn, Pickering y Bransby (1971) diseñaron y utilizaron un aparato de corte simple para el estudio de licuación.

Al ensaye de corte simple cíclico se le han señalado limitaciones tales como la generación de condiciones de no-uniformidad de esfuerzos en las fronteras, lo cual causa la falla de los especímenes para esfuerzos menores que aquellos requeridos en el sitio de estudio. Existe una distribución no-uniforme de los esfuerzos normales en las fronteras, lo que da lugar a una excentricidad en los esfuerzos normales.

En la actualidad, se pueden encontrar dos tipos de aparatos de corte simple; uno de paredes rígidas y forma prismática de aproximadamente 5x5x2.9 cm; otro de forma cilíndrica, con dimensiones de 71 mm de diámetro y 20 mm de altura, en este caso los especímenes se colocan dentro de una membrana

reforzada con alambre de acero en espiral, esto último tiene como finalidad lograr que el desplazamiento relativo entre la parte superior y la parte inferior de la muestra defina una línea recta.

Finn y Vaid (1977) desarrollaron un aparato de corte simple cíclico para ensayos a volumen constante (fig. 3.10).



**Fig. 3.10** Aparato de Corte Simple Cíclico de Volumen Constante

Este aparato tiene el propósito de reducir los efectos del cambio de volumen de la muestra debido a la deformación del equipo. Los errores debidos a la deformación del equipo son comunes, en los ensayos no drenados, para estudiar el potencial de licuación de los suelos. La magnitud de la deformación es en primer término en función del tipo de equipo utilizado y de la

granulometría del suelo bajo ensaye. En los equipos de corte simple de paredes rígidas, la deformación puede presentarse en las esquinas de la muestra.

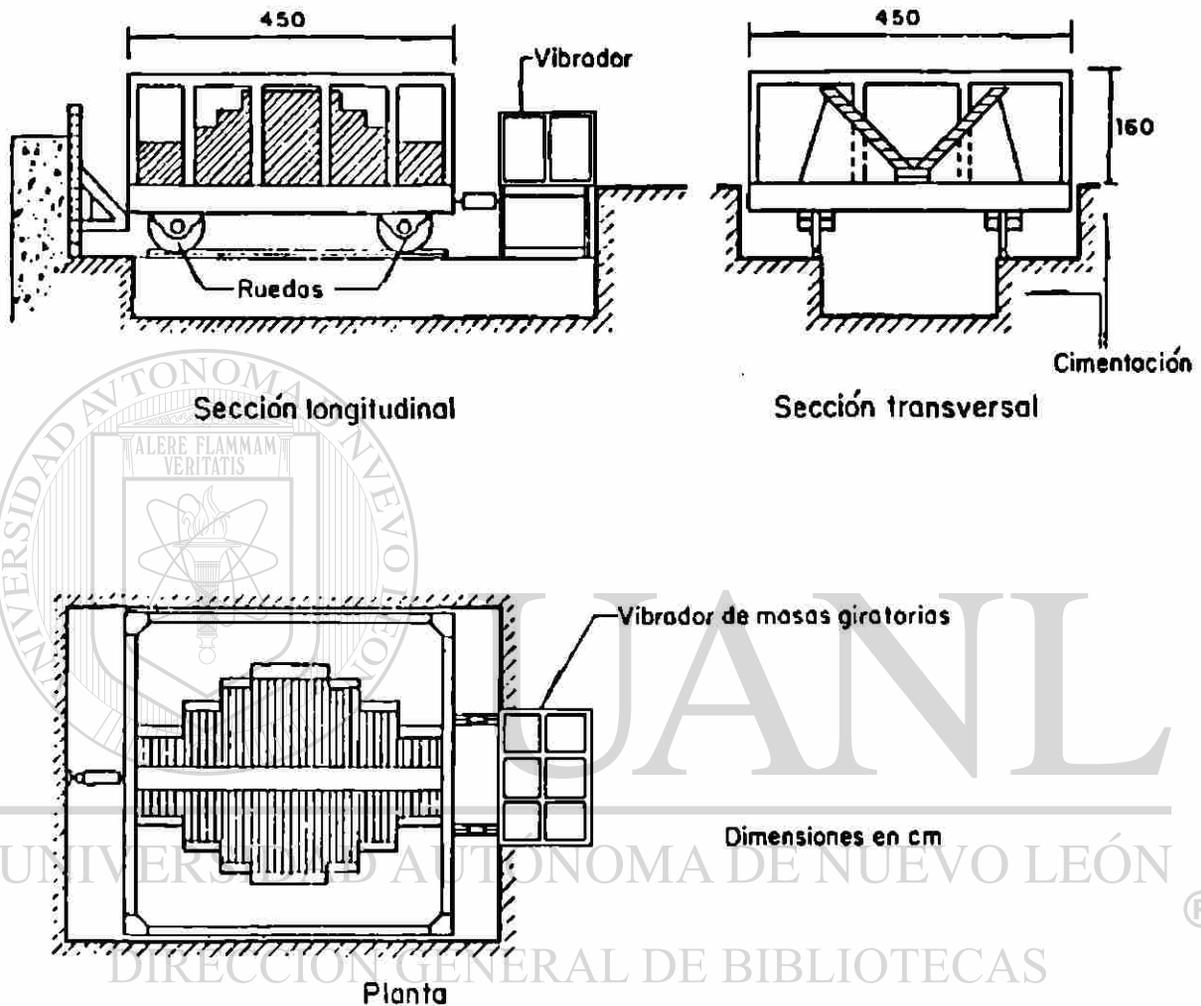
El procedimiento que propone Finn y Vaid (1977) consiste en determinar el comportamiento no drenado de la muestra de ensaye, utilizando arena seca y midiendo el cambio de la presión vertical para mantener el volumen de la muestra constante, el cambio de la presión vertical se interpreta como el cambio de presión de poro equivalente.

Con objeto de superar algunas de las dificultades de los especímenes de tamaño pequeño, Díaz-Rodríguez, Weckmann e Iturbe ( 1973 ) diseñaron un aparato de corte simple de paredes rígidas para muestras de gran tamaño ( 30 x 60 x 90 cm ). El equipo está diseñado para usarse sobre una mesa vibradora y ofrece las siguientes características:

- 
- UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS
- a) Simular el efecto de la presión de sobrecarga y de fuerzas de inercia. ®
  - b) Imponer a la muestra condiciones de deformación de corte simple.
  - c) Medir la presión de poro generada en diferentes puntos de la muestra y de esta forma conocer la distribución de la presión de poro que da origen a la licuación.

### 3.2.6 Ensaye en una Mesa Vibradora.

Una mesa vibradora es un dispositivo que permite efectuar ensayos dinámicos de sistemas o componentes, ya sea a escala natural o a escala reducida.

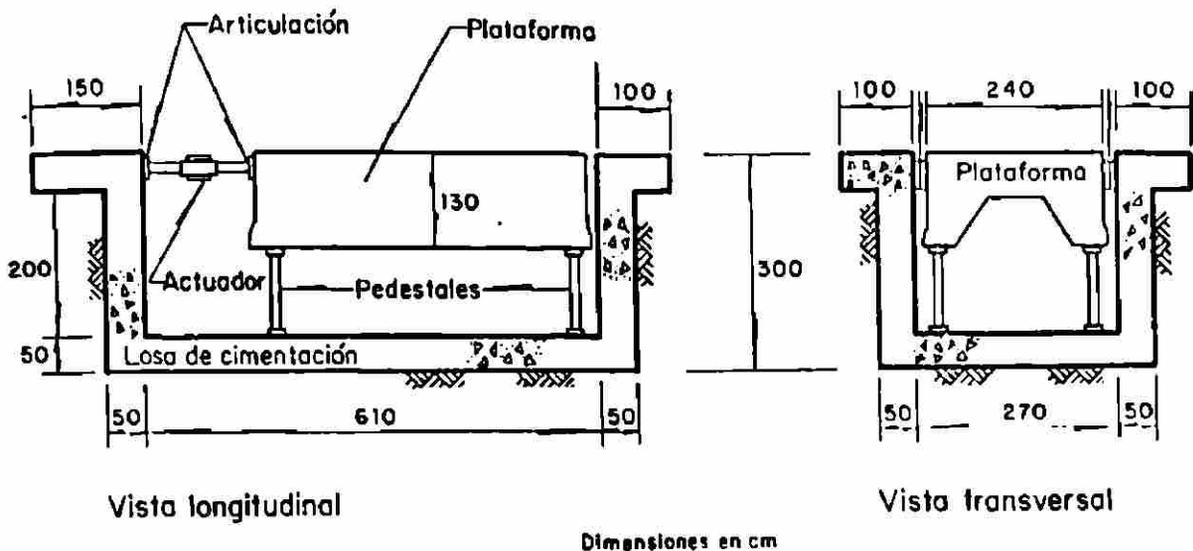


**Fig. 3.11** Características de una Mesa Vibradora ( Díaz Rodríguez, 1971 )

Una mesa vibradora consta principalmente de:

- a) Una plataforma rígida sobre la cual se fija o se construye el espécimen a ensayar. Sus dimensiones varían desde unos centímetros hasta varios metros.

- b) Un sistema de soporte de la plataforma, que puede ser basándose en ruedas metálicas ( Fig. 3.11 ), pedestales doblemente articulados ( Fig. 3.12 ), rodamientos de agujas o aire comprimido.
- c) Un sistema excitador encargado de aplicar a la plataforma el tipo de excitación, ( impacto, periódica o aleatoria ) que el ensaye requiera. Díaz-Rodríguez ( 1971 ) utilizó un excitador de masas giratorias excéntricas para la generación de vibraciones armónicas, en un rango de frecuencias hasta de 20 Hz y una fuerza máxima de 5 ton. En tanto que Díaz Rodríguez y Del Valle ( 1977 ) describen un moderno laboratorio con una mesa vibradora equipada con un excitador electrohidráulico, doblemente articulado en sus extremos, controlado electrónicamente y capaz de simular diferentes tipos de vibración ( por ejemplo un acelerograma ). El intervalo de frecuencia de vibración abarca hasta 100 Hz, con una fuerza de 75 ton.
- d) Un sistema de control electrónico equipado con un controlador, un selector de programas, un acondicionador de programas y un servocontrolador. La función principal de este último es comparar una señal de entrada con una de retroalimentación y generar una señal de error que tiene la magnitud y la polaridad requeridas para corregir la señal deseada.
- e) Un sistema de captura de datos, compuesto básicamente de un transductor, un acondicionador de señal y dispositivos de registro ( en papel o en forma magnética ).
- f) Sistemas auxiliares.



**Fig. 3.12** Mesa Vibradora ( Díaz Rodríguez y Del Valle, 1977 )

Son muchas las aplicaciones que se pueden dar al uso de mesas vibratoras en la investigación del comportamiento dinámico de los suelos y estructuras construidas de suelo. Díaz-Rodríguez (1971, 1984) utilizó la mesa vibradora para investigar las características dinámicas de modelos a escala reducida de cortinas de enrocamiento, y obtuvo excelentes resultados en la determinación de las frecuencias naturales de vibración y la fracción del amortiguamiento crítico asociado con dichas frecuencias.

### 3.3 Métodos de Campo

El ensaye de muestras de suelo representativas de las condiciones *in situ* adolece de los efectos que sobre la muestra tiene la alteración causada por la extracción, transporte, almacenamiento y preparación para ensaye.

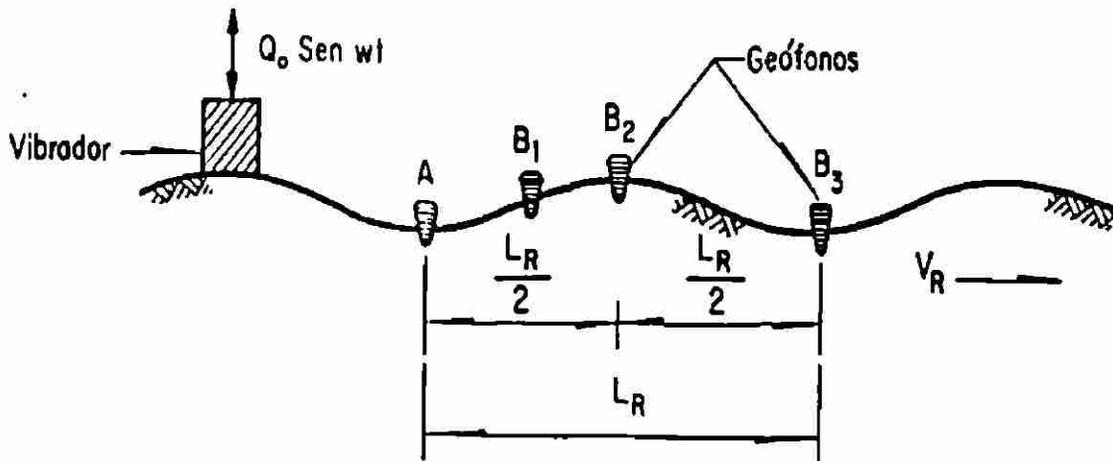
Con el propósito de evitar dicha alteración, se ha desarrollado un conjunto de métodos de campo, para la obtención de las propiedades dinámicas de los suelos.

A continuación se describirán las principales características de las técnicas y procedimientos de campo más usuales en la dinámica de suelos, su fundamentación, aspectos teóricos y sus ventajas y limitaciones.

#### 3.3.1 Ensaye de Ondas de Superficie.

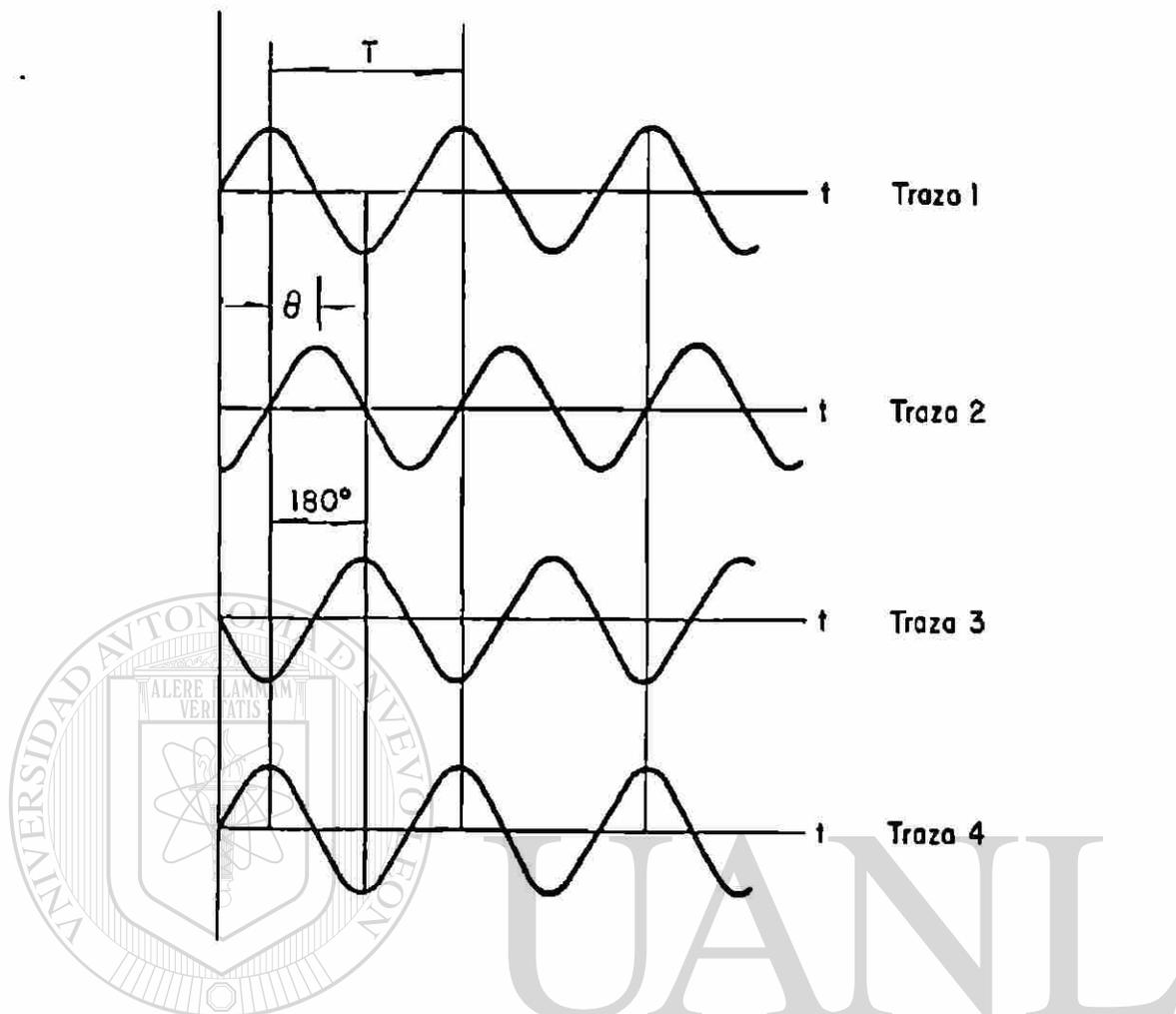
Este ensaye consiste en generar un estado establecido de ondas Rayleigh de una frecuencia conocida, y medir la longitud de las ondas generadas.

El esquema general del ensaye se muestra en la figura 3.13 y consiste en colocar un vibrador mecánico o electromagnético sobre una placa de acero. Con el vibrador se produce un estado establecido de ondas Rayleigh de una frecuencia  $f$ , conocida y mediante la colocación de geófonos en la superficie del terreno, medir la longitud de onda  $L$  de la vibración provocada. Para la medición de la longitud de ondas se utiliza un mínimo de dos geófonos.



**Fig. 3.13** Ensayo de Vibración de la Superficie del Terreno

La figura 3.14 ilustra de manera esquemática como se realiza tal determinación. Se coloca un geófono en el punto (A), figura 3.13, cercano al vibrador y otro en (B), a una cierta distancia; se obtienen los registros correspondientes, trazas 1 y 2 respectivamente, como puede apreciarse los registros muestran un desfaseamiento  $\theta$ . Se mueve el geófono del punto (B<sub>1</sub>) hasta la posición (B<sub>2</sub>), de tal forma que los registros muestren un desfaseamiento de  $180^\circ$  (trazas 1 y 3 respectivamente), la distancia entre (A) y (B) es  $L_R/2$ . Para verificar la determinación se coloca un tercer geófono a una distancia  $L_R$  del punto (A), los registros deberán estar en fase como lo muestran las trazas 1 y 4.



**Fig. 3.14** Esquema para la Determinación de la Longitud de Onda

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

Con lo anterior queda determinada la longitud de onda  $L_r$ . La velocidad de onda Rayleigh  $V_r$  se puede calcular mediante la expresión:

$$V_r = L_r f \quad (3-11)$$

La velocidad de la onda Rayleigh es aproximadamente igual a la velocidad de la onda de esfuerzo cortante  $V_s$  por lo tanto se puede escribir:

$$V_s = V_r = \sqrt{G/\rho} \quad (3-12)$$

De la ecuación anterior se despeja el valor del módulo de rigidez  $G$ . La profundidad efectiva de la onda Rayleigh se ha estimado empíricamente por Ballard (1964) y resulta ser de  $\frac{1}{2} L_r$ . Esta profundidad constituye la principal desventaja del uso de esta técnica, además, se pueden presentar errores provocados por refracciones si se trata de un depósito estratificado.

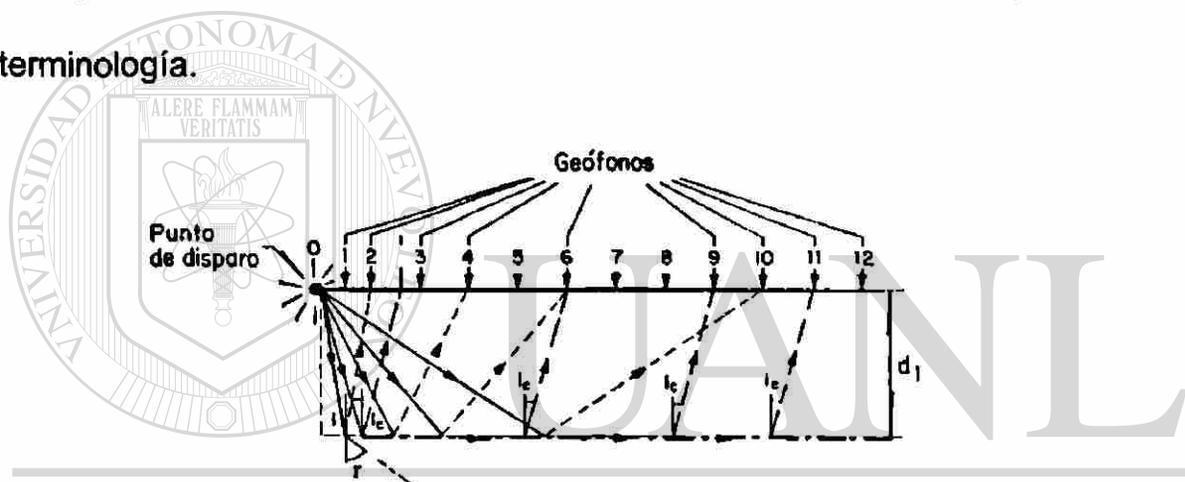
### 3.3.2 Ensaye de Refracción Sísmica.

Este ensaye consiste en medir la velocidad de propagación de las ondas elásticas generadas en un foco de perturbación, por un impacto o explosión en la superficie del terreno.

La perturbación se puede provocar mediante explosivos (normalmente dinamitas gelatinosas) o mediante golpes con un martillo sobre placa de acero que se coloca sobre la superficie del terreno. El esquema general del ensaye se muestra en la figura 3.15 y consiste en colocar en la superficie del terreno una línea de geófonos, separados entre sí por una longitud media de 1 a 18 m. El punto de la perturbación se sitúa a una distancia igual a la escogida como la separación entre geófonos del primero de ellos.

El impacto genera ondas que se propagan en el terreno, el tiempo de llegada de estas ondas a los distintos geófonos se amplifican y se registran en un

oscilógrafo. El registro obtenido (fig. 3.15b) consiste en varias líneas o trazos, una por cada geófono. El instante de impacto se registra mediante una marca en el canal del oscilógrafo, y el instante de llegada a cada uno de los geófonos queda igualmente registrado. Algunas ondas se propagan próximas a la superficie del terreno a una velocidad  $V_1$ ; Otras cruzan la capa superior tanto hacia abajo como hacia arriba, en cierto ángulo crítico denominado ángulo de refracción. Debido a que las leyes de refracción de las ondas elásticas son semejantes a las de la refracción de la luz, existe semejanza en su terminología.



a) Colocación de geófonos

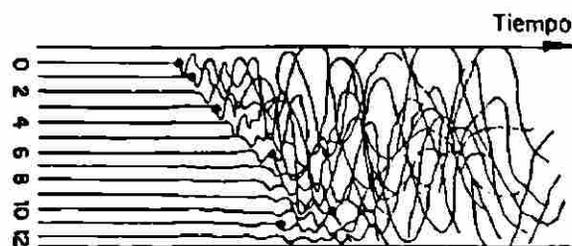


Fig. 3.15 Esquema del Ensayo de Refracción Sísmica

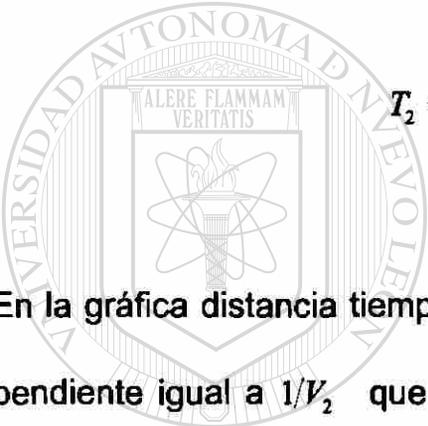
Para obtener la curva distancia versus tiempo de llegada, se dibujan en el eje de las abscisas las distancias entre geófonos; sobre ellas se dibuja verticalmente, como ordenadas, el tiempo transcurrido entre el instante del impacto y el instante de llegada al geófono correspondiente. Al unir los puntos de intersección indican diferencia de velocidad de propagación de ondas elásticas, cuya magnitud se obtiene de la pendiente del tramo recto correspondiente. Las abscisas de los puntos de intersección están relacionadas directamente con el espesor de las distintas capas de suelo. La profundidad de exploración con este método es aproximadamente 10 veces la longitud del tendido total de geófonos.

Para obtener buenos resultados de la aplicación de este ensaye es necesario que exista contraste entre las propiedades de las capas de suelo investigadas. El contraste básico consiste en que las velocidades de propagación de las distintas capas aumenten con la profundidad. Con este ensaye se puede perder la detección de una capa de suelo blando, si ésta se encuentra entre dos capas de mayor velocidad de propagación.

Para el caso de tres capas de suelo, cada una con propiedades elásticas uniformes, la primera con un espesor  $d_1$  y una velocidad  $V_1$  la segunda y tercera con  $(d_2, V_2)$  y  $(d_3, V_3)$  respectivamente. Además, si se cumple la condición  $V_3 > V_2 > V_1$ , al producirse el impacto en el punto A de la superficie del terreno, la energía se transmite a partir de ese punto al primer geófono, colocado a una distancia  $x$ , siguiendo una trayectoria directa. Cuando el frente

de ondas choca contra la frontera de las dos capas, donde cambia la velocidad, la energía se refracta en la capa inferior de acuerdo con la ley de Snell.

La onda directa que se propaga desde el punto del impacto o explosión hasta el primer geófono tardará en llegar  $T_1 = x/V_1$ , dicho tiempo asociado a la distancia correspondiente están representados en la gráfica distancia-tiempo, por una línea recta que pasa por el origen y tiene una pendiente igual a  $1/V_1$ . Para una onda refractada, puede demostrarse que tardará en llegar:



$$T_2 = \frac{x}{V_2} + \frac{2d_1 \sqrt{V_2^2 - V_1^2}}{V_1 V_2} \quad (3-13)$$

En la gráfica distancia tiempo, esta expresión es la ecuación de una recta con pendiente igual a  $1/V_2$  que corta el eje de las ordenadas en  $T_1$ , denominado tiempo de intercepción, cuya expresión es:

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$T_1 = 2d_1 \sqrt{\frac{V_2^2 - V_1^2}{V_1 V_2}} \quad (3-14)$$

Sustituyendo  $T_1 = T_2 - x/V_2$  y despejándola la profundidad  $d_1$ :

$$d_1 = \frac{x_1}{2} \sqrt{\frac{V_2 - V_1}{V_2 + V_1}} \quad (3-15)$$

Ballard y McLean, (1975), nos proporcionan las siguientes expresiones:

$$d_2 = \frac{5}{6}d_1 + \frac{x_2}{2} \sqrt{\frac{V_3 - V_2}{V_3 + V_2}} \quad (3-16)$$

$$d_3 = \frac{1}{6}d_1 + \frac{3}{4}d_2 + \frac{x_3}{2} \sqrt{\frac{V_4 - V_3}{V_4 + V_3}} \quad (3-17)$$

donde

$d_{1,2,3}$  son los espesores de las capas.

$x_{1,2,3}$  son las distancias de la fuente a los puntos de cambio de pendiente

$V_{1,2,3}$  son las velocidades de propagación de las capas.

### 3.3.3 Ensaye de Resonancia Vertical.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

El fundamento teórico de este tipo de ensaye está ubicado en el campo de la interacción suelo-estructura. Consiste en colocar, a una profundidad  $z$  sobre una base de concreto de las dimensiones indicadas en la figura 3.16, un vibrador mecánico o electromagnético y realizar un barrido de frecuencias para obtener la curva de frecuencia versus amplitud del movimiento (fig. 3.17), con objeto de determinar la frecuencia de resonancia  $f_r$  vertical, del sistema vibrador-cimentación-suelo.

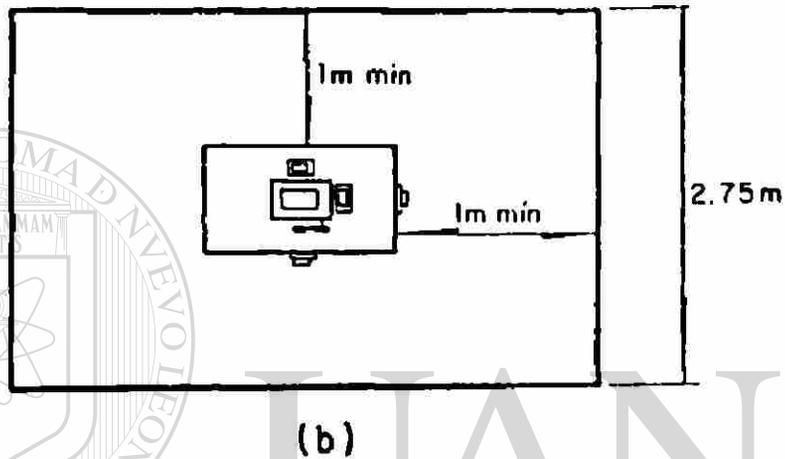
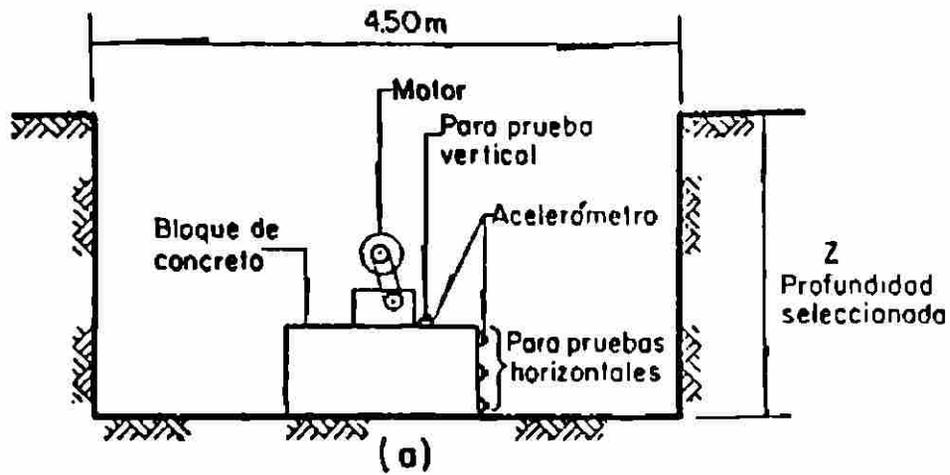


Fig. 3.16 Esquema para Ensaye de Resonancia

La base de concreto se instrumenta con acelerómetros que permitan medir la aceleración vertical producida por un estado estacionario de vibración.

De la teoría del semiespacio elástico se obtiene la expresión de la amplitud de vibración,  $A_z$  del sistema vibrador-bloque-suelo.

$$A_z = \frac{a_z}{4\pi^2 f^2} \quad (3-18)$$

en donde:

$a_z$  es la aceleración de vibración en  $\text{mm/s}^2$

$f$  es la frecuencia de vibración en Hertz

Barkan (1962) definió el coeficiente de compresión elástica  $C_u$ , según la expresión:

$$C_u = \frac{4\pi^2 f_R^2 M}{A_b} \quad (3-19)$$

donde:

$f_R$  frecuencia de resonancia en Hertz

$M$  masa del bloque y vibrador

$A_b$  área de contacto del bloque

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

El coeficiente  $C_u$  está relacionado con el módulo equivalente de Young  $E_{eq}^{\text{R}}$

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

mediante la expresión:

$$C_u = \frac{E_{eq}}{(1-\nu^2)} \frac{C_s}{\sqrt{BL}} \quad (3-20)$$

donde:

$\nu$  Es la relación de Poisson.

$B$  Es el ancho del área de contacto.

$L$  Es la longitud del área de contacto.

$C_s$  es un coeficiente en función de la relación  $L/B$

Tabla 2 Valores de  $C_s$  (Barkan, 1962)

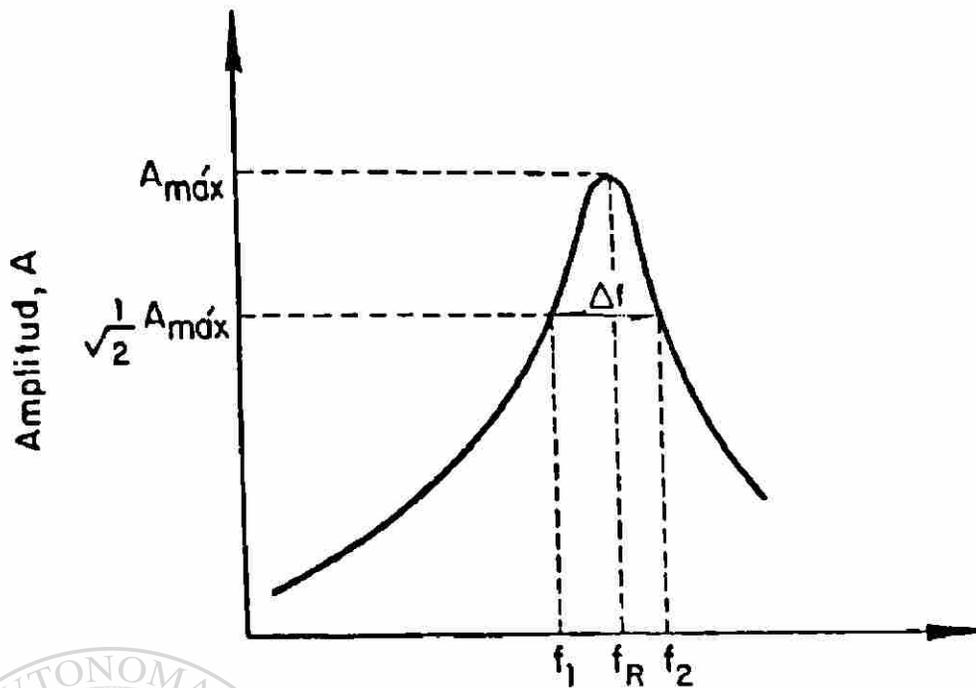
L/B	$C_s$
0.1	1.06
1.5	1.07
2.0	1.09
3.0	1.13
5.0	1.22
10.0	1.41

El amortiguamiento efectivo se puede determinar de la forma de la curva amplitud de desplazamiento versus frecuencia (fig. 3.17).  $\Delta_f$  Define el ancho de la curva de respuesta para una amplitud igual a  $A_{max}/\sqrt{2}$ .

La fracción del amortiguamiento queda expresada por:

$$\zeta = \frac{\Delta f}{2f_R} \quad (3-21)$$

La mayor desventaja del ensaye de resonancia es la zona reducida de suelo que participa en el ensaye.



**Fig. 3.17** Curva de Respuesta a la Frecuencia

### 3.3.4 Ensayo de Resonancia Horizontal.

Este ensayo es similar al de resonancia vertical y consiste en colocar a una profundidad  $z$  sobre una base de concreto, con las dimensiones indicadas en la figura 3.16, un vibrador mecánico o electromagnético. Se realiza un barrido de frecuencias para obtener la curva frecuencia versus amplitud del movimiento (fig. 3.17), con objeto de determinar la frecuencia de resonancia horizontal del sistema vibrador-cimentación-suelo.

La base de concreto se instrumenta con acelerómetros, con sus ejes sensibles orientados en dirección horizontal, que produce un estado establecido de vibración horizontal.

La amplitud del movimiento horizontal  $A_h$  está expresada por:

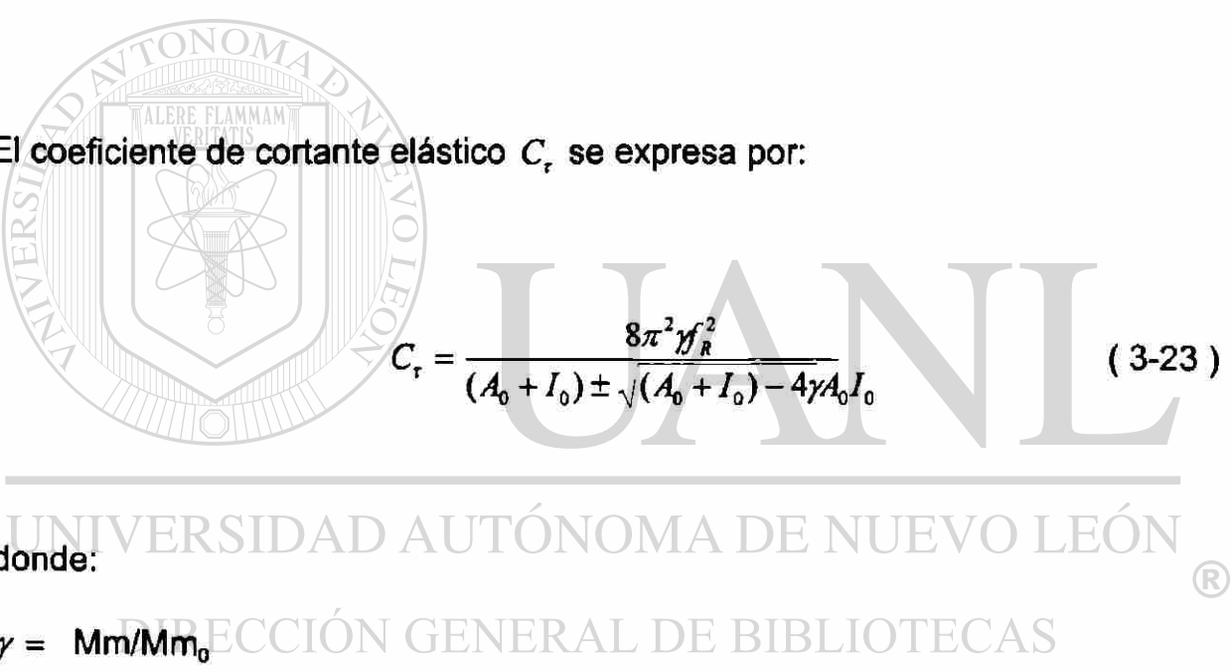
$$A_h = \frac{a_h}{4\pi^2 f^2} \quad (3-22)$$

donde:

$a_h$  es la aceleración horizontal en  $\text{mm/s}^2$

$f$  es la frecuencia de vibración en Hertz.

El coeficiente de cortante elástico  $C_r$  se expresa por:


$$C_r = \frac{8\pi^2 \gamma f_R^2}{(A_0 + I_0) \pm \sqrt{(A_0 + I_0)^2 - 4\gamma A_0 I_0}} \quad (3-23)$$

donde:

$$\gamma = \frac{Mm}{Mm_0}$$

$f_R$  = Es la frecuencia de resonancia en Hertz.

$$A_0 = A/M$$

$$I_0 = 3.46 (I/Mm_0)$$

$Mm$  = Momento de inercia del bloque y vibrador alrededor del eje que pasa por el centro de gravedad del bloque y perpendicular a la dirección de vibración.

$Mm_0$  = Momento de inercia del bloque y vibrador alrededor del eje que pasa por el centro del área de contacto y perpendicular a la dirección del movimiento.

$I$  = Momento de inercia del área de contacto alrededor del eje que pasa por el centro de gravedad del área de contacto y perpendicular a la dirección de vibración.

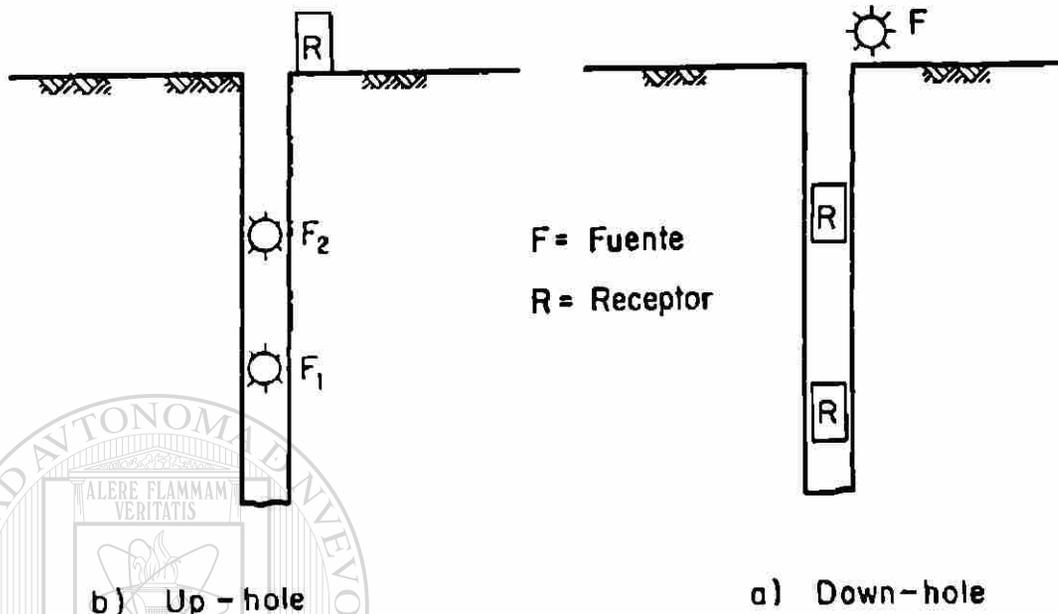
A partir del coeficiente  $C_r$  se puede obtener el módulo de rigidez al esfuerzo cortante  $G$ . Asimismo, el amortiguamiento efectivo se determina a partir de la curva de respuesta a la frecuencia (fig. 3.17) como se explicó para el ensaye de resonancia vertical.

### 3.3.5 Ensayes Up-hole y Down-hole.

Estos ensayos están basados en la medición de la propagación de ondas sísmicas en los suelos, provocadas por una fuente de perturbación,  $F$ , y registradas en un punto,  $R$ , denominado receptor.

Para llevar a cabo los ensayos es necesario la realización de un sondeo. En la figura 3.18, se muestra esquemáticamente la colocación de la fuente y el receptor. Si la fuente se coloca en la superficie y el receptor en el interior del sondeo, a la profundidad de exploración, las ondas generadas viajarán hacia abajo y el ensaye recibe el nombre de down-hole (fig. 3.18a). Si por el contrario

la fuente se coloca en el interior del sondeo y el receptor en la superficie, el ensaye se conoce como up-hole (fig. 3.18b).



**Fig. 3.18** Ensayos Down-hole y Up-hole

El procedimiento down-hole consiste en perforar un sondeo de 7.6 cm de diámetro hasta la profundidad de exploración requerida y proceder a colocar un ademe poco rígido. Se cuela un pequeño bloque de concreto de aproximadamente 0.6 m de lado, como se muestra en la figura 3.19.

Se coloca a la profundidad  $z$  un geófono de tres componentes dentro del sondeo y se acuña contra el ademe. El impulso se logra mediante el golpe, con un martillo de 4.5 Kg de peso al bloque de concreto. El impacto genera ondas de cuerpo. En un osciloscopio con memoria se registra la traza del impacto y las trazas de llegada de las ondas del geófono. El procedimiento se repite de cada 1.5 a 3 m, hasta la profundidad final.

Si se conoce el tiempo requerido para que la onda viaje desde el punto de la perturbación al receptor y la distancia entre ambos, se determina la velocidad de propagación de las ondas compresionales  $V_c$  o de las ondas de esfuerzo cortante  $V_s$ . Debe tenerse presente que el ensaye mide la velocidad de propagación promedio.

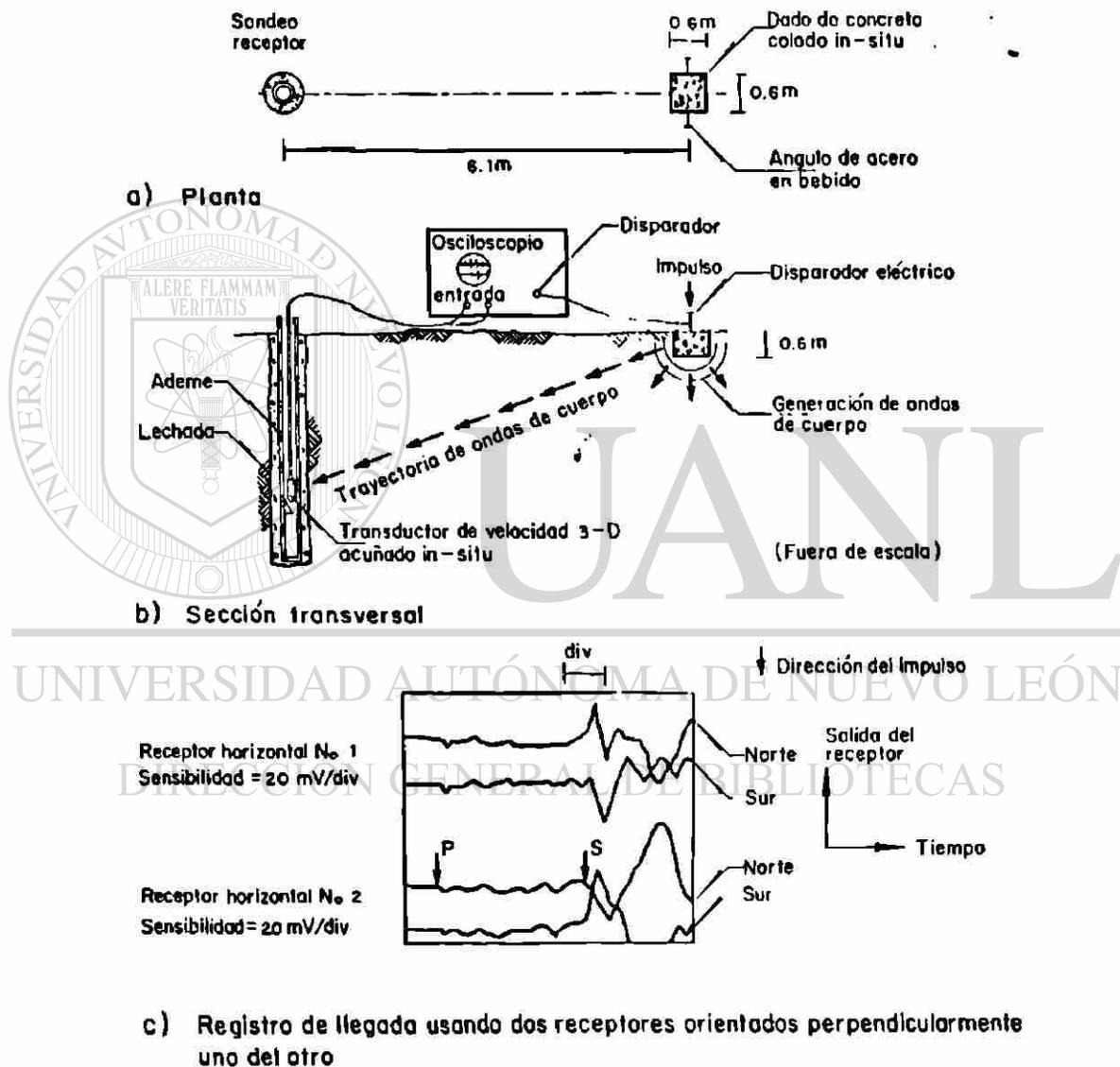


Fig. 3.19 Ensaye Sísmico Down-hole ( Hoar y Stokoe, 1978 )

La interpretación de los registros obtenidos requiere experiencia ya que desafortunadamente se generan dos tipos de ondas (compresionales y de esfuerzo cortante) lo que hace difícil la interpretación de los registros. Sin embargo, debido a que las ondas compresionales llegan primero a la estación de registro y que es posible cambiar el sentido de las ondas de cortante. También es posible realizar dos ensayos en los cuales el arribo de la onda compresional permanezca sin cambio en tanto que la llegada de la onda cortante se encuentra desfasada  $180^\circ$ , y esto lleva a su identificación; Hoar y Stokoe (1978) describen con detalle la forma de interpretación de los registros. El intervalo de deformaciones de este tipo de ensayos está comprendido entre  $10^{-1} \%$  y  $10^{-3} \%$ .

La principal desventaja de los ensayos down-holes y up-hole es la rápida atenuación de la energía con la profundidad.

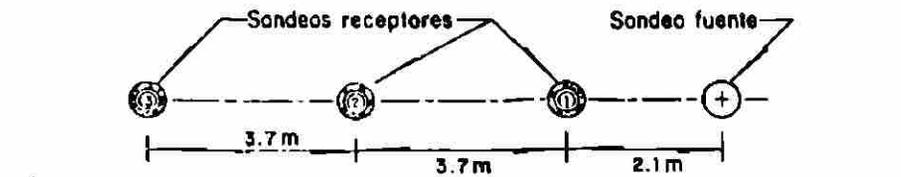
---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

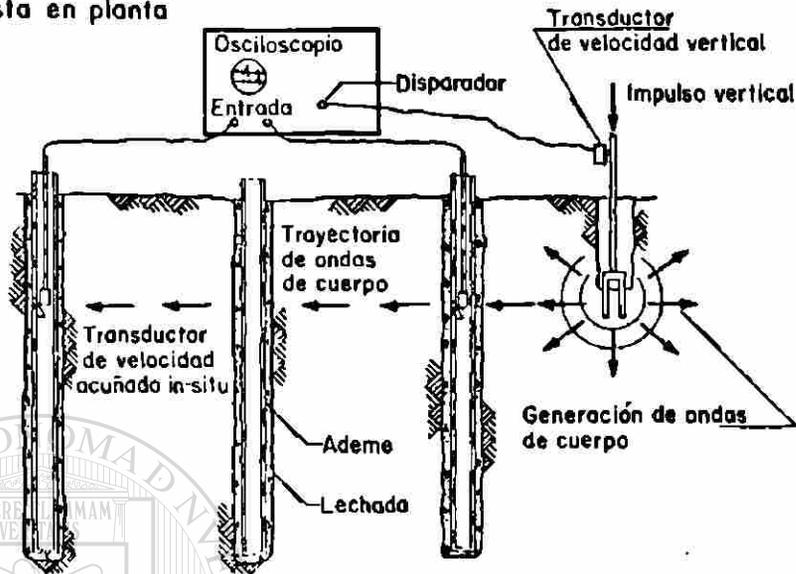
### 3.3.6 Ensayo Cross-hole.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

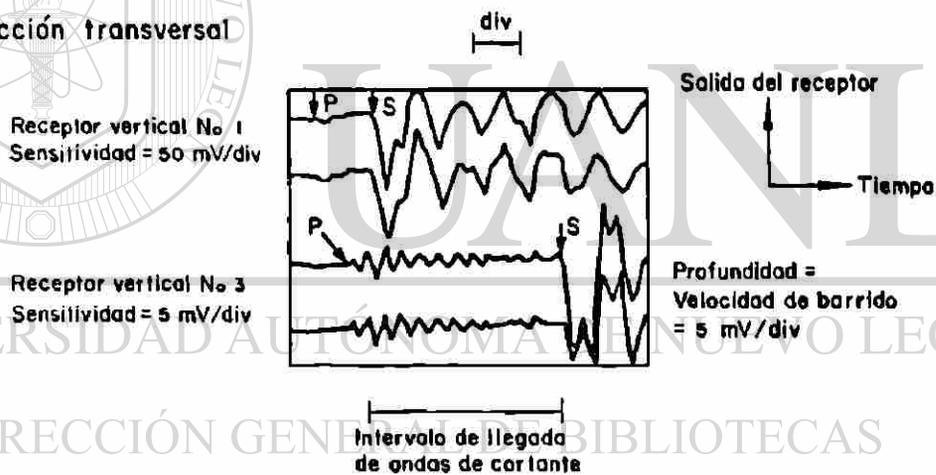
El ensayo sísmico cross-hole o de sondeos en paralelo, es útil para la medición de la variación del módulo al esfuerzo cortante  $G$  con la profundidad. Mediante este ensayo se mide la velocidad de propagación de ondas de cuerpo (P o S) para puntos colocados a la misma profundidad (fig. 3.20). Para llevar a cabo el ensayo es necesario la realización de un mínimo de dos sondeos, uno de los cuales se utiliza como sondeo fuente y el otro como sondeo receptor.



a) Vista en planta



b) Sección transversal

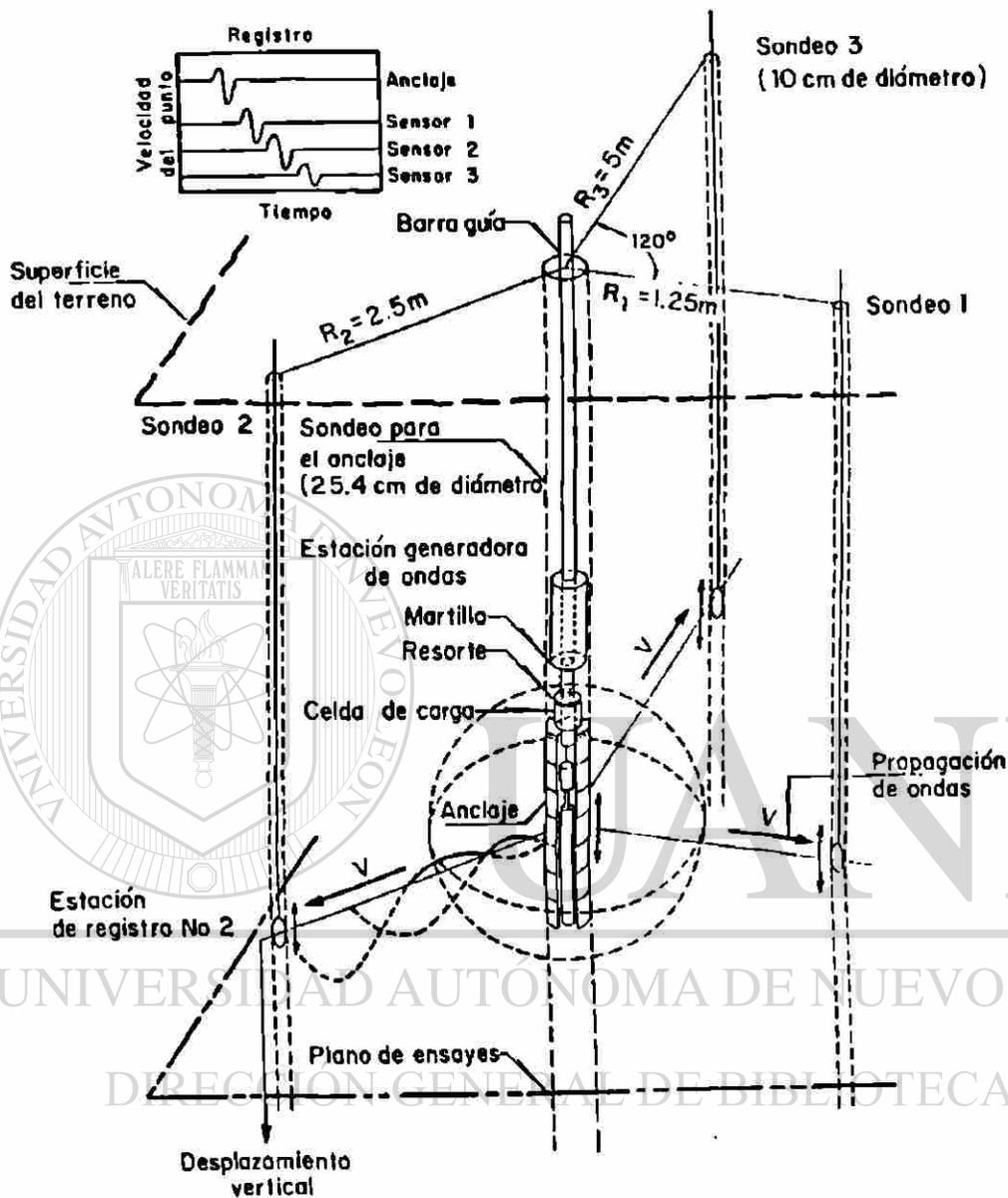


c) Registro de llegada usando dos receptores

**Fig. 3.20** Ensayo Sísmico Cross-hole ( Hoar y Stokoe, 1978 )

Los sondes se deben ademar varios días antes de la realización del ensayo con objeto de lograr un buen contacto entre la pared exterior del ademe y el suelo. El material del ademe puede ser aluminio o plástico. El diámetro del

ademe no debe ser menor de 7.6 cm para permitir la colocación de geófonos, los cuales deberán acuñarse contra el ademe.



**Fig. 3.21** Representación Esquemática de un Ensayo de Impulso in-situ

La perturbación en el sondeo fuente se puede realizar mediante el penetrómetro del ensayo de penetración estándar ( SPT). Un transductor de velocidad vertical se coloca en la barra de perforación. Cada vez que el martillo de 63.5 Kg de peso golpea el penetrómetro, produce una señal eléctrica que

dispara el osciloscopio, al mismo tiempo se dispara el registro de las trazas de los geófonos receptores que se encuentran colocados a la misma profundidad de la perturbación.

La figura 3.21 ilustra un ensaye cross-hole en el que se puede variar el nivel de deformación variando la energía que se aplica mediante el impacto de un martillo de 68 Kg de peso, en un anclaje expandible fijo a las paredes del sondeo fuente. Este tipo de ensaye tiene la ventaja de generar predominantemente ondas de cortante.

**MÉTODOS PARA DETERMINAR PARAMETROS EN SUELOS SOMETIDOS A CARGA CICLICA**  
( Módulo de Young E, Módulo de Corte G, Porcentaje de Amortiguamiento  $\zeta$  )

Ensayo	Rango de frecuencia f ( Hertz )	Rango de deformación angular $\gamma$ ( % )	Rango de velocidad de deformación angular ( 1/seg )
Triaxial cíclico ( L )	0.2 - 5	$10^{-2}$ - 5	$0.8 \times 10^{-4}$ - 1
Corte simple cíclico ( L )	0.2 - 5	$10^{-2}$ - 5	$0.8 \times 10^{-4}$ - 1
Torsión cíclica ( L )	0.2 - 5	$10^{-2}$ - 5	$0.8 \times 10^{-4}$ - 1
Columna Resonante ( L )	50 - 200	$10^{-4}$ - $10^{-2}$	$2 \times 10^{-4}$ - $8 \times 10^{-2}$
Refracción sísmica ( C )	20 - 100	$10^{-4}$ - $10^{-3}$	$0.8 \times 10^{-4}$ - $0.4 \times 10^{-2}$
Cross-hole, Down hole y Up hole ( C )	20 - 100	$10^{-4}$ - $10^{-3}$	$0.8 \times 10^{-4}$ - $0.4 \times 10^{-2}$
Vibración forzada en bloques o placas ( C )	< 50	$10^{-3}$ - $10^{-1}$	< $2 \times 10^{-3}$ - < $2 \times 10^{-1}$
Ensayo de placa cíclico ( T )	< 0.1	$10^{-2}$ - 5	< $0.4 \times 10^{-4}$ - < $2 \times 10^{-2}$
Vibración forzada en placa atornillada ( C )	< 50	$10^{-3}$ - $10^{-1}$	$2 \times 10^{-3}$ - $2 \times 10^{-1}$
Presiómetro dinámico ( C )		$10^{-2}$ - $10^{-1}$	
Solicitaciones en: Máquinas	3.0 - 50	$10^{-4}$ - $10^{-3}$	$1.2 \times 10^{-5}$ - $2 \times 10^{-3}$
Sismos con foco transcurso	3.0 - 5		
Sismos con foco subductivo	10.0 - 15	Depende del suelo, solicitaciones de interacción suelo-estructura, etc.	
Olas	< 0.2		

Los rangos expuestos en la tabla corresponden a valores típicos pudiendo variar según sean las modificaciones especiales introducidas en los equipos de ensaye. Las frecuencias de los sismos corresponden a valores predominantes en suelos duros a distancias epicentrales no superiores a 300 km y para eventos con magnitud Richter > 7.  
( L ) = Laboratorio ; ( C ) = Campo ;

## CAPITULO 4

### ANALISIS DE VIBRACIONES

#### 4.1 Modos de Vibración de una Cimentación en Bloque

Se puede asumir que una cimentación en bloque se desplaza como un cuerpo rígido, por consiguiente, bajo la influencia de fuerzas y momentos superpuestos, un bloque de concreto rígido puede vibrar en seis diferentes modos (fig. 4.1).

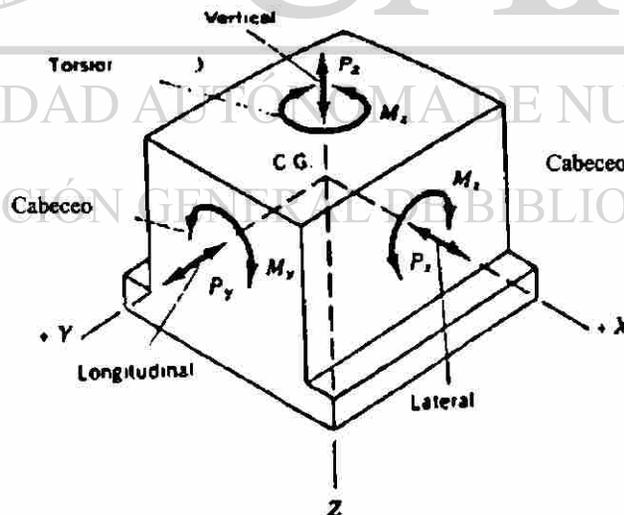


Fig. 4.1 Modos de Vibración de una Cimentación en Bloque

1. Traslación a lo largo del eje Z ( Vibración Vertical )
2. Traslación a lo largo del eje X ( Vibración Horizontal Lateral )
3. Traslación a lo largo del eje Y ( Vibración Horizontal Longitudinal )
4. Rotación alrededor del eje X ( Cabeceo )
5. Rotación alrededor del eje Y ( Cabeceo )
6. Rotación alrededor del eje Z ( Torsión )

Cualquier movimiento del bloque puede ser resuelto dentro de estos seis desplazamientos; entonces, el bloque tiene seis grados de libertad o modos de vibrar y seis correspondientes frecuencias naturales. De los seis modos, el traslacional a lo largo del eje Z y la rotación alrededor del eje Z pueden ocurrir independientemente de cualquier otro movimiento; sin embargo, la translación a lo largo de los ejes Y o X y la correspondiente rotación alrededor de los ejes X o Y, respectivamente, siempre ocurren juntas y se llaman modos acoplados. De tal forma que, en el análisis de cimentaciones de bloque, se consideran cuatro tipos de movimientos; de los cuales dos (la translación a lo largo del eje Z y la rotación alrededor del eje Z) son independientes, y los otros dos (la translación a lo largo del eje X y la rotación alrededor del eje Y y viceversa) son acoplados y ocurren simultáneamente.

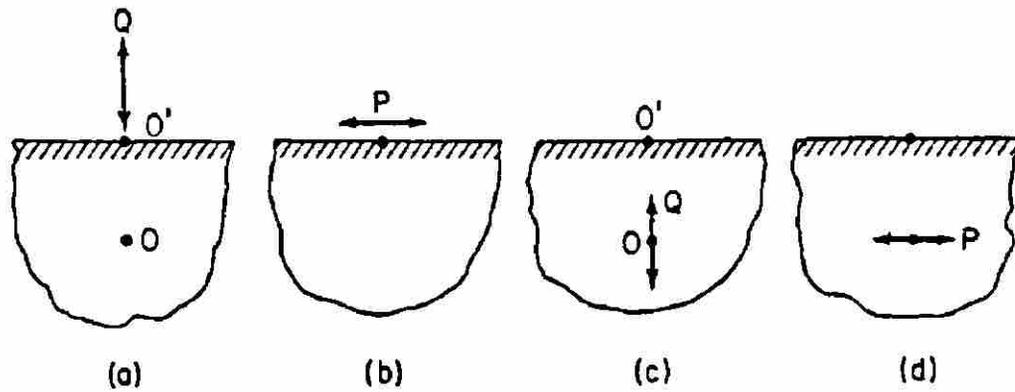
Se usan varios métodos en el análisis de la vibración de cimentaciones de tipo bloque, los cuales se exponen a continuación:

1. Método del semi-espacio elástico.
2. Método de los resortes lineal elásticos sin considerar el peso del suelo.
3. Método de los resortes lineal elásticos considerando el peso del suelo.
4. Métodos empíricos.

El método que se estudiará en este capítulo será el del semi-espacio elástico, ya que es uno de los más usados en la práctica.

El método del semi-espacio elástico idealiza la cimentación de la maquinaria como un oscilador mecánico vibrando con una base circular apoyada en la superficie del suelo. El suelo se asume que es un cuerpo semi-infinito, isótropo, homogéneo y elástico, el cual es referido como el semi-espacio elástico.

Las soluciones matemáticas para calcular la respuesta de una cimentación vibrando en diferentes modos, han sido obtenidas por varios investigadores. El estudio de Lamb (1904) de la respuesta de un semi-espacio elástico excitado por una fuerza vertical periódica, actuando a lo largo del eje vertical, es la primera investigación en esta área. Este problema, el cual también es conocido como "Carga dinámica de Boussinesq", se analizó como un caso de propagación de onda en dos dimensiones. El estudio fue luego ampliado para cubrir las condiciones de vibración ocasionadas por una fuerza oscilatoria horizontal o vertical actuando en la superficie, y para la vibración por fuerzas horizontales o verticales aplicadas linealmente en cualquier punto dentro de un medio elástico. Estos casos son ilustrados en la Fig. 4.2.



**Fig. 4.2** Problemas de Lamb para Fuerza Oscilatoria en Estado Continuo o Carga por Pulsación en un Punto o a lo Largo de una Línea.

Lamb también demostró cómo una serie de fuerzas verticales periódicas, con diferentes frecuencias, pueden ser combinadas y remplazadas por una fuerza sencilla aplicada en la superficie.

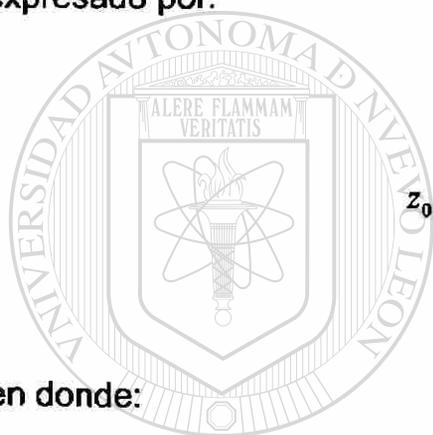
## 4.2 Modo Translacional

### 4.2.1 Vibración Vertical.

Reissner (1936). - Durante el principio de 1930, la Sociedad Alemana de Investigación de Mecánica de Suelos investigó el uso de osciladores mecánicos para evaluar las propiedades del suelo en el campo. Debido a esto, E. Reissner intentó realizar una teoría para evaluar la respuesta dinámica de una cimentación con vibración tal como fue usado para las propiedades del suelo. Él seleccionó el semi-espacio elástico para representar la masa de suelo. Los parámetros necesarios para describir las propiedades del cuerpo elástico fueron el módulo de corte  $G$ , la relación de poisson  $\nu$  y la densidad de la masa

$\rho$ . La cimentación fue representada por una masa oscilatoria la cual produce una presión vertical periódica distribuida uniformemente sobre un área circular de radio  $r_0$ , en la superficie del semi-espacio.

Con el modelo matemático del semi-espacio elástico, Reissner desarrolló una solución analítica para el desplazamiento vertical periódico  $z_0$ , en el centro del área circular cargada de la superficie. Obtuvo esta solución por integración de la solución de Lamb (1904) sobre un área circular. El desplazamiento vertical es expresado por:



$$z_0 = \frac{P_0 e^{i\omega t}}{Gr_0} f = \frac{P_0 e^{i\omega t}}{Gr_0} (f_1 + if_2) \quad (4-1)$$

en donde:

$P_0$  = Amplitud de la fuerza total aplicada en el área circular de contacto.

$\omega$  = Frecuencia circular de la fuerza (rad/seg.).

$G$  = Módulo dinámico del esfuerzo cortante del medio.

$r_0$  = Radio del área circular de contacto.

$f_1, f_2$  = Funciones de desplazamiento de Reissner.

En la anterior ecuación tanto el desplazamiento como la fuerza son positivos en la dirección hacia abajo. Las expresiones para  $f_1, f_2$  son funciones complicadas de la relación de poisson y de un término dimensional de frecuencia  $a_0$ , descrito por:

$$a_0 = \omega r_0 \sqrt{\frac{\rho}{G}} = \frac{\omega r_0}{v_s} \quad (4-2)$$

En la ecuación,  $v_s$  es la velocidad de propagación de la onda de corte en el cuerpo elástico.

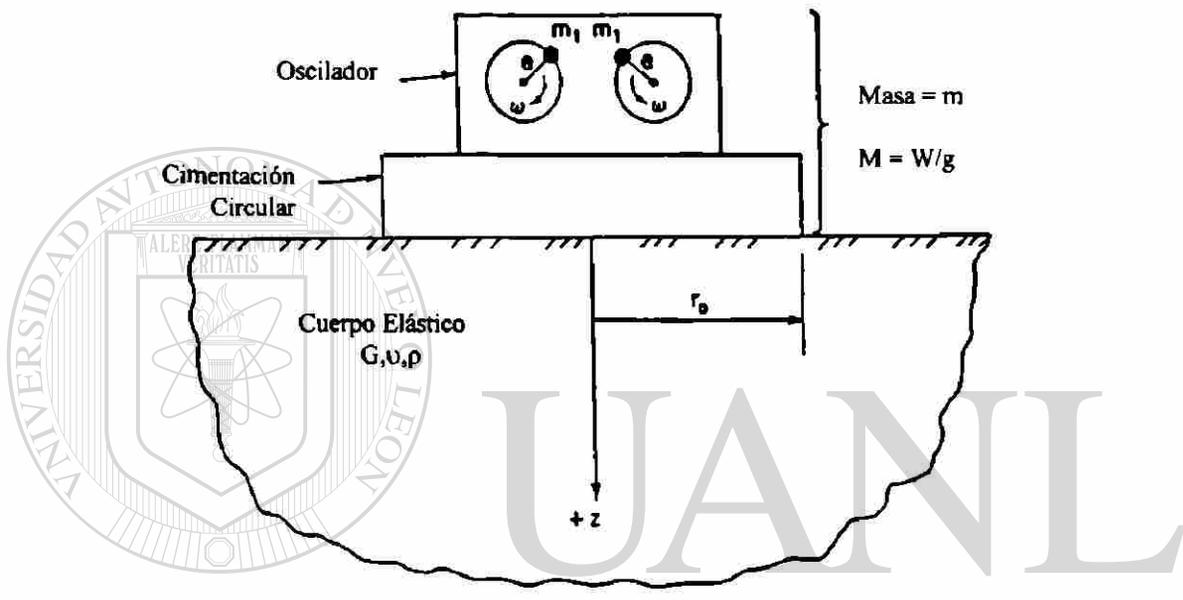


Fig. 4.3 Oscilador con Masa Rotatoria con Cimentación Circular Apoyada en un Cuerpo Elástico y Semi-infinito

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Reissner también estableció un término dimensional secundario, designado como "relación de masa"  $b$ , la cual se describe por:

$$b = \frac{m}{\rho r_0^3} \quad (4-3)$$

En donde  $m$  es la masa total de la cimentación y del mecanismo de excitación el cual se apoya en la superficie del semi-espacio elástico (fig. 4.3). La ecuación ( 4-3 ) esencialmente describe una relación entre la masa del cuerpo rígido la cual es sometida a un movimiento vertical y una partícula de masa del cuerpo elástico.

Reissner estableció expresiones para la amplitud del movimiento oscilador.

$$A_z = \frac{Q_o}{Gr_o} \sqrt{\frac{f_1^2 + f_2^2}{(1 - ba_o^2 f_1)^2 + (ba_o^2 f_2)^2}} \quad (4-4)$$

El ángulo de fase  $\phi$  entre la fuerza externa  $Q = Q_o^{i\omega}$ , y el desplazamiento  $z_o$  fue expresado como

$$\tan \phi = \frac{f_2}{-f_1 + ba_o^2 (f_1^2 + f_2^2)} \quad (4-5)$$

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

y la potencia de entrada requerida fue expresada por

$$PR = \frac{Q_o^2}{r_o^2 \sqrt{Gr_o}} \frac{a_o f_1}{(1 - ba_o^2 f_1)^2 + (ba_o^2 f_2)^2} \quad (4-6)$$

La amplitud de la fuerza oscilatoria  $Q_o$  puede ser una constante independiente de la frecuencia  $\omega$  o puede ser una función de la frecuencia de excitación. El

tipo de masa-rotatoria con masa total de  $m_e$  actuando en un radio designado como la excentricidad  $e$ , la fuerza de excitación es:

$$Q_o = m_e e \omega^2 \quad (4-7)$$

Para dos masas oscilatorias mostradas en la Fig. 4.3, la masa total excéntrica  $m_e$  es igual a  $2m_1$ .

La teoría de Reissner formó la base para clarificar los estudios analíticos de osciladores apoyados en el semi-espacio, no obstante su teoría no recibió una inmediata aceptación por los ingenieros que trabajaban en el campo de la dinámica de suelos debido a que los resultados teóricos no correspondían completamente con los resultados de las pruebas de campo. Existen varias razones que explican esta diferencia:

1. Asentamientos permanentes desarrollados durante muchas pruebas, de tal modo que se violaron las condiciones asumidas para el medio elástico.
2. Las amplitudes de movimiento mantenido por el modelo de vibración usado en campo fueron mayores que las aceleraciones a menudo del orden de 2g a 3g, lo cual permitió al vibrador saltar libremente por encima del suelo y actuar como un martillo.
3. La consideración de una presión uniformemente distribuida en la zona de contacto del oscilador no fue realista.

4. Hubo un error en el cálculo del  $f_2$  el cual influyó en el valor numérico de los resultados; sin embargo, el estudio realizado por Reissner es el escrito clásico en este campo.

Quinlan (1953) y Sung (1953).- La solución de Reissner fue ampliada por Quinlan y Sung, quienes consideraron el efecto de tres tipos de presión de contacto vertical bajo la base ocasionada por una fuerza vertical oscilatoria. Las distribuciones de presión que fueron consideradas son las siguientes:

Base rígida.

$$\sigma_z = \frac{P_o e^{i\alpha x}}{2\pi r_o \sqrt{r_o^2 - r^2}} \text{ para } r \leq r_o \quad (4-8)$$

$$\sigma_z = 0 \text{ para } r > r_o$$

Uniforme.

$$\sigma_z = \frac{P_o e^{i\alpha x}}{\pi r_o^2} \text{ para } r \leq r_o \quad (4-9)$$

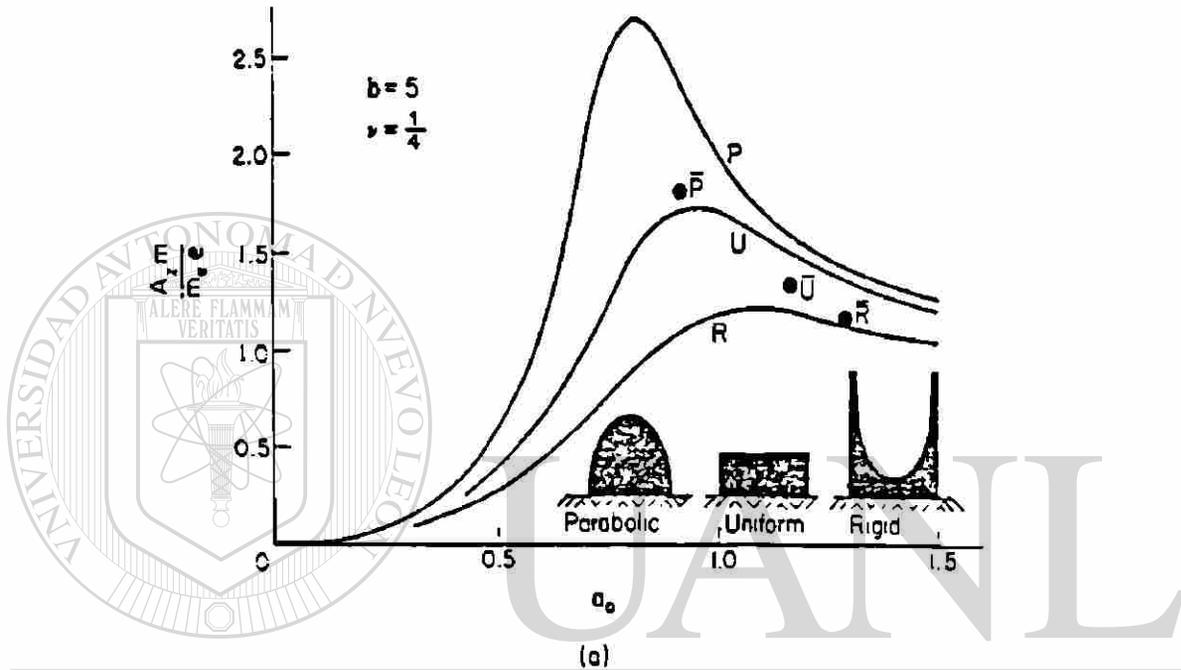
$$\sigma_z = 0 \text{ para } r > r_o$$

Parabólica.

$$\sigma_z = \frac{2P_o(r_o^2 - r^2)e^{i\alpha x}}{\pi r_o^4} \text{ para } r \leq r_o \quad (4-10)$$

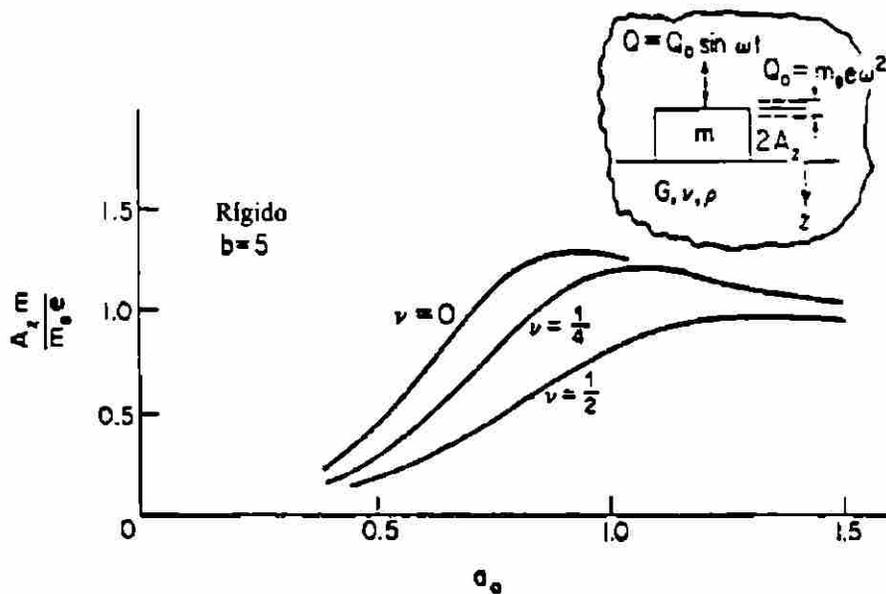
$$\sigma_z = 0 \text{ para } r > r_o$$

La Fig. 4.4 muestra la amplitud de la frecuencia para una cimentación típica, con tres tipos de distribución de presiones para  $b = 5$  y  $\nu = \frac{1}{4}$ . La distribución de presiones parabólica y uniforme producen mayores desplazamientos que una base rígida, esto muestra la importancia de la distribución de presiones bajo la cimentación.



**Fig. 4.4 Efecto de la Distribución de Presiones en la Respuesta Teórica de una Cimentación Rígida Vibrando Verticalmente**

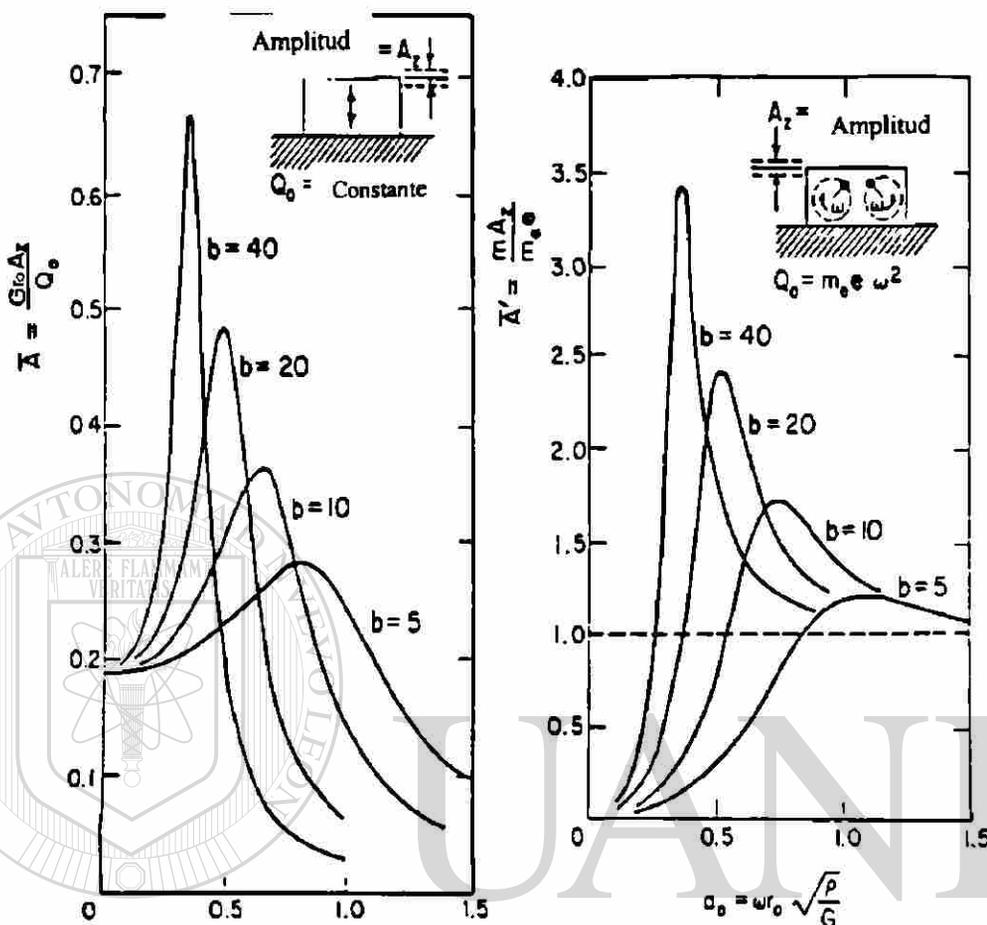
Se puede hacer un mejor cálculo de la respuesta si la amplitud se basa sobre un promedio compensado de los desplazamientos verticales. El efecto del cambio en la relación de poisson del semi-espacio elástico, en la respuesta de vibración en estado continuo de la cimentación, para el caso de una distribución de presiones con base rígida, se muestra en la Fig. 4.5.



**Fig. 4.5** Efecto de la Relación de Poisson

Los valores de las funciones de desplazamientos,  $f_1, f_2$  para valores de  $\nu = 0.25, 0.33$  y  $0.5$  para los tres tipos de distribución de presiones y para  $a_0 = 0$  a  $1.5$  fueron obtenidos por Sung (1953). La amplitud de la frecuencia de respuesta, para el caso de una fuerza de excitación constante y para una frecuencia que depende de la excitación, para diferentes valores de la relación de masa  $b$ , y para  $\nu = 0.25$  se muestran en la Fig. 4.6. Ésta figura presenta el efecto de la relación de masa en la cima de la amplitud de la respuesta. Una alta relación de masa (mayor peso de la cimentación y pequeño radio de contacto) implica una mayor amplitud de vibración para unas condiciones dadas. Otro punto significativo es que las curvas para bajos valores de relación de masa  $b$  corresponden con las curvas de altas relaciones de amortiguamiento, esto implica que las vibraciones verticales de un cuerpo rígido en un semi-espacio elástico son amortiguadas. Estos amortiguamientos ocurren

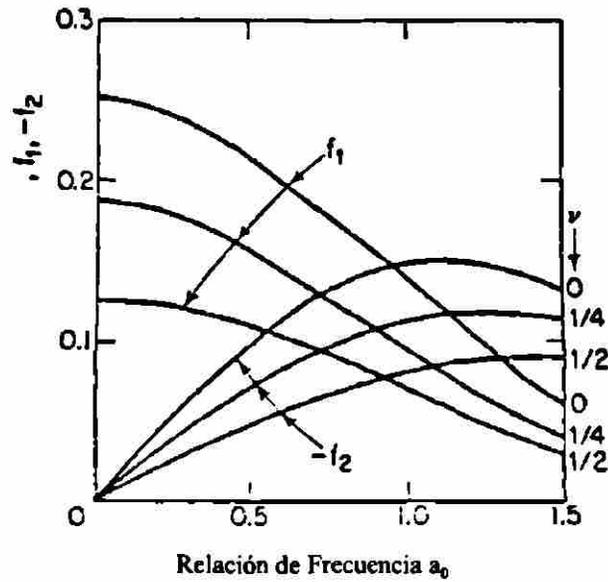
como un resultado de la energía que está siendo disipada dentro del semi-espacio elástico por las ondas elásticas radiadas del cuerpo en vibración.



$$\sigma_0 = \omega_0 \sqrt{\frac{p}{G}}$$

**Fig. 4.6** Relaciones de Amplitud vs Frecuencia para Oscilación Vertical de una Cimentación Circular Rígida en un Semi-espacio Elástico

Los valores de las funciones de desplazamiento  $f_1, f_2$  fueron calculados por Sung asumiendo que la distribución de presiones permanece sin cambio con la frecuencia. Bycroft (1956) evaluó un promedio compensado de los desplazamientos debajo de la cimentación y estableció funciones de desplazamientos para la distribución de las presiones de bases rígidas (fig. 4.7).



**Fig. 4.7** Funciones de Desplazamientos

Para el caso estático,  $a_0$  y  $f_2$  son iguales a cero. El desplazamiento estático  $z_s$ , debido a una carga vertical  $P_0$  es dado por:

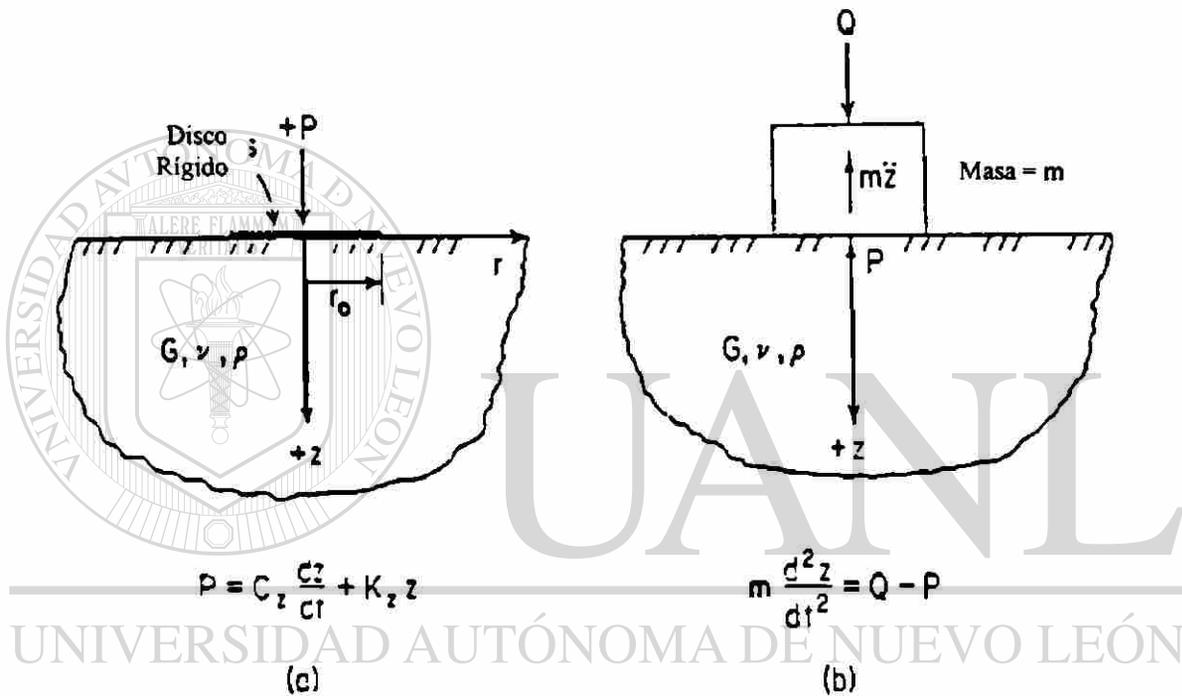
$$z_s = \frac{P_0(1-\nu)}{4Gr_0} \quad (4-11)$$

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

La ecuación ( 4-11 ) ayuda a definir el valor de la constante de resorte equivalente para vibraciones verticales:

$$k_z = \frac{4Gr_0}{(1-\nu)} \quad (4-12)$$

La analogía de Hsieh.- Las soluciones básicas de Reissner fueron modificadas por Hsieh (1962) para proponer la obtención de una ecuación para vibraciones verticales, similar a la ecuación para vibraciones amortiguadas de un sistema de un grado de libertad. Un disco de radio  $r_0$ , sin peso, circular y rígido se apoya en la superficie de un semi-espacio elástico como se muestra en la Fig. 4.8a, este disco fue sujeto a una fuerza oscilatoria vertical.



**Fig. 4.8** Parámetros de las Ecuaciones de Hsieh

$$P = P_0 e^{i\omega t} \quad (4-13)$$

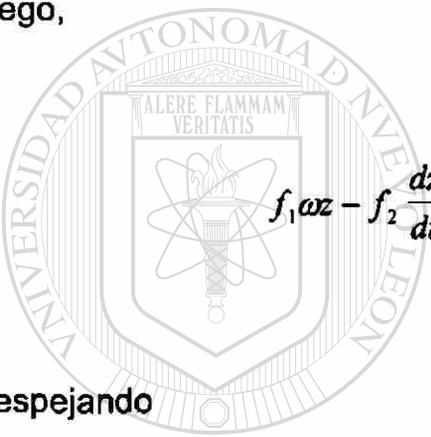
El desplazamiento vertical es dado por

$$z = \frac{P_o e^{i\omega t}}{Gr_o} (f_1 + if_2) \quad (4-14)$$

Derivando la ecuación ( 4-14 ) con respecto al tiempo, tenemos

$$\frac{dz}{dt} = \frac{P_o \omega e^{i\omega t}}{Gr_o} (if_1 - f_2) \quad (4-15)$$

luego,



$$f_1 \omega z - f_2 \frac{dz}{dt} = \frac{P_o \omega}{Gr_o} (f_1^2 + f_2^2) e^{i\omega t} = \frac{P \omega}{Gr_o} (f_1^2 + f_2^2) \quad (4-16)$$

despejando

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

$$P = -\frac{Gr_o}{\omega} \frac{f_2}{(f_1^2 + f_2^2)} \frac{dz}{dt} + Gr_o \frac{f_1}{f_1^2 - f_2^2} z \quad (4-17)^{\circledast}$$

La ecuación ( 4-17 ) puede ser simplificada a

$$P = C_z \frac{dz}{dt} + k_z z \quad (4-18)$$

en donde

$$C_z = \frac{r_o^2}{a_o} \sqrt{G\rho} \left( \frac{-f_1}{f_1^2 + f_2^2} \right) \quad (4-19)$$

y

$$k_z = Gr_o \frac{f_1}{f_1^2 + f_2^2} \quad (4-20)$$

Luego, tanto  $C_z$  y  $k_z$  dependen de  $a_o$  y  $\nu$ . Posteriormente Hsieh también consideró una cimentación cilíndrica rígida de un peso total  $W$  colocada en la superficie de un semi-espacio elástico y excitado por una fuerza periódica vertical  $Q$  (fig. 4.8b).

La ecuación de movimiento de tal sistema es dada por:

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

$$\frac{W}{g} \frac{d^2 z}{dt^2} = Q - P \quad (4-21)$$

sustituyendo  $P$  de la ecuación (4-18) y  $m = \frac{W}{g}$ , se reduce a

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + C_z \frac{dz}{dt} + k_z z = Q = Q_o e^{i\omega t} \quad (4-22)$$

La ecuación ( 4-22 ) es conocida como la *Analogía de Hsieh*, e ilustra que las vibraciones verticales de una cimentación en un semi-espacio elástico, pueden ser representadas desde el punto de vista de un modelo equivalente de masa-resorte-amortiguado, con la diferencia de que tanto la constante de resorte como el amortiguamiento dependen de la frecuencia.

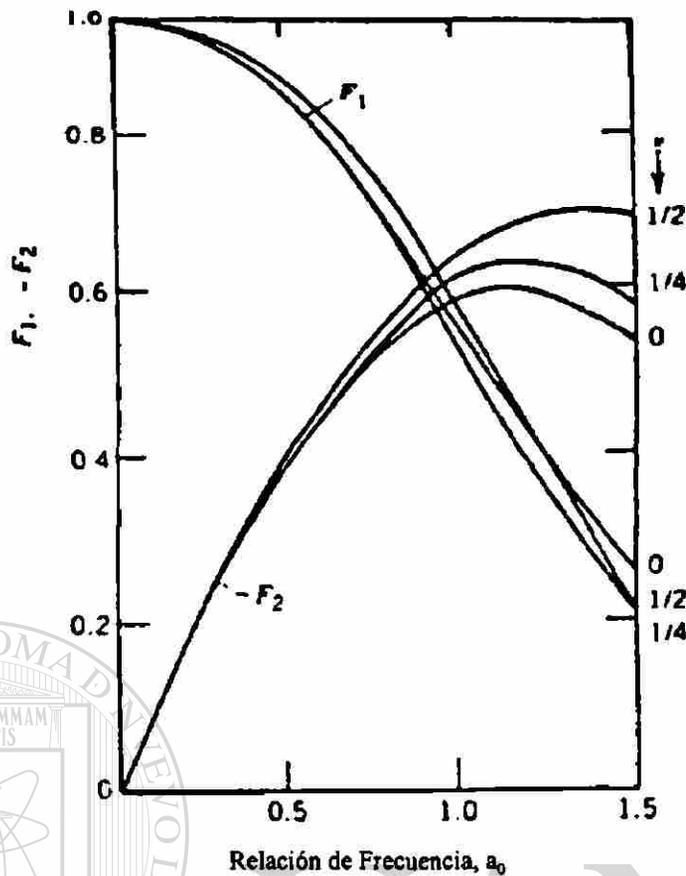
La analogía de Lysmer.- Lysmer y Richart (1966) propusieron una simplificada analogía masa-resorte-amortiguamiento, conocida como la *Analogía de Lysmer*, para calcular la respuesta de una cimentación circular rígida, sujeta a oscilaciones verticales. También definieron una nueva función de desplazamiento  $F$  como:

$$F = \frac{4}{1-\nu} f = F_1 + iF_2 \quad (4-23)$$

Los componentes de  $F$  son prácticamente independientes de  $\nu$ , como se muestra en la Fig. 4.9. Lysmer también definió una relación de masa modificada como:

$$B_z = \frac{1-\nu}{4} b = \frac{1-\nu}{4} \frac{m}{\rho r_o^3} \quad (4-24)$$

En el cual  $B_z$  es la relación de masa modificada para vibraciones verticales.



**Fig. 4.9** Variación de la Función de Desplazamiento Modificada con la Relación de Poisson

Utilizando los valores de  $F$  y  $B_z$ , Lysmer y Richart (1966) desarrollaron las curvas de respuesta mostradas en la Fig. 4.10.

Se estudió el efecto de la relación de la frecuencia en la variación en los factores de rigidez y amortiguamiento, se observó que las constantes independientes de los valores de frecuencia de estas cantidades pueden usarse en los intervalos de frecuencia de interés práctico. La constante de rigidez fue tomada igual al valor estático y es dada por:

$$k_z = \frac{4Gr_o}{1-\nu} \quad (4-25)$$

la cual es la misma que la ecuación ( 4-12 ) y el amortiguamiento puede ser representado por

$$C_z = \frac{3.4r_o^2}{(1-\nu)} \sqrt{\rho G} \quad (4-26)$$

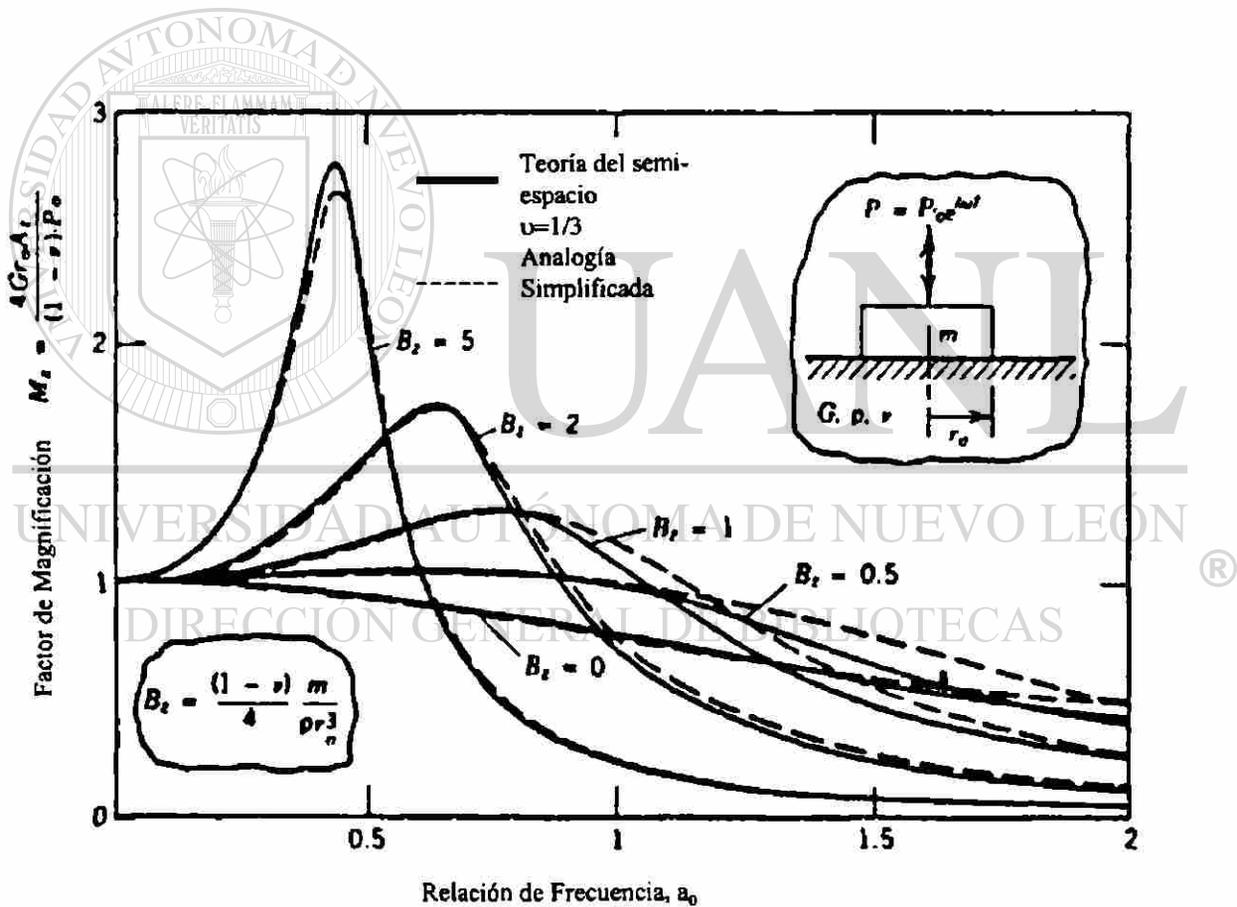


Fig. 4.10 Respuesta de una Cimentación Rígida Circular debido a una Fuerza Vertical Generada por una Fuerza de Excitación

Usando los valores de las constantes de rigidez y amortiguamiento y la teoría de vibraciones, la frecuencia natural  $\omega_{nz}$  es determinada

$$\omega_{nz} = \sqrt{\frac{k_z}{m}} \quad (4-27)$$

Se obtuvieron las curvas de respuesta entre el factor de amplificación,  $M_z$  y  $a_o$ , mostrados por las líneas punteadas en la Fig. 4.10. Las curvas continuas son para obtener soluciones exactas con el modelo del semi-espacio elástico. La ecuación de movimiento para la analogía de Lysmer puede ser escrita como

$$m\ddot{z} + \frac{3.4r_o^2}{(1-\nu)}\sqrt{\rho G}\dot{z} + \frac{4Gr_o}{(1-\nu)}z = P \quad (4-28)$$

La relación de amortiguamiento  $\xi_z$  es obtenida como

$$\xi_z = \frac{C_z}{C_c} = \frac{C_z}{2\sqrt{k_z m}} = \frac{3.4r_o^2}{2(1-\nu)} \frac{\sqrt{\rho G}}{\sqrt{4Gr_o m}} \quad (4-29)$$

o

$$\xi_z = \frac{0.425}{\sqrt{B_z}} \quad (4-30)$$

La resonancia ocurre solamente cuando  $B_z \geq 0.3$ , y se establecieron las siguientes fórmulas aproximadas para la condición de resonancia para una fuerza de excitación independiente de la frecuencia:

$$\omega_{nz} = \frac{V_z \sqrt{B_z - 0.36}}{r_o B_z} \quad (4-31)$$

y

$$(A_z)_{max} = \frac{P_o B_z}{k_z 0.85 \sqrt{B_z - 0.18}} \quad (4-32)$$

La amplitud de la frecuencia de operación puede ser obtenida usando la teoría de vibración.

$$A_z = \frac{P_z}{k_z \sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi_z r)^2}} = \frac{P_z}{k_z \left\{ \left| 1 - (\omega / \omega_{nz})^2 \right|^2 + (2\xi_z \omega / \omega_{nz})^2 \right\}^{1/2}} \quad (4-33)$$

Para una fuerza de excitación dependiente de la frecuencia, lo que es normalmente el caso con fuerzas asociadas con operación de la maquinaria, la frecuencia de resonancia es dada por:

$$\omega_{nz} = \frac{V_s}{r_o} \sqrt{\frac{0.9}{B_z - 0.45}} \quad (4-34)$$

La amplitud de vibración máxima para una fuerza de excitación dependiente de la frecuencia es:

$$A_z = \frac{m_e e}{m} \frac{B_z}{0.85 \sqrt{B_z - 0.18}} \quad (4-35)$$

En donde  $m_e$  es la relación de la masa desbalanceada y  $e$  es la excentricidad de la masa  $m_e$  para el eje de rotación. La masa en la analogía es el total de la masa vibratoria en la superficie del semi-espacio elástico. La gráfica del factor de amplificación  $M_z$  contra  $a_o$  para fuerzas de excitación constante (fig. 4.10), muestra que los picos en la resonancia son relativamente planos, y que un significativo amortiguamiento es asociado con el modo vertical de vibrar.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

#### 4.2.2 Vibración Horizontal.

Como se señaló en la sección 4.1, las vibraciones por translación horizontal o deslizamiento y por rotación o cabeceo, de una cimentación en bloque, se acoplan y ocurren simultáneamente; pero por simplicidad es necesario estudiar primero los casos por separado, tanto del deslizamiento como del cabeceo.

La información de las frecuencias naturales únicamente por cabeceo o por deslizamiento se usa para calcular la respuesta de la cimentación bajo el efecto de ambas vibraciones, actuando simultáneamente. Se mostrará posteriormente que la frecuencia natural de solamente el deslizamiento es muy cercana a las frecuencias naturales bajas de cabeceo y deslizamiento combinado.

Arnold et al. (1955) y Bycroft (1956) presentan soluciones analíticas para la translación horizontal de un disco circular rígido, apoyado en la superficie de un semi-espacio elástico y excitado por una fuerza horizontal.

$$P_x = P e^{i\omega t} \quad (4-36)$$

Sus resultados se expresaron en términos de una relación de frecuencias dimensionales  $a_0$  y una relación de masas  $b$ , la solución fue válida para todos

los valores de  $\nu$ , de una manera similar a la solución de Lysmer. Hall (1967) desarrolló una analogía entre la solución del semi-espacio elástico y un sistema equivalente masa-rigidez-amortiguamiento.

Analogía de Hall.- Hall (1967) definió la relación de masa modificada para deslizamiento como

$$B_z = \frac{7-8\nu}{32(1-\nu)} \frac{m}{\rho r_o^3} = \frac{7-8\nu}{32(1-\nu)} \frac{W}{\gamma_s r_o^3} \quad (4-37)$$

El factor de frecuencia dimensional  $a_{0,x}$  es igual a  $\omega r_o \sqrt{\rho/G}$ . Las expresiones para los factores equivalentes de resorte y amortiguamiento son los siguientes:

El resorte equivalente.

$$k_x = \frac{32(1-\nu)}{7-8\nu} Gr_o \quad (4-38)$$

El amortiguamiento equivalente.

$$C_x = \frac{18.4(1-\nu)}{7-8\nu} r_o^2 \sqrt{\rho G} \quad (4-39)$$

La relación de amortiguamiento  $\xi_x$  es dada por:

$$\xi_x = \frac{C_x}{C_c} = \frac{0.2875}{\sqrt{B_x}} \quad (4-40)$$

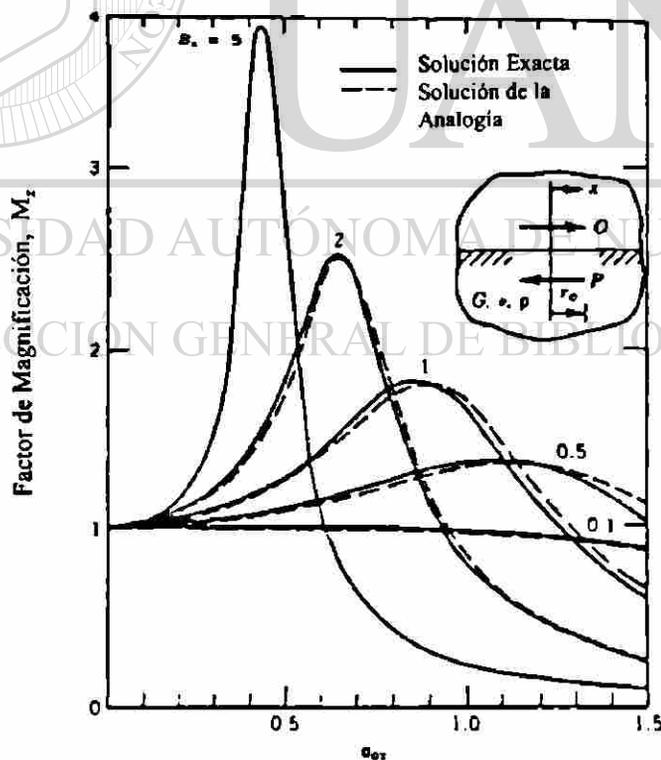
La ecuación de la analogía para el deslizamiento es

$$m\ddot{x} + C_x\dot{x} + k_x x = P_x \quad (4-41)$$

entonces la frecuencia circular se obtiene como:

$$\omega_{ax} = \sqrt{\frac{k_x}{m}} \quad (4-42)$$

Las curvas para los factores de amplificación  $M_x$  contra el factor de frecuencia adimensional  $a_{0x}$ , derivadas completamente de la solución del semi-espacio elástico, se comparan en la Fig. 4.11 con las curvas de la solución de la analogía. Las crestas planas en las curvas de la Fig. 4.11 indican que el modo de vibración para el deslizamiento horizontal es también asociado con un amortiguamiento significativo tal como en el caso de las vibraciones verticales. También puede mencionarse que las expresiones para el deslizamiento a lo largo del eje Y son similares a las presentadas en esta sección.



**Fig. 4.11** Respuesta de una cimentación circular rígida en el semi-espacio elástico para deslizamiento puro.

## 4.3 Modo Rotacional

### 4.3.1 Vibración por Cabeceo.

El problema de vibración por balanceo o cabeceo puro fue analizado por Arnold et al. (1955) y Bycroft (1956). Ellos asumieron que la presión vertical bajo la cimentación varía de acuerdo con:

$$\sigma_z = \frac{3M_y r e^{i\omega t} \cos\phi}{\pi r_o^3 \sqrt{r_o^2 - r^2}} \quad (4-43)$$

$$r \leq r_o$$

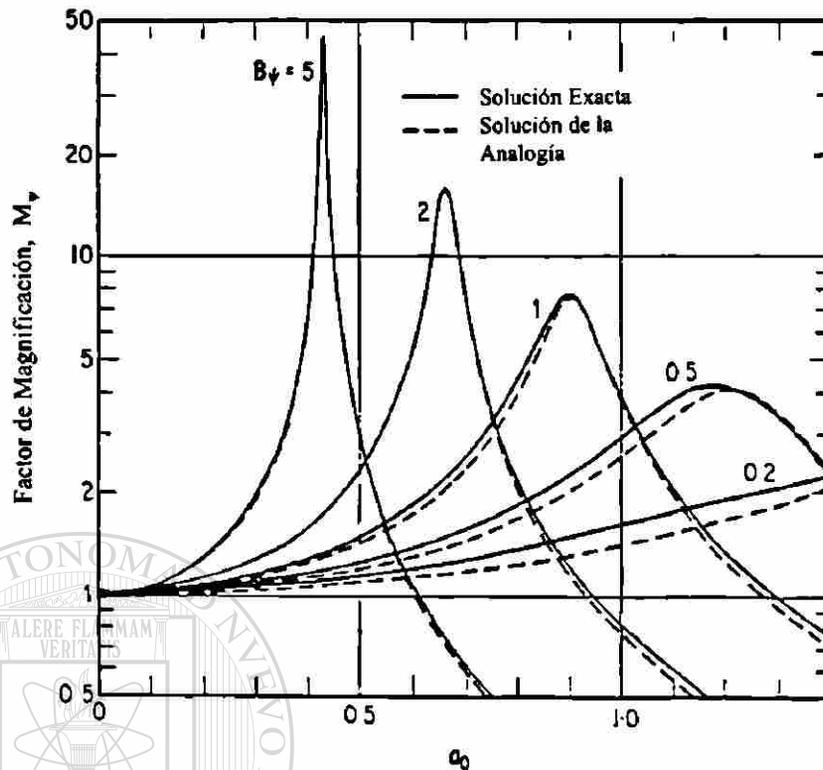
En donde  $M_y$  es el momento de excitación en el plano ZX que causa la rotación alrededor del eje Y, y  $\phi$  es el ángulo de rotación. La Fig. 4.12 ilustra la

geometría del problema y muestra una gráfica del factor de amplificación  $M\phi$  vs el factor de frecuencia dimensional  $a_0\phi$  para diferentes valores de la relación de inercia  $B_\phi$  (análogo a la relación de masa en el caso de translación). La

relación de inercia es definida como:

$$B_\phi = \frac{3(1-\nu) M_{m0}}{8 \rho r_o^5} = \frac{3 M_{m0} (1-\nu)}{8 (\gamma_s g) r_o^5} \quad (4-44)$$

En donde  $M_{m0}$  es el momento de inercia de la masa de la cimentación y de la máquina alrededor del eje de rotación.



**Fig. 4.12** Factor de Amplificación vs Factor de Frecuencia Dimensional para Cabeceo Solamente de una Cimentación Circular Rígida

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
 Se puede apreciar en la Fig. 4.12 que las curvas de respuesta son<sup>®</sup> caracterizadas por picos relativamente agudos, comparados con el caso de vibraciones verticales; por lo tanto, un amortiguamiento menor se asocia con el modo de vibración por cabeceo.

Hall (1967) propuso un modelo equivalente masa-rigidez-amortiguamiento que podría usarse para evaluar la respuesta del cabeceo, en una cimentación rígida, en la superficie de un semi-espacio elástico. Su analogía para el cabeceo es representada por:

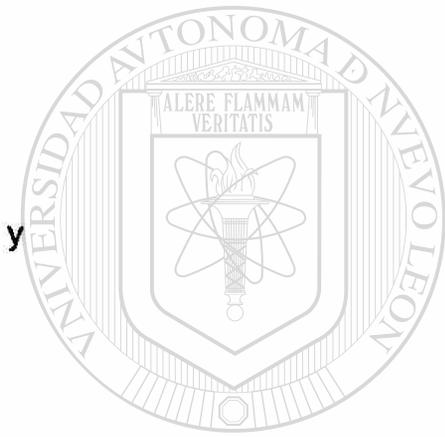
$$M_{mo}\ddot{\phi} + C_{\phi}\dot{\phi} + k_{\phi}\phi = M_y e^{i\omega t} \quad (4-45)$$

en donde

$k_{\phi}$  = Constante de resorte para el cabeceo.

$C_{\phi}$  = Constante de amortiguamiento.

Los términos  $k_{\phi}$  y  $C_{\phi}$  pueden ser calculados como sigue:



$$k_{\phi} = \frac{8Gr_o^3}{3(1-\nu)} \quad (4-46)$$

$$C_{\phi} = \frac{0.8r_o^4 \sqrt{G\rho}}{(1-\nu)(1+B_{\phi})} \quad (4-47)$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
para el amortiguamiento crítico

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$C_{\phi c} = 2\sqrt{k_{\phi}M_{mo}} \quad (4-48)$$

y la relación de amortiguamiento para el cabeceo  $\xi_{\phi}$  es dada por

$$\xi_{\phi} = \frac{C_{\phi}}{C_{\phi c}} = \frac{0.15}{(1+B_{\phi})\sqrt{B_{\phi}}} \quad (4-49)$$

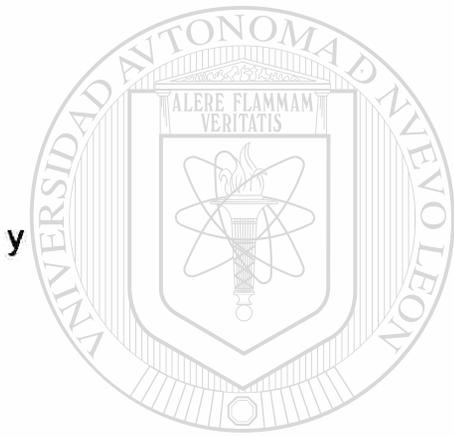
$$M_{m\phi} \ddot{\phi} + C_{\phi} \dot{\phi} + k_{\phi} \phi = M_y e^{i\omega t} \quad (4-45)$$

en donde

$k_{\phi}$  = Constante de resorte para el cabeceo.

$C_{\phi}$  = Constante de amortiguamiento.

Los términos  $k_{\phi}$  y  $C_{\phi}$  pueden ser calculados como sigue:



$$k_{\phi} = \frac{8Gr_o^3}{3(1-\nu)} \quad (4-46)$$

$$C_{\phi} = \frac{0.8r_o^4 \sqrt{G\rho}}{(1-\nu)(1+B_{\phi})} \quad (4-47)$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
para el amortiguamiento crítico

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$C_{\phi c} = 2\sqrt{k_{\phi} M_{m\phi}} \quad (4-48)$$

y la relación de amortiguamiento para el cabeceo  $\xi_{\phi}$  es dada por

$$\xi_{\phi} = \frac{C_{\phi}}{C_{\phi c}} = \frac{0.15}{(1+B_{\phi})\sqrt{B_{\phi}}} \quad (4-49)$$

la frecuencia natural sin amortiguamiento para el cabeceo  $\omega_{n\phi}$  es igual a

$$\omega_{n\phi} = \sqrt{\frac{k_{\phi}}{M_{m0}}} \quad (4-50)$$

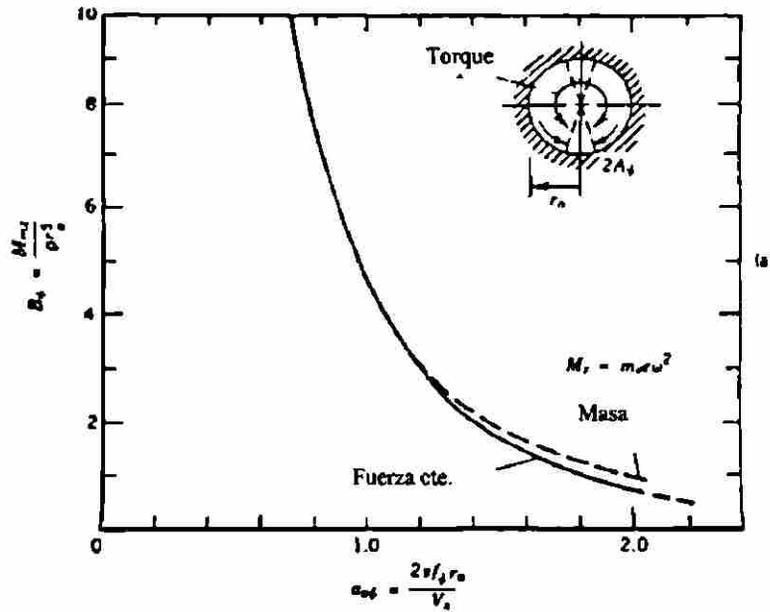
La solución de la analogía es mostrada en la Fig. 4.12 por las líneas punteadas al lado de la solución del semi-espacio elástico y es muy similar a esta última.

#### 4.3.2 Vibración por Torsión.

El problema de las vibraciones por torsión (rotación alrededor del eje Z) de una cimentación circular apoyada en la superficie del semi-espacio elástico fue analizado por Reissner ( 1937 ) y luego por Reissner y Sagoci ( 1944 ). Los desplazamientos horizontales en el caso de una cimentación rígida varía linealmente del eje de rotación como se muestra en la Fig. 4.13. La relación de inercia,  $B_{\psi}$ , para este caso puede ser definida como

$$B_{\psi} = \frac{M_{mz}}{\rho r_o^5} \quad (4-51)$$

En donde  $M_{mz}$  = momento polar de inercia de la masa de la cimentación alrededor del eje vertical de rotación.



**Fig. 4.13** Relación de la Inercia Contra el Factor de la Frecuencia Dimensional en la Resonancia, para Vibraciones por Torsión

La solución de la analogía para el caso de vibraciones por torsión puede ser expresarse como sigue ( Richart 1970 ) :

$$M_{mz} \ddot{\psi} + C_{\psi} \dot{\psi} + k_{\psi} \psi = M_z e^{i\omega t} \quad (4-52)$$

en donde

$\psi$  = Rotación angular de la cimentación alrededor de su eje vertical.

$C_{\psi}$  = Constante de amortiguamiento para vibraciones por torsión.

$k_{\psi}$  = Constante equivalente de resorte del suelo para vibraciones por torsión.

$M_z e^{i\omega t}$  = Momento de excitación horizontal actuando alrededor del eje Z.

Las constantes de resorte  $k_\psi$  y la de amortiguamiento  $C_\psi$  son dadas por ( Richart y Whitman, 1967 ).

$$k_\psi = \frac{16}{3} Gr_o^3 \quad (4-53)$$

$$C_\psi = \frac{16r_o^4 \sqrt{G\rho}}{1 + B_\psi} \quad (4-54)$$

La frecuencia natural no amortiguada  $\omega_{n\psi}$  de las vibraciones por torsión es dada por:

$$\omega_{n\psi} = \sqrt{\frac{k_\psi}{M_{mz}}} \quad (4-55)$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

la amplitud de las vibraciones  $A_\psi$  es dada por:

$$A_\psi = \frac{M_z}{k_\psi \sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{n\psi}}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi_\psi \frac{\omega}{\omega_{n\psi}}\right)^2}} \quad (4-56)$$

en la cual la relación de amortiguamiento  $\xi_v$  es dada por:

$$\xi_v = \frac{0.5}{(1 + 2B_v)} \quad (4-57)$$

Como en el caso de las vibraciones por balanceo o cabeceo, el amortiguamiento efectivo para las vibraciones por torsión es pequeño.

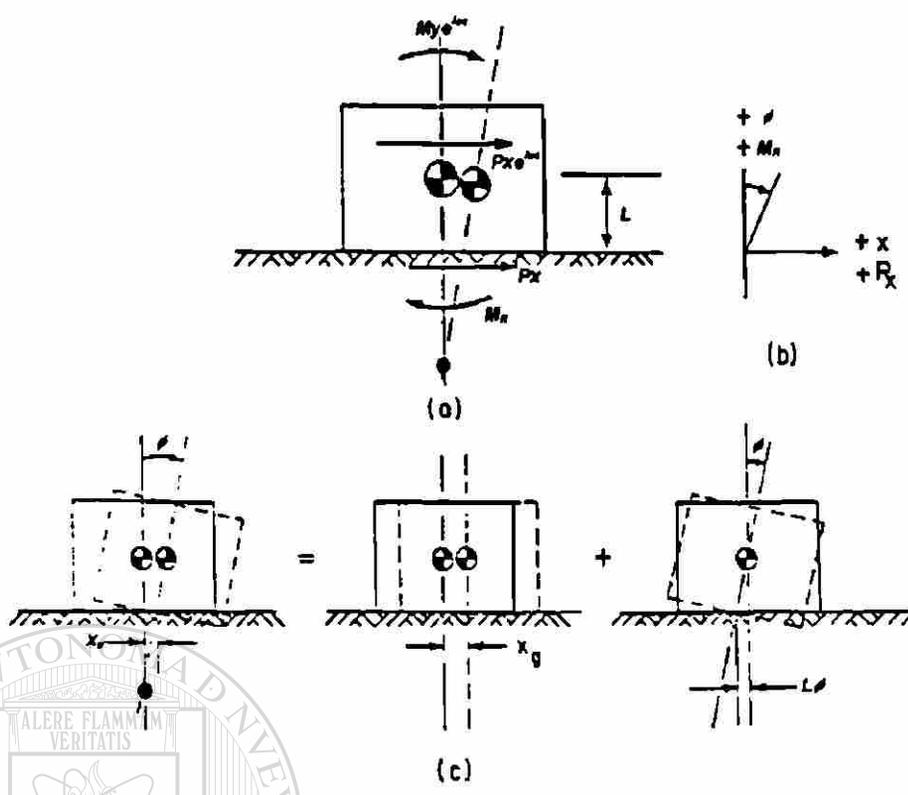
#### 4.3.3 Vibración por Cabeceo-Deslizamiento.

Tanto el cabeceo o el deslizamiento puro es una condición ideal. En realidad, el movimiento de una cimentación excitada por una fuerza horizontal o un momento vertical involucra tanto el cabeceo como el deslizamiento, en la Fig. 4.14 se ilustran las condiciones de una cimentación circular rígida que se apoya en la superficie de un semi-espacio elástico y es excitado por un momento vertical

$$M_y(t) = M_y e^{i\omega t} \quad (4-58)$$

y una fuerza horizontal actuando en el centro de gravedad.

$$P_x(t) = P_x e^{i\omega t} \quad (4-59)$$



**Fig. 4.14** Vibraciones por Cabeceo-Deslizamiento de un Bloque Circular Rígido en el Semi-espacio Elástico.

Haciendo que el centro de gravedad de la cimentación esté ubicado de tal manera que su eje vertical pase através del centro de la base circular, y a una altura  $L$  con respecto a la superficie del semi-espacio, el movimiento de la cimentación puede ser expresado en términos de la traslación del centro de gravedad  $x$  y el ángulo de rotación  $\phi$ .

La ecuación de movimiento puede obtenerse considerando el equilibrio entre las fuerzas y momentos de excitación y los resistentes, en términos de la segunda ley de Newton.

La fuerza resistente horizontal  $R_x$  en la base es dada por:

$$R_x = c_x \dot{x}_o + k_x x_o \quad (4-60)$$

en donde  $x_o$  = desplazamiento en la base y se obtiene como:

$$x_o = x - L\phi \quad (4-61)$$

la ecuación ( 4-60 ) puede luego ser escrita como:

$$R_x = c_x \dot{x} + k_x x - Lc_x \dot{\phi} - Lk_x \phi = 0 \quad (4-62)$$

Similarmente, el momento  $M_R$ , que representa el momento debido a la resistencia del semi-espacio elástico, puede escribirse como:

$$M_R = c_\phi \dot{\phi} + k_\phi \phi \quad (4-63)$$

la ecuación de movimiento para el deslizamiento es entonces:

$$m\ddot{x} + c_x \dot{x} + k_x x - Lc_x \dot{\phi} - Lk_x \phi = P_x e^{i\omega t} \quad (4-64)$$

y para el cabeceo

$$M_m \ddot{\phi} = M_y(t) - M_R + LR_x \quad (4-65)$$

En donde  $M_m$  es el momento de inercia de la masa de la cimentación con respecto al eje que pasa através del centro de gravedad del sistema y perpendicular al plano de vibraciones.

Sustituyendo  $M_R$  y  $R_x$  de las ecuaciones ( 4-63 ) y ( 4-62 ) respectivamente, en la ecuación ( 4-65 ), se obtiene:

$$M_m \ddot{\phi} + (c_\phi + L^2 c_x) \dot{\phi} + (k_\phi + L^2 k_x) \phi - Lc_x \dot{x} - Lk_x x = M_y e^{i\omega t} \quad (4-66)$$

Las ecuaciones ( 4-64 ) y ( 4-66 ) demuestran que el acoplamiento de los dos movimientos ( cabeceo y deslizamiento ) se origina porque el centro de gravedad de la cimentación y el punto donde se aplica la reacción horizontal  $R_x$  del semi-espacio elástico no son los mismos. Si  $L$  es igual a cero, no hay efecto de acoplamiento y tanto el deslizamiento como el cabeceo son independientes. Se puede obtener soluciones particulares de las ecuaciones (4-64) y (4-66) sustituyendo:

$$x = A e^{i\omega_m t} \quad (4-67)$$

y

$$\phi = Be^{i\omega_m t} \quad (4-68)$$

En donde  $A$  y  $B$  son constantes arbitrarias.

Cuando una cimentación se apoya en un semi-espacio elástico; los valores, tanto de la constante de resorte como de los coeficientes de amortiguamiento, son dependientes de la frecuencia y deben ser calculados para cualquier frecuencia dada, antes de que las ecuaciones mencionadas puedan ser resueltas; sin embargo, si se considera que la constante de resorte y el amortiguamiento tienen un valor constante independiente de la frecuencia, tal como en el caso de la solución de la analogía para el deslizamiento y el cabeceo, las ecuaciones (4-64) y (4-66) pueden ser fácilmente resueltas.

Las frecuencias naturales del acoplamiento del cabeceo y el deslizamiento se obtienen igualando a cero las funciones  $P_x e^{i\omega t}$  y  $M_y e^{i\omega t}$  en las ecuaciones (4-64) y (4-66). Esto se muestra a continuación:

$$m\ddot{x} + c_x \dot{x} + k_x x - Lc_\phi \dot{\phi} - Lk_\phi \phi = 0 \quad (4-69)$$

y

$$M_m \ddot{\phi} + (c_\phi + L^2 c_x) \dot{\phi} + (k_\phi + L^2 k_x) \phi - Lc_x \dot{x} - Lk_x x = 0 \quad (4-70)$$

Por sustitución de las ecuaciones ( 4-67 ) y ( 4-68 ) dentro de las ecuaciones ( 4-69 ) y ( 4-70 ) y reordenando los términos, la ecuación de la frecuencia se obtiene como se muestra abajo:

$$\left[ \omega_{nd}^4 - \omega_{nd}^2 \left( \frac{\omega_{n\phi}^2 + \omega_{nx}^2}{\gamma} - \frac{4\xi_x \xi_\phi \omega_{nx} \omega_{n\phi}}{\gamma} \right) + \frac{\omega_{nx}^2 \omega_{n\phi}^2}{\gamma} \right]^2 + 4 \left[ \frac{\xi_x \omega_{nx} \omega_{nd}}{\gamma} (\omega_{n\phi}^2 - \omega_{nd}^2) + \frac{\xi_\phi \omega_{n\phi} \omega_{nd}}{\gamma} (\omega_{nx}^2 - \omega_{nd}^2) \right]^2 = 0 \quad (4-71)$$

en donde:



$$\gamma = \frac{M_m}{M_{mo}} \quad (4-72)$$

$\omega_{nd}$  = Frecuencia natural amortiguada para el cabeceo y el deslizamiento juntos.

$\xi_x$  = Relación de amortiguamiento para vibraciones por deslizamiento.

$\xi_\phi$  = Relación de amortiguamiento para vibraciones por cabeceo.

Si  $\xi_x = \xi_\phi = 0$ , es decir, cuando no hay amortiguamiento en el sistema, la ecuación ( 4-71 ) se reduce a:

$$\omega_n^4 - \omega_n^2 \left( \frac{\omega_{nx}^2 + \omega_{n\phi}^2}{\gamma} \right) + \frac{\omega_{nx}^2 \omega_{n\phi}^2}{\gamma} = 0 \quad (4-73)$$

En donde  $\omega_n$  es la frecuencia natural no amortiguada del sistema.

Debido a que el efecto del amortiguamiento, en la frecuencia natural es pequeño, se puede calcular la frecuencia natural no amortiguada para la vibración por cabeceo y deslizamiento, usando la ecuación ( 4-73 ). Resolviendo la ecuación ( 4-73 ) como una cuadrática, con valor característico de  $\omega_n^2$ , se obtiene:

$$\omega_{n1,2}^2 = \frac{1}{2\gamma} \left[ (\omega_{nx}^2 + \omega_{n\phi}^2) \pm \sqrt{(\omega_{n\phi}^2 + \omega_{nx}^2)^2 - 4\gamma\omega_{n\phi}^2\omega_{nx}^2} \right] \quad (4-74)$$

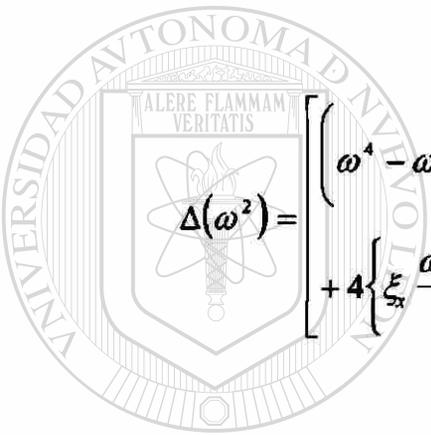
$\omega_{n1}$  y  $\omega_{n2}$  son las dos frecuencias naturales del sistema suelo-cimentación que se encuentra vibrando debido a la combinación del cabeceo y el deslizamiento. El cabeceo y el deslizamiento pueden ser coincidentes o no coincidentes dependiendo del valor de la frecuencia de operación  $\omega$  y de las dos frecuencias naturales  $\omega_{n1}$  y  $\omega_{n2}$ .

Las amplitudes amortiguadas de la combinación del cabeceo y deslizamiento ocasionadas por un momento de excitación  $M_y$ , pueden ser obtenidas de las siguientes ecuaciones :

$$A_x = \frac{M_y}{M_m} \frac{\left[ (\omega_{nx}^2)^2 + (2\xi_x \omega_{nx})^2 \right]^{1/2}}{\Delta(\omega^2)} \quad (4-75)$$

$$A_\phi = \frac{M_y}{M_m} \frac{\left[ (\omega_{nx}^2 - \omega^2)^2 + (2\xi_x \omega_{nx} \omega)^2 \right]^{1/2}}{\Delta(\omega^2)} \quad (4-76)$$

el valor de  $\Delta(\omega^2)$  se obtiene como se muestra abajo



$$\Delta(\omega^2) = \left[ \left( \omega^4 - \omega^2 \left\{ \frac{\omega_{n\phi}^2 + \omega_{nx}^2}{\gamma} - \frac{4\xi_x \xi_\phi \omega_{nx} \omega_{n\phi}}{\gamma} \right\} + \frac{\omega_{nx}^2 \omega_{n\phi}^2}{\gamma} \right)^2 + 4 \left\{ \frac{\xi_x \omega_{nx} \omega}{\gamma} (\omega_{n\phi}^2 - \omega^2) + \frac{\xi_\phi \omega_{n\phi} \omega}{\gamma} (\omega_{nx}^2 - \omega^2) \right\}^2 \right]^{1/2} \quad (4-77)$$

Las siguientes ecuaciones son para obtener las amplitudes amortiguadas del cabeceo y deslizamiento ocasionadas por una fuerza horizontal  $P_x$ .  
 DIRECCION GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$A_x = \frac{P_x}{mM_m} \frac{\left[ \left( -M_m \omega^2 + k_\phi + L^2 k_x \right)^2 + 4\omega^2 \left( \xi_\phi \sqrt{k_\phi M_{m0}} + L^2 \xi_x \sqrt{k_x m} \right)^2 \right]^{1/2}}{\Delta(\omega^2)} \quad (4-78)$$

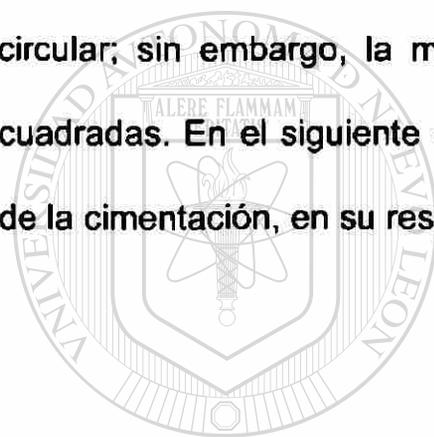
y

$$A_\phi = \frac{P_x L \omega_{nx} (\omega_{nx}^2 + 4\xi_x^2 \omega^2)^{1/2}}{M_m \Delta(\omega^2)} \quad (4-79)$$

En el caso que la cimentación esté sujeta a la acción conjunta de un momento y una fuerza horizontal, las amplitudes resultantes del deslizamiento y el cabeceo pueden obtenerse sumando, a las anteriores, las soluciones correspondientes de las ecuaciones ( 4-75 ) y ( 4-76 ).

Se puede obtener soluciones más exactas para las ecuaciones ( 4-64 ) y ( 4-66 ) tanto del semi-espacio elástico, como de la analogía de Hall usando técnicas numéricas en una computadora digital.

En este capítulo se consideró que la cimentación tiene un área de contacto circular; sin embargo, la mayoría de las cimentaciones son rectangulares o cuadradas. En el siguiente capítulo se tomará en cuenta el efecto de la forma de la cimentación, en su respuesta dinámica.



UANL

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

## CAPITULO 5

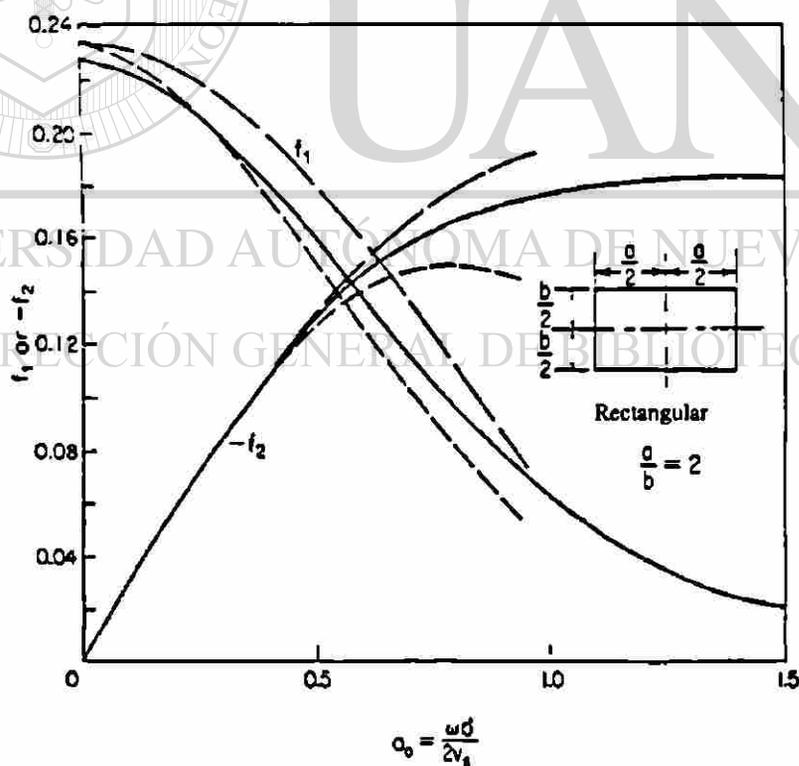
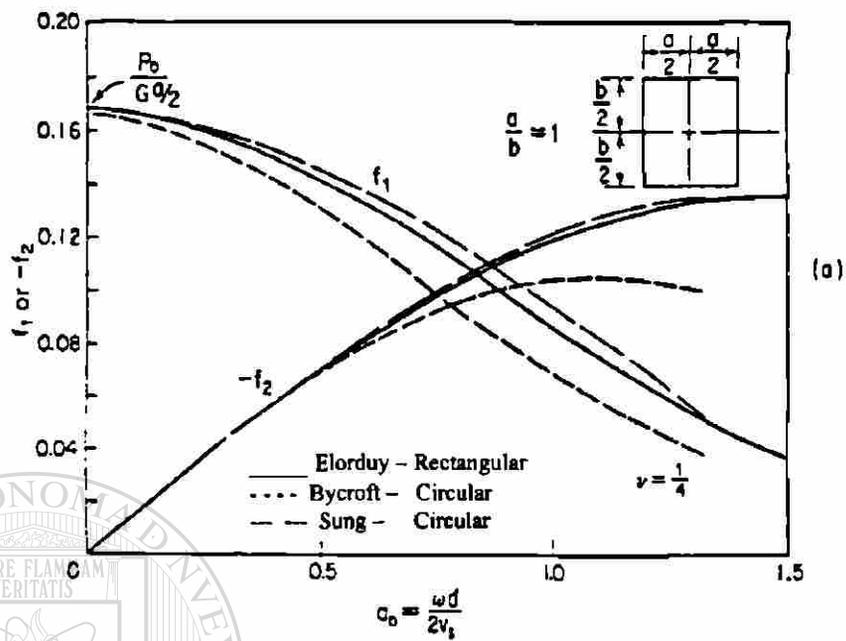
### ANALISIS DEL BLOQUE DE CIMENTACION PARA MAQUINARIA

#### 5.1 Efecto de la Forma de la Cimentación en la Respuesta

La frecuencia natural de una cimentación está influida por su forma. La teoría del semi-espacio fue desarrollada para un oscilador con un área circular. A continuación se presenta la aplicación para cimentaciones con área de contacto rectangulares o cuadradas.

El problema que involucra las oscilaciones verticales de una cimentación rectangular en la superficie del semi-espacio elástico se analizó por Sung (1953), quien usó la solución simplificada de Lamb (1904). Kobori (1962) y Thomson-Kobori (1963) obtuvieron las funciones de los desplazamientos,  $f_1$  y  $f_2$  para los desplazamientos en el centro de un área con superficie rectangular uniformemente cargada. Elorduy (1967) obtuvo soluciones (en términos de las funciones de desplazamientos  $f_1$  y  $f_2$ ) para vibraciones verticales de cimentaciones rectangulares ( $a/b = 2$ ) y cuadradas ( $a/b = 1$ ) apoyadas en la superficie del semi-espacio elástico para un caso típico de  $\nu = 1/4$  y comparándolas con las soluciones de Sung (1953) y Bycroft (1956), quien basó sus cálculos en un área circular equivalente. Sus soluciones son mostradas en

la Figura 5.1, para los casos de cimentaciones cuadradas y rectangulares, respectivamente.



**Fig. 5.1** Funciones de Desplazamientos para Vibración Vertical de Cimentaciones Cuadradas y Rectangulares

Debido a que estas funciones de desplazamientos son prácticamente las mismas, es aceptable usar las soluciones de una base circular rígida teniendo un área equivalente para una cimentación cuadrada o rectangular determinada, en el cálculo aproximado de la respuesta.

Similarmente, para las vibraciones por cabeceo o torsión de cimentaciones cuadradas o rectangulares, puede ser calculado un radio equivalente de una cimentación circular, tal que el momento de inercia de la cimentación dada con respecto al eje de rotación sea el mismo que el de una cimentación circular equivalente con respecto al mismo eje. Luego, el radio equivalente puede ser calculado como sigue:

Para traslación a lo largo de los ejes Z, X ó Y,

$$r_0 = r_{0z} = r_{0x} = r_{0y} = \left( \frac{ab}{\pi} \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{A}{\pi}} \quad (5-1)$$

Para cabeceo alrededor del eje Y ó X,

$$r_0 = r_{0\phi} = \left( \frac{ba^3}{3\pi} \right)^{1/4} \quad (5-2)$$

Para vibraciones torsionales respecto al eje Z,

$$r_0 = r_{0\psi} = \left[ \frac{ab(a^2 + b^2)}{6\pi} \right]^{1/4} = \left( \frac{2I_x}{\pi} \right)^{1/4} \quad (5-3)$$

en donde

$a$  = Largo de la cimentación (perpendicular al eje de rotación para el cabeceo)

$b$  = Ancho de la cimentación (paralelo al eje de rotación para el cabeceo)

Para cimentaciones con relaciones largo/ancho mayores que 6, una condición ideal bi-dimensional puede ser asumida y las cimentaciones tratadas como franja son analizadas aplicando el método de Quinlan (1953).

Lo anterior implica que una cimentación de cualquier forma sea circular o rectangular, responderá similarmente si la magnitud de las áreas de las cimentaciones son las mismas. Una cimentación con un área de 8 m<sup>2</sup> tendrá un radio equivalente de 1.6 m para oscilaciones de traslación; esta cimentación puede ser un círculo con un diámetro de 3.2 m o un rectángulo, con una relación largo/ancho tal que tenga la misma área. Sin embargo, la respuesta real de estas dos cimentaciones puede no ser la misma.

Se ha encontrado que dos cimentaciones de diferentes formas no se comportarán idénticamente, aunque los radios equivalentes basado en áreas iguales para modos de traslación sean los mismos ( Chae, 1969 ). En un análisis exacto, la forma de la cimentación debe ser tomada en cuenta. Basado en sus observaciones experimentales ( Chae, 1969 ) sugirió que el concepto de áreas circulares equivalentes puede ser usado para predecir las frecuencias

naturales, pero que las características del perímetro deberán tomarse en cuenta para hacer unas razonables predicciones de las amplitudes.

El problema de vibraciones verticales de cimentaciones rectangulares también ha sido estudiado por Dasgupta Y Rao (1978), quienes usaron un modelo tridimensional en elemento finito y tres distribuciones de presión vertical diferentes para la interface suelo-cimentación; sin embargo, su modelo es muy complejo para el diseño de cimentaciones de maquinaria ordinarias. Además, no hay comparaciones con observaciones reales que hayan sido reportadas.

Es una práctica común transformar un área de cualquier forma a un círculo equivalente de la misma área (para modos de translación) o equivalentes momentos de inercia (para modos de cabeceo o de torsión) ( Richart y Whitman, 1967 ). Dobry y Gazetas (1986) sugieren que este procedimiento usando el concepto de radio equivalente tiene limitaciones y la forma de la cimentación definida por la relación de aspecto  $a/b$  tiene una influencia significativa en los valores de la rigidez dinámica y amortiguamiento, especialmente en casos de cimentaciones grandes.

Por otra parte, al tener una cimentación circular de área equivalente, se pueden calcular las constantes necesarias para obtener su respuesta, como por ejemplo, las constantes de resorte, las cuales representan una relación lineal entre la carga aplicada y el desplazamiento de la cimentación, lo cual implica una relación lineal esfuerzo-deformación para el suelo.

Por consiguiente, siguiendo la teoría de elasticidad, se pueden tener útiles fórmulas para las constantes de resorte, para cimentaciones de formas simples.

Estas se obtienen a través de la teoría de la elasticidad para cimentaciones rectangulares, apoyadas en la superficie del semi-espacio elástico. Las expresiones han sido obtenidas para cimentaciones rígidas, excepto para el caso del movimiento horizontal, en donde la constante de resorte fue obtenida asumiendo una distribución uniforme de esfuerzos cortantes en el área de contacto y calculando el desplazamiento horizontal promedio de esta área.

Estas fórmulas se aplican para situaciones correspondientes a un bloque rígido o una losa de cimentación con poca profundidad, dentro del suelo.

Vibración Vertical (Barkan, 1962)



$$k_z = \frac{G}{1-\nu} \beta_z \sqrt{ab} \quad (5-4)$$

Vibración Horizontal (Barkan, 1962)

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$k_x = 2(1+\nu)G\beta_x \sqrt{ab} \quad (5-5)$$

Vibración por Cabeceo (Gorbunov-Possadov, 1961)

$$k_\psi = \frac{G}{1-\nu} \beta_\psi ba^2 \quad (5-6)$$

Los valores para  $\beta_z$ ,  $\beta_x$  y  $\beta_y$  son dados en la Figura 5.2 para varios valores de  $a/b$ .

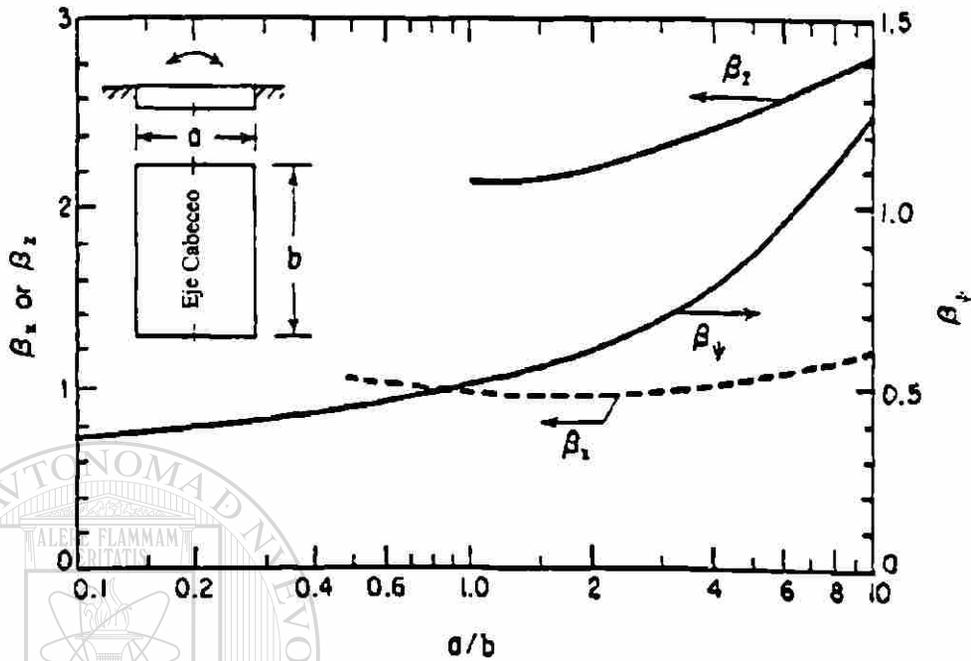
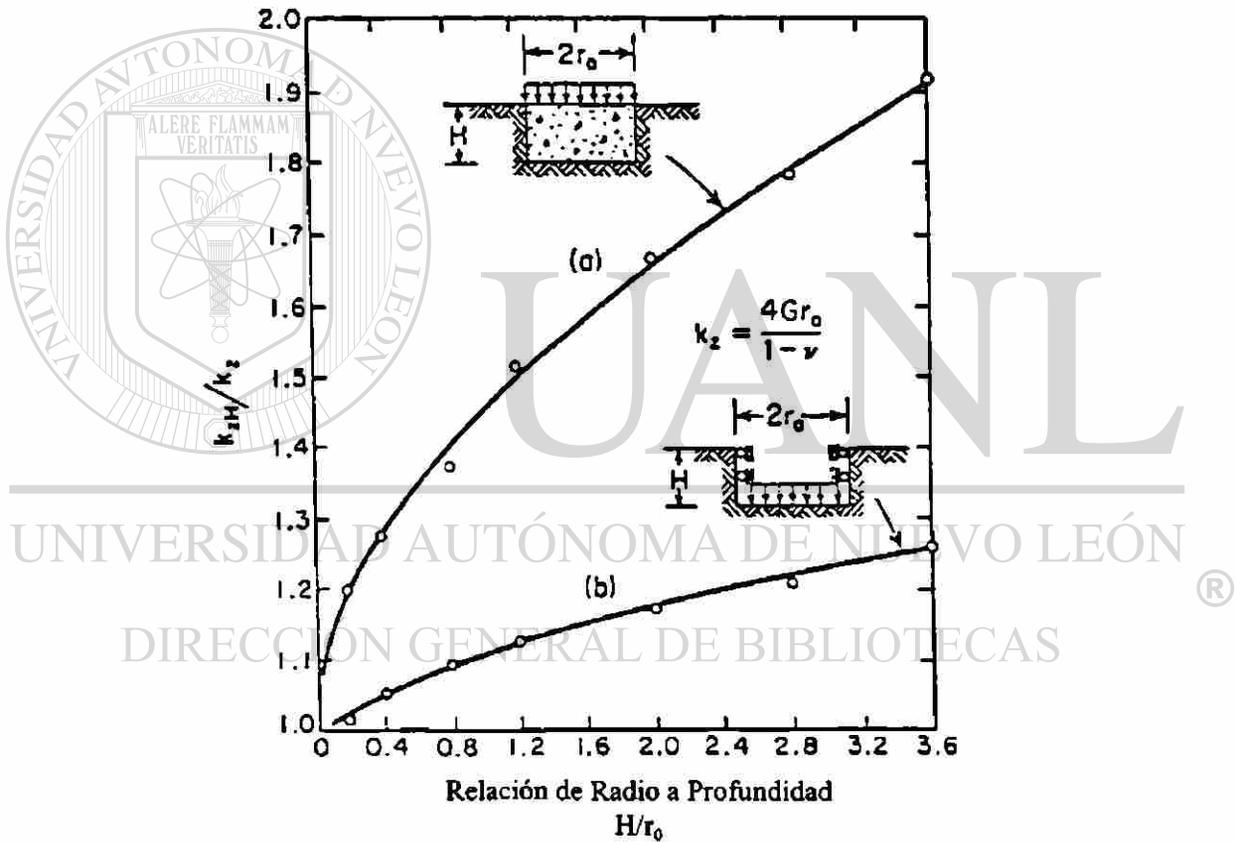


Fig. 5.2 Coeficientes  $\beta_z$ ,  $\beta_x$  y  $\beta_y$  para Cimentaciones Rectangulares

### 5.2 Efecto del Encajonamiento de la Cimentación

El efecto del encajonamiento es un incremento de la resistencia del suelo al movimiento de la cimentación; por lo cual se incrementa la constante de resorte efectiva. En la Figura 5.3 se ilustra el cambio en la constante de resorte vertical, para cimentaciones circulares, con respecto al incremento de la profundidad encajonada. La curva (a) representa una cimentación rígida la cual tiene adherencia con el suelo a lo largo de la superficie vertical, de tal modo que genera una capa con fricción que resiste el movimiento vertical del bloque, así como desarrolla también una resistencia por presión en la base. La curva (b)

corresponde a la situación de una cimentación encajonada la cual es aislada del suelo a lo largo de la superficie vertical y muestra también que el incremento de la constante de resorte se genera solamente por la presión aplicada en la base para diferentes profundidades. La constante de resorte que corresponde a la curva (b) se obtuvo del asentamiento promedio producido por una carga uniformemente distribuida, aplicada a diferentes profundidades de encajonamiento.



**Fig. 5.3** Efecto de la Profundidad de Encajonamiento en la Constante de Resorte para Cimentaciones Circulares Cargadas Verticalmente.

Por comparación de las constantes de resorte para la curva (a) con los lados adheridos, y la curva (b) sin los lados adheridos, es posible separar los efectos

del apoyo y de la fricción. La información mostrada en la Figura 5.3 fue preparada por Kaldjian ( 1969 ) de una solución del problema de elasticidad por el método del elemento finito.

La profundidad de encajonamiento puede producir aun más efectos significativos en las constantes de resorte para movimientos de cabeceo y deslizamiento de la cimentación, todavía, a finales de los años sesenta no se habían encontrado las soluciones que resolvieran este problema.

Otro efecto que provee mayor rigidez a la constante de resorte de la cimentación es la presencia de un estrato rígido por debajo del estrato elástico. Esto es, un estrato elástico de poco espesor, soportado por una base rígida permite pequeños desplazamientos de la cimentación, para una carga dada, en comparación con los desplazamientos en el semi-espacio elástico.

### **5.3 Procedimiento de Diseño para el Bloque de Cimentación**

Se han considerado, hasta ahora, tanto los métodos de análisis de cimentaciones en bloque, como los requerimientos de diseño de cimentaciones para maquinaria. Actualmente existen dos propuestas que están siendo utilizadas comúnmente para el diseño de cimentaciones de maquinaria, las cuales son: El semi-espacio elástico ( Richart et al. , 1970 ) y la propuesta de los resortes lineales elásticos sin peso ( Barkan, 1962 ).

A continuación, se establece un procedimiento general, paso a paso, para el diseño de cimentaciones con cualquiera de las dos propuestas. Es esencial

obtener los datos pertinentes de la máquina y el suelo, antes de hacer un diseño racional para una cimentación que soportará una maquinaria. La obtención de los datos relevantes es el primer y más importante paso y esto se explica enseguida, siguiendo después con una guía para seleccionar las dimensiones de prueba para la cimentación y las constantes dinámicas del suelo.

### 1. Datos de la maquinaria.

La siguiente información puede obtenerse de los fabricantes de la maquinaria, como guía para el diseño:

- a) El arreglo de la maquinaria y un diagrama de cargas consistente de una planta, elevación y una sección mostrando los detalles de conexiones y los puntos de aplicación de todas las cargas en la cimentación.
- b) La altura del eje principal de la máquina con respecto a la parte superior de la cimentación.
- c) La capacidad o rendimiento nominal de la maquinaria.
- d) La velocidad de operación de la maquinaria.
- e) Las fuerzas y momentos excitadores de la máquina.
- f) La posición de las cavidades, los espacios abiertos y la localización de los tornillos de anclaje.
- g) Las amplitudes permisibles de vibración.

### 2. Datos del suelo.-

Se debe obtener la siguiente información, acerca del suelo de desplante de la cimentación:

- a) El perfil estratigráfico del suelo y sus datos (incluyendo las propiedades del suelo, generalmente hasta una profundidad igual a dos veces el ancho de la cimentación propuesta o hasta el estrato resistente).
- b) La investigación del suelo, para averiguar la capacidad de carga admisible y determinar las propiedades dinámicas del suelo.
- c) La posición relativa del nivel freático, en el caso de existir éste en las diferentes etapas del año.
- d) La distancia mínima de cualquier cimentación importante en las inmediaciones de la cimentación para la maquinaria.

### 3. Dimensiones de prueba de la cimentación.

Debe seleccionarse, por criterio, un tamaño apropiado de la cimentación, para un análisis preliminar. Las siguientes directrices serán útiles para esta propuesta y servirán para minimizar el número de pruebas.

- a) Area del Bloque.- El tamaño de una cimentación en bloque (visto en planta) deberá ser mayor que el fondo de la placa que soporta a la máquina, con un mínimo de 150 mm de espacio libre alrededor de la placa.
- b) Peralte.- En todos los casos, la cimentación deberá tener un peralte suficiente para desplantarse en el estrato de apoyo y para asegurar la estabilidad contra la falla.

c) Centro de Gravedad.- La combinación del centro de gravedad de la maquinaria y la del bloque deberá estar por debajo la parte superior de la cimentación, y en ningún caso deberá estar encima de la cimentación.

d) Excentricidad.- La excentricidad no deberá exceder el 5 % de la menor dimensión horizontal del bloque.

Para simplificar los cálculos, es aconsejable seleccionar una forma simple en planta. Deberá evitarse cualquier muesca, proyección y asimetría, excepto cuando éstas sean necesarias.

#### 4. Selección de las constantes del suelo.

Para un diseño preliminar, las constantes del suelo pueden obtenerse según lo mencionado en el capítulo 4. Para todos los casos, es recomendable que las propiedades dinámicas del suelo sean determinadas en el laboratorio y en el campo, para al menos tres diferentes niveles de deformaciones. Este punto deberá tenerse en mente cuando se esté realizando una exploración en el suelo. Puede seleccionarse un valor particular para un nivel anticipado de deformación, en un problema de diseño dado.

Deberá aplicarse una corrección para la presión de confinamiento efectiva y para los niveles de deformación por corte, antes de proceder al diseño.

A menudo es deseable seleccionar un intervalo para las constantes del suelo y tener valores límites de las frecuencias naturales y las amplitudes de movimiento para valores seleccionados de las constantes del suelo.

5. Centrado del área de la cimentación, en contacto con el suelo y determinación de las presiones en el suelo.

Se ha de determinar el centro de gravedad combinado de la maquinaria y la cimentación en los planos (x, y, z) y revisar que la excentricidad a lo largo del eje X o Y no sea más del 5 %. Esto es un límite superior para este tipo de análisis. Si la excentricidad excede al 5 %, debe ser considerado en el análisis el cabeceo adicional ocasionado por la carga vertical excéntrica.

Debe también revisarse la presión estática en el suelo, la cual debe ser menor que el 80 % de la presión admisible del suelo, en condiciones estáticas. Esta condición se encuentra en la mayoría de las cimentaciones para maquinaria.

6. Valores de Diseño para Cargas y Momentos Desbalanceados.

Los valores de las fuerzas excitadoras y los momentos resultantes pueden ahora determinarse con respecto al centro de gravedad combinado del sistema. Si la fuerza vertical desbalanceada actúa con alguna excentricidad, esto aumentará el valor del momento.

Similarmente, si la fuerza horizontal desbalanceada actúa a una cierta distancia, con respecto a la parte superior del bloque de cimentación, la magnitud del momento ocasionado por la fuerza horizontal es igual al producto de la fuerza horizontal y la distancia entre el centro de gravedad del sistema combinado y el punto de aplicación de dicha fuerza. La naturaleza de las fuerzas y momentos desbalanceados deben dar al investigador una idea acerca de la naturaleza de las vibraciones en la cimentación.

7. Determinación de momentos de inercia y de los momentos de inercia de la masa.

a) Cimentación circular.

Para Vibraciones por Cabeceo:

$I_x = I_y = I$ , Momento de inercia del área de la base con respecto a un eje que pasa a través del centroide del área de contacto de la base y perpendicular al plano de vibración.



$$I_x = I_y = I = \frac{\pi r_o^4}{4} \quad (5-7)$$

$r_o$  = Radio de la base de la cimentación.

$M_m$  = Momento de inercia de la masa de la cimentación con respecto a un eje que pasa a través del centroide del sistema y perpendicular al plano de vibración.

$$M_m = \frac{\pi r_o^2 H \gamma_c r_o^2}{4g} \quad (5-8)$$

en donde

$\gamma_c$  = Peso volumétrico del concreto.

$M_{mo}$  = Momento de inercia de la masa de la cimentación con respecto a un eje que pasa a través del centroide de la base y perpendicular al plano de vibración.

$$M_{mo} = \frac{\pi r_o^2 H}{g} \gamma_c \left( \frac{r_o^2}{4} + \frac{H^2}{3} \right) \quad (5-9)$$

Para Vibraciones por Torsión:

$I_z$  = Momento polar de inercia del área de contacto de la base, con respecto al eje vertical que pasa a través del centro de gravedad.

$$J_z = I_z = \frac{\pi r_o^4}{2} \quad (5-10)$$

$M_{mz}$  = Momento polar de inercia de la masa de la cimentación, con respecto al eje vertical de rotación.

$$M_{mz} = \frac{\pi r_o^2 H}{g} \gamma_c \frac{r_o^2}{2} \quad (5-11)$$

b) Cimentación no circular.

Para Vibraciones por Cabeceo:

$I$  = Momento de inercia del área de base con respecto a un eje que pasa a través del centroide del área de contacto de la base y perpendicular al plano de vibración. Esto es igual a  $\frac{ba^3}{12}$  en donde " $a$ " es la dimensión mayor del área rectangular en el plano de la vibración, y " $b$ " es la dimensión perpendicular a ese plano. También:

$$M_{mo} = M_m + mL^2 \quad (5-12)$$

En donde  $L$  es la altura del centro de gravedad combinado con respecto a la base. El valor de  $\gamma$  puede ser determinado como:

$$\gamma = \frac{M_m}{M_{mo}} \quad (5-13)$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

Para Vibraciones por Torsión:

$I_z$  = Momento polar de inercia del área base con respecto al eje vertical que pasa a través del centro de gravedad.

$$J_z = I_z = ab \frac{(a^2 + b^2)}{12} \quad (5-14)$$

$M_{mz}$  = Momento polar de inercia de la masa de la maquinaria y la cimentación con respecto al eje vertical.

$$M_{mz} = M_{mx} + M_{my} \quad (5-15)$$

$M_m, M_{mx}, M_{my}$ , Son los momentos de inercia de las masas.

## 8. Frecuencias naturales y amplitudes de vibración.

Los pasos del 1 al 7 dan la información que se usará para calcular las frecuencias naturales y las amplitudes de vibración. Esta información es común y subsecuentemente la respuesta dinámica puede ser calculada tanto por el método del semi-espacio elástico como por cualquier otro método. A continuación se presenta los pasos para el cálculo con el método del semi-espacio elástico.

### a) Radio equivalente.

Para cimentaciones no circulares, se determinará el radio equivalente  $r_o$  del área de contacto de la cimentación, considerando la dirección de las vibraciones.

para traslación:

$$r_{ox} = r_{oy} = r_{oz} = \left( \frac{ab}{\pi} \right)^{1/2} = \left( \frac{A}{\pi} \right)^{1/2} \quad (5-16)$$

para vibración por cabeceo:

$$r_{o\phi} = \left( \frac{ba^3}{3\pi} \right)^{1/4} \quad (5-17)$$

para vibraciones torsionales:

$$r_{o\psi} = \left[ \frac{ba(a^2 + b^2)}{6\pi} \right]^{1/4} = \left( \frac{2I_z}{\pi} \right)^{1/4} \quad (5-18)$$

b) Determinación de la relación de masa, constantes de resorte, y factores de amortiguamiento.

Los valores de la relación de masa o inercia, constantes de resorte, y factores de amortiguamiento pueden ser calculados según la tabla 5.1.

c) Frecuencias naturales y amplitudes de vibración en modos no acoplados.

Vibraciones verticales:

$$\omega_{nz} = \sqrt{\frac{k_z}{m}} \quad (5-19)$$

$$A_z = \frac{P_z}{k_z \left[ \left( 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_{nz}} \right)^2 \right)^2 + \left( 2\xi_z \frac{\omega}{\omega_{nz}} \right)^2 \right]^{1/2}} \quad (5-20)$$

Tabla 5.1

Relación de Masa o Inercia  $B$ , Factor de Amortiguamiento  $\xi$ , y Constante de Resorte  $k$  para una Cimentación Circular Rígida en un Semi-espacio Elástico Finito.

Modo de Vibración	Relación de Masa	Factor de Amortiguamiento	Constante de Resorte
Vertical	$B_z = \frac{(1-\nu) m}{4 \rho r_o^3}$	$\xi_z = \frac{0.425}{\sqrt{B_z}}$	$k_z = \frac{4Gr_o}{1-\nu}$
Deslizamiento	$B_x = \frac{(7-8\nu) m}{32(1-\nu) \rho r_o^3}$	$\xi_x = \frac{0.2875}{\sqrt{B_x}}$	$k_x = \frac{32(1-\nu)}{7-8\nu} Gr_o$
Cabeceo	$B_\phi = \frac{3(1-\nu) M_{m\phi}}{8 \rho r_o^5}$	$\xi_\phi = \frac{0.15}{(1+B_\phi)\sqrt{B_\phi}}$	$k_\phi = \frac{8Gr_o^3}{3(1-\nu)}$
Torsional	$B_\psi = \frac{M_{m\psi}}{\rho r_o^5}$	$\xi_\psi = \frac{0.5}{1+2B_\psi}$	$k_\psi = \frac{16}{3} Gr_o^3$

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

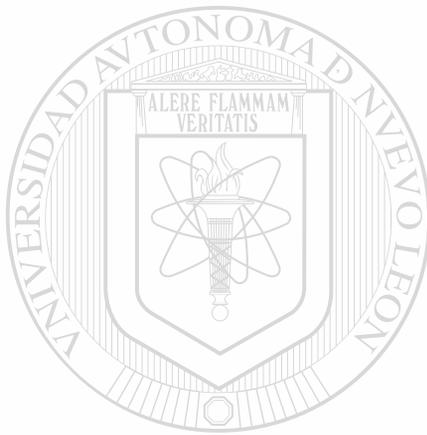
Vibraciones torsionales:

$$\omega_{n\psi} = \sqrt{\frac{k_\psi}{M_{m\psi}}} \quad (5-21)$$

$$A_v = \frac{M_z}{k_v \left[ \left( 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_{nv}} \right)^2 \right)^2 + \left( 2\xi_v \frac{\omega}{\omega_{nv}} \right)^2 \right]^{1/2}} \quad (5-22)$$

d) Frecuencias naturales y amplitudes de vibración en modos acoplados.

Las frecuencias naturales de la combinación por cabeceo y deslizamiento son obtenidas de las ecuaciones (5-25 y 5-26) con  $\omega_{nx}, \omega_{n\phi}$  obtenidas como sigue:



$$\omega_{nx} = \sqrt{\frac{k_x}{m}} \quad (5-23)$$

$$\omega_{n\phi} = \sqrt{\frac{k_\phi}{M_{mo}}} \quad (5-24)$$

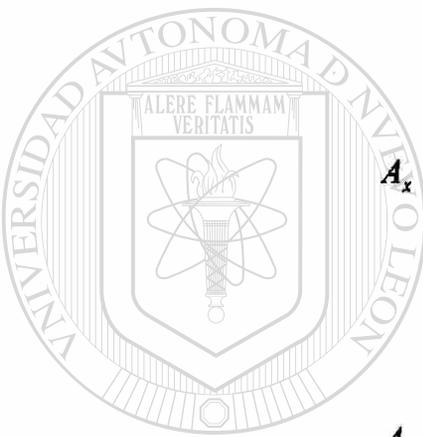
Las frecuencias naturales amortiguadas son obtenidas de las raíces de la siguiente ecuación:

$$\left[ \omega_{nd}^4 - \omega_{nd}^2 \left( \frac{\omega_{n\phi}^2 + \omega_{nx}^2}{\gamma} - \frac{4\xi_x \xi_\phi \omega_{nx} \omega_{n\phi}}{\gamma} \right) + \frac{\omega_{nx}^2 \omega_{n\phi}^2}{\gamma} \right]^2 + 4 \left[ \frac{\xi_x \omega_{nx} \omega_{nd}}{\gamma} (\omega_{n\phi}^2 - \omega_{nd}^2) + \frac{\xi_\phi \omega_{nd} \omega_{n\phi}}{\gamma} (\omega_{nx}^2 - \omega_{nd}^2) \right]^2 = 0 \quad (5-25)$$

Las frecuencias naturales no amortiguadas se obtienen con la siguiente ecuación:

$$\omega_{n1,2}^2 = \frac{1}{2\gamma} \left[ (\omega_{nx}^2 + \omega_{n\phi}^2) \pm \sqrt{(\omega_{n\phi}^2 + \omega_{nx}^2)^2 - 4\gamma\omega_{n\phi}^2\omega_{nx}^2} \right] \quad (5-26)$$

Las amplitudes amortiguadas para el movimiento ocasionado por la aplicación de un momento se obtienen como sigue:



y

$$A_x = \frac{M_y \left[ (\omega_{nx}^2)^2 + (2\xi_x \omega_{nx})^2 \right]^{1/2}}{M_m \Delta(\omega^2)} \quad (5-27)$$

$$A_\phi = \frac{M_y \left[ (\omega_{nx}^2 - \omega^2)^2 + (2\xi_x \omega_{nx} \omega)^2 \right]^{1/2}}{M_m \Delta(\omega^2)} \quad (5-28)$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

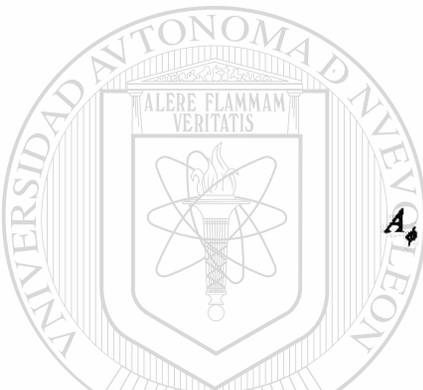
En donde  $\Delta(\omega)^2$  es dada por la ecuación (5-29).

$$\Delta(\omega)^2 = \left\{ \left( \omega^4 - \omega^2 \left( \frac{\omega_{n\phi}^2 + \omega_{nx}^2}{\gamma} - \frac{4\xi_x \xi_\phi \omega_{nx} \omega_{n\phi}}{\gamma} \right) + \frac{\omega_{nx}^2 \omega_{n\phi}^2}{\gamma} \right)^2 + 4 \left( \xi_x \frac{\omega_{nx} \omega}{\gamma} (\omega_{n\phi}^2 - \omega^2) + \frac{\xi_\phi \omega_{n\phi} \omega}{\gamma} (\omega_{nx}^2 - \omega^2) \right)^2 \right\}^{1/2} \quad (5-29)$$

Las amplitudes amortiguadas para el movimiento ocasionado por la aplicación de una fuerza  $P_x$  actuando en el centro de gravedad de la cimentación pueden ser obtenidas como:

$$A_x = \frac{P_x}{mM_m} \frac{\left[ \left( -M_m \omega^2 + k_\phi + L^2 k_x \right)^2 + 4\omega^2 \left( \xi_\phi \sqrt{k_\phi M_{m0}} + L^2 \xi_x \sqrt{k_x m} \right)^2 \right]^{1/2}}{\Delta(\omega^2)} \quad (5-30)$$

y



$$A_\phi = \frac{P_x L \omega_{nx} \left( \omega_{nx}^2 + 4\xi_x \omega^2 \right)^{1/2}}{M_m \Delta(\omega^2)} \quad (5-31)$$

### 9. Revisión para una Adecuada Cimentación.

Las frecuencias naturales y las amplitudes de vibración calculadas en el paso 8 deben compararse con la velocidad de operación y las amplitudes permisibles, respectivamente, para verificar si el tamaño de la cimentación seleccionada es el adecuado. La frecuencia natural del sistema suelo-cimentación deberá ser menor en un 30 % (preferiblemente 50 %) de la velocidad de operación de la maquinaria. La amplitud de vibración debe ser menor que los valores límites de amplitud especificados por el fabricante de la maquinaria. Si no ha sido posible obtener esta información, la amplitud permisible debe fijarse con una debida consideración de la estabilidad de la máquina y también de los efectos de las

vibraciones en maquinarias y estructuras vecinas, ver figura 1.2 en el capítulo 1.

Para maquinaria con diferentes modos de vibrar, la amplitud de vibración resultante no deberá exceder el valor permisible.

#### 5.4 Concepto de las Fuerzas Desbalanceadas Producidas por la Maquinaria

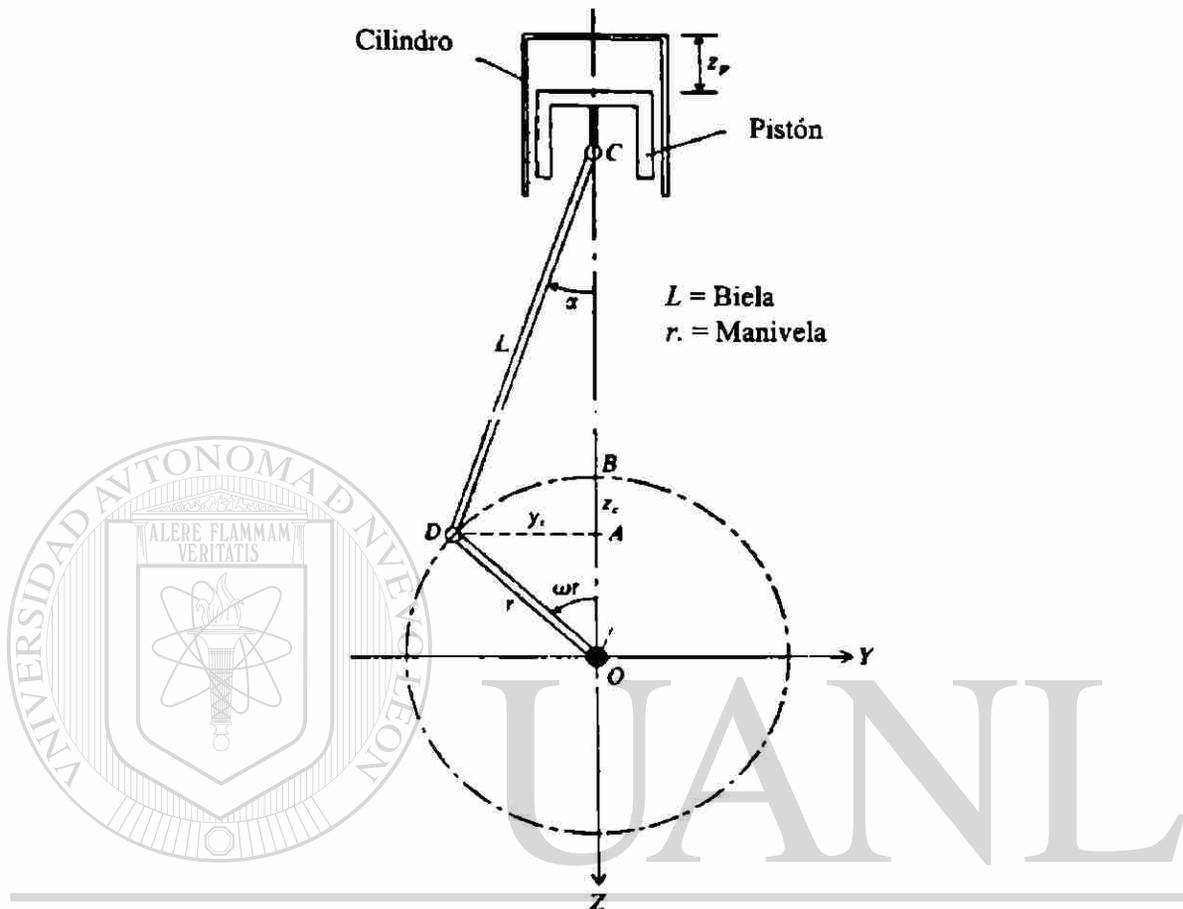
Como se mencionó en el punto 6 de la sección anterior, es necesario conocer las fuerzas desbalanceadas de la maquinaria o motores, además de su localización, con respecto a algún punto de referencia de la base de la máquina, el fabricante deberá proporcionar esta información.

Para ilustrar el concepto de una máquina produciendo tanto fuerzas primarias como fuerzas secundarias brevemente se examinará una maquinaria idealizada con un cilindro simple como se observa en la figura 5.4. Definiendo a  $z_p$  como el desplazamiento hacia abajo del pistón desde cero en el punto muerto superior (cuando  $\omega t = 0$  y el máximo ocurre cuando  $\omega t = \pi$  rad en contra de las manecillas) en cualquier tiempo  $t$  tenemos para  $\omega t$ :

$$z_p = r(1 - \cos \omega t) + L(1 - \cos \alpha) \quad (5-32)$$

Pero  $\alpha = f(\omega t)$  tal que  $y_c$  es común tanto para  $r$  como para  $L$ ; entonces,

$$\sin \alpha = \frac{r}{L} \sin \omega t \quad (5-33)$$



**Fig. 5.4** Cilindro Simple de una Máquina que Produce Fuerzas Desbalanceadas que Depende de la Frecuencia.

Usando las relaciones de trigonometría finalmente se obtiene:

$$z_p = \left( r + \frac{r^2}{4L} \right) - r \left( \cos \omega t + \frac{r}{4L} \cos 2\omega t \right)$$

$$\dot{z}_p = r\omega \left( \sin \omega t + \frac{r}{2L} \sin 2\omega t \right) \quad (5-34)$$

$$z_p = r\omega^2 \left( \cos\omega t + \frac{r}{L} \cos 2\omega t \right)$$

Un ejercicio similar puede ser hecho para la manivela:

$$\begin{aligned} y_c &= -r\sin\omega t \\ \dot{y}_c &= -r\omega \cos\omega t \\ \ddot{y}_c &= r\omega^2 \sin\omega t \end{aligned} \quad (5-35)$$

$$\begin{aligned} z_c &= r(1 - \cos\omega t) \\ \dot{z}_c &= r\omega \sin\omega t \\ \ddot{z}_c &= r\omega^2 \cos\omega t \end{aligned} \quad (5-36)$$

Designando la masa del pistón más una parte de la biela (barra de conexión) como la masa recíproca vertical  $m_{rec}$  concentrada en el punto C de la figura 5.4, y la manivela más el resto de la biela como la masa rotatoria  $m_{rot}$  concentrada en D, se puede obtener las fuerzas desbalanceadas como:

Vertical

$$\begin{aligned} F_z &= m_{rec} \ddot{z}_p + m_{rot} \ddot{y}_c \\ F_z &= (m_{rec} + m_{rot}) r\omega^2 \cos\omega t + m_{rec} \frac{r^2 \omega^2}{L^2} \cos 2\omega t \end{aligned} \quad (5-37)$$

Horizontal

$$F_y = m_{rot} \ddot{y}_c = m_{rot} r\omega^2 \sin\omega t \quad (5-38)$$

de estas fuerzas tenemos en la ecuación (5-37) dos partes que consisten en:

Una fuerza primaria  $(m_{rec} + m_{rot})r\omega^2 \cos \omega t$

Una fuerza secundaria  $m_{rec} \frac{r^2 \omega^2}{L^2} \cos 2\omega t$

Estas son fuerzas verticales y tienen un valor máximo cuando  $\omega t = 2\omega t = 0$  y con múltiplos de  $\pi$  que igualen a la unidad el término del coseno con el mismo signo. Se puede notar que estas fuerzas son directamente proporcionales a la frecuencia.

Hay también una fuerza horizontal primaria dada en la ecuación (5-38) en la cual se puede observar que no se presenta una fuerza secundaria. Esta fuerza

es máxima cuando  $\omega t = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ , etc., y estará a una distancia  $y$  con respecto al centro de la interface base – suelo, debido a esto, la fuerza horizontal produce un momento de cabeceo con respecto al eje X (el cual es perpendicular al plano de la hoja y pasando a través del punto O de la figura 5.4).

En este caso la fuerza horizontal produce tanto un modo de deslizamiento y un modo de cabeceo, estos dos modos generalmente son independientes o acoplados. La mayoría de los motores y similares tienen más de un cilindro y los fabricantes intentan mantener las fuerzas desbalanceadas pequeñas (usando valores de  $r$  y masa pequeños y teniendo manivelas girando en

sentido contra las manecillas mientras que las otras están girando a favor). Si bien esto es posible para minimizar las fuerzas desbalanceadas y los momentos de cabeceo resultantes, estos no podrán ser eliminados completamente.

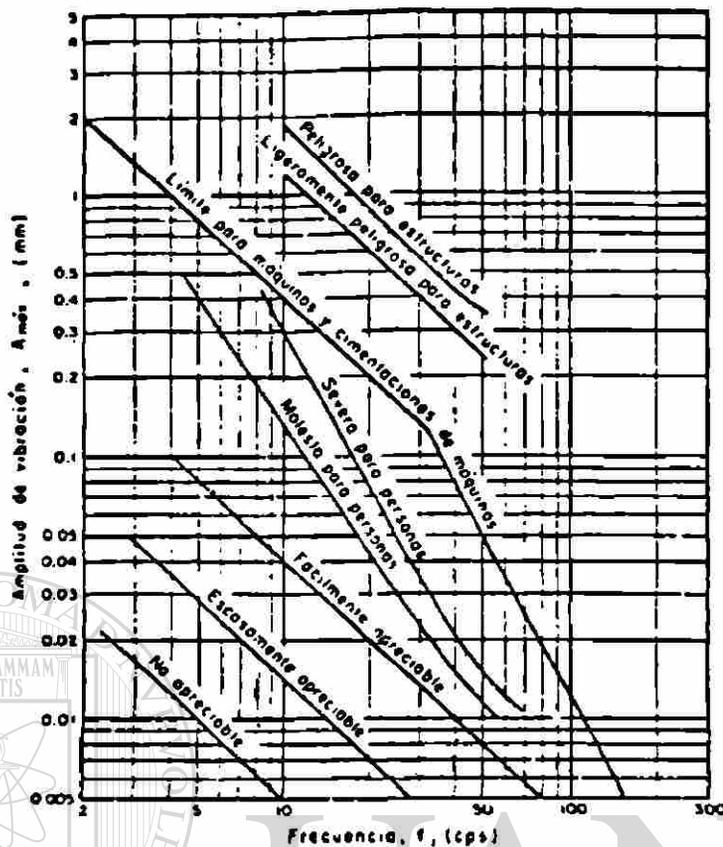
Los procedimientos computacionales pueden ser utilizados para obtener las fuerzas desbalanceadas pero este simple ejemplo ilustra que se trata de un trabajo formidable. Por esta razón, los fabricantes de maquinaria usan datos electrónicos generados por equipo especializado; como por ejemplo, los transductores de desplazamiento, y acelerómetros localizados en puntos estratégicos en la maquinaria, con el fin de medir los desplazamientos y aceleraciones de estos puntos para varias frecuencias de operación. Estos datos pueden usarse para respaldar el cálculo de las fuerzas tales que la masa total de la máquina sea fácilmente obtenida por su peso exclusivamente.

Usando estos métodos se obtienen directamente las fuerzas desbalanceadas sin tener que determinar las masas de las demás partes componentes.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

### **5.5 Amplitud de Vibraciones Permisibles**

Las amplitudes permisibles son generalmente especificadas por el fabricante del equipo. La amplitud permisible de una cimentación para maquinaria esta relacionada con la relativa importancia de la misma y la susceptibilidad a la vibración por parte de las estructuras cercanas.



**Fig. 1.2 Límites Permisibles para Amplitudes Debidas a Vibración Vertical**

Cuando los datos del fabricante no contienen las amplitudes permisibles, los valores mostrados en la Fig. 1.2 propuestas por Richart pueden ser adoptadas para diseños preliminares. La envolvente descrita por la línea de mayor longitud en la Fig. 1.2 indica solamente un límite para la seguridad y no un límite para la operación satisfactoria de la maquinaria. Información mas actualizada debe ser suministrada por el proveedor de la maquinaria. Barkan ha propuesto los valores mostrados en la tabla 1.1, de acuerdo con sus observaciones del funcionamiento de maquinaria.

**Tabla 1.1**

---

<u>Tipo</u>	<u>Amplitud Permisible (mm)</u>
1. - Maquinaria de baja velocidad (500 r.p.m.).....	0.02 a 0.025
2. - Cimentaciones para martillos.....	0.1 a 0.12
3. - Maquinaria de alta velocidad:	
a ) 3000 r.p.m.	
I Vibraciones verticales .....	0.002 a 0.003
II Vibraciones horizontales .....	0.004 a 0.005
b ) 1500 r.p.m.	
I Vibraciones verticales .....	0.004 a 0.006
II Vibraciones horizontales .....	0.007 a 0.009

---

Para cimentaciones de equipo sensible, tales como los bancos de pruebas de calibración y maquinaria de precisión, el criterio de diseño debe establecerlo el usuario o el fabricante del equipo. Para instalaciones en las cuales el equipo por si mismo no es causa de vibración, es necesario evaluar las vibraciones ambientales en el lugar y proveer adecuados aislamientos que mantengan a las amplitudes de movimiento del equipo, dentro de los límites aceptables.

## CAPITULO 6

### SISTEMAS DE AISLAMIENTO DE VIBRACION

#### 6.1 Transmisibilidad – Aislamiento Activos y Pasivos

Desde el punto de vista del aislamiento, dos tipos de problemas de vibración se encuentran en la práctica industrial:

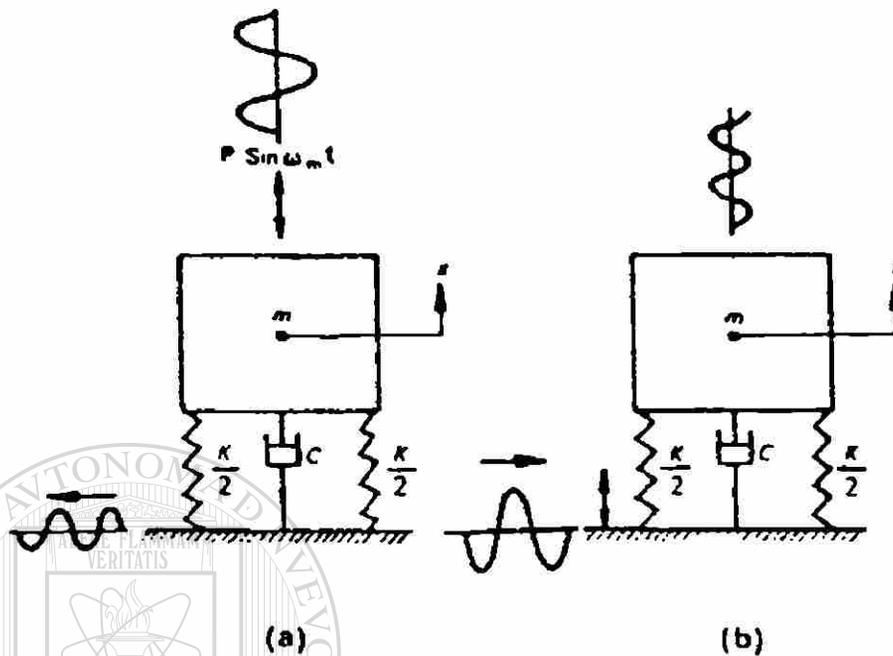
- a) El aislamiento activo
- b) El aislamiento pasivo

En el tipo activo, el aislamiento se requiere contra la vibración causada por la misma maquinaria. La cimentación para tal máquina deberá ser diseñada para reducir la transmisión de vibración, en los niveles permisibles preestablecidos.

En el aislamiento de vibración de tipo pasivo, la cimentación para una máquina delicada se diseña de tal forma que la amplitud de vibración proveniente del piso (causada por una fuente de disturbio en las inmediaciones) se reduzca hasta un límite aceptable. Estos dos casos se ilustran en la figura 6.1.

El término "transmisibilidad" se define en el caso de un aislamiento activo (fig. 6.1.a), como la relación entre la fuerza transmitida a la cimentación y la fuerza de vibración desarrollada por la maquinaria. En el caso de un aislamiento del

tipo pasivo (fig. 6.1.b), el término se define como la relación de la amplitud del instrumento sensitivo con la amplitud de la base.



**Fig. 6.1** Aislamiento de Vibración – (a) Tipo Activo, (b) Tipo Pasivo

De la teoría de vibraciones, se pueden derivar las siguientes expresiones comunes de transmisibilidad.

$$T = \sqrt{\frac{1 + 4\beta^2\zeta^2}{(1 - \beta^2)^2 + 4\beta^2\zeta^2}} \quad (6-1)$$

Donde  $\beta$  es la relación de frecuencia y  $\zeta$  es la relación de amortiguamiento.

La variación de la transmisibilidad con las relaciones de frecuencia y amortiguamiento se muestra en la figura 6.2. Si el grado de amortiguamiento es

tan pequeño, que pudiera ser despreciado, la expresión de transmisibilidad se puede simplificar:

$$T = \frac{1}{1 - \beta^2} = \frac{f_n^2}{f_m^2 - f_n^2} \quad (6-2)$$

Es obvio notar que con respecto a la relación con valores mayores de  $\beta$  la transmisibilidad será menor ( $\beta > \sqrt{2}$ ). Entonces, para un aislamiento efectivo, el valor de  $\beta$  debería ser lo más alto posible. Esto significa que la frecuencia natural del sistema aislado debe ser lo más bajo posible, en relación con la frecuencia de excitación.

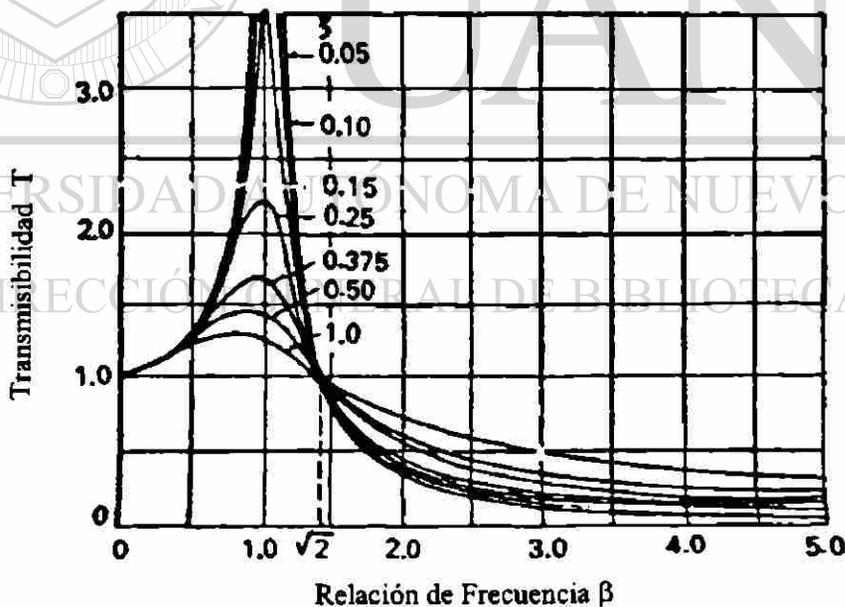
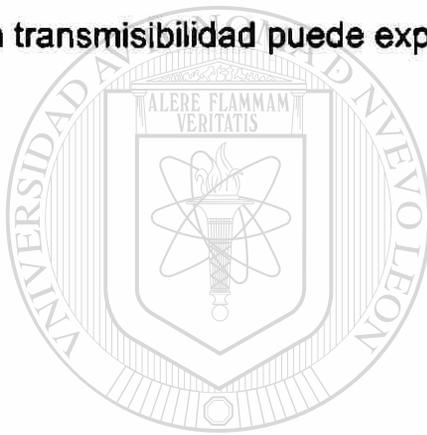


Fig. 6.2 Transmisibilidad ( T ) versus Relación de Frecuencia (  $\beta$  )

Como puede verse en la figura 6.2, para valores de  $\beta < \sqrt{2}$ , la transmisibilidad es mayor que la unidad, lo cual no es deseable. Por lo cual se recomienda que la relación de frecuencia sea mayor o al menos igual a  $\sqrt{2}$ , en todos los casos de aislamiento de vibración.

La figura 6.3 da la información necesaria para resolver los problemas de aislamiento; que se obtiene de la ecuación 6.2, reemplazando  $f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\delta}}$  donde  $\delta$  es la deflexión estática del sistema.

La transmisibilidad puede expresarse como:



$$T = \frac{1}{(2\pi f_m)^2 \frac{\delta}{g} - 1} \quad (6-3)$$

resolviendo para  $f_m$  se obtiene la siguiente ecuación:

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

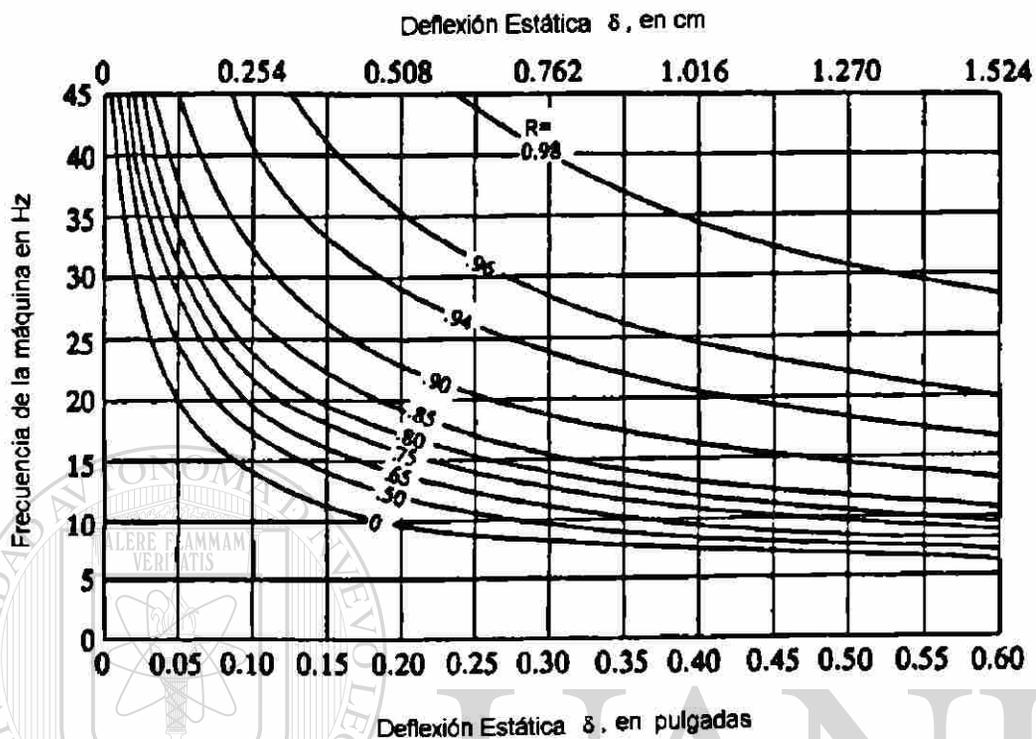
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$f_m = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\delta} \left( \frac{1}{T} + 1 \right)} \quad (6-4)$$

la cual también puede ser escrita como:

$$f_m = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\delta} \left( \frac{2-R}{1-R} \right)} \quad (6-5)$$

Donde  $R = (1 - T)$  y representa la reducción relativa de la vibración transmitida, y  $\delta$  esta dada en cm.



**Fig. 6.3** Eficiencia de Aislamiento

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

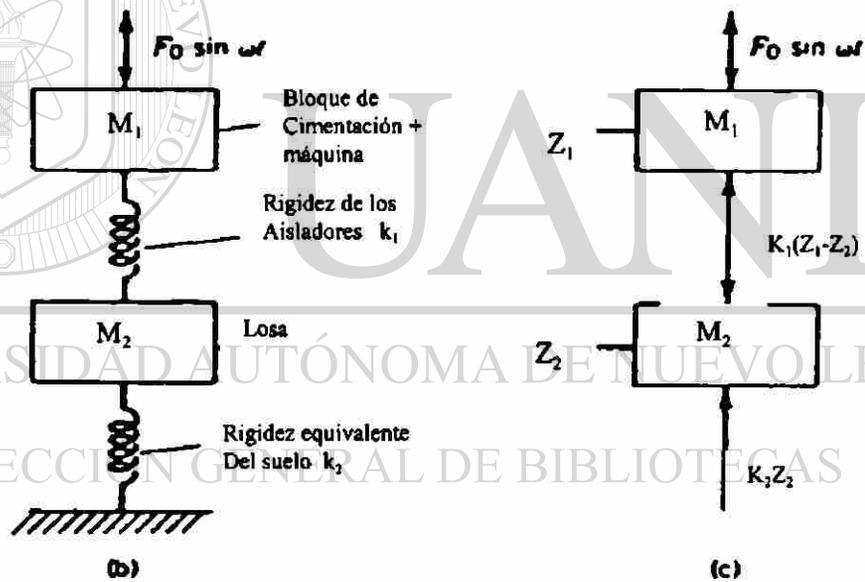
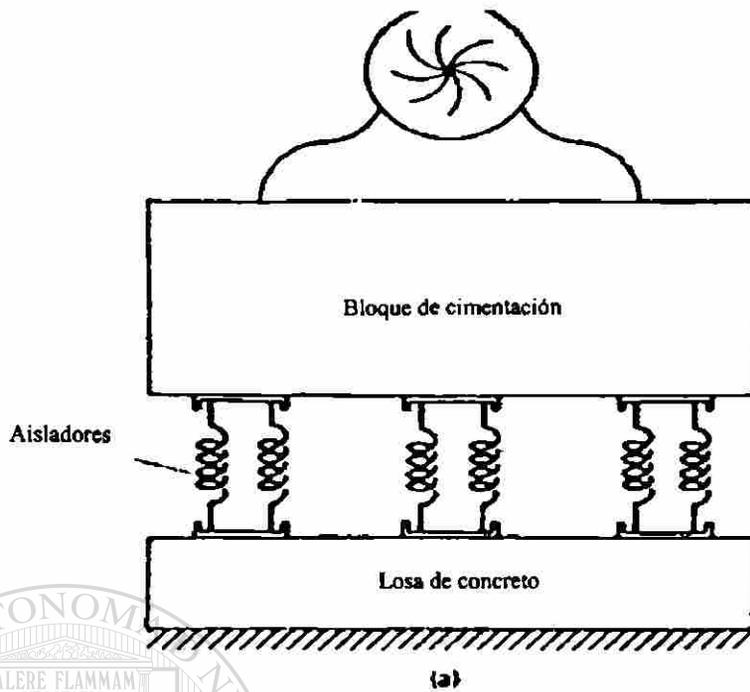
Lo discutido anteriormente ha sido limitado a los cuerpos con movimiento en una dirección solamente. En general, un cuerpo rígido, colocado en un resorte, tiene seis grados de libertad y, por lo tanto seis modos de vibración. El diseño deberá asegurar un adecuado aislamiento en todos los posibles modos de vibrar. La ecuación 6.1 se aplica para los modos de vibración traslatorios y rotatorios.

## 6.2 El Principio de la Absorción de Vibración

Una cimentación sobre resortes está usualmente constituida por dos partes: una losa inferior, en donde los resortes se colocan y un bloque de cimentación en la parte superior apoyada en los resortes. La maquinaria, a su vez, se ancla al bloque de cimentación. Para equipo ligero, la placa base de la máquina puede anclarse directamente a los resortes, siendo innecesario el bloque de cimentación.

Un dibujo esquemático de una cimentación para maquinaria sobre resortes se muestra en la figura 6.4.a, y el modelo usado comúnmente para el análisis de este sistema es el que se muestra en la figura 6.4.b. Cada masa rígida (1)  $m_2$  debido a la losa de concreto y (2)  $m_1$  para el bloque de cimentación + maquinaria, tendrán seis grados de libertad, por lo cual, el número total de grados de libertad del sistema entero es de doce. Los aisladores de vibración se usan generalmente para maquinaria con vibraciones verticales y con fuerzas desbalanceadas verticales. Como se mencionó anteriormente, las vibraciones verticales son independientes de los otros modos de vibrar; sin embargo, en algunas ocasiones es deseable tratar de aislar las vibraciones producidas por los otros modos, tal como se estudiará en el capítulo 7.

El problema de una cimentación de maquinaria sobre resortes puede ser entonces analizado considerando el sistema únicamente con dos grados de libertad (fig. 6.4.c).



**Fig. 6.4** Diagrama Esquemático de una Cimentación sobre Aisladores

Asumiendo que las masas del sistema son concentradas en sus centros de gravedad y alineadas verticalmente, la ecuación diferencial de movimiento se escribe de la siguiente manera:

$$m_1 z_1 + k_1(z_1 - z_2) = F_0 \text{ sen } \omega t \quad (6-6)$$

$$m_2 z_2 + k_2 z_2 + k_1(z_2 - z_1) = 0 \quad (6-7)$$

donde

$F_0 \text{ sen } \omega t$  = Fuerza excitadora

$\omega$  = Frecuencia de operación de la maquinaria rad/sec.

$z_1, z_2$  = Desplazamientos verticales de los centros de gravedad de las masas  $m_1$  y  $m_2$  respectivamente.

$k_2$  = Rigidez vertical equivalente del suelo bajo la base y es dado por:

$$k_z = k_2 = \frac{4Gr_0}{1-\nu} \quad (6-8)$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

y  $k_1$  es la rigidez total equivalente de todos los resortes del sistema aislador. La

ecuación de la frecuencia del sistema es:

$$\omega_n^4 - (\omega_{n1}^2 + \omega_{n2}^2)(1 + \mu)\omega_n^2 + (1 + \mu)\omega_{n1}^2\omega_{n2}^2 = 0 \quad (6-9)$$

en donde  $\omega_{n1,2}$  son las frecuencias naturales del sistema, y la relación de masa

es:

$$\mu = \frac{m_1}{m_2} \quad (6-10)$$

$\omega_{n2}$  es la frecuencia natural límite del sistema completo apoyado en el suelo (cuando los aisladores no son utilizados) y es dada por:

$$\omega_{n/2} = \sqrt{\frac{k_2}{m_1 + m_2}} \quad (6-11)$$

y  $\omega_{n1}$  es la frecuencia natural límite de la masa  $m_1$  apoyada en los resortes y calculado con aseveración de que el sistema bajo los resortes tiene una gran rigidez.  $\omega_{n1}$  es dada por:

$$\omega_{n/1} = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} \quad (6-12)$$

Las amplitudes máximas  $Z_1$  y  $Z_2$  son dadas por

$$Z_1 = \frac{(1 + \mu)\omega_{n2}^2 + \mu\omega_{n1}^2 - \omega^2}{m_1\Delta(\omega^2)} F_0 \quad (6-13)$$

$$Z_2 = \frac{\omega_{n1}^2}{m_2 \Delta(\omega^2)} F_0 \quad (6-14)$$

en donde:

$$\Delta(\omega^2) = [\omega^4 - (1 + \mu)(\omega_{n1}^2 + \omega_{n2}^2)\omega^2 + (1 + \mu)\omega_{n1}^2\omega_{n2}^2] \quad (6-15)$$

y  $\omega$  es la frecuencia de operación.

La fuerza excitadora desbalanceada debido a la maquinaria es proporcional al cuadrado de la frecuencia de operación de la máquina y, por consiguiente,  $F_0$  puede ser expresado como:

$$F_0 = S\omega^2 \quad (6-16)$$

En donde  $S$  es una constante que depende de las características de la máquina como por ejemplo la masa desbalanceada y la excentricidad.

Sustituyendo las expresiones para  $F_0$  y  $\Delta(\omega^2)$  en la ecuación ( 6-13 ) y dividiendo el numerador y el denominador por  $\omega^4$ , tenemos

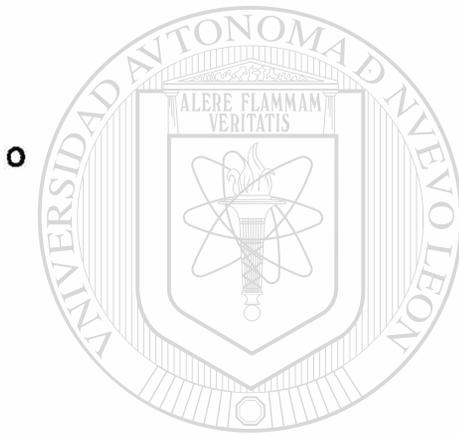
$$Z_2 = \frac{S}{m_2} \left[ \frac{r_1^2}{1 - (1 + \mu)(r_1^2 + r_2^2 - r_1^2 r_2^2)} \right] \quad (6-17)$$

en el cual:

$$r_1 = \frac{\omega_{n1}}{\omega} \quad r_2 = \frac{\omega_{n2}}{\omega} \quad (6-18)$$

En caso de no usar aisladores, la amplitud de la vibración de la cimentación apoyada en el suelo es dada por:

$$Z = \frac{F_0}{(m_1 + m_2)(\omega_{n/2}^2 - \omega^2)} \quad (6-19)$$



$$Z = \frac{S}{m_2(1 + \mu)(r_2^2 - 1)} \quad (6-20)$$

Puede verse en la ecuación ( 6-17 ), que la amplitud con aisladores será más pequeña si la relación  $r_1$  es pequeña. Cuando  $r_1$  es despreciable, la amplitud de vibración  $Z_2$  es casi cero y la eficiencia del aislador es alta. La efectividad del aislamiento es máxima cuando  $r_1 = 0$  , para valores grandes de  $r_1$  ( $r_1 \rightarrow \infty$ ), el valor de  $Z_2$  se aproxima al valor de  $Z$  para el caso sin aislamiento.

De la anterior discusión, se puede concluir que los aisladores tienen un efecto favorable en las amplitudes de vibración en cimentaciones, cuando la frecuencia natural de la masa sobre los aisladores es lo más pequeña posible en comparación con la frecuencia de operación de la maquinaria. La frecuencia

natural requerida de la cimentación sobre los aisladores puede ser obtenida usando aisladores de rigidez apropiada y una adecuada selección de la masa sobre los aisladores.

Para maquinarias que operan a altas velocidades, la condición requerida entre  $\omega_{n1}$  y  $\omega$  es fácilmente satisfecha sin un incremento significativo en el peso de la cimentación sobre los aisladores. Para maquinarias operando a baja frecuencia, las relaciones son usualmente difíciles de satisfacer ya que se necesita un decremento en la rigidez del aislador pero este decremento no debe sobrepasar los límites requeridos por resistencia. En tal caso, se necesitaría una cimentación masiva sobre los aisladores.

Para tales fines se vuelve crítico la selección adecuada del tipo de los aisladores, el sistema del aislamiento puede ser diseñado basado en el valor de  $r_1$ , que depende del grado de absorción requerido  $\eta$  definido por:

$$\eta = \frac{Z}{Z_2} = \frac{[1 - (1 + \mu)(r_1^2 + r_2^2 - r_1^2 r_2^2)]}{r_1^2 [(1 + \mu)(r_2^2 - 1)]} \quad (6-21)^{\text{R}}$$

El principio de la absorción de la vibración explicada anteriormente será usado para desarrollar un procedimiento de diseño para cimentaciones con aisladores. Antes de esto se describen los diferentes tipos de aisladores comúnmente utilizados.

### **6.3 Métodos Generales de Sistemas de Aislamiento**

Fue una creencia general que un pesado bloque de cimentación daría un adecuado aislamiento contra las vibraciones producidas por la operación de una maquinaria colocada sobre el bloque.

Este concepto tuvo vigencia mientras se utilizaban fórmulas aproximadas para obtener el peso del bloque de cimentación con relación a la capacidad o peso de la maquinaria. Posteriormente, fue creyéndose adecuado el colocar la maquinaria sobre un bloque de cimentación puesto dentro de un cajón de concreto reforzado, forrado con material aislante. Esto se realiza para proveer un efectivo aislamiento.

A continuación, se mencionan algunos métodos generales para tratar de aislar la transmisión de vibraciones.

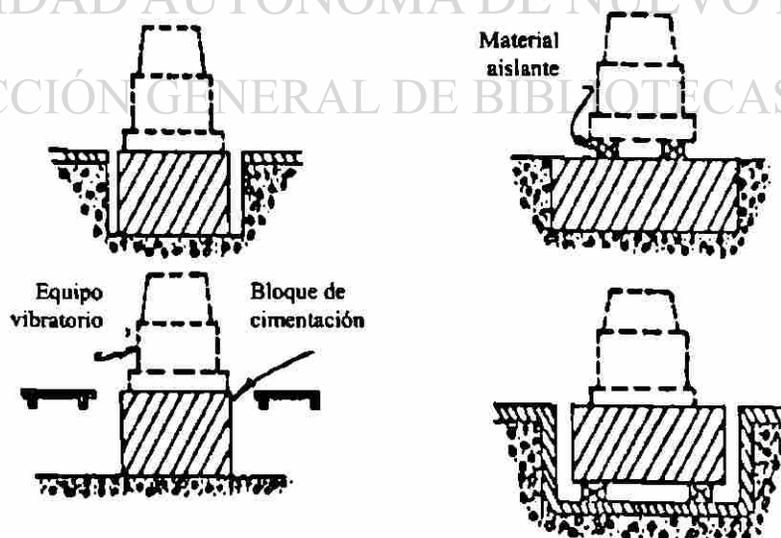
a) La separación física de la unidad vibratoria y la cimentación.- La maquinaria

---

es instalada sobre el bloque de concreto, el cual no se encuentra en contacto con el suelo circundante. Es un método simple y barato para aislamiento de vibración de la maquinaria; pero es el menos efectivo, frecuentemente usado para máquinas de herramientas o equipos similares, donde la vibración transmitida es tolerable.

b) La unidad vibratoria se monta sobre el bloque base y éste es soportado por un material aislador.- Los aisladores pueden ser resortes de metal, hule o goma, corcho, bloques de fieltro o algunos otros materiales resistentes. Los aisladores pueden ser colocados directamente, bajo la maquinaria o bajo el

bloque base que provee una adicional masa. En algunos casos, los aisladores son colocados por debajo de la maquinaria y sobre el bloque base. En otros casos, la maquinaria se coloca sobre el bloque y éste se mantiene suspendido como un péndulo, soportado por los aisladores de vibración. De cualquier modo, el aislador debe ser apropiadamente diseñado, con base en la teoría de transmisibilidad explicada anteriormente. Un sistema comparativamente reciente de aislamiento de vibración es el de resortes neumáticos, tal como se utiliza en la suspensión de los vehículos. Estos aisladores son utilizados para una variedad de maquinarias que originan vibración. Los aisladores de goma o hule son frecuentemente empleados para los compresores y los martillos pesados, mientras que las prensas pueden ser colocadas en excavaciones forradas con material aislador o soportadas por resortes. Los instrumentos muy sensibles generalmente son colocados en materiales aisladores.

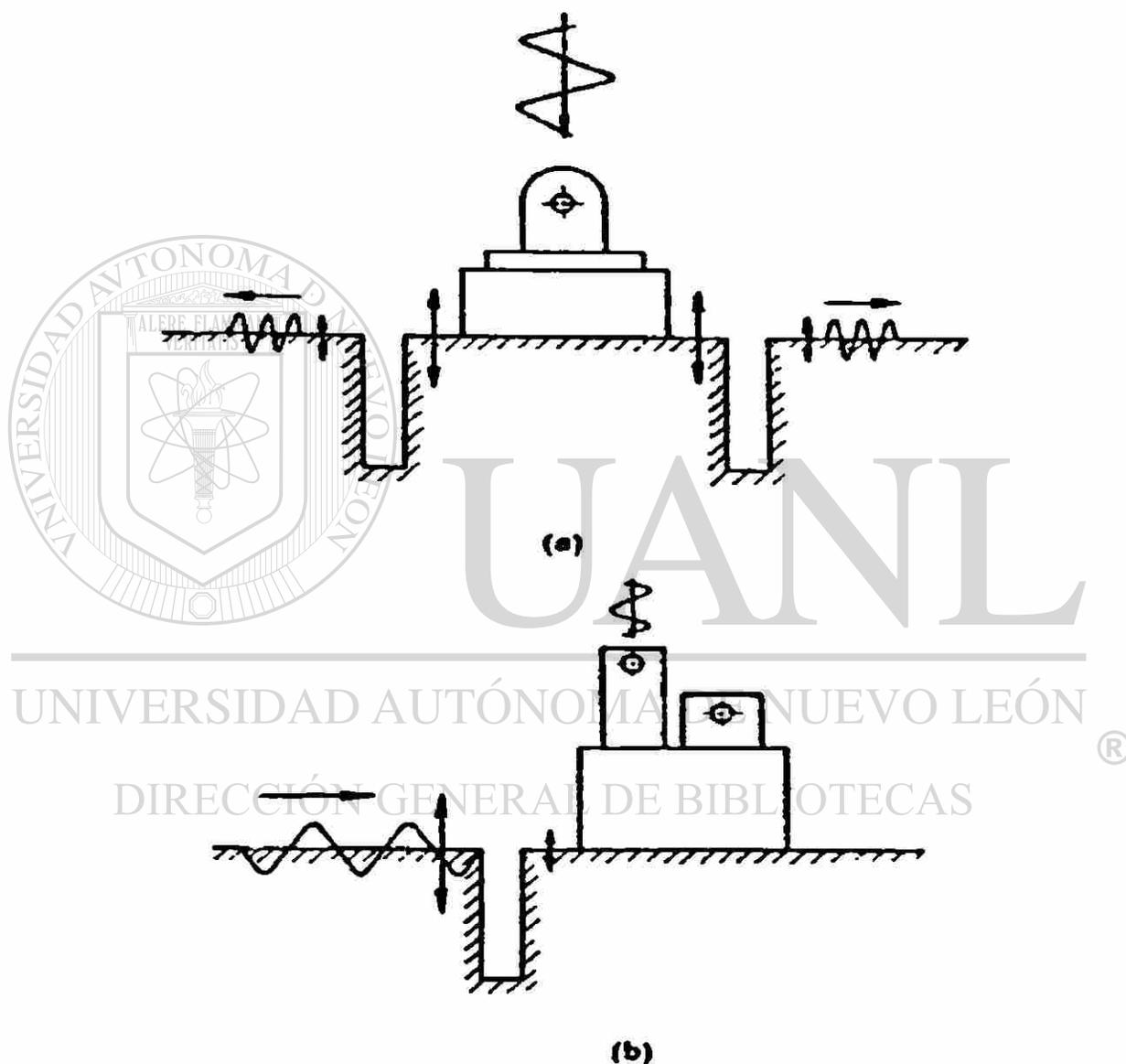


**Fig. 6.5** Métodos de Aislamientos

Adicionalmente, se mencionarán algunos métodos que se basan en interrumpir por medio de barreras la transmisión de vibraciones.

c) Aislamiento mediante barreras por zanjas.- Se ha dicho que la presencia de una zanja en la trayectoria de las ondas reduce el avance de las transmisiones de vibración. ( Fig. 6.6 ). La experiencia ha mostrado que las zanjas no son del todo adecuadas para la generalidad de las aplicaciones y, en casos dados, podrían ser menos efectivas; particularmente para el aislamiento de vibraciones de baja frecuencia. De acuerdo con Barkan, para un aislamiento efectivo, la profundidad de la zanja deberá ser al menos una tercera parte de la longitud de onda de la vibración. De tal manera, si la velocidad de vibración en un suelo particular es 200 m/seg. y la frecuencia de vibración es de 10 r.p.m., la longitud de onda sería de 20 m y la zanja debería al menos tener 7 m de profundidad. Las zanjas rellenas con lechada bentonítica se ha reportado que muestran mejores características de aislamiento. Por otra parte, cuando las vibraciones son ocasionadas por una fuente que opera a muy baja frecuencia, la longitud de onda de Rayleigh sería muy grande, alrededor de 50 m o más. Para que la zanja fuera efectiva debería tener una profundidad de aproximadamente 20 m, esto limita su aplicación ya que rellenar la zanja con lechada bentonítica resultaría impráctico y costoso. En estos casos, el uso de barreras mediante pilas resulta adecuado ya que estas pueden ser instaladas a cualquier profundidad. Esta alternativa usando hileras de pilas como aislamiento

pasivo ha sido investigado por Woods. (1974), usando el principio de la holografía y observando las vibraciones de un modelo en el semi-espacio para evaluar el efecto que originan los obstáculos mediante cilindros huecos en la reducción de las amplitudes de vibración.



**Fig. 6.6** Aislamiento de Vibración por Zanjas – ( a ) Activo, ( b ) Pasivo

## 6.4 Características de los Aisladores de Vibración más Comunes

Aquellos materiales que estando bajo una deformación elástica pueden ser utilizados como aisladores de vibración.

Los que generalmente se utilizan en la mayoría de los casos se enlistan a continuación:

- a. Corcho
- b. Fieltro
- c. Hule o Goma
- d. Resortes metálicos

- e. Madera
- f. Aisladores neumáticos

a) Corcho.- El corcho es un efectivo medio de aislamiento contra la vibración, es de baja densidad, alta compresibilidad e impermeabilidad. Se usan generalmente en forma de placas hechas con partículas de corcho prensado, bajo altas presiones y subsecuentemente cocidas a vapor. Las placas de corcho son colocadas directamente bajo la base de la maquinaria o bajo la cimentación de concreto. La rigidez del corcho es relativamente grande y el área del corcho requerido en muchos de los casos es pequeña. Consecuentemente, el corcho es colocado espaciando las placas bajo la base. El corcho tiene un relativamente pequeño valor de rigidez y está disponible solamente en forma de placa capaz de soportar únicamente cargas de compresión. El corcho tiene una densidad que varía de 2 a 4

g/cm<sup>3</sup>. La carga máxima recomendada es equivalente a la presión de 2 kg/cm<sup>2</sup> para una densidad baja y de 4 kg/cm<sup>2</sup> para una alta densidad. Las frecuencias naturales de varias densidades de corcho están en función de la intensidad de la carga, estas deberán ser proporcionadas por el fabricante para los diferentes espesores de corcho. El decremento logarítmico  $\Delta$  del corcho en compresión es aproximadamente 0.4, y este corresponde a una relación de amortiguamiento ( $\zeta$ ) de 6 %. Las placas de corcho necesitan ser confinadas por un marco de acero para prevenir expansiones laterales. Las propiedades resistentes del corcho se deterioran cuando están en contacto con el agua o con aceite, por tal motivo, se recomienda que las placas de corcho sean tratadas con un preservador antes de ser utilizadas.

b) Fieltro.- El fieltro es un tejido compuesto por un entrelazado de fibras mediante algunos procesos mecánicos o de acción química. Puede consistir de lana u otras fibras sintéticas. El fieltro es usado en forma de pequeños cojinetes cortados con el área requerida y colocados bajo la maquinaria, está generalmente pegado a la base de la máquina y a su soporte. Las frecuencias naturales están en función de la intensidad de la carga para varias densidades del fieltro y son usualmente proporcionadas por el fabricante. La curva fuerza-deflexión de un cojinete de fieltro en compresión es lineal hasta una deflexión no mayor del 25 % de su espesor, pero después de eso la rigidez se incrementa rápidamente. El esfuerzo de compresión del fieltro es aproximadamente 80 kg/cm<sup>2</sup> y su módulo elástico

es alrededor de 800 kg/cm<sup>2</sup>. El fieltro pierde generalmente sus propiedades elásticas cuando es usado durante largos periodos de tiempo, en condiciones alternadas de humedad y secado.

c) Hule o Goma.- Los resortes de hule tienen la ventaja del endurecimiento por compresión así como también por cortante. Las características del hule en compresión dependen de la relación del área que soporta la carga y el área expandida lateralmente. Esta relación se define como la " relación de área " ( $A_r$ ). Para un bloque rectangular de dimensiones  $l, b, h$  se plantea la siguiente ecuación:

$$A_r = \frac{lb}{2h(l+b)} \quad (6-22)$$

Los cojinetes cuyas relaciones de áreas son iguales se flambean el mismo porcentaje de sus espesores cuando soportan cargas y causan la misma intensidad de presión. El hule puede ser flambeado bajo una fuerza de compresión solamente si es permitido que se expanda lateralmente, a diferencia del corcho, por lo tanto, el hule no requiere ser confinado en sus lados. La máxima deformación ( $\delta$ ) con relación a la altura del bloque de hule ( $h$ ) puede ser tomada como 0.2 en compresión y 0.4 en cortante. Los esfuerzos admisibles son alrededor de 8 kg/cm<sup>2</sup> en compresión y 3 kg/cm<sup>2</sup> a cortante para un hule que tiene una inclinación de la dureza de 40°. Estos valores se incrementan con el incremento en la dureza alrededor del 16

kg/cm<sup>2</sup> en compresión, y 5 kg/cm<sup>2</sup> en cortante correspondiendo a una inclinación de la dureza de 70°. La tabla 6.1 contiene las propiedades del aislador de hule o goma, una propiedad conocida como " inclinación de dureza " especifica la calidad del hule y sus características de diseño. La rigidez a corte (  $K_s$  ) de un bloque de hule de un espesor  $h$  y un área de la sección transversal  $A$  se pueden determinar del módulo de corte  $G$  usado en la siguiente ecuación.

$$K_s = \frac{GA}{h} \quad (6-23)$$

La anterior fórmula asume que la relación de altura a ancho es suficientemente pequeña como para ignorar la deformación debido a la flexión.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

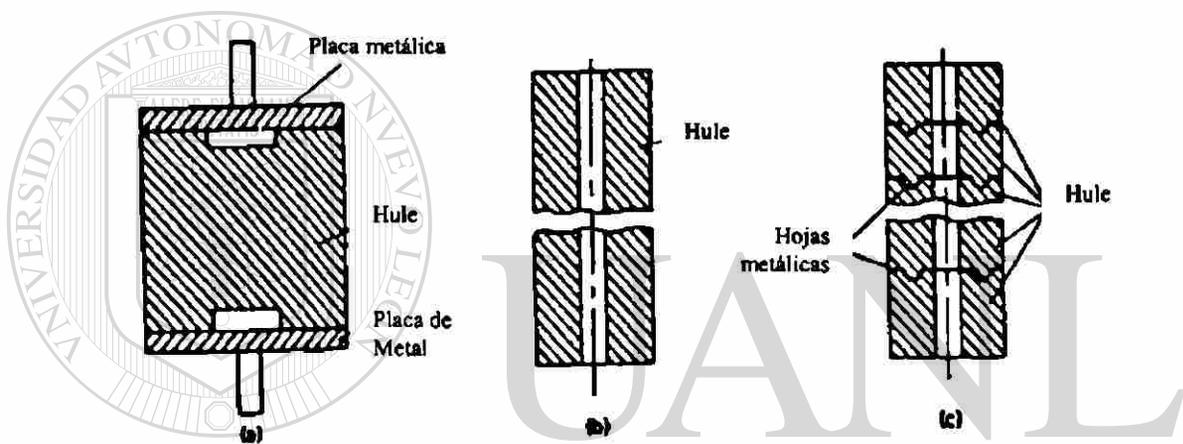
**Tabla 6.1**  
Propiedades Naturales de los Aisladores de Hule o Goma

Inclinación de Dureza ( S )°	Módulo de Corte ( G ) kg/cm <sup>2</sup>	Módulo de Young ( E ) kg/cm <sup>2</sup>	Módulo de Volúmen ( B ) kg/cm <sup>2</sup>	$\alpha$
40.00	4.59	15.29	10193.68	0.85
45.00	5.50	18.35	10193.68	0.80
50.00	6.52	22.43	10499.49	0.73
55.00	8.26	33.13	11111.11	0.64
60.00	10.81	45.36	11722.73	0.57
65.00	13.97	59.63	12334.35	0.54
70.00	17.64	74.92	12945.97	0.53

La rigidez de un cojinete de hule ó goma en compresión (  $K_c$  ) es dada por:

$$\frac{1}{K_c} = \frac{h}{A} \left[ \frac{1}{E(1 + 2\alpha A_r^2)} + \frac{1}{B} \right] \quad (6-24)$$

Donde  $E, B$  y  $\alpha$  están dados en la tabla 6.1 y los otros términos son definidos fácilmente.



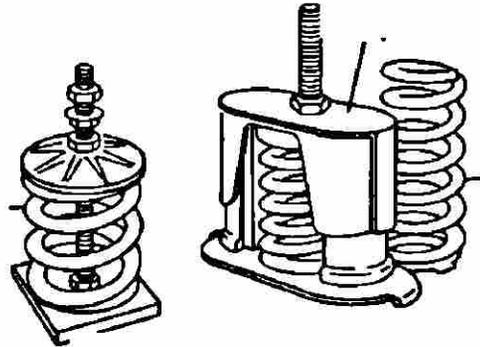
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



**Fig. 6.7** Cojinetes de Hule Ligadas: ( a ) Resorte de Hule Ligado entre dos Placas Metálicas; ( b ) Resorte de Hule en Forma de Cilindro Hueco; ( c ) Resorte de Hule en Forma de Cilindro Hueco Ligado con Placas Machimbradas de Acero.

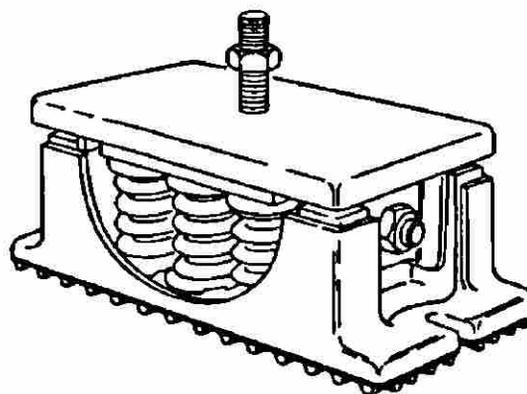
d) Resortes Metálicos.- Los resortes helicoidales hechos de acero son los más efectivos soportes elásticos para reducir las amplitudes de vibración en una cimentación de maquinaria. En la figura 6.8 se muestra un resorte metálico sencillo, este tipo de aislador es adecuado solamente para maquinaria con muy baja capacidad.

Para máquinas de media a alta capacidad, son usadas unidades de aislamiento con varios resortes, ver figura 6.9.



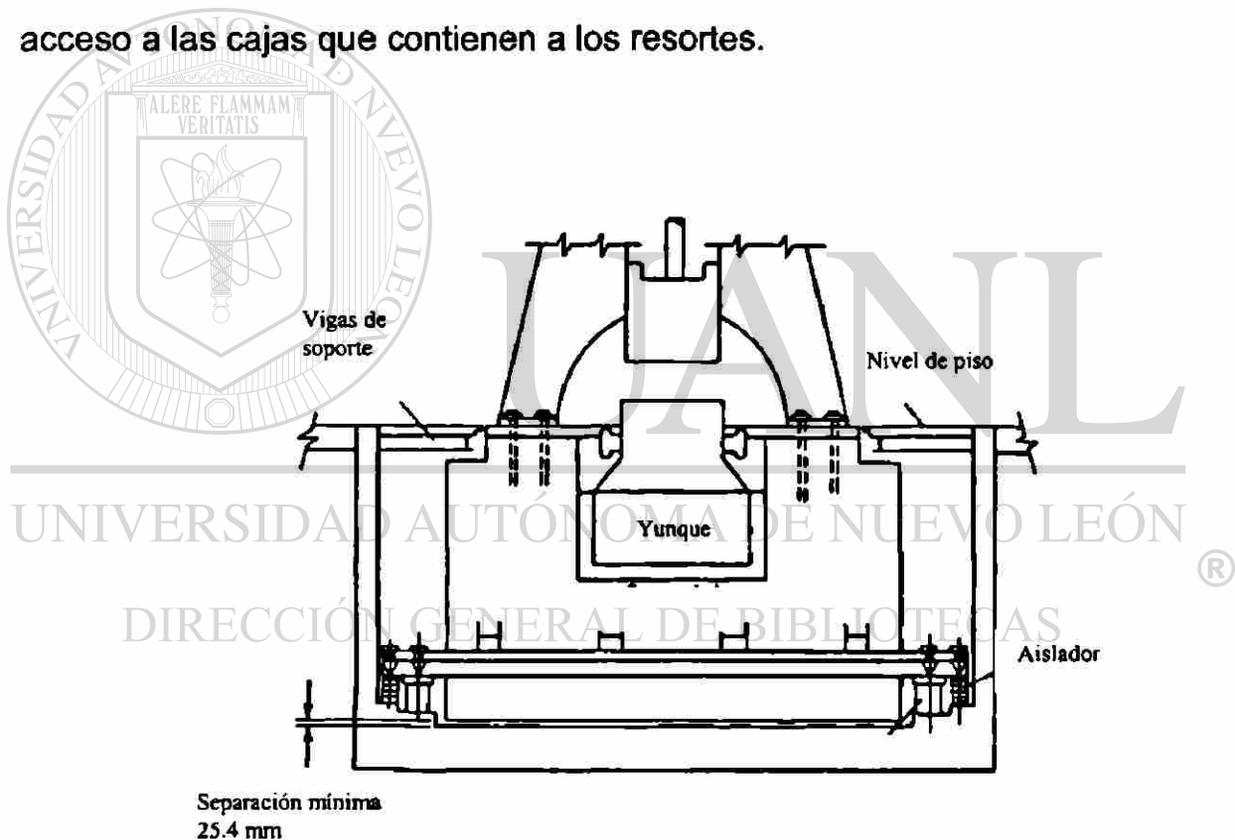
**Fig. 6.8** Aisladores Metálicos con un solo Resorte

Para soportar la cimentación de la maquinaria es posibles hacer dos tipo de arreglos para colocar los aisladores de resorte. Está el tipo sostenido (fig. 6.4.a) y el tipo suspendido (fig. 6.10). En el arreglo tipo sostenido, los resortes son colocados directamente bajo la maquinaria o la cimentación, en el sistema de aislador tipo suspendido, los resortes son colocados justo en el nivel del piso, y la maquinaria principal es suspendida por los resortes. Un típico aislador suspendido es mostrado en la figura 6.10.



**Fig. 6.9** Aislador Ensamblado con Múltiples Resortes

La selección de cualquier arreglo depende del balance de la maquinaria y de la velocidad de operación. Para máquinas de alta velocidad que están relativamente bien balanceadas, se utiliza un arreglo tipo sostenido en los casos que no es necesaria una cimentación pesada sobre resortes. Para maquinaria de baja frecuencia, donde llega a ser necesario una masa pesada sobre los resortes se adopta generalmente un arreglo de los aisladores del tipo suspendido. El arreglo tipo suspendido permite un fácil acceso a las cajas que contienen a los resortes.



**Fig. 6.10** Típica Cimentación para un Martillo con Sistema de Aislamiento del Tipo Suspendido

El análisis de un sistema de cimentación con aisladores, independientemente si es un tipo sostenido o suspendido, puede ser hecho tratándolo como un sistema de dos grados de libertad, como se describió en la sección 6.2. Los aisladores con base en resortes metálicos se manejan en el comercio de varios tamaños y capacidades, la información de las características de carga – deformación son proporcionadas por el fabricante. Los resortes de acero son afectados por las condiciones ambientales y deben de ser protegidos contra la corrosión.

e) Madera.- Las placas de madera son usadas comúnmente bajo los yunques de las cimentaciones para martillos. Se colocan una o varias capas de vigas de madera dura (como el roble, el pino o el encino). Las vigas de madera son colocadas de tal manera que la dirección de la carga a compresión es perpendicular a la fibra. La rigidez de una placa de madera a compresión se obtiene con la siguiente ecuación:

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$K_2 = \frac{E}{b} A_2 \quad (6-25)$$

donde

$K_2$  = Rigidez del Resorte de la placa de madera bajo el yunque

$E$  = Módulo de Young de la madera

$b$  = Espesor de la placa

$A_2$  = Area de la base del yunque en contacto con la placa

f) **Aisladores neumáticos.**- Un aislador neumático utiliza gas o aire a presión para absorber las vibraciones, la rigidez de este tipo de aisladores se obtiene de las leyes aplicables a los gases. Los resortes neumáticos pueden ser de acción simple o de doble acción y generalmente proveen un buen amortiguamiento. En el comercio se encuentran resortes neumáticos que tienen diferentes formas y capacidades, las características específicas de estos aisladores deben ser proporcionados por el fabricante y se deben investigar antes de planear el uso de este sistema. Cuando las cargas son altas y la frecuencia natural requerida del aislador debe ser baja, la deformación bajo carga estática para los tipos usuales (resortes o cojinetes) de aisladores podría ser grande. Sin embargo, en los aisladores neumáticos la deformación ocasionada por la carga estática puede ser controlada ajustando la presión del aire o gas manteniendo la rigidez necesaria.

### **6.5 Procedimiento de Diseño para Cimentaciones con Aisladores**

Se describe a continuación el procedimiento de diseño para una cimentación sobre aisladores, y soporta una máquina reciprocante que tiene componentes de las fuerzas desbalanceadas en la dirección vertical.

1. **Datos de diseño.**- Se deben obtener todos los datos de diseño respecto a la maquinaria y al suelo, así como también las amplitudes permisibles.

2. Primer tanteo.- Hacer un diseño tentativo de la cimentación sin considerar aisladores, siguiendo el procedimiento de la sección 5.3 y satisfaciendo las amplitudes permisibles. El tamaño de la cimentación resultante puede ser demasiado grande para el tamaño de la maquinaria o bien para el espacio disponible.
3. Segundo tanteo.- Dependiendo de los requerimientos mínimos del tamaño de cimentación para la maquinaria y del espacio disponible, seleccionar el área de la cimentación en contacto con el suelo y la porción del peso de la cimentación bajo los aisladores  $W_2$  (figura 6.4.a).
4. Determinar la rigidez del resorte equivalente del suelo  $k_2$  bajo la base.

$$k_2 = k_2 = C_u A \quad (6-26)$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
 DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$k_2 = \frac{4Gr_0}{(1-\nu)} \quad (6-27)$$

en donde

$C_u$  = Coeficiente de compresión uniforme elástica

$A$  = área de la base de la cimentación

$G$  = Módulo de cortante del suelo

$r_0$  = Radio equivalente del área de contacto de la cimentación

$\nu$  = Relación de Poisson

5. Determinar la frecuencia natural límite del sistema completo apoyado en el suelo,  $\omega_{n/2}$

$$\omega_{n/2} = \sqrt{\frac{k_2}{m_1 + m_2}} \quad (6-28)$$

En donde  $m_1 = W_1/g$  y  $m_2 = W_2/g$ . La relación de masas  $\mu$  se calcula como:

$$\mu = \frac{m_1}{m_2} \quad (6-29)$$

6. Determinar la relación de frecuencias  $r_2$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$r_2 = \frac{\omega_{n/2}}{\omega} \quad (6-30)$$

Donde  $\omega$  es la velocidad de operación de la maquinaria.

7. Calcular la amplitud  $Z$  para el sistema apoyado sobre el suelo (sin aisladores).

$$Z = \frac{F_0}{(m_1 + m_2)(\omega_{n/2}^2 - \omega^2)} \quad (6-31)$$

En donde  $F_0$  es la fuerza vertical desbalanceada.

### 8. Calculo del grado de absorción $\eta$

$$\eta = \frac{Z}{Z_2} = \frac{[1 - (1 + \mu)(r_1^2 + r_2^2 - r_1^2 r_2^2)]}{r_1^2 [(1 + \mu)(r_2^2 - 1)]} \quad (6-32)$$

$Z_2$  es la amplitud de la cimentación con aisladores o la amplitud permisible de vibración en la cimentación.

### 9. Determinar la relación de frecuencia $r_1$ despejando la ecuación (6-32)

$$r_1 = \frac{\omega_{n/1}}{\omega} \quad (6-33)$$

en donde  $\omega_{n/1}$  es la frecuencia natural límite de la cimentación sobre los aisladores y se calcula como:

$$\omega_{n/1} = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} \quad (6-34)$$

10. Determinar  $\omega_{n1}^2$

$$r_1^2 = \frac{\omega_{n1}^2}{\omega^2} \quad (6-35)$$

o

$$\omega_{n1}^2 = r_1^2 \omega^2 \quad (6-36)$$

11. Determinar la rigidez total vertical del aislador  $k_1$

$$k_1 = m_1 \omega_{n1}^2 \quad (6-37)$$

12. Seleccionar el tipo de aislador.- Se selecciona un aislador que tenga una rigidez total igual a  $k_1$ , esto puede ser realizado fácilmente de la información dada por el fabricante particularmente de los catálogos donde se especifiquen las características carga vs deformación de los aisladores comerciales.

13. Encontrar la amplitud de vibración  $Z_1$  del sistema sobre los aisladores.

$$Z_1 = \frac{(1 + \mu)\omega_{n/2}^2 + \mu\omega_{n/1}^2 - \omega^2}{m_1 \Delta(\omega^2)} F_0 \quad (6-38)$$

siendo

$$\Delta(\omega^2) = \omega^4 - (1 + \mu)(\omega_{n/1}^2 + \omega_{n/2}^2)\omega^2 + (1 + \mu)\omega_{n/1}^2\omega_{n/2}^2 \quad (6-39)$$

14. Carga efectiva por resorte  $P_a$

$$P_a = k_1 Z_1 \quad (6-40)$$

15. Revisar la seguridad del resorte, de tal manera que los esfuerzos en el resorte cumplan con  $P_a < P$  admisible.

### 6.6 Reducción de Amplitudes de Vibración en Cimentaciones de Maquinaria Existentes

Algunas veces pueden desarrollarse vibraciones excesivas en la cimentación después de la instalación de la maquinaria o bien, debido a un incremento en las fuerzas desbalanceadas por el desgaste natural de la máquina, a cambios en las condiciones del suelo, o bien un diseño inadecuado o una construcción defectuosa.

Para reducir en lo posible estas vibraciones se recomienda utilizar algunos de los siguientes métodos, no sin antes enfatizar que es necesario establecer primero la causa de las vibraciones excesivas para poder realizar una

adecuada selección del método a utilizar. Un método inapropiado podría empeorar la situación en lugar de mejorarla. Los métodos utilizados para reducir las vibraciones en cimentaciones de maquinaria ya existentes son:

1. Equilibrar las fuerzas desbalanceadas.
2. Estabilización química del suelo.
3. Medidas estructurales.
4. Proveer amortiguadores de vibración.

1. Equilibrar las fuerzas desbalanceadas debido a la operación de la maquinaria.- El contrabalanceo de las fuerzas de excitación de la maquinaria originará que estas sean pequeñas, de tal manera que las amplitudes de vibración se reduzcan. Las fuerzas desbalanceadas de una máquina rotatoria tal como una banda centrifuga, turbogeneradores y turbinas están dadas por:

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS (6-41)

$$F_0 = me\omega^2 \sin \omega t$$

en donde:

$F_0$  = Fuerza desbalanceada

$m$  = Masa del rotor

$e$  = excentricidad de la masa

$\omega$  = Velocidad de operación de la maquinaria

La reducción de  $F_0$  se puede conseguir agregando masa adicional en el rotor de tal manera que la excentricidad efectiva de la masa rotatoria decrece. El desbalanceo de los rotores de máquinas rotatorias de alta velocidad es revisado como una parte normal del mantenimiento de la operación. Las fuerzas primarias en las máquinas reciprocantes pueden ser balanceadas por medio de dos maneras de contrapeso:

- a) La componente de la fuerza en la dirección perpendicular al movimiento del pistón puede ser completamente balanceada y la componente a lo largo de la dirección del movimiento es solamente balanceada en forma parcial.
- b) Es posible también el contrabalancear completamente la fuerza de excitación en la dirección del movimiento del pistón, usando contrapeso a distancias apropiadas de los ejes de rotación. De esta manera la componente de la fuerza desbalanceada en la dirección perpendicular del movimiento del pistón se incrementará.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

El uso de alguno de los procedimientos anteriores y su eficiencia para contrabalancear las fuerzas inducidas por la maquinaria depende del tipo de esta y de las condiciones especiales de la cimentación. En maquinarias reciprocantes con movimiento horizontal, las vibraciones más peligrosas en la cimentación son las ocasionadas por la acción simultánea del cabeceo y el movimiento horizontal. En este caso, para disminuir las vibraciones de la

cimentación es necesario contrabalancear las fuerzas de inercia de la máquina mediante el procedimiento del inciso (b), aunque esto incrementa un poco las vibraciones verticales. Por consiguiente, si una maquinaria se contrabalanceó por el primer método pero tiene vibraciones horizontales no permisibles después de la construcción de la cimentación, entonces se sugiere utilizar el procedimiento (b) para él contrabalanceo como una medida simple para reducir las vibraciones. El primer procedimiento se recomienda cuando las vibraciones verticales tienen una amplitud no permisible en motores horizontales, similarmente para motores verticales, el procedimiento de contrabalanceo seleccionado dependerá del tipo de vibraciones en la cimentación (vertical, horizontal o cabeceo).

2. Estabilización química del suelo.- Algunas veces las vibraciones de la cimentación pueden reducirse por la estabilización del suelo que resulta en un incremento en la rigidez de la base y, consecuentemente en un incremento en la frecuencia natural de la cimentación. Este método es efectivo solamente cuando las frecuencias naturales de la cimentación antes de la estabilización del suelo son mayores que la frecuencia operacional de la máquina. Un incremento en la rigidez del suelo, dará como resultado que se amplíe la diferencia entre la frecuencia natural de vibración y la frecuencia de operación de la maquinaria, resultando en un decremento en las amplitudes de vibración. Si la cimentación tiene frecuencias naturales menores que la frecuencia de operación de la maquinaria, la estabilización del suelo puede causar un incremento en las amplitudes de vibración, debido

a que la frecuencia natural después de la estabilización puede acercarse a la velocidad operacional de la máquina. La estabilización química del suelo resulta relativamente económica ya que los costos son más bajos en comparación con otros métodos de reducción de vibraciones. Otra ventaja de este método es que puede ser aplicado sin una interrupción prolongada de la maquinaria. La extensión de la estabilización del suelo bajo la cimentación depende de la naturaleza de las vibraciones. Para una cimentación con vibraciones por cabeceo, la estabilización puede ser necesaria solamente cerca de los bordes (perpendicular al plano de vibraciones). Si las vibraciones en la cimentación son verticales, es necesario la estabilización en el área entera bajo la cimentación. La profundidad de la zona estabilizada no debe ser menor que el ancho de la cimentación y debe extenderse al menos unos 30 cm en la periferia. Barkan (1962) reportó un caso donde las amplitudes de vibración de una cimentación para un compresor horizontal disminuyeron en un 50 % como resultado de la estabilización del suelo mediante la inyección de silicatos.

3. Medidas estructurales.- Las medidas estructurales son usadas con el objeto de cambiar las frecuencias naturales del sistema suelo - cimentación, como una manera de lograr una mayor diferencia entre las frecuencias naturales y la frecuencia de operación de la maquinaria. Estas medidas consisten en incrementar la rigidez de la cimentación, por medio de pilas bajo ésta mediante el método de recalce; en incrementar el área de contacto de la cimentación con el suelo; en incrementar la masa de la cimentación; diseñar

adecuadamente losas adyacentes para una cimentación existente. Una selección apropiada de las medidas depende de la naturaleza de las vibraciones y de la relación entre las frecuencias naturales y la velocidad de operación. También es posible incrementar la masa de la cimentación sin inducir cambios en la frecuencia de vibración, resultando en una disminución de las amplitudes de vibración vertical. Para maquinaria de baja frecuencia, un incremento en rigidez de la cimentación producirá efectos indeseables. En tal caso, es mejor disminuir las frecuencias naturales de la cimentación mediante el incremento de la masa de la cimentación sin aumentar el área de contacto con el suelo. Las condiciones locales pueden influir en la selección de algunos casos. El uso especial de losas junto a la cimentación principal puede proveer una efectiva reducción de vibraciones en algunas situaciones. El peso de la losa y el área de contacto con el suelo debe ser analizado para determinar la eficiencia de esta medida.

4. Aisladores de vibración.- Las amplitudes de vibración de una cimentación sujeta a vibraciones verticales pueden ser disminuidas agregando aisladores de vibración por medio de tensores elásticos. El sistema del bloque de cimentación en conjunto con la maquinaria es representado con una  $m_1$ , mientras que  $m_2$  es la masa de la losa de base,  $k_2$  es el resorte equivalente del suelo y  $k_1$  es la rigidez del tensor o del resorte que se agrega a la cimentación. El principio del aislamiento de vibración establece que si la masa sobre del aislador y su rigidez se seleccionan tal que su frecuencia

natural  $\omega_{n1}$  sea considerablemente menor a la frecuencia de operación de la máquina  $\omega$  la amplitud de vibración de la cimentación tiende a cero. La amplitud de vibración del aislador se establece como:

$$Z_1 = -\frac{F_0}{k_1} \quad (6-42)$$

La amplitud  $Z_1$  se iguala a la deflexión estática de la masa  $m_1$  producida por una fuerza cuya magnitud es igual al máximo valor de la fuerza de excitación  $F_0$ . Puede ser notado entonces que ni la frecuencia o las amplitudes de vibración del aislador dependen de las propiedades del suelo bajo la base o bajo la masa de la cimentación. Para satisfacer la condición  $\omega_{n1} \leq \omega$ , se requiere de un valor pequeño de rigidez del resorte  $k_1$  para un determinado valor de masa. De tal forma que los requerimientos de resistencia serán los principales en la determinación de la rigidez del aislador. El sistema de aislamiento funcionará más eficientemente si la velocidad de operación de la maquinaria  $\omega$  es constante. Las fluctuaciones en la velocidad de operación de la maquinaria dificulta el diseño del aislador de vibración. Para vibraciones por cabeceo o deslizamiento se pueden mantener las mismas consideraciones del aislamiento.

## CAPITULO 7

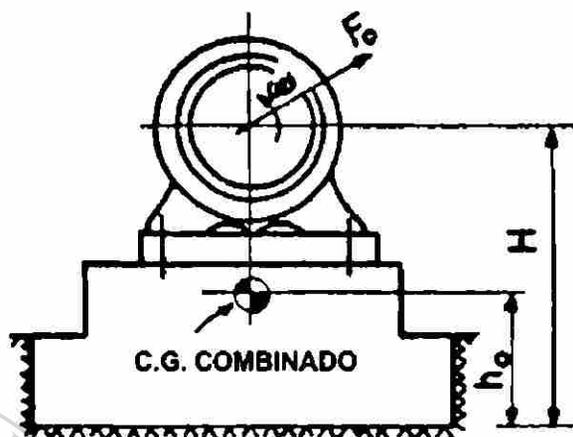
### EVALUACION ANALITICA DE LOS EFECTOS DEL AISLAMIENTO

#### 7.1 Planteamiento del Problema

Hasta este punto del trabajo de tesis, se han establecido, entre otras cosas; los requerimientos generales para el diseño de cimentaciones sujetas a efectos dinámicos, se han descrito los diferentes tipos de maquinaria, se describieron los procedimientos para obtener las propiedades dinámicas de los suelos, así como también la teoría de análisis de vibraciones. Se estudiaron los diferentes sistemas de aislamientos utilizados para la reducción de las amplitudes de vibración.

Es necesario complementar lo anterior con la resolución de problemas prácticos, en los cuales se puedan aplicar los conceptos ya tratados en los capítulos precedentes. Mas aún, estos casos prácticos deberán de proporcionar la información necesaria para poder evaluar el comportamiento de los distintos modelos analíticos de sistemas dinámicos relacionados con el diseño de cimentaciones para maquinaria. Además, de la aplicación práctica de las ecuaciones establecidas anteriormente para la obtención de las respuestas de vibración.

Para tal fin, y teniendo en mente los objetivos y el alcance de este trabajo se plantearán dos casos prácticos en los cuales se desarrollan cuatro modelos matemáticos, los cuales se describen en la siguiente sección.

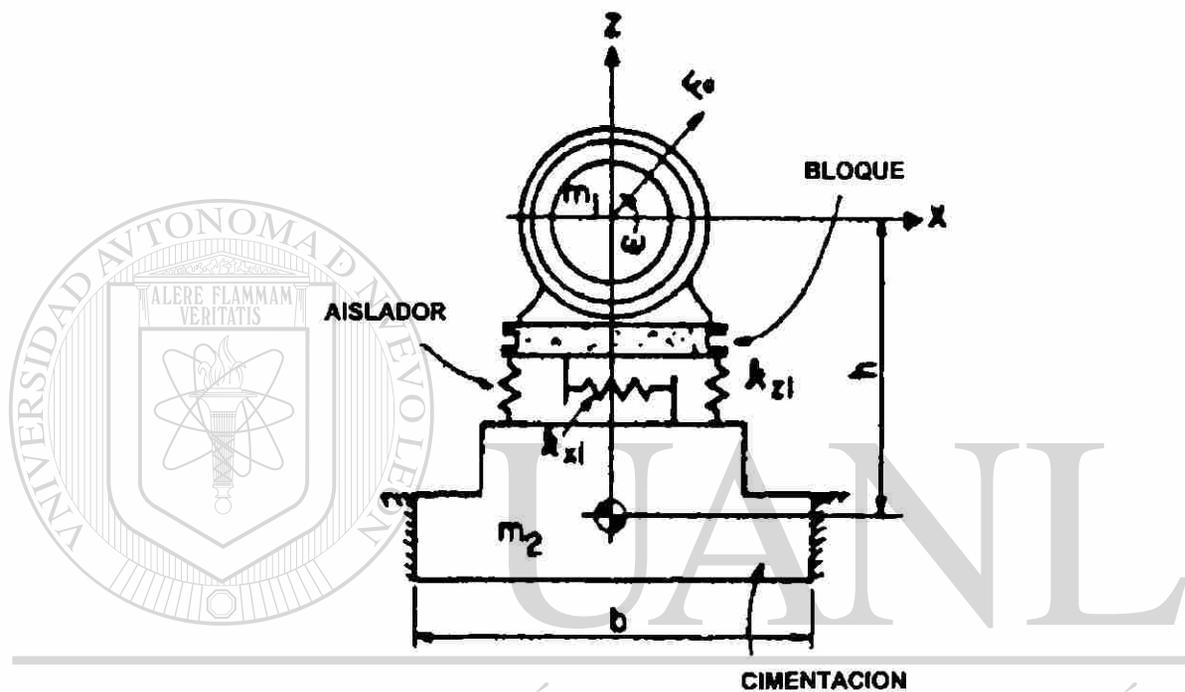


**Fig. 7.1** Bloque de Cimentación para Maquinaria sin Aislamiento de la Base

El primero de los casos prácticos pretende el estudio de las vibraciones verticales; ya que, debido a su naturaleza, estas vibraciones pueden presentarse independiente de los demás modos de vibrar, se establecerá la ecuación de movimiento para los modelos matemáticos, considerando el aislamiento de la máquina y de su cimentación, y sin considerar ningún otro tipo de aislamiento. Esto nos dará la información de los diferentes parámetros por comparar en los dos modelos; como por ejemplo, las frecuencias naturales, las amplitudes máximas del movimiento, la relación de frecuencias y para el caso aislado, la transmisibilidad y la eficiencia del aislamiento.

El segundo caso práctico estudiará el problema del acoplamiento entre las vibraciones horizontales y las originadas por el cabeceo, ya que los casos en donde estos modos de vibrar actúan independientemente son escasos en la

práctica, por lo cual los modelos matemáticos incluyen el efecto del acoplamiento de los dos modos de vibrar. Al igual del primer caso se pretende estudiar el comportamiento de los modelos con aislamiento y sin él, buscando evaluar analíticamente los beneficios obvios de los aisladores de vibración y su rango de aplicación para que resulten eficientes.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
**Fig. 7.2** Bloque de Cimentación para Maquinaria con Aislamiento de la Base®  
 DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Referente a los modelos matemáticos se puede decir que están de acuerdo a las técnicas de discretización; basadas en el concepto de las masas concentradas en un punto ideal, y que la obtención de las constantes de resorte y los coeficientes de amortiguamiento del suelo están con base en la teoría del semi-espacio elástico. El cálculo de las amplitudes de vibración de los diferentes modelos matemáticos será realizado mediante la aplicación de las ecuaciones establecidas en el capítulo 5. Las frecuencias naturales de los

modelos se obtendrán utilizando el programa CAL-91. Este programa obtiene por computadora las frecuencias naturales y los modos de vibrar utilizando las matrices de rigidez y de masa.

A continuación se describen a detalle los diferentes modelos matemáticos y se establecen las respectivas ecuaciones de equilibrio dinámico.

## 7.2 Modelos Matemáticos

### 7.2.1 Vibración Vertical.

La masa ( $m$ ) de la maquinaria y la cimentación se asume que es concentrada en el eje vertical. La constante de resorte del suelo ( $k_z$ ), el amortiguamiento en el suelo ( $c_z$ ) y la función de la fuerza ( $F_z$ ) de la maquinaria tienen su línea de acción coincidente con el eje vertical.

De tal manera que el modelo matemático puede expresarse de la siguiente manera:

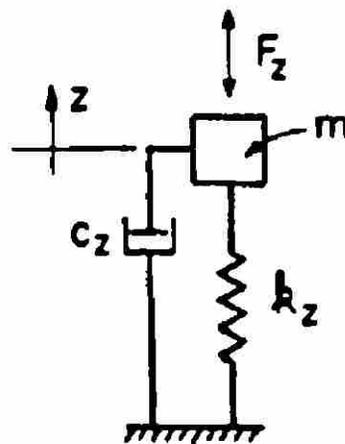


Fig. 7.3 Modelo Matemático No. 1 para la Vibración Vertical sin Aislamiento

A este tipo de modelo se le denomina un sistema amortiguado de un grado de libertad sujeto a una vibración armónica. De tal forma que la ecuación de equilibrio dinámico se puede expresar como:

$$mz(t) + c_z z(t) + k_z z(t) = F_z(t) = F_o \text{ sen } \omega_e t \quad (7-1)$$

Dividiendo entre la  $m$  y notando que  $\frac{c}{m} = 2\xi\omega$ , tenemos

$$z(t) + 2\xi\omega z(t) + \omega^2 z(t) = \frac{F_o}{m} \text{ sen } \omega_e t \quad (7-2)$$

La solución transitoria de esta ecuación es la respuesta bajo vibración libre amortiguada.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$z_i(t) = (A \cos \omega_d t + B \text{ sen } \omega_d t) e^{-\xi \omega t} \quad (7-3)$$

y la solución estacionaria es de la forma

$$z_e(t) = C_1 \cos \omega_e t + C_2 \text{ sen } \omega_e t \quad (7-4)$$

obteniendo la primera y la segunda derivada de la ecuación ( 7-4 )

$$z_e(t) = -C_1\omega_e \text{sen } \omega_e t + C_2\omega_e \text{cos } \omega_e t \quad (7-5)$$

$$z_e(t) = -C_1\omega_e^2 \text{cos } \omega_e t - C_2\omega_e^2 \text{sen } \omega_e t \quad (7-6)$$

y sustituyendo en la ecuación ( 7-2 ) encontramos que

$$\left(-C_1\omega_e^2 + C_2\omega_e(2\xi\omega) + C_1\omega^2\right)\text{cos } \omega_e t + \left(-C_2\omega_e^2 - C_1\omega_e(2\xi\omega) + C_2\omega^2 - \frac{F_o}{m}\right)\text{sen } \omega_e t = 0 \quad (7-7)$$

Para poder satisfacer estas ecuaciones para todos los valores de  $(t)$ , es necesario que cada término dentro de los paréntesis sea igual a cero; y

dividiendo entre  $\omega^2$  así como sabiendo que  $\beta = \frac{\omega_e}{\omega}$  tenemos:

$$\begin{aligned} C_1(1 - \beta^2) + C_2(2\xi\beta) &= 0 \\ C_2(1 - \beta^2) - C_1(2\xi\beta) &= \frac{F_o}{k} \end{aligned} \quad (7-8)$$

resolviendo las ecuaciones simultáneas:

$$C_1 = \frac{F_o}{k} \left[ \frac{-2\xi\beta}{(1 - \beta^2) + (2\xi\beta)^2} \right]$$

$$C_2 = \frac{F_o}{k} \left[ \frac{(1 - \beta^2)}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \right] \quad (7-9)$$

Introduciendo estas expresiones dentro de la ecuación ( 7-4 ) y combinando con la solución transitoria ecuación ( 7-3 ), la respuesta total se obtiene de la siguiente forma:

$$z(t) = (A \cos \omega_d t + B \sen \omega_d t) e^{-\xi \omega t} + \frac{F_o}{k} \left[ \frac{1}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \right] [(1 - \beta^2) \sen \omega_e t - 2\xi\beta \cos \omega_e t] \quad (7-10)$$

Las constantes  $A, B$  de la respuesta transitoria se pueden evaluar con las condiciones iniciales  $z(0), \dot{z}(0)$ . Sin embargo, la respuesta transitoria se amortigua rápidamente debido al término  $e^{-\xi \omega t}$ , por lo que usualmente esta respuesta tiene poco interés, no así la respuesta estacionaria que es definida por el segundo término.

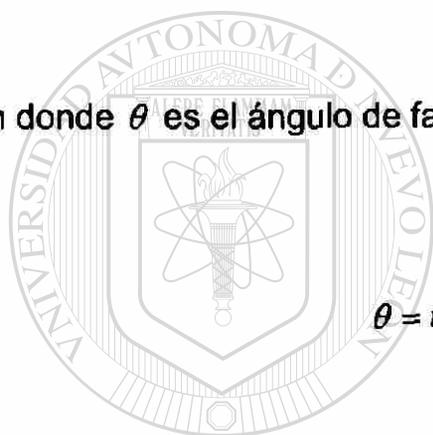
$$z_e(t) = \frac{F_o}{k} \left[ \frac{1}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \right] [(1 - \beta^2) \sen \omega_e t - 2\xi\beta \cos \omega_e t] \quad (7-11)$$

Sí se grafican los dos correspondientes vectores rotatorios en un plano complejo [ver Clough y Penzien " Dynamics of Structures " pag. 37 segunda edición], donde sus componentes en el eje real son idénticos a los términos de la ecuación ( 7-11 ). La componente real del vector resultante dará la respuesta estacionaria en la forma:

$$z_e(t) = \frac{F_o}{k} \frac{\text{sen}(\omega_e t - \theta)}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \quad (7-12)$$

en donde  $\theta$  es el ángulo de fase respecto a la excitación, y es definido como:

$$\theta = \tan^{-1} \left[ \frac{2\xi\beta}{(1 - \beta^2)} \right] \quad (7-13)$$



UANL

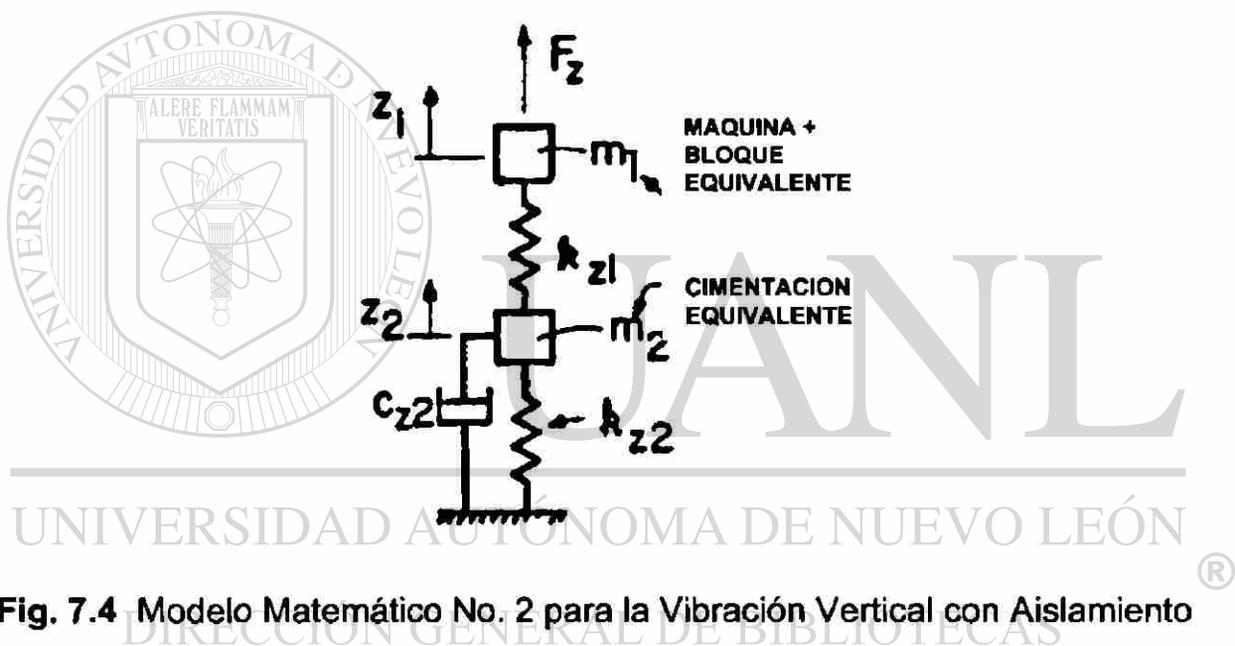
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

## 7.2.2 Vibración Vertical + Aislamiento.

La solución de este modelo da las frecuencias naturales y la respuesta de vibración en la dirección vertical. El modelo es representado con dos masas y dos grados de libertad así como también, dos frecuencias naturales. El amortiguamiento del sistema de aislamiento generalmente es despreciado. Sin embargo, el amortiguamiento del suelo es significativo y se incluye en las ecuaciones de movimiento.



$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{z}_1 + k_{z1}(z_1 - z_2) &= F_z(t) \\
 m_2 \ddot{z}_2 + c_{z2} \dot{z}_2 + k_{z1}(z_2 - z_1) + k_{z2} z_2 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{7-14}$$

Estas ecuaciones pueden ser expresadas en términos matriciales de la siguiente manera

$$[M]\{z\} + [C_z]\{z\} + [k_z]\{z\} = \{F_z(t)\} \quad (7-15)$$

en donde las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez quedan definidas como:

$$\begin{aligned} [M] &= \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \\ [C_z] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_{z2} \end{bmatrix} \\ [k_z] &= \begin{bmatrix} k_{z1} & -k_{z1} \\ -k_{z1} & k_{z1} + k_{z2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7-16)$$

De tal manera que la ecuación de movimiento ( 7-15 ) se expresaría de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_{z2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{z1} & -k_{z1} \\ -k_{z1} & k_{z1} + k_{z2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_z(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7-17)$$

El modelo se resuelve con las ecuaciones del capítulo 6 y las frecuencias naturales se calculan con el programa CAL-91.

### 7.2.3 Vibración Horizontal + Cabeceo.

Si se considera únicamente el modo horizontal resultaría ser una aproximación, ya que contrario al modo vertical en el movimiento horizontal las masas no están ubicadas en el mismo eje horizontal y no coinciden con la línea de acción de las fuerzas. Debido a estas razones el modo horizontal normalmente está acoplado con el modo de cabeceo, y su modelo matemático representa mejor el verdadero comportamiento dinámico de la estructura.

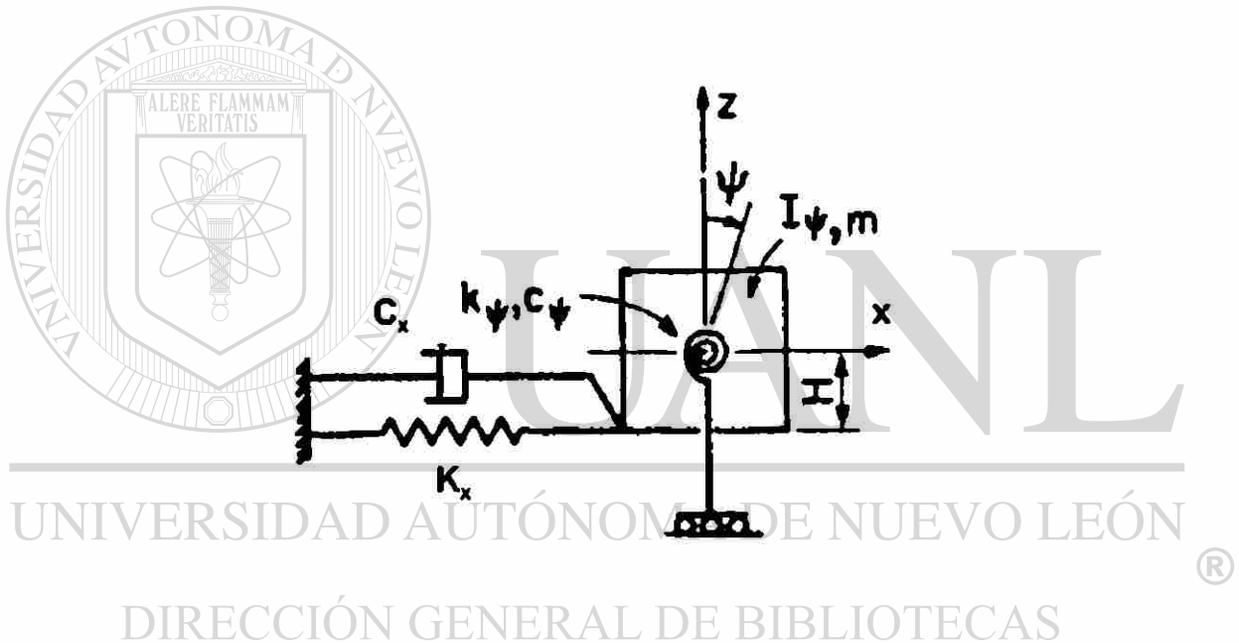


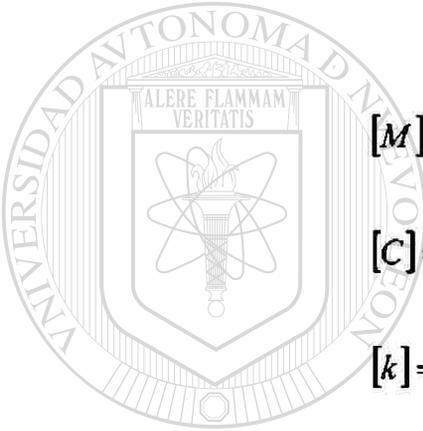
Fig. 7.5 Modelo Matemático No. 3 para la Vibración Horizontal + Cabeceo sin Aislamiento

El efecto del acoplamiento ocurre cuando la maquinaria está localizada a un nivel más alto que el de la cimentación, y sus ecuaciones de equilibrio dinámico serían las siguientes:

$$\begin{aligned}
 mx + C_x \dot{x} + k_x(x - \psi h_0) - h_0 C_x \dot{\psi} &= F_0 \cos \omega t \\
 I_\psi \ddot{\psi} + (C_\psi + h_0^2 C_x) \dot{\psi} + (k_\psi + h_0^2 k_x) \psi - h_0 C_x \dot{x} - h_0 k_x x &= F_0 H \cos \omega t
 \end{aligned} \tag{7-18}$$

El modelo planteado tiene dos grados de libertad y dos frecuencias naturales, así como también amplitudes máximas para el modo horizontal y el modo por cabeceo.

Tratando de plantear matricialmente las ecuaciones ( 7-18 ), las matrices estructurales quedarían definidas de la siguiente forma:



$$\begin{aligned}
 [M] &= \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_\psi \end{bmatrix} \\
 [C] &= \begin{bmatrix} C_x & -h_0 C_x \\ -h_0 C_x & C_\psi + h_0^2 C_x \end{bmatrix} \\
 [k] &= \begin{bmatrix} k_x & -h_0 k_x \\ -h_0 k_x & k_\psi + h_0^2 k_x \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{7-19}$$

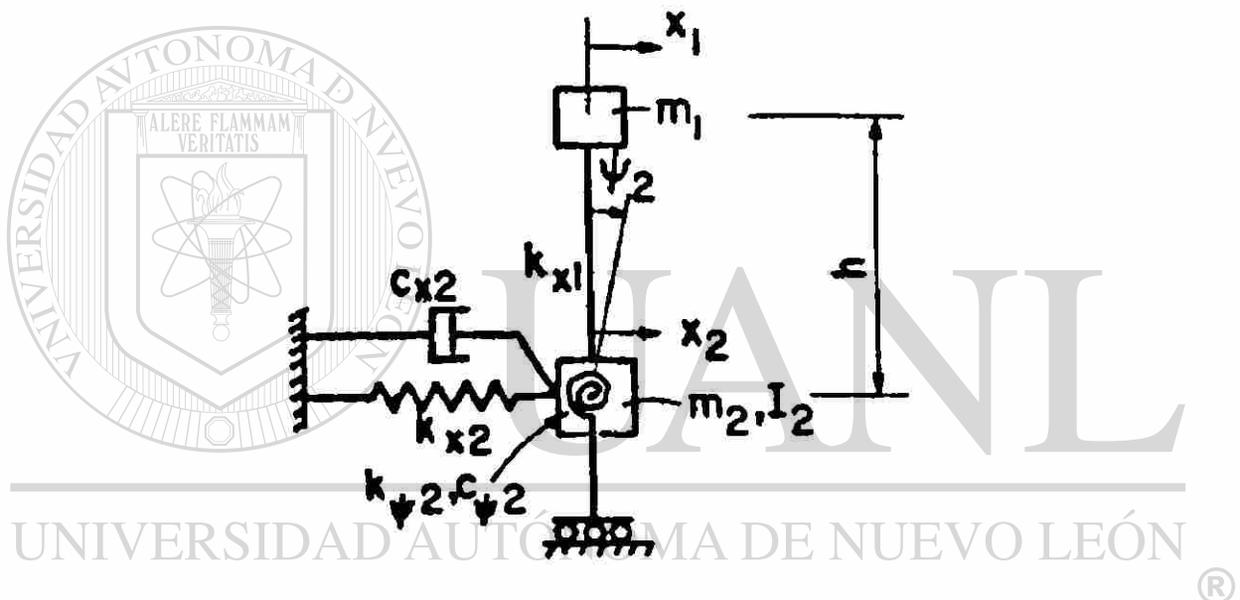
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
 y la ecuación de movimiento estaría dada como: ®  
 DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_\psi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_x & -h_0 C_x \\ -h_0 C_x & C_\psi + h_0^2 C_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \psi \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_x & -h_0 k_x \\ -h_0 k_x & k_\psi + h_0^2 k_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \psi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_0 \cos \omega t \\ F_0 H \cos \omega t \end{Bmatrix} \tag{7-20}$$

Para resolver este modelo se usarán las ecuaciones del capítulo 5.

## 7.2.4 Vibración Horizontal + Cabeceo + Aislamiento.

Este modelo incorpora el acoplamiento de las propiedades dinámicas del modo horizontal y por cabeceo. El modelo matemático representado tiene tres grados de libertad asociados con las tres coordenadas  $x_1, x_2, \psi_2$ . Por consiguiente, tres formas modales son posibles con sus correspondientes frecuencias naturales de vibración.



**Fig. 7.6** Modelo Matemático No. 4 para la Vibración Horizontal + Cabeceo con Aislamiento

Las ecuaciones de movimiento del modelo mostrado son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{x}_1 + k_{x1}(x_1 - x_2 - \psi_2 h) &= F_x(t) \\
 m_2 \ddot{x}_2 + C_{x2} \dot{x}_2 + k_{x2} x_2 - k_{x1}(x_1 - x_2 - \psi_2 h) &= 0 \\
 I_2 \ddot{\psi}_2 + C_{\psi2} \dot{\psi}_2 + m_1 x_1 h + k_{\psi2} \psi_2 &= F_x(t) h
 \end{aligned}
 \tag{7-21}$$

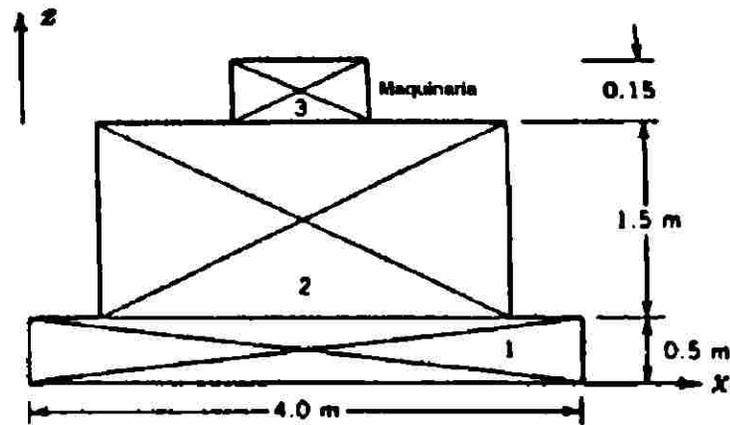
en donde las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez serían las siguientes:

$$\begin{aligned}
 [M] &= \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ m_1 h & 0 & I_2 \end{bmatrix} \\
 [C] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{x2} & 0 \\ 0 & 0 & C_{\psi 2} \end{bmatrix} \\
 [k] &= \begin{bmatrix} k_{x1} & -k_{x1} & -k_{x1} h \\ -k_{x1} & k_{x1} + k_{x2} & k_{x1} h \\ 0 & 0 & k_{\psi 2} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{7-22}$$

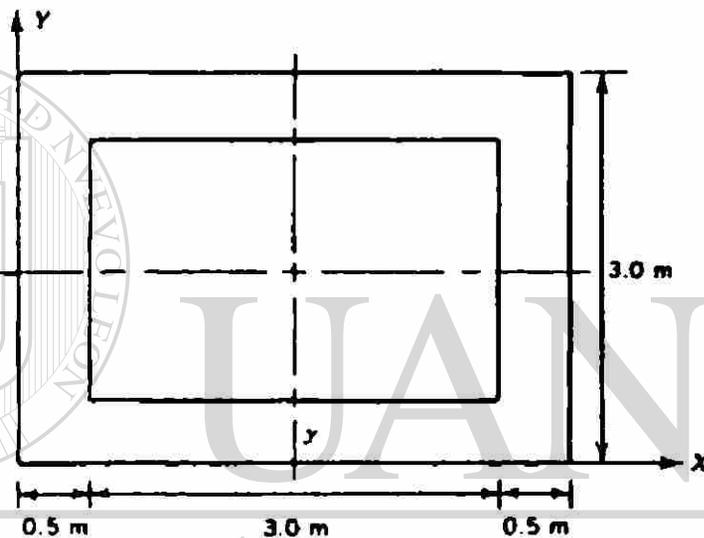
La expresión matricial de la ecuación de equilibrio dinámico es como se especifica en la ecuación ( 7-23 ), y al igual que los modelos anteriores sus frecuencias se obtienen utilizando el programa CAL-91.

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ m_1 h & 0 & I_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \psi_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{x2} & 0 \\ 0 & 0 & C_{\psi 2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \psi_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{x1} & -k_{x1} & -k_{x1} h \\ -k_{x1} & k_{x1} + k_{x2} & k_{x1} h \\ 0 & 0 & k_{\psi 2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \psi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_x(t) \\ 0 \\ F_x(t)h \end{Bmatrix} \tag{7-23}$$

### 7.3 Solución a Casos Prácticos y Ejemplos Numéricos



(a)



(b)

Fig. 7.7 Dimensiones de la Cimentación para los Casos Prácticos ( a ) Elevación, ( b ) Planta.

#### Caso práctico 1.

El bloque de concreto mostrado en la figura 7.7 será usado como cimentación de una máquina recíprocante operando a 600 r.p.m. y montada simétricamente con respecto a la cimentación. El peso de la máquina es de 1.1 ton. La fuerza desbalanceada vertical debido a la operación es  $P_z = 0.2 \sin \omega t$ . Asumiendo que

el módulo dinámico al esfuerzo cortante es  $G = 500 \text{ kg/cm}^2$ , la relación de poisson  $\nu = 0.33$ , la densidad del suelo  $\gamma_s = 1.65 \text{ ton/m}^3$  y el peso unitario del concreto es  $\gamma_c = 2.4 \text{ ton/m}^3$ .

Modelo matemático No. 1 (Vibración vertical sin aislamiento).

a) Datos de la maquinaria.

Peso de la máquina = 1.1 ton

Velocidad de operación de la máquina = 600 r.p.m. = 62.83 rad/s

Fuerza desbalanceada vertical =  $P_z = 0.2 \text{ ton}$

b) Datos del suelo.

$G = 500 \text{ kg/cm}^2 = 5000 \text{ ton/m}^2$

$\nu = 0.33$

$\gamma_s = 1.65 \text{ ton/m}^3$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

c) Datos de la cimentación.

$\gamma_c = 2.4 \text{ ton/m}^3$

Peso de la cimentación =  $2.4 ( 4 \times 3 \times 0.5 + 3 \times 2 \times 1.5 ) = 36 \text{ ton}$

Peso total de cimentación + máquina =  $36 + 1.1 = 37.1 \text{ ton}$

Area de la base de la cimentación =  $4 \times 3 = 12 \text{ m}^2$

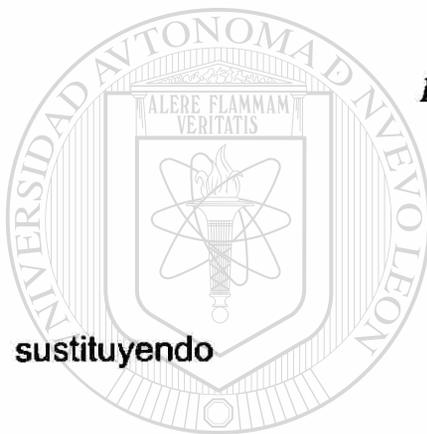
Según la teoría del semi-espacio elástico el radio equivalente  $r_{oz}$  es

$$r_{oz} = \sqrt{\frac{A}{\pi}} \quad (5-1)$$

$$r_{oz} = \sqrt{\frac{4 \times 3}{\pi}} = 1.9544 \text{ m}$$

d) Determinación de la relación de masa, constante de resorte y relación de amortiguamiento.

Relación de masa.



sustituyendo

$$B_z = \frac{(1-\nu) m}{4 \rho r_{oz}^3} \quad (4-24)$$

$$\rho = \frac{\gamma_s}{g} \quad (7-24)$$

$$B_z = \frac{(1-\nu) mg}{4 \gamma_s r_{oz}^3} \quad (7-25)$$

$$B_z = \frac{(1-0.33)}{4} \frac{37.1}{1.65(1.9544)^3} = 0.5045$$

Constante de resorte

$$k_z = \frac{4Gr_{oz}}{1-\nu} \quad (4-25)$$

$$k_z = \frac{4 \times 5000 \times 1.9544}{(1-0.33)} = 58340 \text{ ton/m}$$

## Relación de amortiguamiento

$$\xi_z = \frac{0.425}{\sqrt{B_z}} \quad (4-30)$$

$$\xi_z = \frac{0.425}{\sqrt{0.5045}} = 0.5984$$

$$\xi_z = 59.84 \%$$

e) Frecuencia natural de vibración.



$$\omega = \sqrt{\frac{k_z}{m}} \quad (5-19)$$

$$m = \frac{W}{g} \quad (7-26)$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

$$m = \frac{37.1}{9.81} = 3.7819 \text{ ton-s}^2/\text{m}$$

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$\omega = \sqrt{\frac{58340}{3.7819}} = 124.2 \text{ rad/s}$$

en donde

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad (7-27)$$

$$f = \frac{124.2}{2\pi} = 19.77 \text{ Hz}$$

f) Relación de frecuencias.

$$\beta = \frac{\omega_e}{\omega} \quad (7-28)$$

$$\beta = \frac{62.83}{124.2} = 0.5059$$

g) Cálculo de la amplitud de vibración donde  $F_0 = P_z$ .

$$A_z = \frac{P_z}{k_z \sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi_z \beta)^2}} \quad (5-20)$$

$$A_z = \frac{0.2}{58340 \sqrt{[1 - (0.5059)^2]^2 + (2 \times 0.5984 \times 0.5059)^2}} = 3.6 \times 10^{-6} \text{ m}$$

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

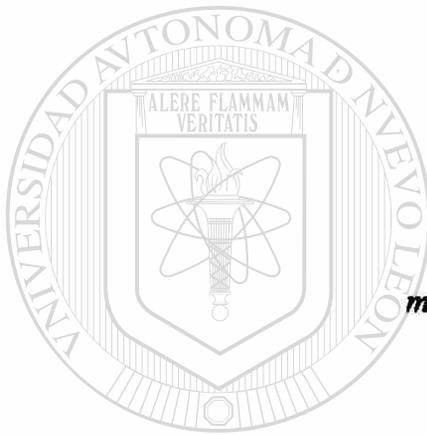
$$A_z = 0.0036 \text{ mm}$$

Modelo matemático No. 2 (Vibración vertical con aislamiento).

Utilizando la misma cimentación del modelo 1 se obtendrán las amplitudes de vibración y sus frecuencias naturales siguiendo el procedimiento dado en la sección 6.5.

a) Cálculo de las masas.

No se considera necesario colocar un bloque de concreto sobre los aisladores, además, para permitir una comparación directa la masa  $m_1$  será únicamente la masa de la maquinaria.



$$m_1 = \frac{W_1}{g} \quad (7-29)$$

$$m_1 = \frac{1.1}{9.81} = 0.1121 \text{ ton-s}^2/\text{m}$$

UANL

$$m_2 = \frac{W_2}{g} \quad (7-30)$$

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$m_2 = \frac{36}{9.81} = 3.6697 \text{ ton-s}^2/\text{m}$$

donde

$W_1$  = Peso de la maquinaria

$W_2$  = Peso de la cimentación

b) Relación de masas.

$$\mu = \frac{m_1}{m_2} \quad (6-29)$$

$$\mu = \frac{0.1121}{3.6697} = 0.0305$$

c) Constante de resorte del suelo bajo la cimentación.

$$k_2 = 58340 \text{ ton/m (del Modelo No. 1)}$$

d) Frecuencia natural límite del sistema completo (maquinaria + cimentación).

$$\omega_{n/2} = \sqrt{\frac{k_2}{m_1 + m_2}} \quad (6-28)$$

$$\omega_{n/2} = \sqrt{\frac{58340}{0.1121 + 3.6697}} = 124.2 \text{ rad/s}$$

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

e) Relación de frecuencias  $r_2$ .

$$r_2 = \frac{\omega_{n/2}}{\omega_e} \quad (6-30)$$

$$r_2 = \frac{124.2}{62.83} = 1.9768$$

f) Amplitud del sistema (sin considerar los aisladores).

$$Z = \frac{F_0}{(m_1 + m_2) \left( \omega_{n/2}^2 - \omega_e^2 \right)} \quad (6-31)$$

$$Z = \frac{0.2}{(0.1121 + 3.6697) \left[ (124.2)^2 - (62.83)^2 \right]} = 4.6 \times 10^{-6} \text{ m}$$

$$Z = 0.0046 \text{ mm}$$

La diferencia entre el valor de la amplitud del modelo No. 1 y el valor anterior se debe principalmente, a que en la ecuación ( 6-31 ) no está considerado el amortiguamiento del suelo (  $\xi_z = 0.5984$  ) lo cual origina un mayor valor de la amplitud de vibración.

g) Grado de absorción.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$\eta = \frac{Z}{Z_2} \quad (6-32)$$

Suponiendo que existan equipos sensibles a las vibraciones en las inmediaciones de la cimentación, o bien por requerimientos especiales se pueden limitar las amplitudes de las vibraciones verticales definiendo como límite  $Z_2 = 0.002 \text{ mm}$ .

$$\eta = \frac{0.0046}{0.002} = 2.3$$

el valor del grado de absorción debe ser negativo como se puede ver en la gráfica No. 3 del Apéndice B.

h) Relación de frecuencia  $r_1$ .

$$\eta = \frac{[1 - (1 + \mu)(r_1^2 + r_2^2 - r_1^2 r_2^2)]}{r_1^2 [(1 + \mu)(r_2^2 - 1)]} \quad (6-32)$$

despejando  $r_1^2$

$$r_1^2 = \frac{1 - (1 + \mu)r_2^2}{(1 + \mu)(\eta - 1)(r_2^2 - 1)} \quad (7-31)$$

$$r_1^2 = \frac{1 - (1 + 0.0305)(1.9768)^2}{(1 + 0.0305)(-2.3 - 1)[(1.9768)^2 - 1]} = 0.3061$$

i) Determinación de  $\omega_{n/1}^2$ .

$$\omega_{n/1}^2 = r_1^2 \omega_e^2 \quad (6-36)$$

$$\omega_{n/1}^2 = (0.3061)(62.83)^2 = 1208.36$$

$$\omega_{n/1} = 34.76 \text{ rad/s}$$

j) Rigidez total del aislador.

$$k_1 = m_1 \omega_{n/1}^2 \quad (6-37)$$

$$k_1 = (0.1121)(34.76)^2 = 135.44 \text{ ton/m}$$

k) Amplitud de vibración del sistema sobre los aisladores.

$$Z_1 = \frac{(1 + \mu)\omega_{n/2}^2 + \mu\omega_{n/1}^2 - \omega_e^2}{m_1 \Delta(\omega^2)} F_0 \quad (6-38)$$

donde

$$\Delta(\omega^2) = \omega_e^4 - (1 + \mu)(\omega_{n/1}^2 + \omega_{n/2}^2)\omega_e^2 + (1 + \mu)\omega_{n/1}^2\omega_{n/2}^2 \quad (6-39)$$

$$\Delta(\omega^2) = (62.83)^4 - (1 + 0.0305)[(34.76)^2 + (124.2)^2](62.83)^2 + (1 + 0.0305)(34.76)^2(124.2)^2$$

$$\Delta(\omega^2) = 0.3288 \times 10^8$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$Z_1 = \frac{(1 + 0.0305)(124.2)^2 + (0.0305)(34.76)^2 - (62.83)^2}{0.1121(0.3288 \times 10^8)} 0.2 = 0.00065 \text{ m}$$

$$Z_1 = 0.6504 \text{ mm}$$

La amplitud  $Z_1$  es calculada para revisar los esfuerzos en el material aislante.

$$P_{actuale} = k_1 Z_1 \leq P_{admisible} \quad (6-40)$$

l) Verificar la amplitud de vibración del sistema completo.

$$Z_2 = \frac{\omega^2}{m_2 \Delta(\omega^2)} F_0 \quad (6-14)$$

$$Z_2 = \frac{(34.76)^2}{(3.6697)(0.3288 \times 10^8)} 0.2 = 2.0 \times 10^{-6}$$

$$Z_2 = 0.002 \text{ mm}$$

Para obtener las frecuencias naturales se usará la ecuación ( 7-17 ) expresada en forma matricial. De tal manera que las matrices estructurales quedan definidas como:

m) Matrices estructurales.

Matriz de masas.

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1121 & 0 \\ 0 & 3.6697 \end{bmatrix}$$

Matriz de Rigideces.

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{z1} & -k_{z1} \\ -k_{z1} & k_{z1} + k_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 135.44 & -135.44 \\ -135.44 & 135.44 + 58340 \end{bmatrix}$$

Matriz de Amortiguamiento.

De acuerdo con el capítulo 4 tenemos que

$$C_z = \frac{3.4r_0^2}{(1-\nu)} \sqrt{\rho G} \quad (4-26)$$

$$C_z = \frac{3.4(1.9544)^2}{(1-0.33)} \sqrt{\frac{(1.65)(5000)}{9.81}} = 562.11$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 562.11 \end{bmatrix}$$

n) Cálculo de las frecuencias naturales de vibración usando el programa CAL-UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN 91 (ver Apéndice C).

Las frecuencias circulares se definen como:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (7-32)$$

entonces

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{0.18099} = 34.72 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = \frac{2\pi}{0.04977} = 126.24 \text{ rad/s}$$

$$f_1 = \frac{34.72}{2\pi} = 5.53 \text{ Hz}$$

$$f_2 = \frac{126.24}{2\pi} = 20.09 \text{ Hz}$$

o) Determinación de la Transmisibilidad y la Eficiencia del Aislamiento.

$$\beta = \frac{\omega_e}{\omega} \quad (7-28)$$

$$\beta = \frac{62.83}{34.72} = 1.8096$$

Despreciando el amortiguamiento de los aisladores ( $\zeta = 0$ ) entonces la transmisibilidad es:

$$T = \frac{1}{1 - \beta^2} \quad (6-2)$$

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$T = \frac{1}{1 - (1.8096)^2} = -0.4396$$

La transmisibilidad es del 44 % aproximadamente y la eficiencia del aislamiento es:

$$R = (1 - T) \quad (7-33)$$

$$R = (1 - 0.4396) = 0.56$$

$$R = 56\%$$

$R$  representa el porcentaje de reducción de la vibración la cual se transmite a la cimentación.

### Caso Práctico 2.

El bloque de concreto mostrado en la figura 7.7 es utilizado para soportar un compresor montado simétricamente. El peso del compresor es de 2.5 ton. , y transmite una fuerza horizontal desbalanceada de  $P_x = 0.2 \sin \omega t$  la cual se aplica a una altura de 0.15 m sobre la cara superior del bloque. La velocidad de operación del compresor es de 450 r.p.m. y su centro de gravedad esta a 0.15 m con respecto al bloque. Asumiendo que el módulo de cortante dinámico es  $G = 600 \text{ kg/cm}^2$ , la relación de poisson  $\nu = 0.33$ , la densidad del suelo  $\gamma_s = 1.65 \text{ ton/m}^3$  y el peso unitario del concreto es  $\gamma_c = 2.4 \text{ ton/m}^3$ .

Modelo Matemático No. 3 (Vibración horizontal + cabeceo sin aislamiento).

a) Datos de la maquinaria.

Peso del compresor = 2.5 ton

Velocidad de operación = 450 r.p.m. = 47.12 rad/s

Fuerza desbalanceada horizontal =  $P_x = 0.2 \text{ ton}$

b) Datos del suelo.

$$G = 600 \text{ kg/cm}^2 = 6000 \text{ ton/m}^2$$

$$\nu = 0.33$$

$$\gamma_s = 1.65 \text{ ton/m}^3$$

c) Datos de la cimentación.

$$\gamma_c = 2.4 \text{ ton/m}^3$$

$$\text{Peso de la cimentación} = 2.4 ( 4 \times 3 \times 0.5 + 3 \times 2 \times 1.5 ) = 36 \text{ ton}$$

$$\text{Peso total de cimentación + máquina} = 36 + 2.5 = 38.5 \text{ ton}$$

$$\text{Area de la base de la cimentación} = 4 \times 3 = 12 \text{ m}^2$$

d) Selección de las constantes del suelo.

Los valores de las constantes del suelo (relación de masa, rigidez y amortiguamiento) se obtendrán mas adelante usando los datos del suelo. ®  
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

e) Centrado del área de la cimentación.

Cálculo de la altura del centro de gravedad combinado haciendo momentos estáticos en la base.

$$h_0 = \frac{2.5(2.15) + 21.6(1.25) + 14.4(0.25)}{38.5} = 0.9344 \text{ m}$$

Debido a que la maquinaria y el bloque de cimentación tienen el mismo eje vertical las excentricidades son  $e_x = e_y = 0$ .

f) Fuerzas de excitación desbalanceadas.

$$P_x = 0.2 \text{ ton}$$

g) Momentos de inercia y momentos de inercia de la masa.

Momento de inercia de la masa con respecto al eje que pasa a través del centro de gravedad combinado y paralelo al eje y ( $M_m$ ).

$$M_m = M_{m1} + M_{m2} + M_{m3} \quad (7-34)$$

$$M_m = \sum_{n=1}^3 \left[ \frac{m_n}{12} (a_x^2 + a_z^2) + m_n \{ (x_1 - x_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 \} \right] \quad (7-35)$$

donde

$m_1$  = Es la masa de la losa de base.

$m_2$  = Es la masa del bloque de cimentación.

$m_3$  = Es la masa de la maquinaria.

$$M_m = \frac{14.4}{12 \times 9.81} [(4)^2 + (0.5)^2] + \frac{14.4}{9.81} [(0.25 - 0.9344)^2] + \frac{21.6}{12 \times 9.81} [(3)^2 + (1.5)^2] + \frac{21.6}{9.81} [(1.25 - 0.9344)^2] + \frac{2.5}{9.81} [(2.15 - 0.9344)^2]$$

$$M_m = 5.3354 \text{ ton m s}^2$$

Momento de inercia de la masa con respecto al eje Y que pasa a través del centro de gravedad de la base ( $M_{m_0}$ ) siendo  $h_0 = L$ .

$$M_{m_0} = M_m + mh_0^2 \quad (5-12)$$

$$M_{m_0} = 5.3354 + \frac{38.5}{9.81} (0.9344)^2 = 8.762 \text{ ton m s}^2$$

$$\gamma = \frac{M_m}{M_{m_0}} \quad (5-13)$$

$$\gamma = \frac{5.3354}{8.762} = 0.6089$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Momento de inercia del área de contacto de la base con respecto al eje y.

$$I = \frac{ba^3}{12} \quad (7-36)$$

$$I = \frac{3(4)^3}{12} = 16 \text{ m}^4$$

De acuerdo con la teoría del semi-espacio elástico se obtendrá la relación de masa, la constante de resorte y la relación de amortiguamiento.

Vibración por deslizamiento.

Radio equivalente

$$r_{ox} = \sqrt{\frac{A}{\pi}} \quad (5-16)$$

$$r_{ox} = \sqrt{\frac{4 \times 3}{\pi}} = 1.9544 \text{ m}$$



Relación de masa.

$$B_x = \frac{(7-8\nu) W}{32(1-\nu) \gamma_s r_{ox}^3} \quad (4-37)$$

$$B_x = \frac{7-8(0.33)}{32(1-0.33)} \frac{38.5}{1.65(1.9544)^3} = 0.6356$$

Constante de resorte

$$k_x = \frac{32(1-\nu)Gr_{ox}}{7-8\nu} \quad (4-38)$$

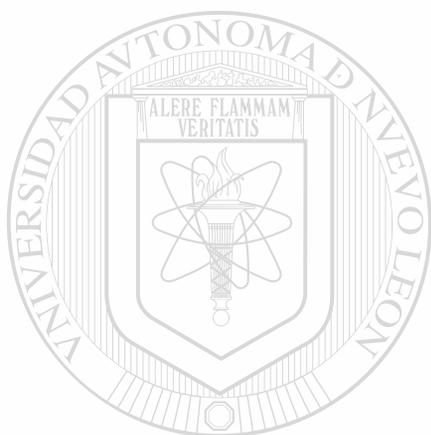
$$k_x = \frac{32(1-0.33)6000 \times 1.9544}{(7-8 \times 0.33)} = 57663 \text{ ton/m}$$

Amortiguamiento equivalente.

$$C_x = \frac{18.4(1-\nu)}{7-8\nu} r_{ax}^2 \sqrt{\frac{\gamma_s G}{g}} \quad (4-39)$$

$$C_x = \frac{18.4(1-0.33)}{7-8(0.33)} (1.9544)^2 \sqrt{\frac{1.65 \times 6000}{9.81}} = 337.86$$

Relación de amortiguamiento



$$\xi_x = \frac{0.2875}{\sqrt{B_x}} \quad (4-40)$$

$$\xi_x = \frac{0.2875}{\sqrt{0.6356}} = 0.36$$

$$\xi_x = 36 \%$$

Vibraciones por cabeceo.

Radio equivalente, remplazando  $\psi$  por  $\phi$

$$r_{ov} = \left( \frac{ba^3}{3\pi} \right)^{1/4} \quad (5-17)$$

$$r_{ov} = \left[ \frac{3(4)^3}{3\pi} \right]^{1/4} = 2.1245 \text{ m}$$

Relación de masa.

$$B_{\nu} = \frac{3 M_{mo}(1-\nu)}{8 \left(\frac{\gamma_s}{g}\right) r_{ov}^5} \quad (4-44)$$

$$B_{\nu} = \frac{3}{8} \frac{8.762(1-0.33)}{\left(\frac{1.65}{9.81}\right)(2.1245)^5} = 0.3024$$

Constante de resorte.

$$k_{\nu} = \frac{8Gr_{ov}^3}{3(1-\nu)} \quad (4-46)$$

$$k_{\nu} = \frac{8 \times 6000(2.1245)^3}{3(1-0.33)} = 228990 \text{ ton m/rad}$$

Amortiguamiento equivalente.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$C_{\nu} = \frac{0.8 r_{ov}^4 \sqrt{\frac{\gamma_s G}{g}}}{(1-\nu)(1+B_{\nu})} \quad (4-47)$$

$$C_{\nu} = \frac{0.8(2.1245)^4 \sqrt{\frac{1.65 \times 6000}{9.81}}}{(1-0.33)(1+0.3024)} = 593.3$$

Relación de amortiguamiento.

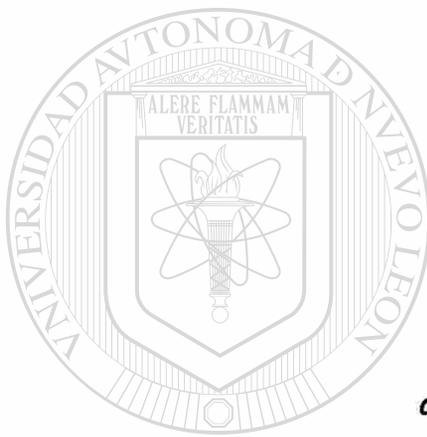
$$\xi_v = \frac{0.15}{(1 + B_v)\sqrt{B_v}} \quad (4-49)$$

$$\xi_v = \frac{0.15}{(1 + 0.3024)\sqrt{0.3024}} = 0.2094$$

$$\xi_v = 20.94\%$$

h) Determinación de las frecuencias naturales.-

Frecuencia natural por deslizamiento.



$$\omega_{nx} = \sqrt{\frac{k_x}{m}} \quad (5-23)$$

$$m = \frac{38.5}{9.81} = 3.9246 \text{ ton s}^2/\text{m}$$

$$\omega_{nx} = \sqrt{\frac{57663}{3.9246}} = 121.21 \text{ rad/s}$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

Frecuencia natural por cabeceo.

$$\omega_{nv} = \sqrt{\frac{k_v}{M_{m0}}} \quad (5-24)$$

$$\omega_{nv} = \sqrt{\frac{228990}{8.762}} = 161.66 \text{ rad/s}$$

Frecuencias naturales del sistema combinado.

Utilizando el programa CAL-91 (ver Apéndice C), y sustituyendo los valores correspondientes en las matrices estructurales tenemos:

Matriz de masas ( $I_{\psi} = M_m$ )

$$[M] = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.9246 & 0 \\ 0 & 5.3354 \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez

$$[k] = \begin{bmatrix} k_x & -h_0 k_x \\ -h_0 k_x & k_{\psi} + h_0^2 k_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 57663 & -0.9344(57663) \\ -0.9344(57663) & 228990 + (0.9344)^2(57663) \end{bmatrix}$$

Cálculo de las frecuencias naturales de vibración.

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{0.059069} = 106.4 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = \frac{2\pi}{0.026615} = 236 \text{ rad/s}$$

$$f_1 = 16.93 \text{ Hz}$$

$$f_2 = 37.57 \text{ Hz}$$

También se puede utilizar la ecuación ( 5-26 ) para obtener las frecuencias naturales.

i) Cálculo de las amplitudes ( $L = h_0$ ), ( $\psi = \phi$ ).

$$\Delta(\omega)^2 = \left\{ \left( \omega^4 - \omega^2 \left( \frac{\omega_{n\psi}^2 + \omega_{nx}^2}{\gamma} - \frac{4\xi_x \xi_\psi \omega_{nx} \omega_{n\psi}}{\gamma} \right) + \frac{\omega_{nx}^2 \omega_{n\psi}^2}{\gamma} \right)^2 + 4 \left( \xi_x \frac{\omega_{nx} \omega}{\gamma} (\omega_{n\psi}^2 - \omega^2) + \xi_\psi \frac{\omega_{n\psi} \omega}{\gamma} (\omega_{nx}^2 - \omega^2) \right)^2 \right\}^{1/2} \quad (5-29)$$

$$\Delta(\omega)^2 = \left\{ \left( (47.12)^4 - (47.12)^2 \left[ \frac{161.66^2 + 121.21^2}{0.6089} - \frac{4 \times 0.36 \times 0.2094 \times 121.21 \times 161.66}{0.6089} \right] + \frac{121.21^2 \times 161.66^2}{0.6089} \right)^2 + 4 \left[ \frac{0.36 \times 121.21 \times 47.12}{0.6089} (161.66^2 - 47.12^2) + \frac{0.2094 \times 161.66 \times 47.12}{0.6089} \right]^2 \right\}^{1/2}$$

$$\Delta(\omega)^2 = 5.5651 \times 10^8$$

La amplitud por la vibración horizontal es

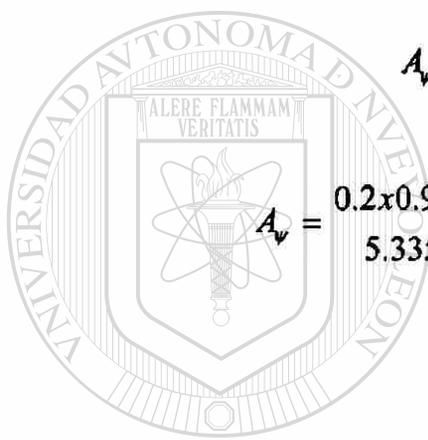
$$A_x = \frac{P_x}{mM_m} \frac{\left[ (-M_m \omega^2 + k_\psi + h_0^2 k_x)^2 + 4\omega^2 \left( \xi_\psi \sqrt{k_\psi M_{m0}} + h_0^2 \xi_x \sqrt{k_x m} \right)^2 \right]^{1/2}}{\Delta(\omega^2)} \quad (5-30)$$

$$A_x = \frac{0.2}{3.9246 \times 5.3354 \times 5.5651 \times 10^8} \left[ \left( -5.3354 \times 47.12^2 + 228990 + 0.9344^2 \times 57663 \right)^2 + 4 \times 47.12^2 \left( \frac{0.2094 \sqrt{228990 \times 8.762} + 0.9344^2 \times 0.36}{x \sqrt{57663 \times 3.9246}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$A_x = 4.6473 \times 10^{-6} \text{ m} = 0.0046 \text{ mm}$$

Amplitud por el cabeceo

$$A_v = \frac{P_x h_0 \omega_{nx} (\omega_{nx}^2 + 4\xi_x \omega^2)^{\frac{1}{2}}}{M_m \Delta(\omega^2)} \quad (5-31)$$



$$A_v = \frac{0.2 \times 0.9344 \times 121.21 (121.21^2 + 4 \times 0.36 \times 47.12^2)^{\frac{1}{2}}}{5.3354 \times 5.5651 \times 10^8}$$

$$A_v = 1.02 \times 10^{-6} \text{ rad}$$

Amplitud horizontal total.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$A_h = A_x + hA_v \quad (7-37)$$

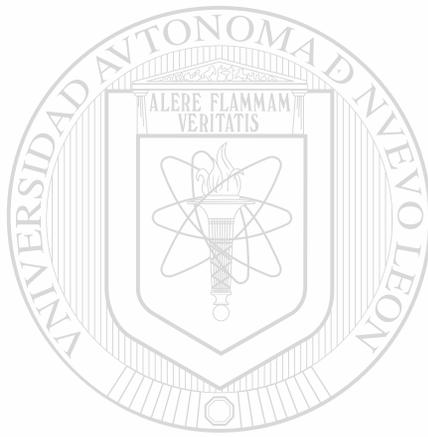
$$A_h = 0.0046 + (2.15 - 0.9344)(1.02 \times 10^{-6})(10^3) = 0.0058 \text{ mm}$$

Modelo matemático No. 4 (Vibración horizontal +cabeceo con aislamiento).

Utilizando los datos del caso No. 2 se obtendrán las amplitudes de vibración y sus frecuencias naturales mediante el programa CAL-91.

a) Cálculo de las masas.

No se considera necesario colocar un bloque de concreto sobre los aisladores, además, para permitir una comparación directa la masa  $m_1$  será únicamente la masa de la maquinaria.



$$m_1 = \frac{W_1}{g} \quad (7-29)$$

$$m_1 = \frac{2.5}{9.81} = 0.2548 \text{ ton-s}^2/\text{m}$$

$$m_2 = \frac{W_2}{g} \quad (7-30)$$

$$m_2 = \frac{36}{9.81} = 3.6697 \text{ ton-s}^2/\text{m}$$

donde

$W_1$  = Peso del compresor

$W_2$  = Peso de la cimentación

b) Datos para cálculo obtenidos del modelo No. 3.

$$I_2 = M_m = 5.3354 \text{ ton m s}^2$$

$$k_{x1} = 135.44 \text{ ton/m (Rigidez total del aislador del modelo No. 2)}$$

$$k_{x2} = 57663 \text{ ton/m}$$

$$k_{\psi 2} = 228990 \text{ ton m/rad}$$

$$h = (2.15 - h_o) = (2.15 - 0.9344) = 1.2156 \text{ m}$$

c) Determinación de las frecuencias naturales.-

Para obtener las frecuencias naturales se usarán las matrices ( 7-22 ).

Sustituyendo los datos del inciso ( b ).

Matrices estructurales.

Matriz de masas.

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ m_1 h & 0 & I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2548 & 0 & 0 \\ 0 & 3.6697 & 0 \\ 0.3097 & 0 & 5.3354 \end{bmatrix}$$

Matriz de Rigideces.

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{x1} & -k_{x1} & -k_{x1}h \\ -k_{x1} & k_{x1} + k_{x2} & k_{x1}h \\ 0 & 0 & k_{\psi 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 135.44 & -135.44 & -164.64 \\ -135.44 & 57798.44 & 164.64 \\ 0 & 0 & 228990 \end{bmatrix}$$

Cálculo de las frecuencias naturales de vibración usando el programa CAL-91 (ver Apéndice C).

Las frecuencias circulares se definen como:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (7-32)$$

entonces

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{0.27298} = 23 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = \frac{2\pi}{0.050063} = 125.51 \text{ rad/s}$$

$$\omega_3 = \frac{2\pi}{0.029226} = 215 \text{ rad/s}$$

$$f_1 = \frac{23}{2\pi} = 3.66 \text{ Hz}$$

$$f_2 = \frac{125.51}{2\pi} = 20 \text{ Hz}$$

$$f_3 = \frac{215}{2\pi} = 34.2 \text{ Hz}$$

d) Formas modales.-

Tabla 7.1

<b>FORMAS MODALES</b>			
Masas	Modos de Vibrar		
	1	2	3
1	1.9792E+00	-1.7490E-02	-5.5217E-01
2	4.7994E-03	5.2199E-01	6.6888E-04
3	1.4359E-03	-5.8862E-04	4.4906E-01

e) Cálculo de las amplitudes de vibración.-

Para obtener la respuesta del sistema de tres grados de libertad del modelo No. 4 se utilizará una técnica de análisis modal. Este método de análisis consiste en calcular la respuesta de cada modo normal individualmente y luego superponer las respuestas individuales para calcular la solución total.

Existen algunas limitantes para la aplicación de este método las cuales son:

( 1 ) Las fuerzas dinámicas que actúan en las masas deben seguir una misma variación, por ejemplo que sean fuerzas armónicas. ( 2 ) Las fuerzas deben actuar en una misma frecuencia. Sin embargo, estas restricciones pueden superarse si se utilizan métodos numéricos en la solución de las ecuaciones modales.

La teoría para derivar la siguiente ecuación se establece en la referencia ( "Design of Structures and Foundations for Vibrating Machines" de Arya, O'Neill y Pincus, pag. 166 ).

El desplazamiento total para la masa  $r$  es dado por la superposición de los  $N$  modos:

$$X_r(t) = \sum_{n=1}^N A_{rn}(M)_n \frac{\sum_{r=1}^j F_{r1} A_{rn}}{\omega_n^2 \sum_{r=1}^j M_r A_{rn}^2} f(t) \quad (7-38)$$

En el apéndice A se realiza el cálculo de las respuestas dinámicas utilizando la ecuación ( 7-38 ), en la tabla 7.2 se muestran los resultados de las amplitudes máximas.

Tabla 7.2

TABLA DE CALCULO DEL ANALISIS DE LA RESPUESTA MODAL										
Modo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1.979E+00	0.2	0.39584	0.2548	9.981E-01				
	2	4.799E-03	0	0	3.6697	8.453E-05	529	7.48E-04	0.3128	4.6285E-04
	3	1.436E-03	0.2431	0.0003491	5.3354	1.100E-05				
	Σ			0.3961891		0.99821				
2	1	-1.749E-02	0.2	-0.003498	0.2548	7.794E-05				
	2	5.220E-01	0	0	3.6697	9.999E-01	15752.76	-2.31E-07	1.1104	9.8834E-07
	3	-5.886E-04	0.2431	-0.000143	5.3354	1.849E-06				
	Σ			-0.003641		0.99998				
3	1	-5.522E-01	0.2	-0.110434	0.2548	7.769E-02				
	2	6.689E-04	0	0	3.6697	1.642E-06	46225	-3.16E-08	1.0456	3.2108E-07
	3	4.491E-01	0.2431	0.1091665	5.3354	1.076E+00				
	Σ			-0.001268		1.15360				

Para la definición del significado de cada columna ver el apéndice A.

Amplitud por la vibración horizontal en los aisladores.

$$A_{x1} = 0.4629 \text{ mm}$$

Amplitud por la vibración horizontal en el bloque de cimentación.

$$A_{x2} = 0.0010 \text{ mm}$$

Amplitud por cabeceo.



$$A_{\psi} = 0.32108 \times 10^{-6} \text{ rad}$$

Amplitud horizontal total.

UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

$$A_h = 0.0010 + (2.15 - 0.9344)(0.32108 \times 10^{-6})(10^3) = 0.0014 \text{ mm}$$

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

®

f) Determinación de la Transmisibilidad y la Eficiencia del Aislamiento.

$$\beta = \frac{\omega_c}{\omega} \quad (7-28)$$

$$\beta = \frac{47.12}{23} = 2.05$$

Despreciando el amortiguamiento de los aisladores ( $\zeta = 0$ ) entonces la transmisibilidad es

$$T = \frac{1}{1 - \beta^2} \quad (6-2)$$

$$T = \frac{1}{1 - (2.05)^2} = -0.3123$$

La transmisibilidad es del 31 % aproximadamente y la eficiencia del aislamiento es

$$R = (1 - T) \quad (7-33)$$

$$R = (1 - 0.3123) = 0.6877$$

$$R = 69\%$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

®

*R* representa el porcentaje de reducción de la vibración la cual se transmite a la cimentación.

## **CAPITULO 8**

### **ASPECTOS CONSTRUCTIVOS DE CIMENTACIONES PARA MAQUINARIA**

#### **8.1 Construcción de Bloques de Cimentación**

La construcción de una cimentación para una maquinaria es muy importante, ya que si no se tiene el cuidado necesario durante esta etapa todo el diseño cuidadoso y el dinero invertido en su desarrollo será desperdiciado. Además, las reparaciones posteriores que se realicen en la cimentación generarán interrupciones en la operación de la maquinaria y la consiguiente pérdida de producción; estas pérdidas, en un momento dado, pueden exceder el costo de la misma máquina y de su cimentación.

Algunos defectos de construcción que pueden ocasionar mal funcionamiento de la maquinaria son por ejemplo, un curado deficiente del concreto, una altura de vaciado inadecuada, interrupciones indeseables durante el colado, negligencia en la colocación de juntas de construcción, y un alineamiento imperfecto de la maquinaria con la cimentación. Debido a descuidos en lo referente a las aberturas y cavidades, éstas pueden moverse durante el colado, lo cual originará trabajos adicionales posteriores. Debido a todo lo anterior, la construcción de una cimentación para maquinaria es un proyecto que requiere

sumo cuidado, y precauciones adicionales a las normalmente observadas en la construcción de estructuras de concreto reforzado. Así también, las cimentaciones requieren de una adecuada compactación, que origine una densa matriz para tener buena adherencia con el acero de refuerzo.

Los requerimientos estándar de la construcción del concreto reforzado están establecidos por el ACI 318-95 (American Concrete Institute, 1995), pero los problemas específicos en la construcción de cimentaciones para maquinaria y otras consideraciones adicionales, se discutirán a continuación:

**El concreto.**

1. La selección de los agregados y el proporcionamiento de la mezcla de concreto debe ser hacerse de acuerdo con las especificaciones dadas por el ACI 301, o códigos similares, relacionados con el uso del concreto para la construcción.
2. La resistencia última a la compresión, del concreto, debe estar conforme al criterio del ACI 318-95. Si no se dispone de la información necesaria, la resistencia última del concreto a la compresión no deberá ser menor que 150 kg/cm<sup>2</sup> o 2.2 ksi.
3. El concreto deberá colarse en capas horizontales. La primera capa será de 300 mm (12 pulg) y las coladas subsecuentes, en capas de 400 mm (16 pulg).
4. La altura del vaciado deberá ser la adecuada para evitar la segregación del concreto.

5. La cimentación debe ser colada en una sola operación, para evitar las juntas "frías". Si es necesario, se tendrá que acortar el tiempo entre dos coladas sucesivas, y esta duración no deberá exceder de 30 min.
6. Debido a las dificultades prácticas, algunas veces el colar en una sola operación no es posible, y las juntas frías son inevitables. En estos casos, se deberá considerar una junta de construcción y su localización se escogerá cuidadosamente. El bloque debe tener un comportamiento monolítico y la junta de construcción deberá tener esta condición. Esto se logra por medio de un adecuado número de varillas y candados de corte, a través de la junta, además de un mayor control de la calidad y supervisión durante el colado. Las varillas deberán tener la longitud suficiente para asegurar una capacidad total de adherencia. Su longitud deberá ser, al menos, 4db o 12 pulg. la que sea mayor. Las varillas a utilizar pueden ser del # 5 o # 6. Para lograr una adecuada junta de construcción, en la masa del concreto, se deben proveer conectores de cortante (varillas en forma de U) en el nivel de la junta. Para obtener una fuerte adhesión, entre el concreto nuevo y el viejo, es recomendable escarificar la superficie de contacto y limpiarla vigorosamente con un cepillo de alambre; posteriormente, cubrirla con una capa delgada de lechada, antes de colar el concreto nuevo. El código del ACI especifica recomendaciones para asegurar una adecuada junta de construcción.
7. Deberá evitarse el pandeo en el concreto, debido a fallas en la cimbra o en el molde, que puedan originar desbastes posteriores.

8. Las áreas alrededor de los huecos y cavidades deberán ser tratadas cuidadosamente.
9. La cimentación deberá ser curada adecuadamente. Un curado mal realizado puede originar grietas por contracción, que afectarían posteriormente la operación de la maquinaria.

Refuerzo para la cimentación tipo bloque.

Las cimentaciones de bloque masivo no tienen los mismos requerimientos estructurales que las vigas y columnas. Por consiguiente, estas se refuerzan con porcentajes mínimos para tomar los efectos de contracción y temperatura. Según el ACI 318, el refuerzo mínimo del acero G-42 será de 0.0018 del área gruesa del concreto en cada dirección.

El acero de refuerzo no deberá espaciarse a más de 450 mm (18 pulg) centro a centro. El recubrimiento mínimo del concreto para proteger al refuerzo deberá ser al menos de 75 mm (3 pulg) en el lecho inferior y de 50 mm (2 pulg) en el lecho superior.

Los detalles de refuerzo para una cimentación tipo bloque, de una máquina de impacto, son similares a los discutidos anteriormente, excepto para la parte superior del bloque bajo el yunque, donde se requiere un refuerzo adicional para tomar los esfuerzos producidos por los impactos. El espaciamiento de las varillas, en esta parte del bloque, es usualmente de 100 mm (4 pulg) de centro a centro.

Refuerzo alrededor de aberturas y huecos.

Se deberá colocar un porcentaje refuerzo del orden del 0.5 al 0.75 % de la sección transversal de las aberturas y deberá colocarse alrededor de éstas. Este refuerzo debe ser colocado en forma de caja. En el caso de aberturas circulares, el refuerzo deberá colocarse a una longitud igual a 40 veces el diámetro de la varilla y se extenderá más allá del punto de intersección de las varillas en no menos de 300 mm (12 pulg).

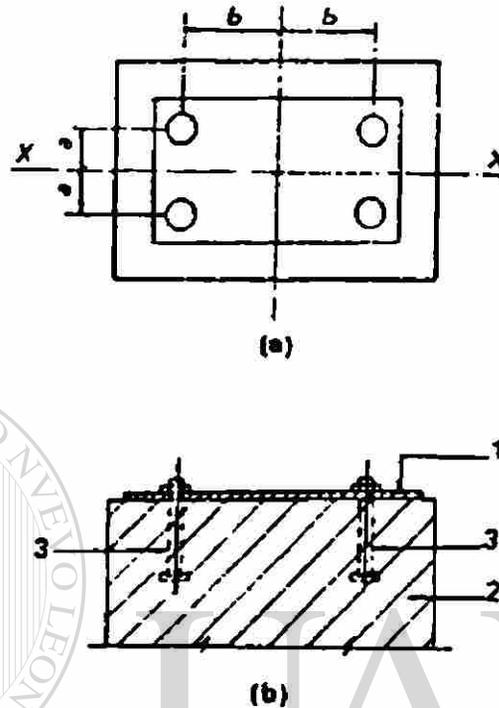
Lo mencionado anteriormente se refiere a las cimentaciones tipo bloque, ya que son las estudiadas en este trabajo; sin embargo, existen indicaciones similares para otros tipos de cimentaciones, como por ejemplo, las del tipo marco.

## 8.2 Instalación y Conexión de la Maquinaria a la Cimentación

La maquinaria, la placa base, y otros equipos que tengan tolerancias precisas para su colocación, no pueden ser colocadas directamente en el concreto, debido a que las irregularidades en la superficie de éste generarían problemas de alineamiento.

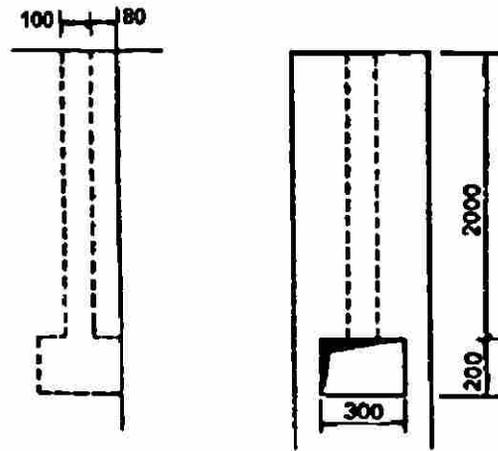
Después del colado del concreto, la maquinaria se fija a la cimentación con una placa base y anclas. El nivel de vaciado de la cimentación estará en el mismo nivel que la placa base y se usará mortero para realizar la nivelación final de la placa. El espesor del "grout" bajo la placa base varía, de 20 a 50 mm (0.75 pulg a 2 pulg), dependiendo del tamaño de la misma. La placa base se fija a la

cimentación mediante las anclas, las cuales se colocan en su posición, antes del vaciado de la cimentación y se mantienen en su lugar preciso utilizando una plantilla (ver figura 8.1). La plantilla se remueve después del vaciado.



**Fig. 8.1** Detalle del Posicionamiento de las Anclas. ( 1 ) Plantilla, ( 2 ) Cimentación, ( 3 ) Anclas.

Alternativamente, utilizando adecuadas cimbras se pueden dejar agujeros en el concreto, en la posición de las anclas, los cuales serán rellenos con mortero, después de colocar la placa base y alinear las anclas. Los agujeros para las anclas no deberán ser muy grandes, un tamaño de 150 x 150 mm (6 x 6 pulg) es generalmente el adecuado. La mínima distancia entre los agujeros para las anclas y el borde de la cimentación no deberá ser menor que 80 mm (3 pulg), como se muestra en la figura 8.2.



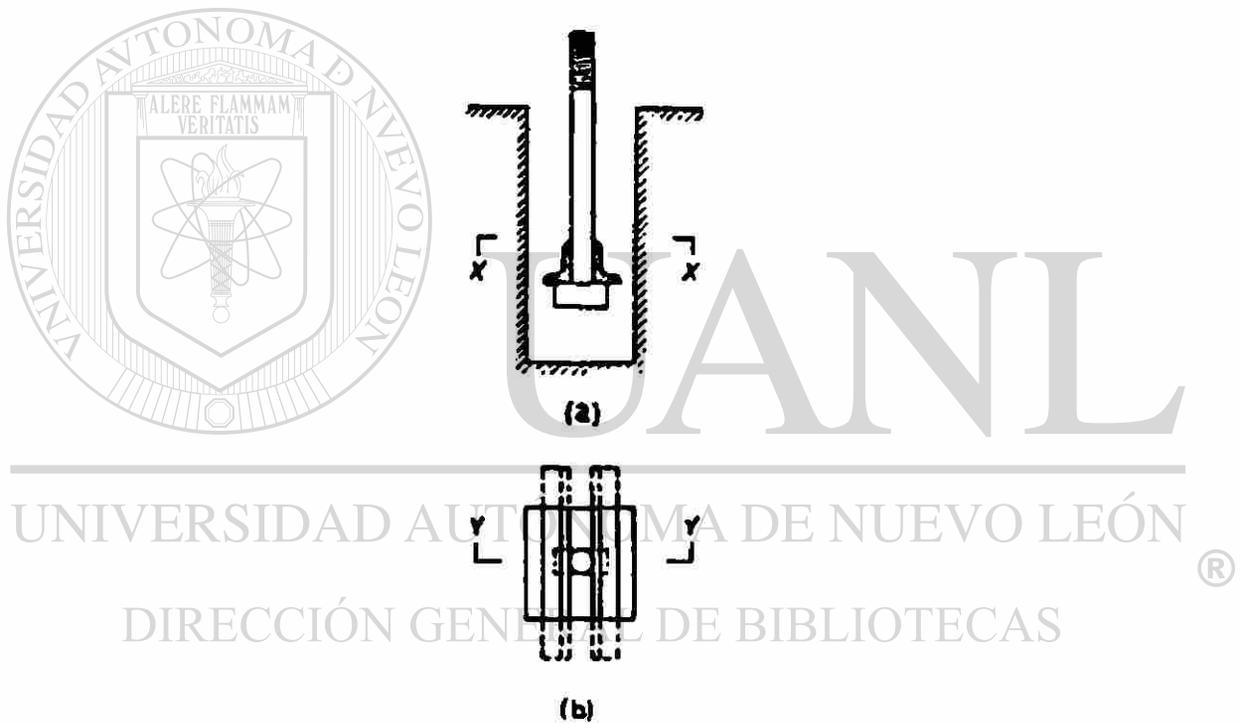
**Fig. 8.2** Detalles del Agujero para las Anclas Cerca del Borde

La longitud de las anclas es usualmente determinada considerando la adherencia y no debe ser menor que 40 veces el diámetro de las anclas. En el caso de no ser posible proveer la longitud total a las anclas, se deberá usar un arreglo similar al mostrado en la figura 8.3. La posición del ancla, invariablemente, se fijará con referencia al eje de la máquina.

El "grout" bajo la placa deberá ser de un tipo sin contracciones y deberá asegurar un contacto completo con la superficie del concreto de la cimentación, así como mantener un soporte uniforme. Pueden usarse los "grout" de cemento que consiste de cementos hidráulicos y aditivos expansivos, que compensan los efectos de contracción, o "grout" epóxicos, con mezclas especiales de agregados y arenas que reducirán o eliminarán la contracción. Los "grout" epóxicos tienen la ventaja de la resistencia química, alta resistencia

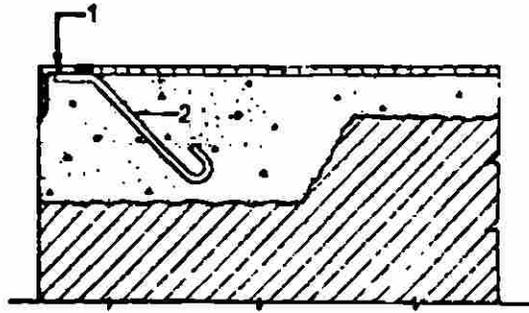
inicial y tolerancia al impacto; pero son sensibles al incremento de la temperatura.

El "grout" debe ser colocado bajo la placa base cuidando que no quede aire o agua atrapada. En el comercio se dispone de mezclas de "grout" ya preparados; sin embargo, se recomienda que la selección se haga después de una cuidadosa consideración de sus propiedades y de acuerdo con los requerimientos específicos del equipo a instalar.



**Fig. 8.3** Detalles Típicos de Anclas

Para prevenir el estallamiento del concreto en los bordes de la cimentación, se colocará un ángulo de acero en todo el borde como se indica en la figura 8.4.



**Fig. 8.4** Detalle Típico de Angulo de Borde. ( 1 ) Angulo de Acero, ( 2 ) Ancla.

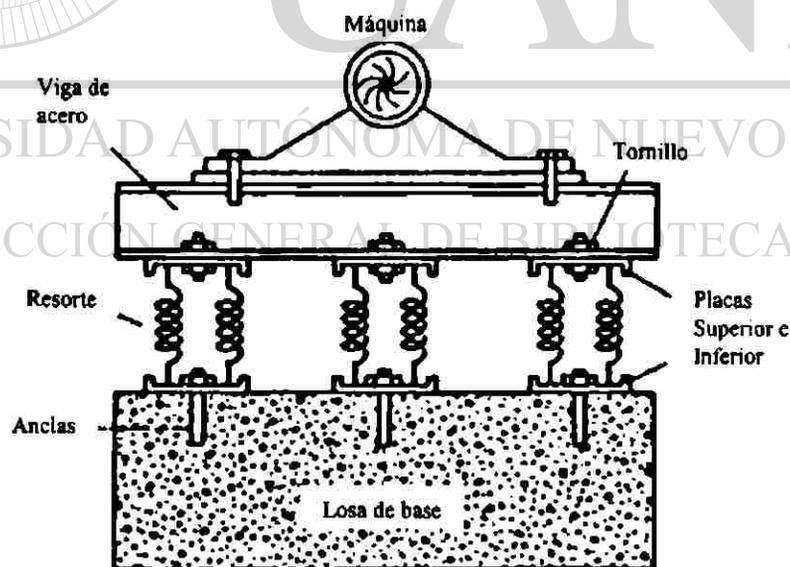
### **8.3 Instalación de Resortes Aisladores de Vibración**

Los métodos para instalar resortes aisladores en una cimentación de maquinaria dependen del tipo de sistema de aislamiento. Existen dos diferentes tipos de sistemas aisladores con resortes: el tipo soportado y el tipo suspendido. Estos sistemas fueron descritos en el capítulo 6.

**Tipo Soportado.**

Cuando no se requiere que la masa de concreto se apoye sobre los resortes.- Para sistemas de cimentación soportadas sobre resortes, en donde no se requiere una masa pesada sobre éstos, la maquinaria puede montarse directamente en un marco rígido metálico, apoyado sobre los resortes (ver figura 8.5). Este arreglo se usa para un buen balanceo de la maquinaria, la cual es esencialmente afectada por las fuerzas desbalanceadas, asociadas con las altas frecuencias armónicas de la operación. Los principales pasos de la construcción de tales cimentaciones son los siguientes:

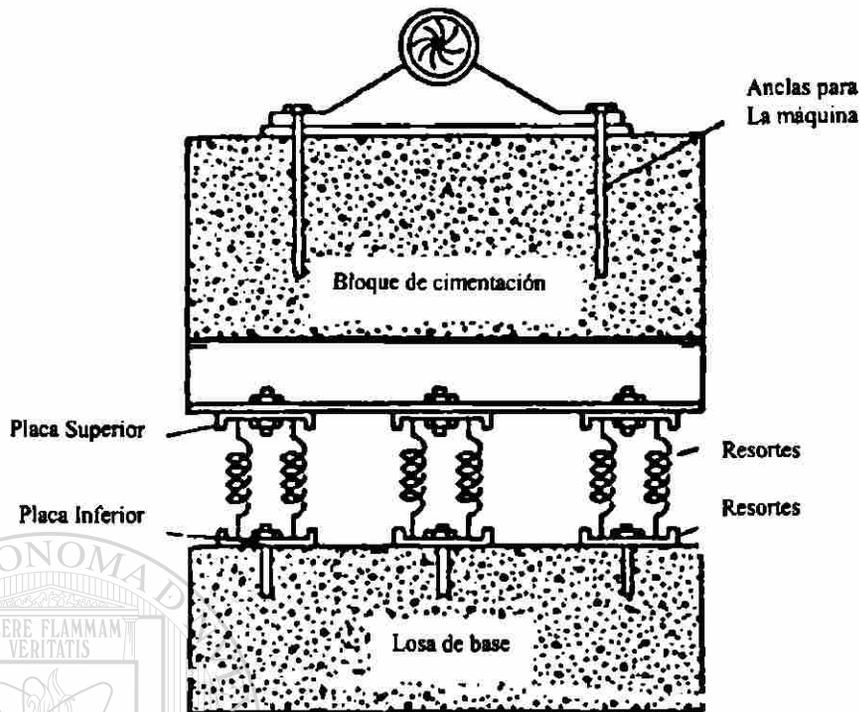
1. La construcción de la losa de la base es similar a la de una cimentación en bloque. Su peralte depende del diseño de la cimentación para la máquina y generalmente varía de 0.3 a 1.2 m.
2. Antes del colado de la losa de la base, se colocarán las anclas en los lugares establecidos, según el diseño; éstas anclarán las placas bajo los resortes aisladores.
3. Los resortes son colocados sobre las placas, y éstos son cubiertos por otras placas que se fijarán a un marco metálico.
4. Se instala un marco rígido metálico sobre las placas de los aisladores (ver figura 8.5). Este marco consistirá en vigas de acero.
5. Se nivela el marco metálico para la colocación de la maquinaria ajustando los tornillos de los resortes.



**Fig. 8.5** Sistema Aislador de Resortes del Tipo Soportado con una Máquina Sujeta al Marco Metálico

Cuando se requiere que la masa de concreto se apoye sobre los resortes.- Se requiere una masa pesada de concreto sobre los resortes, generalmente, en los casos donde la operación de la maquinaria induce grandes fuerzas desbalanceadas, producidas por altas frecuencias armónicas de operación. Esta masa de concreto se coloca sobre los resortes aisladores, como se indica en la figura 8.6. Los principales procesos de la construcción de este tipo de cimentación se mencionan a continuación:

1. La construcción de la losa base y la colocación de las anclas para las placas de los resortes son similares al caso anterior.
2. Cuando el concreto ha sido colado, la superficie de la losa de la base se cubre con papel, para evitar el contacto directo con el bloque de concreto superior, el cual se colará sobre éste.
3. Las placas colocadas bajo los resortes se fijan en su posición indicada.
4. Se instala el marco rígido metálico sobre las placas de los aisladores.
5. Se construye la cimbra del bloque superior y se vacía el concreto. Las vigas del marco metálico son embebidas en la parte inferior del bloque de concreto. Dependiendo del arreglo de los aisladores y del tipo de marco usado, se necesitarán huecos en la parte inferior del bloque de concreto para poder acceder los resortes.
6. Los resortes se colocan en su posición después de colar el bloque de concreto superior. La parte superior de los resortes estará bajo las placas ancladas al marco metálico.
7. El bloque de concreto se nivelará ajustando los tornillos de los resortes.



**Fig. 8.6 Sistema Aislador de Resortes del Tipo Soportado con un Bloque de Cimentación Superior**

#### Tipo Suspendido.

Una cimentación con sistema de aislamiento del tipo suspendido (figura 6.11) se construye de forma similar a las cimentaciones del tipo soportado. Los

principales pasos para su construcción son los siguientes:

1. Colar la losa de cimentación bajo los resortes.
2. Cuando el concreto ha endurecido, colocar dos o tres capas de papel impermeable, en la losa de cimentación (figura 6.10).
3. Se instala un marco rígido sobre la losa de cimentación, el cual sirve como soporte de las placas de anclaje para los tornillos reguladores del aislador.

4. Cuando se coloca la cimbra para el bloque de concreto, habrá que hacer lo necesario para formar cavidades en el concreto para cada uno de los aisladores.
5. Una vez que el concreto ha sido colado, se colocan los aisladores. Estos se ubican sobre la losa inferior y sobre éstos se monta una losa soportada superior la cual se atornilla a las traveses principales de acero.
6. Se nivela la cimentación, ajustando los tornillos de los resortes.

## **8.4 Aspectos Generales**

### **8.4.1 Cambio a la Frecuencia de la Cimentación.**

Cuando los datos de diseño son inciertos o el margen de seguridad no puede mantenerse, con un adecuado nivel contra la resonancia, es deseable dejar una debida provisión en la construcción, para cambios posteriores que originen modificaciones en la frecuencia natural de la cimentación.

El incremento del área de la base de la cimentación resultaría en un incremento en la rigidez y la consecuente adición a la masa no es muy considerable; de tal manera que esto incrementará la frecuencia natural. Para reducir la frecuencia natural es conveniente adicionar masa en una misma área base. En cualquier caso, se deberán dejar las debidas provisiones, durante la construcción, para poder realizar estas alteraciones. Para facilitar el agrandamiento de la cimentación, se dejarán varillas embebidas, de manera que se asegure una buena adherencia entre el concreto fresco y el concreto endurecido.

Al alterar la frecuencia natural de la cimentación, deberá buscarse un valor adecuado con respecto a la resonancia, y éste puede ser de  $0.7f_m > f_n > 1.3f_m$ . En donde  $f_m$  es la velocidad de operación de la máquina y  $f_n$  es la frecuencia natural del sistema.

#### 8.4.2 Adherencia entre el Concreto Fresco y el Endurecido.

Tal vez sea necesario adherir concreto fresco al concreto endurecido, para reparar una superficie de concreto defectuosa debido a una interrupción durante el colado o por un curado inadecuado. También, si por alguna razón la superficie del concreto después del colado fuese dañada, es necesario proveer una superficie dura para el buen funcionamiento de la maquinaria. En tales casos, el área afectada deberá ser escarificada y limpiada. Posteriormente, se dejarán conectores a corte directo en la superficie; esto con la finalidad de asegurar una trabazón adecuada. El número y el tamaño de estos conectores de concreto dependerán de la extensión del área a reparar. Como mínimo se colocarán cuatro conectores de cortante.

La superficie a reparar, incluyendo las áreas de los conectores, podrá ser tratada con un concreto epóxico; así también, se deberá agregar varillas del # 3 mínimo, ancladas en los conectores de corte.

## CAPITULO 9

### DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Sobre la base de los cálculos realizados en el capítulo 7 y las gráficas mostradas en el Apéndice B, los resultados de los análisis hechos para los distintos modelos matemáticos nos sugieren entre otras cosas lo siguiente:

Con respecto al modelo No. 1, el cual tiene solamente un grado de libertad y está sujeto a vibraciones del tipo vertical, se observó que la amplitud máxima de la respuesta está desfasada de la frecuencia de excitación; esto sucede, principalmente cuando existe un porcentaje del amortiguamiento crítico del suelo mayor que el 20 %.

De tal manera que la " resonancia " ocurre no necesariamente cuando la frecuencia de operación es igual a la frecuencia natural, sino cuando la relación de frecuencias tiene el siguiente valor:

$$\beta = \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

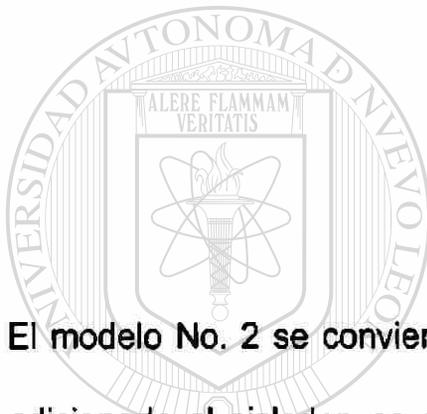
para una fuerza de excitación es constante. En el caso de una fuerza de excitación que dependa de la frecuencia de operación, como es el caso

general, entonces la " resonancia " se presenta cuando la relación de frecuencias tiene un valor de:

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1-2\xi^2}}$$

sin embargo; para ambos casos el factor de amplificación dinámica máximo será igual a

$$FAD = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$



El modelo No. 2 se convierte en un sistema de dos grados de libertad. Al ser adicionado el aislador, se observó que la acción de los aisladores reduce en forma considerable la frecuencia de excitación que se transmite al bloque de cimentación; es decir, la eficiencia del aislamiento es alta y, por consiguiente, el porcentaje de transmisibilidad es bajo.

Lo anterior se consigue debido a que la relación de frecuencias ( $\beta$ ) es mayor que el valor crítico  $\sqrt{2}$ , el cual es el punto en que coinciden las curvas " Transmisibilidad contra Relación de Frecuencias " mostradas en la gráfica No. 4 y las cuales tienen diferentes porcentajes del amortiguamiento crítico.

De acuerdo con la gráfica mencionada al incrementar el amortiguamiento, cuando  $\beta < \sqrt{2}$ , disminuye la transmisibilidad del sistema; cuando se

incrementa el amortiguamiento para valores de  $\beta > \sqrt{2}$ , aumenta la transmisibilidad. Así también, puede verificarse que los valores de transmisibilidad son menores para  $\beta > \sqrt{2}$ , lo cual sugiere que, para aumentar la eficiencia del aislamiento, se requiere que para altas frecuencias de operación existan frecuencias naturales de vibración bajas.

En el diseño del sistema de aislamiento, se asume que la velocidad de operación es constante, las fluctuaciones en la frecuencia de operación afectarían adversamente a la eficiencia del aislamiento, como puede observarse en la gráfica 1, donde una variación en la frecuencia de operación podría ocasionar un incremento considerable en las amplitudes.

Al plantear la solución modal para poder obtener las frecuencias del modelo No. 4, el cual tiene tres grados de libertad, no se obtuvieron las gráficas de respuesta que pudieran comparar a este modelo con el modelo No. 3, tal como

---

se realizó con las vibraciones verticales. Lo anterior con la finalidad de observar el comportamiento del sistema con aisladores y sin ellos. ®

Sin embargo, de la misma forma que, en las vibraciones verticales, el sistema de aislamiento fue benéfico, ya que produjo una considerable disminución en la frecuencia transmitida a la cimentación, tanto para el modo horizontal como para el modo por cabeceo.

Por consiguiente, las amplitudes de vibración en la cimentación se redujeron de una manera importante.

## CONCLUSIONES FINALES

1. El cuerpo rígido que representa al bloque de cimentación y que se encuentra apoyado teóricamente en un soporte elástico, tiene estrictamente seis grados de libertad; sin embargo, se pueden plantear modelos matemáticos de uno, dos y, en ciertos casos, de tres grados de libertad sin afectar la validez de los resultados.
2. La veracidad de los resultados obtenidos de los modelos matemáticos discretos, depende en gran medida de los valores elegidos o calculados para la masa, el coeficiente de amortiguamiento y la constante de rigidez; según Richart y Whitman (1970), la estimación de una respuesta dinámica no puede ser mejor que la de sus constantes.
3. En el caso de las vibraciones verticales, que han sido motivo de una mayor cantidad de pruebas experimentales, los resultados obtenidos por Richart y Whitman (1967) muestran que la teoría elástica predice satisfactoriamente el comportamiento de los modelos experimentales, siempre y cuando las aceleraciones se conserven menores que 0.5g, lo cual es común en cimentaciones para maquinaria. Para aceleraciones mayores la respuesta del suelo deja de ser lineal.
4. Los valores de las constantes de rigidez y amortiguamiento, obtenidos por la teoría elástica; tienen que afectarse cuando la cimentación está piloteada, el bloque de cimentación se encuentra totalmente embebido en el suelo, o se presentan estratos más rígidos a cierta profundidad respecto a la superficie, etc. Existe incertidumbre respecto a estos tópicos, ya que la evidencia

experimental no es suficiente. Se recomienda en estos casos realizar las pruebas necesarias para cada problema en particular.

5. La suposición de que los sistemas de aislamiento aseguran una baja transmisión de la fuerza actuante al bloque de cimentación, se cumple parcialmente, ya que no resulta válido para todas las frecuencias naturales del sistema; esto se debe a que, si la relación de frecuencias  $\beta$  es mayor al valor crítico  $\sim 2$ , se logra una aceptable eficiencia en el aislamiento; en caso contrario, para las relaciones de frecuencia menores al valor crítico, ocurre una amplificación en el movimiento de la masa, siendo innecesario colocar aisladores. De manera que para tener altas relaciones de frecuencia  $\beta$ , se requiere que la masa de la maquinaria, más el bloque de concreto, sean lo suficientemente grandes, lo cual resulta antieconómico, o bien, que el sistema de aislamiento sea muy flexible, para que se considere efectivo.

6. La necesidad de predecir más exacta y completamente el comportamiento dinámico de las cimentaciones para maquinaria, trae inevitablemente consigo el planteamiento de nuevos y más complicados problemas que se deben resolver. Es necesario, por ejemplo, que en el diseño de este tipo de estructuras se cuide con mayor cuidado la selección de adecuados valores de las constantes de rigidez y amortiguamiento pero, sobre todo, entender el verdadero núcleo del problema, esto es, la evaluación de la respuesta del cimiento sujeto a efectos dinámicos.

## REFERENCIAS

- Barkan, D.D. ( 1962 ). "Dynamics of Bases and Foundations", New York, McGraw Hill Book Co. Inc..
- Biggs, J. M. ( 1964 ). "Introduction to Structural Dynamics", New York, McGraw-Hill Inc.
- Bowles, J.E. ( 1988 ). "Foundation Analysis and Design", New York, McGraw Hill Book Co. Inc.
- Bycroft, G. N. ( 1956 ). "Forced Vibrations of a Rigid Circular Plate on a Semi-infinite Elastic Space and on an Elastic Stratum", Philosophical Transactions, London, Royal Society.
- Cañizo, L. y Jiménez, J. A. ( 1980 ). "Geotécnia y Cimentaciones III, Cimentaciones, Excavaciones y Aplicaciones de la Geotécnia", McGraw-Hill Book Co.
- Clough, R. W. Y Penzien, J. ( 1975 ). "Dynamics of Structures", New York, McGraw-Hill Inc.
- Díaz Rodríguez, J. A. ( 1995 ). "Determinación de las Propiedades Dinámicas de los Suelos", Div. De Estudios de Posgrado Fac. de Ingeniería, UNAM.
- Dobry, R., y Gazetas, G. ( 1986 ). "Dynamic Response of Arbitrary Shaped Foundations", JGED, Proc. ASCE, Vol. 112, No. SM2.
- Dobry, R., y Gazetas, G. ( 1985 ). "Dynamic Stiffness and Damping of Foundations Using Simple Methods", Proc. Symposium: Vibration Problems in Geotechnical Engineering, ASCE.
- Lysmer, J. ( 1965 ). "Vertical Motion of Rigid Footings", Dept. of Civil Eng., U. of Michigan Report to U.S. Army Engineer Waterways Experiment Station, C.E., Vick-sburg, Miss.
- Paz, M. ( 1985 ). "Structural Dinamics", New York, Van Nostrand Reinhold.

Prakash, S., y Puri, V. K. ( 1976 ). "Foundations for Machines: Analysis and Design", New York, John Wiley & Sons Inc.

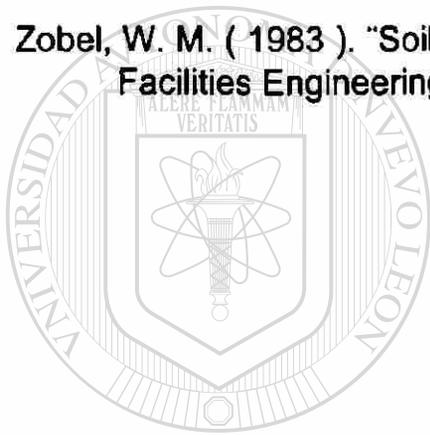
Prakash, S. ( 1965 ). "Field Investigations for Machine Foundations", Proceedings of Symposium on Foundations of Power Houses and Heavy Machine Foundations, Poona, March.

Richart, F.E., Jr. ( 1960 ). "Foundation Vibrations", Journal of Soil Mechanics and Foundations Div. , Proc. ASCE, Vol. 86, No. SM4.

Richart, F.E., Jr. y Hall, J.R., Jr. ( 1970 ). "Vibrations of Soils and Foundations", Englewood Cliffs, Prentice-Hall.

Srinivasulu, P., y Vaidyanathan, C.V. ( 1976 ). "Handbook of Machine Foundation", McGraw Hill Publishing Co. Ltd.

Zobel, W. M. ( 1983 ). "Soil Mechanics and Foundation Design Manuals", Naval Facilities Engineering Command.



UANL

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



**APENDICE A**

**DETERMINACIÓN DE LA RESPUESTA DINÁMICA MEDIANTE  
UN ANÁLISIS MODAL.**

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



**Determinación de la respuesta de un sistema de tres grados de libertad sujeto a cargas dinámicas mediante un análisis modal utilizando los datos del Modelo No. 4.-**

Ecuaciones de movimiento.-

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_{x1}(x_1 - x_2 - \psi_2 h) = F_x(t) \\ m_2 \ddot{x}_2 + C_{x2} \dot{x}_2 + k_{x2} x_2 - k_{x1}(x_1 - x_2 - \psi_2 h) = 0 \\ I_2 \ddot{\psi}_2 + C_{\psi 2} \dot{\psi}_2 + m_1 x_1 h + k_{\psi 2} \psi_2 = F_x(t) h \end{cases}$$

Funciones de fuerza.-

$$\begin{aligned} F_{x1}(t) &= 0.2 \sin 47.12t \\ F_{x2}(t) &= 0 \\ T_{\psi}(t) &= 0.2431 \sin 47.12t \end{aligned}$$

Donde la frecuencia estacionaria es  $\omega = 47.12 \text{ rad/s}$

Valores de las masas, frecuencias naturales y amortiguamiento.-

$$\begin{aligned} m_1 &= 0.2548 \text{ ton-s}^2/\text{m} \\ m_2 &= 3.6697 \text{ ton-s}^2/\text{m} \\ I_2 &= 5.3354 \text{ ton-m-s}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 23 \text{ rad/s} & \xi_1 &= 0 \\ \omega_2 &= 125.51 \text{ rad/s} & \xi_2 &= 0.36 \\ \omega_3 &= 215 \text{ rad/s} & \xi_3 &= 0.2094 \end{aligned}$$

Definición de parámetros para la tabla de cálculo.-

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

- ( 1 ) = Ubicación de la masa - 1)  $m_1$ ; 2)  $m_2$ ; 3)  $I_2$
- ( 2 ) = Amplitud modal =  $A_m$
- ( 3 ) = Función de fuerza =  $F_m$
- ( 4 ) = (  $A_m$  )(  $F_m$  )
- ( 5 ) = Masa =  $M_r$
- ( 6 ) =  $M_r ( A_m )^2$
- ( 7 ) = Cuadrado de la frecuencia natural =  $\omega_n^2$
- ( 8 ) = Constante A
- ( 9 ) = Factor de amplificación = ( M )<sub>n</sub>
- ( 10 ) = Respuesta máxima =  $X_r$

Constante A.-

$$A = \frac{\sum_{r=1}^3 F_{r1} A_{rn}}{\omega_n^2 \sum_{r=1}^3 M_r A_{rn}^2}$$

Factor de Amplificación.-

$$M = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

Respuesta máxima.-

$$X_r(t) = \sum_{n=1}^N A_{rn}(M)_n \frac{\sum_{r=1}^j F_{r1} A_{rn}}{\omega_n^2 \sum_{r=1}^j M_r A_{rn}^2} f(t)$$

TABLA DE CALCULO DEL ANALISIS DE LA RESPUESTA MODAL										
Modo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1.979E+00	0.2	0.39584	0.2548	9.981E-01				
	2	4.799E-03	0	0	3.6697	8.453E-05	529	7.48E-04	0.3128	4.6285E-04
	3	1.436E-03	0.2431	0.0003491	5.3354	1.100E-05				
	Σ			0.3961891		0.99821				
2	1	-1.749E-02	0.2	-0.003498	0.2548	7.794E-05				
	2	5.220E-01	0	0	3.6697	9.999E-01	15752.76	-2.31E-07	1.1104	9.8834E-07
	3	-5.886E-04	0.2431	-0.000143	5.3354	1.849E-06				
	Σ			-0.003641		0.99998				
3	1	-5.522E-01	0.2	-0.110434	0.2548	7.769E-02				
	2	6.689E-04	0	0	3.6697	1.642E-06	46225	-3.16E-08	1.0456	3.2108E-07
	3	4.491E-01	0.2431	0.1091665	5.3354	1.076E+00				
	Σ			-0.001268		1.15360				

Resumen de las respuestas máximas.-

$$X_{1m} = 0.4629 \text{ mm}$$

$$X_{2m} = 0.0010 \text{ mm}$$

$$\psi = 3.21E-07 \text{ rad}$$



**APENDICE B**

**GRÁFICAS DEL COMPORTAMIENTO DINÁMICO**

UANL

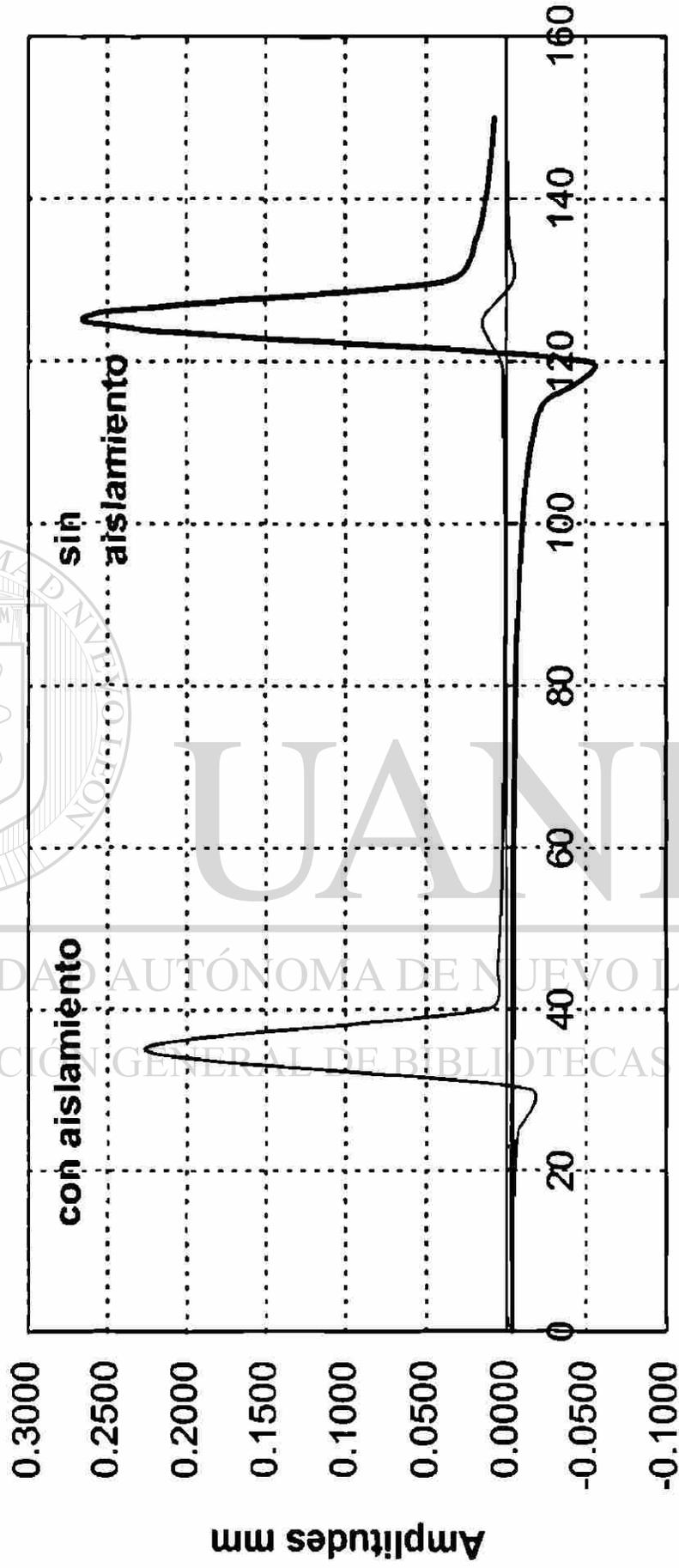
---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

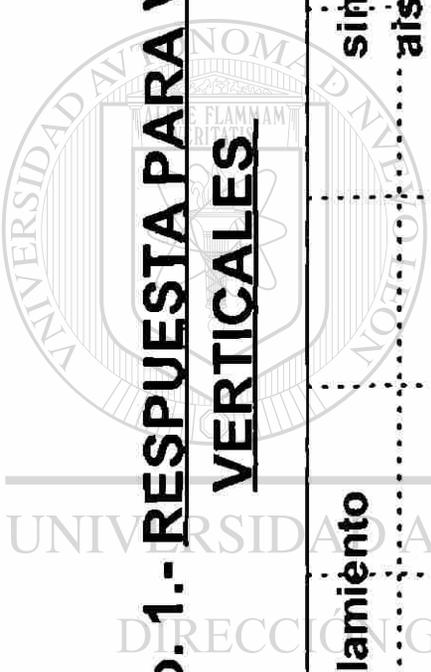


DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

# GRAFICA No.1.- RESPUESTA PARA VIBRACIONES VERTICALES



Frecuencias de Excitación  $\omega_e$

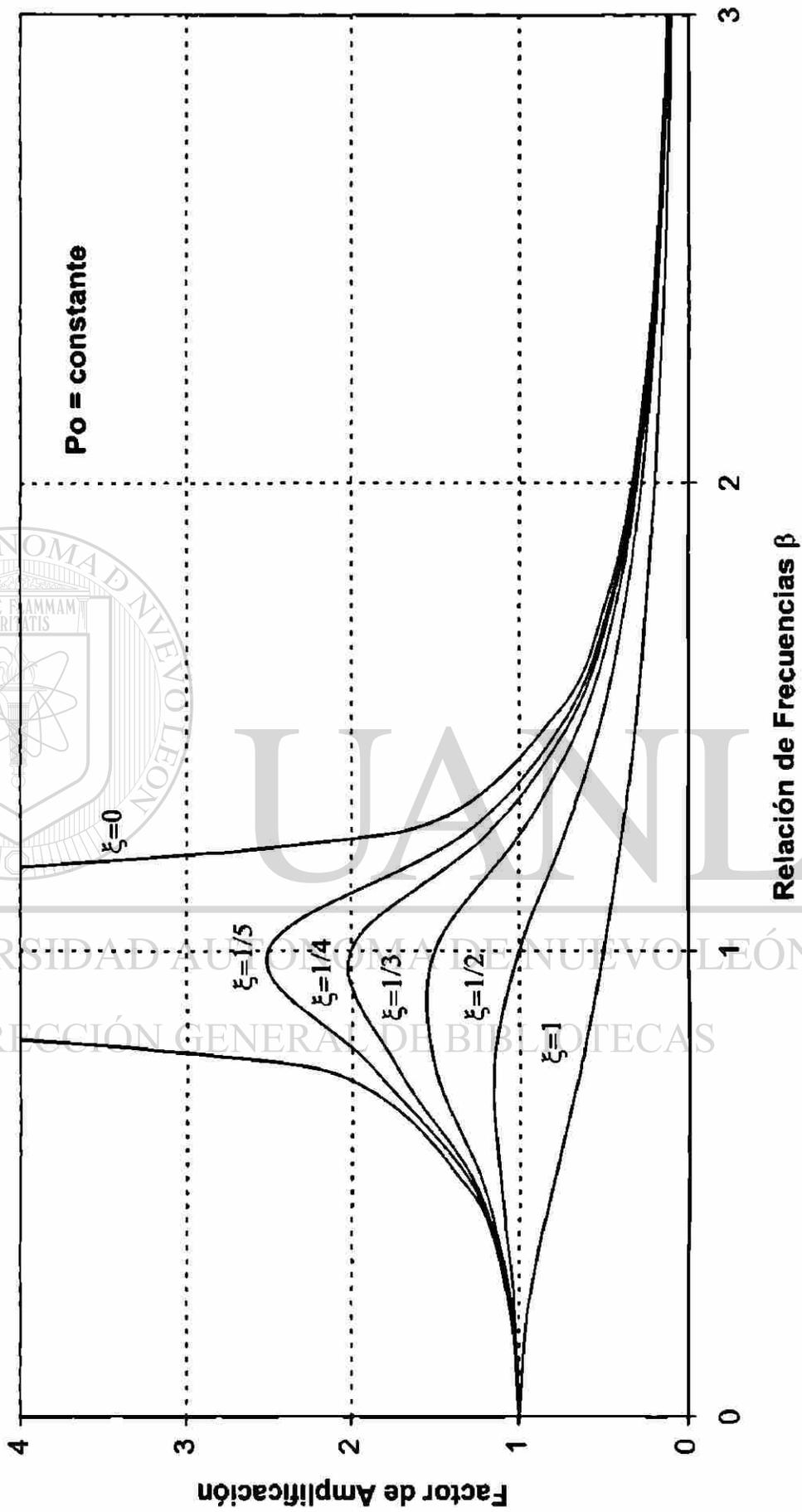


UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

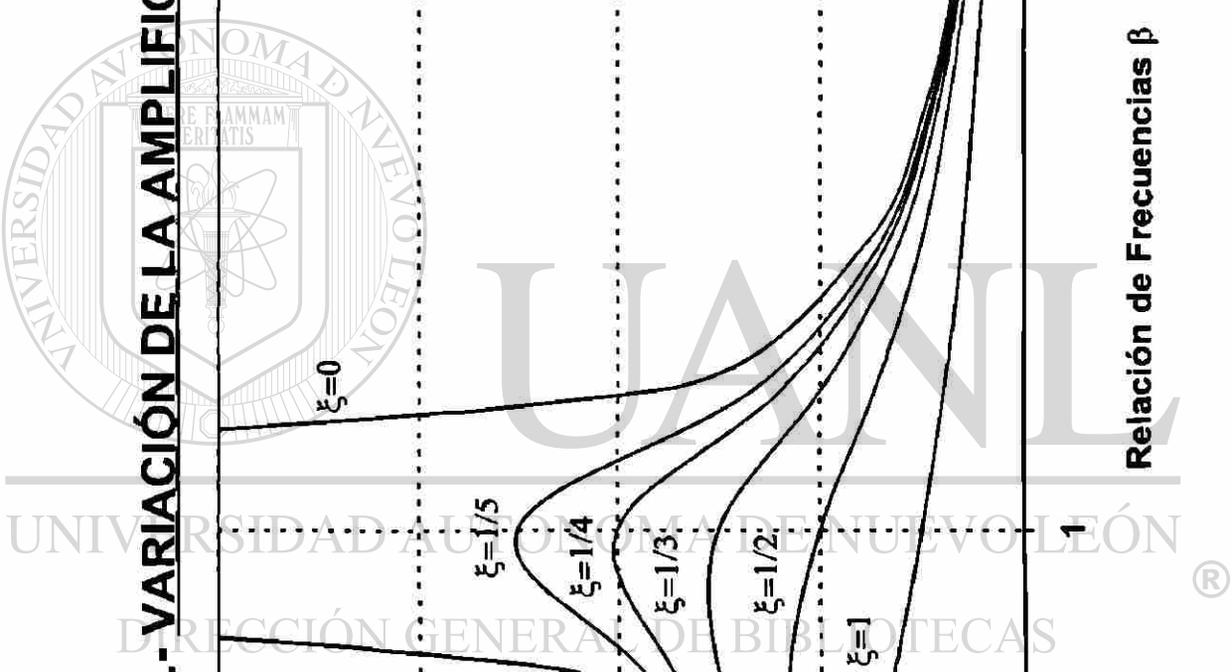
®

## GRÁFICA No. 2.- VARIACIÓN DE LA AMPLIFICACIÓN DINÁMICA

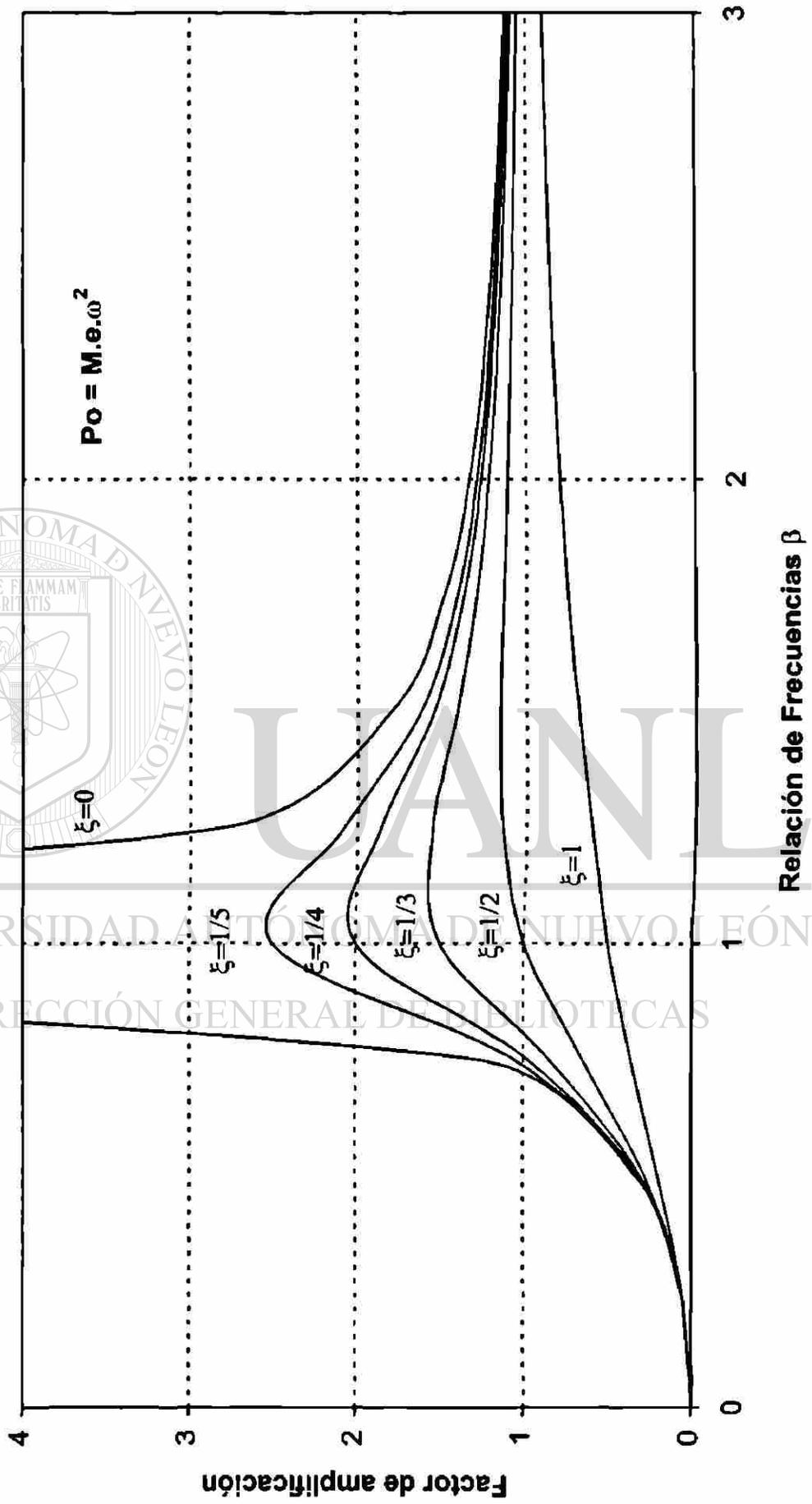


Relación de Frecuencias  $\beta$

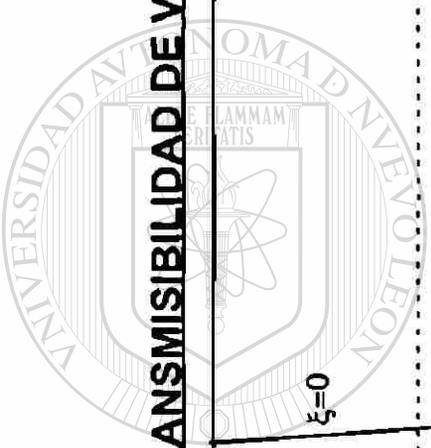
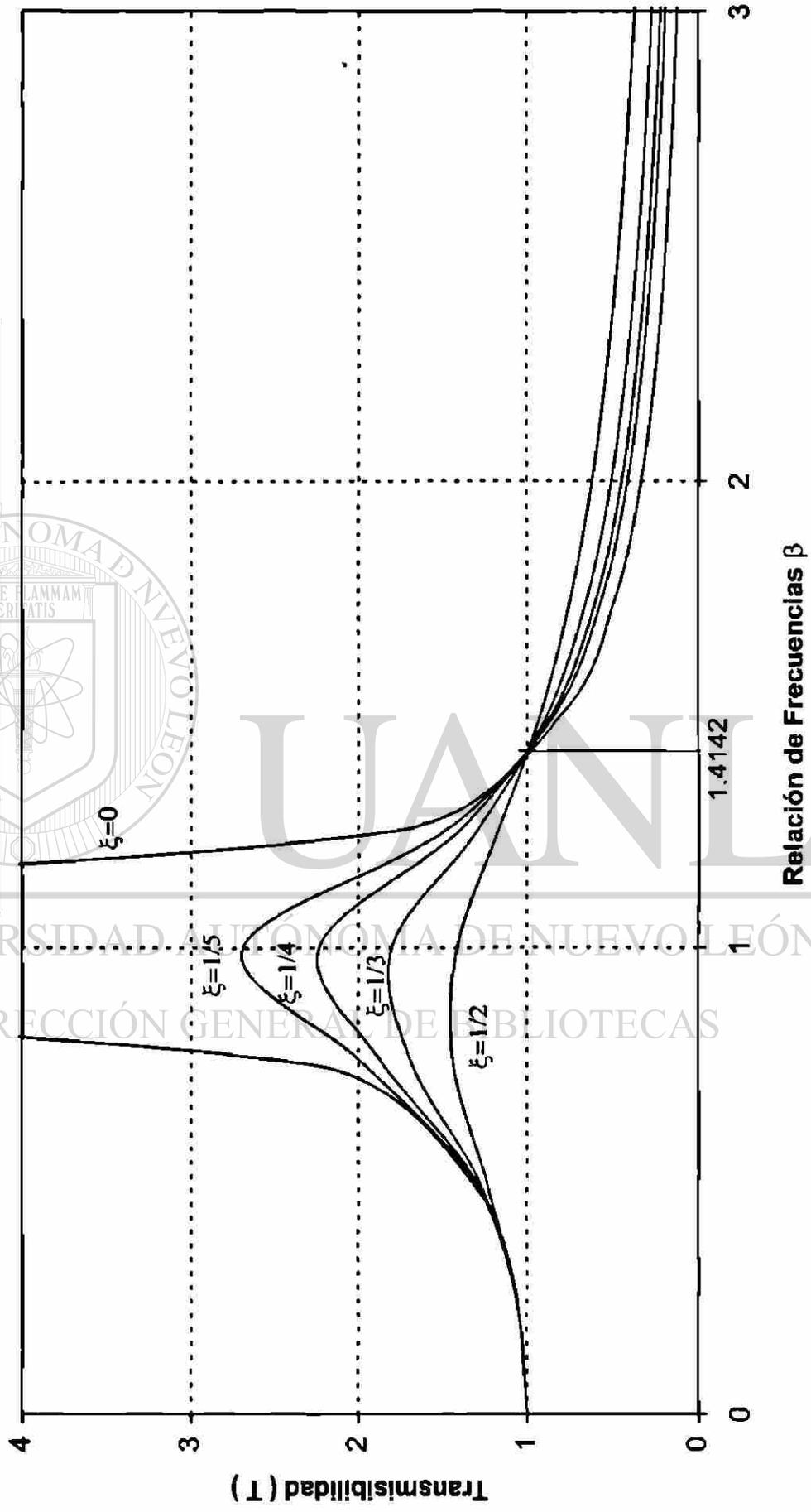
Factor de Amplificación



**GRAFICA No. 3.- VARIACIÓN DE LA AMPLIFICACIÓN DINÁMICA**



**GRÁFICA NO. 4.-TRANSMISIBILIDAD DE VIBRACIÓN**

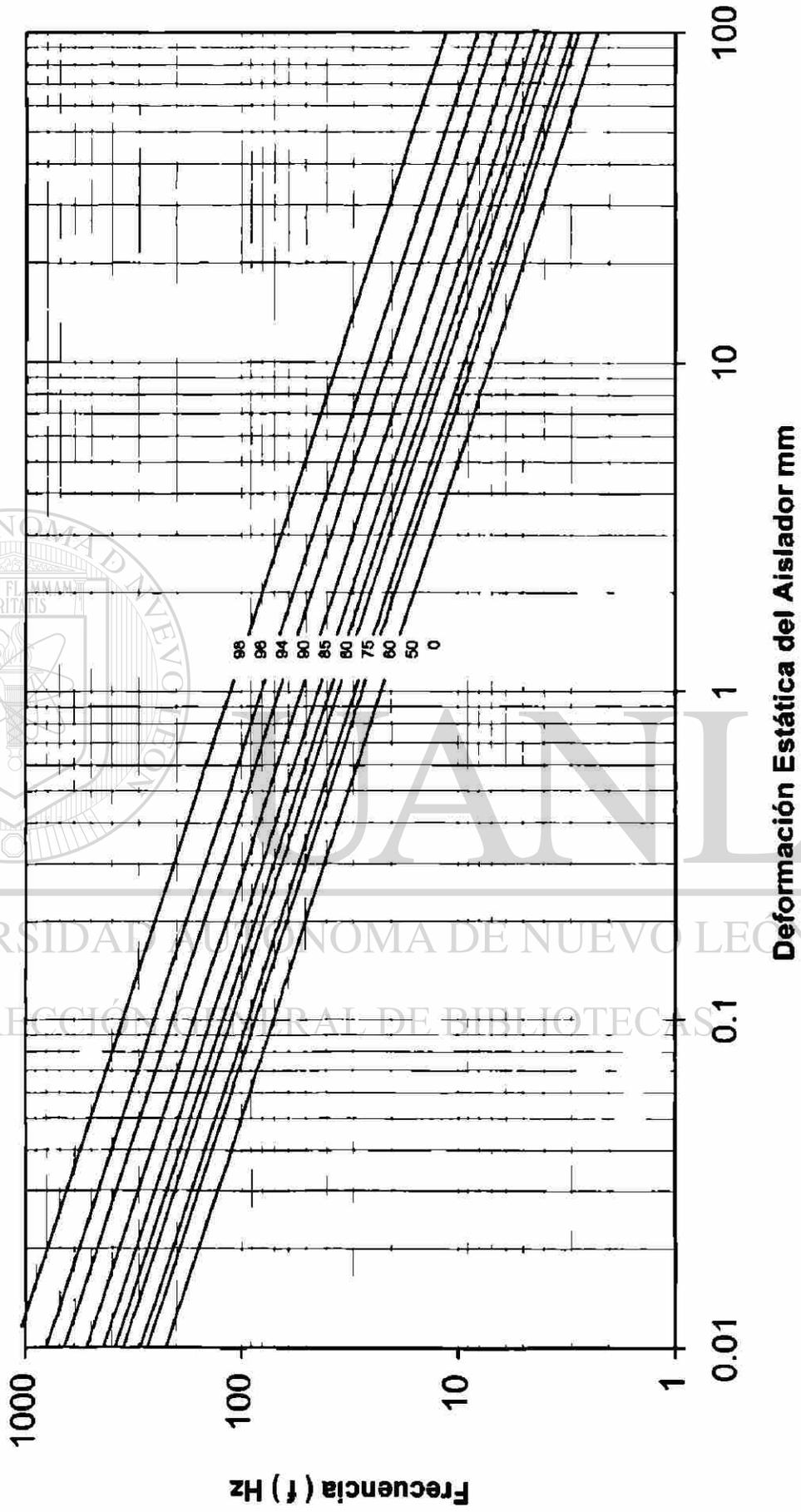


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

UANL

®

# GRÁFICA No. 5.-EFICIENCIA DEL AISLAMIENTO



Deformación Estática del Aislador mm

Frecuencia (f) Hz



## APENDICE C

**CÁLCULO DE LOS PERIODOS Y FORMAS MODALES USANDO EL  
PROGRAMA CAL-91**

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



1. Programa CAL-91 para la obtención de las frecuencias naturales de vibración del modelo matemático No. 2 (Vibración vertical con aislamiento).

RUN

LOAD K R=2 C=2 ! LEE MATRIZ DE RIGIDEZ  
ARRAY NAME = K NUMBER OF ROWS = 2 NUMBER OF COLUMNS =

2

P K ! IMPRIME MATRIZ

COL# = 1 2  
ROW 1 135.44 -135.44  
ROW 2 -135.44 58475.

LOAD M R=2 C=2 ! LEE MATRIZ DE MASAS  
ARRAY NAME = M NUMBER OF ROWS = 2 NUMBER OF COLUMNS =

2

P M ! IMPRIME MATRIZ

COL# = 1 2  
ROW 1 .11210 .00000  
ROW 2 .00000 3.6697

JACOBI K V M W2 ! RESUELVE PARA EIGENVALORES Y  
EIGENVECTORES

DUP W2 W

SQREL W ! FRECUENCIAS EN RADIANES POR SEGUNDO

LOAD S R=1 C=1

ARRAY NAME = S NUMBER OF ROWS = 1 NUMBER OF COLUMNS =

1

DUP W PER

SCALE PER S ! FRECUENCIAS EN HERTZ

INVEL PER ! PERIODOS EN SEGUNDOS

P PER

COL# = 1

ROW 1 .18099

ROW 2 .49770E-01 PERIODOS EN SEGUNDOS ( T )

P V

COL# = 1 2  
ROW 1 2.9864 -.42815E-01  
ROW 2 .74831E-02 .52196

RETURN

QUIT

2. Programa CAL-91 para la obtención de las frecuencias naturales de vibración del modelo matemático No. 3 (Vibración horizontal + cabeceo sin aislamiento).

RUN

LOAD K R=2 C=2 ! LEE MATRIZ DE RIGIDEZ  
ARRAY NAME = K NUMBER OF ROWS = 2 NUMBER OF COLUMNS =  
2  
P K ! IMPRIME MATRIZ

COL# = 1 2  
ROW 1 .57663E+05 -.53880E+05  
ROW 2 -.53880E+05 .27934E+06

LOAD M R=2 C=2 ! LEE MATRIZ DE MASAS  
ARRAY NAME = M NUMBER OF ROWS = 2 NUMBER OF COLUMNS =  
2  
P M ! IMPRIME MATRIZ

COL# = 1 2  
ROW 1 3.9246 .00000  
ROW 2 .00000 5.3354

JACOBI K V M W2 ! RESUELVE PARA EIGENVALORES Y  
EIGENVECTORES  
DUP W2 W  
SQREL W ! FRECUENCIAS EN RADIANES POR SEGUNDO

LOAD S R=1 C=1  
ARRAY NAME = S NUMBER OF ROWS = 1 NUMBER OF COLUMNS =  
1  
DUP W PER  
SCALE PER S ! FRECUENCIAS EN HERTZ  
INVEL PER ! PERIODOS EN SEGUNDOS  
P PER

COL# = 1  
ROW 1 .59069E-01  
ROW 2 .26615E-01 PERIODOS EN SEGUNDOS ( T )

P V  
COL# = 1 2  
ROW 1 .48521 -.13921  
ROW 2 .11939 .41614

RETURN  
QUIT

3. Programa CAL-91 para la obtención de las frecuencias naturales de vibración del modelo matemático No. 4 (Vibración horizontal + cabeceo con aislamiento).

RUN

LOAD K R=3 C=3 ! LEE MATRIZ DE RIGIDEZ  
ARRAY NAME = K NUMBER OF ROWS = 3 NUMBER OF COLUMNS =  
3

P K ! IMPRIME MATRIZ  
COL# = 1 2 3  
ROW 1 .13544E+03 -.13544E+03 -.16464E+03  
ROW 2 -.13544E+03 .57798E+05 .16464E+03  
ROW 3 .00000E+00 .00000E+00 .22899E+06

LOAD M R=3 C=3 ! LEE MATRIZ DE MASAS  
ARRAY NAME = M NUMBER OF ROWS = 3 NUMBER OF COLUMNS =  
3

P M ! IMPRIME MATRIZ  
COL# = 1 2 3  
ROW 1 .25480 .00000 .00000  
ROW 2 .00000 3.6697 .00000  
ROW 3 .30970 .00000 5.3354  
JACOBI K V M W2 ! RESUELVE PARA EIGENVALORES Y

EIGENVECTORES  
DUP W2 W  
SQREL W ! FRECUENCIAS EN RADIANES POR SEGUNDO

LOAD S R=1 C=1  
ARRAY NAME = S NUMBER OF ROWS = 1 NUMBER OF COLUMNS =

1  
DUP W PER  
SCALE PER S ! FRECUENCIAS EN HERTZ  
INVEL PER ! PERIODOS EN SEGUNDOS  
P PER

COL# = 1  
ROW 1 .27298  
ROW 2 .50063E-01 PERIODO EN SEGUNDOS ( T )  
ROW 3 .29226E-01

P V

FORMAS MODALES

COL# = 1 2 3  
ROW 1 1.9792 -.17490E-01 -.55217  
ROW 2 .47994E-02 .52199 .66888E-03  
ROW 3 .14359E-02 -.58862E-03 .44906

RETURN  
QUIT

## RESUMEN AUTOBIOGRÁFICO

César Antonio Juárez Alvarado

Candidato para el Grado de

Maestro en Ciencias con Especialidad en Ingeniería Estructural

**Tesis:** ESTUDIO ANALÍTICO DE LOS EFECTOS CAUSADOS POR EL AISLAMIENTO DE LAS VIBRACIONES EN CIMENTACIONES PARA MAQUINARIA INDUSTRIAL.

**Campo de Estudio:** Dinámica Estructural

**Biografía:**

**Datos Personales:** Nacido en Cd. Lerdo, Durango el 7 de octubre de 1968, hijo de Antonio Juárez Contreras y Francisca Juárez Alvarado.

**Educación:** Egresado de la Universidad Autónoma de Nuevo León, grado obtenido: Ingeniero Civil en 1991, con la tesis: "Elaboración y Análisis de las Curvas I-D-Tr para el Estado de Nuevo León."

**Experiencia Docente:** Auxiliar docente en el Departamento de Estructuras del Instituto de Ingeniería Civil (1990-1991). A partir del segundo semestre de 1993 y hasta la fecha, Maestro de Asignaturas, en la Facultad de Ingeniería Civil de la Universidad Autónoma de Nuevo León, impartiendo las clases de Álgebra Superior, Estática, Diseño de Estructuras de Madera y Concreto Presforzado y Prefabricado.

**Experiencia Profesional:** De 1991 a 1996, Ingeniero Especialista en Estructuras, en el Departamento de Ingeniería Estructural del Instituto de Ingeniería Civil de la U.A.N.L., de 1996 a 1998, Asesor Técnico en la empresa CONTEC MEXICANA S.A., en el Departamento de Ingeniería. Además, se desempeña como Ingeniero asesor en el análisis y diseño estructural de diversos proyectos.

