

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE INGENIERIA CIVIL



SOLUCION ANALITICA DEL MODELO MATEMATICO  
DE COLUMNAS CON SECCIONES GEOMETRICAS  
ARBITRARIAS SOMETIDAS A LA COMBINACION  
DE FLEXION BIAXIAL Y CARGA AXIAL

POR

JUAN PABLO NAVARRO MATA

COMO REQUISITO PARCIAL  
PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRIA EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN  
INGENIERIA ESTRUCTURAL

DICIEMBRE DE 1998

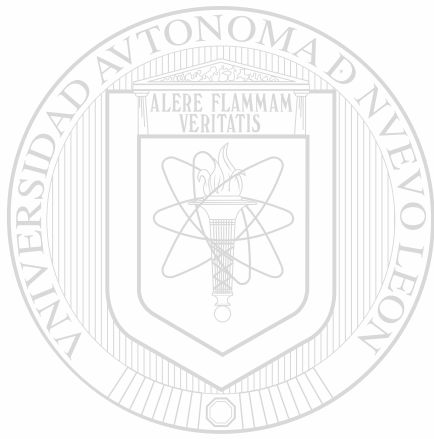
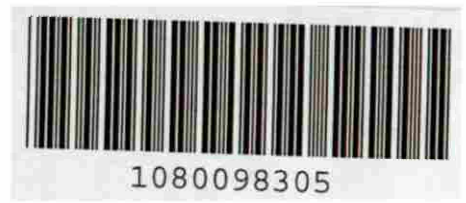
© 1998

N.C. 1998

TM

TA683

JUAN PABLO NAVARRO MATTA



# UANL

---

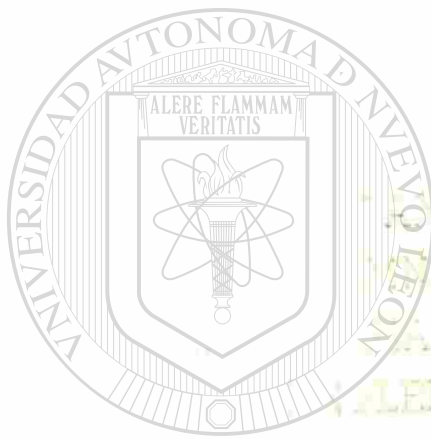
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL



ANÁLISIS DE MOLECULAS MATEMÁTICAS  
CON SECCIONES GEOMÉTRICAS  
SOMETIDAS A LA COMBINACIÓN  
DE FLEXIÓN BIAJIAL Y CARGA AXIAL.

UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

POR

®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

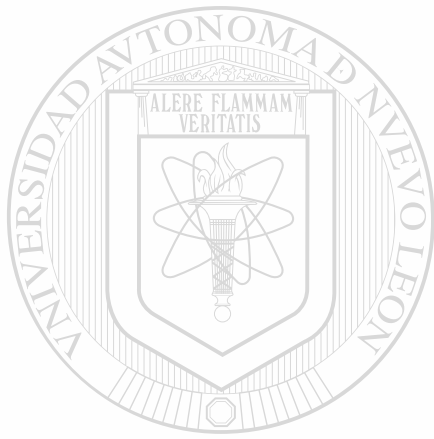
JUAN PABLO NAVARRO MATA.

COMO REQUISITO PARCIAL  
PARA OBTENER EL GRADO DE

INGENIERÍA EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN  
INGENIERÍA CIVIL



TH  
TA 683  
.5  
.C7  
N3  
1998



# UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

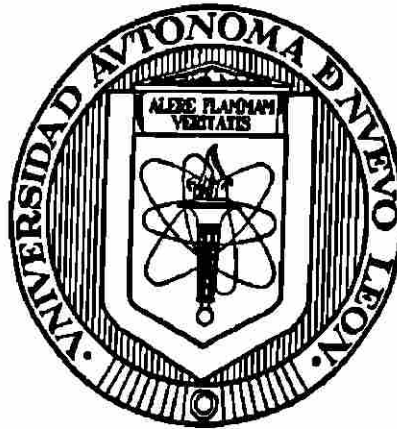
®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



**UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON**

**FACULTAD DE INGENIERIA CIVIL**



**SOLUCION ANALITICA DEL MODELO MATEMATICO DE COLUMNAS  
CON SECCIONES GEOMETRICAS ARBITRARIAS SOMETIDAS  
A LA COMBINACION DE FLEXION BIAxIAL Y CARGA AXIAL**

Por

---

**JUAN PABLO NAVARRO MATA**

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEÓN

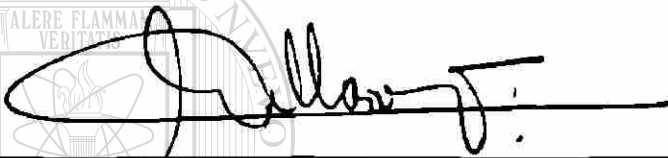
DIRECCION GENERAL DE BIBLIOTECAS

**Como requisito parcial para obtener el Grado de  
MAESTRIA EN CIENCIAS con Especialidad en  
Ingeniería Estructural**

**Diciembre, 1998**

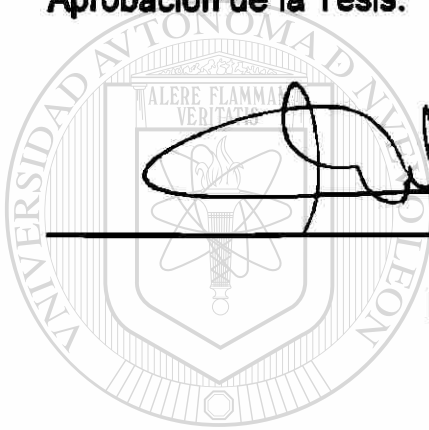
**SOLUCION ANALITICA DEL MODELO MATEMATICO DE COLUMNAS  
CON SECCIONES GEOMETRICAS ARBITRARIAS SOMETIDAS  
A LA COMBINACION DE FLEXION BIAxIAL Y CARGA AXIAL**

**Aprobación de la Tesis:**



---

**Asesor de la Tesis  
Dr. Guillermo Villarreal Garza**



UANL

---

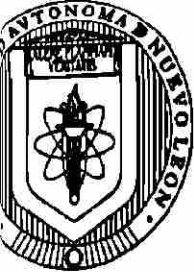
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

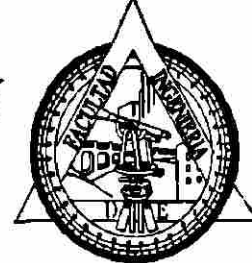


---

**Secretario de Postgrado  
Dr. Ricardo González Alcorta**



**UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON**  
**FACULTAD DE INGENIERIA CIVIL**  
**SECRETARIA DE ESTUDIOS DE POSTGRADO**



**COMPROBANTE DE CORRECCION**

**Tesista:** JUAN PABLO NAVARRO MATA

**Tema de la tesis:** SOLUCIÓN ANALÍTICA DEL MODELO MATEMATICO DE COLUMNAS CON SECCIONES GEOMÉTRICAS ARBITRARIAS SOMETIDAS A LA COMBINACION DE FLEXION BIAXIAL Y CARGA AXIAL.

**Este documento certifica la corrección** DEFINITIVA **del trabajo de tesis arriba identificado, en los aspectos: ortográfico, metodológico y estilístico.**

**Recomendaciones adicionales:**

NINGUNA

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
 DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

**Nombre y firma de quien corrigió:**

Arg. Ramón Longoria Ramírez

**El Secretario de Posgrado:**

Dr. Ricardo González Alcorta

**Ciudad Universitaria, a** 8 **de** diciembre **de** 1998.



**At'n: Dr. Ricardo González Alcorta**  
**Secretario de Estudios de Posgrado**  
**Facultad de Ingeniería Civil. UANL.**

Presente.-

Estimado Dr. González Alcorta:

Por medio de la presente, me permito comunicarle que el Ing. Juan Pablo Navarro Mata, pasante de la Maestría en Ciencias con especialidad en Ingeniería Estructural, ha concluido su Tesis titulada "Solución Analítica del Modelo Matemático de Columnas con Secciones Geométricas Arbitrarias Sometidas a la Combinación de Flexión Biaxial y Carga Axial", la cual elaboró como requisito parcial para obtener el Grado de Maestro, por lo que no hay ningún inconveniente para atender su solicitud de Examen de Grado, con los requisitos que exige el Reglamento de Exámenes Profesionales de nuestra Institución.

Sin más por el momento y agradeciendo de antemano sus atenciones, me despido de Ud.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Atentamente:



**Dr. Guillermo Villarreal Garza**  
**Asesor de Tesis**

San Nicolás de los Garza, N. L. a 8 de Diciembre de 1998

**At'n: Dr. Ricardo González Alcorta**  
**Secretario de Estudios de Posgrado**  
**Facultad de Ingeniería Civil. UANL.**

**Presente.-**

**Estimado Dr. González Alcorta:**

Por medio de la Presente, solicito a Ud. la tramitación correspondiente, para sustentar mi examen de Grado, en virtud a que he concluido mi Tesis titulada " Solución Analítica del Modelo Matemático de Columnas con Secciones Geométricas Arbitrarias Sometidas a la Combinación de Flexión Biaxial y Carga Axial" , la cual elaboré como requisito parcial para obtener el Grado de Maestro en Ciencias con especialidad en Ingeniería Estructural y la cual ha sido aprobada por mi asesor de Tesis, el Dr. Guillermo Villarreal Garza en el aspecto técnico y por el Arq. Ramón Longoria Ramírez en el aspecto estilístico, ortográfico y metodológico.

Sin más por el momento y agradeciendo de antemano sus atenciones,  
me despido de Ud.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

**Atentamente:**



**Ing. Juan Pablo Navarro Mata.**

**San Nicolás de los Garza, N. L. a 8 de Diciembre de 1998**

## **AGRADECIMIENTOS**

En esta Tesis fué necesario conjuntar disciplinas tales como las Matemáticas, la Teoría de la Elasticidad, Programación, Tecnología del Concreto, etc., se precisó la ayuda de los especialistas en cada área y por eso éste apartado es muy importante, ya que hay que agradecer a mucha gente su grande y desinteresada ayuda que me proporcionaron.

**A Dios por motivos obvios.**

**A el Dr. Guillermo Villarreal Garza, que durante casi un año y medio siguió paso a paso los avances y descalabros que se dieron en esta Tesis.**

**A la Facultad de Ingeniería Civil y su Directiva que me becaron para cursar esta Maestría.**

**A la Universidad Autónoma de Nuevo León y al programa PROMEP que hicieron posible el desarrollo de este trabajo.**

**A el MC Anastacio Vázquez Vázquez por su apoyo en la adquisición de el equipo de medición de esfuerzos y sobre todo por sus palabras de aliento durante las etapas difíciles de este proyecto.**

**A el MC Víctor M. Aguilera Reyes, que me ayudó a entender las complicaciones matemáticas que se presentaron. "No estoy de acuerdo con lo que has dicho". Como olvidarlo.**

**A el Ing. Rogelio Dávila Pompermayer por sus sugerencias en la elaboración del concreto y el proporcionamiento.**

A el Ing. **José Román Villa Barcenás** por su gran ayuda y asesoría en la colocación del equipo de medición y su experiencia durante el ensaye de la columna.

A el MC **Rafael Gallegos López** y a todo el Departamento de Ingeniería de Tránsito por la transcripción de este documento.

A el Ing. **José Navarro Mata**, por sacarme de los apuros de lógica y programación.

A la Lic. **María del Carmen Navarro Mata** que me ayudó a descifrar algunos algoritmos matemáticos.

A **Fernando Navarro Mata**, el genio de las computadoras por su lealtad en las veladas.

A el Ing. **Félix Rodríguez González**, por su asesoría y ayuda.

A el Ing. **César Juárez Alvarado**, compañero de martirio.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

A el Ing. **Rodolfo Meza** por sus acertados comentarios y asesoría.

A el Ing. **Carlos Narro García** por su ayuda y asesoría en la programación.

A el Sr. **Catarino Ortiz Sánchez** por su ayuda durante el colado de la columna.

Y... como pasar por alto a el **MAESTRO Rogelio Chávez Sánchez** quien con tanta perseverancia, tenacidad, tozudez, persistencia e ingenio me coaccionó a terminar la Tesis. En realidad era la voz de mi conciencia ¿Y... ya terminaste la tesis?. Gracias.

Por último, y de una manera por demás especial, mi agradecimiento a mis amigos, que alguna vez fueron alumnos, por su desinteresada ayuda para la planeación, diseño, habilitación, colado y ensaye de la columna a escala natural de esta Tesis. Han sido compañeros de fatigas y ahora de alegrías, cuando trabajamos, largas horas, desde actividades por demás científicas, hasta las manuales, como se observa en las fotos del capítulo octavo y, también, por supuesto hemos sido compañeros de las largas travesías en mountain bike, de kayak, de escalada, de montañismo, de apagafuegos y hasta ¡de matacanes!.

Mi más Sincero agradecimiento a:

**Mario Adriel Guerra Arellano**

**Angel González Arias**

**César René Ibarra Herrera**

**Olegario Vizcarra Woge**

**Aldo López Delgado**

**Rafael Cuéllar Martínez**

**Jorge Carlos Angulo Reyna**

**Armando Alvarez Cantú**

**Sergio Hernández Chávez**

**Alberto Rubio Alanís**

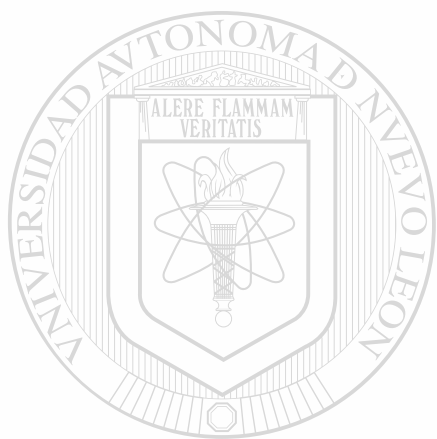
**Luis Valenzuela Granados**

**Enrique Flores Aguiñaga**

**Julio Antonio González Villarreal.**

## **Dedicatoria**

***Dedico esta Tesis a mis Padres,  
que no han podido ver mis estudios de Posgrado.***



***José Navarro Moya (+)***

UANL

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

***María del Carmen Mata Molina (+)***

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



## RESUMEN

**Juan Pablo Navarro Mata**

**Fecha de Graduación: Diciembre , 1998**

**Universidad Autónoma de Nuevo León**

**Facultad de Ingeniería Civil**

**Título de la Tesis: SOLUCIÓN ANALÍTICA DEL MODELO MATEMÁTICO DE COLUMNAS CON SECCIONES GEOMÉTRICAS ARBITRARIAS SOMETIDAS A LA COMBINACIÓN DE FLEXIÓN BIAIXIAL Y CARGA AXIAL**

**Numero de páginas: 232**

**Candidato para el grado de Maestría en Ciencias con especialidad en Ingeniería Estructural**

**Area de Estudio: Ingeniería Estructural**

**Propósito y Método del Estudio:** En la práctica de la Ingeniería Estructural, aparecen frecuentemente elementos estructurales, sujetos a cargas axiales y momentos flexionantes en dos direcciones. Hasta ahora, se cuenta en la literatura estructural ,solo con algunas soluciones concretas para secciones transversales de dichos elementos, tales como la cuadrada, la rectangular y la circular, por lo que se estableció el modelo matemático y un algoritmo general que permite obtener la solución exacta, para la resistencia última de cualquier sección transversal, sujetas a esas solicitaciones a través de un programa. Se inició una línea de investigación experimental para corroborar las hipótesis en que se basa el modelo matemático de solución. Se verificó los resultados obtenidos por el programa a través de cálculos resueltos con calculadora.

**Contribuciones y Conclusiones:** Se estableció una algoritmo que permite obtener la resistencia última de cualquier sección transversal sujetas a carga axial y flexión biaxial. Hasta ahora, la literatura estructural de este tema solo incluye soluciones de ciertas formas de sección transversal como la cuadrada, la rectangular y la circular. Se propone un modelo del espécimen para la continuación de la investigación experimental y una serie de medidas a tomarse en consideración para los ensayos de los especímenes.

**FIRMA DEL ASESOR:**



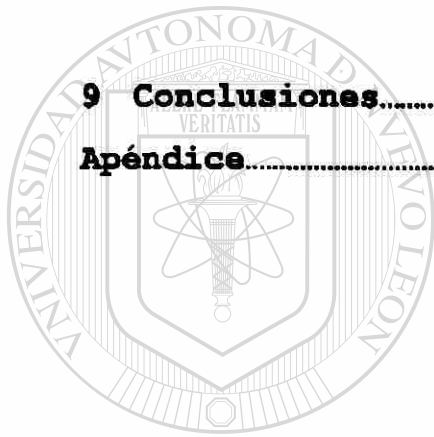
## TABLA DE CONTENIDO

|  |               |
|--|---------------|
| <b>Proposición.....</b>  | <b>i</b>      |
| <b>Justificación.....</b>  | <b>ii</b>     |
| <b>Hipótesis.....</b>  | <b>v</b>      |
| <b>Objetivos.....</b>  | <b>vi</b>     |
| <b>Método.....</b>   | <b>vii</b>    |
| <b>Introducción.....</b>   | <b>viii</b>   |
| <br>   |               |
| <b>Capítulo</b>  | <b>Página</b> |
| <b>1 TEORÍA GENERAL DE COLUMNAS CORTAS CARGADAS CON CARGA AXIAL Y FLEXIÓN BIAxIAL.....</b>                   | <b>1</b>      |
| <b>1.1</b> Introducción.....   | <b>1</b>      |
| <b>1.2</b> Deformaciones Causadas por Contracción y Flujo Plástico.....                                      | <b>3</b>      |
| <b>1.3</b> Columnas Cortas Sometidas a Carga Axial.....  | <b>5</b>      |
| <b>1.4</b> Hipótesis Básicas para Análisis de Columnas Cortas sometidas a Carga Axial y Flexión Biaxial..... | <b>6</b>      |
| <b>1.5</b> Secciones Arbitrarias Sometidas a Flexión Biaxial.....  | <b>11</b>     |
| <b>1.6</b> Bibliografía.....   | <b>16</b>     |
| <br>   |               |
| <b>2 MÉTODOS DE ANÁLISIS APROXIMADOS POR FLEXIÓN BIAxIAL Y CARGA AXIAL.....</b>                              | <b>17</b>     |
| <b>2.1</b> Introducción.....   | <b>17</b>     |



| <b>Capítulo</b>   | <b>página</b> |
|---|---------------|
| 2.2 Métodos de Superposición.....   | 17            |
| 2.3 Método de la Excentricidad Uniaxial<br>Equivalente.....   | 19            |
| 2.4 Métodos Basados en Aproximaciones para el<br>Perfil de la Superficie de Interacción<br>(Carga Inversa).....                               | 21            |
| 2.5 Método del Contorno de Carga.....   | 22            |
| 2.6 Diseño por Efecto de Flexión Axial usando el<br>Manual Concrete Reinforcing Steel Institute<br>(CRSI).....                                | 25            |
| <b>3 MODELACIÓN DEL PROGRAMA PARA EL ANÁLISIS DE<br/>COLUMNAS SOMETIDAS A FLEXIÓN BIAxIAL Y CARGA<br/>AXIAL DE SECCIONES ARBITRARIAS.....</b> | <b>34</b>     |
| 3.1 Modelación.....   | 34            |
| 3.2 Bibliografía.....   | 44            |
| <b>4 DIAGRAMA DE FLUJO.....</b>   | <b>45</b>     |
| 4.1 Diagrama de Flujo.....  | 45            |
| <b>5 LISTADO DEL PROGRAMA.....</b>  | <b>54</b>     |
| 5.1 Listado.....  | 54            |
| <b>6 EJEMPLOS DE COLUMNAS CON SECCIONES ARBITRARIAS<br/>RESUELTOS ANALÍTICAMENTE CON CALCULADORA.....</b>                                     | <b>67</b>     |

|            |  |            |
|------------|--|------------|
| <b>6.1</b> | <b>Ciclo I.....</b>                            | <b>68</b>  |
| <b>6.2</b> | <b>Ciclo II.....</b>                           | <b>85</b>  |
| <b>6.3</b> | <b>Ciclo III.....</b>                          | <b>98</b>  |
| <b>6.4</b> | <b>Ciclo IV.....</b>                           | <b>104</b> |
| <b>6.5</b> | <b>Ciclo V.....</b>                            | <b>119</b> |
| <b>6.6</b> | <b>Ciclo VI.....</b>                           | <b>133</b> |
| <b>7</b>   | <b>Corrida de Ejemplos.....</b>                | <b>144</b> |
| <b>8</b>   | <b>Ensaye de Columna a Escala Natural.....</b> | <b>172</b> |
| <b>9</b>   | <b>Conclusiones.....</b>                       | <b>230</b> |
|            | <b>Apéndice.....</b>                           | <b>233</b> |



UANL

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

## LISTA DE FIGURAS

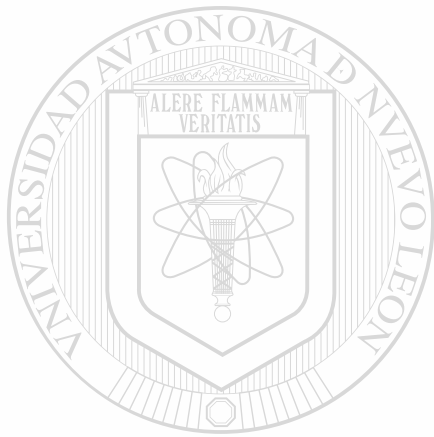
| <b>Figura</b>   | <b>Página</b> |
|---|---------------|
| 1. Clasificación de Columnas de Acuerdo con la Forma y el Tipo de Refuerzo.....   | 2             |
| 2. Suma de las Deformaciones Unitarias en Una Columna de Concreto Reforzado.....  | 4             |
| 3. Curvas de Carga Axial Deformación para el Acero y el Concreto.....   | 6             |
| 4. Clasificación de las Columnas, según la Posición de la Carga en la Sección.....  | 7             |
| 5. Distribución de las Deformaciones y Esfuerzos en el Concreto Comprimido de una sección al Aumentar el Momento Flexionante..... | 9             |
| 6. Distribución del Esfuerzo de Compresión en la Zona Comprimida de una Sección de Concreto Rectangular.....                      | 9             |
| 7. Sección Arbitraria de Concreto Reforzado Sometido a Flexión Biaxial.....   | 12            |
| 8. Perfil del Bloque en Compresión de una Sección Arbitraria de Concreto Reforzado Sometida a Flexión Biaxial.....                | 14            |
| 2.1 Métodos Aproximados de Diseño para Flexión Biaxial.....   | 18            |
| 2.2 Línea de Interacción para Columna con Flexión bajo Pu.....  | 20            |
| 2.3 Línea de Interacción para Columna con Flexión Biaxial bajo Carga Constante Axial.....   | 23            |
| 2.4 Línea de Interacción para Columna con Carga Axial Constante.....  | 24            |

|     |   |     |
|-----|---|-----|
| 2.5 | Flexión Biaxial, Varillas Cuatro Caras.....   | 26  |
| 2.6 | Flexión Biaxial, Cuatro Varillas.....   | 27  |
| 2.7 | Relaciones Básicas de Flexión Biaxial.....  | 29  |
| 3.1 | Ubicación de Sección en Cuadrante I.....  | 36  |
| 3.2 | Ejemplificación del Barrido de Ejes Neutros que se presentan en el Programa.....                      | 37  |
| 3.3 | Traslación y Rotación de Coordenadas Originales a ejes $x'$ y $y'$ .....                              | 38  |
| 6.1 | Geometría de la Columna y Ubicación del Acero del Refuerzo.....                                       | 68  |
| 6.2 | División de Areas para localizar el Centroides Geométrico de la Sección.....                          | 78  |
| 6.3 | División de Areas para localizar el Centroides del Area en Compresión con respecto al eje Neutro..... | 81  |
| 6.4 | Geometría de Columna Mostrando el Eje Neutro Propuesto.....   | 85  |
| 6.5 | División de Areas para localizar el Centroides del Area en Compresión con respecto al eje Neutro..... | 95  |
| 6.6 | Geometría de la Columna Mostrando para el ciclo III.....  | 98  |
| 6.7 | Sección de la columna ciclo IV.....   | 118 |
| 6.8 | Sección de la columna para ciclo V.....   | 132 |
| 6.9 | Sección de la columna para ciclo VI.....  | 133 |

## NOMENCLATURA

|                 |   |
|-----------------|---|
| $f'c$           | Resistencia a la Compresión del Concreto                                      |
| $A_g$           | Area Bruta de la Sección Transversal de la Columna                            |
| $A_{st}$        | Area del Acero de Refuerzo de la Columna                                      |
| $f_y$           | Resistencia a la Fluencia del Acero de Refuerzo                               |
| $\epsilon$      | Deformación Unitaria  |
| $P, P_x$        | Carga Axial de la Columna   |
| $M_x, M_y$      | Momentos alrededor del eje x, y   |
| $c$             | Distancia Medida desde el Eje Neutro hasta la Fibra mas Alejada en Compresión |
| ACI             | American Concrete Institute   |
| PCA             | Portland Cement Association   |
| $\beta$         | Factor definido en Art. 10.2.7.2 ACI  |
| $a$             | Altura del Bloque Equivalente de esfuerzos del Concreto                       |
| $S_i$           | Fuerza de la Varilla i  |
| $\epsilon_{si}$ | Deformación de la varilla i   |
| $C_c$           | Fuerza de Compresión del Bloque de Concreto a Compresión                      |
| $\theta$        | Angulo de Inclinación del Eje neutro con Respecto a la Horizontal             |
| $e_x, e_y$      | Excentricidad en el Eje x, y  |
| $P_{ux}$        | Carga Axial cuando esta presente solo la excentricidad x                      |
| $A_{si}$        | Area de la varilla i  |
| $f_c(x,y)$      | Función del esfuerzo del concreto   |
| $f_s(x,y)$      | Función del esfuerzo del acero  |
| $K_1, k_2, k_3$ | Parámetros del Bloque de Esfuerzos para Secciones rectangulares               |
| $[V]$           | Matriz de Coordenadas de Vértices Columna                                     |

- [VV]** Matriz de Coordenadas de Vértices Columna, con Respecto a eje Neutro Propuesto
- [VW]** Matriz de Coordenadas de Vértices Columna, con Respecto a eje paralelo a Neutro Propuesto
- [NA]** Matriz de Coordenadas de varillas
- [NNA]** Matriz de Coordenadas de varillas con Respecto a Eje Neutro Propuesto
- m** Pendiente de una Recta
- [EC]** Matriz de Ecuaciones de las rectas de los Lados Sección
- [R]** Matriz de Rangos de Operación de lados



# UANL

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

## **PROPOSICION.**

**En la mayoría de las Obras de Ingeniería Civil, se encuentran elementos estructurales que están sujetos a carga axial y momentos flectores en dos ejes ortogonales, estos elementos, con frecuencia son de sección circular, cuadrada o rectangular. Para el análisis de estos elementos se han desarrollado algunos métodos aproximados, los cuales reducen el problema de la flexión biaxial a un problema de flexión uniaxial. En esta Tesis se propone solucionar el problema de origen, sin recurrir a aproximaciones, por lo que se plantea la solución matemáticamente exacta de las columnas sometidas a flexión biaxial y carga axial, no solo para secciones regulares, tales como la cuadrada , rectangular o circular, sino para cualquier sección posible que se pueda presentar en una columna.**

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

## **JUSTIFICACION**

En el mundo de hoy, la ciencia avanza a pasos agigantados, y el país que no avanza a un ritmo igual o mayor, retrocede inevitablemente. Esto lo podemos comprobar día a día con toda la información que nos llega a través de los medios de información. La disciplina de la Ingeniería Civil no se queda atrás y continuamente se publican las últimas investigaciones e innovaciones desarrolladas en el nivel mundial.

La primera reacción, de un buen Ingeniero Civil actual será la de estudiar detenidamente estos informes e incorporarlos a su práctica profesional.

Esta primera reacción, sin embargo, aunque de suyo es muy buena, dista mucho de ser la mejor para un país como en el que vivimos, ya que llevamos acumulado un retraso de más de treinta y cinco años y urge tomar acciones concretas que nos lleven a ir desplazando paulatinamente este retraso, hasta nulificarlo y ponerlo a nuestro favor.

En México, se importa casi toda la tecnología de países más avanzados y dependemos tecnológicamente de ellos y, tanto nos hemos acostumbrado a ello, que ordinariamente nos admiramos cuando "descubrimos" los avances que ha tenido nuestra disciplina. Necesitamos comenzar a desarrollar investigación y tecnología, de forma que dejemos de depender tanto de otros países y despuntar en el propio desarrollo y no sólo ser autosuficientes, sino, empezar a exportar tecnología a otros países y de esta forma lograr ubicarnos entre los primeros lugares. Esto, aunque es un enfoque que a primera vista pareciera



**muy ambicioso y/o imposible, es sólo una disyuntiva: o lo asumimos o nos condenamos a seguir siendo ingenieros de tercera clase.**

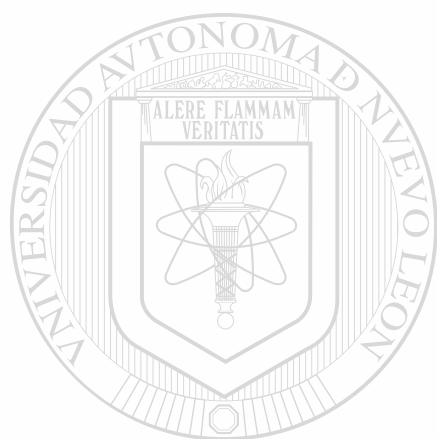
**Se ha dicho, que para comenzar este desarrollo, es necesario andar los pasos de nuestros antecesores en la ingeniería, esto no es del todo cierto, ya que un inventor, o un científico, utiliza los conocimientos logrados por la ciencia hasta ese momento y los utiliza para dar un paso adelante, esa es su aportación.**

**Una preocupación reciente, en la disciplina de la Ingeniería, ha sido la de proporcionar una ayuda de diseño para analizar columnas de sección arbitraria sometidas a flexión biaxial. Se han propuesto unos programas por parte de la PCA, y en algunas universidades de Estados Unidos se han comenzado a desarrollar otros. Siendo ésta una ocupación actual de la comunidad científica, se propuso una tesis que desarrollara una solución al modelo matemático de columnas con sección arbitraria, que pudiera estar en el nivel de otros programas desarrollados por países de avanzada y de esta forma demostrar que se pueden resolver localmente problemas reales y actuales.**

**Se propone, en esta Tesis, un primer acercamiento: modelar matemáticamente el comportamiento de las deformaciones en columnas, siguiendo las ecuaciones de la elasticidad, satisfaciendo las condiciones de compatibilidad de deformaciones y equilibrio estático. Se utiliza la hipótesis de la configuración de esfuerzos del bloque rectangular equivalente para después traducir este modelo a una rutina de cálculo que se pueda efectuar por medio de la computadora. Una segunda etapa será modificar la configuración de esfuerzos a la propuesta del bloque parabólico que proporciona un refinamiento para el análisis.**

**En una tercera etapa, se propone efectuar las consideraciones de esbeltez, esto es en cuanto a lo analítico; en lo experimental, se efectúa un**

**primer ensaye de prueba para localizar los problemas que conlleva ensayar una columna a escala natural, con la finalidad de demostrar experimentalmente la configuración deformada de la sección, sus esfuerzos y con esto, demostrar que la construcción teórica es un buen reflejo de los procesos reales.**



# UANL

---

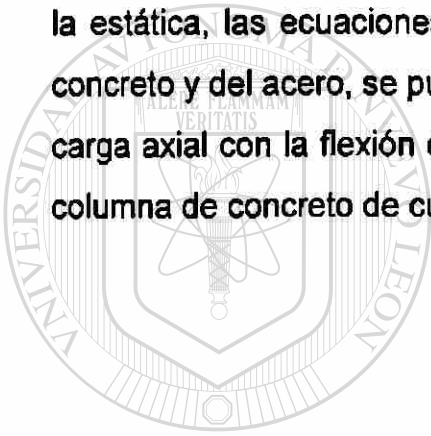
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

## **HIPOTESIS:**

Cumpliendo con las condiciones de equilibrio de la estática y las condiciones de compatibilidad de deformaciones, a través de las ecuaciones de la estática, las ecuaciones de la elasticidad y las propiedades mecánicas del concreto y del acero, se puede llegar a determinar ecuaciones que relacionen la carga axial con la flexión en dos planos y así definir el comportamiento de una columna de concreto de cualquier sección.



# UANL

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

## **OBJETIVOS:**

**a).- Profundizar en la solución matemática exacta de columnas con secciones geométricas arbitrarias, sometidas a la combinación de flexión biaxial y carga axial, de forma que se proporcione literatura explícita sobre su comportamiento.**

**b).- Crear una herramienta que, a través de un software, ayude al diseño de secciones que proporcione los diagramas de interacción de cualquier columna, con cualquier sección.**

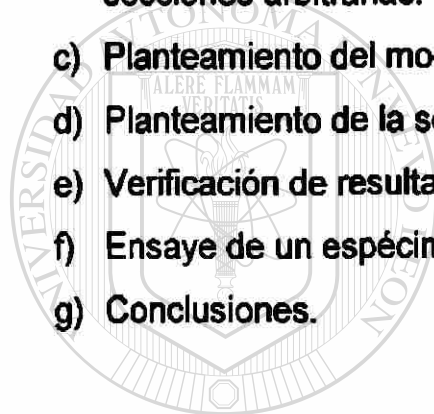
**c).- Iniciar una línea de investigación experimental que valore y corrobore el modelo matemático utilizado, verificando las hipótesis de elasticidad y diseño plástico que se plantea.**

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

## **METODO**

**Se propone el siguiente procedimiento, para plantear y resolver correctamente los problemas de diseño de columnas propuesto:**

- a) Planteamiento de la hipótesis.**
- b) Interpretación de la información obtenida para aplicarla en los problemas de secciones arbitrarias.**
- c) Planteamiento del modelo matemático.**
- d) Planteamiento de la solución mediante una programación cibernética.**
- e) Verificación de resultados.**
- f) Ensaye de un espécimen muestra.**
- g) Conclusiones.**



**UANL**

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

## INTRODUCCION

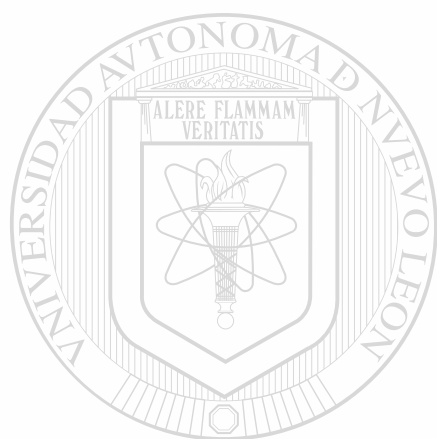
En esta Tesis, se pretende dar inicio a una línea de investigación analítica y experimental sobre el comportamiento de columnas con secciones transversales de cualquier geometría (arbitrarias) cuando son sometidas a flexión biaxial y carga axial.

El trabajo general pretende generar un programa de computadora que genere los diagramas de interacción de los momentos en dos direcciones ortogonales y la carga axial para cualquier columna, pudiendo usarse para el cálculo las idealizaciones del bloque parabólico o rectangular, para los esfuerzos de compresión del concreto, en el aspecto analítico; en el aspecto experimental, comprobar que para zonas de compresión del concreto arbitrarias, sigue siendo válido el bloque parabólico de esfuerzos. El trabajo presentado ahora es una primera etapa de los objetivos generales.

En la primera etapa de este trabajo se expone la teoría general de las columnas cortas, y para la proposición del modelo matemático se consideran las hipótesis de la teoría de la elasticidad, la mecánica de los materiales y el comportamiento del concreto y del acero; se hace un breve paréntesis para una semblanza de algunos métodos aproximados y sus alcances. Una vez definido el modelo matemático, se propone una lógica para resolverlo y se genera un programa escrito en "Basic" que proporcione tres datos en cada interacción, siendo éstos: el momento alrededor del eje "x", el momento alrededor del eje "y" y la carga axial. El modelo tiene capacidad para hacer 10,000 iteraciones, puntos suficientes para construir la envolvente tridimensional de interacción de la columna propuesta. En seguida, se valida el programa al verificar los resultados de seis corridas con ejemplos resueltos con calculadora. Este

programa cumple la primera etapa de los objetivos generales resolviendo el modelo matemático; haciendo la consideración del bloque rectangular de esfuerzos para el concreto.

Para dar inicio a la investigación experimental, se propuso una columna de concreto reforzado, fabricada a escala natural de sección cuadrada y se le ensayó a flexión biaxial y carga axial. Al final, se concluye sobre esta primera etapa y se dan algunos lineamientos para las etapas siguientes.



# UANL

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

## **CAPITULO 1**

### **Teoría General de Columnas Cortas, Cargadas con Carga Axial y Flexión Biaxial.**

#### **1.1 Introducción.**

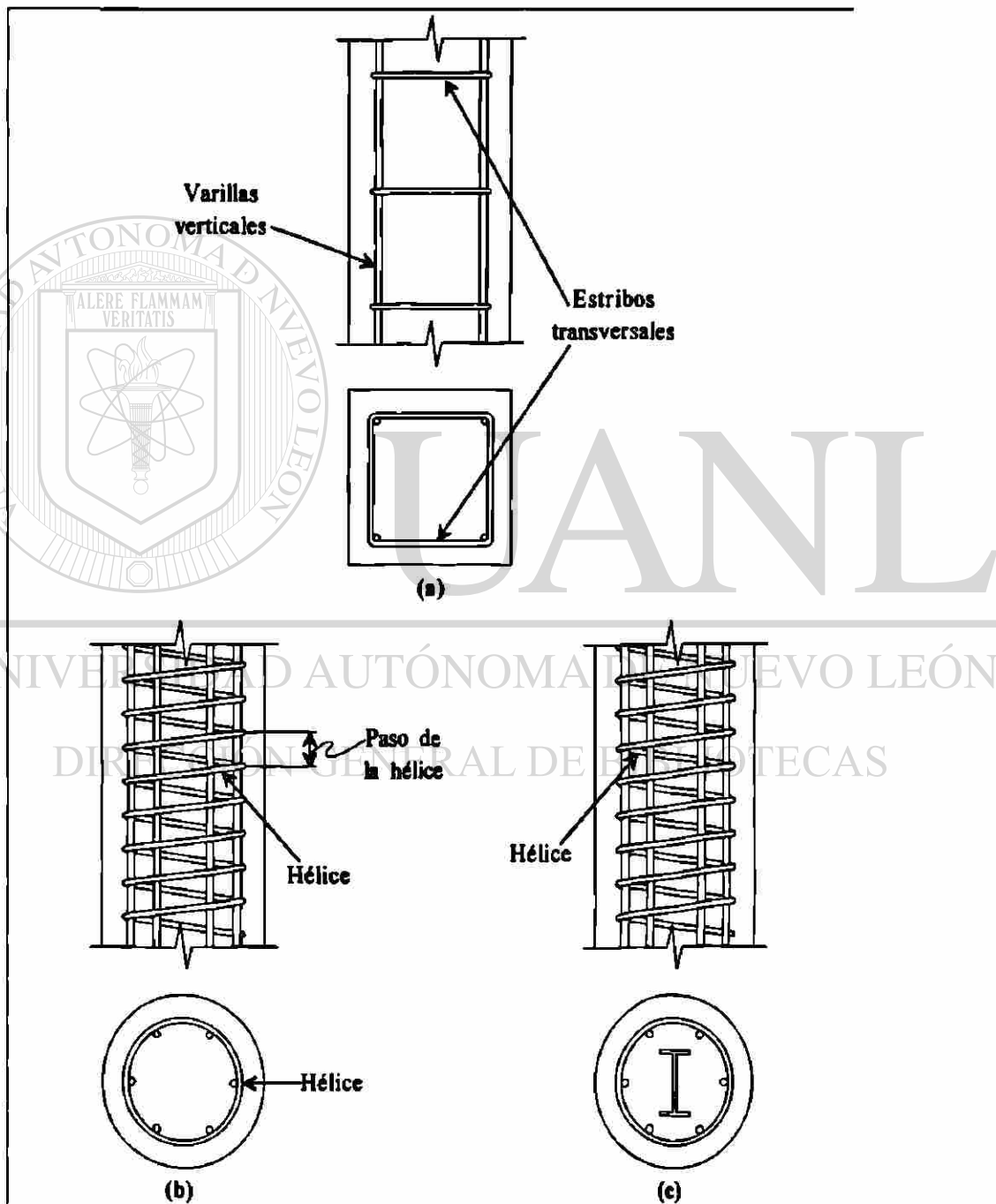
Las columnas son elementos estructurales utilizados primordialmente para soportar cargas de compresión, aunque, ordinariamente soportan también momentos flectores en una y dos direcciones. Las columnas se pueden clasificar como cortas y esbeltas. Una columna corta es aquella en la que la carga última para una excentricidad dada, está gobernada por la resistencia de los materiales, las dimensiones y geometría de la sección transversal. Una columna esbelta es aquella en la que la carga última está también influida por la esbeltez, al producir flexión adicional debido a las deformaciones transversales.

Las columnas de concreto se refuerzan mediante acero longitudinal y transversal, el acero transversal se proporciona por medio de estribos o hélices espaciados estrechamente. En la figura No. 1 se encuentra una clasificación de columnas de acuerdo con su forma y el tipo de refuerzo.<sup>1</sup>

En este trabajo, nos referiremos al análisis de esfuerzos que se presentan en secciones de columnas de concreto reforzado, al ser éstas sometidas a cargas axiales y a momentos flexionantes, en dos direcciones.



Debido a que una falla de una columna, en un lugar crítico con respecto a la estructura, puede causar un colapso progresivo en otros elementos estructurales, los reglamentos de construcción como el ACI, AHSSTO, RCDF, etc. le han dado un cuidado especial a el diseño de éstas, manifestándolo en los factores de reducción de capacidad de resistencia.



**Figura 1.-** Clasificación de columnas, de acuerdo con la forma y el tipo del refuerzo:  
 (a) columna de estribos; (b) columna de hélice o zunchada; (c) columna compuesta.

## **1.2 Deformaciones causadas por contracción y flujo plástico.**

El concreto se expande ligeramente por el aumento de humedad y se contrae por la disminución de la misma; las pruebas indican que la contracción por secado de especímenes pequeños de concreto simple, varían de 400 hasta 800 millonésimas cuando se les expone al aire a una humedad de 50%. Esto significa que se contrae la misma cantidad que si se le expusiera a un descenso de temperatura de 38°C. La contracción por secado disminuye en el concreto reforzado por la fricción y adherencia, que se presenta entre el concreto y el acero; esta fricción y adherencia provocan fuerzas de compresión en el acero y tensión en el concreto. La contracción por secado se presenta en forma crítica desde el momento del colado y dura hasta unos 3 meses; pero después sigue su secado hasta aproximadamente 2 años; esto suponiendo que está en un ambiente seco. En el caso habitual, en que la estructura se encuentra a la intemperie, se le expone a cambios drásticos en la humedad y, por tanto, es una variable en la vida por su influencia en las deformaciones que presenta la estructura.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

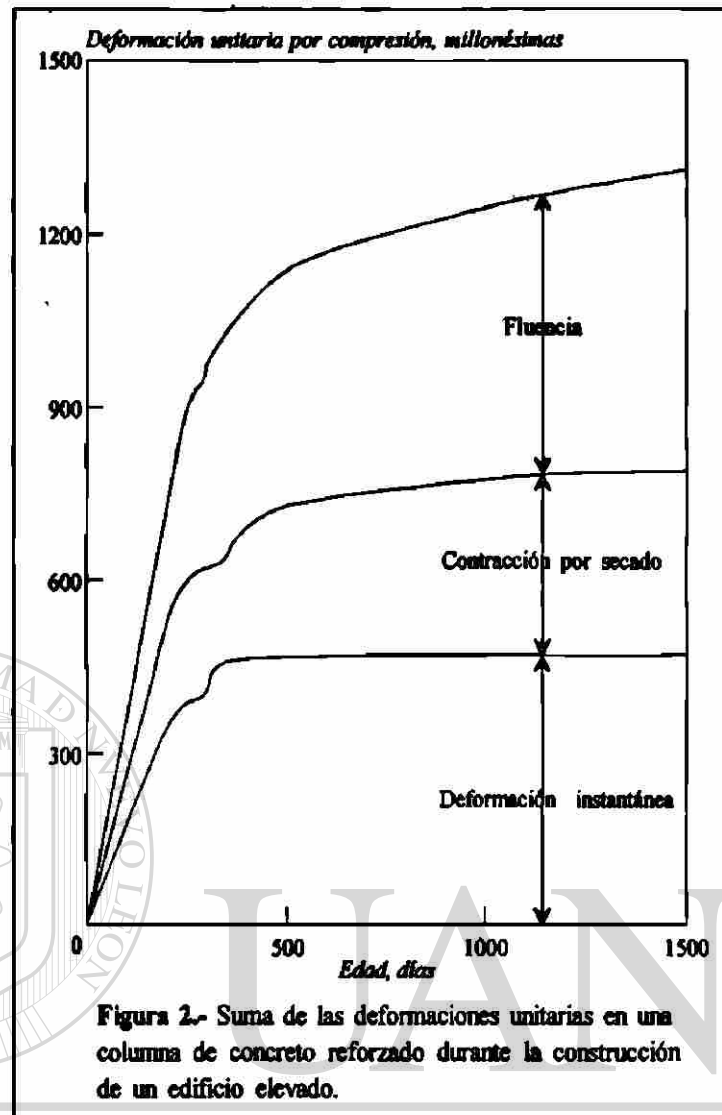
La fluencia es la deformación causada en el concreto por la carga y se puede subdividir en dos tipos: una, la deformación que ocurre inmediatamente, tal como la deformación unitaria elástica y la otra, la deformación que depende del tiempo, es decir, que comienza inmediatamente, pero que continua a una proporción decreciente durante el tiempo en que el concreto se encuentre cargado.<sup>3</sup> En la fig. No.2 se muestra una combinación de las deformaciones unitarias que ocurren en una columna reforzada, en una investigación sobre el flujo plástico en el tiempo. Las curvas representan deformaciones y cambios volumétricos en una columna de un edificio de concreto reforzado de 76 pisos, mientras estuvo en construcción. La columna de 49x122cm contenía una cuantía de acero del 2.08% de refuerzo longitudinal y un  $f'c$  de 633 kg/cm<sup>2</sup>.<sup>4</sup>

## **1.2 Deformaciones causadas por contracción y flujo plástico.**

El concreto se expande ligeramente por el aumento de humedad y se contrae por la disminución de la misma; las pruebas indican que la contracción por secado de especímenes pequeños de concreto simple, varían de 400 hasta 800 millonésimas cuando se les expone al aire a una humedad de 50%. Esto significa que se contrae la misma cantidad que si se le expusiera a un descenso de temperatura de 38°C. La contracción por secado disminuye en el concreto reforzado por la fricción y adherencia, que se presenta entre el concreto y el acero; esta fricción y adherencia provocan fuerzas de compresión en el acero y tensión en el concreto. La contracción por secado se presenta en forma crítica desde el momento del colado y dura hasta unos 3 meses; pero después sigue su secado hasta aproximadamente 2 años; esto suponiendo que está en un ambiente seco. En el caso habitual, en que la estructura se encuentra a la intemperie, se le expone a cambios drásticos en la humedad y, por tanto, es una variable en la vida por su influencia en las deformaciones que presenta la estructura.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

La fluencia es la deformación causada en el concreto por la carga y se puede subdividir en dos tipos: una, la deformación que ocurre inmediatamente, tal como la deformación unitaria elástica y la otra, la deformación que depende del tiempo, es decir, que comienza inmediatamente, pero que continua a una proporción decreciente durante el tiempo en que el concreto se encuentre cargado.<sup>3</sup> En la fig. No.2 se muestra una combinación de las deformaciones unitarias que ocurren en una columna reforzada, en una investigación sobre el flujo plástico en el tiempo. Las curvas representan deformaciones y cambios volumétricos en una columna de un edificio de concreto reforzado de 76 pisos, mientras estuvo en construcción. La columna de 49x122cm contenía una cuantía de acero del 2.08% de refuerzo longitudinal y un  $f'c$  de 633 kg/cm<sup>2</sup>.<sup>4</sup>



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Es evidente, que estos dos fenómenos propios del concreto reforzado se deben de incluir en las consideraciones de diseño de una columna, dado que el análisis de éstas se hace tomando como base las deformaciones unitarias y por efecto de estos fenómenos llegan a ser inclusive mayores que las provocadas por la deformación instantánea.

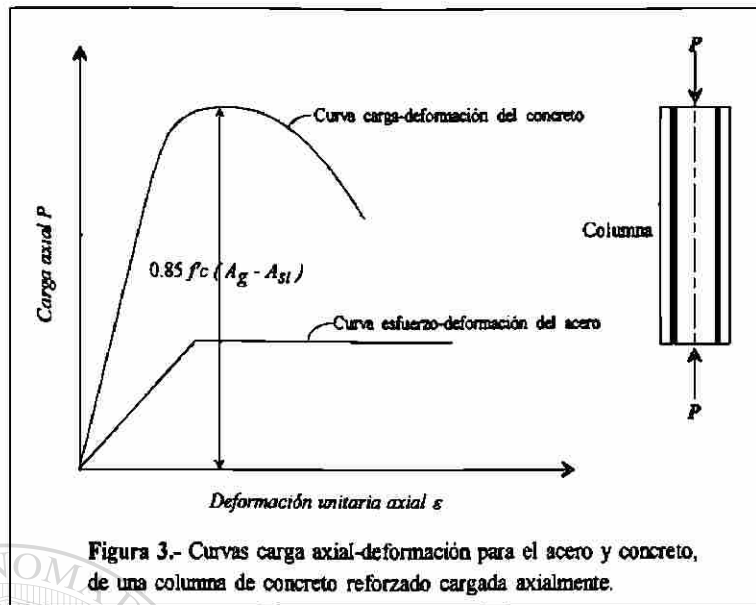
### 1.3 Columnas cortas sometidas a carga axial.

En una columna sometida a carga axial puede ocurrir que el acero llegue a cedencia antes de que el concreto alcance su esfuerzo máximo a compresión, pero, la columna es capaz de soportar más carga debido a que el acero entra en la etapa de fluencia y continúan las aplicaciones de carga hasta que el concreto llegue a su máximo esfuerzo. En un caso alterno puede ocurrir que si el concreto alcanza su resistencia máxima de compresión antes de que el acero fluya, la alta deformación del concreto le permite al acero seguir admitiendo mas carga hasta fluir. En cualquier caso, la carga máxima que admite una columna sometida a carga axial será la suma de la resistencia del acero en su etapa de fluencia mas la resistencia máxima del concreto.

Según investigaciones de Richart y Brown <sup>6</sup> la resistencia del concreto en una columna es de aproximadamente  $0.85 f'c$ , donde  $f'c$  es la resistencia del concreto en cilindros. Por esto la resistencia de una columna cargada axialmente se puede escribir como:

$$P_o = 0.85 f'c (A_g - A_{st}) + f_y A_{st}$$

En donde  $A_{st}$  es el área del acero y  $A_g$  es el área bruta de la sección transversal,  $f_y$  es la resistencia a la fluencia del acero. En la figura No.3 se presentan las curvas de esfuerzo deformación para el acero y el concreto de una columna sometida a compresión pura.



#### 1.4 Hipótesis básicas para análisis de columnas cortas sometidas a carga axial y flexión biaxial.

En la práctica, es raro encontrar columnas de concreto sometidas únicamente a cargas axiales, por lo común se encuentran sometidas a flexión en uno u dos ejes además de la carga axial. En este apartado se tratará del comportamiento de columnas sujetas a carga axial y a flexión biaxial.

En la figura No.4 se representa una clasificación de las columnas dependiendo de la carga a las que se le somete.

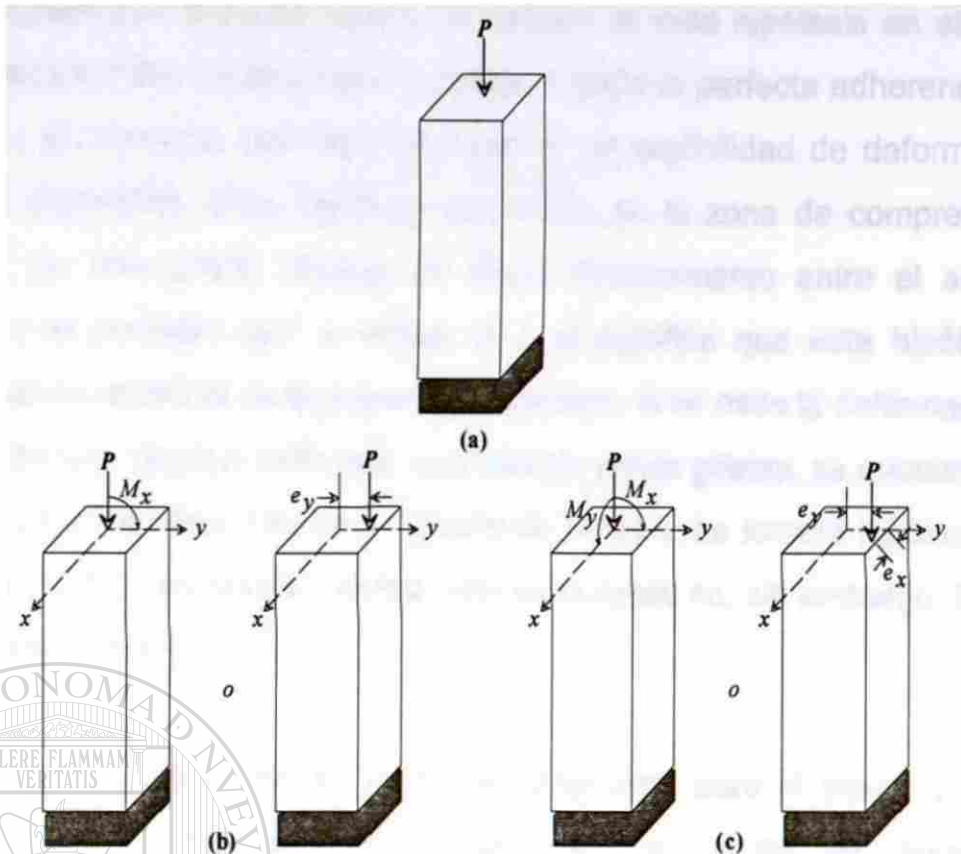


Figura 4.- Clasificación de las columnas, según la posición de la carga en la sección transversal: (a) columna con carga axial; (b) columna con carga axial y momento uniaxial; (c) columna con carga axial y momento biaxial.

Las hipótesis básicas en las que se fundamenta el análisis de columnas son:

- I. Las secciones planas, antes de la deformación siguen planas después de la deformación.
- II. Existe una perfecta compatibilidad de deformaciones entre los materiales.
- III. El material es isótropo y homogéneo.
- IV. Los materiales empleados, son elásticos y siguen la ley de Hooke.
- V. Se conocen las curvas de esfuerzo-deformación, para el acero y para el concreto.
- VI. Se puede despreciar el esfuerzo a la tensión del concreto.

La primera hipótesis, que es el principio de Bernoulli, implica que la deformación del concreto y del acero son proporcionales a la distancia del eje

neutro. Numerosas pruebas indican la validez de esta hipótesis en etapas de carga, hasta la falla. La segunda hipótesis, implica la perfecta adherencia entre el acero y el concreto, para que se logre la compatibilidad de deformaciones entre los materiales. Esta hipótesis es exacta en la zona de compresión del concreto, en una grieta, implica un cierto deslizamiento entre el acero de refuerzo y el concreto que la rodea, lo cual significa que esta hipótesis no funciona en la vecindad de la grieta. Sin embargo, si se mide la deformación del concreto en una longitud calibrada, que incluya varias grietas, se encuentra que es válida para esa deformación promedio de tensión. La tercera hipótesis, sólo la cumple el acero en buena medida pero el concreto no; sin embargo, hay una buena aproximación.

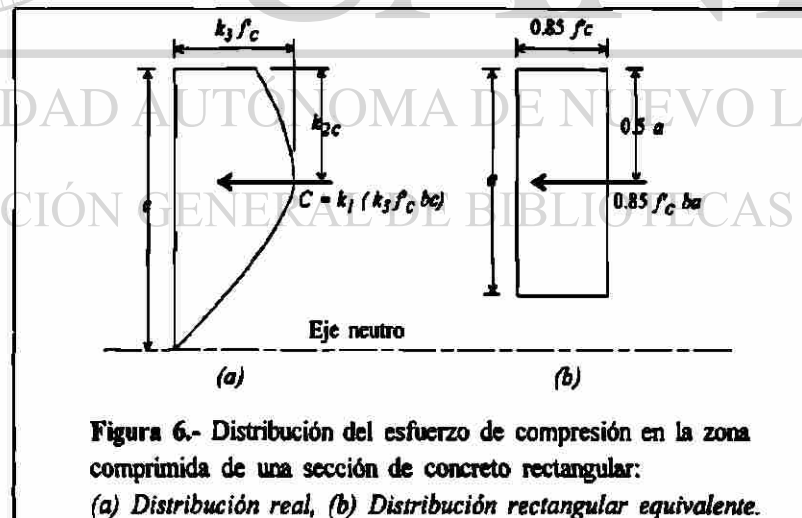
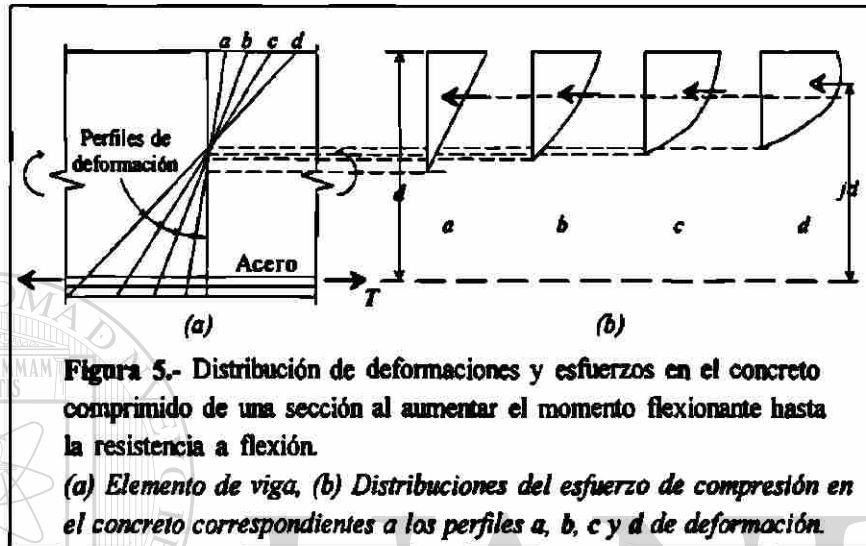
La cuarta suposición es válida perfectamente para el acero, y para el concreto tiene una buena aceptación. En la quinta se supone el comportamiento de las curvas esfuerzo-deformación, que en muchos casos se han idealizado y por último, en la sexta hipótesis se elimina la poca capacidad que tiene el concreto a tensión, ya que representa valores muy bajos con respecto a la compresión.

## UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

En una columna sometida a flexión biaxial, el momento aplicado provoca una distribución de esfuerzos que empieza siendo lineal, como lo indica la figura 5a; después la distribución continúa con un perfil parabólico, como se observa en la fig 5b y así continúa hasta conformar el perfil de esfuerzos parabólico final de la fig 5d. Definir la ecuación u ecuaciones que conforman ese bloque parabólico, es fundamental para calcular la fuerza de compresión en el concreto y la ubicación de su centroide para el momento. Sobre estas propiedades se realizaron pruebas a corto plazo, por Honested y otros, en la Asociación de Cemento Portland (PCA) <sup>9</sup> y por Rüsck <sup>10</sup> donde utilizó los parámetros  $k_1$ ,  $k_2$ , y  $k_3$ , como se ve en la figura No.6 y definió como fuerza de compresión del concreto  $C = k_1 \cdot k_3 \cdot f_c \cdot A$  donde  $c$  es la profundidad del eje neutro y  $A$  es el área comprimida; el brazo interno de palanca es  $jd = d - k_2 \cdot c$ ,



los valores de parámetros del bloque de esfuerzos  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ , y  $s_c$  para secciones rectangulares están dados por las pruebas de la PCA en especímenes no confinados; en la tabla 1 se muestran para diversos  $f'_c$ .



| Lb/plg <sup>2</sup> | N/mm <sup>2</sup> | K <sub>1</sub> | K <sub>2</sub> | K <sub>3</sub> | K <sub>4</sub> |
|---------------------|-------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 2000                | 13.8              | 0.86           | 0.48           | 1.03           | 0.0037         |
| 3000                | 20.7              | 0.82           | 0.46           | 0.97           | 0.0035         |
| 4000                | 27.6              | 0.79           | 0.45           | 0.94           | 0.0034         |
| 5000                | 34.5              | 0.75           | 0.44           | 0.92           | 0.0032         |
| 6000                | 41.4              | 0.71           | 0.42           | 0.92           | 0.0031         |
| 7000                | 48.3              | 0.67           | 0.41           | 0.93           | 0.0029         |

**Tabla 1.- Parámetros del bloque de esfuerzos en la resistencia última a flexión de secciones rectangulares que encontraron las pruebas de la PCA en especímenes no confinados.<sup>12</sup>**

Para simplificar los cálculos un cierto número de investigadores han sugerido utilizar un bloque rectangular de esfuerzos equivalente; para obtener la resistencia a la flexión utilizando el bloque parabólico se necesita conocer la magnitud de  $k_1$ ,  $k_3$  y la posición de la fuerza la define  $k_2$ , sin embargo el bloque rectangular de esfuerzos logra esto y facilita en gran medida los cálculos. La práctica norteamericana representada por el código del ACI (*American Concrete Institute*) ha sido la de reemplazar el bloque a uno rectangular equivalente, en la fig. 6b se observa la distribución rectangular equivalente, el rectángulo tiene un esfuerzo medio de  $0.85 f'_c$  y una profundidad  $a$ , en que  $a/c = \beta_1$  para  $f'_c \leq 17.6$  Mpa; se reduce  $\beta_1$  continuamente 0.05 por cada 6.9 Mpa de resistencia excedente de 27.6 Mpa. La reducción en  $\beta_1$  para el concreto de alta resistencia se debe al perfil menos favorable de la curva esfuerzo-deformación en este tipo de concreto.

En el caso de áreas de concreto comprimidas no rectangulares, como es el caso de las columnas rectangulares sometidas a flexión biaxial y en un caso más general las de sección arbitraria, no son estrictamente aplicables los parámetros recomendados para el bloque rectangular de esfuerzos en áreas comprimidas rectangulares. Esto se debe a que el esfuerzo medio y el peralte del bloque rectangular equivalente de esfuerzos para distintas formas de área

comprimida son distintos. Sin embargo, para fines de diseño, el utilizar el bloque rectangular de esfuerzos no representa un error significativo en los resultados y sí ahorra y simplifica los cálculos de forma considerable.

### **1.5 Secciones arbitrarias sometidas a flexión biaxial.**

El análisis de columnas sometidas a flexión biaxial, con sección arbitraria, se basa en el mismo concepto de flexión asimétrica. En la figura No.7 se muestra la sección sometida a momentos flectores  $M_{ux}$  y  $M_{uy}$ , que se supone reforzada por seis varillas numeradas: 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

En una sección con flexión asimétrica, el eje neutro está inclinado con respecto a la horizontal, en donde el grado de inclinación depende de la magnitud de los momentos  $M_{ux}$ ,  $M_{uy}$  y de las propiedades de la sección. Se supone que el bloque equivalente de esfuerzos tiene una profundidad  $\beta_1$  veces la profundidad del eje neutro, y un esfuerzo medio de  $0.85 f'_c$ . Este bloque no es totalmente equivalente al bloque de esfuerzos reales, aunque bastante exacto para fines de diseño.

comprimida son distintos. Sin embargo, para fines de diseño, el utilizar el bloque rectangular de esfuerzos no representa un error significativo en los resultados y sí ahorra y simplifica los cálculos de forma considerable.

### **1.5 Secciones arbitrarias sometidas a flexión biaxial.**

El análisis de columnas sometidas a flexión biaxial, con sección arbitraria, se basa en el mismo concepto de flexión asimétrica. En la figura No.7 se muestra la sección sometida a momentos flectores  $M_{ux}$  y  $M_{uy}$ , que se supone reforzada por seis varillas numeradas: 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

En una sección con flexión asimétrica, el eje neutro está inclinado con respecto a la horizontal, en donde el grado de inclinación depende de la magnitud de los momentos  $M_{ux}$ ,  $M_{uy}$  y de las propiedades de la sección. Se supone que el bloque equivalente de esfuerzos tiene una profundidad  $\beta_1$  veces la profundidad del eje neutro, y un esfuerzo medio de  $0.85 f'_c$ . Este bloque no es totalmente equivalente al bloque de esfuerzos reales, aunque bastante exacto para fines de diseño.

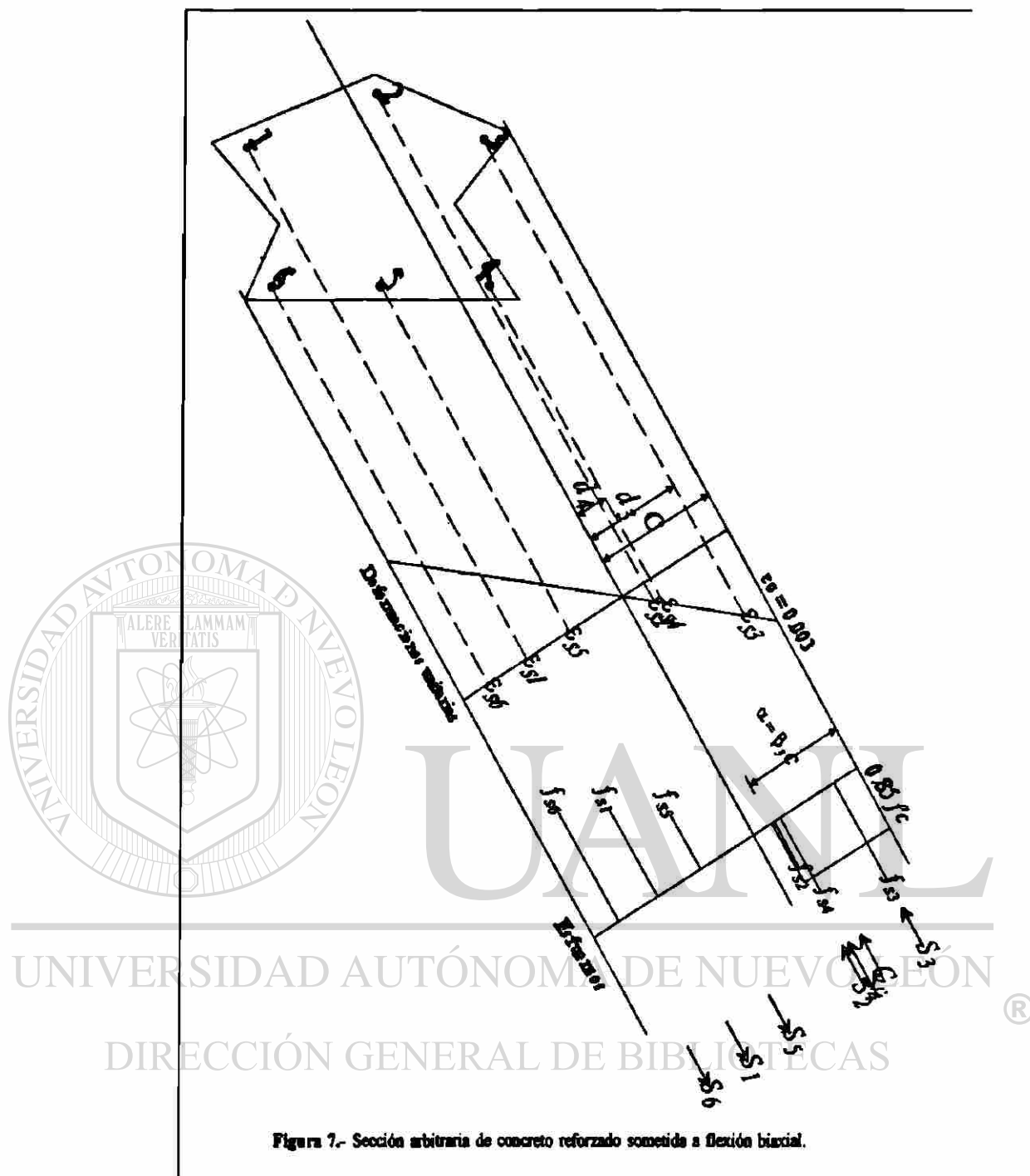


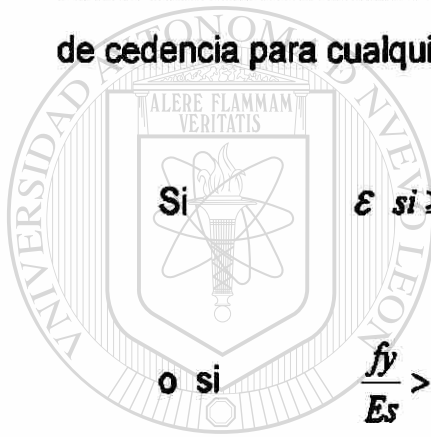
Figura 7.- Sección arbitraria de concreto reforzado sometida a flexión biaxial.

El valor de  $c$  es la distancia de el eje neutro a la fibra más alejada en compresión,  $d_i$  es la distancia del eje neutro a la varilla  $i$  medida perpendicularmente al eje neutro y la máxima deformación unitaria del concreto  $\epsilon_c$ , que se considera con un valor de 0.003, se obtiene el valor de las deformaciones unitarias para el acero por medio de triángulos semejantes;

$$\frac{\varepsilon_{si}}{d_i} = \frac{\varepsilon_c}{c}$$

$$\varepsilon_{si} = \frac{\varepsilon_c \times c}{d_i}$$

Los esfuerzos y las fuerzas de cada varilla, hay que localizarlos en la curva esfuerzo-deformación del acero. Para el caso de un punto bien definido de cedencia para cualquier varilla será:



Si  $\varepsilon_{si} \geq \frac{f_y}{E_s}$   $f_{si} = f_y$

o si  $\frac{f_y}{E_s} > \varepsilon_{si} > -\frac{f_y}{E_s}$   $f_{si} = \varepsilon_{si} E_s$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
 DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Las fuerzas en el acero serán dadas por:

$$S_i = A_{si} \times f_{si}$$

La fuerza de compresión resultante en el concreto y su posición dependen del perfil y área del bloque de esfuerzos a compresión equivalente.

Los perfiles posibles son infinitos, debido a que analizamos secciones arbitrarias, para ello habrá que calcular el área del bloque equivalente y localizar su centroide con respecto al centroide plástico de la sección.

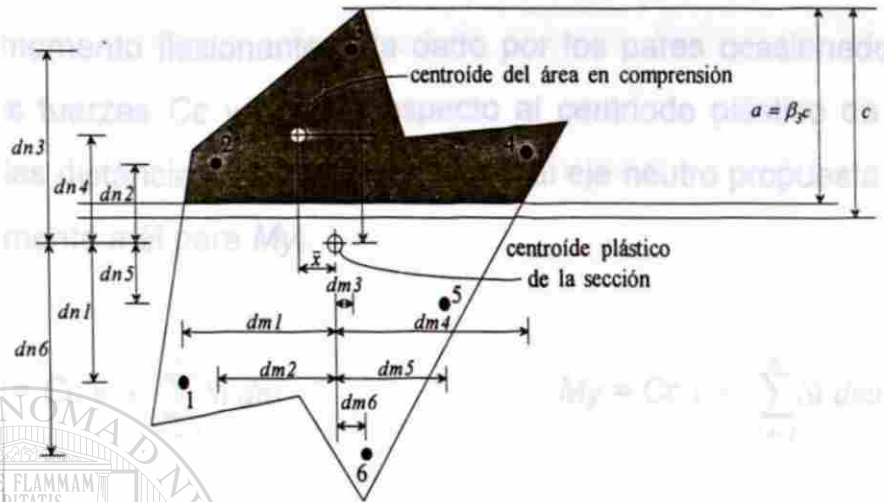


Figura 8.- Perfil del bloque en compresión de una sección arbitraria de concreto reforzado sometida a flexión biaxial.

En la figura No.8 se muestra el perfil de esta sección para un eje neutro dado, indicando la posición de su centroide plástico.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

La fuerza de compresión del bloque de concreto  $C_c$  será:

$$C_c = (0.85 f_c) (A)$$

Donde:

$A$  = área en compresión, en figura 8 se muestra sombreada.

La carga axial:

$$P_x = C_c + S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6$$

O bien:

$$P_x = C_c + \sum_{i=1}^n S_i$$

El momento flexionante esta dado por los pares ocasionados por cada una de las fuerzas  $C_c$  y  $S_i$  con respecto al centriodo plástico de la sección, midiendo las distancias perpendicularmente al eje neutro propuesto (para el  $M_x$  y paralelamente a él para  $M_y$ ).

$$M_x = C_c \bar{y} + \sum_{i=1}^n S_i d_{ni}$$

$$M_y = C_c \bar{x} + \sum_{i=1}^n S_i d_{mi}$$

Donde:

$n$  = número de varillas.

Para obtener el momento con respecto a los ejes  $x$  y  $y$ , es:

$$M_{ux} = M_x \cos\theta - M_y \cos(\theta + 90)$$

$$M_{uy} = -M_x \sin\theta + M_y \sin(\theta + 90)$$

Donde:

$\theta$  = ángulo de inclinación del eje neutro con respecto al eje  $x$ .



## REFERENCIAS DELCAPITULO 1

Ref 1.- R. Park y T Paulay. Estructuras de Concreto Reforzado. Ed. Limusa: Cap. 5, pág 123.

Ref 2.- Eduard G. Nawy. Concreto Reforzado, un enfoque básico. 1er. edición. Ed. Prentice Hall: Cap. 9, Fig. 9.1, pág. 323

Ref 3.- Diseño y control de mezclas de concreto. Ed. IMCYC: Cap. 13, pág 170,

Ref. 4.- Russell, H. G., and Corley, W. G., Time-Dependent Behavior of Columns in Water Tower Place, Research.

Ref 5.- Diseño y control de mezclas de concreto. Ed. IMCYC: Cap. 13, pág 176, figura 13-16

Ref 6.- F. E. Richart y R. L. Brown, "An Investigation of Reinforced Concrete Columns" University of Illinois Engineering Experimental Station, Bulletin No. 267, junio 1934, pág. 91.

Ref. 7.- R. Park y T Paulay. Estructuras de Concreto Reforzado. Ed. Limusa: Cap. 5, pág 125. Figura 5.2.

Ref 8.- Eduard G. Nawy. Concreto Reforzado, un enfoque básico. 1er. edición. Ed. Prentice Hall: Cap. 9, Fig. 9.1, pág. 324. Figura 9.3

Ref 9.- E. Hognestad, N. W. Hanson, y D. McHenry, Concrete Stress Distribution in Ultimate Strength Design, Journal ACI, Vol. 52, No. 6, diciembre 1955, pags. 455-479

Ref. 10.- H. Rüşh, Versuche zur Festigkeit der Biegedruckzone, Boletín No. 120, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Berlín 1955, pág. 94.

Ref 11.- R. Park y T Paulay. Estructuras de Concreto Reforzado. Ed. Limusa: Cap. 3, pág 53. Figura 3.2.

Ref 12.- R. Park y T Paulay. Estructuras de Concreto Reforzado. Ed. Limusa: Cap. 3, pág 54. Figura 3.3

## CAPITULO 2

### Métodos de Análisis Aproximados para Flexión Biaxial y Carga Axial.

#### 2.1 Introducción.

Se han desarrollado una serie de métodos aproximados para la solución de columnas sometidas a flexión biaxial, que minimizan el trabajo tedioso que se tiene que realizar para una solución exacta, esto fue incentivado en gran medida por la falta de las herramientas de las que hoy en día ya disponemos. Estos métodos, en su momento fueron de gran utilidad, pero hoy, no es muy justificable emplear métodos que se aproximan a la solución cuando se dispone de equipo para su solución exacta.

En este capítulo, se presentan algunos métodos aproximados para el análisis de columnas cuadradas, rectangulares y circulares sometidas a flexión biaxial y carga axial.

#### 2.2 Métodos de Superposición

Se han sugerido algunos métodos simplificados de superposición que reducen la flexión biaxial a flexión alrededor de los ejes principales de la sección, lo que permite utilizar procedimientos para flexión uniaxial. Morán ha estudiado estos métodos para el caso de refuerzo simétrico.

Unos de los métodos es determinar el refuerzo requerido para cada uno de los casos de carga  $(P_u, M_{ux})$  y  $(P_u, M_{uy})$  por separado, acumulando el refuerzo resultante. Esto equivale a aplicar la carga primero en el punto 1 y luego en el punto 2 de la figura 2.1 a. Este método no tiene base teórica, de manera que no debe emplearse, ya que puede producir grandes errores del

## REFERENCIAS DELCAPITULO 1

Ref 1.- R. Park y T Paulay. Estructuras de Concreto Reforzado. Ed. Limusa: Cap. 5, pág 123.

Ref 2.- Eduard G. Nawy. Concreto Reforzado, un enfoque básico. 1er. edición. Ed. Prentice Hall: Cap. 9, Fig. 9.1, pág. 323

Ref 3.- Diseño y control de mezclas de concreto. Ed. IMCYC: Cap. 13, pág 170,

Ref. 4.- Russell, H. G., and Corley, W. G., Time-Dependent Behavior of Columns in Water Tower Place, Research.

Ref 5.- Diseño y control de mezclas de concreto. Ed. IMCYC: Cap. 13, pág 176, figura 13-16

Ref 6.- F. E. Richart y R. L. Brown, "An Investigation of Reinforced Concrete Columns" University of Illinois Engineering Experimental Station, Bulletin No. 267, junio 1934, pág. 91.

Ref. 7.- R. Park y T Paulay. Estructuras de Concreto Reforzado. Ed. Limusa: Cap. 5, pág 125. Figura 5.2.

Ref 8.- Eduard G. Nawy. Concreto Reforzado, un enfoque básico. 1er. edición. Ed. Prentice Hall: Cap. 9, Fig. 9.1, pág. 324. Figura 9.3

Ref 9.- E. Hognestad, N. W. Hanson, y D. McHenry, Concrete Stress Distribution in Ultimate Strength Design, Journal ACI, Vol. 52, No. 6, diciembre 1955, pags. 455-479

Ref. 10.- H. Rüşh, Versuche zur Festigkeit der Biegedruckzone, Boletín No. 120, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Berlín 1955, pág. 94.

Ref 11.- R. Park y T Paulay. Estructuras de Concreto Reforzado. Ed. Limusa: Cap. 3, pág 53. Figura 3.2.

Ref 12.- R. Park y T Paulay. Estructuras de Concreto Reforzado. Ed. Limusa: Cap. 3, pág 54. Figura 3.3

lado de la inseguridad debido a que se toma en cuenta la resistencia completa del concreto dos veces en el diseño.

En forma alterna, se puede tomar cualquier línea recta 1-2 que pase por el punto en que actúa  $P_u$  (vea la figura 2.1 b). El refuerzo requerido para cada uno de los casos de cargas  $P_u$  en el punto 1 y  $P_u$  en el punto 2, se determina por separado y se obtiene el refuerzo resultante mediante suma. En el código de construcción de Venezuela se ha empleado este método. De acuerdo con Morán, los resultados siempre están del lado de la seguridad y en algunos casos pueden llegar a ser excesivamente conservadores.

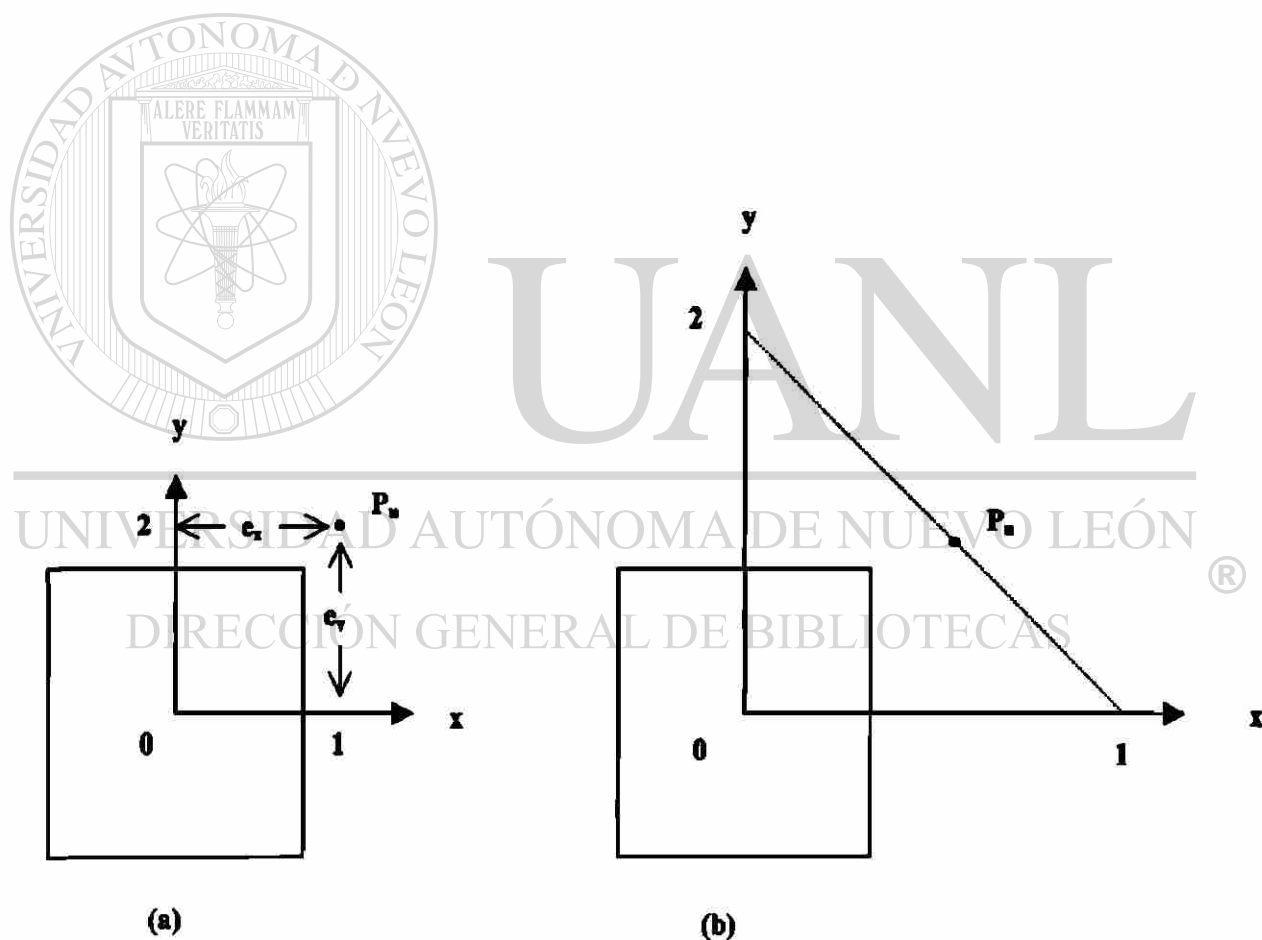


Figura 2.1. Métodos aproximados de diseño para flexión biaxial.

En otro método, se reemplaza  $P_u$  por dos fuerzas estáticamente equivalentes  $P_{ux}$  y  $P_{uy}$  localizadas en los puntos 1 y 2 (véase la figura 2.1 b) de los ejes. Se determinan por separado y luego se suman los refuerzos requeridos para cada uno de los casos de cargas  $P_{ux}$  en 1, tomando la resistencia del concreto como  $f_c P_{ux}/P_{uy}$ , aunque este método no tiene base teórica, Morán comenta que las soluciones obtenidas en los casos considerados parecen ser satisfactorios.

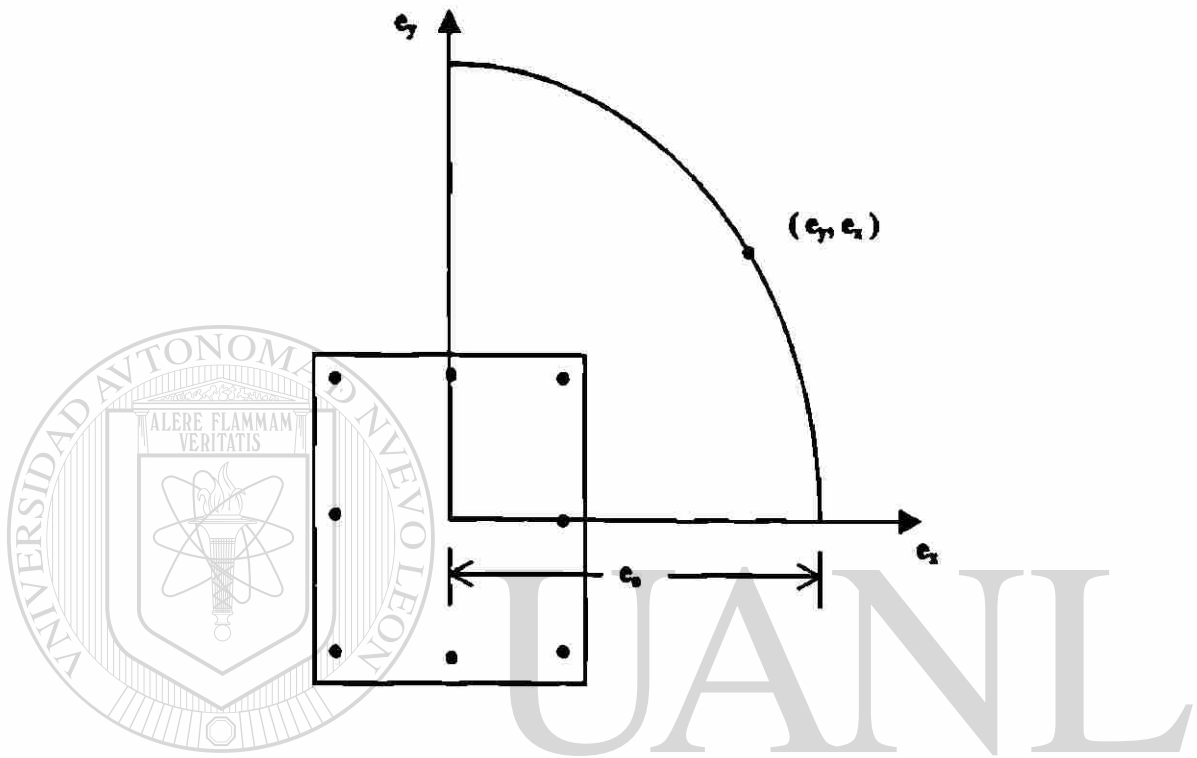
### 2.3 Método de la excentricidad uniaxial equivalente.

En la figura 2.2 se presenta la línea de interacción para una sección rectangular de columna con pandeo biaxial bajo una carga máxima constante, Las combinaciones posibles de excentricidad para una carga máxima constante  $P_u$  están dadas por la línea. Por tanto, la carga máxima para cualquier punto de aplicación ( $e_y$ ,  $e_x$ ) en la línea es igual a la carga máxima para un punto de aplicación con excentricidad uniaxial  $e_o$ . Esto ilustra un enfoque posible de diseño si la forma de la línea de interacción fuera conocida, sería posible hacer el diseño para carga  $P_u$  que actúa a la excentricidad uniaxial equivalente  $e_o$ , permitiendo de esta manera, la consideración de pandeo en una sola dirección.

Se ha propuesto una diversidad de expresiones analíticas aproximadas para poder determinar la excentricidad uniaxial equivalente  $e_o$ . Por ejemplo, Morán reporta la siguiente ecuación adoptada por el código español en 1968.

$$e_o = e_x + \left( \frac{1 - \beta}{\beta} \right) e_y \quad (1)$$

En que  $e_x \geq e_y$  y  $\beta$  es un factor tabulado en el código que depende del nivel de carga axial y la cuantía de acero.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

**Figura 2.2. Línea de interacción para columna con flexión bajo  $P_u$ .**

## 2.4 Métodos basados en aproximaciones para el perfil de la superficie de interacción (carga inversa).

Se han hecho varias sugerencias para el perfil de la superficie de interacción de la que pueden calcularse las resistencias a flexión biaxial, conocidas las resistencias uniaxiales.

Una expresión tomada del código ruso, deducida por Bresler para la resistencia de una columna biaxialmente es:

$$\frac{1}{P_u} = \frac{1}{P_{ux}} + \frac{1}{P_{uy}} - \frac{1}{P_0} \quad (2)$$

En que  $P_u$  = carga última bajo la flexión biaxial,  $P_{ux}$  = carga última cuando sólo está presente la excentricidad  $e_x$  (vgr, carga aplicada en el punto 1 de la figura 2.1 a),  $P_{uy}$  = carga última cuando sólo está presente la excentricidad  $e_y$  (vgr, carga aplicada en el punto 2 de la figura 2.1 a)  $P_0$  = carga última cuando no hay excentricidad. Esta expresión tiene la desventaja de ser más adecuada para análisis que para diseño. Bresler encontró que la carga última predicha por la ecuación concuerda excelentemente con las cargas últimas dadas por la teoría y por los resultados de pruebas, en que la desviación máxima de los resultados de prueba encontrados es de 9.4 %.

## 2.4 Métodos basados en aproximaciones para el perfil de la superficie de interacción (carga inversa).

Se han hecho varias sugerencias para el perfil de la superficie de interacción de la que pueden calcularse las resistencias a flexión biaxial, conocidas las resistencias uniaxiales.

Una expresión tomada del código ruso, deducida por Bresler para la resistencia de una columna biaxialmente es:

$$\frac{1}{P_u} = \frac{1}{P_{ux}} + \frac{1}{P_{uy}} - \frac{1}{P_0} \quad (2)$$

En que  $P_u$  = carga última bajo la flexión biaxial,  $P_{ux}$  = carga última cuando sólo está presente la excentricidad  $e_x$  (vgr, carga aplicada en el punto 1 de la figura 2.1 a),  $P_{uy}$  = carga última cuando sólo está presente la excentricidad  $e_y$  (vgr, carga aplicada en el punto 2 de la figura 2.1 a)  $P_0$  = carga última cuando no hay excentricidad. Esta expresión tiene la desventaja de ser más adecuada para análisis que para diseño. Bresler encontró que la carga última predicha por la ecuación concuerda excelentemente con las cargas últimas dadas por la teoría y por los resultados de pruebas, en que la desviación máxima de los resultados de prueba encontrados es de 9.4 %.



## 2.5 Método de contorno de carga.

Bresler también sugirió que la familia de líneas de interacción que corresponde a los distintos niveles de carga constante  $P_u$  se puede aproximar mediante la ecuación:

$$\left(\frac{M_{ux}}{M_{uxo}}\right)^m + \left(\frac{M_{uy}}{M_{uyo}}\right)^n = 1 \quad (3)$$

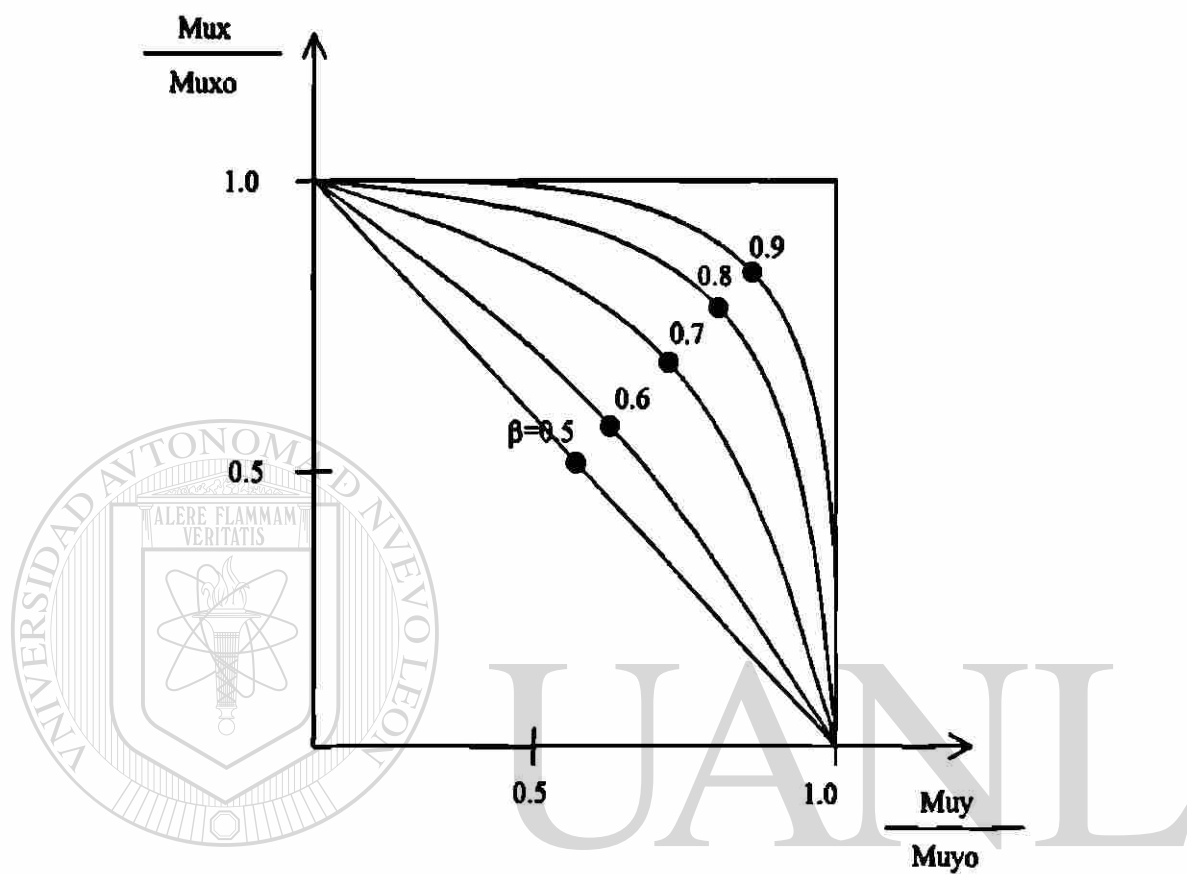
En que  $M_{ux} = P_u e_y$ ,  $M_{uy} = P_u e_x$ ,  $e_x$  y  $e_y$  son las excentricidades de  $P_u$ , y  $M_{uxo}$  y  $M_{uyo}$  son las resistencias a flexión uniaxial de los ejes (x) y (y) para la carga constante bajo consideración. Las constantes  $m$  y  $n$  dependen de las propiedades de la columna y se determinan experimentalmente.

Parme y asociados reformularon la ecuación (3) como:

$$\left(\frac{M_{ux}}{M_{uxo}}\right)^{\log 0.5 / \log \beta} + \left(\frac{M_{uy}}{M_{uyo}}\right)^{\log 0.5 / \log \beta} = 1 \quad (4)$$

En que  $\beta$  es el parámetro que determina el perfil de la línea de interacción. El efecto de los distintos valores de  $\beta$  en la forma de la línea de interacción está representada en la figura 2.3, Parme y colaboradores calcularon analíticamente los valores de  $\beta$  que están mostrados en gráficas para una diversidad de disposición de varillas, resistencia de cedencia del acero, índice de refuerzo  $\rho_t f_y / f'_c$ , y valores  $P_u / P_o$ . Estos valores de  $\beta$  junto con los valores uniaxiales de la capacidad de momento y un diagrama tal como el

de la figura 2.3 se pueden utilizar para determinar la capacidad a flexión biaxial una sección dada de columna.



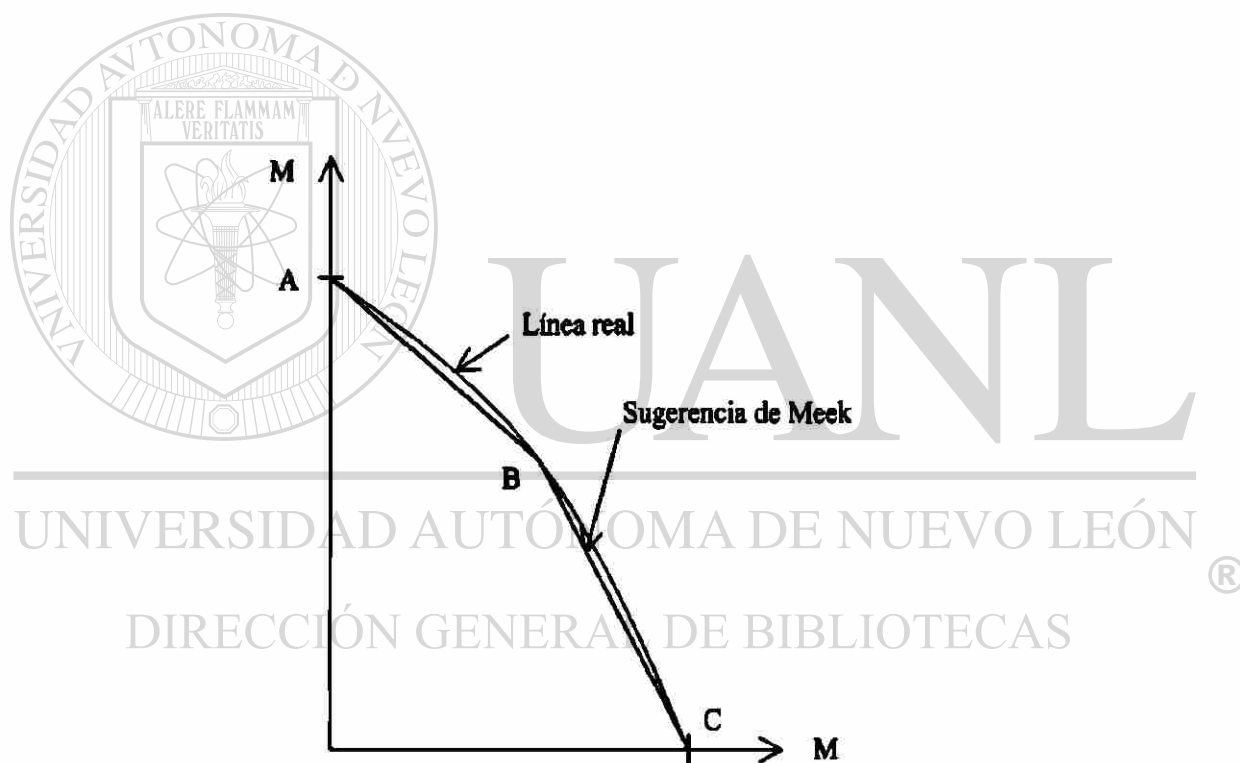
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

Figura 2.3. Línea de interacción para columna con flexión biaxial bajo constante  $P_u$ . ®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Pannell y Furlong han proporcionado otras sugerencias para el perfil de la superficie de interacción. Meek ha sugerido reemplazar la línea curva de interacción bajo carga última constante mediante dos líneas rectas. Por ejemplo, si se conocen los puntos A, B y C la figura 2.4, se puede reemplazar en forma segura la curva real mediante una línea recta AB y otra BC.

El código británico CP110: (1972) recomienda usar la ecuación de interacción (3) con  $m = n$  igual a 1.0 a niveles de carga axial alta. Esto proporciona un enfoque conservador simple.



*Figura 2.4. Línea de interacción para columna con carga axial constante.*

Weber ha producido una serie de gráficas de diseño para flexión de columnas cuadradas alrededor de una diagonal que permite el diseño o análisis de una sección mediante interpolación lineal entre la flexión alrededor de un eje principal y flexión alrededor de una diagonal. Este enfoque es semejante a la sugerencia de Meek y parece ser la herramienta de diseño más práctica disponible. Row Y Paulay han mejorado la exactitud de este proceso utilizando una distribución de esfuerzos de compresión del concreto más exacta y produciendo gráficas de diseño para flexión alrededor de ejes inclinados a distintos ángulos con respecto a los ejes principales, permitiendo con ello la interpolación lineal entre una diversidad de puntos sobre las líneas de interacción.

## 2.6 Diseño por efecto de flexión axial usando Manual Concrete Reinforcing Steel Institute (CRSI).

Las columnas redondas con 4 varillas como mínimo, poseen esencialmente simetría polar; los momentos biaxiales pueden ser simplemente combinados, sin mayor complicación:

$$M_u = \sqrt{(M_x)^2 + (M_y)^2}$$

Para las columnas cuadradas y rectangulares, la solución exacta utilizando las hipótesis de diseño para flexión biaxial, es muy complicada. La solución ha sido reducida a un mínimo de cálculos simples con los coeficientes obtenidos de las figuras 2.5 y 2.6. Estos coeficientes son aplicados uniaxialmente para los cuales, la capacidad de carga puede ser leída directamente de las tablas del capítulo 3 de CRSI.

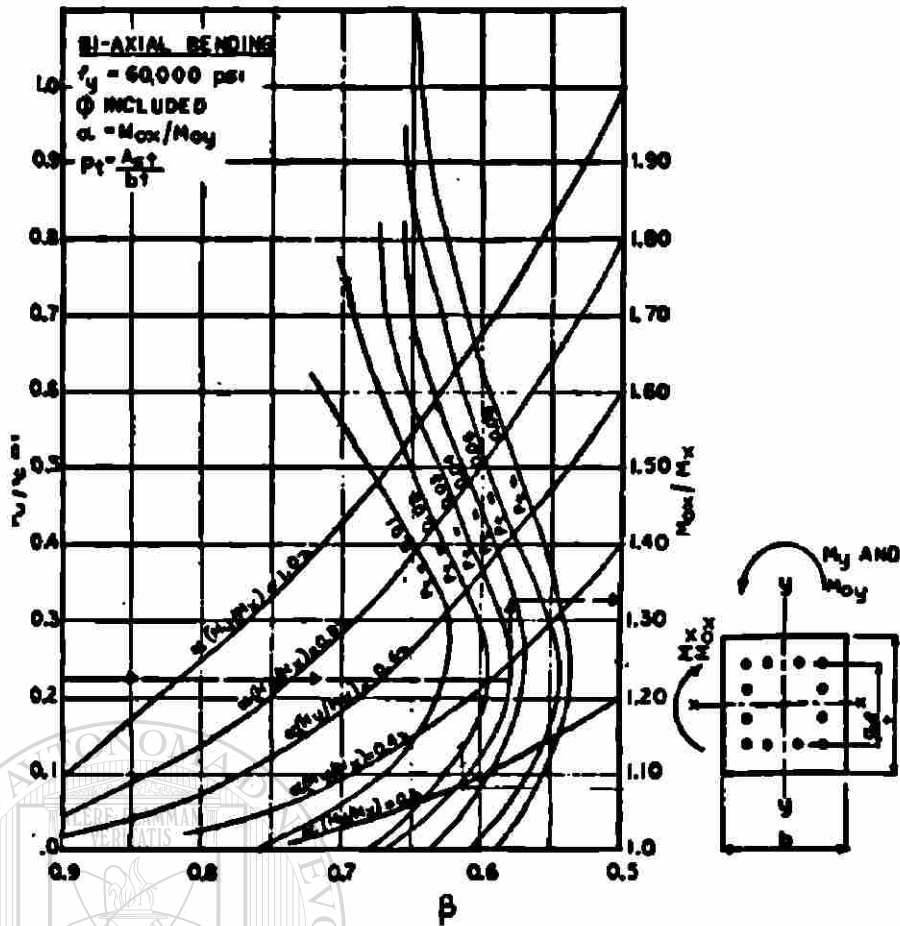


Figura 2.5. Flexión biaxial, varillas en 4 caras.

La abscisa,  $\beta$ , aquí y en la figura 2.6 son idénticas. Los valores  $\beta$  están mostrados sólo para información y no están empleadas en el uso de las figuras 2.5 y 2.6. (siendo  $\beta$  la ordenada a la curva en la figura 2.7).

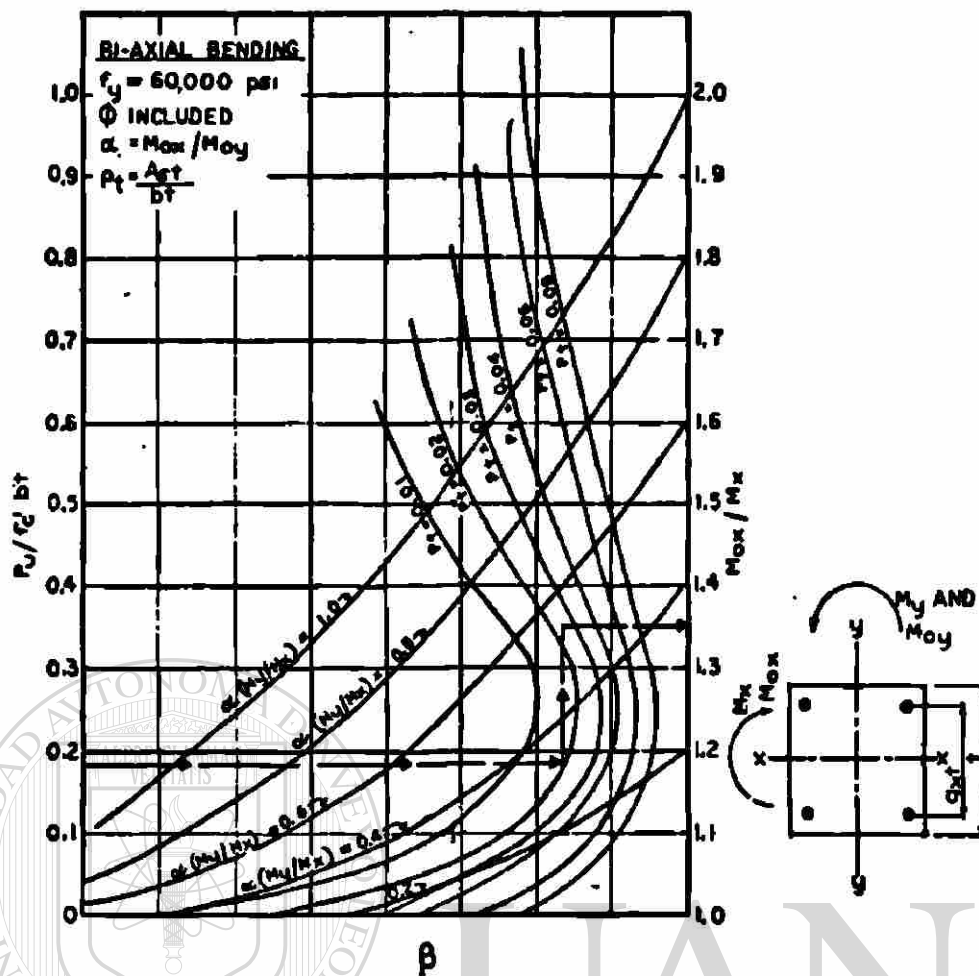


Figura 2.6. Flexión biaxial, 4 varillas.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
 DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Para ilustrar la simplicidad con que se calcula la capacidad de flexión biaxial, aquí se presentan algunos ejemplos.

Ejemplo 1.- Columna cuadrada.

Datos:

$F'_c = 4000$  psi

$F_y = 60000$  psi

$P_u = 196$  Kips

$M_x = 134$  ft.kips

$M_y = 71$  ft.kips

Columna propuesta de 16" x 16"; 4 varillas. Para encontrar área de acero requerida por flexión biaxial.

Solución:

Asumir inicialmente  $p_t = 0.02$   $\alpha = M_{ox}/M_{oy} = 1.0$

$$\alpha \frac{M_y}{M_x} = \frac{71}{134} = 0.53$$

$$\frac{P_u}{f'_{cbt}} = \frac{196}{(4)(16 \times 16)} = 0.19$$

$M_{ox}$  = Capacidad de flexión uniaxial en el eje " x "

$M_{oy}$  = Capacidad de flexión uniaxial en el eje " y "

$M_x$  y  $M_y$  = Momento de diseño con respecto a los ejes " x " y " y ".

Con  $P_u/f'_{cbt}=0.19$  se procede horizontalmente en la figura 2.6 a la curva  $p_t = 0.02$ , luego verticalmente a  $M_y/M_x = 0.53$ , y se lee  $M_{ox}/M_x = 1.34$  en la ordenada derecha.

Después, el momento de diseño uniaxial para soportar la resistencia a flexión biaxial es:

$$M_{ox} = 134 \times 1.34 = 180 \text{ ft-kips.}$$

$$M_u/P_u = (180 \times 12)/196 = 11.0 \text{ plg.}$$

De la tabla en la página 3-20 de CRSI (ver anexo I), con  $e = 11.0$ plg, interpolamos para la solución.

Usamos: 4 varillas # 10;  $P_u = 203$  kips;  $f_t = 0.0198$

Usando la variación lineal de flexión biaxial dada la formula:

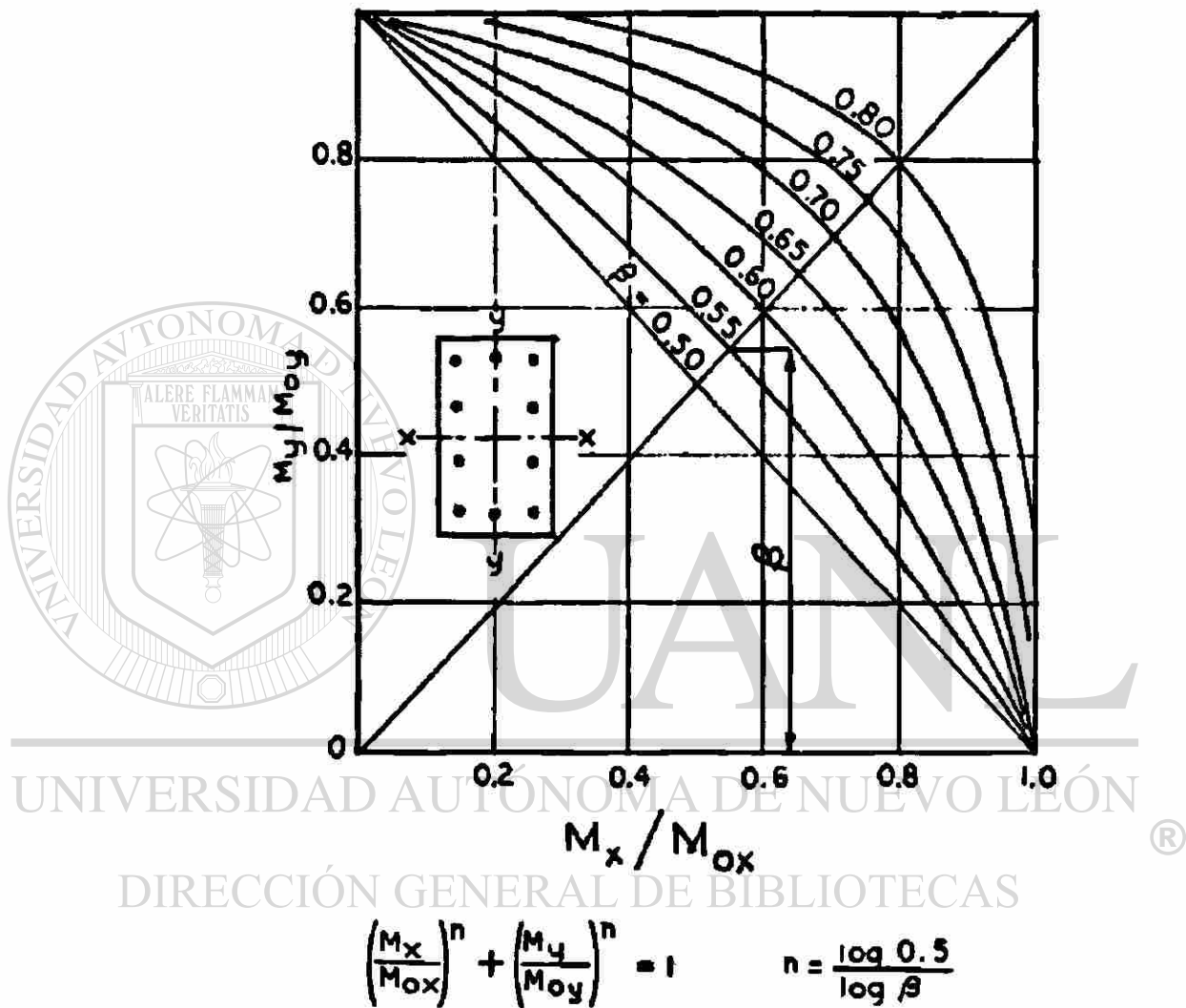


Figura 2.7. Relaciones básicas de flexión biaxial (Ec. 3)



## Ejemplo 2.- Columna cuadrada.

Datos:

$$P_u = 400 \text{ k}$$

$$e_x = e_y = 2.25 \text{ in}$$

$$f'_c = 4000 \text{ psi}$$

Varillas – Grado 60

Comprobar la solución aproximada para: 16" x 16", 4 varillas # 10,  $pt = 0.0198$

$$M_x = e_x P_u = 900 \text{ in-kips}$$

$$M_y = e_y P_u = 900 \text{ in-kips}$$

$$\alpha = \frac{M_{ox}}{M_{oy}} = 1.0 \text{ por simetría con respecto a los ejes "x" y "y"}$$

$$\alpha = \frac{M_x}{M_y} = 1.0 \quad \frac{P_u}{f'_c b t} = \frac{400}{(4)(16 \times 16)} = 0.39$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

®

Como en el ejemplo No.1 entramos a la figura 2.6 con 0.39, vamos a la derecha hasta encontrar con  $pt = 0.02$ ,  $\alpha = M_x/M_y = 1.0$ , derecha de la relación,  $M_{ox}/M_y = 1.65$

$$M_{ox} = (1.65) (900) = 1485 \text{ in – kips}$$

$$e_x = (1.65) (2.25) = 3.71 \text{ in}$$

Entramos a las tablas de capacidad de carga, página 3-20 del CRSI, y leemos para 4 varillas # 8,  $e = 3 \text{ in.}$ ,  $P_u = 476 \text{ kips}$ ,  $e = 4 \text{ in.}$ ,  $P_u = 408 \text{ kips}$ .  
Checamos:  $P_t = 0.0123$ . Entramos a la figura 2.6, para  $P_t = 0.0123$ , y leemos  $M_{ox}/M_x = 1.59$

Usar: Sección 16" x 16" con 4 varillas # 8.

Ejemplo 3.- Sección rectangular.

Datos:

$$F'c = 5000 \text{ psi}$$

$$F_y = 60000 \text{ psi}$$

$$P_u = 300 \text{ kips}$$

$$M_x = 270 \text{ ft - kips}$$

$$M_y = 70 \text{ ft - kips}$$

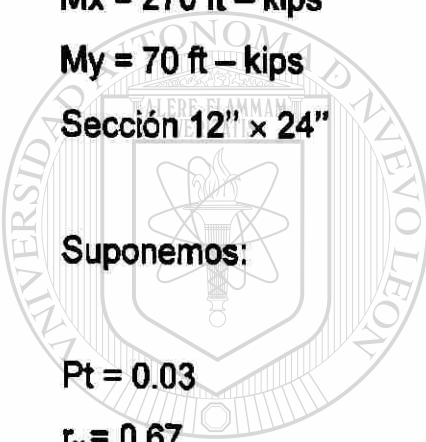
Sección 12" x 24"

Suponemos:

$$P_t = 0.03$$

$$r_x = 0.67$$

$$r_y = 1.00$$



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Calcular:

$$\sqrt{q} = \sqrt{(0.03)(60)/5} = 0.6$$

$$\alpha \frac{M_y}{M_x} = 1.93(70)/270 = 0.50$$

$$\frac{P_u}{f'_{cbt}} = 300/(5)(12)(24) = 0.21$$

$$\alpha = \frac{M_{ox}}{M_{oy}} = \frac{[1 - 0.7(1 - r_x)\sqrt{q}][1 + g_x]h_x}{[1 - 0.7(1 - r_y)\sqrt{q}][1 + g_y]h_y}$$

$$\alpha = \frac{[1 - (0.7)(1 - 0.67)(0.6)][1 + 0.8](24)}{[1 - (0.7)(1 - 1.0)(0.6)][1 + 0.6](12)} = 1.93$$

En que:

$$q = \rho f_y / f_c$$

$r_x$  = relación del área de acero en hileras del eje "x" con área total de acero.

$R_y$  = relación del área de acero en hileras del eje "y" con área total de acero.

$h_x = h_y$  = altura del miembro con respecto a los ejes "x" y "y" respectivamente.

$g_x = g_y$  = relación de la distancia entre hileras a la altura total con respecto a los ejes "x" y "y" respectivamente.

De la figura 2.5 con  $P_u / f_c b t = 0.21$   $P_t = 0.03$  y  $\alpha M_y / M_x = 0.50$   $M_{ox} / M_x = 1.32$

Tenemos:  $M_{ox} = 1.32 \times 270 = 356$  ft-kips

La determinación del acero requerido para secciones rectangulares puede mejor ser obtenida utilizando las tablas con el arreglo de varillas en el mismo patrón que el de las relaciones  $r_x$  y  $r_y$ . Se seguirá este procedimiento.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

Con el arreglo mostrado, y utilizando la tabla de la página 3-105 del CRSI (ver anexo I), entramos con  $P_u = 300$  kips y  $e_x = 356 \times 12 / 300 = 14.24$  in.

Para 6 #10, 3L-25, leemos:  $P_u = 370$  k para  $e_x = 12$  in

$\rho_t = 0.0264$

$P_u = 267$  k para  $e_x = 16$  in

Interpolando para  $e = 14.24$  in;  $P_u = 314$  k > 300

$$\sqrt{q} = \sqrt{(0.0264)(60/5)} = 0.564$$

$$\alpha = \frac{[1 - (0.7)(0.33)(0.564)] \left( \frac{1.8 \times 24}{1.6 \times 12} \right)}{1}$$

$$\alpha = 1.94 \approx 1.93$$

Ya que la relación actual de acero es menor que la relación asumida, la selección del diseño debe ser revisada con las constantes corregidas. Note que  $r_x$  y  $r_y$  asumidas no cambian, ya que el patrón asumido es el seleccionado, 3L-25.

Los valores reales de  $M_{ox}$  y  $M_{oy}$  son permisibles en las tablas de capacidad de carga del CRSI. Entramos a la tabla con  $P_u = 314$  k y leemos la capacidad con respecto a los ejes:

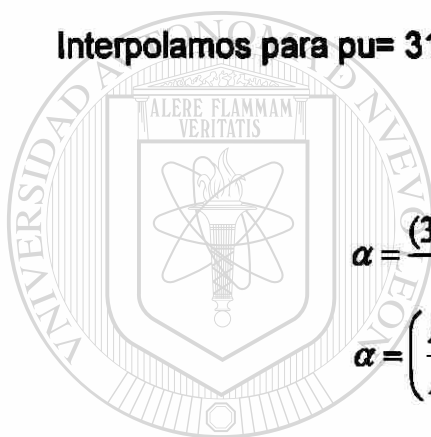
$$P_u = 353 \text{ k en } e_y = 6''$$

$$P_u = 269 \text{ k en } e_y = 8''$$

Interpolamos para  $p_u = 314$  k,  $e_y = 6.93''$   $M_{oy} = 2170$  in – kips

$$\alpha = \frac{(314 \times 14.24)}{2170} = 2.06$$

$$\alpha = \left( \frac{M_y}{M_x} \right) = \frac{2.06}{70 \times 270} = 0.535$$



UNANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Entramos a la figura 2-5 con  $\alpha(M_y/M_x) = 0.535$ ,  $P_u/f_{cbt} = 0.21$  y  $P_t = 0.0264$

$M_{ox}/M_y = 1.32$ , el diseño seleccionado es correcto.

Usar: 12" x 24", 6 # 10, 3L-25.

## CAPITULO 3

### MODELACIÓN DEL PROGRAMA PARA EL ANÁLISIS DE COLUMNAS SOMETIDAS A FLEXIÓN BIAIXIAL Y CARGA AXIAL CON SECCIONES ARBITRARIAS.

#### 3.1 Modelación.

Para la solución exacta de las diversas combinaciones de  $M_x$ ,  $M_y$  y  $P_x$  que se pueden presentar en una columna de sección arbitraria, es necesario plantear un modelo matemático que satisfaga las condiciones de equilibrio y la compatibilidad de deformaciones.

El modelo matemático se plantea a partir de las condiciones de equilibrio que deben de ser satisfechas en una columna sometida a flexión biaxial y carga axial y que son:

$$P_x = \iint_{A_c} f_c(x, y) dx dy + \sum_{i=1}^n f_s(x_i, y_i) A_{s_i} \quad \text{ec. (a)}$$

$$M_x = \iint_{A_c} Y f_c(x, y) dx dy + \sum_{i=1}^n Y_i f_s(x_i, y_i) A_{s_i} \quad \text{ec. (b)}$$

$$M_y = \iint_{A_c} X f_c(x, y) dx dy + \sum_{i=1}^n X_i f_s(x_i, y_i) A_{s_i} \quad \text{ec. (c)}$$

En donde:

$f_c(x, y)$  es función del esfuerzo del concreto y aquí es donde se toma en cuenta la compatibilidad de deformaciones, que es la segunda condición que deberá de tomar en cuenta el modelo matemático.

$A_c$  es función del área del concreto comprimido.

$f_s(x_i, y_i)$  es función del esfuerzo del acero, también toma en cuenta la compatibilidad de deformaciones.

Así es el área del acero  $i$ .

Este modelo asume todas las hipótesis descritas en el capítulo primero.

Aunque el bloque de esfuerzos equivalentes es parabólico, en esta modelación se considera el recomendado por el ACI, que es el bloque rectangular; obteniendo un esfuerzo medio de  $0.85 f'_c$ , que tiene una aproximación bastante aceptable para fines de diseño estructural.

La máxima deformación unitaria del concreto en la fibra más esfuerzo a la compresión será de 0.003 que es la recomendada por el ACI.

Las ecuaciones, entonces se reducen a:

$$P_x = 0.85 f'_c \iint_{Ac} dx dy + \sum_{i=1}^n f_s i A_s i \quad \text{ec. (d)}$$

$$M_x = 0.85 f'_c \iint_{Ac} Y dx dy + \sum_{i=1}^n Y f_s i A_s i \quad \text{ec. (e)}$$

$$M_y = 0.85 f'_c \iint_{Ac} X dx dy + \sum_{i=1}^n X f_s i A_s i \quad \text{ec. (f)}$$

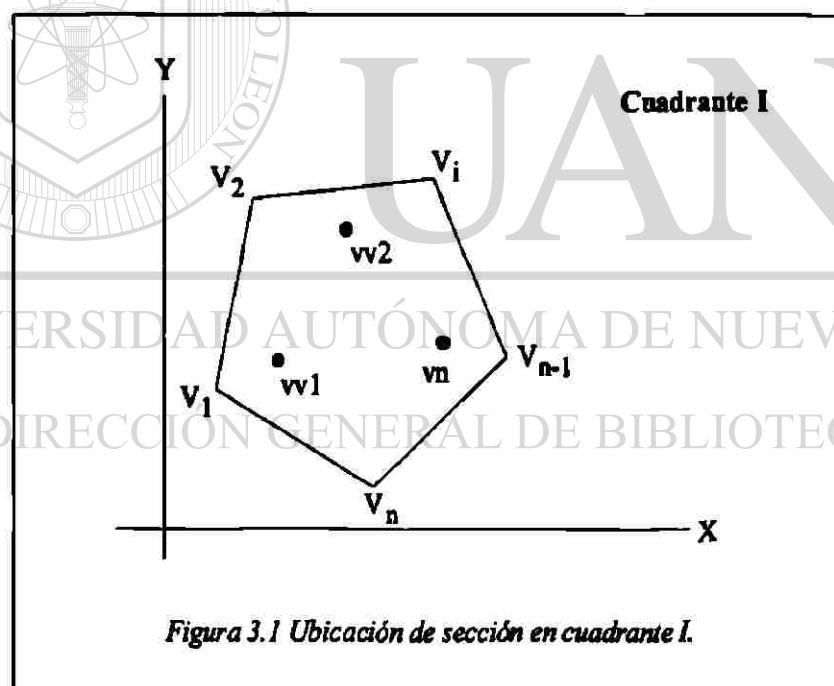
Una vez satisfechas las acciones anteriores, ya se tiene planteado el modelo matemático, por tanto las ecuaciones (d), (e) y (f) constituyen el modelo.

Ahora, se necesita implementar este modelo en un programa de cómputo que solucione rápidamente estas ecuaciones, se describe paso a paso esta

implementación. En el capítulo cuarto, se presentan los diagramas de flujo y en el capítulo quinto el programa codificado en "Quick Basic".

**Pasos:**

1. Ubicar la sección arbitraria sobre un plano de ejes coordenados (x, y) buscando que quede en el primer cuadrante. Se necesita ubicar las coordenadas de cada uno de los vértices y de cada una de las varillas o paquetes de varillas. Se forma la matriz  $V_{N \times 2}$  y  $NA_{N \times 2}$  donde en la primera columna son las coordenadas en "x" y la segunda columna son las coordenadas en "y", en caso de que sea una sección circular, elíptica o parabólica, se seccionará en vértices. Ver figura 3.1.



*Figura 3.1 Ubicación de sección en cuadrante I.*

2. Obtener la máxima y mínima coordenada en "x" y "y" ( $X_{me}$ ,  $X_{ma}$ ,  $Y_{me}$ ,  $Y_{ma}$ ) de los vértices de la columna. Ver figura 3.2.

3. Se propone un eje neutro cualquiera. En el programa esto debe de constituir un barrido de múltiples propuestas de ejes neutros. Para ello, se propone que el origen del eje neutro pivotee sobre el eje "x" y variando el ángulo de 0 a 180°, para después pivotear sobre el eje "y" de -90 a 90°. El rango de estas operaciones será de  $X_{me}$  a  $2X_{ma}$  y de  $Y_{me}$  a  $2Y_{ma}$ ,

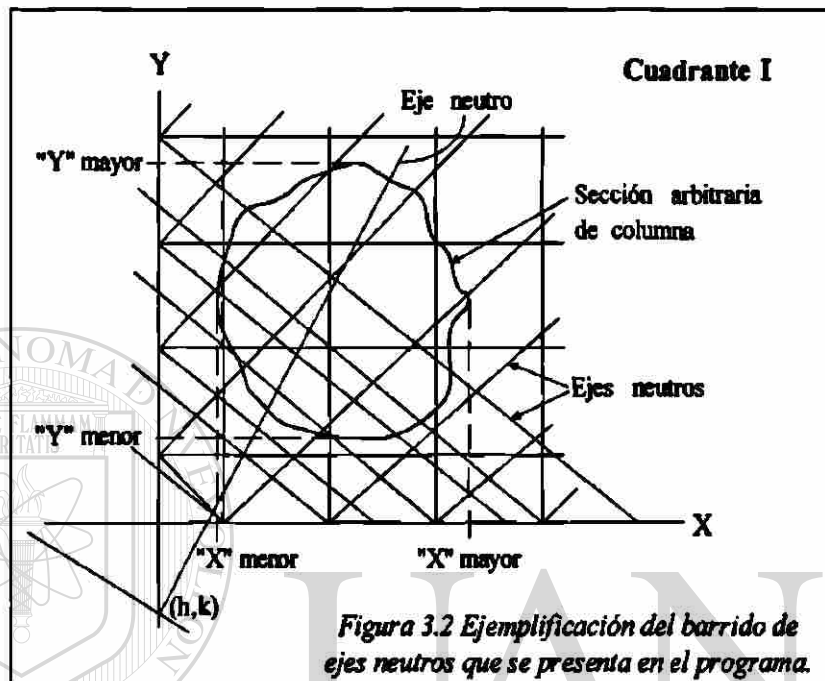


Figura 3.2 Ejemplificación del barrido de ejes neutros que se presenta en el programa.

respectivamente. Cada una de estas propuestas generará un  $M_x$ ,  $M_y$  y  $P_x$  únicos que constituyen puntos en los diagramas de interacción de la columna. La precisión del diagrama depende del paso que se le da a las interacciones de  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  y  $\Delta \theta$ . En la figura 3.2 se observan las diversas propuestas de ejes neutros.

4. Para cada uno de los ejes neutros propuestos se hace una transformación de las coordenadas de los vértices y de las varillas de la columna a través de una translación y rotación de ejes. Esta transformación se hace mediante un teorema de geometría analítica plana "si efectuamos un cambio de ejes coordenados mediante una...", se forma la matriz  $VV_{N \times 2}$  para las nuevas coordenadas de las vértices referidas al eje neutro y la matriz  $NNA$ , con las coordenadas de las varillas referidas al eje neutro.



5. Ahora se trabajará con la parte de la sección que está arriba del eje neutro. Se calcula la máxima distancia en "y", que es la máxima coordenada positiva, esta distancia es la distancia C a que se refiere el artículo 10.2.7.2 del Reglamento de las Construcciones de Concreto Reforzado ACI 318-89 y es la distancia que hay desde el eje neutro hasta la fibra de deformación unitaria máxima en compresión midiéndose perpendicular al eje. Vea figura 3.3.

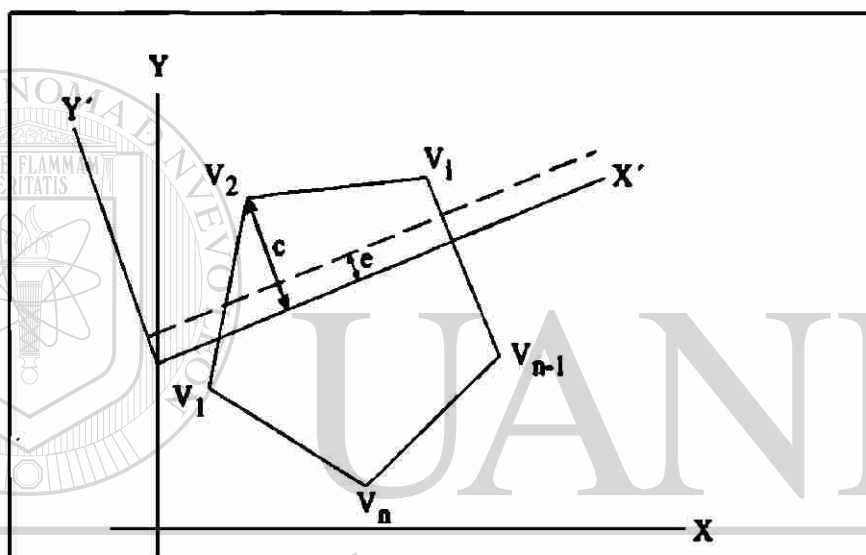


Figura 3.3 Translación y rotación de coordenadas originales a ejes  $x'$ ,  $y'$ .

6. La sección superior será la zona de compresión y está limitada por los extremos de la sección transversal y una línea recta paralela al eje neutro, a una distancia  $a = \beta_1 c$  a partir de la fibra de deformación unitaria máxima de compresión (Art. 10.2.7.1 ACI).
7. El factor  $\beta_1$  deberá de tomarse como 0.85 para resistencias del concreto  $f'_c$  hasta  $280 \text{ kg/cm}^2$ , y para resistencias superiores a  $280 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\beta_1$

disminuirá 0.05, en forma uniforme, por cada  $70 \text{ kg/cm}^2$  de aumento sube  $280 \text{ kg/cm}^2$ , sin embargo,  $\beta_1$  no debe de ser menor a 0.65 (Art. 10.2.7.3 ACI).

8. Calcular la distancia  $e$  que debe de existir entre las paralelas a que se refiere la figura 3.3.

$$e = c(1-\beta_1)$$

9. Restarle a las coordenadas "y" de los vértices la distancia  $e$ , y formar la matriz  $VV_{N \times 2}$  donde ahora las coordenadas de los vértices quedarán referidos a la línea paralela al eje neutro.

$$VV = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 - e \\ x_2 & y_2 - e \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n - e \end{bmatrix}$$

10. Obtener a partir de la matriz  $VV_{N \times 2}$  las ecuaciones de cada lado.

La pendiente esta dada por:

$$m = \frac{y_i - y_{(i-1)}}{x_i - x_{(i-1)}}$$

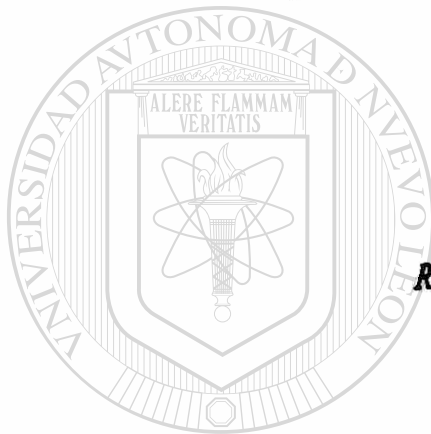
La ecuación de la recta de cada lado esta dada por:

$$\begin{aligned} (x - x_i)m &= y - y_i \\ y - x_i m + (x m - y_i) &= 0 \end{aligned}$$

11. Formular la matriz  $EC_{N \times 3}$  que contenga las ecuaciones de cada lado, siendo la columna 1 el valor de la variable "x", la columna 2 el valor de la variable "y" y la columna 3 la constante.

$$EC = \begin{bmatrix} x & y & cte. \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

12. Formular una matriz  $R_{N \times 4}$  que contenga los rangos de operación tanto en "x" como en "y" de cada lado. Se conforma a partir de la matriz VVV.



$$R = \begin{bmatrix} \text{Rango en } x & \text{Rango en } y \\ x_1 & x_2 & y_1 & y_2 \\ x_2 & x_3 & y_2 & y_3 \\ x_i & x_{i+1} & y_i & y_{i+1} \\ x_n & x_1 & y_n & y_1 \end{bmatrix}$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

13. Formular la matriz  $RR_{N \times 4}$  que contiene los rangos de operación en "x" y en "y" de los lados que queden arriba del eje neutro, en el caso que crucen la línea paralela al eje neutro se verá reflejado con un cambio de signo en el rango en "y", en ese caso, se elimina el elemento negativo y se evalúa la ecuación correspondiente con  $y = 0$  y se obtiene así su correspondiente "x". En esta matriz no habrá elementos negativos.

14. Con la matriz  $RR_{N \times 4}$  se forma una matriz con las coordenadas "x, y" de los vértices que conforman el área de compresión.

15. Se obtiene el área y la ubicación del centroide (x, y) con las siguientes relaciones obtenidas de geometría analítica y a partir de la matriz VVV:

$$k_i = x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i$$

$$Ac = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n k_i$$

$$\bar{x}_{TBS} = \frac{1}{6} \sum k_i (y_i + y_{i+1})$$

$$\bar{y}_{TBS} = \frac{1}{6} \sum k_i (x_i + x_{i+1})$$

16. Se obtiene con las relaciones anteriores el área y el centroide geométrico de toda la sección, utilizar la matriz  $VV_{NX2}$ .

17. Obtener el centroide plástico de la sección que es el centroide de resistencia de la sección si se comprime todo el acero al esfuerzo de cedencia y el concreto al esfuerzo máximo ( $0.85f'c$ ) con:

$$\bar{x} = \frac{(0.85f'c)(\text{Area de sección})(y) + \sum (A_{si})(f_y)y_i}{(0.85f'c)(\text{Area de sección}) + \sum (A_{si})(f_y)}$$

$$\bar{y} = \frac{(0.85f'c)(\text{Area de sección})(x) + \sum (A_{si})(f_y)x_i}{(0.85f'c)(\text{Area de sección}) + \sum (A_{si})(f_y)}$$

18. Se calcula la deformación del acero de refuerzo utilizando regla de tres simple:

$$\frac{C}{0.003} = \frac{y_i}{\epsilon_{si}}$$

*Donde:*

**C** = Distancia entre eje neutro y máxima fibra en compresión.

**0.003** = Máxima deformación unitaria del concreto.

**$y_i$**  = Coordenada y de la varilla *i*.

**$\epsilon_{si}$**  = Deformación unitaria en el acero *i*.

*Se calcula la fuerza en cada varilla.*

---

$$\sigma_{si} = \epsilon_i E_s$$

Si  $\sigma_{si} > f_y$  usar  $f_y$

Si  $\sigma_{si} < f_y$  usar  $\sigma_{si}$

$$F_{si} = \sigma_{si} A_{si}$$

*Donde:*

**$E_s$**  = Módulo de elasticidad del acero.

**$A_{si}$**  = Area de la varilla *i*.

**$F_{si}$**  = Fuerza en varilla *si*.

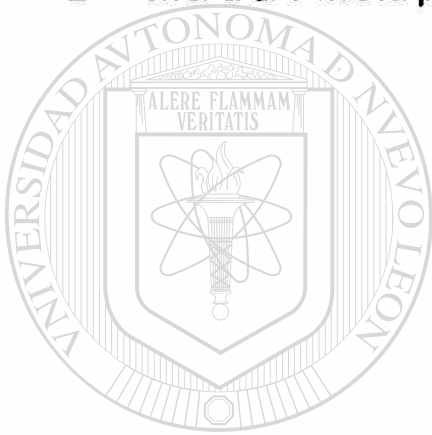
19. Calcular  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $P_x$  con:

$$P_x = 0.85 f' c A_c + \sum F_{si}$$

$$M_x = 0.85 f' c A_c (y_{TBS} - \bar{y}) + \sum F_{si} (y_i - \bar{y})^*$$

$$M_y = 0.85 f' c A_c (x_{TBS} - \bar{x}) + \sum F_{si} (x_i - \bar{x})$$

20. Volver a una nueva propuesta de eje neutro.



UANL

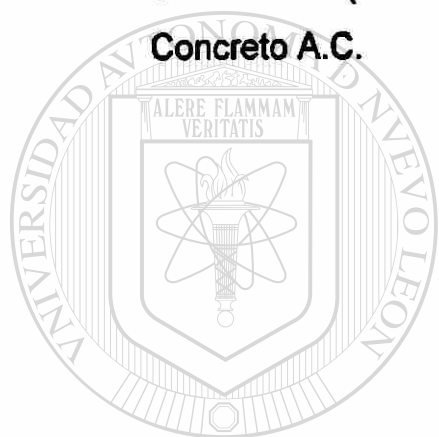
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

### **3.2 Bibliografía.**

- 1.- **Geometría Analítica, Editorial Noriega Limusa.  
Charles H. Lehmann, página 145, Capítulo V.**
- 2.- **Bis. Página 87, Capítulo III.**
- 3.- **Reglamento de las construcciones de concreto reforzado (ACI 318-89) y  
comentarios (ACI 318R-89) IMCYC. Instituto Mexicano del Cemento y del  
Concreto A.C.**



UANL

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

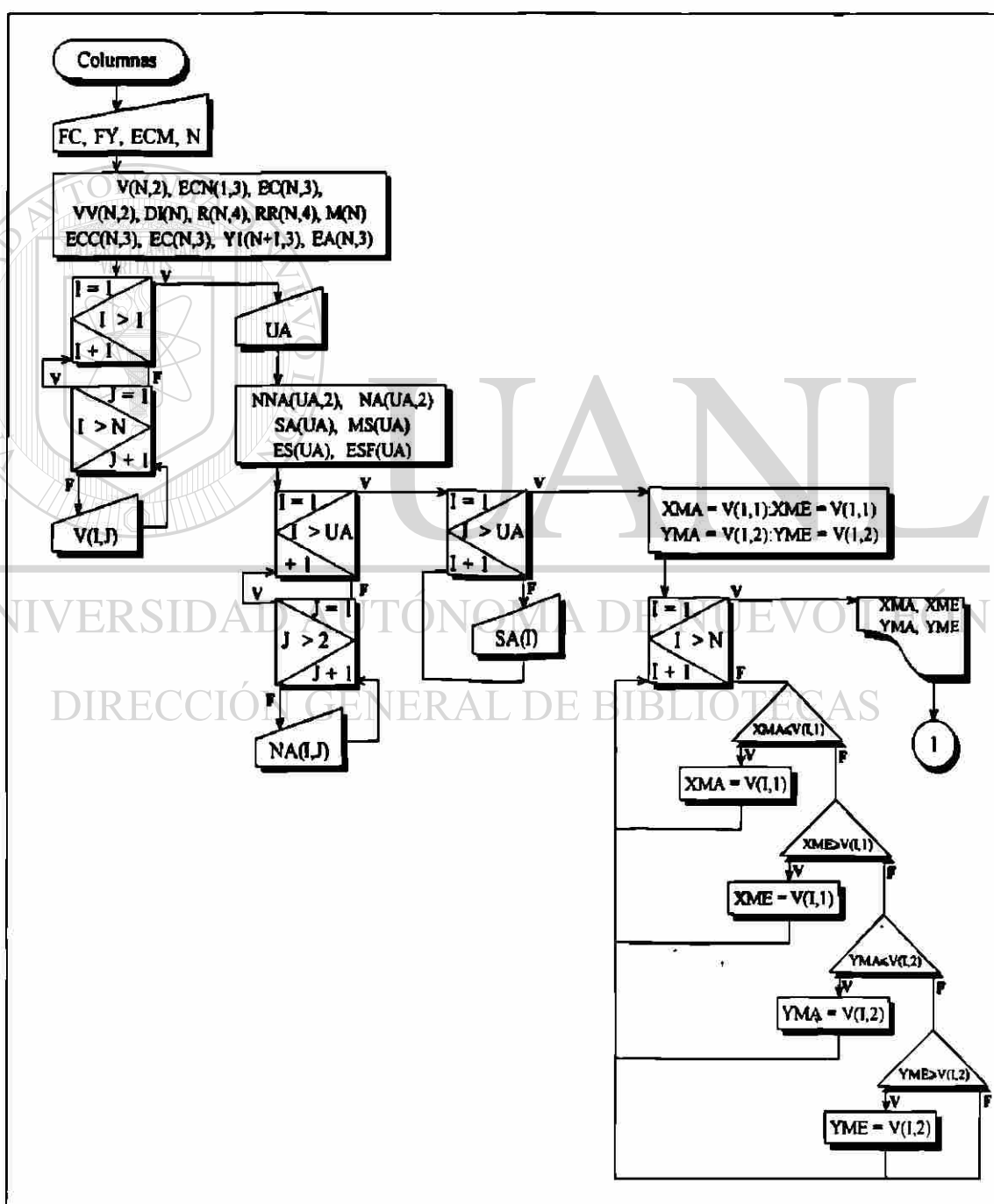
®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

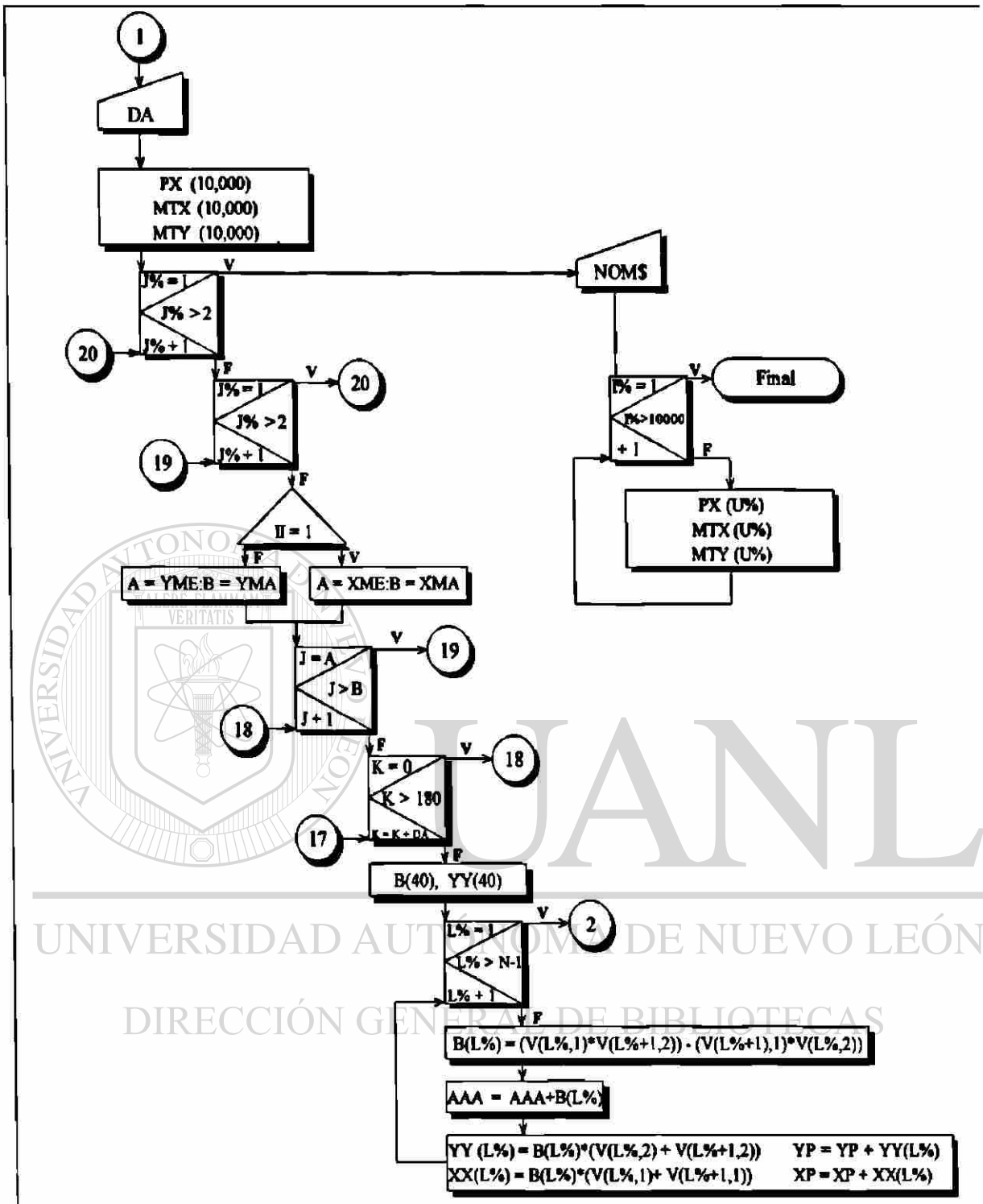
## CAPITULO 4

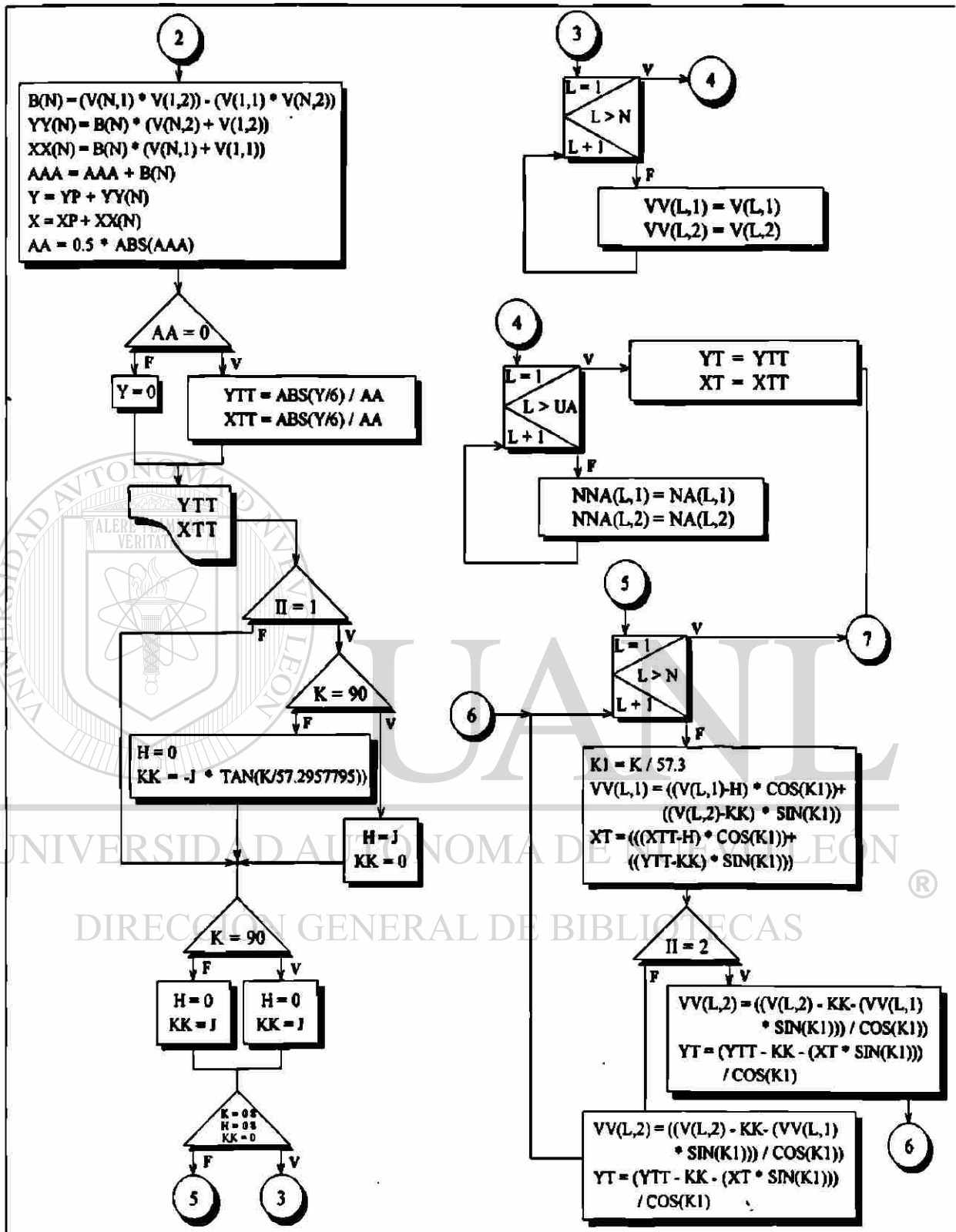
### 4.1 Diagrama de flujo.

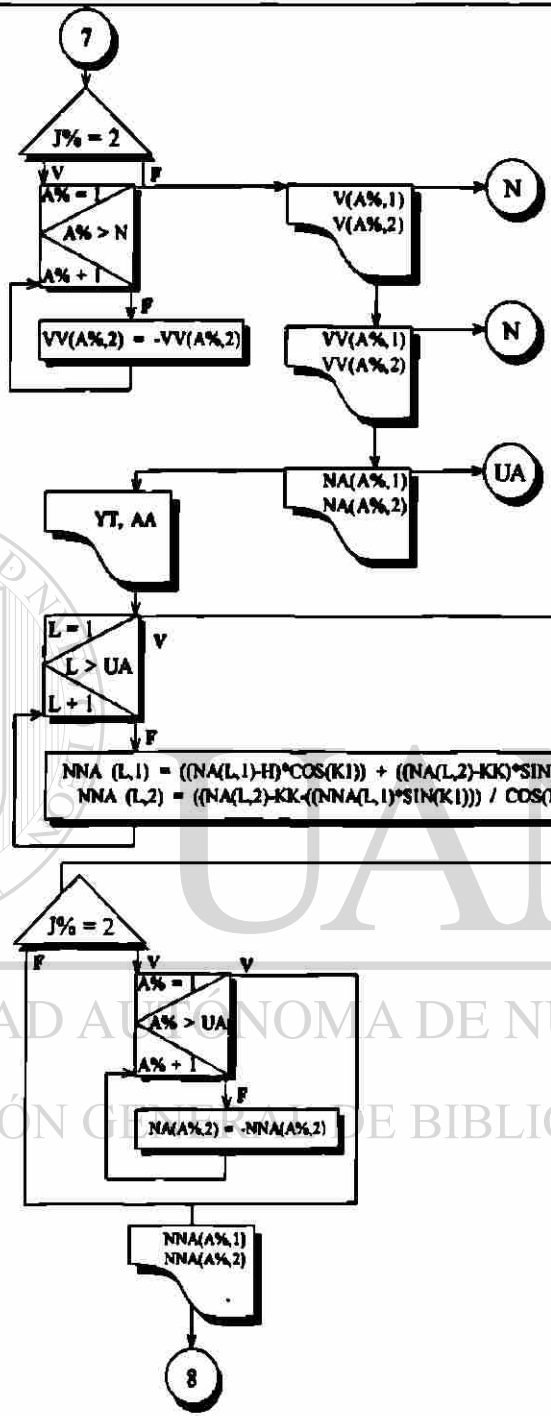
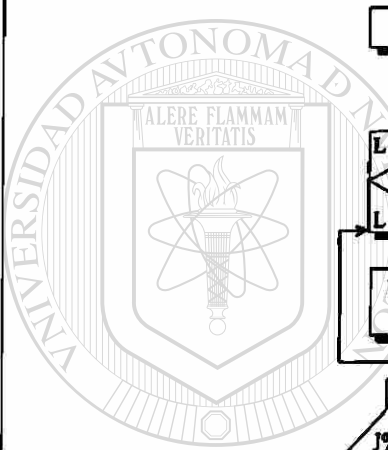
En este capítulo se presenta el diagrama de flujo del programa para la solución de columnas sometidas a flexión biaxial y carga axial con secciones arbitrarias, siguiendo la lógica presentada en el tercer capítulo.

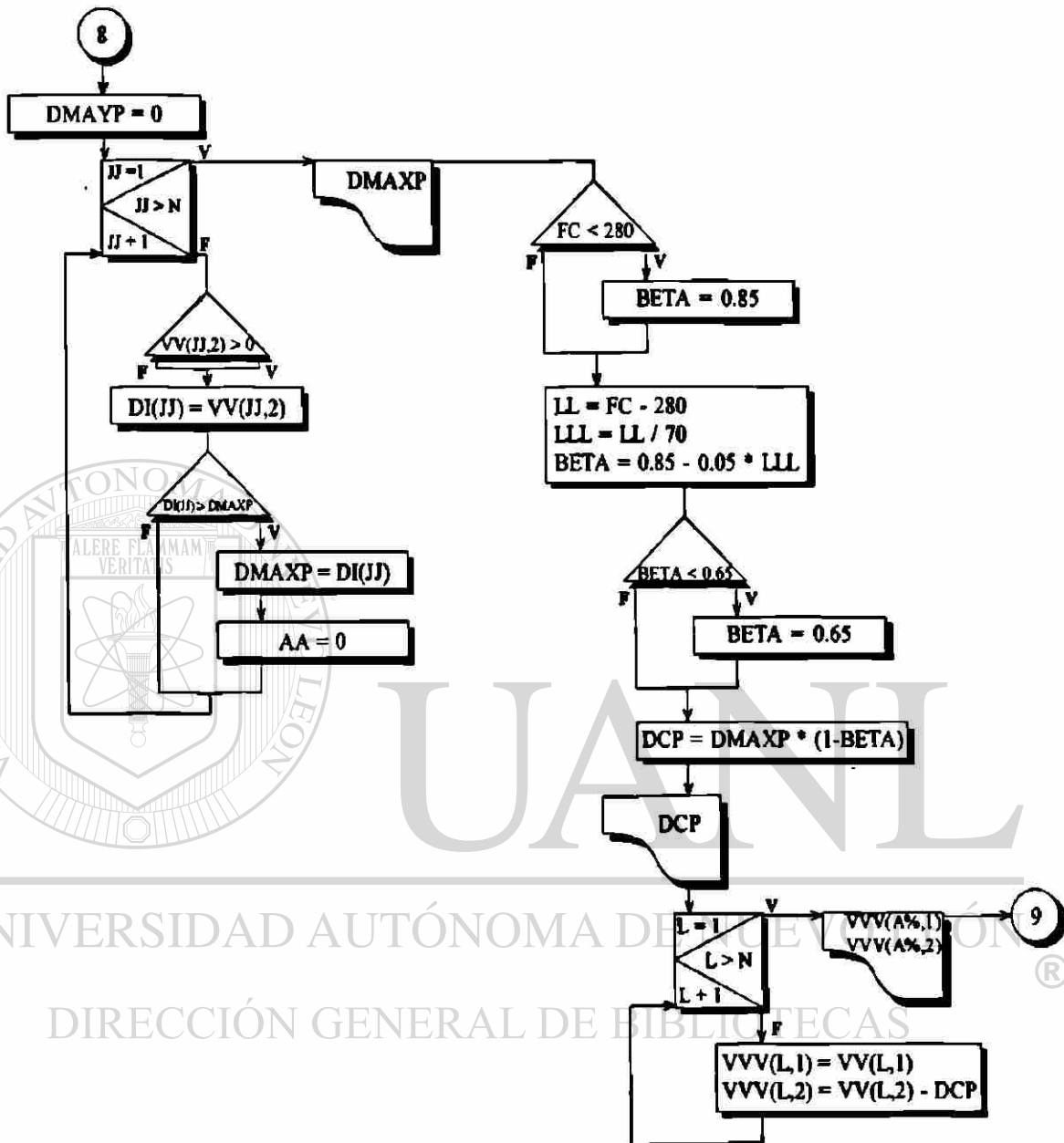


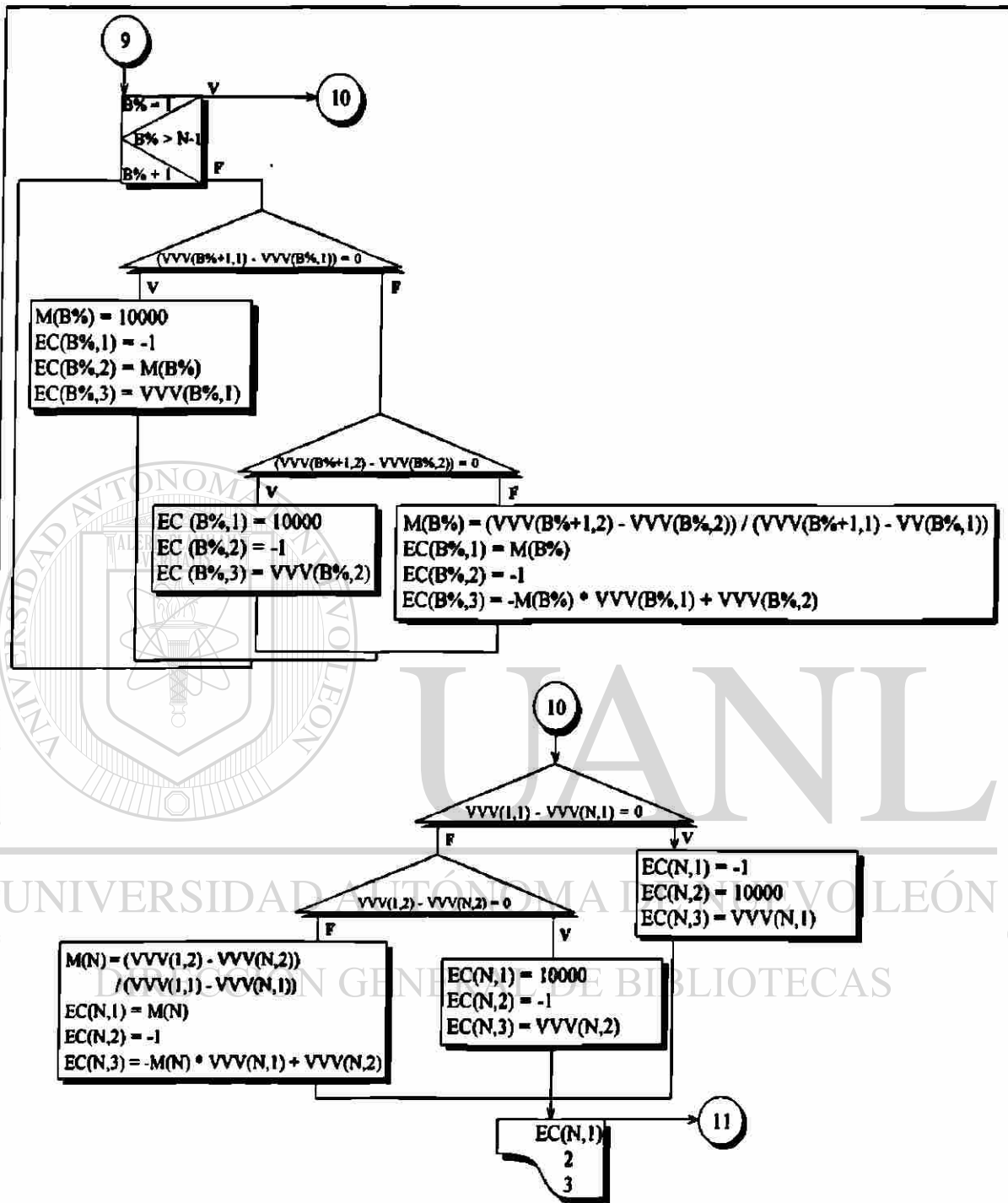


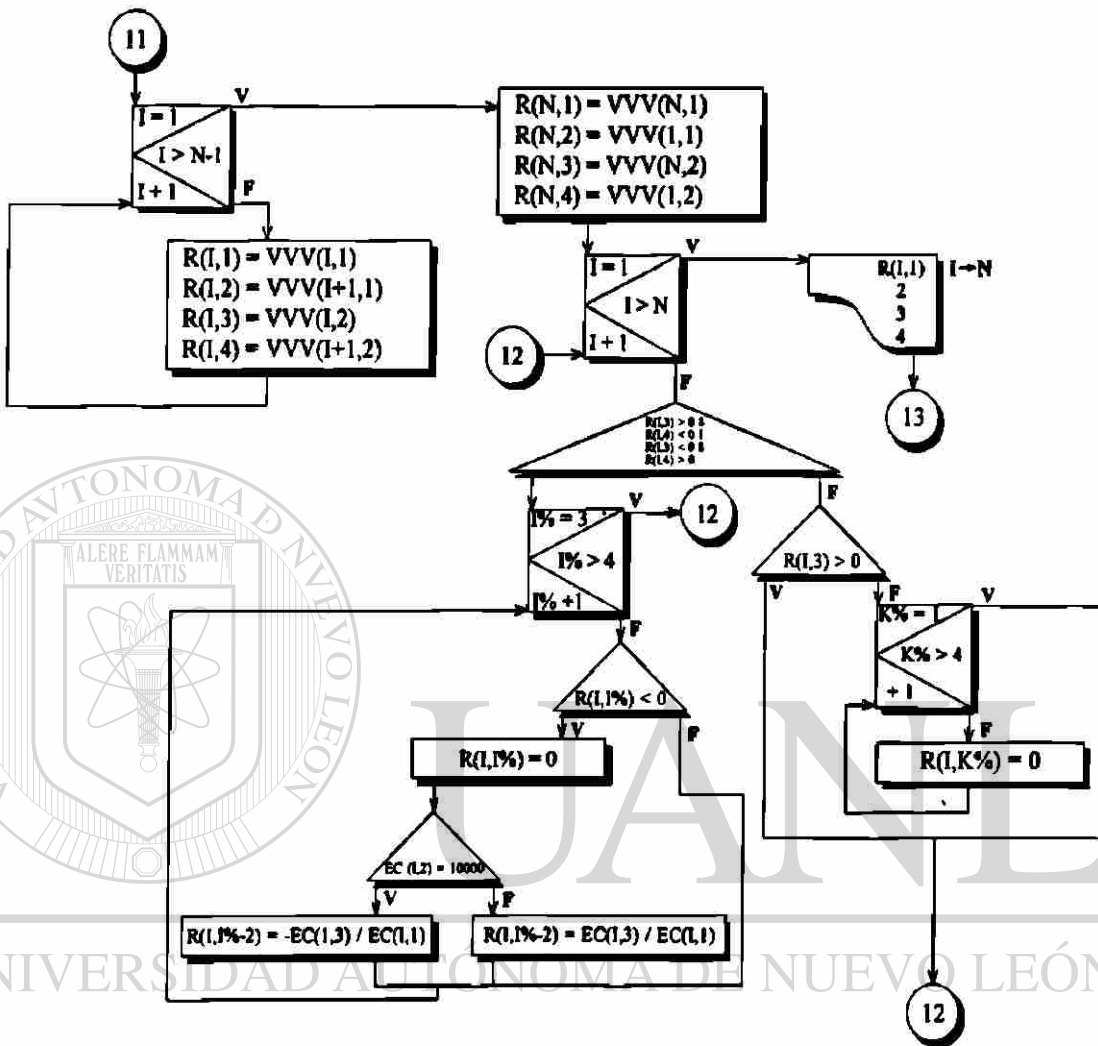




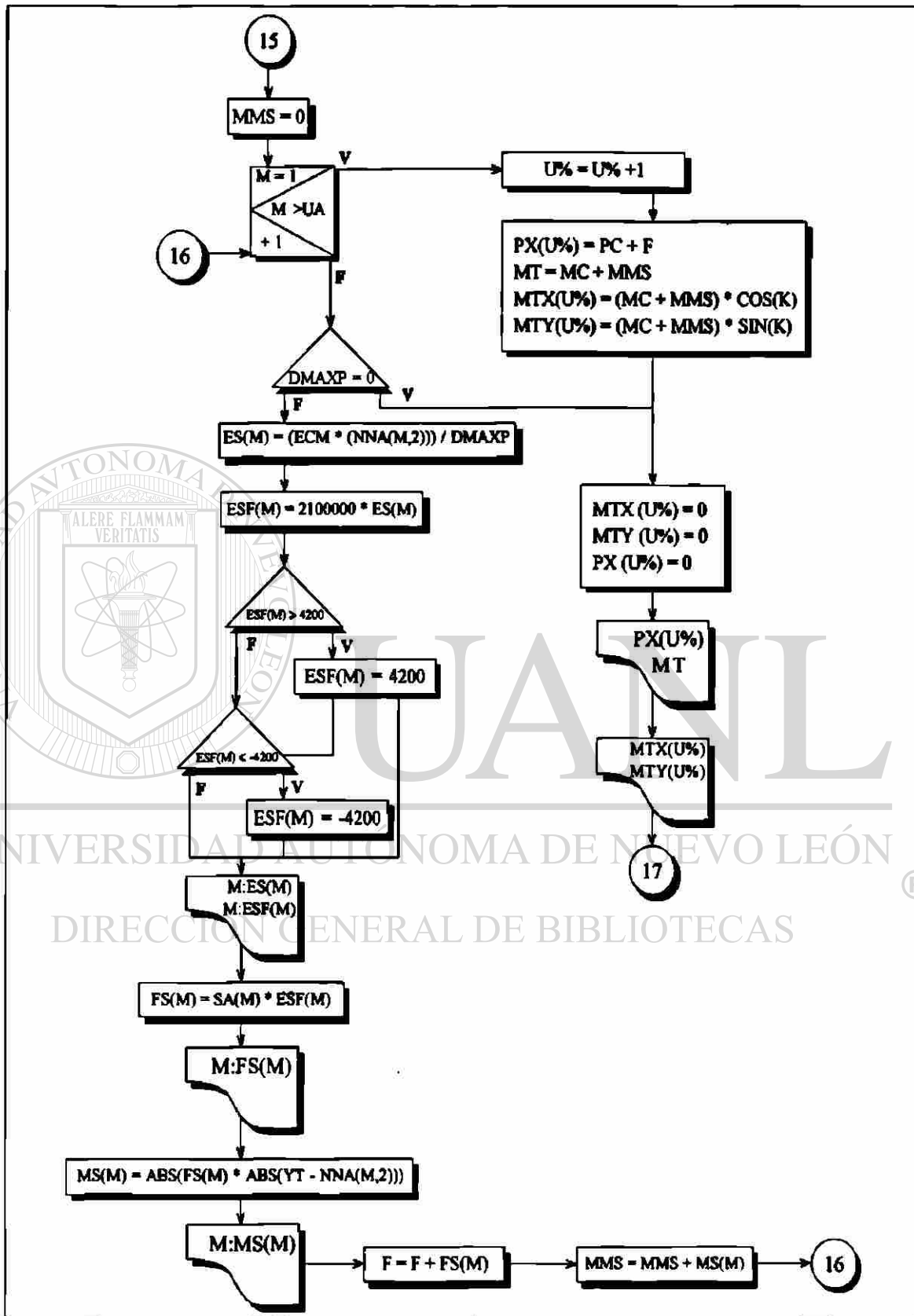


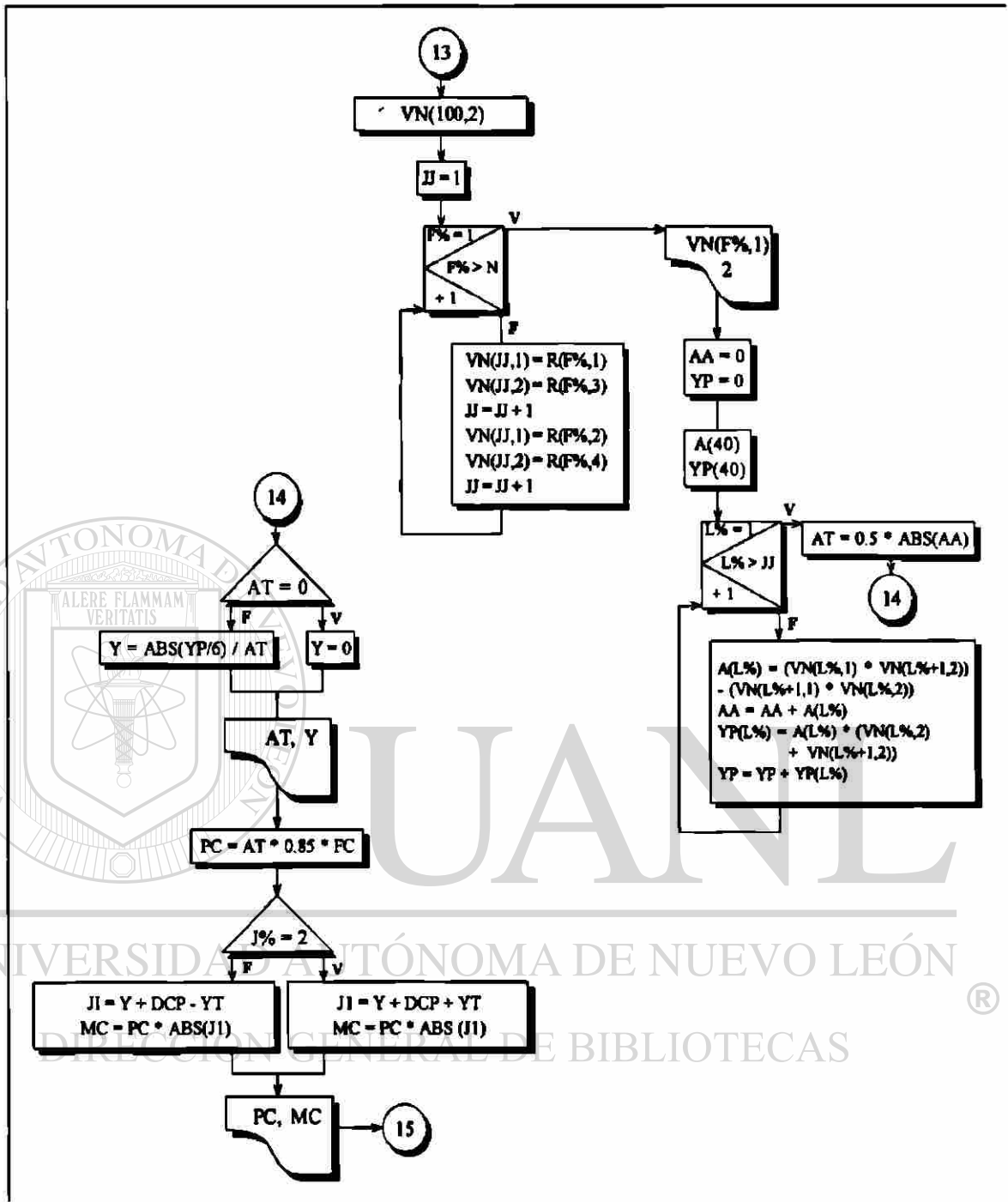






UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
 ALERE FLAMMAM  
 VERITATIS  
 UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
 DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS







## CAPITULO 5

### 5.1 Listado de programa.

ANALISIS DE COLUMNAS SOMETIDAS A FLEXION BIAXIAL

CLS

```
PRINT "ANALISIS DE COLUMNAS DE SECCION ARBITRARIA SOMETIDAS A FLEXION"  
PRINT "Y CARGA BIAXIAL"  
PRINT "INICIA LECTURA DE DATOS"  
INPUT "RESISTENCIA DEL CONCRETO F'C?"; FC  
INPUT "RESISTENCIA DEL ACERO FY?"; FY  
INPUT "DEFORMACION MAXIMA DEL CONCRETO?"; ECM  
INPUT "NUMERO DE VERTICES DE LA COLUMNA?"; N  
PRINT "FAVOR DE DAR LOS DATOS DE LAS COORDENADAS DE LOS VERTICES A  
FAVOR PRINT " DE LAS MANECILLAS DEL RELOJ "  
DIM V(N, 2)  
DIM ECN(1, 3)  
REDIM VV(N, 2)  
REDIM DI(N)  
REDIM R(N, 4)  
REDIM RR(N, 4):  
REDIM M(N)  
DIM EC(N, 3)  
REDIM ECC(N, 3)  
REDIM EC(N, 3)  
REDIM Y1(N + 1, 3)  
REDIM EA(N, 3)  
FOR I = 1 TO N  
FOR J = 1 TO 2  
PRINT "V(", I, ", ", J, ")=",  
INPUT V(I, J)  
READ V(I, J)  
NEXT J  
NEXT I
```

AQUI EL PROGRAMA LEE EL NUMERO DE UBICACIONES DEL ACERO DE REF. Y  
COORD.

INPUT "NUMERO DE UBICACIONES DEL ACERO DE REFUERZO"; UA

REDIM NNA(UA, 2)

REDIM NA(UA, 2)

REDIM SA(UA)

REDIM MS(UA)

DIM ES(UA)

DIM ESF(UA)

FOR I = 1 TO UA

FOR J = 1 TO 2

PRINT "NA(", I, ", ", J, ")="

INPUT NA(I, J)

READ NA(I, J)

NEXT J

NEXT I

FOR I = 1 TO UA

PRINT "UBICACION", I, "AS=";

INPUT SA(I)

READ SA(I)

NEXT I

PRINT "MATRIZ [SA]"

FOR I = 1 TO UA

PRINT SA(I)

NEXT I

REM ESTE BLOQUE A OBTIENE XMA, XME, YMA, YME.

10 XMA = V(1, 1): XME = V(1, 1): YMA = V(1, 2): YME = V(1, 2)

FOR I = 1 TO N

IF XMA <= V(I, 1) THEN

XMA = V(I, 1)

ELSE

END IF

IF XME >= V(I, 1) THEN

XME = V(I, 1)

ELSE

END IF

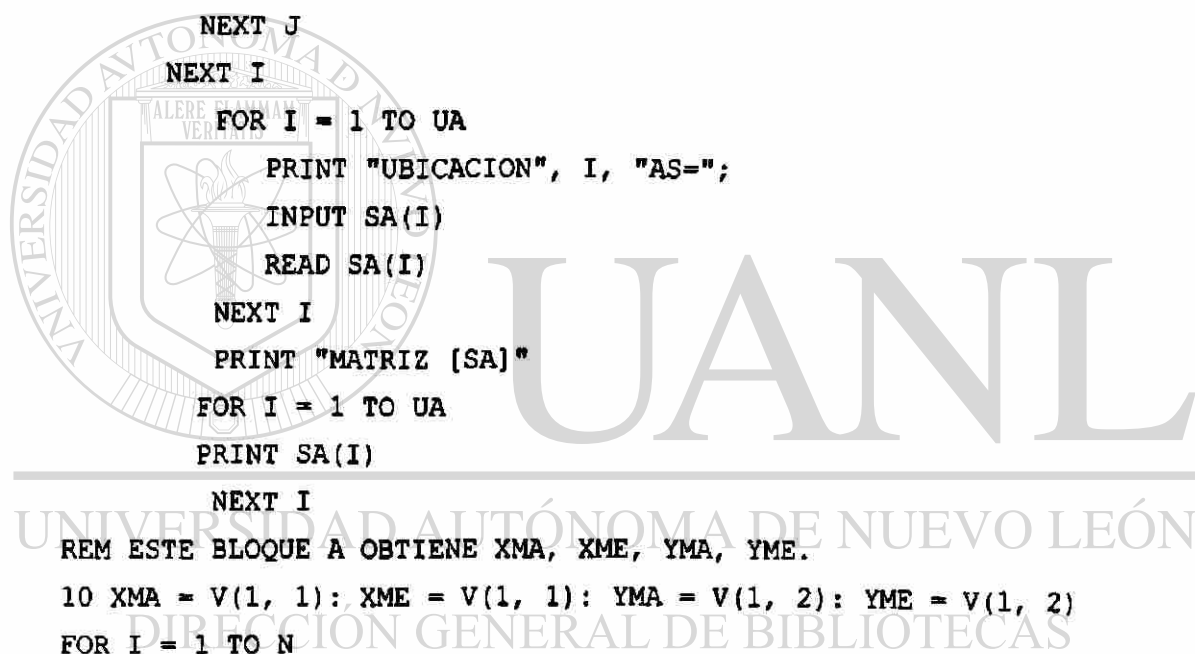
IF YMA <= V(I, 2) THEN

YMA = V(I, 2)

ELSE

END IF

IF YME >= V(I, 2) THEN



```

    YME = V(I, 2)
ELSE
END IF
NEXT I
PRINT "XMA="; XMA
PRINT "XME="; XME
PRINT "YMA="; YMA
PRINT "YME="; YME
REM AQUI ACABA EL BLOQUE A
REM PROPONE EJE NEUTRO, SU ECUACION...
REM SE TOMARA EL EJE X Y Y COMO PIVOTEADORES Y LA PENDIENTE VARIA
REM DESDE REM M=0 CON INCREMENTOS DE ANGULO DE DELTA DA HASTA 180 GRADOS.
    INPUT "DA ="; DA
    DIM PX(10000)
    DIM MTX(10000)
    DIM MTY(10000)
    FOR O% = 1 TO 10000
        PX(O%) = 0
        MTX(O%) = 0
        MTY(O%) = 0
    NEXT O%
    FOR II = 1 TO 2
        IF II = 1 THEN
            A = XME: B = 2 * XMA
        ELSE
            A = YME: B = 2 * YMA
        END IF
        KA = 0
        KB = 180
    END IF
    FOR J = A TO B STEP 2
        FOR K = KA TO KB STEP DA
            FOR J% = 1 TO 2: REM:ESTE CICLO ES PARA CALCULAR LOS MOM DEL AREA
            DE ABAJO.

            CLS
            LOCATE 1, 1: PRINT "j%="; J%; "ii="; ii; "j="; J

            LOCATE 2, 1: PRINT "k=", K, "u%=", U%, PX(U%)

```

REM SE CAMBIAN LAS COORDENADAS A EL NUEVO EJE NEUTRO DE MATRIZ V Y  
 NA. REM TAMBIEN LAS DEL CENTRIODE GEOMETRICO.  
 REM CALCULA EL AREA DE LA SECCION Y SU X Y Y CON RESPECTO A LOS EJES  
 ORIG.

```

    DIM B(40)
    DIM YY(40)
    AREAT = 0
    AAA = 0
    FOR I% = 1 TO N
      B(I%) = 0
    NEXT I%
  FOR L% = 1 TO N - 1
    B(L%) = (V(L%, 1) * V(L% + 1, 2)) - (V(L% + 1, 1) * V(L%, 2))
    AAA = AAA + B(L%)
    YY(L%) = B(L%) * (V(L%, 2) + V(L% + 1, 2))
    YP = YP + YY(L%)
    XX(L%) = B(L%) * (V(L%, 1) + V(L% + 1, 1))
    XP = XP + XX(L%)
  NEXT L%
  B(N) = (V(N, 1) * V(1, 2)) - (V(1, 1) * V(N, 2))
  YY(N) = B(N) * (V(N, 2) + V(1, 2))
  XX(N) = B(N) * (V(N, 1) + V(1, 1))
  AAA = AAA + B(N)
  Y = YP + YY(N)
  X = XP + XX(N)
  REM este es la x y y con respecto a los ejes originales
  AREAT = .5 * ABS(AAA)
  IF AREAT = 0 THEN
    Y = 0
    X = 0
  ELSE
    YTT = ABS(Y / 6) / AREAT
    XTT = ABS(X / 6) / AREAT
    PRINT YTT
    PRINT XTT
  IF II = 1 THEN
    IF K = 90 THEN
      H = J: KK = 0
    ELSE
      H = 0
      KK = -J * TAN(K / 57.29577951#)
  
```

```

END IF: 'TERMINA IF K=90
ELSE
  IF K = 90 THEN
    H = 0: KK = J
  ELSE
    H = 0
    KK = J
  END IF: 'TERMINA IF K=90 2
END IF: 'TERMINA IF II=1
IF K = 0 AND H = 0 AND KK = 0 THEN
  FOR L = 1 TO N
    VV(L, 1) = V(L, 1)
    VV(L, 2) = V(L, 2)
  NEXT L
  FOR L = 1 TO UA
    NNA(L, 1) = NA(L, 1)
    NNA(L, 2) = NA(L, 2)
  NEXT L
  YT = YTT
  XT = XTT
  ELSE
  FOR L = 1 TO N
    K1 = K / 57.3
    VV(L, 1) = ((V(L, 1) - H) * COS(K1)) + ((V(L, 2) - KK) * SIN(K1))
    XT = ((XTT - H) * COS(K1)) + ((YTT - KK) * SIN(K1))
    IF ii = 2 THEN
      VV(L, 2) = ((V(L, 2) - KK - (VV(L, 1) * SIN(K1))) / COS(K1))
      YT = (YTT - KK - (XT * SIN(K1))) / COS(K1)
    ELSE
      VV(L, 2) = ((V(L, 2) - KK - (VV(L, 1) * SIN(K1))) / COS(K1))
      YT = (YTT - KK - (XT * SIN(K1))) / COS(K1)
    END IF
  NEXT L
  END IF
  IF J% = 2 THEN
    REM CUANDO J%=2 CAMBIA TODAS LAS VV(A%,2) POR -VV(A%,2)
    FOR A% = 1 TO N
      VV(A%, 2) = -VV(A%, 2)
    NEXT A%
    YT = -YT
  ELSE

```

```

END IF
PRINT "MATRIZ [V]"
FOR A% = 1 TO N
  PRINT V(A%, 1), V(A%, 2)
NEXT A%
  PRINT "MATRIZ [VV]"
FOR A% = 1 TO N
  PRINT VV(A%, 1), VV(A%, 2)
NEXT A%
  PRINT "MATRIZ [NA]"
FOR A% = 1 TO UA
  PRINT NA(A%, 1), NA(A%, 2)
NEXT A%
' PRINT "EL CENTROIDE GEOMETRICO ESTA A ", YT, "CMS DEL EJE NEUTRO"
' PRINT "EL AREA DE LA SECCION ES DE ", AREAT, "CM2"

FOR L = 1 TO UA
  NNA(L, 1) = ((NA(L, 1) - H) * COS(K1)) + ((NA(L, 2) - KK) *
SIN(K1))
  NNA(L, 2) = (NA(L, 2) - KK - (NNA(L, 1) * SIN(K1))) / COS(K1)
NEXT L
  IF J% = 2 THEN
    FOR A% = 1 TO UA
      NNA(A%, 2) = -NNA(A%, 2)
    NEXT A%
  ELSE
    END IF
  PRINT "LA MATRIZ [NNA]"
  FOR A% = 1 TO UA
    PRINT NNA(A%, 1), NNA(A%, 2)
  NEXT A%
  END IF
'CALCULA EL CENTROIDE PLASTICO CON RESPECTO A EL EJE NEUTRO.
SUMY = 0
SUMX = 0
SUY = 0
XTES = 0
YTES = 0
  FOR I% = 1 TO UA
    SUMX = SUMX + (FY * SA(I%) * NNA(I%, 2))
    SUMY = SUMY + (FY * SA(I%) * NNA(I%, 1))
  
```

```

      SUY = SUY + (FY * SA(I%))
NEXT I%
      XTES = ((.85 * AREAT * FC * XT) + SUMY) / ((.85 * AREAT * FC) +
SUY)
      YTES = ((.85 * AREAT * FC * YT) + SUMX) / ((.85 * AREAT * FC) +
SUY)
'ESTOS SON LOS VALORES DE X y Y CON RESPECTO AL EJE NEUTRO
'PRINT "AREAT", AREAT
'PRINT "XTES", XTES
'PRINT "YTES", YTES
REM CUBIERTO TODO EL RASTREO EN X VERIFICAR Y
REM CALCULA LA MAXIMA DISTANCIA PERPENDICULAR ENTRE VERTICES Y EC EJE
NEUTRO
REM ARRIBA Y ABAJO.
DCP = 0
DMAXP = 0
FOR JJ = 1 TO N
  IF VV(JJ, 2) >= 0 THEN
    GOTO 100
  ELSE
    END IF
100 DI(JJ) = VV(JJ, 2)
    IF DI(JJ) >= DMAXP THEN
      DMAXP = DI(JJ)
      AA = 0: GOTO finjj
    ELSE
      END IF
finjj:
  NEXT JJ
  PRINT "DMAXP="; DMAXP
REM EL PROGRAMA TOMA DMAXP Y LO MULTIPLICA POR BETA.ACI 10.2.7.3

  IF FC < 280 THEN
    BETA = .85: GOTO 120
  ELSE
    END IF

  LL = FC - 280
  LLL = LL / 70
  BETA = .85 - .05 * LLL

```

```

    IF BETA < .65 THEN
        BETA = .65
    ELSE
        END IF
120   DCP = DMAXP * (1 - BETA)
' PRINT "DCP="; DCP
REM AHORA MODIFICA LAS COORDENADAS DE LOS VERTICES BAJANDOLOS DCP.
FOR L = 1 TO N
    VVV(L, 1) = VV(L, 1)
    VVV(L, 2) = VV(L, 2) - DCP
NEXT L
REM CALCULA MATRIZ DE ECUACIONES DE VERTICES Y SUS RANGOS.
REM ESTE BLOQUE CALCULA LA MATRIZ DE ECUACIONES DE LOS LADOS "EC"
FOR B% = 1 TO N - 1
    IF (VVV(B% + 1, 1) - VVV(B%, 1)) = 0 THEN
        M(B%) = 10000
        EC(B%, 1) = -1
        EC(B%, 2) = M(B%)
        EC(B%, 3) = VVV(B%, 1)
        REM LA RECTA ES HORIZONTAL
    ELSE
        IF (VVV(B% + 1, 2) - VVV(B%, 2)) = 0 THEN
            EC(B%, 1) = 10000
            EC(B%, 2) = -1
            EC(B%, 3) = VVV(B%, 2)
            REM ES LA RECTA VERTICAL
        ELSE
            M(B%) = (VVV(B% + 1, 2) - VVV(B%, 2)) / (VVV(B% + 1, 1) -
VV(B%, 1))
            EC(B%, 1) = M(B%)
            EC(B%, 2) = -1
            EC(B%, 3) = -M(B%) * VVV(B%, 1) + VVV(B%, 2)
        END IF
    END IF
NEXT B%
IF VVV(1, 1) - VVV(N, 1) = 0 THEN
    EC(N, 1) = -1
    EC(N, 2) = 10000
    EC(N, 3) = VVV(N, 1)

```



```

ELSE
  IF (VWV(1, 2) - VWV(N, 2)) = 0 THEN
    EC(N, 1) = 10000
    EC(N, 2) = -1
    EC(N, 3) = VWV(N, 2)
  ELSE
    M(N) = (VWV(1, 2) - VWV(N, 2)) / (VWV(1, 1) - VWV(N, 1))
    EC(N, 1) = M(N)
    EC(N, 2) = -1
    EC(N, 3) = -M(N) * VWV(N, 1) + VWV(N, 2)
  END IF
END IF

```

REM ESTE BLOQUE CALCULA LOS RANGOS DE OPERACION DE CADA LADO DE LA COL.  
DE ACUERDO A LA MODIF.

REM HECHA PARA EL EJE NEUTRO EN PROCESO.

```

FOR I = 1 TO N - 1
  R(I, 1) = VWV(I, 1)
  R(I, 2) = VWV(I + 1, 1)
  R(I, 3) = VWV(I, 2)
  R(I, 4) = VWV(I + 1, 2)
NEXT I
R(N, 1) = VWV(N, 1)
R(N, 2) = VWV(1, 1)
R(N, 3) = VWV(N, 2)
R(N, 4) = VWV(1, 2)
FOR I = 1 TO N
  IF R(I, 3) > 0 AND R(I, 4) < 0 OR R(I, 3) < 0 AND R(I, 4) >
0 THEN
    FOR I% = 3 TO 4
      IF R(I, I%) < 0 THEN
        R(I, I%) = 0
        IF EC(I, 2) = 10000 THEN
          R(I, I% - 2) = -EC(I, 3) / EC(I, 1)
        ELSE
          R(I, I% - 2) = -EC(I, 3) / EC(I, 1)
        END IF
      ELSE
        END IF
      END IF
    NEXT I%
  ELSE
    END IF
  NEXT I%
ELSE
  ELSE

```

```

        IF R(I, 3) > 0 THEN
        ELSE
        FOR K% = 1 TO 4
        R(I, K%) = 0
        NEXT K%
    END IF
END IF
NEXT I
REM HACE MATRIZ ECC QUE CONTIENE LAS ECUACIONES DE LOS LADOS QUE ESTAN
ARRIBA
REM DE EL EJE NEUTRO MOD. EN BETA. LAS ECUACIONES DE ABAJO QUEDARON CON
UN VALOR
REM DE 10000, LO MISMO CON LA MATRIZ DE RANGOS.
DIM VN(100, 2)
JJ = 1
FOR F% = 1 TO N
    VN(JJ, 1) = R(F%, 1)
    VN(JJ, 2) = R(F%, 3)
    JJ = JJ + 1
    VN(JJ, 1) = R(F%, 2)
    VN(JJ, 2) = R(F%, 4)
    JJ = JJ + 1
NEXT F%
'CALCULA AREAS
PC = 0
XP = 0
AA = 0
YP = 0
DIM A(40)
DIM YP(40)
DIM XP(40)
FOR L% = 1 TO 40
    A(L%) = 0
    YP(L%) = 0
    XP(L%) = 0
NEXT L%
X = 0
Y = 0
XCC = 0
YCC = 0
FOR L% = 1 TO JJ

```

```

A(L%) = (VN(L%, 1) * VN(L% + 1, 2)) - (VN(L% + 1, 1) * VN(L%, 2))
AA = AA + A(L%)
YP(L%) = A(L%) * (VN(L%, 2) + VN(L% + 1, 2))
XP(L%) = A(L%) * (VN(L%, 1) + VN(L% + 1, 1))
YP = YP + YP(L%)
XP = XP + XP(L%)
NEXT L%
AF = .5 * AA
AT = ABS(AF)
IF AT = 0 THEN
Y = 0
X = 0
ELSE
Y = (YP / 6) / AF
X = (XP / 6) / AF
XCC = X
YCC = DCP + Y
END IF
'ESTOS CENTROIDES DEL AREA EN COMPRESION SON CON RESPECTO A LA
PARALELA AL EJE NEUTRO.
' "EL AREA EN COMPRESION DEL CONCRETO ES DE ", AT, "CM2"
'PRINT "EL CENTRIODE DEL AREA EN COMPRESION ES DE ", YCC, "CM"
'PRINT "XCC", XCC
IF AT > AREAT + 5 THEN
ELSE
END IF
PC = AT * .85 * FC
' PRINT "PC=", PC
REM ES DEFORMACION DEL ACERO *M*
MMS = 0
FOR I% = 1 TO UA
ES(I%) = 0
ESF(I%) = 0
FS(I%) = 0
MUX(I%) = 0
MUY(I%) = 0
NEXT I%
MX = 0
MY = 0
PE = 0
SMUX = 0

```

```

SMUY = 0
F = 0
FOR M = 1 TO UA
  IF DMAXP = 0 THEN
    GOTO 555
  ELSE
    ES(M) = (ECM * (NNA(M, 2))) / DMAXP: REM el momento debe deser
con
    REM: respecto a el centroide.
  END IF
  ESF(M) = 2100000 * ES(M)
  IF ESF(M) >= 4200 THEN
    ESF(M) = 4200
  ELSE
    IF ESF(M) <= -4200 THEN
      ESF(M) = -4200
    ELSE
      END IF
    END IF
    IF J% = 2 THEN
      SS = -1
    ELSE
      SS = 1
    END IF
    FS(M) = SA(M) * ESF(M)
    MUX(M) = FS(M) * SS * (NNA(M, 2) - YTES)
    MUY(M) = FS(M) * (NNA(M, 1) - XTES)
    F = F + FS(M)
    REM MS(M) ES EL MOMENTO APORTADO POR LA VARILLA M
    SMUX = SMUX + MUX(M)
    SMUY = SMUY + MUY(M)
  NEXT M
FOR M = 1 TO UA
  PRINT "LA DEFORMACION DE LA VARILLA", M, "ES DE ", ES(M)
  PRINT "EL ESFUERZO DE LA VARILLA", M, "ES DE", ESF(M)
  PRINT "LA FUERZA DE LA VARILLA", M, "ES DE", FS(M)
  PRINT "EL MOMENTO DE LA VARILLA MUX(", M, ") = ", MUX(M)
  PRINT "EL MOMENTO DE LA VARILLA MUY(", M, ") = ", MUY(M)
NEXT M
' PRINT "SMUX=", SMUX
' PRINT "SMUY=", SMUY

```

```

MX = 0
MY = 0
MXP = PC * SS * (YCC - YTES)
MX = MXP + SMUX
MYP = PC * (XCC - XTES)
MY = MYP + SMUY
PE = PC + F
IF PE <= 0 THEN
GOTO 555
ELSE
END IF
U% = U% + 1
PX(U%) = PE

' PRINT "MXP=", MXP
' PRINT "MYP=", MYP
' PRINT "MX", MX
' PRINT "MY", MY
MTX(U%) = -(-MX * COS(K / 57.3) + MY * COS((K / 57.3) + 1.57))
MTY(U%) = -MX * SIN(K / 57.3) + MY * SIN((K / 57.3) + 1.57)
GOTO 556
556 : PRINT PX(U%)
PRINT "MOMENTO FINAL", MT
PRINT "EL MOMENTO MX ES ", MTX(U%)
PRINT "EL MOMENTO MY ES ", MTY(U%)
555 :
NEXT J%
NEXT K
NEXT J
NEXT II
FOR U% = 1 TO 10000
PRINT #1, U%, PX(U%), MTX(U%), MTY(U%)
NEXT U%
CLOSE
END

```

## **CAPITULO 6**

**Ejemplos de Columnas con Secciones Arbitrarias Resueltas Analíticamente con Calculadora.**

**En este capítulo se presentan seis ejemplos de columnas con secciones arbitrarias que se resuelvan siguiendo la teoría de compatibilidad de deformaciones y satisfaciendo las ecuaciones de equilibrio.**

**Se propusieron tres secciones arbitrarias, como casos críticos para después verificar los resultados del programa que se está ejecutando en esta tesis y, en esta forma, validar los resultados de éste. Los pasos para resolver estos casos fueron los que se describen en el capítulo 3 (Modelación del programa) con el fin de corroborar paso a paso la ejecución correcta de la rutina de cálculo que sigue la programación del modelo matemático que se utilizó en el programa.**

---

**En cada uno de los ejemplos se calculó un ciclo específico para un eje neutro. En cada ciclo se especifica la sección de la columna, los datos del eje neutro propuesto y las propiedades de los materiales que comparan la columna, tales como la resistencia del concreto, del acero y la deformación máxima del concreto.**

## **CAPITULO 6**

**Ejemplos de Columnas con Secciones Arbitrarias Resueltas Análiticamente con Calculadora.**

**En este capítulo se presentan seis ejemplos de columnas con secciones arbitrarias que se resuelvan siguiendo la teoría de compatibilidad de deformaciones y satisfaciendo las ecuaciones de equilibrio.**

**Se propusieron tres secciones arbitrarias, como casos críticos para después verificar los resultados del programa que se está ejecutando en esta tesis y, en esta forma, validar los resultados de éste. Los pasos para resolver estos casos fueron los que se describen en el capítulo 3 (Modelación del programa) con el fin de corroborar paso a paso la ejecución correcta de la rutina de cálculo que sigue la programación del modelo matemático que se utilizó en el programa.**

**En cada uno de los ejemplos se calculó un ciclo específico para un eje neutro. En cada ciclo se especifica la sección de la columna, los datos del eje neutro propuesto y las propiedades de los materiales que comparan la columna, tales como la resistencia del concreto, del acero y la deformación máxima del concreto.**

## 6.1 CICLO I

Se propone un ciclo para la sección mostrada en la figura 6.1 suponiendo un eje neutro con origen en  $X=10$  y un ángulo de  $20^\circ$  con respecto a la horizontal.

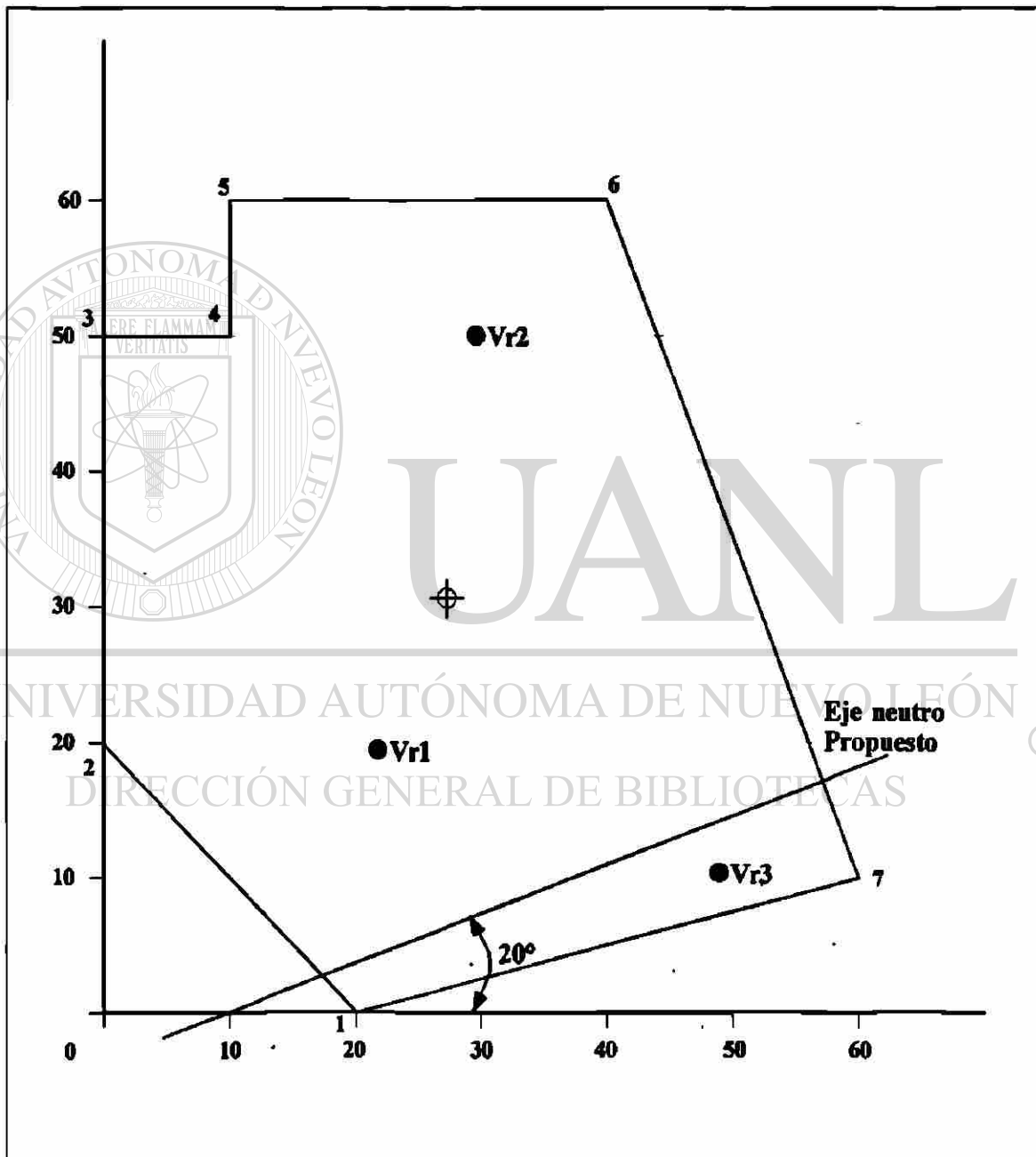


Fig. 6.1 Geometría de columna y ubicación del acero de refuerzo. Coordenadas en cm.



**Cálculo de un ciclo para obtener  $M_x$ ,  $M_y$  y  $P_x$ .**

**Datos:**

$$f_c = 350 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

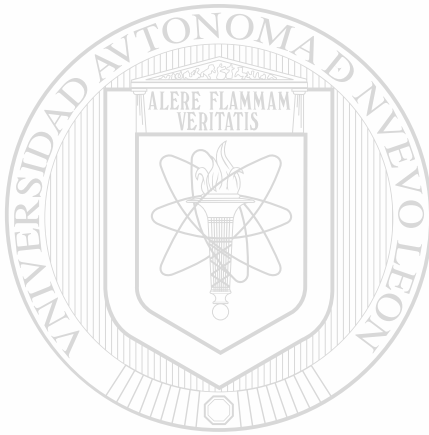
**CM= 0.003 (deformación máxima del concreto)**

**N=7 (Número de vértices de la columna)**

**UA=3 (Número de concentraciones de acero)**

### 1.- Formulación de Matriz $[V]$ $n \times 2$

Esta matriz se forma con las coordenadas de los vértices de la columna siguiendo el sentido de las manecillas del reloj.      Coordenadas en cm.



$$[V] = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 20 \\ 0 & 50 \\ 10 & 50 \\ 10 & 60 \\ 40 & 60 \\ 60 & 10 \end{bmatrix}$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

### 2.- Formulación de Matriz $[NA]_{UA \times 2}$ y $[SA]_{UA}$

La matriz NA se forma con las coordenadas de ubicación del acero de refuerzo y el vector SA con el área de acero de cada ubicación.

$$[NA] = \begin{bmatrix} 20 & 20 \\ 30 & 50 \\ 50 & 10 \end{bmatrix}$$

Coordenadas en cm

$$[SA] = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Coordenadas en  $\text{cm}^2$

3.- Obtención de la máxima coordenada en X y Y de los vértices.

$$X_{ME} = 0 \text{ cm} \quad Y_{ME} = 0 \text{ cm}$$

$$X_{MA} = 60 \text{ cm} \quad Y_{MA} = 60 \text{ cm}$$

4.- Obtención de coordenadas cuando el eje neutro propuesto cruza el eje Y.

Para éste cálculo, se propone un eje neutro con origen en  $X=10$ ,  $Y=0$  y una inclinación de  $20^\circ$  con respecto a la horizontal.

$$m = \operatorname{tg} 0^\circ$$

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

$$m = \operatorname{tg} 20^\circ$$

Evaluando (2) con  $x_1 = 10$  y  $y_1 = 0$  tenemos

$$0.36397 (x-10) = y-0$$

$0.36397 x - 3.6397 = y$  (3) ecuación de la recta propuesta como eje neutro

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
evaluando (3) cuando  $x=0$

$Y = -3.6397 \text{ cm}$  DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

5.- Transformación de coordenadas de vértices y ubicaciones de acero.  
Transformación de coordenadas mediante una traslación (hacia  $x=0$  y  $y = -3.6397$ ) y una rotación ( $+20^\circ$ )

La transformación se logra mediante:

$$x = x'' \operatorname{Cos} \theta - y'' \operatorname{Sen} \theta + h$$

$$y = x'' \operatorname{Sen} \theta + y'' \operatorname{Cos} \theta + k$$

Donde:

$\theta$  = ángulo de rotación

$x, y$  = coordenadas del sistema original

$x'', y''$  = coordenadas del sistema final

$h, k$  = coordenadas del nuevo origen.

Por tanto  $h= 0$  y  $K= -3.6397$  ;  $\theta = 20^\circ$

a) Para el primer vértice  $x = 20$  cm  $y = 0$  cm

$$20 = x'' \cos 20^\circ - y'' \sin 20^\circ +$$

$$0 = x'' \sin 20^\circ + y'' \cos 20^\circ + (-3.6397)$$

resolviendo por simultáneas, tenemos.

$$x'' = 20.04 \text{ cm}$$

$$y'' = -3.42 \text{ cm}$$

b) Para el segundo vértice  $x = 0$  cm  $y = 20$  cm

$$0 = x'' \cos 20^\circ - y'' \sin 20^\circ + 0$$

$$20 = x'' \sin 20^\circ + y'' \cos 20^\circ + (-3.6397)$$

$$x'' = 8.09 \text{ cm}$$

$$y'' = 22.41 \text{ cm}$$

c) Para el tercer vértice  $x = 0$  cm  $y = 50$  cm

$$0 = x'' \cos 20^\circ - y'' \sin 20^\circ + 0$$

$$50 = x'' \sin 20^\circ + y'' \cos 20^\circ + (-3.6397)$$

$$x'' = 18.35 \text{ cm}$$

$$y'' = 50.42 \text{ cm}$$

d) Para el cuarto vértice  $x = 10 \text{ cm}$   $y = 50 \text{ cm}$

$$10 = x'' \cos 20^\circ - y'' \sin 20^\circ + 10$$

$$50 = x'' \sin 20^\circ + y'' \cos 20^\circ + (-3.6397)$$

$$x'' = 27.74$$

$$y'' = 46.98$$

e) Para el quinto vértice  $x = 10 \text{ cm}$   $y = 60 \text{ cm}$

$$10 = x'' \cos 20^\circ - y'' \sin 20^\circ + 0$$

$$60 = x'' \sin 20^\circ + y'' \cos 20^\circ + (-3.6397)$$

$$x'' = 31.16 \text{ cm}$$

$$y'' = 56.38 \text{ cm}$$

f) Para el sexto vértice  $x = 40 \text{ cm}$   $y = 60 \text{ cm}$

$$40 = x'' \cos 20^\circ - y'' \sin 20^\circ + 0$$

$$60 = x'' \sin 20^\circ + y'' \cos 20^\circ + (-3.6397)$$

$$x'' = 59.35 \text{ cm}$$

$$y'' = 46.11 \text{ cm}$$

g) Para el séptimo vértice  $x = 60 \text{ cm}$   $y = 10 \text{ cm}$

$$60 = x'' \cos 20^\circ - y'' \sin 20^\circ + 0$$

$$10 = x'' \sin 20^\circ + y'' \cos 20^\circ + (-3.6397)$$

$$x'' = 61.05 \text{ cm}$$

$$y'' = -7.70 \text{ cm}$$

Con estos datos se conforma la matriz  $[VV]_{MXZ}$ . Coordenadas en cm.

$$[VV] = \begin{bmatrix} 20.04 & -3.42 \\ 8.09 & 22.41 \\ 18.35 & 50.42 \\ 27.74 & 46.98 \\ 31.16 & 56.38 \\ 59.35 & 46.11 \\ 61.05 & -7.70 \end{bmatrix}$$

Transformación de coordenadas del acero de refuerzo.

a) Para la primer varilla

$$x = 20 \text{ cm}$$

$$y = 20 \text{ cm}$$

$$20 = x'' \cos 20 - y'' \sin 20 + 0$$

$$20 = x'' \sin 20 + y'' \cos 20 + (3.6397)$$

$$x'' = 26.879 \text{ cm}$$

$$y'' = 15.37 \text{ cm}$$

b) Para la segunda varilla

$$x = 30 \text{ cm}$$

$$y = 50 \text{ cm}$$

$$30 = x'' \cos 20 - y'' \sin 20 + 0$$

$$50 = x'' \sin 20 + y'' \cos 20 + (-3.6397)$$

$$x'' = 46.54 \text{ cm}$$

$$y'' = 40.15 \text{ cm}$$

c) Para la tercer varilla

$$x = 50 \text{ cm}$$

$$y = 10 \text{ cm}$$

$$50 = x'' \cos 20 - y'' \sin 20 + 0$$

$$10 = x'' \sin 20 + y'' \cos 20 + (-3.6397)$$

$$x'' = 51.65 \text{ cm}$$

$$y'' = -4.28 \text{ cm}$$

Con estos datos se conforman in matriz  $[NNA]_{UAX2}$

$$[NNA] = \begin{bmatrix} 26.74 & 15.00 \\ 46.54 & 40.15 \\ 51.65 & -4.28 \end{bmatrix}$$

6.- Cálculo de la altura del bloque rectangular de esfuerzos distancia máxima perpendicular desde el eje neutro la fibra más alejada superior.

$$Y_{\max} = 56.38 \text{ cm}$$

$$\beta = 0.80$$

DGP = distancia de conexión de la línea eje neutro

$$DGP = Y_{\max} (1 - \beta)$$

$$= 56.38 (1 - 0.80)$$

$$= 11.28 \text{ cm}$$

### 7.- Formación de matriz [VVV]

Esta matriz se forma a partir de la [VV] restándole a la columna dos (coordenadas en y) la distancia DCP.

$$[VVV]=\begin{bmatrix} 20.04 & -14.7 \\ 8.09 & 10.93 \\ 18.35 & 39.14 \\ 27.74 & 35.70 \\ 31.16 & 45.10 \\ 57.35 & 34.83 \\ 61.05 & -18.98 \end{bmatrix}$$

### 8.- Formación de la Matriz de Rangos [R] $N \times 4$ .

Esta matriz se forma a partir de la matriz [VVV], la columnas 1 y 2 son las coordenadas en X y las 3 y 4 en Y, por tanto, se toma el rango de operación de cada vértice.

$$[R]=\begin{bmatrix} 20.04 & 8.09 & -14.70 & 10.93 \\ 8.09 & 18.35 & 10.93 & 39.14 \\ 18.35 & 27.74 & 39.14 & 35.70 \\ 27.74 & 31.16 & 35.70 & 45.10 \\ 31.16 & 56.35 & 45.10 & 34.03 \\ 56.35 & 61.05 & 34.83 & -18.98 \\ 61.05 & 20.04 & -18.98 & -14.70 \end{bmatrix}$$

### 9.- Formación de la Matriz [ECC]

Esta matriz es de las ecuaciones de los lados de la columna. La matriz [ECC] es de  $N \times 3$  donde la primera columna es a, la segunda es el valor de b y la tercera el valor de c. la ecuación es igualada a cero y es de la forma.

$$ax+by+c=0$$

$$m = \frac{R(1,4) - R(1,3)}{R(1,2) - R(1,1)}$$

$$m (x - x_1) = y - y_1$$

$$m (x - R(1,1)) = y - R(1,3)$$

$$m x - y + (R(1,3) - y R(1,1))$$

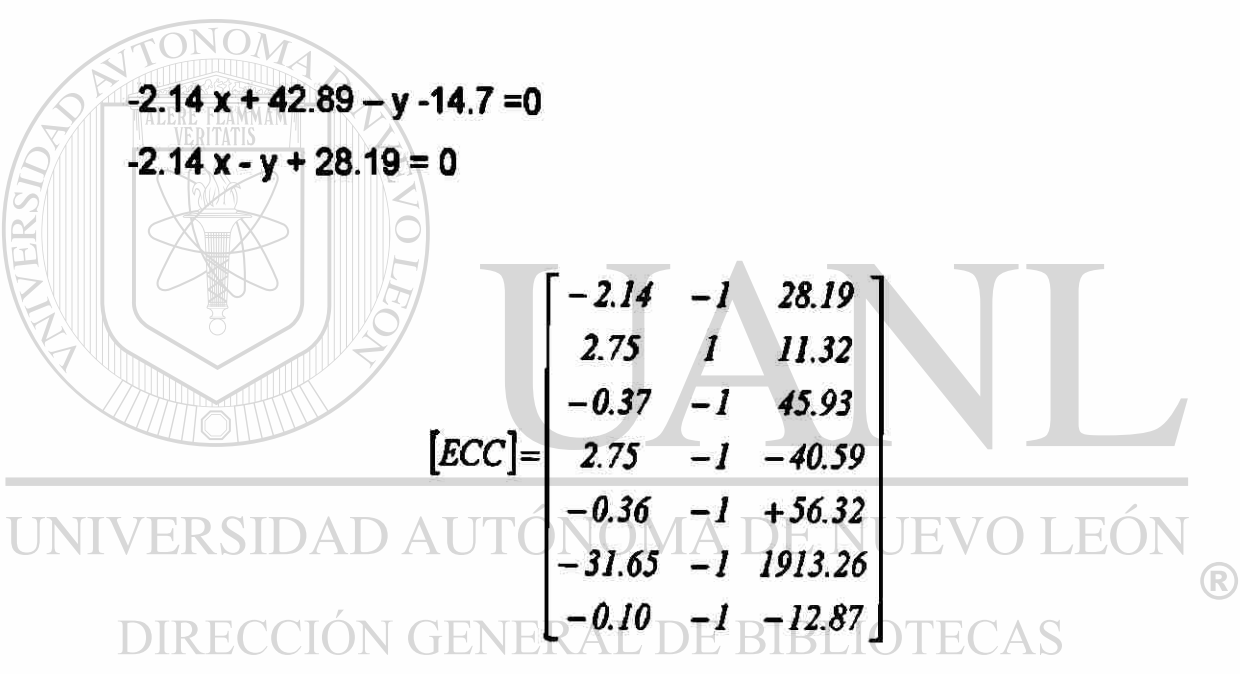
Como ejemplo del lado 1 tenemos:

$$m = \frac{10.93 + 14.70}{8.09 - 20.04} = -2.14$$

$$-2.14 x + 42.89 - y - 14.7 = 0$$

$$-2.14 x - y + 28.19 = 0$$

$$[ECC] = \begin{bmatrix} -2.14 & -1 & 28.19 \\ 2.75 & 1 & 11.32 \\ -0.37 & -1 & 45.93 \\ 2.75 & -1 & -40.59 \\ -0.36 & -1 & +56.32 \\ -31.65 & -1 & 1913.26 \\ -0.10 & -1 & -12.87 \end{bmatrix}$$





### 10.- Formación de la matriz $[RR]_{N \times 4}$

Esta matriz se forma a partir de la matriz  $[R]$  y consiste en obtener los rangos de los lados de la columna que quedan sobre el eje neutro propuesto se hace cero el negativo y se evalúa su correspondiente  $Y$ .

$$[RR] = \begin{bmatrix} 13.17 & 8.09 & 0 & 10.93 \\ 18.35 & 8.09 & 10.93 & 39.14 \\ 27.74 & 18.35 & 39.14 & 35.70 \\ 31.16 & 27.74 & 35.70 & 45.10 \\ 59.35 & 31.16 & 45.10 & 34.83 \\ 60.45 & 59.35 & 34.83 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### 11.- Obtención del centroide geométrico de la columna

|                | AREAS              | X     | Y    | Ax                 | Ay                    |
|----------------|--------------------|-------|------|--------------------|-----------------------|
| A <sub>1</sub> | 60 x 60 = 3600     | 30    | 30   | 108,000            | 108,000               |
| A <sub>2</sub> | (20x20)/2 = -200   | 6.66  | 6.66 | -1333.3            | -1333.3               |
| A <sub>3</sub> | 10 x 10 = -100     | 5     | 55   | -500               | -5500                 |
| A <sub>4</sub> | (20 x 50)/2 = -500 | 53.33 | 43.3 | -26666.67          | -21,666.67            |
| A <sub>5</sub> | (40 x 10)/2 = -200 | 46.67 | 3.33 | -9334              | -666.67               |
|                | $\sum A = 2600$    |       |      | $\sum Ax = 70,166$ | $\sum Ay = 78,833.33$ |

$$\bar{x} = \frac{70166}{2600} = 26.98 \text{ cm}$$

$$\bar{y} = \frac{78833.33}{2600} = 30.32 \text{ cm}$$

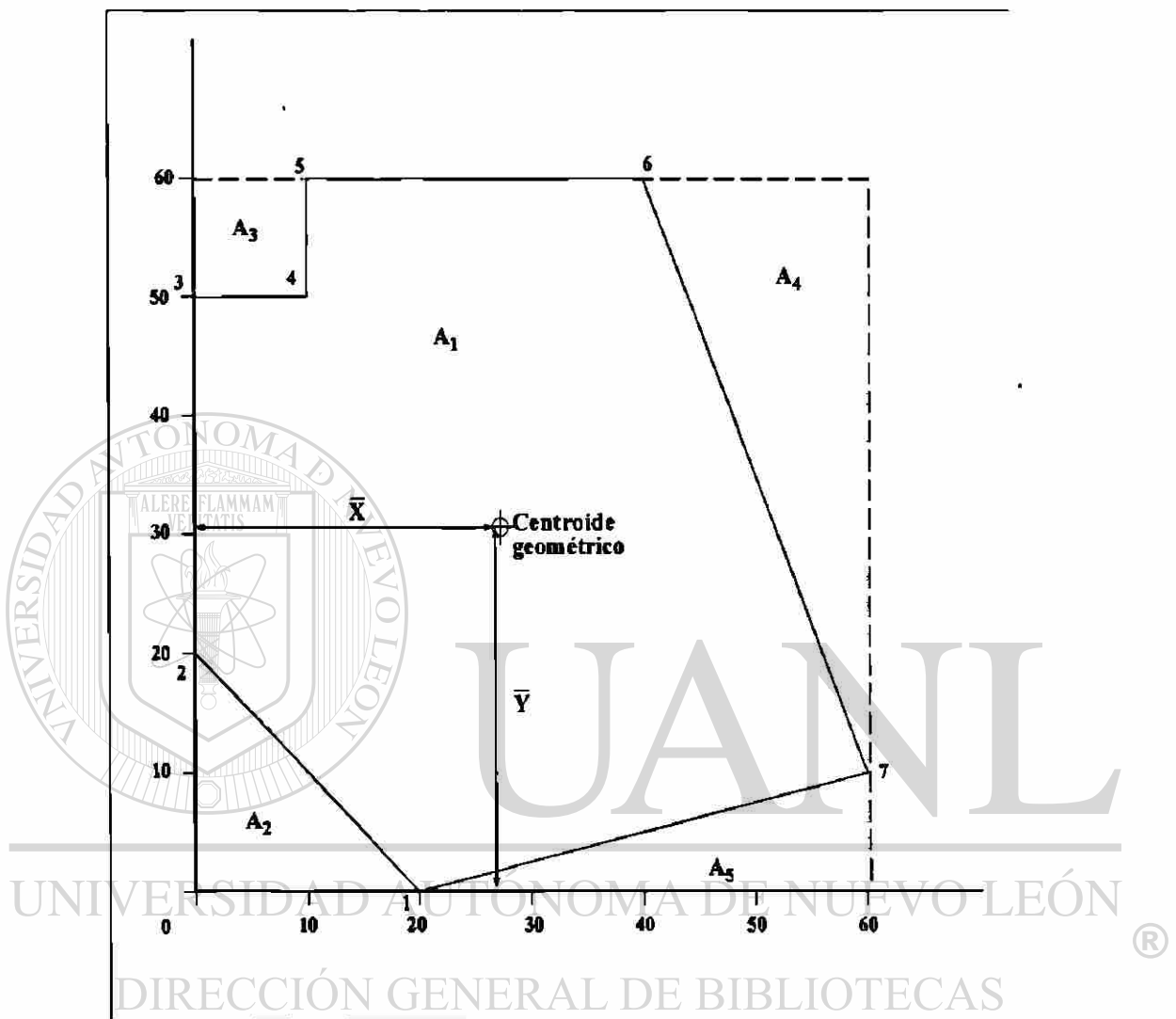


Fig. 6.2 División de áreas para localizar el centroide geométrico de sección ver paso 11.

12.- Obtención del centroide plástico de la sección.

Obtención de  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$

$$\bar{y} = \frac{0.85 A_T f_c (y_c) + \sum_{i=1}^n (f_y) (A_{si}) (y_i)}{0.85 A_T f_c + \sum_{i=1}^n f_y A_{si}}$$

$$\bar{y} = \frac{0.85(2600)(350)(30.32) + [(4200)(5)(20 + 5 + 10)]}{0.85(2600)(350) + (4200)(5)(3)}$$

$$\bar{y} = 30.04 \text{ cm}$$

$$\bar{x} = \frac{0.85(2600)(350)(26.98) + [(4200)(5)(20 + 30 + 50)]}{0.85(2600)(350) + (4200)(5)(3)}$$

$$x = 27.46 \text{ cm}$$

Obtención de  $x_m$ ,  $y_m$

$$\bar{y} = 30.04 \text{ cm}$$

$$x = 27.46 \text{ cm}$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

Transformación con respecto al eje neutro de las coordenadas del centroide plástico. DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$(\cos 20^\circ)(27.46 = x_m \cos 20^\circ - y_m \sin 20^\circ + 0)$$

$$(30.04 = x_m \sin 20^\circ + y_m \cos 20^\circ + (-3.64))$$

$$x_m = 37.26 \text{ cm}$$

$$y_m = 22.26 \text{ cm}$$

13.- Obtención del centroide del área de compresión respecto al eje neutro

|                 | AREAS                  | X     | Y     | Ax                    | Ay                   |
|-----------------|------------------------|-------|-------|-----------------------|----------------------|
| A <sub>1</sub>  | (5.08) (10.93)/2=27.76 | 11.48 | 7.29  | 318.68                | 202.37               |
| A <sub>2</sub>  | (5.08) (13.97)/2=35.48 | 11.48 | 15.29 | 407.31                | 553.13               |
| A <sub>3</sub>  | (5.18) (24.90)=128.98  | 15.76 | 12.45 | 2,032.72              | 1,605.80             |
| A <sub>4</sub>  | (5.18) (14.24)/2=36.88 | 16.62 | 29.65 | 609.62                | 1,093.49             |
| A <sub>5</sub>  | (9.39) (35.70)=335.22  | 23.05 | 17.85 | 7,726.82              | 5,983.67             |
| A <sub>6</sub>  | (9.39) (3.44)/2=16.15  | 21.48 | 36.85 | 346.90                | 595.13               |
| A <sub>7</sub>  | (3.42) (35.70)=122.09  | 29.45 | 17.85 | 3,595.55              | 2,179.30             |
| A <sub>8</sub>  | (3.42) (9.40)/2=16.07  | 30.02 | 67.03 | 482.42                | 1,077.17             |
| A <sub>9</sub>  | (28.19) (34.83)=981.85 | 42.26 | 17.41 | 41,492.98             | 17,094.00            |
| A <sub>10</sub> | (28.19) (10.27)=144.76 | 40.56 | 38.25 | 5,871.47              | 5,537.07             |
| A <sub>11</sub> | (1.11) (34.83)/2=19.16 | 59.72 | 11.61 | 1,114.24              | 222.44               |
|                 | $\sum A = 1,864.37$    |       |       | $\sum Ax = 64,028.72$ | $\sum Ay = 36,143.6$ |

$\bar{y}_T = 34.34$  cm para división de áreas ver figura 6.3

$y_T = 19.386$  cm Transformación con respecto al eje neutro =  $30.66 = Y_0$

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

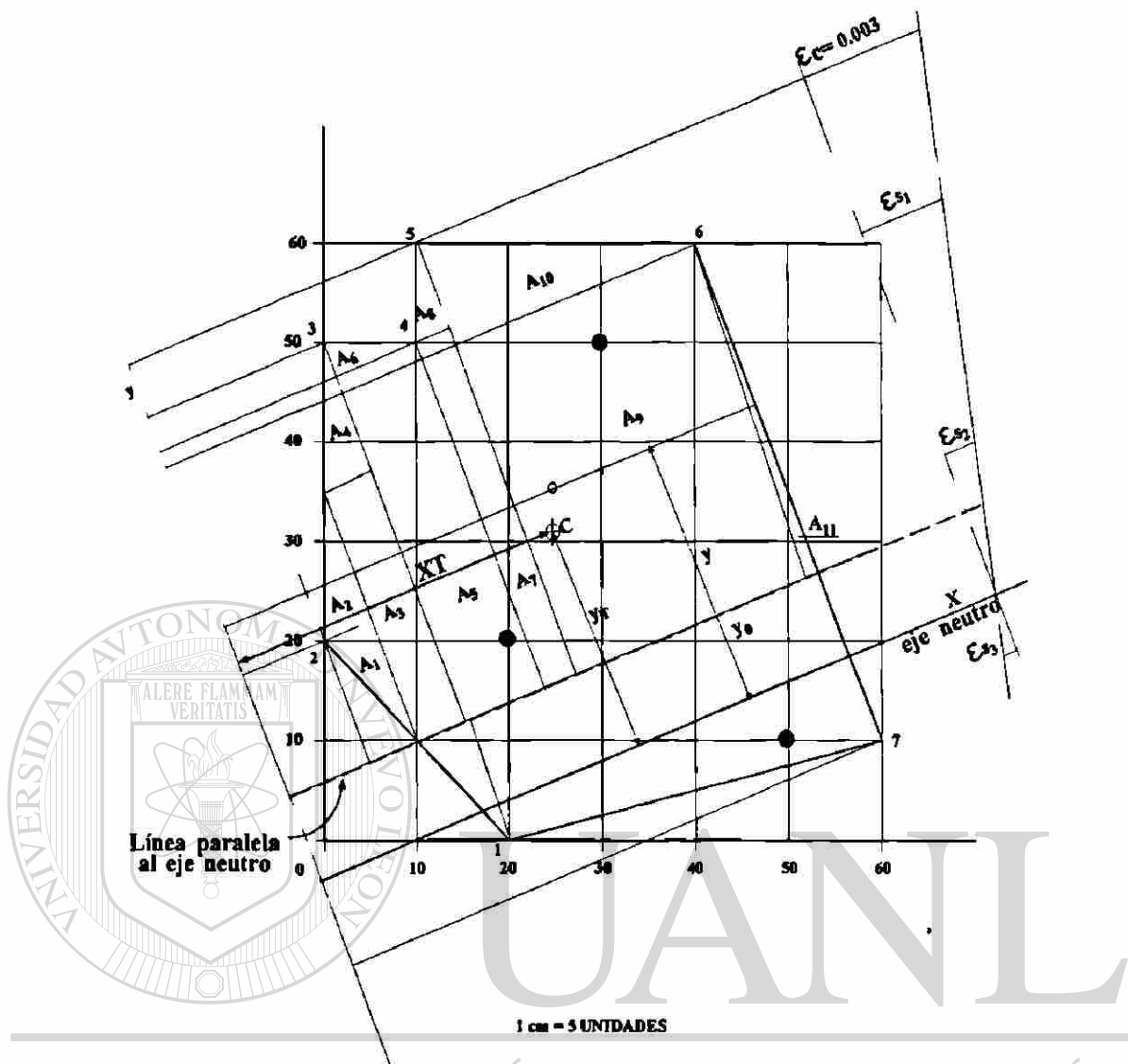


Fig. 6.3 División de áreas para obtener el centroide del área en compresión con respecto al eje neutro.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

#### 14.- Obtención de la fuerza del concreto $C_c$

$$C_c = 0.85 A_c f'_c$$

$$C_c = (0.85) (18.64.4 \text{ cm}^2) (350 \text{ Kg/cm}^2) = 554659 \text{ Kgf.}$$

## 15.- Deformaciones del acero y sus fuerzas

### Varilla 1

$$\frac{0.003}{56.38} = \frac{\epsilon_2}{15.00}$$

$$\epsilon_{s1} = 0.000798$$

$$F_{s1} = (0.000798)(2,100,000) = 1,675.8 < 4,200$$

$$F_{y1} = 1675.8 \text{ Kg/cm}^2$$

$$T_1 = 5 (1675.8) = 8379 \text{ Kgf.}$$

### Varilla 2

$$\frac{0.003}{56.38} = \frac{\epsilon_2}{40.15}$$

$$\epsilon_{s2} = 0.00214$$

$$F_y = (0.00214)(2,100,000) = 4,412 \text{ Kg/cm}^2 > 4,200 \text{ Kg/cm}^2;$$

$$F_{s2} = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$

$$T_2 = (A) (f_y) = (5) (4200)$$

$$T_2 = 21,000 \text{ kgf}$$

### Varilla 3.

$$\frac{0.003}{56.38} = \frac{\epsilon_3}{-4.28}$$

$$\epsilon_{s3} = -0.000228$$

$$F_y = (-0.000228)(2,100,000) = -478.8 > -4,200$$

$$F_{y3} = -478.8 \text{ Kg/cm}^2$$

$$T_3 = (-478.8) (5) = -2394 \text{ Kg}$$

## 16.- Obtención de la carga Axial

$$\begin{aligned} P_x &= C_c + T_1 + T_2 + T_3 \\ P_x &= 554,659 + 8379 + 21,000 - 2394 \\ &= 581,644 \text{ Kg.} \end{aligned}$$

## 17.- Obtención de Mux' y Muy'

$$M_{ux'} = C_c \left( y_{ca} - \bar{Y}_m \right) + \sum_{i=1}^n F_{si} \left( y_{si} - \bar{Y}_m \right)$$

$$M_{ux'} = 554649 (30.66 - 22.26) + 8379 (15 - 22.26) + 21000 (40.15 - 22.26) - 2394 (-4.28 - 22.26)$$

$$M_{ux'} = 5'037,446.8 \text{ cm.}$$

$$M_{uy'} = 554649 (35.92 - 37.32) + 8379 (26.74 - 37.32) + 21000 (46.54 - 37.32) - 2394 (51.65 - 37.32)$$

$$M_{uy'} = -705,844 \text{ kg-cm.}$$

## 18.- Obtención de Mx, My:

$$M_x = M_{ux'} \cos \theta + M_{uy'} \sin \theta$$

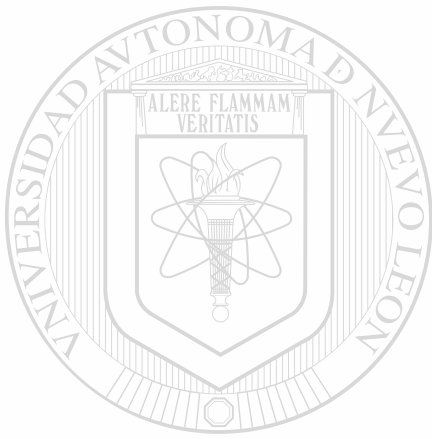
$$M_x = 5'037,446.8 (\cos 20^\circ) + (-705,844) (\sin 20^\circ)$$

$$M_x = 4'492,238.72 \text{ kg-cm.}$$

$$M_y = -M_{ux}' \sin \theta + M_{uy}' \cos \theta$$

$$M_y = -(5'037,446.8) (\sin 20^\circ) + (-705,844) (\cos 20^\circ)$$

$$M_y = -2'386,191.5 \text{ k-cm.}$$



# UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



## 6.2 CICLO II

Se propone la columna de la figura 6.4 la cual tiene 3 varillas, El eje neutro se propone con origen en  $x=0, y=0$  y un ángulo de  $0^\circ$

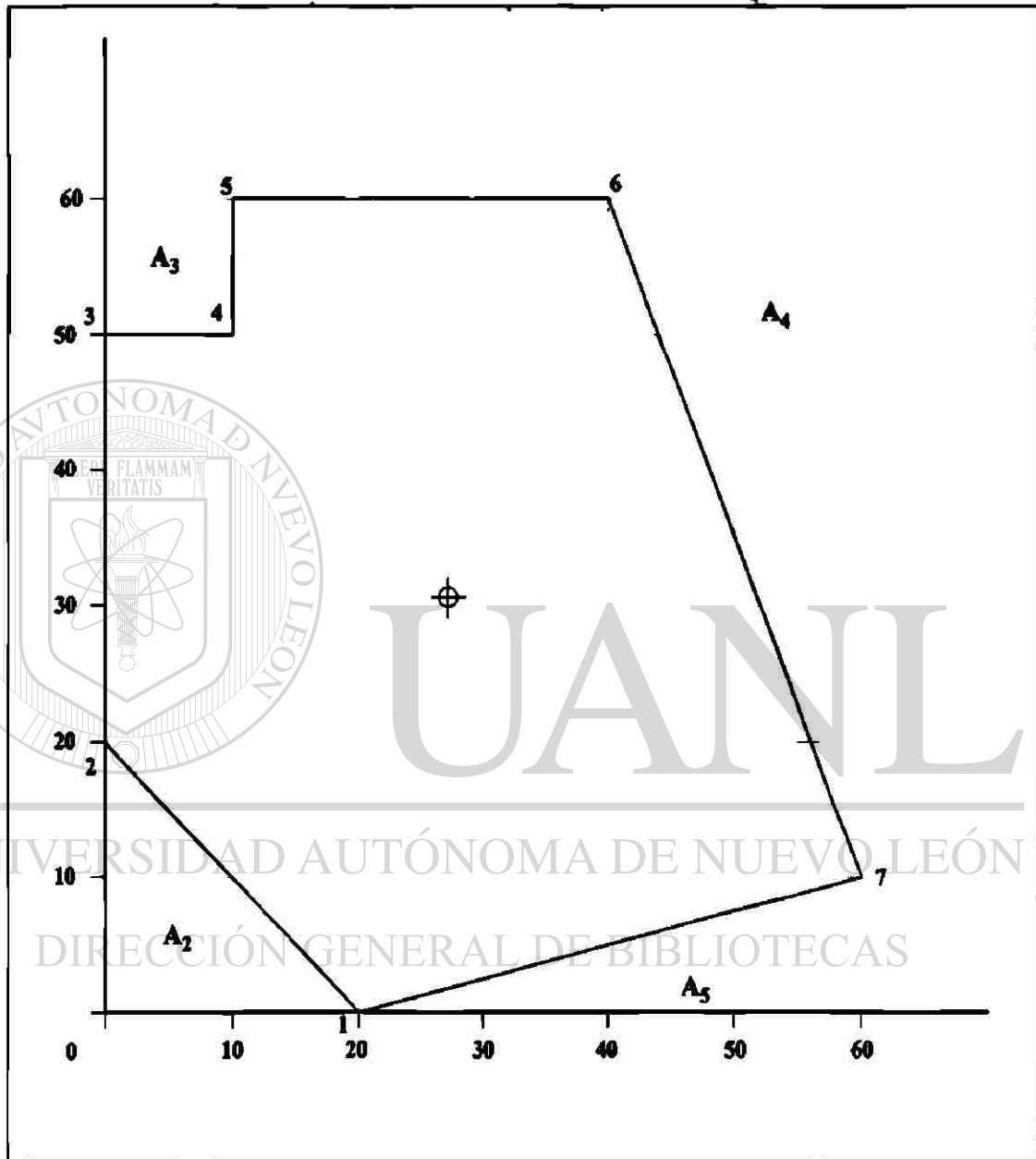


Fig. 6.4 Geometría de columna mostrando el eje neutro propuesto.

Datos:

$$f_c = 350 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

CM = 0.003 (deformación máxima del concreto)

$$N = 7 \quad (\text{número de vértices de la columna})$$

$$UA = 3 \quad (\text{número de concentraciones de acero})$$

### 1.- Formulación de la Matriz $[V]_{NX2}$

Esta matriz se forma con las coordenadas de los vértices de la columna siguiendo el sentido de las manecillas del reloj. Coordenadas en cm.

$$[V] = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 20 \\ 0 & 50 \\ 10 & 50 \\ 10 & 60 \\ 40 & 60 \\ 60 & 10 \end{bmatrix}$$

### 2.- Formulación de la Matriz $[NA]_{UAX2}$ y $[SA]_{UA}$

La matriz NA se forma con las coordenadas de ubicación del acero de refuerzo y el vector SA con el área de acero de cada ubicación.

$$[NA] = \begin{bmatrix} 20 & 20 \\ 30 & 50 \\ 50 & 10 \end{bmatrix}$$

$$[SA] = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Coordenadas en cm

Coordenadas en  $\text{cm}^2$

### 3.- Obtención de la máxima coordenada en X y Y de los vértices.

$$X_{ME} = 0 \text{ cm}$$

$$Y_{ME} = 0 \text{ cm}$$

$$X_{MA} = 60 \text{ cm}$$

$$Y_{MA} = 60 \text{ cm}$$

4.- Obtención de coordenadas cuando el eje neutro propuesto cruza el eje Y.  
 Para este cálculo, se propone un eje neutro con origen en  $x=0$   $y=0$  y una inclinación de  $0^\circ$  con respecto a la horizontal.

$$m = \operatorname{tg} 0$$

$$m = \operatorname{tg} 0^\circ$$

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

$$m = 0$$

evaluando con  $x_1 = 0$  y  $y_1 = 0$  tenemos

$$m(x - x_1) = y - y_1$$

$$0(x - 0) = y - 0$$

$$0 = y$$

$$y = 0$$

5.- Transformación de coordenadas de vértices y ubicaciones del acero  
 Transformación de coordenadas mediante una traslación (hacia  $x=0$ ) y una rotación  $\theta = 0^\circ$

La transformación se logra mediante

$$x = x'' \operatorname{Cos} \theta - y'' \operatorname{Sen} \theta + k > h$$

$$y = x'' \operatorname{Sen} \theta + y'' \operatorname{Cos} \theta + k$$

donde:  $\theta =$  ángulo de rotación

$x, y =$  coordenadas del sistema original

$x'' y'' =$  coordenadas del sistema final

$h, k =$  coordenadas del nuevo origen

Por lo tanto  $h = 0$  cm,  $k = 0$  cm y  $\theta = 0^\circ$

a) Para el primer vértice  $x = 20$  cm  $y = 0$  cm

$$20 = x'' \operatorname{cos} 0^\circ - y'' \operatorname{Sen} 0^\circ + 0$$

$$0 = x'' \operatorname{Sen} 0^\circ + y'' \operatorname{Cos} 0^\circ + 0$$

$$x'' = 20 \text{ cm}$$

$$y'' = 0 \text{ cm}$$

b) Para el segundo vértice

$$x = 0 \text{ cm}$$

$$y = 20 \text{ cm}$$

$$0 = x'' \cos 0^\circ - y'' \sin 0^\circ + 0$$

$$20 = x'' \sin 0^\circ + y'' \cos 0^\circ + 0$$

$$x'' = 0 \text{ cm}$$

$$y'' = 20 \text{ cm}$$

c) Para el tercer vértice

$$x = 0 \text{ cm}$$

$$y = 50 \text{ cm}$$

$$0 = x'' \cos 0^\circ - y'' \sin 0^\circ + 0$$

$$50 = x'' \sin 0^\circ + y'' \cos 0^\circ + 0$$

$$x'' = 0 \text{ cm}$$

$$y'' = 50 \text{ cm}$$

d) Para el cuarto vértice

$$x = 10 \text{ cm}$$

$$y = 50 \text{ cm}$$

$$10 = x'' \cos 0^\circ - y'' \sin 0^\circ + 0$$

$$50 = x'' \sin 0^\circ + y'' \cos 0^\circ + 0$$

$$x'' = 10 \text{ cm}$$

$$y'' = 50 \text{ cm}$$

e) Para el quinto vértice

$$x = 10 \text{ cm}$$

$$y = 60 \text{ cm}$$

$$10 = x'' \cos 0^\circ + y'' \sin 0^\circ + 0$$

$$60 = x'' \sin 0^\circ - y'' \cos 0^\circ + 0$$

$$x'' = 10 \text{ cm}$$

$$y'' = 60 \text{ cm}$$

f) Para el sexto vértice

$$x=40 \text{ cm}$$

$$y=60 \text{ cm}$$

$$40 = x'' \cos 0^\circ - y'' \sin 0^\circ + 0$$

$$60 = x'' \sin 0^\circ + y'' \cos 0^\circ + 0$$

$$x'' = 40 \text{ cm}$$

$$y'' = 60 \text{ cm}$$

g) Para el séptimo vértice

$$x=60 \text{ cm}$$

$$y=10 \text{ cm}$$

$$60 = x'' \cos 0^\circ - y'' \sin 0^\circ + 0$$

$$10 = x'' \sin 0^\circ + y'' \cos 0^\circ + 0$$

$$x'' = 60 \text{ cm}$$

$$y'' = 10 \text{ cm}$$

Con éstos datos formamos la matriz  $[VV]_{N \times 2}$ . Coordenadas en cm

$$[VV] = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 20 \\ 0 & 50 \\ 10 & 50 \\ 10 & 60 \\ 40 & 60 \\ 60 & 10 \end{bmatrix}$$

Transformación de coordenadas del acero de refuerzo

a) Para la primer varilla

$$x=20 \text{ cm}$$

$$y=20 \text{ cm}$$

$$20 = x'' \cos 0^\circ - y'' \sin 0^\circ + 0$$

$$20 = x'' \sin 0^\circ + y'' \cos 0^\circ + 0$$

$$x'' = 20 \text{ cm}$$

$$y'' = 20 \text{ cm}$$

b) Para la segunda varilla  $x = 30 \text{ cm}$   $y = 50 \text{ cm}$

$$30 = x'' \cos 0^\circ - y'' \sin 0^\circ + 0$$

$$50 = x'' \sin 0^\circ + y'' \cos 0^\circ + 0$$

$$x'' = 30 \text{ cm}$$

$$y'' = 50 \text{ cm}$$

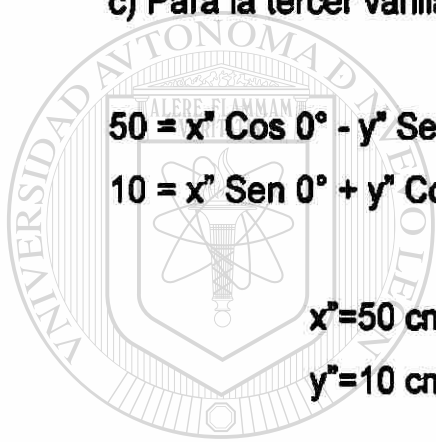
c) Para la tercer varilla  $x = 50 \text{ cm}$   $y = 10 \text{ cm}$

$$50 = x'' \cos 0^\circ - y'' \sin 0^\circ + 0$$

$$10 = x'' \sin 0^\circ + y'' \cos 0^\circ + 0$$

$$x'' = 50 \text{ cm}$$

$$y'' = 10 \text{ cm}$$



UANL

Con estos datos se conforma la matriz  $[NNA]_{UAX2}$

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$[NNA] = \begin{bmatrix} 20 & 20 \\ 30 & 50 \\ 50 & 10 \end{bmatrix}$$

6.- Cálculo de la altura del bloque rectangular de esfuerzos.

Distancia máxima perpendicular desde el eje neutro a la fibra más alejada (superior).

$$Y_{\text{máx}} = 60 \text{ cm}$$

$$\beta = 0.80$$

DCP = distancia de corrección de la línea "eje neutro"

$$\text{DCP} = Y \text{ máx} (1-\beta)$$

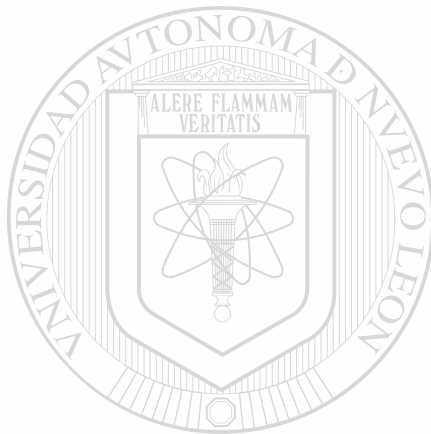
$$\text{DCP} = 60 (1-0.8)$$

$$\text{DCP} = 60 (0.2)$$

$$\text{DCP} = 12 \text{ cm}$$

### 7.- Formación de la matriz [VV]

Esta matriz se forma a partir de la [VV] restándole a la columna No. 2 (que son las coordenadas en Y) la distancia DCP.



$$[NNA] = \begin{bmatrix} 20 & -12 \\ 0 & 8 \\ 0 & 38 \\ 10 & 38 \\ 10 & 48 \\ 40 & 48 \\ 60 & -2 \end{bmatrix}$$

UANL

### 8.- Formación de la matriz de rangos [R] $N \times 4$

Esta matriz se forma a partir de la matriz [VV], la columna 1 y 2 son las coordenadas en X y la 3 y 4 en Y, por lo tanto, se toma el rango de operación de cada vértice.

$$[R] = \begin{bmatrix} 20 & 0 & -12 & 8 \\ 0 & 0 & 8 & 38 \\ 0 & 10 & 38 & 38 \\ 10 & 10 & 38 & 48 \\ 10 & 40 & 48 & 48 \\ 40 & 60 & 48 & -2 \\ 60 & 20 & -2 & -12 \end{bmatrix}$$

### 9.- Formación de la matriz [ECC]

Esta matriz es de las ecuaciones de los lados de la columna. La matriz [ECC] es de NX3 donde la primera columna son los valores de a, la segunda son los valores de b y la tercera la del valor c, la ecuación es igualada a cero y es de la forma  $ax + by + c = 0$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8 - (-12)}{0 - 20} = -1$$

$$m(x - x_1) = y - y_1$$

$$m(x - x_1) = y - y_1$$

$$-x + x_1 = y - y_1$$

$$-x + 20 = y + 12$$

$$-x - y = 12 - 20$$

$$-x - y + 20 - 12 = 0$$

$$-x - y + 8 = 0$$

$$[ECC] = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 8 \\ -1 & 10000 & 0 \\ 10000 & -1 & 38 \\ -1 & 10000 & 10 \\ 10000 & -1 & 48 \\ -2.5 & -1 & 148 \\ 10000 & 10000 & 10000 \end{bmatrix}$$

### 10.- Formación de la Matriz [RR] NX4

Esta matriz se forma a partir de la matriz [R] y consiste en obtener los rangos de los lados de la columna que quedan sobre el eje neutro por supuesto se hace cero el negativo y se evalúa su correspondiente "Y".



$$[RR] = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 8 & 38 \\ 0 & 10 & 38 & 38 \\ 10 & 10 & 38 & 48 \\ 10 & 40 & 48 & 48 \\ 40 & 59.2 & 48 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

11.- Obtención del centroide geométrico de la columna.

|                | AREAS             | X     | Y    | Ax                   | Ay                      |
|----------------|-------------------|-------|------|----------------------|-------------------------|
| A <sub>1</sub> | (60) (60) = 3600  | 30    | 30   | 108000               | 108000                  |
| A <sub>2</sub> | (20) (20)/2-200   | 6.66  | 6.66 | -1333.33             | -1333.33                |
| A <sub>3</sub> | (10) (10) = -100  | 5     | 55   | -500                 | -5500                   |
| A <sub>4</sub> | (20) (50)/2= -500 | 53.33 | 43.3 | -26666.67            | -21.666.67              |
| A <sub>5</sub> | (40) (10)/2= -200 | 46.67 | 3.33 | -9334                | -666.67                 |
|                | $\Sigma A = 2600$ |       |      | $\Sigma Ax = 70,166$ | $\Sigma Ay = 78,833.33$ |

$$\bar{x} = \frac{\Sigma Ax}{\Sigma A} = \frac{70166}{2600} = 26.98cm$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma Ay}{\Sigma A} = \frac{78833.33}{2600} = 30.32cm$$

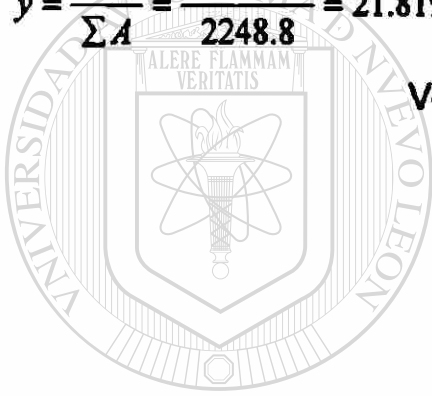
12.- El centroide plástico de la sección es  $X_m = 27.46$  cm,  $Y_m = 30.04$  cm  
(Ver cálculo en el N° 12 del ejemplo anterior. Ciclo I).

13.- Obtención del centroide del área de compresión.

|                |                       | Y    | X    | Ax            | Ay            |
|----------------|-----------------------|------|------|---------------|---------------|
| A <sub>1</sub> | (8) (8)/2 = 32        | 5.33 | 5.33 | 170.56        | 170.56        |
| A <sub>2</sub> | (8) (30) = 240        | 23   | 4    | 5520          | 960           |
| A <sub>3</sub> | (38) (2) = 76         | 19   | 9    | 1444          | 684           |
| A <sub>4</sub> | (30) (48) = 1440      | 24   | 25   | 34560         | 36000         |
| A <sub>5</sub> | (19.2) (48)/2 = 460.8 | 16   | 46.4 | 7372.8        | 21381.12      |
|                | ΣA= 2248.8            |      |      | ΣAx=59,195.79 | ΣAy=49.067.36 |

$$\bar{y} = \frac{\sum Ay}{\sum A} = \frac{49067.36}{2248.8} = 21.819 \text{ cm} \quad \bar{x}_T = 26.32 \text{ cm}$$

Ver figura 6.5



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

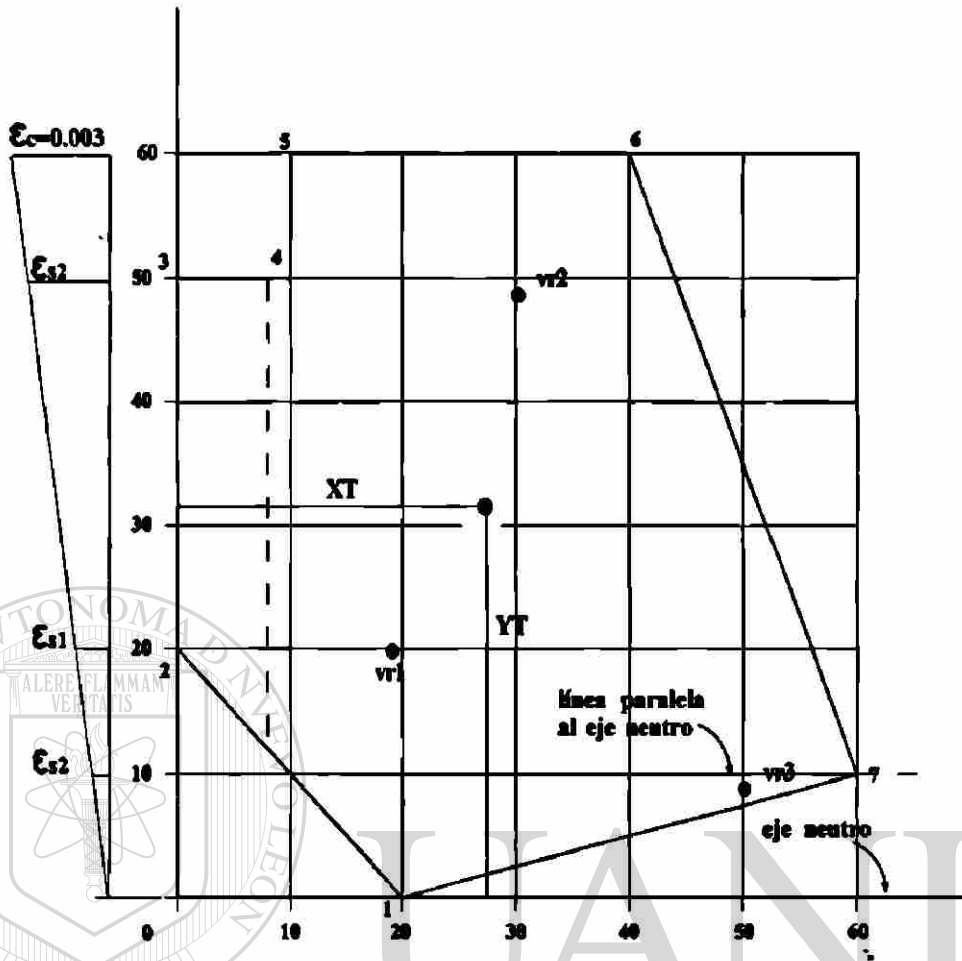


Fig. 6.5 División de áreas para obtener el centroide del área en compresión con respecto al eje neutro.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$Y_T \text{ con respecto al eje neutro} = y + DCP = 21.819 + 12 = 33.819 \text{ cm}$$

14.- Obtención de la fuerza del concreto (Cc)

$$C_c = (0.85) (A_c) (f_c)$$

$$C_c = (0.85) (2248.8) \text{ cm}^2 (350) \text{ kg/cm}^2$$

$$C_c = 669,018 \text{ Kg.}$$

## 15.- Deformaciones del acero y sus fuerzas

### Varilla 1

$$\frac{0.003}{60} = \frac{\epsilon s_1}{20}$$

$$\epsilon s_1 = 0.001.$$

$$f s_1 = (0.001) (2.1 \times 10^6) = 2100 \text{ kg/cm}^2 < 4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$T = (2100) (5) = 10,500 \text{ kgf.}$$

### Varilla 2

$$\frac{0.003}{60} = \frac{\epsilon s_2}{20}$$

$$\epsilon s_2 = 0.0025$$

$$f s_2 = (0.0025) (2.1 \times 10^6) = 5250 > 4200 \text{ usar } 4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$T s_2 = (4200) (5) = 21000 \text{ kgf.}$$

### Varilla 3

$$\frac{0.003}{60} = \frac{\epsilon s_3}{20}$$

$$\epsilon s_3 = 0.0005$$

$$f s_3 = (0.0005) (2.1 \times 10^6) = 1050 \text{ kg/cm}^2 < 4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$T = (1050) (5) = 5250 \text{ Kgf.}$$

## 16.- Obtención de la carga axial

$$P_x = C_c + T_1 + T_2 + T_3$$

$$P_x = 669,018 + 10,500 + 21000 + 5250$$

$$P_x = 705,768 \text{ Kgf.}$$

### 17.- Obtención de $Mux'$ , $Muy'$

$$Mux' = Pc \left( Y_{cc} - \bar{Y}_m \right) + \sum_{i=1}^n (F_{si}) \left( Y_{si} - \bar{Y}_m \right)$$

$$Mux' = 669,018 (26.32 - 27.46) + (10,500) (20 - 27.46) + (21000) (30 - 27.46) + (5250) (10 - 30.04) = 2,736,749 \text{ K} - \text{cm}$$

$$Muy' = 669,018 (2632 - 27.46) + (10500) (20 - 27.46) + (21000) (30 - 27.46) + (5250) (50 - 27.46)$$

$$Muy' = -669,335.52 \text{ k} - \text{cm}$$

### 18.- Obtención de $Mx$ , $My$

$$Mx = Mux' \cos \theta + Muy' \sin \theta$$

$$Mx = (2,736,749) (\cos 0^\circ) + (669,335) (\sin 0^\circ) = 2,736,746 \text{ K} - \text{cm}$$

$$My = -Mux' \sin \theta + Muy' \cos \theta$$

$$My = -(-2,736,749) (\sin 0^\circ) + (669,335.52) (\cos 0^\circ) = 669,335.52 \text{ K} - \text{cm}$$

### 6.3 CICLO III

Se propone un ciclo para la sección mostrada en la figura 6.6 suponiendo un eje neutro con origen en  $X=10$  y un ángulo de  $150^\circ$  con respecto a la horizontal.

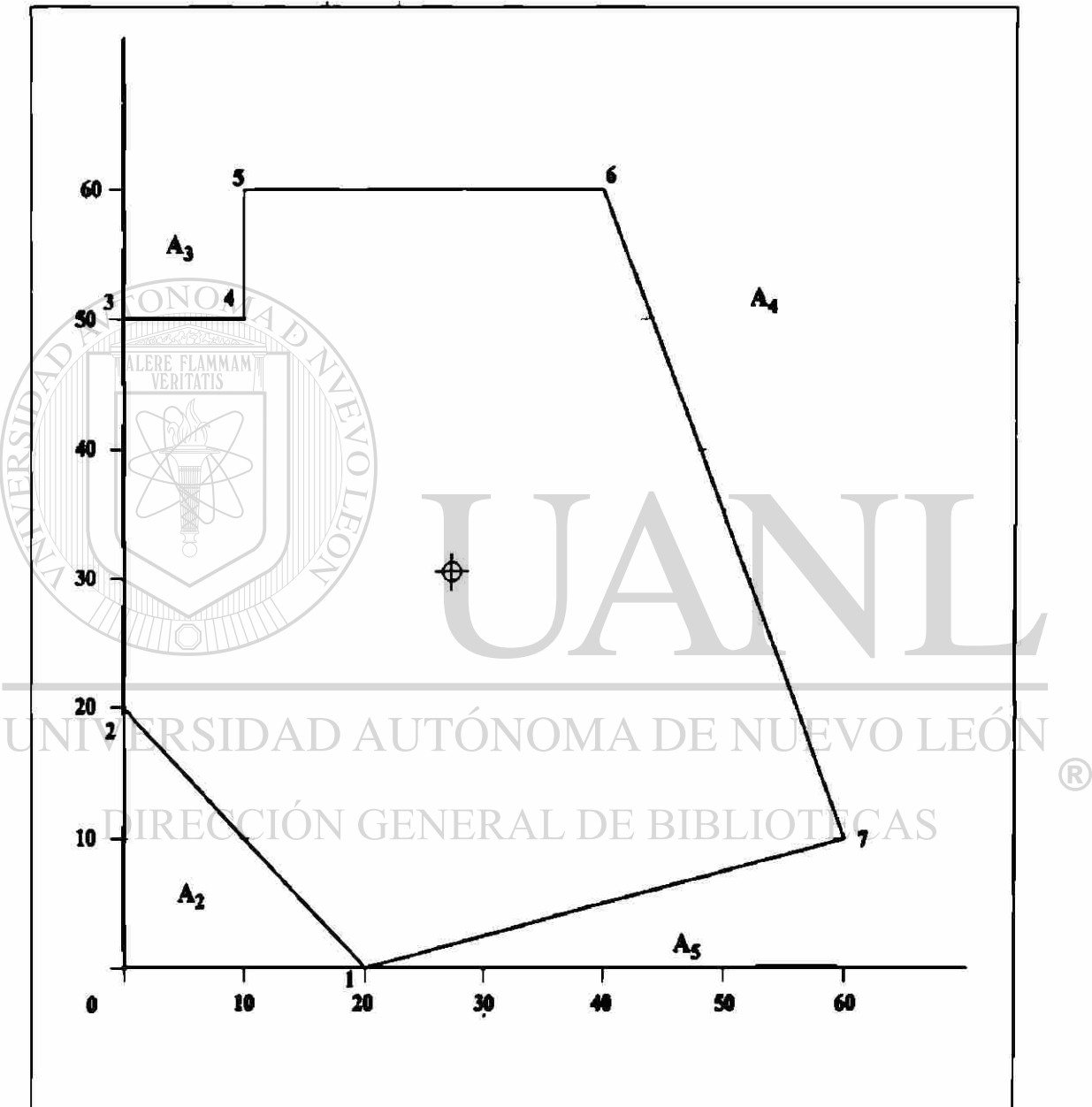


Fig. 6.6 Geometría de la columna para el ciclo III.

**Cálculo de un ciclo para obtener  $M_x$ ,  $M_y$  y  $P_x$ .**

**Datos:**

$$f_c = 350 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$


$$\varepsilon_{CM} = 0.003 \text{ (deformación máxima del concreto)}$$

$$N = 7 \text{ (número de vértices de la columna)}$$

$$UA = 3 \text{ (número de concentraciones de acero)}$$

### 1.- Formulación de la Matriz $[V]_{N \times 2}$

Esta matriz se forma con las coordenadas de los vértices de la columna siguiendo el sentido de las manecillas del reloj. Coordenadas en cm.


$$[V] = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 20 \\ 0 & 50 \\ 10 & 50 \\ 10 & 60 \\ 40 & 60 \\ 60 & 10 \end{bmatrix}$$

### 2.- Formulación de la Matriz $[NA]_{UA \times 2}$ Y $[SA]_{UA}$

La matriz NA se forma con las coordenadas de ubicación del acero de refuerzo, y el vector SA con el área de acero de cada ubicación.

$$[NA] = \begin{bmatrix} 20 & 20 \\ 30 & 50 \\ 50 & 10 \end{bmatrix}$$

$$[SA] = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Coordenadas en cm

Coordenadas en  $\text{cm}^2$

3.- Obtención de la máxima coordenada en X y Y de los vértices:

$$X_{ME} = 0 \text{ cm}$$

$$Y_{ME} = 0 \text{ cm}$$

$$X_{MA} = 60 \text{ cm}$$

$$Y_{MA} = 60 \text{ cm}$$

4.- Obtención de coordenadas cuando el eje neutro propuesto cruza el eje y. Para este cálculo, se propone un eje neutro con origen en  $X = 10$ ,  $Y = 0$ , y una inclinación de  $150^\circ$  con respecto a la horizontal.

$$m = \text{tg } \theta$$

$$m = \text{tg } 150^\circ$$

$$m = -0.57735$$

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Evaluando  $m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$  con  $x_1 = 10$   $y_1 = 0$  Tenemos

$$m(x - x_1) = y - y_1$$

$$-0.57735(x - 10) = y - 0$$

$$-0.57735x + 5.7735 = y \quad (\text{ecuación de la recta propuesta como eje neutro})$$

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Evaluando la ecuación de la recta con  $x = 0$  tenemos que

$$-0.57735(0) + 5.7735 = y$$

$$y = 5.7735 \text{ cm}$$

5.- Transformación de coordenadas de vértices y ubicaciones de acero.

Transformación de coordenadas mediante una traslación (hacia  $X = 0$  y

$Y = 5.7735$  y una rotación  $\theta = 150^\circ$



$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta + h$$

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta + k$$

donde:  $\theta$  = ángulo de rotación

$x, y$  = coordenadas del sistema original

$x', y'$  = coordenadas del sistema final

$h, k$  = coordenadas del nuevo origen.

Por lo tanto:  $h = 0$  y  $k = 5.7735$  ;  $\theta = 150^\circ$

a) Para el primer vértice  $x = 20$  cm y  $Y = 0$  cm

$$20 = x' \cos 150^\circ - y' \sin 150^\circ + 0 \text{ cm}$$

$$0 = x' \sin 150^\circ + y' \cos 150^\circ + 5.7735$$

$$x' = -20.20725808 \text{ cm}$$

$$y' = -5 \text{ cm}$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

b) Para el segundo vértice  $x = 0$  cm y  $y = 20$  cm

$$0 = x' \cos 150^\circ - y' \sin 150^\circ + 0$$

$$20 = x' \sin 150^\circ + y' \cos 150^\circ + 5.7735$$

$$x' = 7.11325 \text{ cm}$$

$$y' = -12.3205 \text{ cm}$$

c) Para el tercer vértice  $x = 0$  cm y  $y = 50$  cm

$$0 = x' \cos 150^\circ - y' \sin 150^\circ + 0$$

$$50 = x' \sin 150^\circ + y' \cos 150^\circ + 5.7735$$

$$x'' = 22.11325 \text{ cm}$$

$$y'' = -38.30127252 \text{ cm}$$

d) Para el cuarto vértice  $x = 10 \text{ cm}$   $y = 50 \text{ cm}$

$$10 = x'' \cos 150^\circ - y'' \sin 150^\circ + 0$$

$$50 = x'' \sin 150^\circ + y'' \cos 150^\circ + 5.7735$$

$$x'' = 13.45299596 \text{ cm}$$

$$y'' = -43.30127252 \text{ cm}$$

e) Para el quinto vértice  $x = 10 \text{ cm}$   $y = 60 \text{ cm}$

$$10 = x'' \cos 150^\circ - y'' \sin 150^\circ + 0$$

$$60 = x'' \sin 150^\circ + y'' \cos 150^\circ + 5.7735$$

$$x'' = 18.45299596 \text{ cm}$$

$$y'' = -51.96152656 \text{ cm}$$

f) Para el sexto vértice  $x = 40 \text{ cm}$   $y = 60 \text{ cm}$

$$40 = x'' \cos 150^\circ - y'' \sin 150^\circ + 0$$

$$60 = x'' \sin 150^\circ + y'' \cos 150^\circ + 5.7735$$

$$x'' = -7.527766151 \text{ cm}$$

$$y'' = -66.96152656 \text{ cm}$$

g) Para el séptimo vértice  $x = 60 \text{ cm}$   $y = 10 \text{ cm}$

$$60 = x'' \cos 150^\circ - y'' \sin 150^\circ + 0$$

$$10 = x' \text{ Sen } 150^\circ + y' \text{ Cos } 150^\circ + 5.7735$$

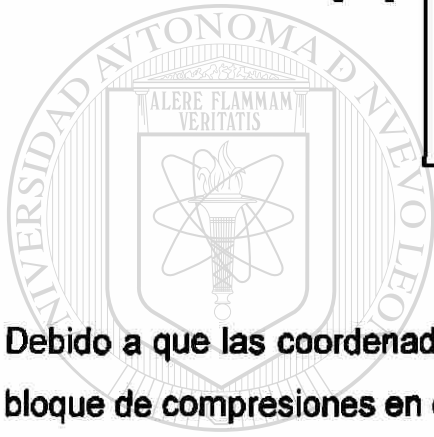
$$x' = -49.84827423 \text{ cm}$$

$$y' = -33.66025637 \text{ cm}$$

Con estos datos se conforma la matriz  $[VV]_{uxz}$

$$[VV] = \begin{bmatrix} -2020725808. & -5 \\ 7.11325 & -12.3205 \\ 22.11325 & -38.30127252 \\ 13.45299596 & -43.30127252 \\ 18.45299596 & -51.96152656 \\ -7.527766151 & -66.96152656 \\ -49.84827423 & -33.66025637 \end{bmatrix}$$

Debido a que las coordenadas en "Y" dan negativas, significa que no existe un bloque de compresiones en el concreto.



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

## 6.4 CICLO IV

Se propone un ciclo para la sección mostrada en la figura 6.7, suponiendo un eje neutro con origen en  $X = 10$  cm y una inclinación de  $45^\circ$  con respecto a la horizontal.

Cálculo de un ciclo para obtener  $M_x$ ,  $M_y$  y  $P_x$

Datos:

$$f_c = 350 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$CM = 0.003 \text{ (deformación máxima del concreto)}$$

$$N = 10$$

$$UA = 4$$

### 1.- Formulación de la matriz $[V]_{N \times 2}$

Esta matriz se forma con las coordenadas de los vértices de la columna siguiendo el sentido de las manecillas del reloj. Coordenadas en cm.

$$[V] = \begin{bmatrix} 40 & 0 \\ 0 & 40 \\ 0 & 60 \\ 40 & 100 \\ 60 & 100 \\ 20 & 60 \\ 60 & 60 \\ 60 & 40 \\ 20 & 40 \\ 60 & 0 \end{bmatrix}$$

## 2.- Formulación de la matriz $[NA]_{UAX2}$ y $[SA]_{UA}$

La matriz  $[NA]$  se forma con las coordenadas de ubicación del acero de refuerzo y el vector  $[SA]$  con el área de acero de cada ubicación.

$$[NA] = \begin{bmatrix} 40 & 10 \\ 10 & 50 \\ 50 & 50 \\ 40 & 90 \end{bmatrix}$$

Coordenadas en cm.

$$[SA] = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

cm<sup>2</sup>

## 3.- Obtención de la máxima coordenada en "X" y "Y" de los vértices

$$X_{ME} = 0 \text{ cm}$$

$$Y_{ME} = 0 \text{ cm}$$

$$X_{MA} = 60 \text{ cm}$$

$$Y_{MA} = 100 \text{ cm}$$

4.- Obtención de coordenadas cuando el eje neutro propuesto cruza el eje "Y".  
Para éste cálculo se propone un eje neutro con origen en  $X=10$   $y=0$  y una inclinación de  $45^\circ$  con la horizontal.

$$m = \text{tg } \theta$$

$$m = \text{tg } 45^\circ$$

$$m = 1$$

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Evaluando  $m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$  con  $x_1 = 10 \text{ cm}$   $y_1 = 0 \text{ cm}$

tenemos:

$$m(x - x_1) = y - y_1$$

$$1(x - 10) = y - 0$$

$$x - 10 = y \quad (\text{ecuación de la recta propuesta como eje neutro})$$

Evaluando  $x - 10 = y$  cuando  $x = 0$  cm

$$0 - 10 = y$$

$$y = -10 \text{ cm}$$

5.- Transformación de coordenadas de vértices y ubicaciones de acero.

Transformación de coordenadas mediante una traslación (hacia  $x = 0$  y  $y = -10$ ) y una rotación ( $\theta = 45^\circ$ )

La transformación se logra mediante.

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta + h$$

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta + k$$

donde:  $\theta$  = ángulo de rotación

$x, y$  = coordenadas del sistema original

$x', y'$  = coordenadas del sistema final

$h, k$  = coordenadas del nuevo origen

Por lo tanto,  $h = 0$  cm                       $k = -10$  cm    y                       $\theta = 45^\circ$

a) Para el primer vértice     $x = 40$  cm     $y = 0$  cm

$$40 = x' \cos 45^\circ - y' \sin 45^\circ + 0$$

$$0 = x' \sin 45^\circ + y' \cos 45^\circ - 10$$

$$x' = 35.46 \text{ cm}$$

$$y' = -21.31 \text{ cm}$$

b) Para el segundo vértice  $x = 0$  cm  $y = 40$  cm

$$0 = x'' \cos 45^\circ - y'' \sin 45^\circ + 0$$

$$40 = x'' \sin 45^\circ + y'' \cos 45^\circ - 10$$

$$x'' = 35.46 \text{ cm}$$

$$y'' = 35.26 \text{ cm}$$

c) Para el tercer vértice  $x = 0$  cm  $y = 60$  cm

$$0 = x'' \cos 45^\circ - y'' \sin 45^\circ + 0$$

$$60 = x'' \sin 45^\circ + y'' \cos 45^\circ - 10$$

$$x'' = 49.65 \text{ cm}$$

$$y'' = 49.34 \text{ cm}$$

d) Para el cuarto vértice  $x = 40$  cm  $y = 100$  cm

$$40 = x'' \cos 45^\circ - y'' \sin 45^\circ + 0$$

$$100 = x'' \sin 45^\circ + y'' \cos 45^\circ - 10$$

$$x'' = 106.38 \text{ cm}$$

$$y'' = 49.19 \text{ cm}$$

e) Para el quinto vértice  $x = 60$  cm  $y = 100$  cm

$$60 = x'' \cos 45^\circ - y'' \sin 45^\circ + 0$$

$$100 = x'' \sin 45^\circ + y'' \cos 45^\circ - 10$$

$$x'' = 120.57 \text{ cm}$$

$$y'' = 34.99 \text{ cm}$$

f) Para el sexto vértice  $x = 20 \text{ cm}$   $y = 60 \text{ cm}$

$$20 = x'' \cos 45^\circ - y'' \sin 45^\circ + 0$$

$$60 = x'' \sin 45^\circ + y'' \cos 45^\circ - 10$$

$$x'' = 63.83 \text{ cm}$$

$$y'' = 35.17 \text{ cm}$$

g) Para el séptimo vértice  $x = 60 \text{ cm}$   $y = 60 \text{ cm}$

$$60 = x'' \cos 45^\circ - y'' \sin 45^\circ + 0$$

$$60 = x'' \sin 45^\circ + y'' \cos 45^\circ - 10$$

$$x'' = 92.20 \text{ cm}$$

$$y'' = 6.79 \text{ cm}$$

h) Para el octavo vértice  $x = 60 \text{ cm}$   $y = 40 \text{ cm}$

$$60 = x'' \cos 45^\circ - y'' \sin 45^\circ + 0$$

$$40 = x'' \sin 45^\circ + y'' \cos 45^\circ - 10$$

$$x'' = 78.01 \text{ cm}$$

$$y'' = -7.30 \text{ cm}$$

i) Para el noveno vértice  $x = 20 \text{ cm}$   $y = 40 \text{ cm}$

$$20 = x'' \cos 45^\circ - y'' \sin 45^\circ + 0$$

$$40 = x'' \sin 45^\circ + y'' \cos 45^\circ - 10$$



$$x'' = 49.65 \text{ cm}$$

$$y'' = 21.06 \text{ cm}$$

j) Para el décimo vértice  $x = 60 \text{ cm}$   $y = 0 \text{ cm}$

$$60 = x'' \cos 45^\circ - y'' \sin 45^\circ + 0$$

$$0 = x'' \sin 45^\circ + y'' \cos 45^\circ - 10$$

$$x'' = 49.65 \text{ cm}$$

$$y'' = 35.51 \text{ cm}$$

Con éstos datos se forma la matriz  $[VV]_{N \times 2}$

$$[VV] = \begin{bmatrix} 35.46 & -21.31 \\ 135.46 & 35.26 \\ 49.65 & 49.34 \\ 106.38 & 49.19 \\ 120.57 & 34.99 \\ 63.83 & 35.17 \\ 92.20 & 6.79 \\ 78.01 & -7.30 \\ 49.65 & 21.06 \\ 49.65 & -35.51 \end{bmatrix}$$

Transformación de coordenadas del acero de refuerzo

a) Para la primer varilla  $x = 40 \text{ cm}$   $y = 10 \text{ cm}$

$$40 = x'' \cos 45^\circ - y'' \sin 45^\circ + 0$$

$$10 = x'' \sin 45^\circ + y'' \cos 45^\circ - 10$$

$$x'' = 42.55 \text{ cm}$$

$$y'' = 14.27 \text{ cm}$$

b) Para la segunda varilla  $x = 10 \text{ cm}$      $y = 50 \text{ cm}$

$$10 = x'' \cos 45^\circ - y'' \sin 45^\circ + 0$$

$$50 = x'' \sin 45^\circ + y'' \cos 45^\circ - 10$$

$$x'' = 49.65 \text{ cm}$$

$$y'' = 35.20 \text{ cm}$$

c) Para la tercer varilla     $x = 50 \text{ cm}$                        $y = 50 \text{ cm}$

$$50 = x'' \sin 45^\circ + y'' \cos 45^\circ + 0$$

$$50 = x'' \cos 45^\circ - y'' \sin 45^\circ - 10$$

$$x'' = 78.01 \text{ cm}$$

$$y'' = 6.84 \text{ cm}$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
d) Para la cuarta varilla     $x = 40 \text{ cm}$                        $y = 90 \text{ cm}$                       ®  
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$40 = x'' \cos 45^\circ - y'' \sin 45^\circ + 0$$

$$90 = x'' \sin 45^\circ + y'' \cos 45^\circ - 10$$

$$x'' = 99.29 \text{ cm}$$

$$y'' = 42.13 \text{ cm}$$

Con estos datos se forma la matriz  $[NNA]_{4 \times 2}$

$$[NNA] = \begin{bmatrix} 42.55 & -14.27 \\ 49.65 & 35.20 \\ 78.01 & 6.84 \\ 99.29 & 42.13 \end{bmatrix}$$

6.- Cálculo de la altura del bloque rectangular de esfuerzos.

Distancia máxima perpendicular desde el eje neutro a la fibra más alejada superior (y máx).

$$Y \text{ máx} = 49.34 \quad \text{DCP} = \text{distancia de corrección de la línea eje neutro}$$

$$\beta = 0.8$$

$$\begin{aligned} \text{DCP} &= Y \text{ Max} (1-\beta) \\ &= 49.34 (1-0.8) \\ &= 49.34 (0.2) \\ &= 9.87 \text{ cm} \end{aligned}$$

7.- Formación de la matriz [VVV]

Está matriz se forma a partir de la matriz [VV] restándole a la columna de las "Y" la distancia DCP.

$$[VVV] = \begin{bmatrix} 35.46 & -31.18 \\ 35.46 & 25.29 \\ 49.65 & 39.47 \\ 106.38 & 39.32 \\ 120.57 & 25.12 \\ 63.83 & 25.30 \\ 92.20 & -3.08 \\ 78.01 & -17.07 \\ 49.65 & 11.19 \\ 49.65 & -45.38 \end{bmatrix}$$

## 8.- Formación de la matriz de rangos [R] $N \times 4$

Esta matriz se forma a partir de la matriz [VV], las columnas 1 y 2 son las coordenadas en "x" y las columnas 3 y 4 son las coordenadas en "y", por lo tanto se toma el rango de operación de cada vértice.

$$[R] = \begin{bmatrix} 35.46 & 35.46 & -31.18 & 25.39 \\ 35.46 & 49.65 & 25.39 & 39.47 \\ 49.65 & 106.38 & 39.47 & 39.32 \\ 106.38 & 120.57 & 39.32 & 25.12 \\ 120.57 & 63.83 & 25.12 & 25.30 \\ 63.83 & 92.20 & 25.30 & -3.08 \\ 92.20 & 78.01 & -3.08 & -17.07 \\ 78.01 & 49.65 & -17.07 & 11.19 \\ 49.65 & 49.65 & 11.19 & -45.38 \\ 49.65 & 35.46 & -45.38 & -31.18 \end{bmatrix}$$

## 9.- Formación de la Matriz [ECC]

Esta matriz es de las ecuaciones de los lados de la columna. La matriz [ECC] es de  $N \times 3$  donde la primera columna es a, la segunda b y la tercera c, la ecuación es igualada a cero y es de la forma.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$ax + by + c = 0$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m(x - x_1) = y - y_1$$

Como ejemplo del lado 1 tenemos

$$m = \frac{25.39 + 31.18}{35.46 - 35.46} = \frac{56.27}{0} = \infty$$

$$y + 31.18 = \infty (x - 35.46)$$

$$y + 31.18 = \infty x - 50$$

$$x = 35.46$$

$$x - 35.46 = 0$$

$$[ECC] = \begin{bmatrix} 1 & 10000 & 35.46 \\ -0.99 & 1 & 9.72 \\ .003 & 1 & -39.62 \\ 1 & 1 & -145.70 \\ .003 & 1 & -25.48 \\ 1 & 1 & -89.13 \\ -0.99 & 1 & 95.28 \\ 1 & 1 & -60.94 \\ 1 & 10000 & -49.65 \\ 1 & 1 & -4.27 \end{bmatrix}$$



#### 10.- Formación de la matriz [RR] $n \times 4$

Esta matriz se forma a partir de la matriz [R] y consiste en obtener los rangos de los lados de la columna que quedan sobre el eje neutro propuesto. Se hace cero el negativo y se evalúa su correspondiente "Y".

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$[RR] = \begin{bmatrix} 35.46 & 35.46 & 0 & 25.39 \\ 35.46 & 49.65 & 25.39 & 39.47 \\ 49.65 & 106.38 & 39.47 & 39.32 \\ 106.38 & 120.57 & 39.32 & 25.12 \\ 120.57 & 63.83 & 25.12 & 25.30 \\ 63.83 & 89.13 & 25.30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 60.94 & 49.65 & 0 & 11.19 \\ 49.65 & 49.65 & 11.19 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

11.- Obtención del centroide geométrico de la columna

$X = \frac{EAX}{EA}$      $X = 30$     Transformación de coordenadas del centroide

|                | AREAS             | X     | Y     | Ax                  | Ay                     |
|----------------|-------------------|-------|-------|---------------------|------------------------|
| A <sub>1</sub> | (60)(100)=6000    | 30.00 | 50.00 | 180000              | 300000                 |
| A <sub>2</sub> | (40)(40)/2 = -800 | 13.33 | 13.33 | -10664              | -10664                 |
| A <sub>3</sub> | (40)(40)/2 = -800 | 46.67 | 26.67 | -37336              | -21333.6               |
| A <sub>4</sub> | (40)(40)/2 = -800 | 13.33 | 86.66 | -10664              | -69333.6               |
| A <sub>5</sub> | (40)(40)/2 = -800 | 46.67 | 73.33 | -37336              | -58664                 |
|                | $\Sigma A = 2800$ |       |       | $\Sigma Ax = 84000$ | $\Sigma Ay = 140004.8$ |



$$\bar{x} = \frac{\sum Ax}{\sum A} = \frac{84000}{2800} = 30cm$$

$$\bar{y} = \frac{\sum Ay}{\sum A} = \frac{140004.8}{2800} = 50cm$$

12.- Obtención del centroide plástico.

Obtención de  $\bar{x}, \bar{y}$

$$\bar{y} = \frac{0.85(2800)(350)(50) + (4200)(5)(10 + 50 + 50 + 90)}{0.85(2800)(350) + (4200)(5)(4)}$$

$$\bar{y} = 50 \text{ cm}$$

$$\bar{x} = \frac{0.85(2800)(350)(30) + (4200)(5)(40 + 10 + 50 + 40)}{0.85(2800)(350) + (4200)(5)(4)}$$

$$\bar{x} = 30.46 \text{ cm}$$

Transformación con respecto al eje neutro de las coordenadas de centroide plástico.

Obtención de  $\bar{x}_m, \bar{y}_m$

$$30.46 = \bar{x}_m \cos 45^\circ - \bar{y}_m \sin 45^\circ (\cos 45^\circ)$$

$$50 = \bar{x}_m \sin 45^\circ + \bar{y}_m \cos 45^\circ - 10(\sin 45^\circ)$$

$$\bar{x}_m = 63.96 \text{ cm}$$

$$\bar{y}_m = 20.88 \text{ cm}$$

13.- Obtención del centroide del área de compresión.

|                | AREAS                      | X      | Y     | Ax       | Ay       |
|----------------|----------------------------|--------|-------|----------|----------|
| A <sub>1</sub> | = (14.19) (25.39) = 360.28 | 42.56  | 12.70 | 15333.51 | 4575.56  |
| A <sub>2</sub> | (14.08) (14.19)/2 = 99.90  | 44.92  | 30.08 | 4487.51  | 3004.99  |
| A <sub>3</sub> | (14.11) (14.18) = 200.08   | 56.74  | 18.25 | 11352.54 | 3651.46  |
| A <sub>4</sub> | (56.73) (14.08) = 798.76   | 78.02  | 32.43 | 62319.25 | 25903.79 |
| A <sub>5</sub> | (14.19) (14.08) = 99.90    | 111.11 | 30.08 | 11099.89 | 3004.99  |
| A <sub>6</sub> | (11.29) (11.19)/2 = 63.17  | 57.17  | 7.46  | 3611.43  | 471.25   |
| A <sub>7</sub> | (2.89) (11.19) = 32.34     | 62.38  | 5.60  | 2017.37  | 181.10   |
| A <sub>8</sub> | = (25.3) (25.3)/2 = 320.05 | 72.26  | 8.43  | 23126.81 | 2698.02  |

$$\Sigma A = 1,974.48 = A_c$$

$$EA_y = 43,491.16$$

$$EA_x = 133,348.32$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

$$\bar{y} = \frac{\sum Ay}{\sum A} = \frac{43491.16}{1974.48} = 22.03 \text{ cm}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum Ax}{\sum A} = \frac{133348.42}{1974.48} = 67.53 \text{ cm}$$

Con respecto al eje neutro  $y_1 = 22.03 + 9.87 = 31.9 \text{ cm}$

#### 14.- Obtención de la fuerza del concreto (Cc)

$$Cc = (0.85) (Ac) (fc)$$

$$Cc = (0.85) (1974.48) (350)$$

$$Cc = 587,407.8 \text{ Kg}$$

#### 15.- Deformaciones del acero y sus fuerzas.

##### Varilla 1

$$\frac{0.003}{49.34} = \frac{\epsilon s_1}{-14.27}$$

$$\epsilon s_1 = -8676530199 \times 10^{-4}$$

$$fs_1 = (-0.000867653) (2.1 \times 10^6) = -1821 \text{ kg/cm}^2 > -4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$T_1 = (1821) (5) = -9105 \text{ Kg}$$

##### Varilla 2

$$\frac{0.003}{49.34} = \frac{\epsilon s_2}{35.20}$$

$$\epsilon s_2 = 0.00214$$

$$fs_2 = (0.00214) (2.1 \times 10^6) = 4,494.53 \text{ kg/cm}^2 > 4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$T_2 = (4200) (5) = 21,000 \text{ kg.}$$

##### Varilla 3

$$\frac{0.003}{49.34} = \frac{\epsilon s_3}{6.84}$$



$$\epsilon s_3 = 0.0004158897$$

$$fs_3 = (0.0004158897) (2.1 \times 10^6) = 873.37 \text{ kg/cm}^2 < 4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$T_3 = (873.37) (5) = 4366.84 \text{ kg}$$

#### Varilla 4

$$\frac{0.003}{49.34} = \frac{\epsilon s_4}{42.13}$$

$$\epsilon s_4 = 0.002562$$

$$fs_4 = (0.002562)(2.1 \times 10^6) = 5379.39 \text{ kg/cm}^2 > 4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$T_4 = (4200) (5) = 21,000 \text{ kg}$$

16.- Obtención de la carga axial.

$$P_x = C_c + T_1 + T_2 + T_3 + T_4$$

$$P_x = 587,407.8 - 9105 + 21,000 + 4366.84 + 21,000$$

$$P_x = 624,669.64 \text{ Kg.}$$

$$M = M_c + M_{s_1} + M_{s_2} + M_{s_3} + M_{s_4}$$

$$M = 6;279,389.4 + 323,074.56 + 293,790 + 62,751.52$$

$$M = 7;419,325.46 \text{ Kg.cm}$$

17. Obtención del Mux' y Muy'

$$Mux' = (587408)(11.02) + (9105)(35.15) + (21000)(14.32) - (4366.84)(14.04) + (21000)(21.15) = 7478726.5 \text{ Kg-cm}$$

$$M_{uy'} = (587408)(3057) + (9105)(21.41) - (21000)(14.31) + (4366)(14.05) + (21000)(35.33) = 2794758.7 \text{ Kg-cm}$$

$$M_x = (7478726.5)(\cos 45^\circ) + (2794758.7)(\cos 45^\circ) = 7264496.28 \text{ Kg-cm}$$

$$M_y = (-7478726.5)(\sin 45^\circ) + (2794758.7)(\sin 45^\circ) = -3312020.1 \text{ Kg-cm}$$

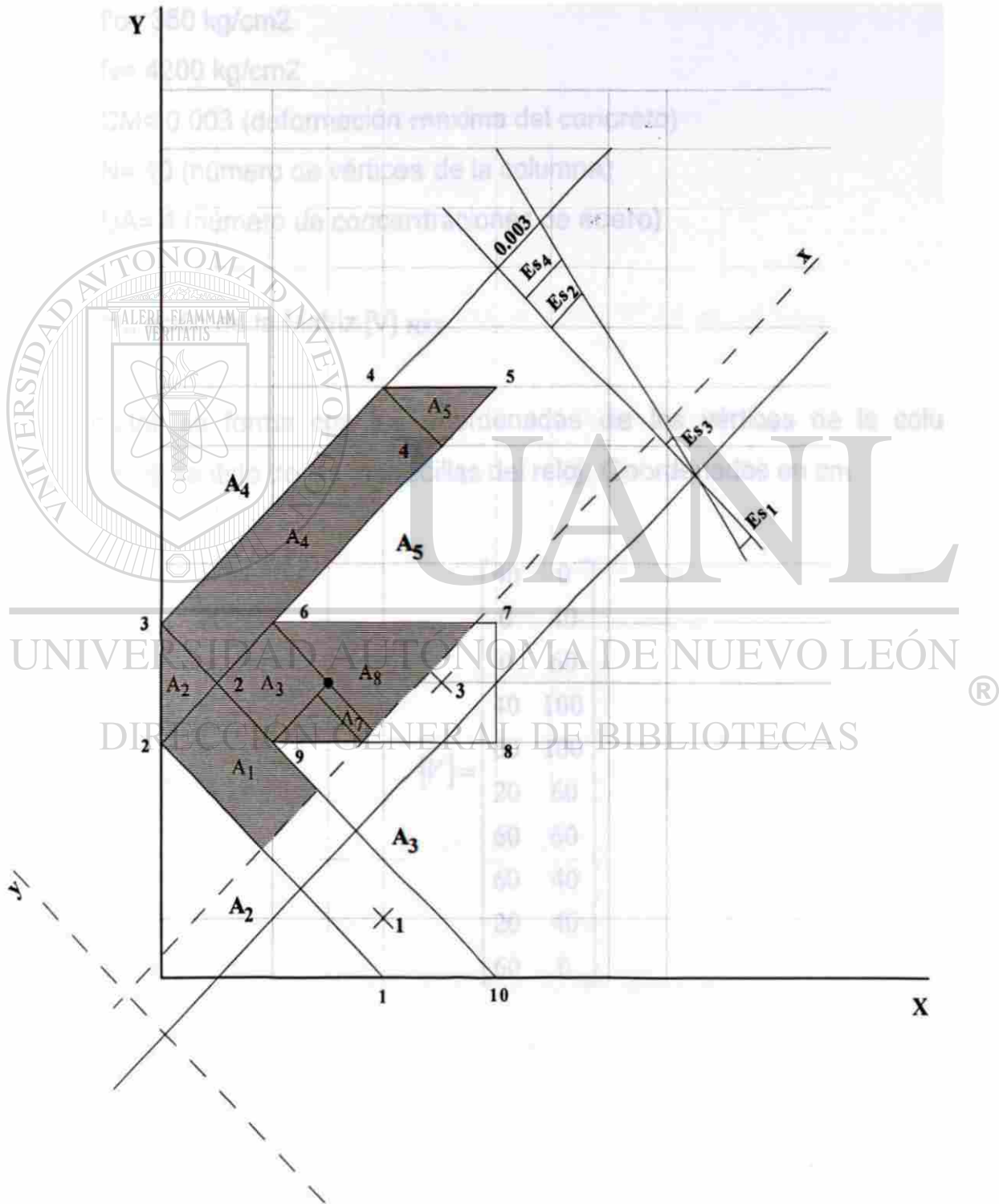


Fig. 6.7 Sección de la columna.

## 6.5 Ciclo V

Se propone un ciclo para la sección mostrada en el figura 6.8, suponiendo un eje neutro con origen en  $y=20$  cm y una inclinación de  $45^\circ$  con respecto a la horizontal.

$$f_c = 350 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$CM = 0.003 \text{ (deformación máxima del concreto)}$$

$$N = 10 \text{ (número de vértices de la columna)}$$

$$UA = 4 \text{ (número de concentraciones de acero)}$$

### 1.- Formulación de la Matriz $[V]_{N \times 2}$

Esta matriz se forma con las coordenadas de los vértices de la columna siguiendo el sentido de las manecillas del reloj. Coordenadas en cm.

$$[V] = \begin{bmatrix} 40 & 0 \\ 0 & 40 \\ 0 & 60 \\ 40 & 100 \\ 60 & 100 \\ 20 & 60 \\ 60 & 60 \\ 60 & 40 \\ 20 & 40 \\ 60 & 0 \end{bmatrix}$$

## 2.- Formulación de las matrices $[NA]_{UA \times 2}$ y $[SA]_{UA}$

La matriz  $[NA]$  se forma con las coordenadas de ubicación del acero de refuerzo, y el vector  $[SA]$  con el área de acero de cada ubicación.

$$[NA] = \begin{bmatrix} 40 & 10 \\ 10 & 50 \\ 50 & 50 \\ 40 & 90 \end{bmatrix} \quad [SA] = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Coordenadas en cm. cm<sup>2</sup>

## 3.- Obtención de la máxima coordenada en "X" y "Y" de los vértices.

$$X_{ME} = 0 \text{ cm}$$

$$X_{MA} = 60 \text{ cm}$$

$$Y_{ME} = 0 \text{ cm}$$

$$Y_{MA} = 100 \text{ cm}$$

## 4.- Obtención de coordenadas cuando el eje neutro propuesto cruza el eje "y".

Para este cálculo, se propone un eje neutro con origen en  $x = 0 \text{ cm}$   $y = 20 \text{ cm}$  y una inclinación de  $45^\circ$  con respecto a la horizontal.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$m = \tan \theta$$

$$m = \tan 45^\circ$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = 1$$

evaluando  $m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$  con  $X_1 = 0 \text{ cm}$  y  $Y_1 = 20 \text{ cm}$ , tenemos:

$$m(x - x_1) = y - y_1$$

$$(x - 0) = y - 20$$

$$x = y - 20 \quad \text{cuando } x = 0$$

$$0 = y - 20$$

$$y = 20 \text{ cm}$$

## 5.- Transformación de coordenadas de vértices y ubicaciones de acero.

Transformación de coordenadas mediante una traslación (hacia  $x = 0$  y  $y = 20$ ) y una rotación ( $\theta = 45^\circ$ )

La transformación se logra mediante:

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta + h$$

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta + k$$

donde:  $\theta =$  ángulo de rotación

$x, y =$  coordenadas del sistema original

$x', y' =$  coordenadas del sistema final

$h, k =$  coordenadas del nuevo origen

Por lo tanto  $h = 0$  cm      y       $k = 20$  cm ;  $\theta = 45^\circ$

a) Para el primer vértice  $x = 40$  cm       $y = 0$  cm

$$40 = x' \cos 45^\circ - y' \sin 45^\circ + 0$$

$$0 = x' \sin 45^\circ + y' \cos 45^\circ + 20$$

$$x' = 14.18 \text{ cm}$$

$$y' = -42.47 \text{ cm}$$

b) Para el segundo vértice  $x = 0$  cm       $y = 40$  cm

$$0 = x' \cos 45^\circ - y' \sin 45^\circ + 0$$

$$40 = x' \sin 45^\circ + y' \cos 45^\circ + 20$$

$$x' = 14.18 \text{ cm}$$

$$y' = 14.10 \text{ cm}$$

c) Para el tercer vértice  $x = 0$  cm       $y = 60$  cm

$$0 = x' \cos 45^\circ - y' \sin 45^\circ + 0$$

$$60 = x' \sin 45^\circ + y' \cos 45^\circ + 20$$

$$x' = 28.37 \text{ cm}$$

$$y' = 28.28 \text{ cm}$$

d) Para el cuarto vértice  $x = 40$  cm       $y = 100$  cm

$$40 = x' \cos 45^\circ - y' \sin 45^\circ + 0$$

$$100 = x' \sin 45^\circ + y' \cos 45^\circ + 20$$

$$x' = 85.11 \text{ cm}$$

$$y' = 28.03 \text{ cm}$$

e) Para el quinto vértice  $x = 60$  cm       $y = 100$  cm

$$60 = x' \cos 45^\circ - y' \sin 45^\circ + 0$$

$$100 = x' \sin 45^\circ + y' \cos 45^\circ + 20$$

$$x' = 99.29 \text{ cm}$$

$$y' = 13.84 \text{ cm}$$

f) Para el sexto vértice  $x = 20$  cm       $y = 60$  cm

$$20 = x' \cos 45^\circ - y' \sin 45^\circ + 0$$

$$60 = x' \sin 45^\circ + y' \cos 45^\circ + 20$$

$$x' = 42.55 \text{ cm}$$

$$y' = 14.01 \text{ cm}$$

g) Para el séptimo vértice  $x = 60$  cm       $y = 60$  cm

$$60 = x' \cos 45^\circ - y' \sin 45^\circ + 0$$

$$60 = x' \sin 45^\circ + y' \cos 45^\circ + 20$$

$$x' = 70.92 \text{ cm}$$

$$y' = -14.35 \text{ cm}$$

h) Para el octavo vértice  $x = 60$  cm       $y = 40$  cm

$$60 = x' \cos 45^\circ - y' \sin 45^\circ + 0$$

$$40 = x' \sin 45^\circ + y' \cos 45^\circ + 20$$

$$x' = 56.74 \text{ cm}$$

$$y' = -28.45 \text{ cm}$$

i) Para el noveno vértice  $x = 20$  cm       $y = 40$  cm

$$20 = x' \cos 45^\circ - y' \sin 45^\circ + 0$$

$$40 = x' \sin 45^\circ + y' \cos 45^\circ + 20$$

$$x' = 28.37 \text{ cm}$$

$$y' = 0 \text{ cm}$$

j) Para el décimo vértice  $x = 60$  cm       $y = 0$  cm

$$60 = x' \cos 45^\circ - y' \sin 45^\circ + 0$$

$$0 = x' \sin 45^\circ + y' \cos 45^\circ + 20$$

$$x' = 28.37 \text{ cm}$$

$$y' = -56.57 \text{ cm}$$

Con estos datos se conforma la matriz  $[VV]_{10 \times 2}$

$$[VV] = \begin{bmatrix} 14.18 & -42.47 \\ 14.18 & 14.10 \\ 28.37 & 28.28 \\ 85.11 & 28.03 \\ 49.29 & 13.84 \\ 42.55 & 14.01 \\ 70.92 & -14.35 \\ 56.74 & -28.45 \\ 28.37 & 0 \\ 28.37 & -57.57 \end{bmatrix}$$

Transformación de coordenadas del acero de refuerzo.

a) Para la primer varilla  $x = 40 \text{ cm}$   $y = 10 \text{ cm}$

$$40 = x' \cos 45^\circ - y' \sin 45^\circ + 0$$

$$10 = x' \sin 45^\circ + y' \cos 45^\circ + 20$$

$$x' = 21.28 \text{ cm}$$

$$y' = -35.43 \text{ cm}$$

b) Para la segunda varilla  $x = 10 \text{ cm}$   $y = 50 \text{ cm}$

$$10 = x' \cos 45^\circ - y' \sin 45^\circ + 0$$

$$50 = x' \sin 45^\circ + y' \cos 45^\circ + 20$$

$$x' = 28.37 \text{ cm}$$

$$y' = 14.14 \text{ cm}$$



c) Para la tercer varilla  $x = 50 \text{ cm}$   $y = 50 \text{ cm}$

$$50 = x' \cos 45^\circ - y' \sin 45^\circ + 0$$

$$50 = x' \sin 45^\circ + y' \cos 45^\circ + 20$$

$$x' = 56.74 \text{ cm}$$

$$y' = -14.31 \text{ cm}$$

d) Para la cuarta varilla  $x = 40 \text{ cm}$   $y = 90 \text{ cm}$

$$40 = x' \cos 45^\circ - y' \sin 45^\circ + 0$$

$$90 = x' \sin 45^\circ + y' \cos 45^\circ + 20$$

$$x' = 78.01 \text{ cm}$$

$$y' = 20.99 \text{ cm}$$

Con estos datos se conforma la matriz  $[NNA]_{4 \times 2}$

$$[NNA] = \begin{bmatrix} 21.28 & -35.43 \\ 28.37 & 14.14 \\ 56.74 & -14.31 \\ 78.01 & 20.99 \end{bmatrix}$$

## 6.- Cálculo de la altura del bloque rectangular de esfuerzos.

Distancia máxima perpendicular desde el eje neutro a la fibra más alejada (superior)

$$Y_{\max} = 28.28 \text{ cm} \quad \text{DCP} = \text{distancia de corrección de la línea}$$

$$\beta = 0.8 \quad \text{eje neutro.}$$

$$\text{DCP} = Y_{\max} (1 - \beta)$$

$$= 28.28 (1 - 0.8)$$

$$= 28.28 (0.2)$$

$$= 5.656 \text{ cm}$$

## 7.- Formación de la matriz $[VV]$

Esta matriz se forma a partir de la matriz  $[VV]$  restándole a la columna de las "Y" la distancia DCP.

$$[VV]=\begin{bmatrix} 14.18 & -48.13 \\ 14.18 & 8.44 \\ 28.37 & 22.62 \\ 85.11 & 22.37 \\ 99.29 & 8.18 \\ 42.55 & 8.35 \\ 70.92 & -20.01 \\ 56.74 & -34.11 \\ 28.37 & -5.66 \\ 28.37 & -62.23 \end{bmatrix}$$



## 8.- Formación de la matriz de rangos $[R]_{NX4}$

Esta matriz se forma a partir de la matriz  $[VV]$ , las columnas 1 y 2 son las coordenadas en "X" y las columnas 3 y 4 son las coordenadas en "Y", por lo tanto se toma el rango de operación de cada vértice.

$$[R]=\begin{bmatrix} 14.18 & 14.18 & -48.13 & 8.44 \\ 14.18 & 28.37 & 8.44 & 22.62 \\ 28.37 & 85.11 & 22.62 & 22.37 \\ 85.11 & 99.29 & 22.37 & 8.18 \\ 99.29 & 42.55 & 8.18 & 8.35 \\ 42.55 & 70.92 & 8.35 & -20.01 \\ 70.92 & 56.74 & -20.01 & -34.11 \\ 56.74 & 28.37 & -34.11 & -5.66 \\ 28.37 & 28.37 & -5.66 & -62.23 \\ 28.37 & 14.18 & -62.23 & -48.13 \end{bmatrix}$$

## 9.- Formación de la matriz [ECC]

Esta matriz es de las ecuaciones de los lados de la columna. La matriz [ECC] es de  $n \times 3$  donde la primera columna son los valores de  $a$ , la segunda de  $b$  y la tercera de  $c$ , la ecuación es igualada a cero y es de la forma.

$$ax + by + c = 0$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Como ejemplo del lado 1 tenemos:

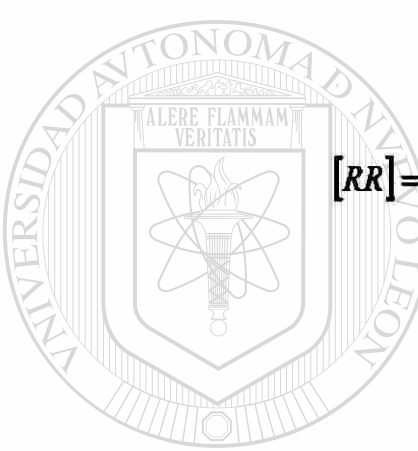
$$m = \frac{8.44 - 48.13}{14.18 - 14.18} = \infty$$

$$x = 14.18 \text{ cm}$$

$$[ECC] = \begin{bmatrix} 1 & 10000 & -14.18 \\ 0.9993 & -1 & -5.73 \\ 0.00441 & -1 & 22.745 \\ -1.0007 & -1 & 107.54 \\ 0.00299 & -1 & 18.477 \\ -0.9997 & -1 & 50.885 \\ 0.9944 & -1 & -90.529 \\ -1.0028 & -1 & 22.79 \\ -56.57 & -1 & 1599.23 \\ -0.9936 & -1 & -34.04 \end{bmatrix}$$

10.- Formación de la matriz  $[RR]_{N \times 4}$

Esta matriz se forma a partir de la matriz  $[R]$  y consiste en obtener los rangos de los lados de la columna que quedan sobre el eje neutro propuesto. Se hacen ceros todos los negativos y se evalúa su correspondiente "Y".



$$[RR] = \begin{bmatrix} 14.18 & 14.18 & 0 & 8.44 \\ 14.18 & 28.37 & 8.44 & 22.62 \\ 28.37 & 85.11 & 22.62 & 22.37 \\ 85.11 & 99.29 & 22.37 & 8.18 \\ 99.29 & 42.55 & 8.18 & 8.35 \\ 42.55 & 50.9 & 8.35 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

11.- Obtención del centroide geométrico de la columna. Para división de áreas ver fig. 6.8.

|                | AREAS                               | X     | Y     | Ax      | Ay        |
|----------------|-------------------------------------|-------|-------|---------|-----------|
| A <sub>1</sub> | A <sub>1</sub> = (60) (100) = 6000  | 30.00 | 50    | 180,000 | 300,000   |
| A <sub>2</sub> | A <sub>2</sub> = (40) (40)/2 = -800 | 13.33 | 13.33 | -10,664 | -10,664   |
| A <sub>3</sub> | A <sub>3</sub> = (40) (40)/2 = -800 | 46.67 | 26.67 | -37,336 | -21,333.6 |
| A <sub>4</sub> | A <sub>4</sub> = (40) (40)/2 = -800 | 13.33 | 86.66 | -10,664 | -69,333.6 |
| A <sub>5</sub> | A <sub>5</sub> = (40) (40)/2 = -800 | 46.67 | 73.33 | -37,336 | -58,664   |

$$\Sigma A = 2,800$$

$$\Sigma Ax = 84,000 \quad \Sigma Ay = 140,004.8$$

$$\bar{x} = \frac{\sum Ax}{\sum A} = \frac{84000}{2800} = 30 \text{ cm}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum Ay}{\sum A} = \frac{14004.8}{2800} = 50 \text{ cm}$$

12.- Obtención del centroide plástico de la sección.

$$\bar{x} = \frac{(0.85)(2800)(350)(30) + (4200)(5)(40 + 10 + 50 + 40)}{(0.85)(2800)(350) + (4200)(5)(4)}$$

$$\bar{x} = 30.458 \text{ cm}$$

$$\bar{y} = \frac{(0.85)(2800)(350)(50) + (4200)(5)(10 + 50 + 50 + 90)}{(0.85)(2800)(350) + (4200)(5)(4)}$$

$$\bar{y} = 50 \text{ cm}$$

Transformación con respecto a al eje neutro de las coordenadas del centroide plástico.

$$30.46 = x' \text{ Cos } 45^\circ - y' \text{ Sen } 45^\circ$$

$$50 = x' \text{ Sen } 45^\circ + y' \text{ Cos } 45^\circ + 20$$

$$x' = 42.75 \text{ cm}$$

$$y' = 0 \text{ cm}$$

13.- Obtención del centroide del área de compresión.

|                | AREAS                       | X     | Y      | Ax       | Ay       |
|----------------|-----------------------------|-------|--------|----------|----------|
| A <sub>1</sub> | (8.44) (28.37) = 239.4428   | 28.36 | 4.22   | 6790.52  | 1010.44  |
| A <sub>2</sub> | (14.19) (14.27)/2 = 101.24  | 33.1  | 13.196 | 3351.04  | 1336.04  |
| A <sub>3</sub> | (14.27) (56.74) = 809.6798  | 56.74 | 15.57  | 45941.24 | 12606.71 |
| A <sub>4</sub> | (8.35) (8.35)/2 = 34.86225  | 45.33 | 2.81   | 1580.20  | 97.6     |
| A <sub>5</sub> | (14.18) (14.19)/2 = 100.607 | 89.83 | 13.196 | 9036.90  | 1327.61  |

$$\Sigma A = 1285.83$$

$$\Sigma Ax = 66699.9 \quad \Sigma Ay = 16378.41$$

$$\bar{x} = \frac{\sum Ax}{\sum A} = \frac{66699.9}{1285.83} = 51.57 \text{ cm}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum Ay}{\sum A} = \frac{16378.41}{1285.83} = 12.737 \text{ cm}$$

Con respecto al eje neutro  $y_t = 12.7375 + 5.656 = 18.3935 \text{ cm}$

#### 14- Obtención de la fuerza del concreto (Cc)

$$C_c = (0.85) (A_c) (f_c)$$

$$C_c = (0.85) (12.85.8366) (350)$$

$$C_c = 382,536.3885 \text{ Kg.}$$

#### 15.- Deformación del acero y sus fuerzas

Varilla 1.

$$\frac{0.003}{28.28} = \frac{\epsilon_s}{-35.43}$$

$$\epsilon_s = 0.003758486563$$

$$f_{s1} = (0.003758486563) (2.1 \times 10^6) = -7892.82 \text{ kg/cm}^2 < 4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$T_1 = (-4200) (5) = 21,000 \text{ kg.}$$

Varilla 2

$$\frac{0.003}{28.28} = \frac{\epsilon_s}{14.14}$$

$$\epsilon_s = 0.0015$$

$$f_{s2} = (0.0015) (2.0 \times 10^6) = 3150 \text{ kg/cm}^2 < 4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$T_2 = (3150) (5) = 15,750 \text{ kg.}$$

### Varilla 3

$$\frac{0.003}{28.28} = \frac{\varepsilon_3}{-14.31}$$

$$\varepsilon_3 = -0.001518$$

$$f_{s3} = (-0.001518) (2.1 \times 10^6) = -3187.87 \text{ kg/cm}^2 > -4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$T_3 = (-3187.87) (5) = -15939.35644 \text{ kg.}$$

### Varilla 4

$$\frac{0.003}{28.28} = \frac{\varepsilon_4}{20.99}$$

$$\varepsilon_4 = 0.002226662$$

$$f_{s4} = (0.002226662) (2.1 \times 10^6) = 4675.99 \text{ kg/cm}^2 > 4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$T_4 = (4200) (5) = 21,000 \text{ kg.}$$

### 16.- Obtención de la carga axial y el momento

$$P_x = C_c + T_1 + T_2 + T_3 + T_4$$

$$P_x = 382,536.3885 - 39,464.10891 + 13,750 - 15,939.35644 + 21000$$

$$P_x = 363,882.9232$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

### 17.- Obtención de $M_{ux}'$ y $M_{uy}'$ .

$$M_{ux}' = (382536.4)(18.39) + (-21000)(-35.43) + (15751)(14.14) +$$

$$(-15939.35)(-14.31) + (21000)(20.99)$$

$$M_{ux}' = 8\,670\,461.49 \text{ kg-cm}$$

$$M_{uy}' = (382536.4)(8.178) + (-21000)(-21.47) + (15751)(14.38) +$$

$$(-15939.35)(13.99) + (21000)(35.26)$$

$$M_{uy}' = -3\,394\,271.87 \text{ kg-cm}$$

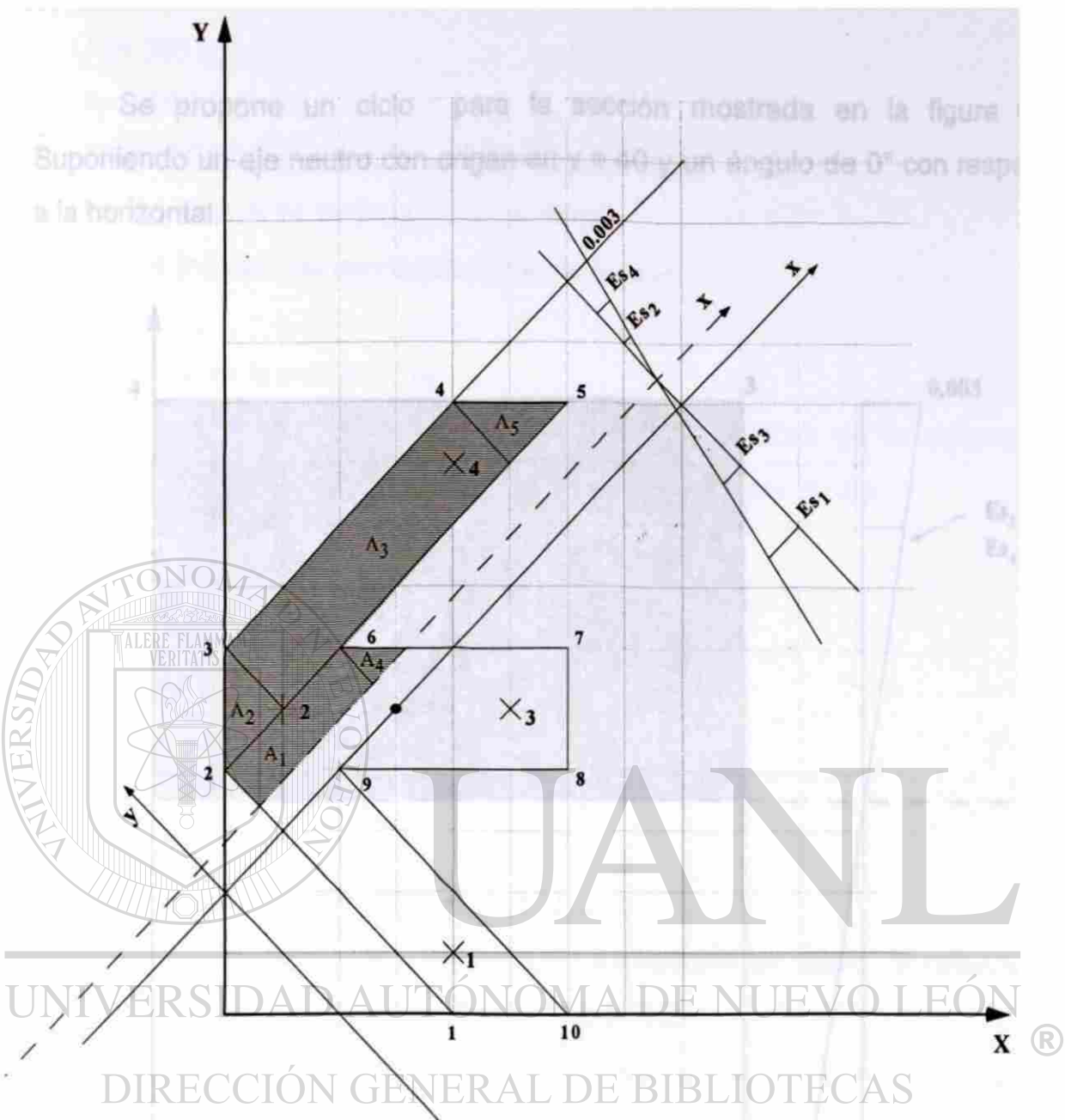


Fig. 6.8 Sección de la columna para el ciclo V.



## 6.6 CICLO VI

Se propone un ciclo para la sección mostrada en la figura 6.9. Suponiendo un eje neutro con origen en  $y = 40$  y un ángulo de  $0^\circ$  con respecto a la horizontal.

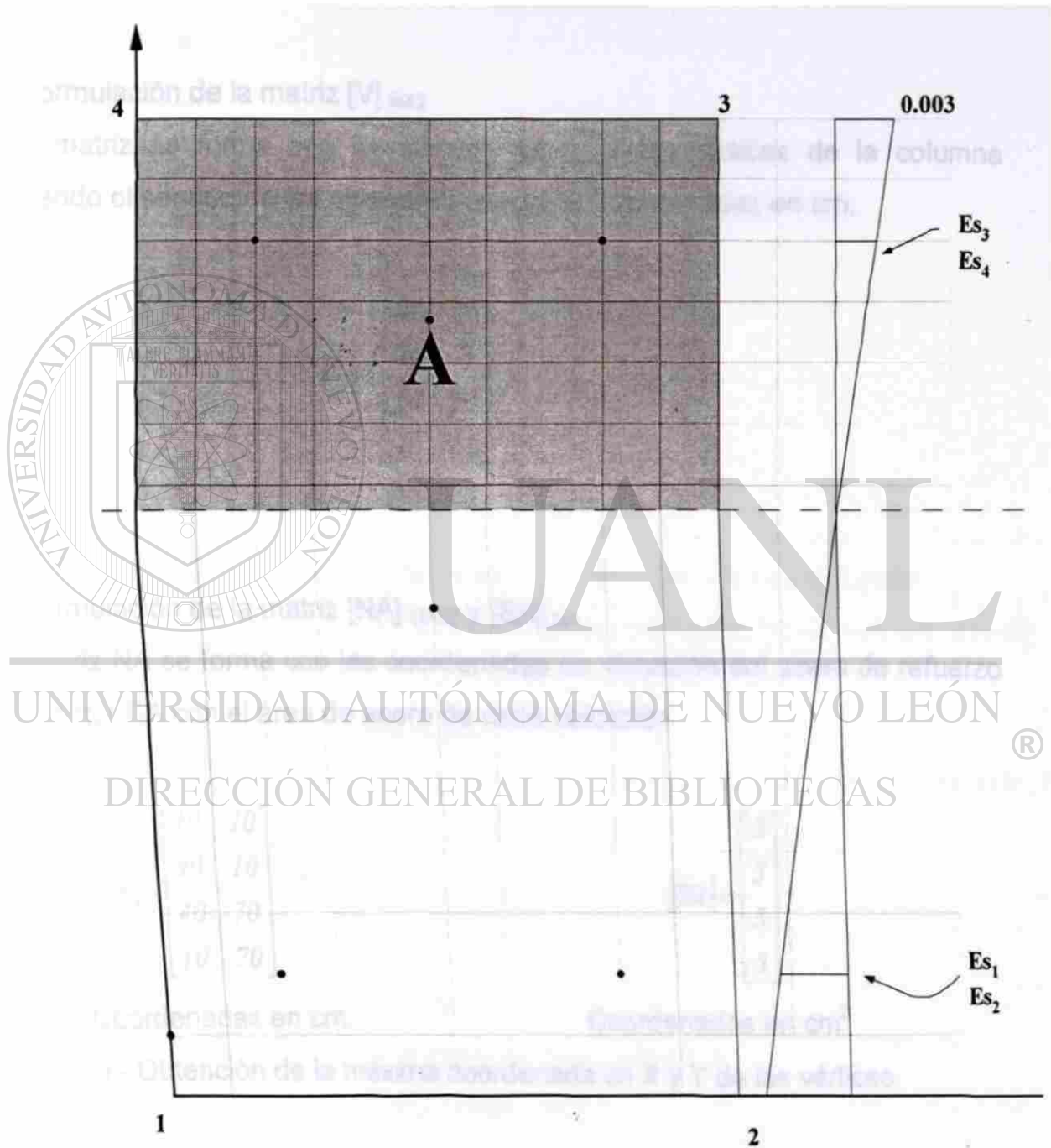


Fig. 6.9 Sección de la columna.

Datos:

$$f_c = 350 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

CM = 0.003 (deformación máxima del concreto)

N = 4 (número de vértices de la columna)

UA = 4 (número de concentraciones de acero)

### 1.- Formulación de la matriz $[V]_{N \times 2}$

Esta matriz se forma con las coordenadas de los vértices de la columna siguiendo el sentido de las manecillas del reloj. Coordenadas en cm.



$$[V] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 50 & 0 \\ 50 & 80 \\ 0 & 80 \end{bmatrix}$$

### 2.- Formulación de la matriz $[NA]_{UA \times 2}$ y $[SA]_{UA}$

La matriz NA se forma con las coordenadas de ubicación del acero de refuerzo y el vector SA con el área de acero de cada ubicación.

$$[NA] = \begin{bmatrix} 10 & 10 \\ 40 & 10 \\ 40 & 70 \\ 10 & 70 \end{bmatrix}$$

$$[SA] = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Coordenadas en cm.

Coordenadas en  $\text{cm}^2$

### 3.- Obtención de la máxima coordenada en X y Y de los vértices.

$$X_{ME} = 0 \text{ cm}$$

$$Y_{ME} = 0 \text{ cm}$$

$$X_{MA} = 50 \text{ cm}$$

$$Y_{MA} = 80 \text{ cm}$$

4.- Obtención de coordenadas cuando el eje neutro propuesto cruza el eje Y. Para este cálculo, se propone un eje neutro con origen en  $X=0$   $Y=40$  y una inclinación de  $0^\circ$  con respecto a lo horizontal.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \operatorname{tg} \theta$$

$$m = \operatorname{tg} 0^\circ$$

$$m = 0$$

Evaluando con  $x_1 = 0$  cm y  $y_1 = 40$  cm tenemos:

$$m(x - x_1) = y - y_1$$

$$0(x - 0) = y - 40$$

$$y = 40 \text{ cm}$$

5.- Transformación de coordenadas de vértices y ubicaciones de acero.

Transformación de coordenadas mediante una traslación (hacia  $x=0$  cm,  $y = 40$  cm) y una rotación ( $\theta = 0^\circ$ ).

La transformación se logra mediante.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$x = x' \operatorname{Cos} \theta - y' \operatorname{Sen} \theta + h$$

$$y = x' \operatorname{Sen} \theta + y' \operatorname{Cos} \theta + k$$

donde.  $\theta =$  ángulo de rotación

$x, y =$  coordenadas del sistema original

$x', y' =$  coordenadas del sistema final

$h, k =$  coordenadas del nuevo origen

Por lo tanto  $h = 0$  cm      y  $k = 40$  cm       $\theta = 0^\circ$

a) Para el primer vértice  $x = 0$  cm

$y = 0$  cm

$$0 = x'' \cos 0^\circ - y'' \sin 0^\circ + 0$$

$$0 = x'' \sin 0^\circ + y'' \cos 0^\circ + 40$$

$$x'' = 0 \text{ cm}$$

$$y'' = -40 \text{ cm}$$

b) Para el segundo vértice

$x = 50$  cm

$y = 0$  cm

$$50 = x'' \cos 0^\circ - y'' \sin 0^\circ + 0$$

$$0 = x'' \sin 0^\circ + y'' \cos 0^\circ + 40$$

$$x'' = 50 \text{ cm}$$

$$y'' = -40 \text{ cm}$$

c) Para el tercer vértice  $x = 50$  cm

$y = 80$  cm

$$50 = x'' \cos 0^\circ - y'' \sin 0^\circ + 0$$

$$80 = x'' \sin 0^\circ - y'' \cos 0^\circ + 40$$

$$x'' = 50 \text{ cm}$$

$$y'' = 40 \text{ cm}$$

d) Para el cuarto vértice  $x = 0$  cm

$y = 80$  cm

$$0 = x'' \cos 0^\circ - y'' \sin 0^\circ + 0$$

$$80 = x'' \sin 0^\circ + y'' \cos 0^\circ + 40$$

$$x'' = 0 \text{ cm}$$

$$y'' = 40 \text{ cm}$$

Con éstos datos se forma la matriz  $[V]_{N \times 2}$

$$[VV] = \begin{bmatrix} 0 & -40 \\ 50 & -40 \\ 50 & 40 \\ 0 & 40 \end{bmatrix}$$

Transformación de coordenadas del acero de refuerzo.

a) Para la primer varilla  $x = 10 \text{ cm}$   $y = 10 \text{ cm}$

$$10 = x' \cos 0^\circ - y' \sin 0^\circ + 0$$

$$10 = x' \sin 0^\circ + y' \cos 0^\circ + 40$$

$$x' = 10 \text{ cm}$$

$$y' = -30 \text{ cm}$$

b) Para la segunda varilla  $x = 40 \text{ cm}$   $y = 10 \text{ cm}$

$$40 = x' \cos 0^\circ - y' \sin 0^\circ + 0$$

$$10 = x' \sin 0^\circ + y' \cos 0^\circ + 40$$

$$x' = 40 \text{ cm}$$

$$y' = -30 \text{ cm}$$

c) Para la tercer varilla  $x = 40 \text{ cm}$   $y = 70 \text{ cm}$

$$40 = x' \cos 0^\circ - y' \sin 0^\circ + 0$$

$$70 = x' \sin 0^\circ + y' \cos 0^\circ + 40$$

$$x' = 40 \text{ cm}$$

$$y' = 30 \text{ cm}$$

d) Para la cuarta varilla  $x = 10 \text{ cm}$   $y = 70 \text{ cm}$

$$10 = x' \cos 0^\circ - y' \sin 0^\circ + 0$$

$$70 = x' \sin 0^\circ + y' \cos 0^\circ + 40$$

$$x' = 10 \text{ cm}$$

$$y' = 30 \text{ cm}$$

Con estos datos se conforma la matriz  $[NNA]_{UAX2}$

$$[NNA] = \begin{bmatrix} 10 & -30 \\ 40 & 30 \\ 40 & 30 \\ 10 & 30 \end{bmatrix}$$

6.- Cálculo de la altura del bloque rectangular de esfuerzos.

Distancia máxima perpendicular desde el eje neutro a la fibra más alejada (superior)

$Y_{Max} = 40$  DCP= Distancia de corrección de la línea eje neutro

$\beta = 0.80$  =  $Y_{max} (1-\beta)$

DCP =  $40 (1-0.8)$

=  $40 (0.2)$

= 8 cm

7.- Formación de la matriz  $[VVV]$

Esta matriz se forma a partir de la matriz  $[VV]$  restándole a la columna de las "y" la distancia DCP.

$$[VVV] = \begin{bmatrix} 0 & -48 \\ 50 & -48 \\ 50 & 32 \\ 0 & 32 \end{bmatrix}$$

## 8.- Formación de la matriz de rangos [R] $N \times 4$

Esta matriz se forma a partir de la matriz [VV], la columnas 1 y 2 son las coordenadas en X y las columnas 3 y 4 son las coordenadas en Y, por lo tanto se forma el rango de operación de cada vértice.

$$[R] = \begin{bmatrix} 0 & 50 & -48 & -48 \\ 50 & 50 & -48 & 32 \\ 50 & 0 & 32 & 32 \\ 0 & 0 & 32 & -48 \end{bmatrix}$$

## 9.- Formación de la matriz [ECC]

Esta matriz es de las ecuaciones de los lados de la columna. La matriz [ECC] es de  $N \times 3$ , donde la primera columna es a, la segunda b y la tercera c (a,b,c, son valores), la ecuación es igualada a cero y es de la forma.

$$ax + by + c = 0$$

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m(x - x_1) = y - y_1$$

Como ejemplo del lado 1 tenemos:

$$m = \frac{-48 + 48}{60 - 0}$$

$$m = 0$$

$$(x-50) = y + 48$$

$$0 = y + 48$$

$$-y - 48 = 0$$

$$[ECC] = \begin{bmatrix} x & y & b \\ 10000 & -1 & -48 \\ -1 & 10000 & +50 \\ 10000 & -1 & +32 \\ -1 & 10000 & 0 \end{bmatrix}$$

#### 10.- Formación de la matriz $[RR]_{NX4}$

Esta matriz se forma a partir de la matriz  $[R]$  y consiste en obtener los rangos de los lados de la columna que quedan sobre el eje neutro propuesto. Se hace cero el negativo y se evalúa su correspondiente "y".

$$[RR] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 & 32 \\ 50 & 0 & 32 & 32 \\ 0 & 0 & 32 & 0 \end{bmatrix}$$

#### 11.- Obtención del centroide de la columna.

$$\bar{X} = 25 \text{ cm}$$

Con respecto al eje neutro

$$\bar{Y} = 40 \text{ cm}$$



12.- Obtención del centroide plástico de la sección.

$$\bar{X} = \frac{(0.85)(4000)(350)(25) + (4200)(3)(5)(10 + 10 + 40 + 40)}{(0.85)(4000)(350) + (4200)(5)(4)}$$

$$\bar{X} = 25 \text{ cm}$$

$$\bar{Y} = \frac{(0.85)(4000)(40) + (4200)(5)(10 + 10 + 70 + 70)}{(0.85)(4000)(350) + (4200)(5)(4)}$$

$$\bar{Y} = 40 \text{ cm}$$

13.- Obtención del centroide del área de compresión.

$$\bar{X} = 25 \text{ cm}$$

Con respecto al eje neutro

$$\bar{Y} = 16 \text{ cm}$$

$$y_0 = 16 + \text{DCP}$$

$$Y_0 = 24 \text{ cm}$$

13.- Obtención de la fuerza del concreto (Cc)

$$C_c = (0.85) (A_c) (f'_c)$$

$$C_c = (0.85) (1600) (350)$$

$$C_c = 476,000 \text{ kg}$$

## 14.- Deformaciones del acero y sus fuerzas.

### Varilla 1

$$\frac{0.003}{40} = \frac{\epsilon_1}{-30}$$

$$\epsilon_{s1} = -0.00225$$

$$f_{s1} = (0.00225) (2.1 \times 10^6) = 4725 \text{ kgf/cm}^2 > 4200 \text{ kgf/cm}^2 \text{ usar } 4200 \text{ kgf/cm}^2$$

$$T_1 = (4200) (5) = -21,000 \text{ kgf.}$$

### Varilla 2

$$\frac{0.003}{40} = \frac{\epsilon_2}{-30}$$

$$\epsilon_{s2} = 0.00225$$

$$f_{s2} = (0.00225) (2.1 \times 10^6) = 4725 \text{ kgf/cm}^2 > 4200 \text{ kgf/cm}^2 \text{ usar } 4200 \text{ kgf/cm}^2$$

$$T_2 = (4200) (5) = -21,000 \text{ kgf.}$$

### Varilla 3

$$\frac{0.003}{40} = \frac{\epsilon_3}{-30}$$

$$\epsilon_{s3} = 0.00225$$

$$fs_3 = (0.00225) (2. \times 10^6) = 4725 \text{ kgf/cm}^2 > 4200 \text{ kgf/cm}^2 \text{ usar } 4200 \text{ kgf/cm}^2$$

$$T_3 = (4200) (5) = 21,000 \text{ kgf}$$

#### Varilla 4

$$\frac{0.003}{40} = \frac{\epsilon_s}{-30}$$

$$\epsilon_{s4} = 0.00225$$

$$fs_4 = (0.00225) (2.1 \times 10^6) = 4725 \text{ kgf/cm}^2 > 4200 \text{ kgf/cm}^2 \text{ usar } 4200 \text{ kgf/cm}^2$$

$$T_4 = (4200) (5) = 21,000 \text{ kgf.}$$

#### 15.- Obtención de la carga axial y el momento.

$$P_x = C_c + T_1 + T_2 + T_3 + T_4$$

$$P_x = 476,000 - 21,000 - 21,000 + 21,000 + 21,000$$

$$P_x = 476,000$$

#### 16.- Obtención de Mux' y Muy'

$$Mux' = (476,000)(24) + (21,000)(30) + (21,000)(30) + (21,000)(30) + (21,000)(30)$$

$$Muy' = (476,000)(0) + (21,000)(0) + (21,000)(0) + (21,000)(0) + (21,000)(0)$$

$$Muy' = 0$$

$$Mx = 13,944,000 \text{ kg-cm}$$

$$My = 0$$

## CAPITULO 7

### CORRIDA DE EJEMPLOS

#### CICLO I

ANALISIS DE COLUMNAS DE SECCION ARBITRARIA SOMETIDAS A FLEXION Y CARGA BIAxIAL

INICIA LECTURA DE DATOS

FAVOR DE DAR LOS DATOS DE LAS COORDENADAS DE LOS VERTICES A FAVOR DE LAS MANECILLAS DEL RELOJ

MATRIZ [SA]

5  
5  
5

XMA= 60

XME= 0

YMA= 60

YME= 0

MATRIZ [V]

|    |    |
|----|----|
| 20 | 0  |
| 0  | 20 |
| 0  | 50 |
| 10 | 50 |
| 10 | 60 |
| 40 | 60 |
| 60 | 10 |

MATRIZ [VV]

|          |           |
|----------|-----------|
| 20.03879 | -3.419686 |
| 8.084683 | 22.21426  |
| 18.34456 | 50.4053   |
| 27.74158 | 46.98534  |
| 31.16154 | 56.38236  |
| 59.35258 | 46.12248  |
| 61.04681 | -7.702511 |

MATRIZ [NA]

|    |    |
|----|----|
| 20 | 20 |
| 30 | 50 |
| 50 | 10 |

EL CENTROIDE PLASTICO ESTA A

EL AREA DE LA SECCION ES DE

LA MATRIZ [NNA]

|          |           |
|----------|-----------|
| 26.87871 | 15.37434  |
| 46.53561 | 40.14542  |
| 51.6498  | -4.282553 |

DGP= 11.27647

LA MATRIZ [VVV]

37.32917 22.2609

2600 CM2

CMS DEL EJE NEUTRO

20.03879 -14.69616  
 8.084683 10.93779  
 18.34456 39.12883  
 27.74158 35.70887  
 31.16154 45.10589  
 59.35258 34.84601  
 61.04681 -18.97898

**LA MATRIZ [EC]**

-2.144363 -1 28.27429  
 2.747697 -1 -11.27647  
 -.3639411 -1 45.80518  
 2.747697 -1 -40.51658  
 -.3639411 -1 56.44685  
 -31.76968 -1 1920.458  
 -.1044387 -1 -12.60333

**ESTA ES LA MATRIZ DE RANGOS DE OPERACION DE VERTICES R**

13.1854 8.084683 0 10.93779  
 8.084683 18.34456 10.93779 39.12883  
 18.34456 27.74158 39.12883 35.70887  
 27.74158 31.16154 35.70887 45.10589  
 31.16154 59.35258 45.10589 34.84601  
 59.35258 60.44941 34.84601 0

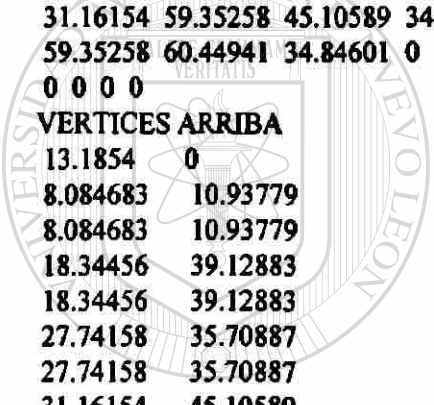
0 0 0 0

**VERTICES ARRIBA**

13.1854 0  
 8.084683 10.93779  
 8.084683 10.93779  
 18.34456 39.12883  
 18.34456 39.12883  
 27.74158 35.70887  
 27.74158 35.70887  
 31.16154 45.10589  
 31.16154 45.10589  
 59.35258 34.84601  
 59.35258 34.84601  
 60.44941 0

0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0

EL AREA EN COMPRESION DEL CONCRETO ES DE 1864.834 CM2  
 EL CENTRIODE DEL AREA EN COMPRESION X ES DE 35.92257 CM  
 EL CENTRIODE DEL AREA EN COMPRESION Y ES DE 30.42669 CM  
 PC= 554788.3  
 LA DEFORMACION DE LA VARILLA 1 ES DE 8.1804E-04  
 EL ESFUERZO DE LA VARILLA 1 ES DE 1717.884



U A N L

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



|                               |           |       |               |
|-------------------------------|-----------|-------|---------------|
| LA FUERZA DE LA VARILLA       | 1         | ES DE | 8589.421      |
| EL MOMENTO DE LA VARILLA MUX( | 1         | )=    | -59151.58     |
| EL MOMENTO DE LA VARILLA MUY( | 1         | )=    | -89763.39     |
| LA DEFORMACION DE LA VARILLA  | 2         | ES DE | 2.136063E-03  |
| EL ESFUERZO DE LA VARILLA     | 2         | ES DE | 4200          |
| LA FUERZA DE LA VARILLA       | 2         | ES DE | 21000         |
| EL MOMENTO DE LA VARILLA MUX( | 2         | )=    | 375574.9      |
| EL MOMENTO DE LA VARILLA MUY( | 2         | )=    | 193335.2      |
| LA DEFORMACION DE LA VARILLA  | 3         | ES DE | -2.278666E-04 |
| EL ESFUERZO DE LA VARILLA     | 3         | ES DE | -478.5199     |
| LA FUERZA DE LA VARILLA       | 3         | ES DE | -2392.6       |
| EL MOMENTO DE LA VARILLA MUX( | 3         | )=    | 63507.86      |
| EL MOMENTO DE LA VARILLA MUY( | 3         | )=    | -34263.52     |
| MOMENTO X DEL CONCRETO        | 4530284   |       |               |
| MOMENTO Y DEL CONCRETO        | -780365.7 |       |               |
| MOMENTO X                     | 4910215   |       |               |
| MOMENTO Y                     | -711057.4 |       |               |
|                               | 581985.1  |       |               |
| EL MOMENTO MX ES              | 4371489   |       |               |
| EL MOMENTO MY ES              | -2347649  |       |               |



# UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

## CICLO II

ANALISIS DE COLUMNAS DE SECCION ARBITRARIA SOMETIDAS A FLEXION  
Y CARGA BIAXIAL

INICIA LECTURA DE DATOS

FAVOR DE DAR LOS DATOS DE LAS COORDENADAS DE LOS VERTICES A FAVOR DE LAS  
MANECILLAS DEL RELOJ

MATRIZ [SA]

5

5

5

XMA= 60

XME= 0

YMA= 60

YME= 0

MATRIZ [V]

20 0

0 20

0 50

10 50

10 60

40 60

60 10

MATRIZ [VV]

20 0

0 20

0 50

10 50

10 60

40 60

60 10

MATRIZ [NA]

20 20

30 50

50 10

EL CENTROIDE PLASTICO ESTA A  $X_m= 27.46513$ ,  $Y_m=30.04533$  CMS DEL EJE NEUTRO

EL AREA DE LA SECCION ES DE 2600 CM2

LA MATRIZ [NNA]

20 20

30 50

50 10

DCP= 12

LA MATRIZ [VVV]

20 -12

0 8.000001

0 38

10 38

10 48

40 48

60 -1.999999

LA MATRIZ [EC]

-1 -1 8.000001

-1 10000 0

10000 -1 38

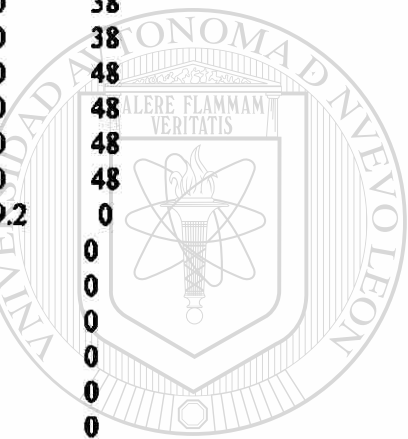
-1 10000 10  
 10000 -1 48  
 -2.5 -1 148  
 .25 -1 -17

ESTA ES LA MATRIZ DE RANGOS DE OPERACION DE VERTICES R

8.000001 0 0 8.000001  
 0 0 8.000001 38  
 0 10 38 38  
 10 10 38 48  
 10 40 48 48  
 40 59.2 48 0  
 0 0 0 0

VERTICES ARRIBA

8.000001 0  
 0 8.000001  
 0 8.000001  
 0 38  
 0 38  
 10 38  
 10 38  
 10 48  
 10 48  
 40 48  
 40 48  
 59.2 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



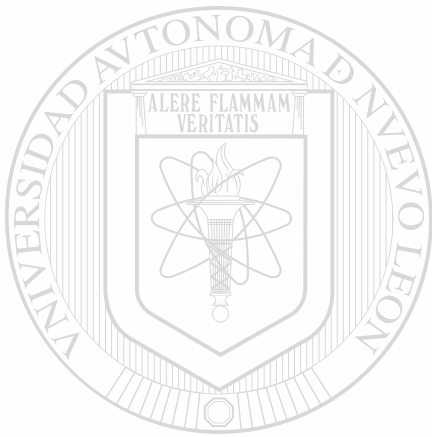
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

EL AREA EN COMPRESION DEL CONCRETO ES DE 2248.8 CM2  
 EL CENTRIODE DEL AREA EN COMPRESION X ES DE 26.32328 CM  
 EL CENTRIODE DEL AREA EN COMPRESION Y ES DE 33.8194 CM  
 PC= 669018.1

|                               |   |       |           |
|-------------------------------|---|-------|-----------|
| LA DEFORMACION DE LA VARILLA  | 1 | ES DE | .001      |
| EL ESFUERZO DE LA VARILLA     | 1 | ES DE | 2100      |
| LA FUERZA DE LA VARILLA       | 1 | ES DE | 10500     |
| EL MOMENTO DE LA VARILLA MUX( | 1 | )=    | -105475.9 |
| EL MOMENTO DE LA VARILLA MUY( | 1 | )=    | -78383.88 |
| LA DEFORMACION DE LA VARILLA  | 2 | ES DE | .0025     |
| EL ESFUERZO DE LA VARILLA     | 2 | ES DE | 4200      |
| LA FUERZA DE LA VARILLA       | 2 | ES DE | 21000     |
| EL MOMENTO DE LA VARILLA MUX( | 2 | )=    | 419048.1  |
| EL MOMENTO DE LA VARILLA MUY( | 2 | )=    | 53232.23  |
| LA DEFORMACION DE LA VARILLA  | 3 | ES DE | .0005     |
| EL ESFUERZO DE LA VARILLA     | 3 | ES DE | 1050      |
| LA FUERZA DE LA VARILLA       | 3 | ES DE | 5250      |



|                               |           |    |          |
|-------------------------------|-----------|----|----------|
| EL MOMENTO DE LA VARILLA MUX( | 3         | )- | -105238  |
| EL MOMENTO DE LA VARILLA MUY( | 3         | )- | 118308.1 |
| MOMENTO X DEL CONCRETO        | 2524923   |    |          |
| MOMENTO Y DEL CONCRETO        | -763921.8 |    |          |
| MOMENTO X                     | 2733257   |    |          |
| MOMENTO Y                     | -670765.4 |    |          |
|                               | 705768.1  |    |          |
| EL MOMENTO MX ES              | 2733791   |    |          |
| EL MOMENTO MY ES              | -670765.2 |    |          |



# UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

### CICLO III

ANALISIS DE COLUMNAS DE SECCION ARBITRARIA SOMETIDAS A FLEXION  
Y CARGA BIAXIAL

INICIA LECTURA DE DATOS

FAVOR DE DAR LOS DATOS DE LAS COORDENADAS DE LOS VERTICES A FAVOR DE LAS  
MANECILLAS DEL RELOJ

MATRIZ [SA]

5  
5  
5

XMA= 60

XME= 0

YMA= 60

YME= 0

MATRIZ [V]

20 0  
0 20  
0 50  
10 50  
10 60  
40 60  
60 10

MATRIZ [VV]

-20.2063 -5.003893  
7.115623 -12.31914  
22.12063 -38.29701  
13.46134 -43.29868  
18.46301 -51.95797  
-7.514865 -66.96297  
-49.84179 -33.66986

MATRIZ [NA]

20 20  
30 50  
50 10

EL CENTROIDE PLASTICO ESTA A -11.64289 -34.75483 CMS DEL EJE NEUTRO

EL AREA DE LA SECCION ES DE 2600 CM2

LA MATRIZ [NNA]

-10.20296 -22.32247  
-3.857243 -53.30201  
-41.1825 -28.66819

DCP= 0

LA MATRIZ [VVV]

-20.2063 -5.003893  
7.115623 -12.31914  
22.12063 -38.29701  
13.46134 -43.29868  
18.46301 -51.95797  
-7.514865 -66.96297  
-49.84179 -33.66986

LA MATRIZ [EC]

-2.677427 -1 -10.41398  
-1.73128 -1 6.633245E-07  
.577607 -1 -51.07404

UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



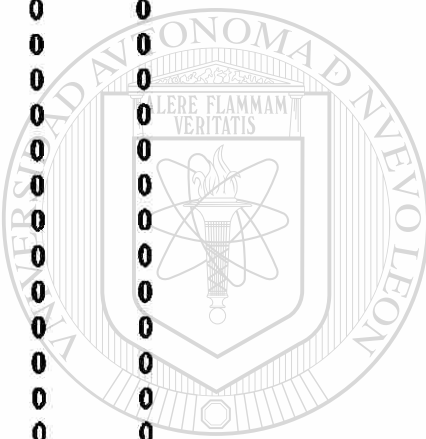
-1.73128 -1 -19.99333  
 .5776073 -1 -62.62233  
 -.7865707 -1 -72.87395  
 .9672849 -1 14.54135

ESTA ES LA MATRIZ DE RANGOS DE OPERACION DE VERTICES R

0 0 0 0  
 0 0 0 0  
 0 0 0 0  
 0 0 0 0  
 0 0 0 0  
 0 0 0 0  
 0 0 0 0  
 0 0 0 0

VERTICES ARRIBA

0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0



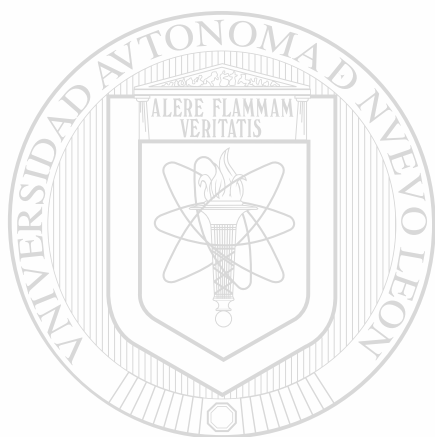
U A N L

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

EL AREA EN COMPRESION DEL CONCRETO ES DE 0 CM2  
 EL CENTRIODE DEL AREA EN COMPRESION X ES DE 0 CM  
 EL CENTRIODE DEL AREA EN COMPRESION Y ES DE 0 CM  
 PC= 0  
 LA DEFORMACION DE LA VARILLA 1 ES DE 0  
 EL ESFUERZO DE LA VARILLA 1 ES DE 0  
 LA FUERZA DE LA VARILLA 1 ES DE 0  
 EL MOMENTO DE LA VARILLA MUX( 1 )= 0  
 EL MOMENTO DE LA VARILLA MUY( 1 )= 0  
 LA DEFORMACION DE LA VARILLA 2 ES DE 0  
 EL ESFUERZO DE LA VARILLA 2 ES DE 0  
 LA FUERZA DE LA VARILLA 2 ES DE 0  
 EL MOMENTO DE LA VARILLA MUX( 2 )= 0  
 EL MOMENTO DE LA VARILLA MUY( 2 )= 0  
 LA DEFORMACION DE LA VARILLA 3 ES DE 0  
 EL ESFUERZO DE LA VARILLA 3 ES DE 0  
 LA FUERZA DE LA VARILLA 3 ES DE 0

|                               |   |   |   |
|-------------------------------|---|---|---|
| EL MOMENTO DE LA VARILLA MUX( | 3 | ) | 0 |
| EL MOMENTO DE LA VARILLA MUY( | 3 | ) | 0 |
| MOMENTO X DEL CONCRETO        | 0 |   |   |
| MOMENTO Y DEL CONCRETO        | 0 |   |   |
| MOMENTO X                     | 0 |   |   |
| MOMENTO Y                     | 0 |   |   |
| 0                             |   |   |   |
| EL MOMENTO MX ES              | 0 |   |   |
| EL MOMENTO MY ES              | 0 |   |   |



# UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

## CICLO IV

ANALISIS DE COLUMNAS DE SECCION ARBITRARIA SOMETIDAS A FLEXION  
Y CARGA BIAXIAL

INICIA LECTURA DE DATOS

FAVOR DE DAR LOS DATOS DE LAS COORDENADAS DE LOS VERTICES A FAVOR DE LAS  
MANECILLAS DEL RELOJ

MATRIZ [SA]

5  
5  
5  
5

XMA= 60

XME= 0

YMA= 100

YME= 0

MATRIZ [V]

40 0  
0 40  
0 60  
40 100  
60 100  
20 60  
60 60  
60 40  
20 40  
60 0

MATRIZ [VV]

35.35657 -21.21116  
35.35329 35.35738  
49.49461 49.50034  
106.0632 49.50361  
120.2061 35.36229  
63.63757 35.35902  
91.92347 7.076389  
77.78216 -7.066571  
49.49625 21.21607  
49.49952 -35.35247

MATRIZ [NA]

40 10  
10 50  
50 50  
40 90

EL CENTROIDE PLASTICO ESTA A  
EL AREA DE LA SECCION ES DE

63.96227 20.89304 CMS DEL EJE NEUTRO  
2800 CM2

LA MATRIZ [NNA]

42.42722 -14.13968  
49.49543 35.3582  
77.78133 7.075571  
98.99249 42.43214

DCP= 9.900722

LA MATRIZ [VVV]

35.35657 -31.11188  
35.35329 25.45666

UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

®

49.49461 39.59962  
 106.0632 39.60289  
 120.2061 25.46157  
 63.63757 25.4583  
 91.92347 -2.824333  
 77.78216 -16.96729  
 49.49625 11.31535  
 49.49952 -45.2532

LA MATRIZ [EC]

-17283.34 -1 611048.4  
 1.000116 -1 -9.900734  
 5.779176E-05 -1 39.59676  
 -.9998843 -1 145.6538  
 5.785919E-05 -1 25.45462  
 -.9998842 -1 89.08849  
 1.000117 -1 -94.75852  
 -.9998843 -1 60.80587  
 -17283.34 -1 855471.7  
 -.9998843 -1 4.240596

ESTA ES LA MATRIZ DE RANGOS DE OPERACION DE VERTICES R

35.35477 35.35329 0 25.45666  
 35.35329 49.49461 25.45666 39.59962  
 49.49461 106.0632 39.59962 39.60289  
 106.0632 120.2061 39.60289 25.46157  
 120.2061 63.63757 25.46157 25.4583  
 63.63757 89.09881 25.4583 0  
 0 0 0 0  
 60.8129 49.49625 0 11.31535  
 49.49625 49.4969 11.31535 0  
 0 0 0 0

VERTICES ARRIBA

35.35477 0  
 35.35329 25.45666  
 35.35329 25.45666  
 49.49461 39.59962  
 49.49461 39.59962  
 106.0632 39.60289  
 106.0632 39.60289  
 120.2061 25.46157  
 120.2061 25.46157  
 63.63757 25.4583  
 63.63757 25.4583  
 89.09881 0  
 0 0  
 0 0  
 60.8129 0  
 49.49625 11.31535  
 49.49625 11.31535  
 49.4969 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0

UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
 DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



0 0

EL AREA EN COMPRESION DEL CONCRETO ES DE 1980.105 CM2  
 EL CENTRIODE DEL AREA EN COMPRESION X ES DE 67.36156 CM  
 EL CENTRIODE DEL AREA EN COMPRESION Y ES DE 31.9868 CM

PC= 589081.3

|                               |          |       |               |
|-------------------------------|----------|-------|---------------|
| LA DEFORMACION DE LA VARILLA  | 1        | ES DE | -8.568878E-04 |
| EL ESFUERZO DE LA VARILLA     | 1        | ES DE | -1799.464     |
| LA FUERZA DE LA VARILLA       | 1        | ES DE | -8997.322     |
| EL MOMENTO DE LA VARILLA MUX( | 1        | )     | 315200.6      |
| EL MOMENTO DE LA VARILLA MUY( | 1        | )     | 193757.8      |
| LA DEFORMACION DE LA VARILLA  | 2        | ES DE | 2.142765E-03  |
| EL ESFUERZO DE LA VARILLA     | 2        | ES DE | 4200          |
| LA FUERZA DE LA VARILLA       | 2        | ES DE | 21000         |
| EL MOMENTO DE LA VARILLA MUX( | 2        | )     | 303768.4      |
| EL MOMENTO DE LA VARILLA MUY( | 2        | )     | -303803.6     |
| LA DEFORMACION DE LA VARILLA  | 3        | ES DE | 4.287912E-04  |
| EL ESFUERZO DE LA VARILLA     | 3        | ES DE | 900.4615      |
| LA FUERZA DE LA VARILLA       | 3        | ES DE | 4502.308      |
| EL MOMENTO DE LA VARILLA MUX( | 3        | )     | -62210.48     |
| EL MOMENTO DE LA VARILLA MUY( | 3        | )     | 62217.68      |
| LA DEFORMACION DE LA VARILLA  | 4        | ES DE | 2.571457E-03  |
| EL ESFUERZO DE LA VARILLA     | 4        | ES DE | 4200          |
| LA FUERZA DE LA VARILLA       | 4        | ES DE | 21000         |
| EL MOMENTO DE LA VARILLA MUX( | 4        | )     | 452321.1      |
| EL MOMENTO DE LA VARILLA MUY( | 4        | )     | 735634.7      |
| MOMENTO X DEL CONCRETO        | 6535132  |       |               |
| MOMENTO Y DEL CONCRETO        | 2002462  |       |               |
| MOMENTO X                     | 7544212  |       |               |
| MOMENTO Y                     | 2690268  |       |               |
| 626586.3                      |          |       |               |
| EL MOMENTO MX ES              | 7235553  |       |               |
| EL MOMENTO MY ES              | -3430324 |       |               |

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

## CICLO V

ANALISIS DE COLUMNAS DE SECCION ARBITRARIA SOMETIDAS A FLEXION  
Y CARGA BIAxIAL

INICIA LECTURA DE DATOS

FAVOR DE DAR LOS DATOS DE LAS COORDENADAS DE LOS VERTICES A FAVOR DE LAS  
MANECILLAS DEL RELOJ

MATRIZ [SA]

5  
5  
5  
5

XMA= 60

XME= 0

YMA= 100

YME= 0

MATRIZ [V]

40 0  
0 40  
0 60  
40 100  
60 100  
20 60  
60 60  
60 40  
20 40  
60 0

MATRIZ [VV]

14.14459 -42.42559  
14.14132 14.14295  
28.28263 28.28591  
84.85118 28.28918  
98.99413 14.14786  
42.42559 14.14459  
70.71149 -14.13804  
56.57018 -28.281  
28.28427 1.636325E-03  
28.28754 -56.56691

MATRIZ [NA]

40 10  
10 50  
50 50  
40 90

EL CENTROIDE PLASTICO ESTA A  
EL AREA DE LA SECCION ES DE

42.75029 -3213911 CMS DEL EJE NEUTRO  
2800 CM2

LA MATRIZ [NNA]

21.21525 -35.35411  
28.28345 14.14377  
56.56936 -14.13886  
77.78052 21.2177

DCP= 5.657835

LA MATRIZ [VVV]

14.14459 -48.08343  
14.14132 8.485119

U A N L

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS





28.28263 22.62807  
 84.85118 22.63134  
 98.99413 8.490026  
 42.42559 8.486753  
 70.71149 -19.79588  
 56.57018 -33.93884  
 28.28427 -5.656199  
 28.28754 -62.22474

**LA MATRIZ [EC]**

-17283.34 -1 244417.7  
 1.000116 -1 -5.657835  
 5.779176E-05 -1 22.62644  
 -.9998844 -1 107.4727  
 5.784234E-05 -1 8.4843  
 -.9998844 -1 50.90744  
 1.000116 -1 -90.51558  
 -.9998844 -1 22.6248  
 -17283.34 -1 488841  
 -.9998839 -1 -33.94048

**ESTA ES LA MATRIZ DE RANGOS DE OPERACION DE VERTICES R**

14.14181 14.14132 0 8.485119  
 14.14132 28.28263 8.485119 22.62807  
 28.28263 84.85118 22.62807 22.63134  
 84.85118 98.99413 22.63134 8.490026  
 98.99413 42.42559 8.490026 8.486753  
 42.42559 50.91332 8.486753 0  
 0 0 0 0  
 0 0 0 0  
 0 0 0 0  
 0 0 0 0

**VERTICES ARRIBA**

14.14181 0  
 14.14132 8.485119  
 14.14132 8.485119  
 28.28263 22.62807  
 28.28263 22.62807  
 84.85118 22.63134  
 84.85118 22.63134  
 98.99413 8.490026  
 98.99413 8.490026  
 42.42559 8.486753  
 42.42559 8.486753  
 50.91332 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0

U A N L

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
 DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



0 0

EL AREA EN COMPRESION DEL CONCRETO ES DE 1276.033 CM2  
 EL CENTRIODE DEL AREA EN COMPRESION X ES DE 50.92806 CM  
 EL CENTRIODE DEL AREA EN COMPRESION Y ES DE 18.35931 CM

PC= 379619.9

LA DEFORMACION DE LA VARILLA 1 ES DE -3.749219E-03  
 EL ESFUERZO DE LA VARILLA 1 ES DE -4200  
 LA FUERZA DE LA VARILLA 1 ES DE -21000  
 EL MOMENTO DE LA VARILLA MUX( 1 )= 735687.1  
 EL MOMENTO DE LA VARILLA MUY( 1 )= 452235.9  
 LA DEFORMACION DE LA VARILLA 2 ES DE 1.499913E-03  
 EL ESFUERZO DE LA VARILLA 2 ES DE 3149.818  
 LA FUERZA DE LA VARILLA 2 ES DE 15749.09  
 EL MOMENTO DE LA VARILLA MUX( 2 )= 227813.2  
 EL MOMENTO DE LA VARILLA MUY( 2 )= -227839.5  
 LA DEFORMACION DE LA VARILLA 3 ES DE -1.499393E-03  
 EL ESFUERZO DE LA VARILLA 3 ES DE -3148.724  
 LA FUERZA DE LA VARILLA 3 ES DE -15743.62  
 EL MOMENTO DE LA VARILLA MUX( 3 )= 217537  
 EL MOMENTO DE LA VARILLA MUY( 3 )= -217562.2  
 LA DEFORMACION DE LA VARILLA 4 ES DE 2.250087E-03  
 EL ESFUERZO DE LA VARILLA 4 ES DE 4200  
 LA FUERZA DE LA VARILLA 4 ES DE 21000  
 EL MOMENTO DE LA VARILLA MUX( 4 )= 452321  
 EL MOMENTO DE LA VARILLA MUY( 4 )= 735634.8

MOMENTO X DEL CONCRETO 7091567

MOMENTO Y DEL CONCRETO 3104444

MOMENTO X 8724925

MOMENTO Y 3846913

379625.3

EL MOMENTO MX ES 8887664

EL MOMENTO MY ES -3446597



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

## CICLO VI

ANALISIS DE COLUMNAS DE SECCION ARBITRARIA SOMETIDAS A FLEXION  
Y CARGA BIAXIAL

INICIA LECTURA DE DATOS

FAVOR DE DAR LOS DATOS DE LAS COORDENADAS DE LOS VERTICES A FAVOR DE LAS  
MANECILLAS DEL RELOJ

MATRIZ [SA]

5  
5  
5  
5

XMA= 50

XME= 0

YMA= 80

YME= 0

MATRIZ [V]

0 0  
50 0  
50 80  
0 80

MATRIZ [VV]

0 -40  
50 -40  
50 40  
0 40

MATRIZ [NA]

10 10  
40 10  
40 70  
10 70

EL CENTROIDE PLASTICO ESTA A 25 0 CMS DEL EJE NEUTRO

EL AREA DE LA SECCION ES DE 4000 CM2

LA MATRIZ [NNA]

10 -30  
40 -30  
40 30  
10 30

DGP= 8

LA MATRIZ [VVV]

0 -48  
50 -48  
50 32  
0 32

LA MATRIZ [EC]

10000 -1 -48  
-1 10000 50  
10000 -1 32  
-1 10000 0

ESTA ES LA MATRIZ DE RANGOS DE OPERACION DE VERTICES R

0 0 0 0  
50 50 0 32  
50 0 32 32  
0 0 32 0

U A N L

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

®

**VERTICES ARRIBA**

0 0  
 0 0  
 50 0  
 50 32  
 50 32  
 0 32  
 0 32  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0  
 0 0

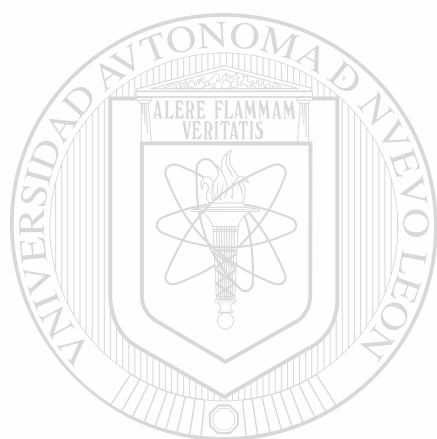
EL AREA EN COMPRESION DEL CONCRETO ES DE 1600 CM2  
 EL CENTRIODE DEL AREA EN COMPRESION X ES DE 25 CM  
 EL CENTRIODE DEL AREA EN COMPRESION Y ES DE 24 CM  
 PC= 476000

LA DEFORMACION DE LA VARILLA 1 ES DE -.00225  
 EL ESFUERZO DE LA VARILLA 1 ES DE -4200  
 LA FUERZA DE LA VARILLA 1 ES DE -21000  
 EL MOMENTO DE LA VARILLA MUX( 1 )= 630000  
 EL MOMENTO DE LA VARILLA MUY( 1 )= 315000  
 LA DEFORMACION DE LA VARILLA 2 ES DE -.00225  
 EL ESFUERZO DE LA VARILLA 2 ES DE -4200  
 LA FUERZA DE LA VARILLA 2 ES DE -21000  
 EL MOMENTO DE LA VARILLA MUX( 2 )= 630000  
 EL MOMENTO DE LA VARILLA MUY( 2 )= -315000  
 LA DEFORMACION DE LA VARILLA 3 ES DE .00225  
 EL ESFUERZO DE LA VARILLA 3 ES DE 4200  
 LA FUERZA DE LA VARILLA 3 ES DE 21000  
 EL MOMENTO DE LA VARILLA MUX( 3 )= 630000  
 EL MOMENTO DE LA VARILLA MUY( 3 )= 315000  
 LA DEFORMACION DE LA VARILLA 4 ES DE .00225  
 EL ESFUERZO DE LA VARILLA 4 ES DE 4200  
 LA FUERZA DE LA VARILLA 4 ES DE 21000  
 EL MOMENTO DE LA VARILLA MUX( 4 )= 630000  
 EL MOMENTO DE LA VARILLA MUY( 4 )= -315000  
 MOMENTO X DEL CONCRETO 1.1424E+07  
 MOMENTO Y DEL CONCRETO 0  
 MOMENTO X 1.3944E+07  
 MOMENTO Y 0  
 476000  
 EL MOMENTO MX ES 1.3944E+07  
 EL MOMENTO MY ES 0

## Corrida de Ejemplos.

Ahora en las páginas 162 a 166 se presenta la corrida general de la sección mostrada en la figura 6.9, página 133 con los mismos datos de entrada al programa del ciclo VI, la primera gráfica mostrada en para  $M_x$  vs  $P_x$  y las siguientes son de rebanadas del diagrama de interacción, para diferentes cargas axiales.

En la página 167, se presenta la corrida general para la sección mostrada en la figura 6.1 de la página 68, con los mismos datos de entrada.



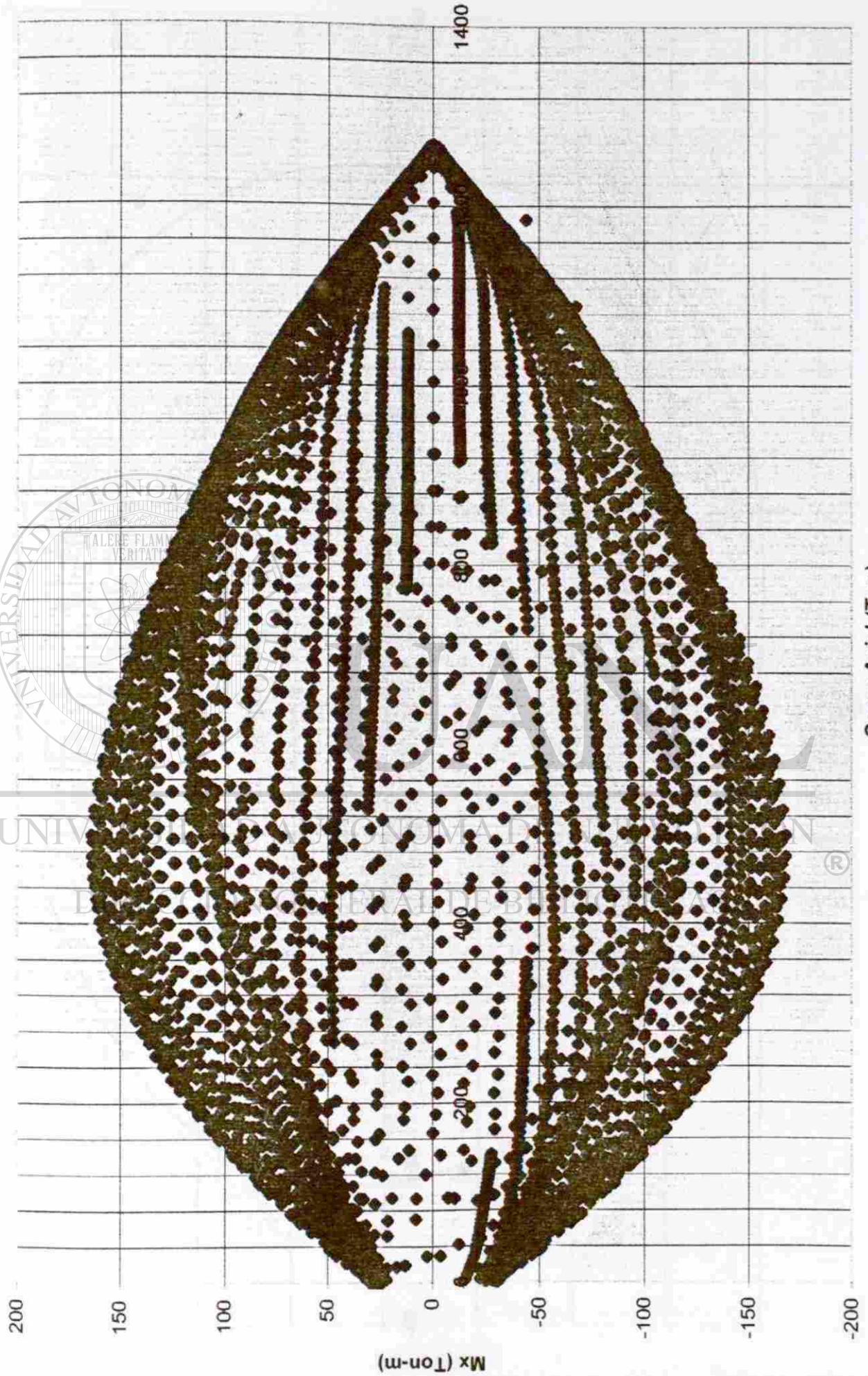
# UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



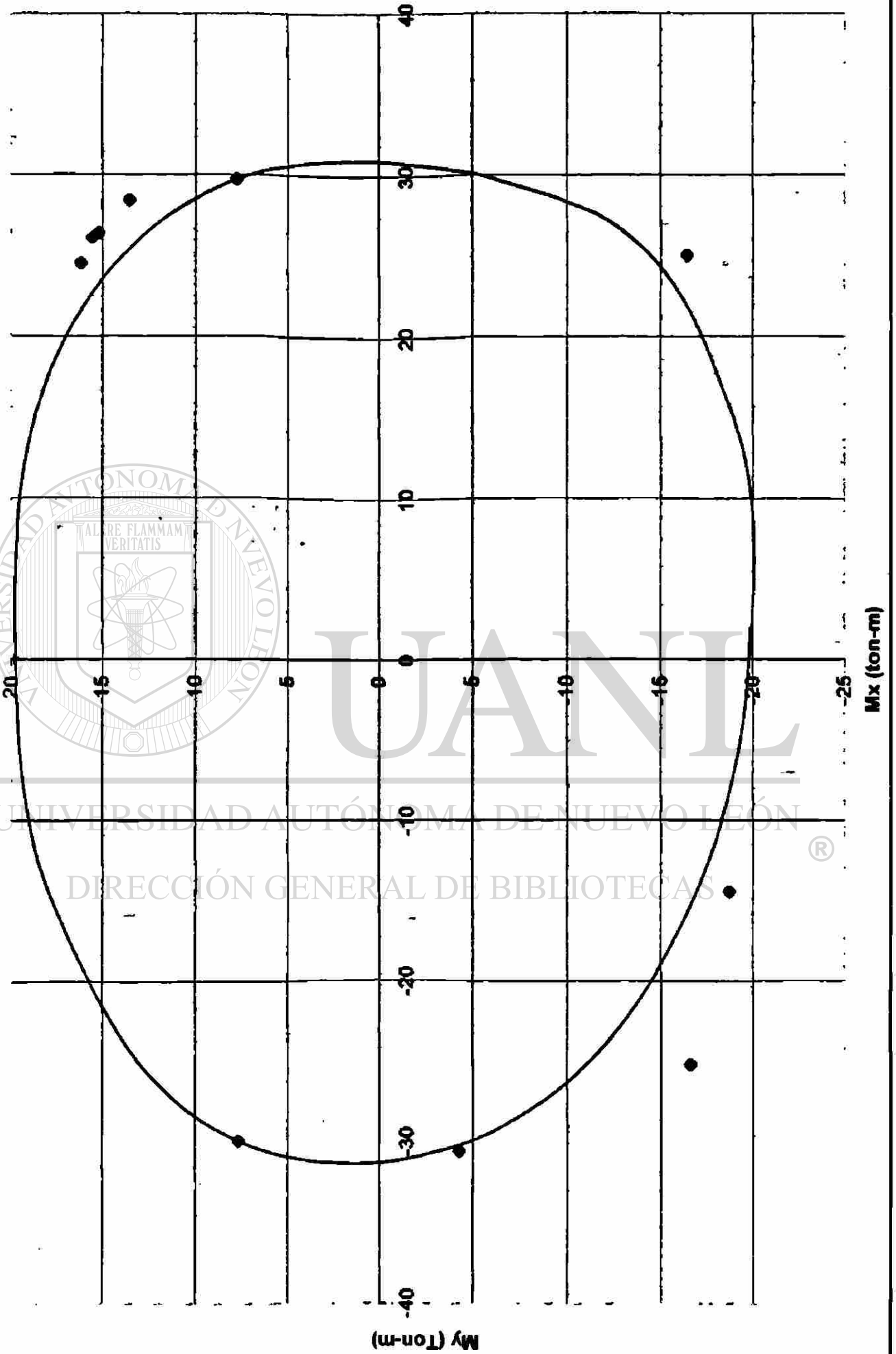
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Gráfica de Px vs Mx

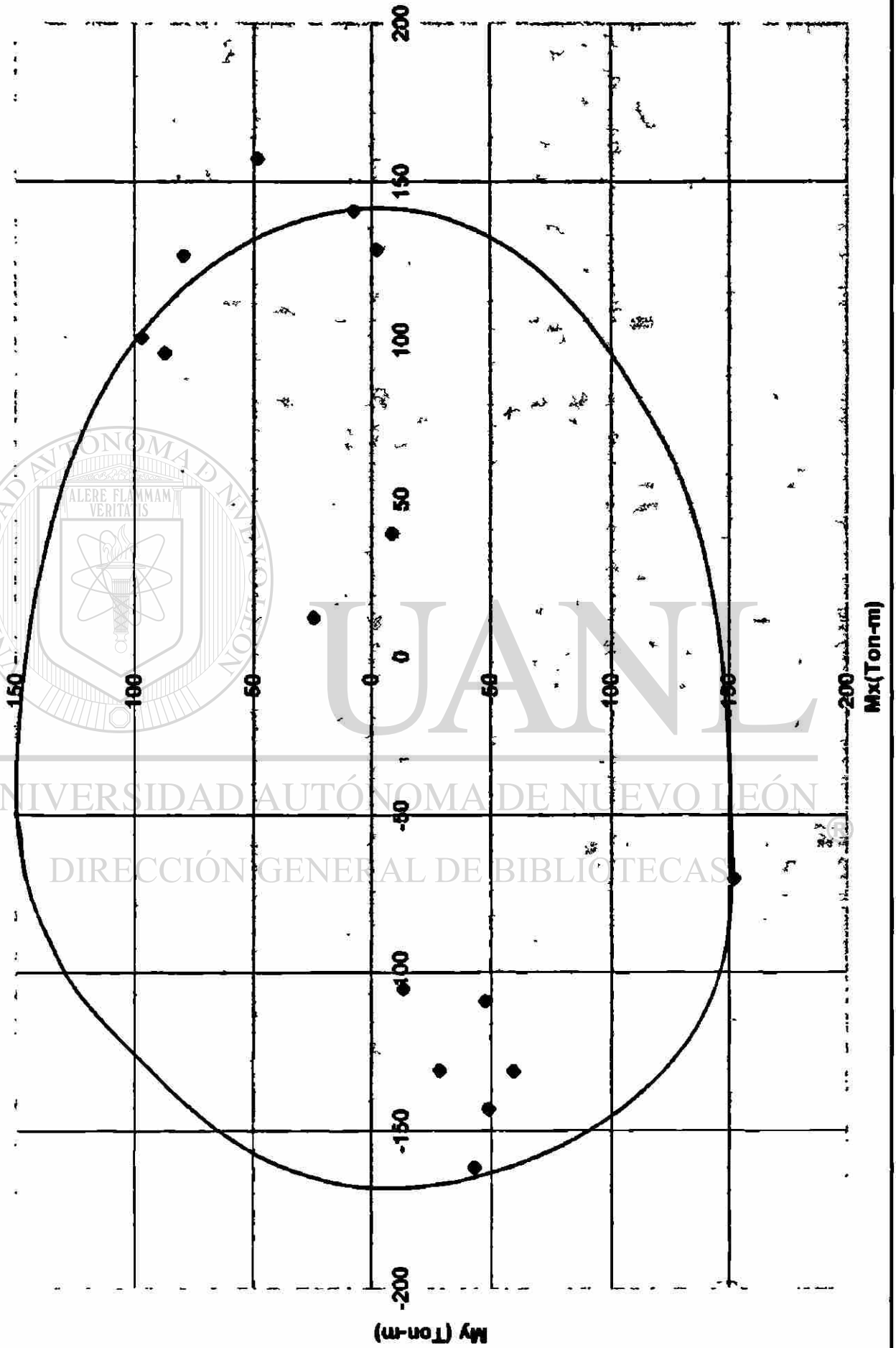


Carga Axial (Ton)

Gráfica de  $M_x$  vs  $M_y$  para  $P_x=0$  Ton.

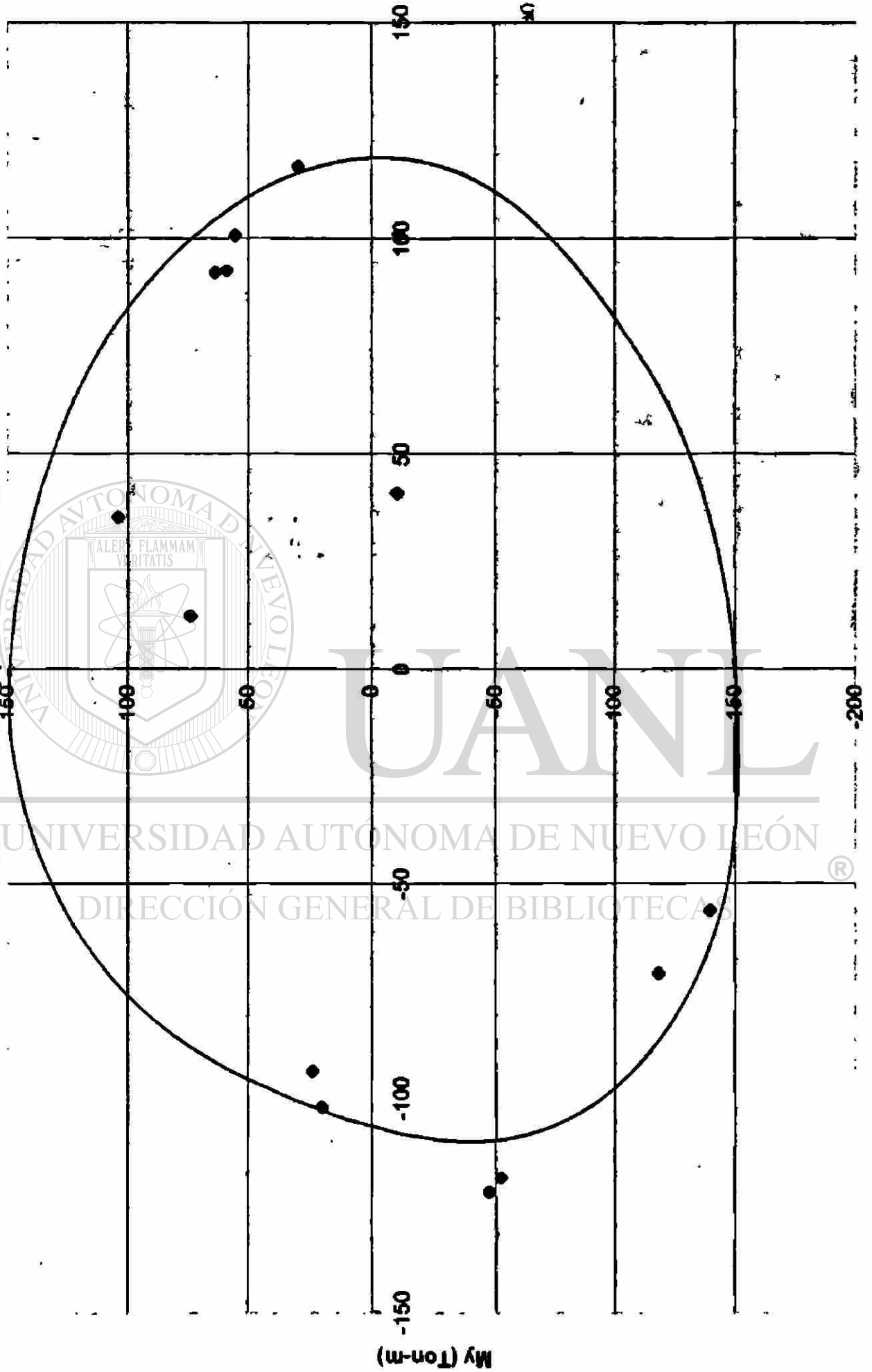


Gráfica de  $M_x$  vs  $M_y$  para  $P_x=400$  ton.

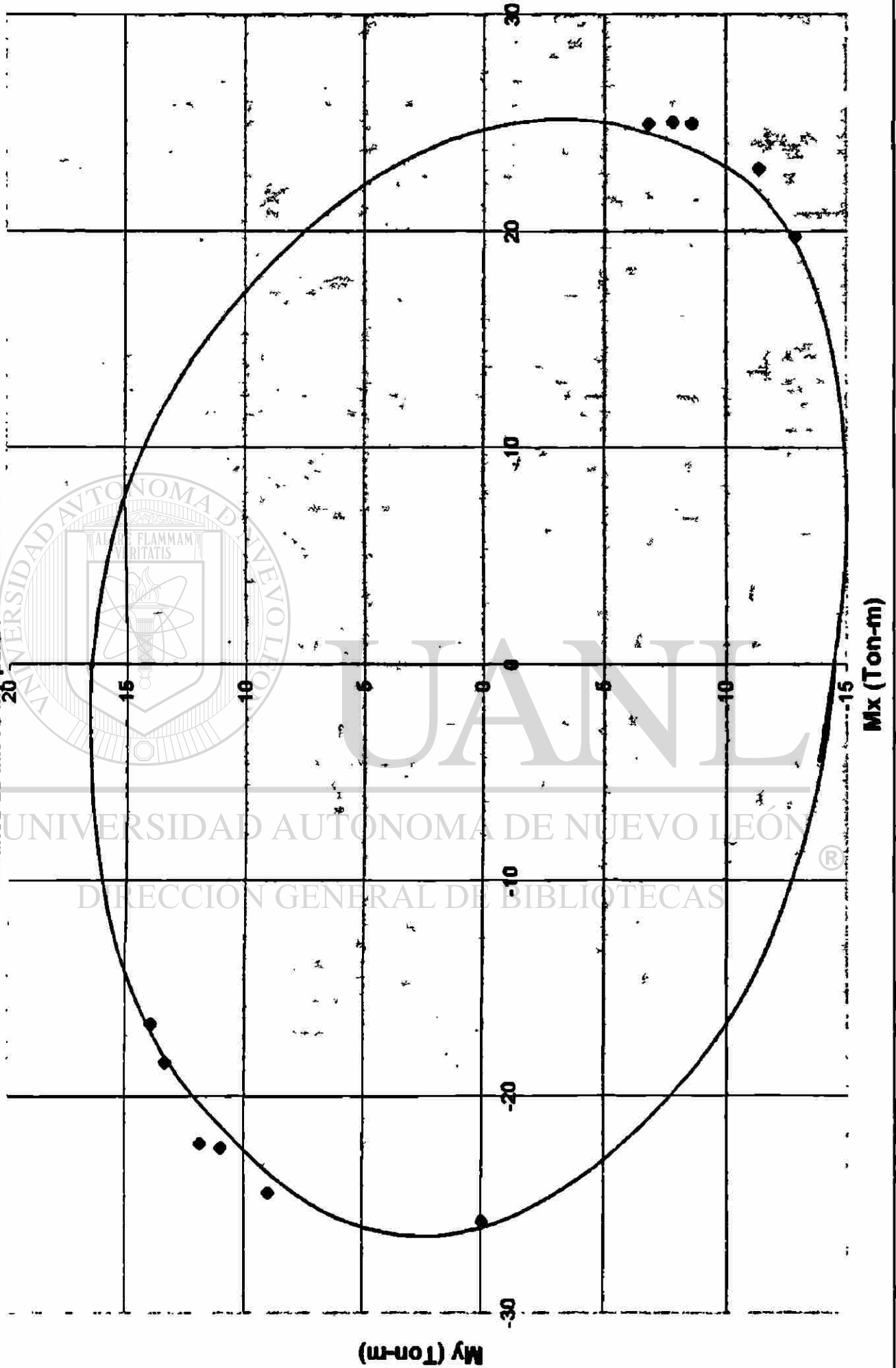




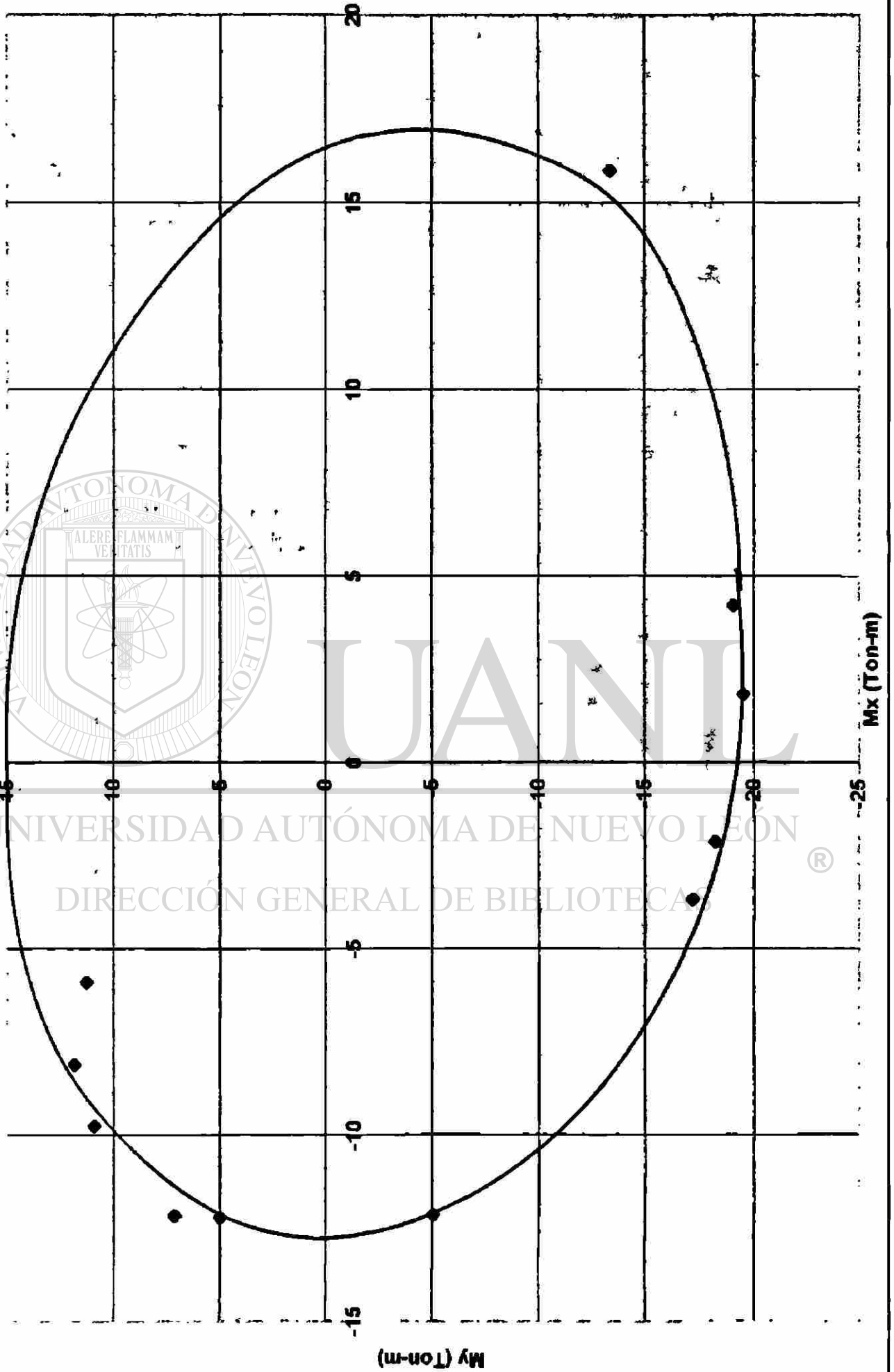
Gráfica de Mx vs My para Px=800 Ton.



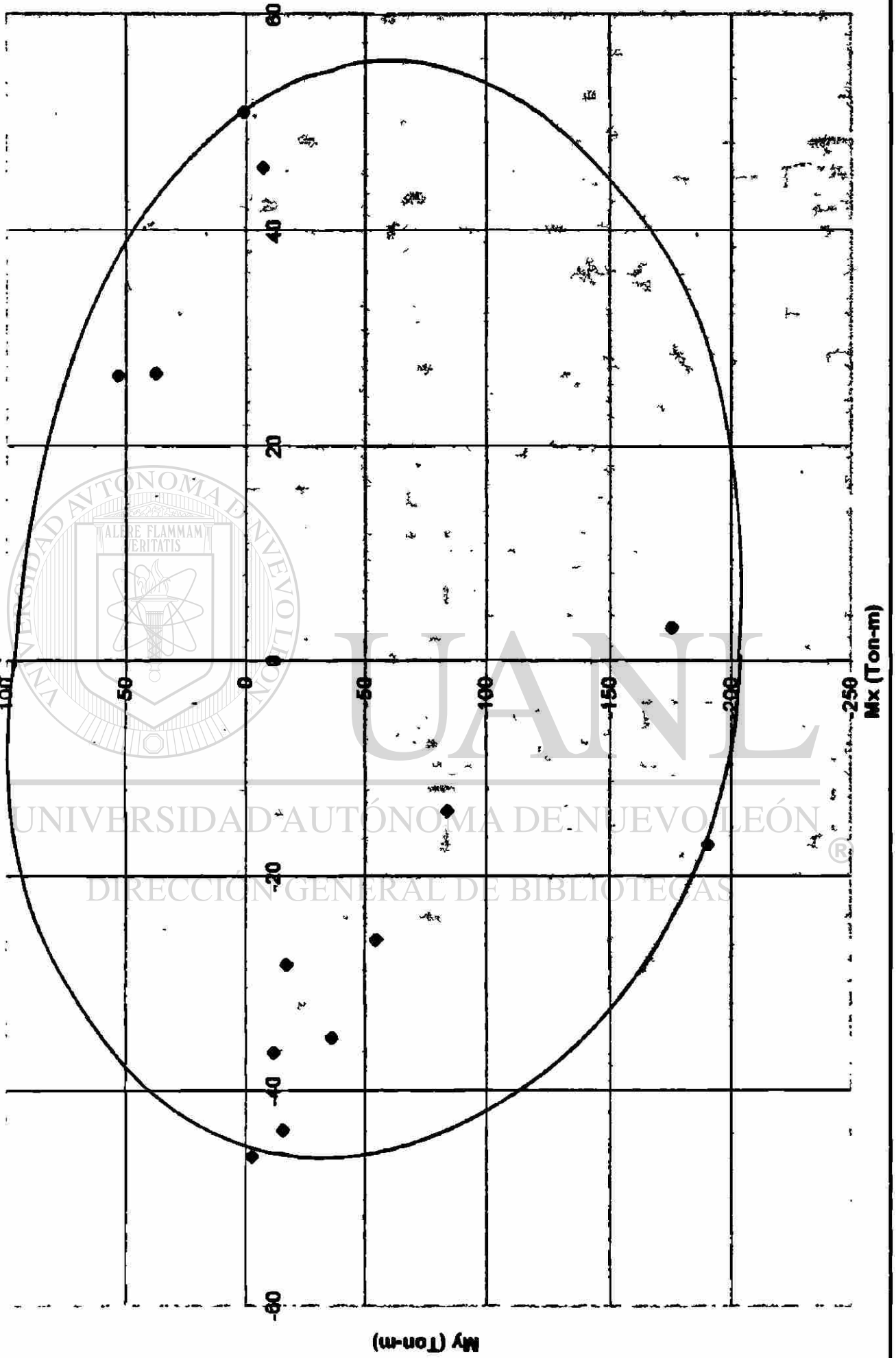
Gráfica de  $M_x$  vs  $M_y$  para  $P_x=1200$  Ton.



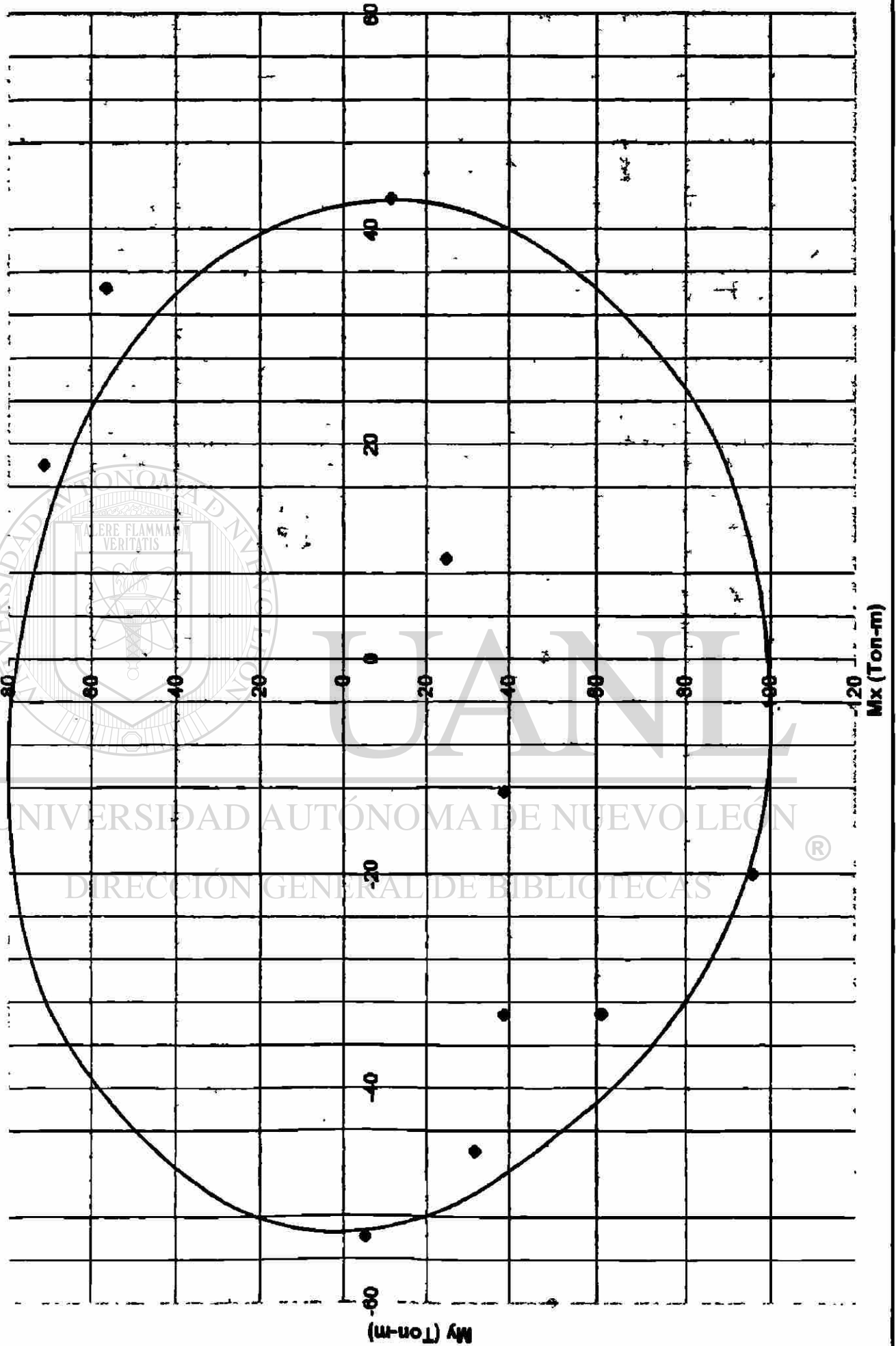
Gráfica de interacción Mx vs My para Px=0 Ton.



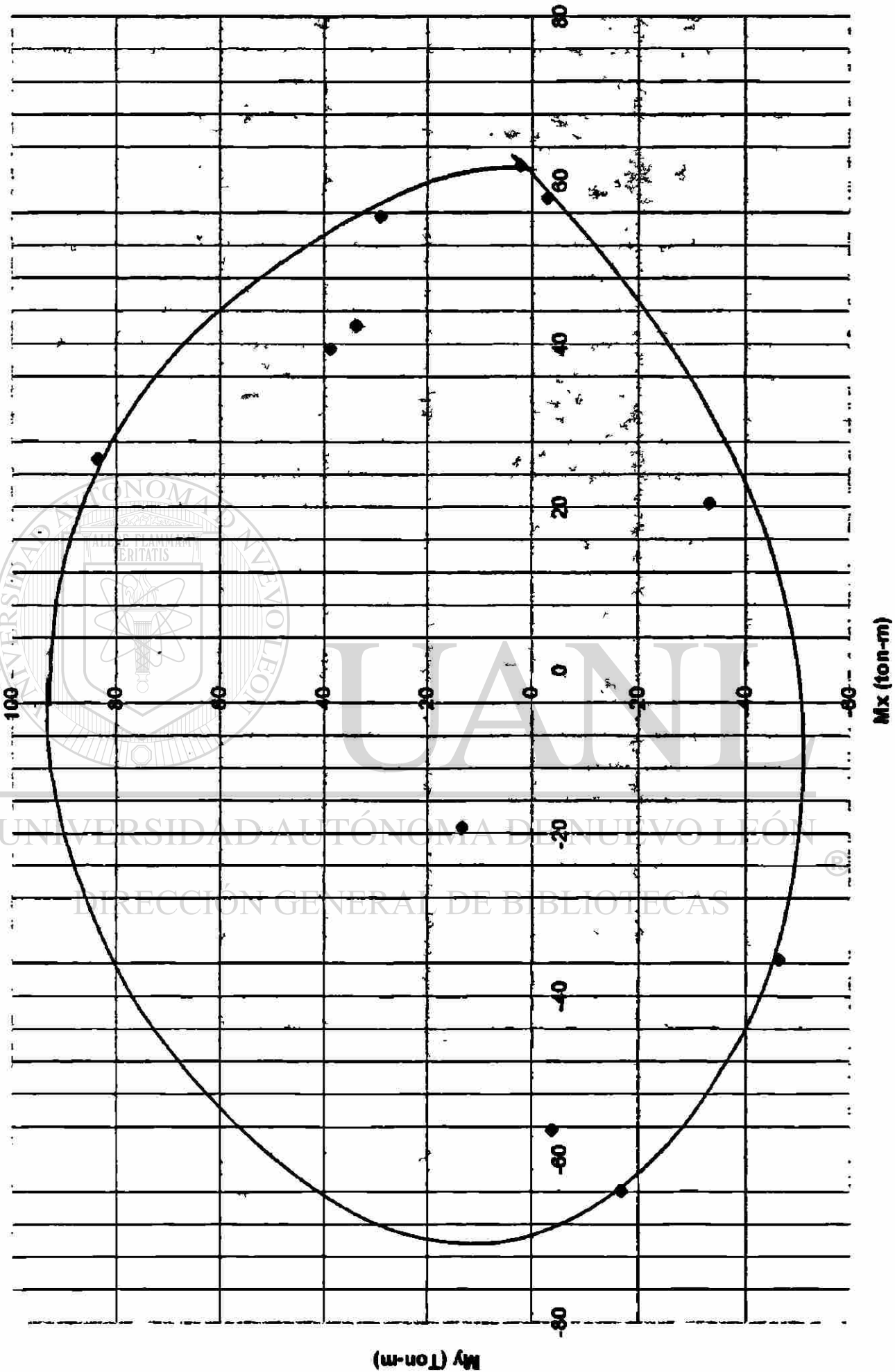
Gráfica de  $M_x$  vs  $M_y$  para  $P_x=130$  Ton.



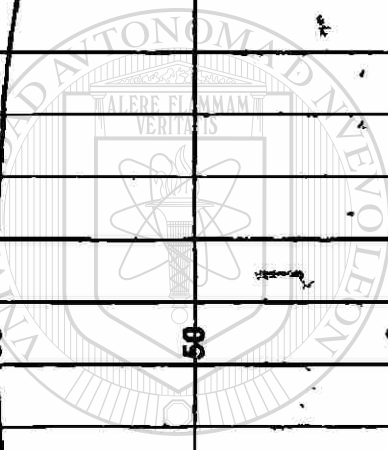
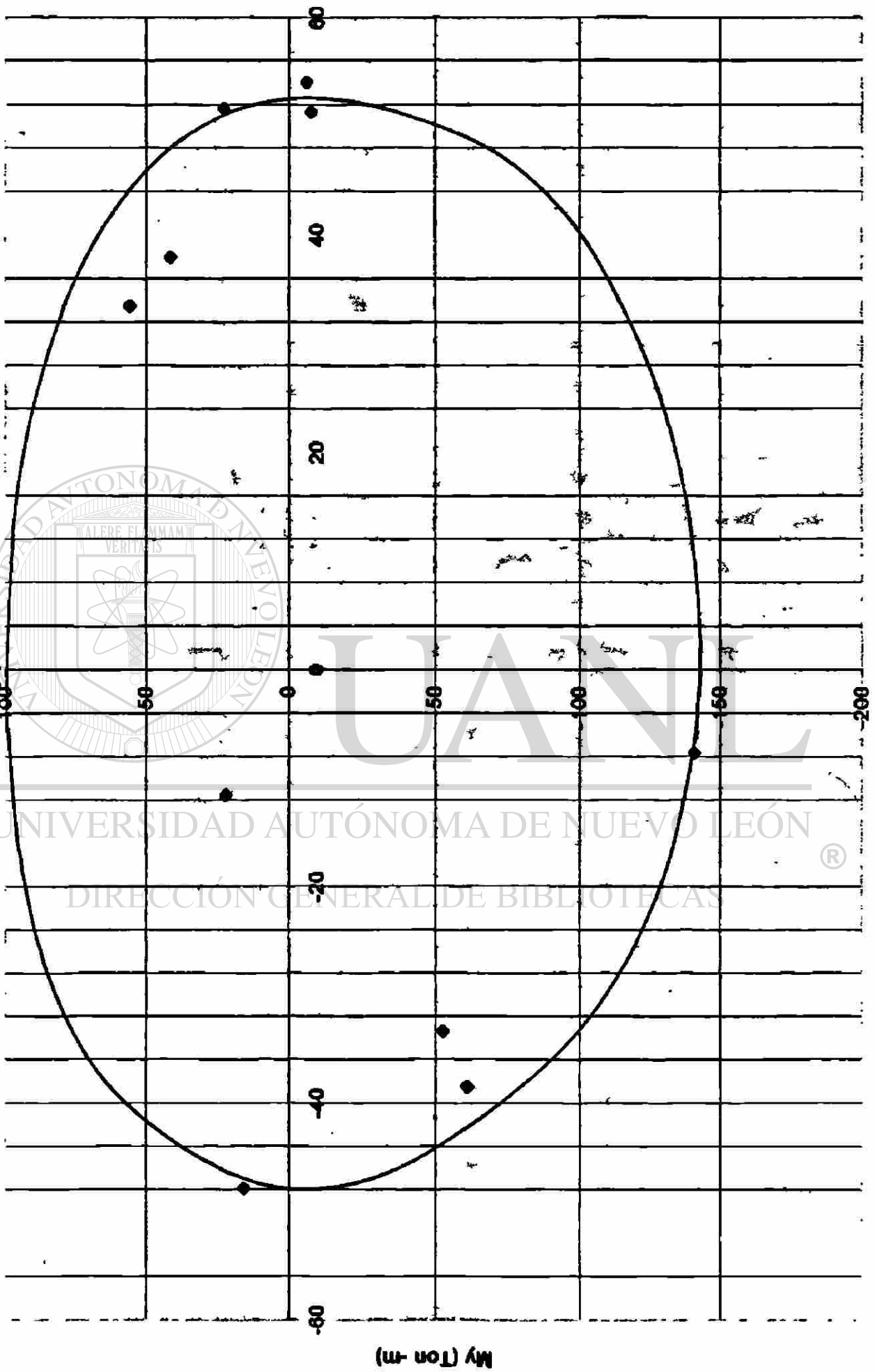
Gráfica de  $M_x$  vs  $M_y$  para  $P_x=180$  Ton.



Gráfica de  $M_x$  vs  $M_y$  para  $P_x=270$  Ton.



Gráfica de  $M_x$  vs  $M_y$  para  $P_x = 454$  Ton.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

## CAPITULO 8

### ENSAYE DE COLUMNA A ESCALA NATURAL

Como una forma de iniciar la investigación experimental sobre el comportamiento de columnas, se propuso, fabricó y ensayo una columna a escala natural de concreto reforzado.

La columna tiene una sección de 35cm x 35cm con refuerzo de 4 varillas #6 y 4 varillas #5 con estribos #3 @ 20cm ver figura 9.1 para el arreglo de la sección. La resistencia del concreto  $f_{cr}$  es de 250 kg/cm<sup>2</sup>. El proporcionamiento se encuentra en el Anexo 1.

La forma geométrica de la columna se planteó de forma que a través de dos brazos ortogonales pudiera ser aplicado un momento en cada dirección; en la fotografía 9.1 pueden ser aplicados éstos brazos. El peralte de los brazos es de 50cm y se diseñó de tal manera que no tuviera problemas de flexión y cortante en las juntas. El momento que se presenta a lo largo de la altura es constante.

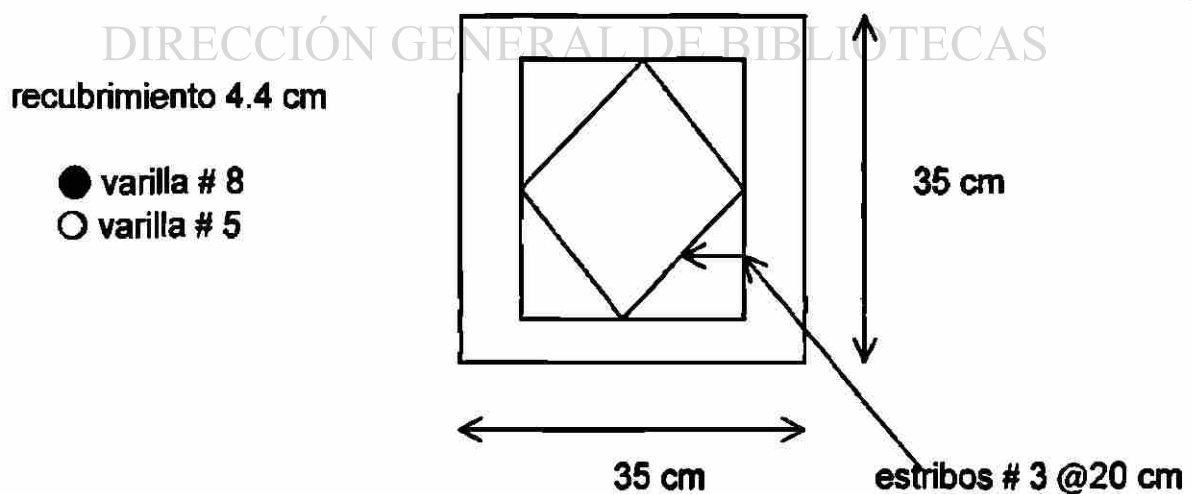
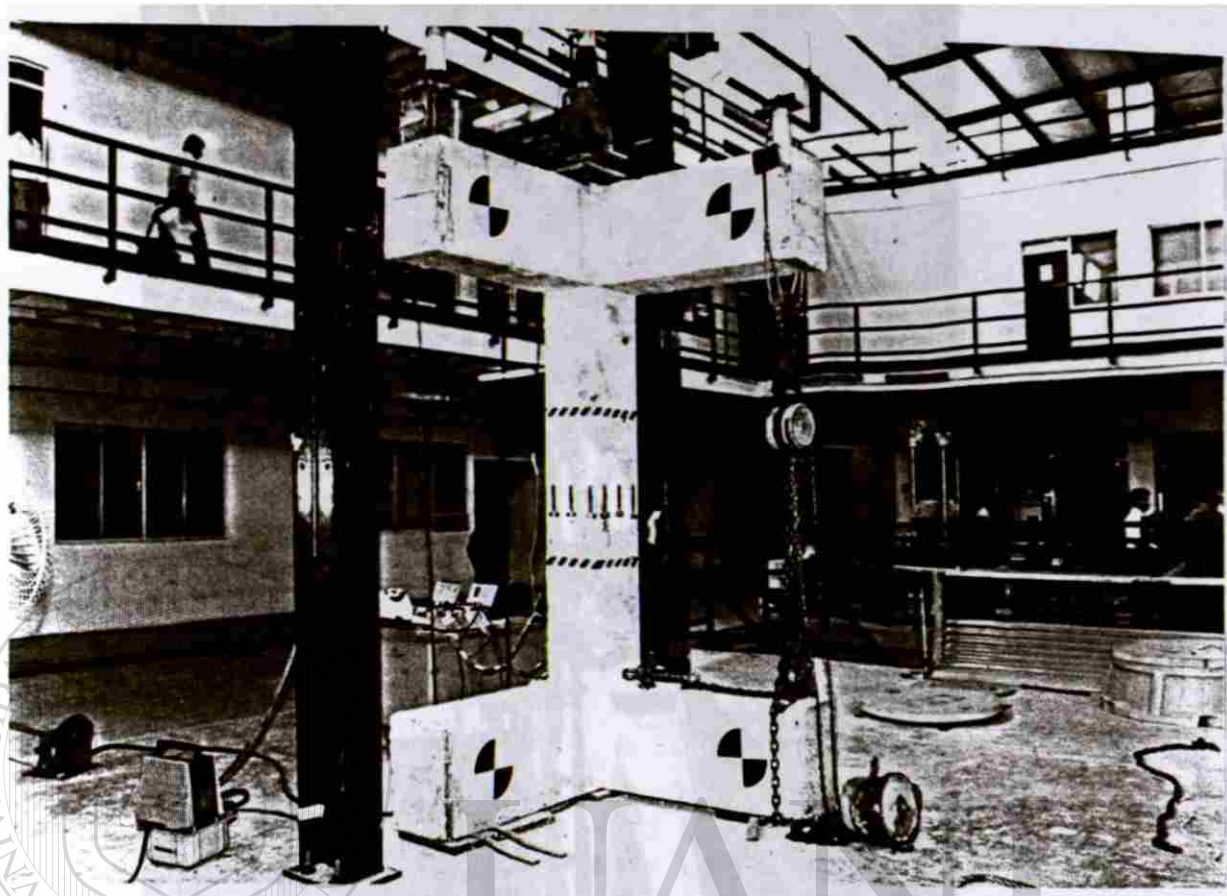


Figura 8.1 Sección de la columna del espécimen.

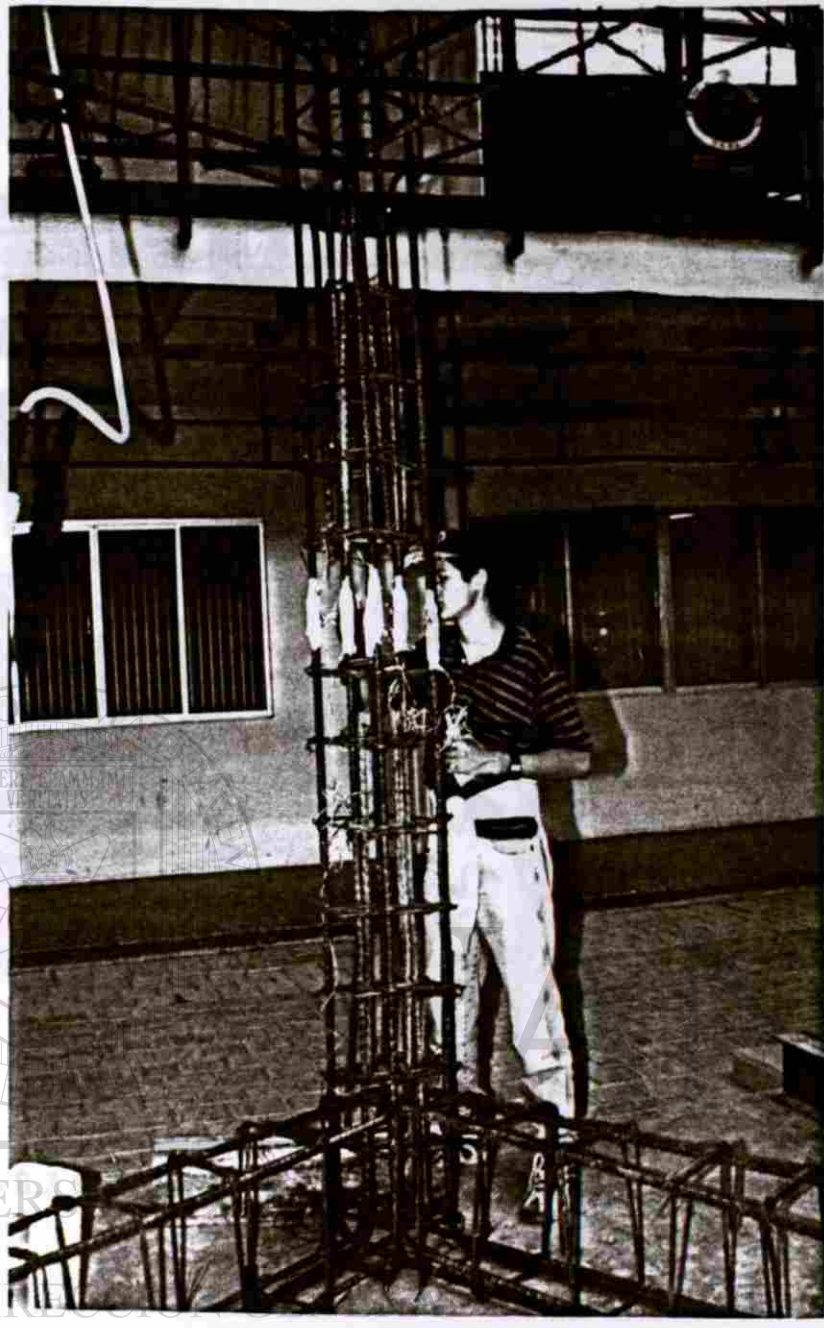




**Foto 8.1. El espécimen de la columna mostrando los brazos para la aplicación del momento en dos direcciones ortogonales.**

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

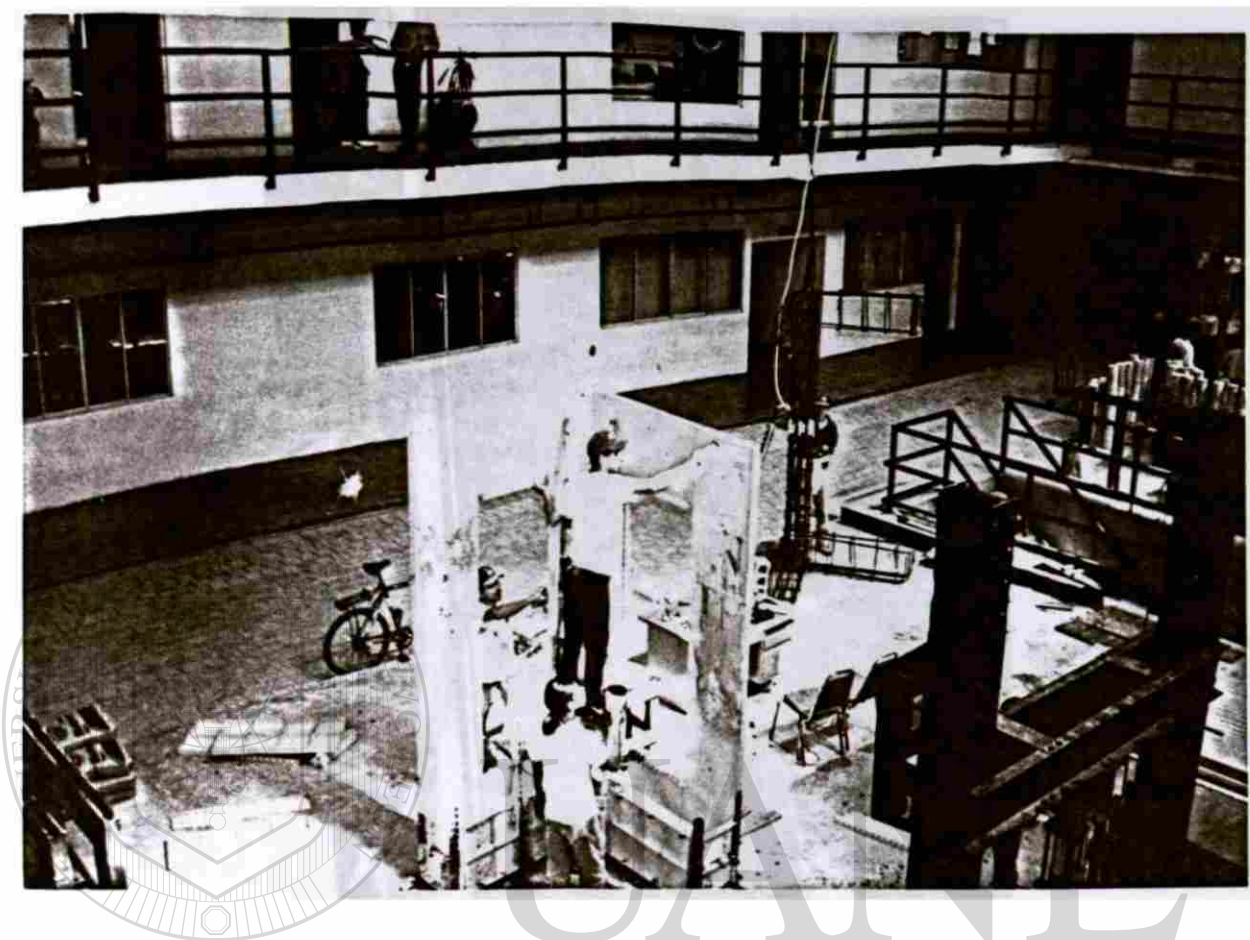
El acero de refuerzo de la columna se instrumentó con strain gages a mitad de altura para medir la deformación durante el ensaye; en la fotografía 8.2 se muestra el armado y la protección que se le puso a cada strain gage.



**Foto 8.2. Se muestra el armado de la columna y la protección a los strain gages en la parte central.**

Para lograr un buen acabado en la columna, se cimbró con cimbra metálica; en las fotos 8.3 y 8.4 se muestra el desarrollo del cimbrado.

En las siguientes páginas se sigue una secuencia del colado y ensaye de la columna.

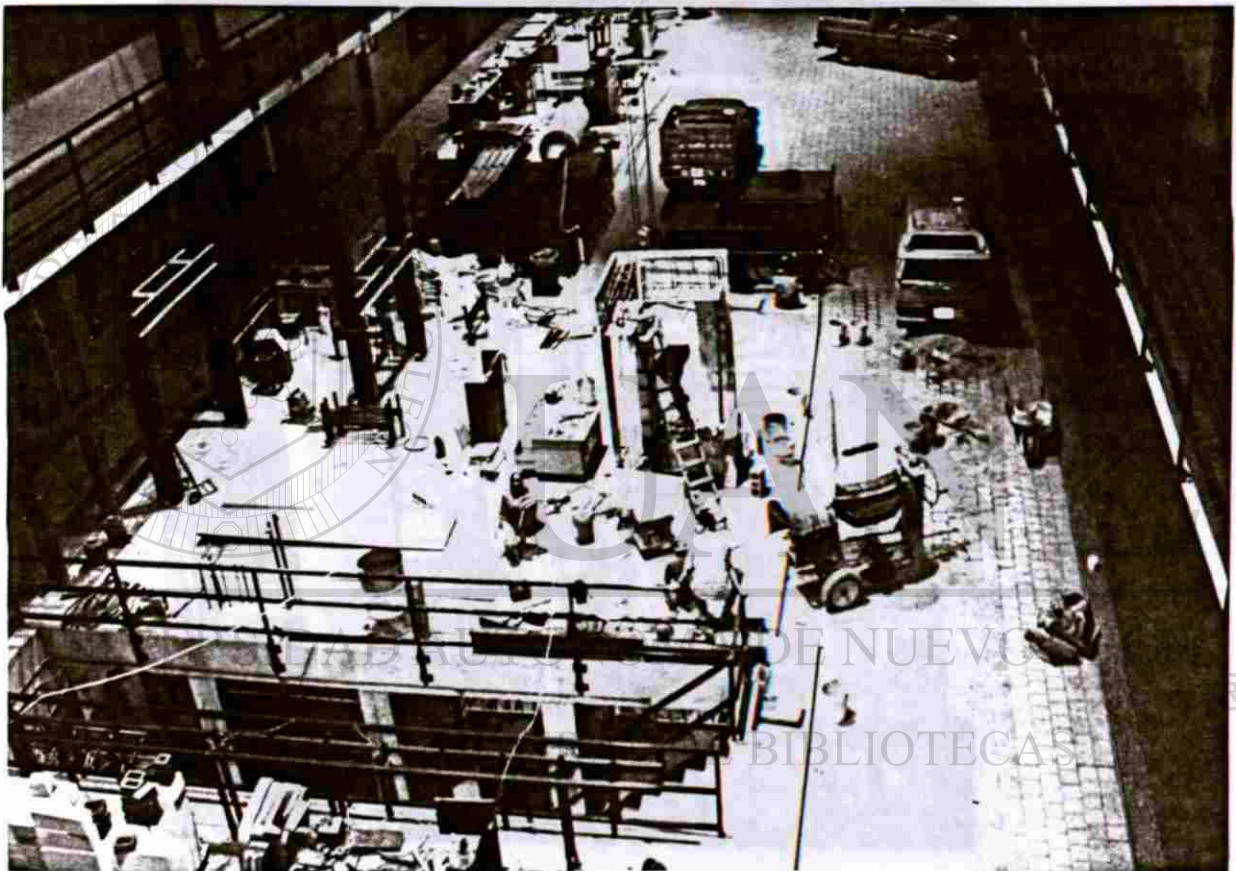


**Foto 8.3 Se muestra la cimbra metálica utilizada, aquí se le coloca un desencofrante.**

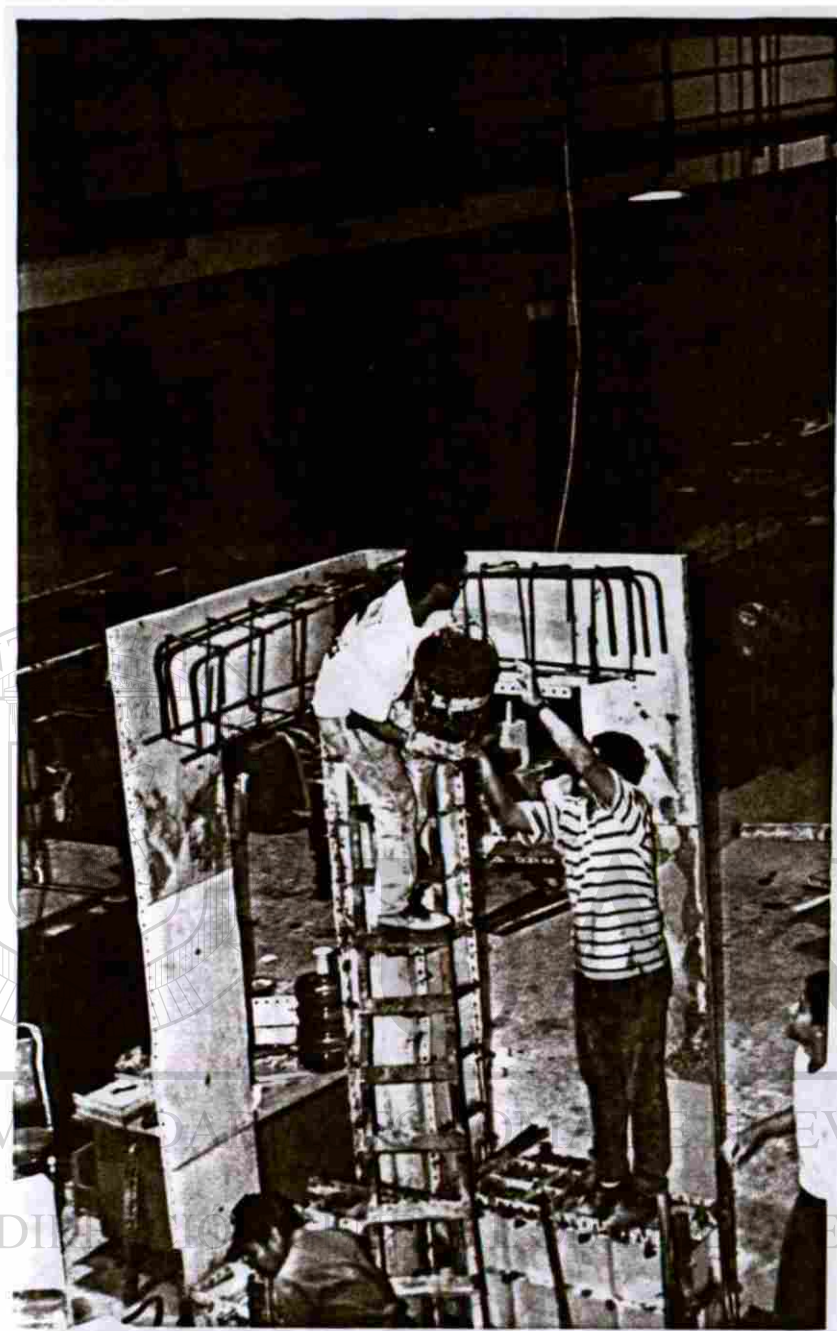
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



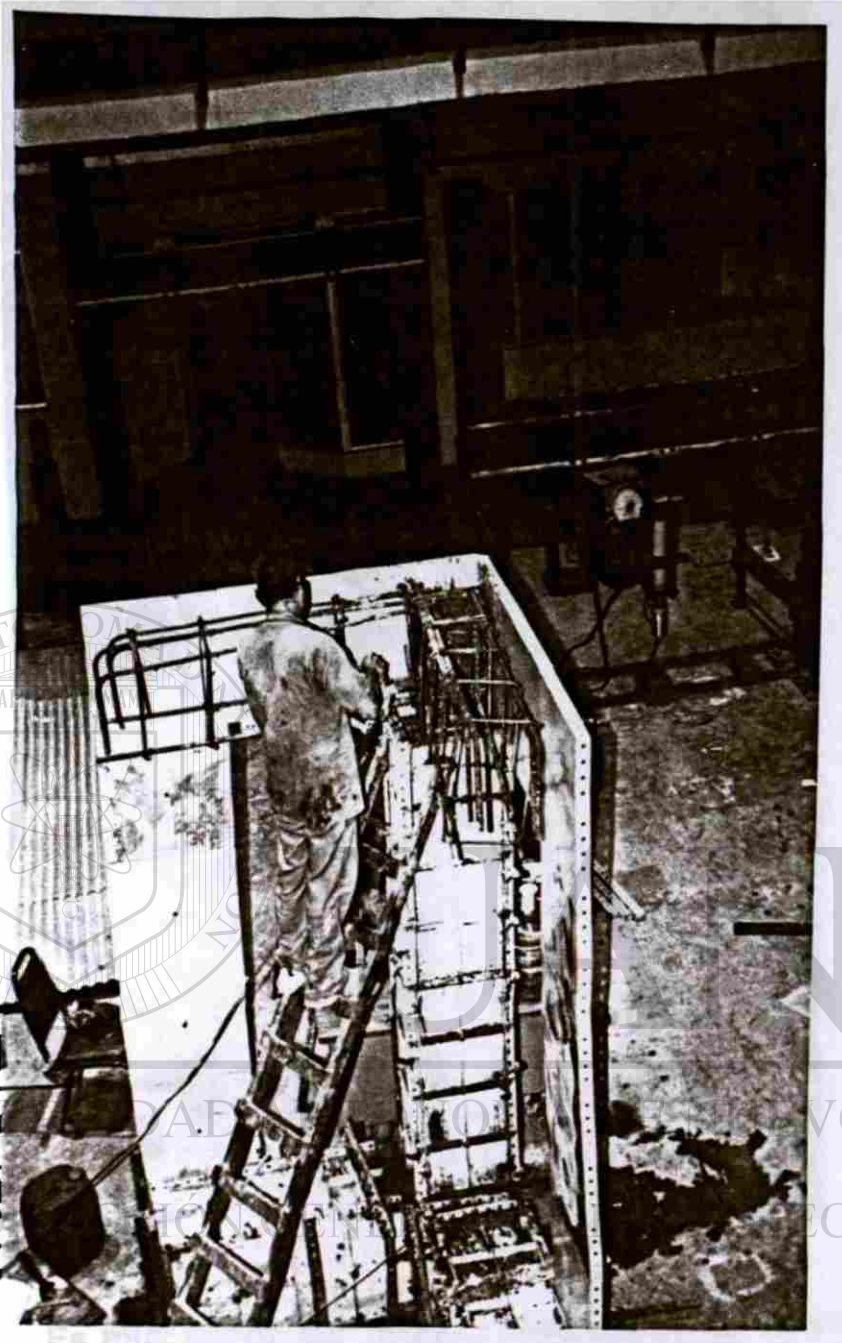
**Foto 8.4. Detalle del cimbrado, es muy conveniente que las juntas sean a 90°.**



**FOTO 8.5 a** Una vez colocado el armado en la cimbra, se nivela y se calza el armado para dar los recubrimientos requeridos. El concreto fué fabricado in situ.



**FOTO 8.5 b** Una vez colocado el armado en la cimbra, se nivela y se calza el armado para dar los recubrimientos requeridos. El concreto fué fabricado in situ.

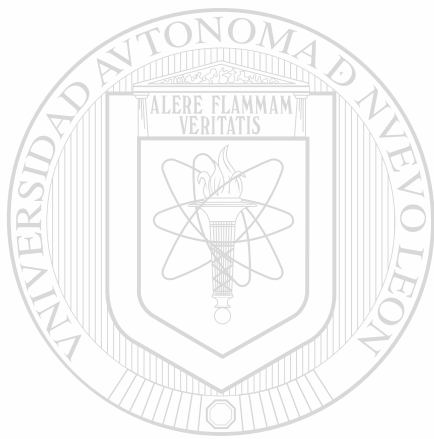


**FOTO 8.6 El vibrado es primordial durante el colado.**



**FOTO 8.7** Es muy importante revisar constantemente el estado de los strain gages durante el colado y evitar lastimarlos. Algunas fallas pueden ser solucionadas, por ejemplo, cuando algún cable se daña puede ser reemplazado rápidamente. Aquí se revisa constantemente los strain gages con el tester.





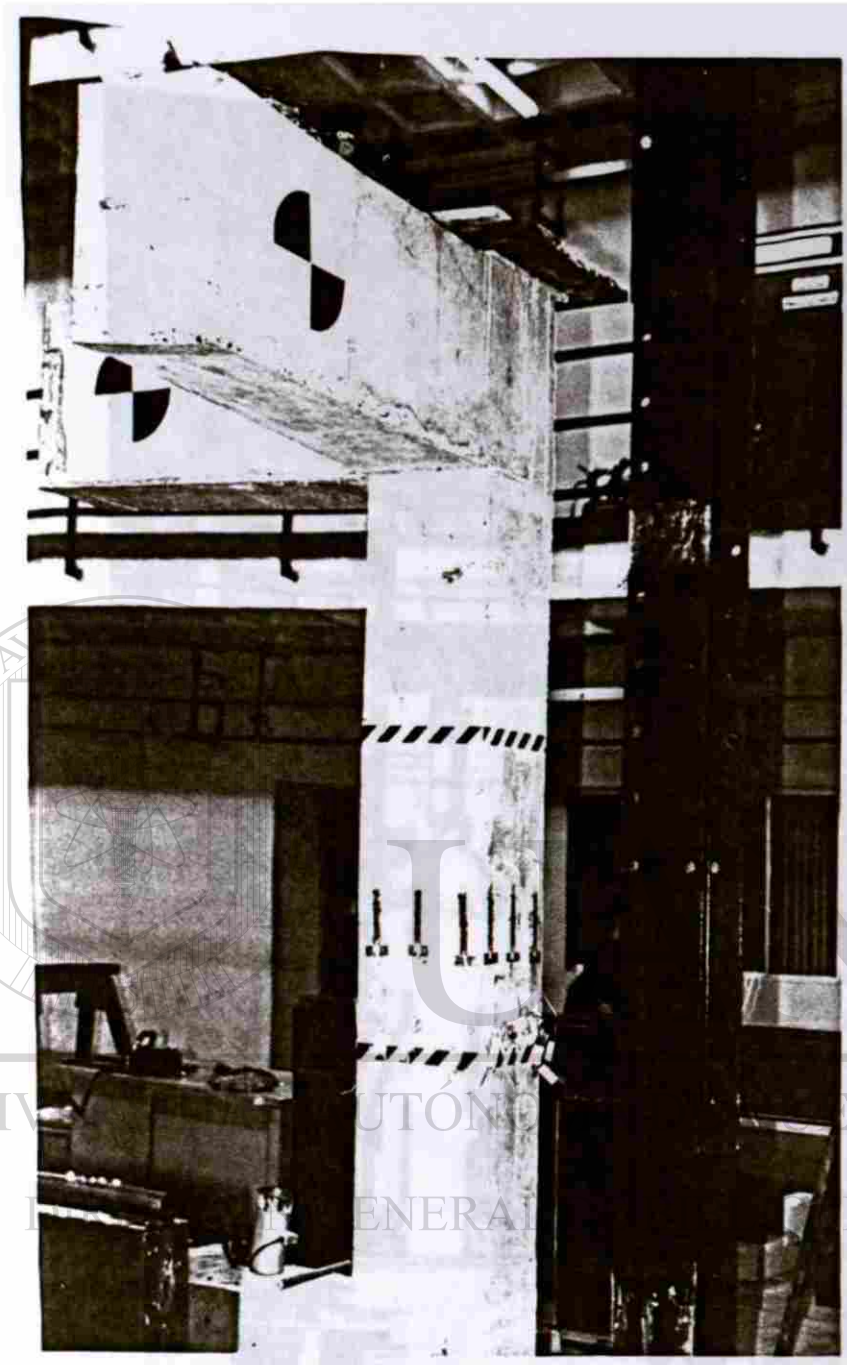
# UANL

---

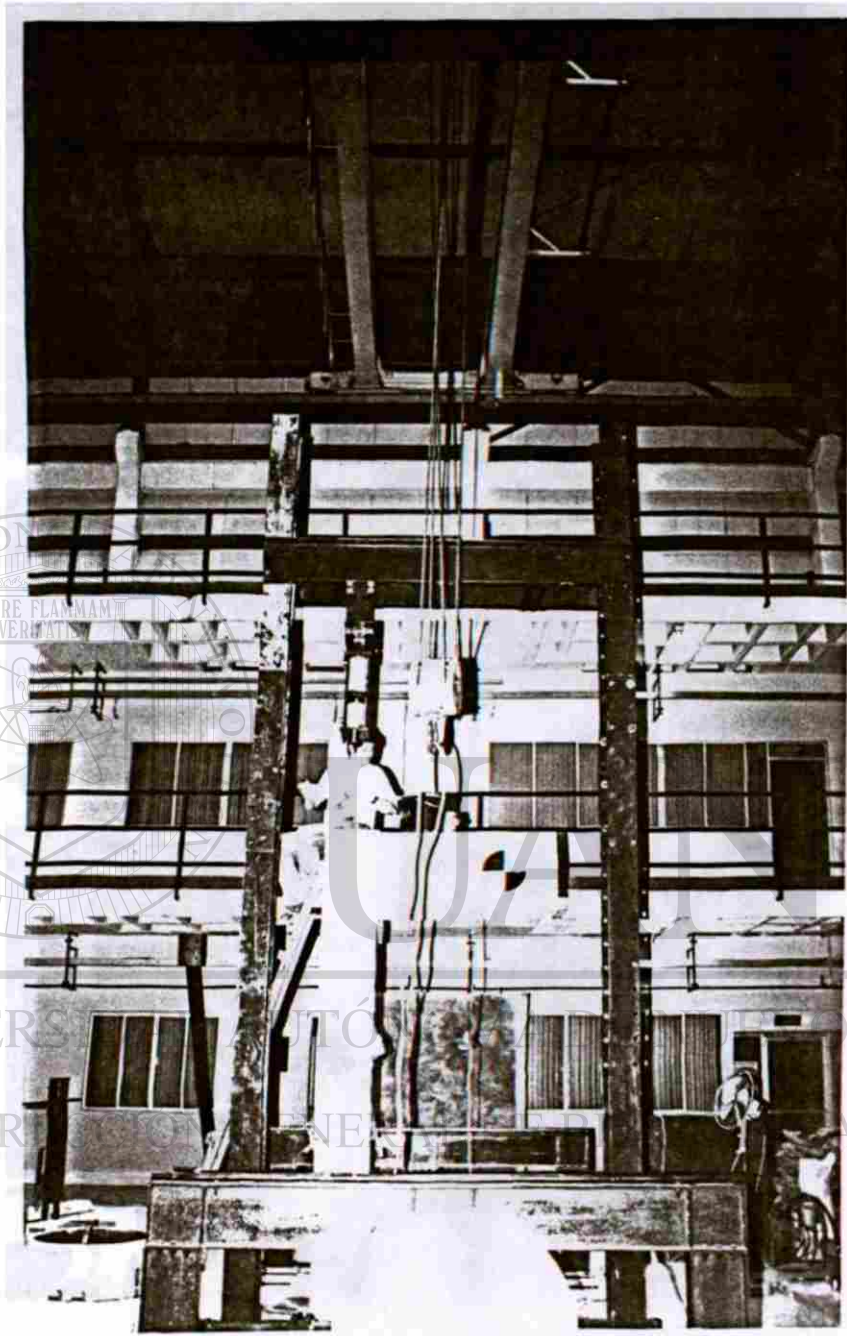
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



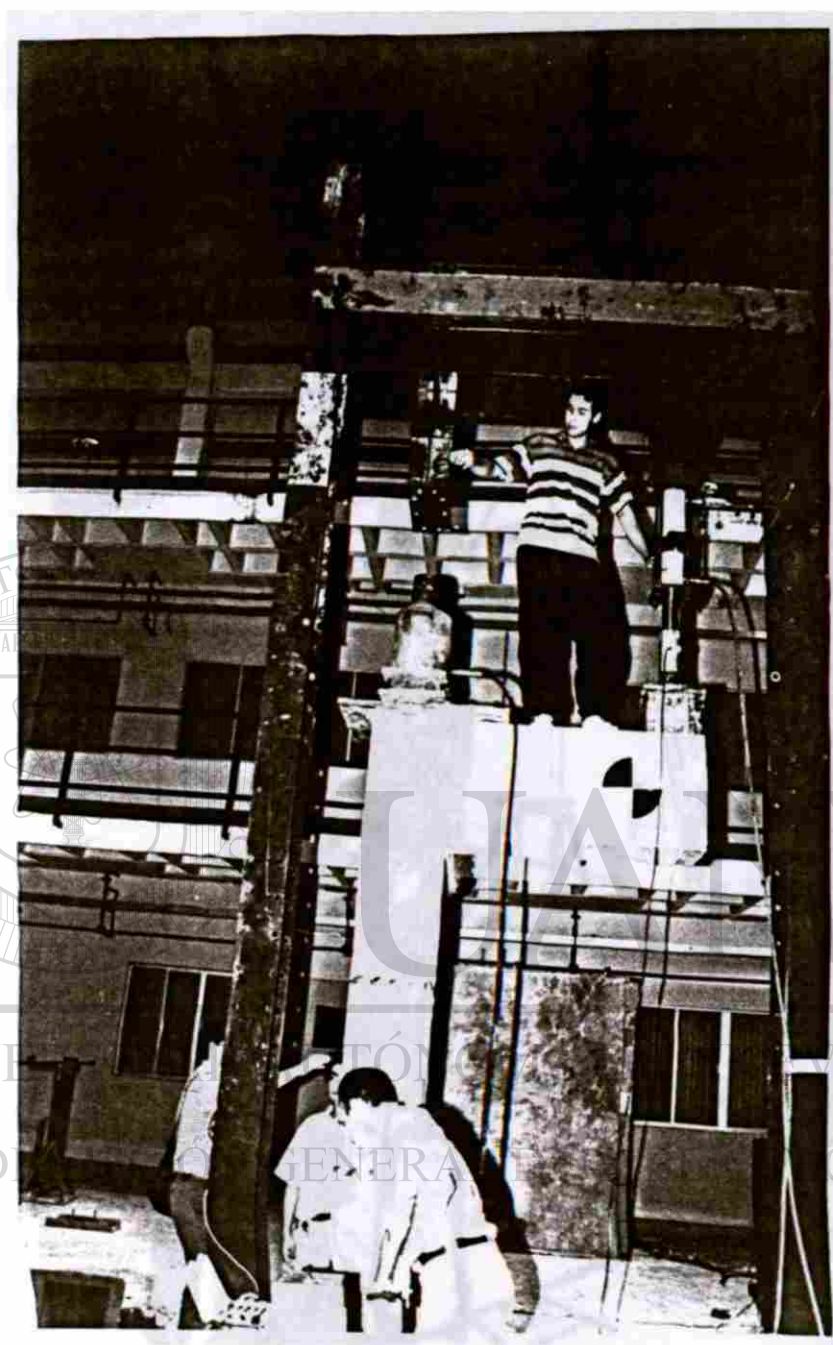
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



**FOTO 8.11** Muestra de la columna con los strain gages para concreto, se colocaron 3 strain gages por cada cara.



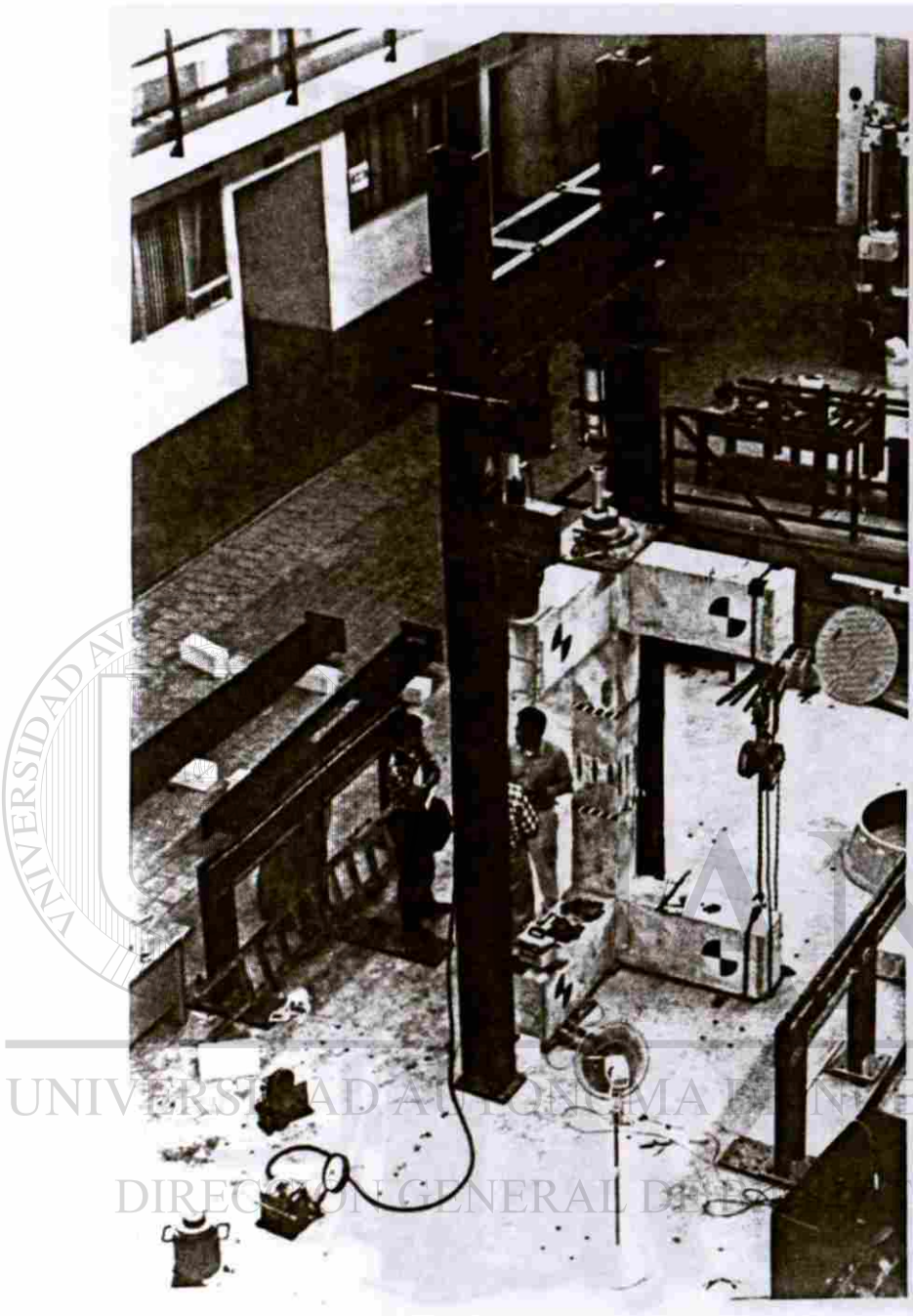
**FOTO 8.12** Para la aplicación de la carga axial, se colocó azufre para uniformizar las cargas.



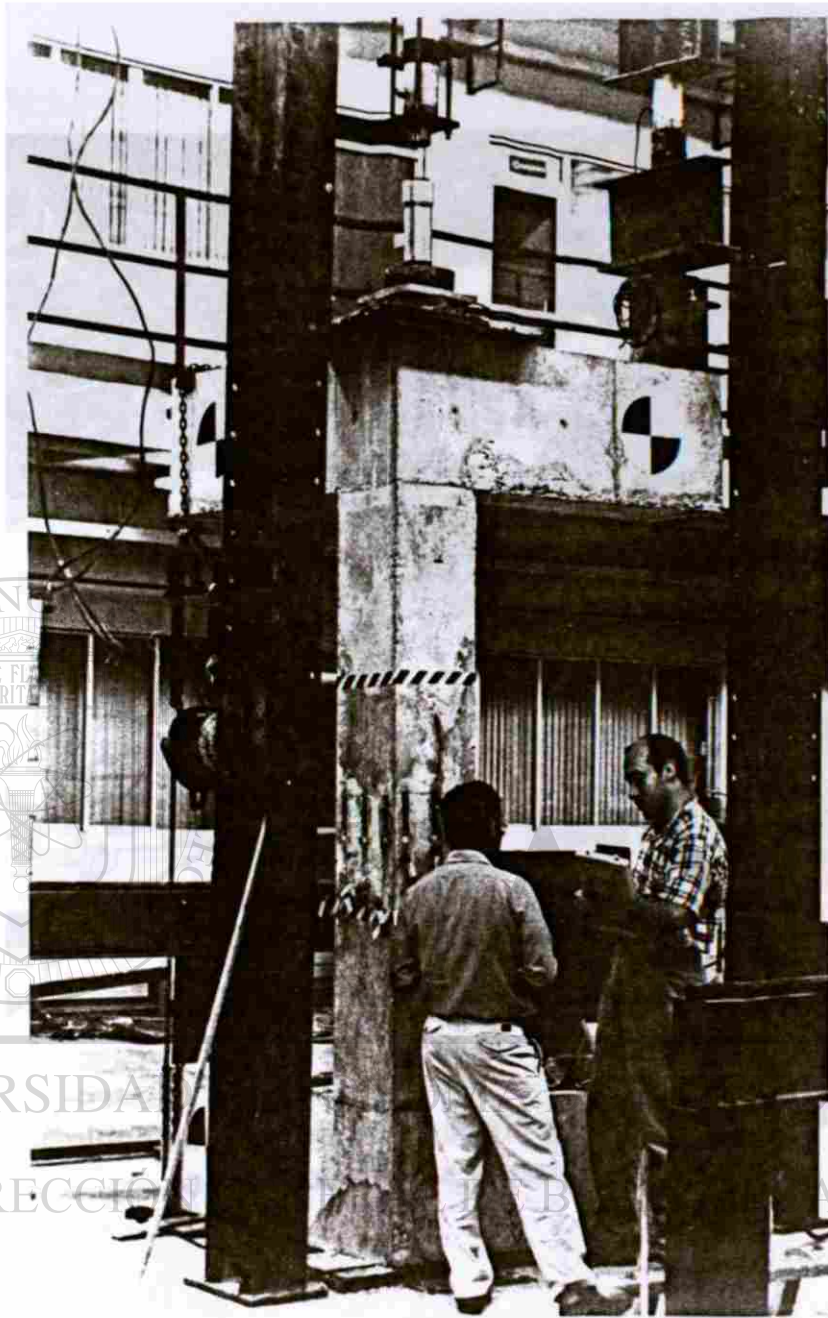
**FOTO 8.13** Se muestra el marco para la aplicación de cargas. El gato hidráulico de la izquierda es para la carga axial, el de la derecha es para el momento en una dirección.



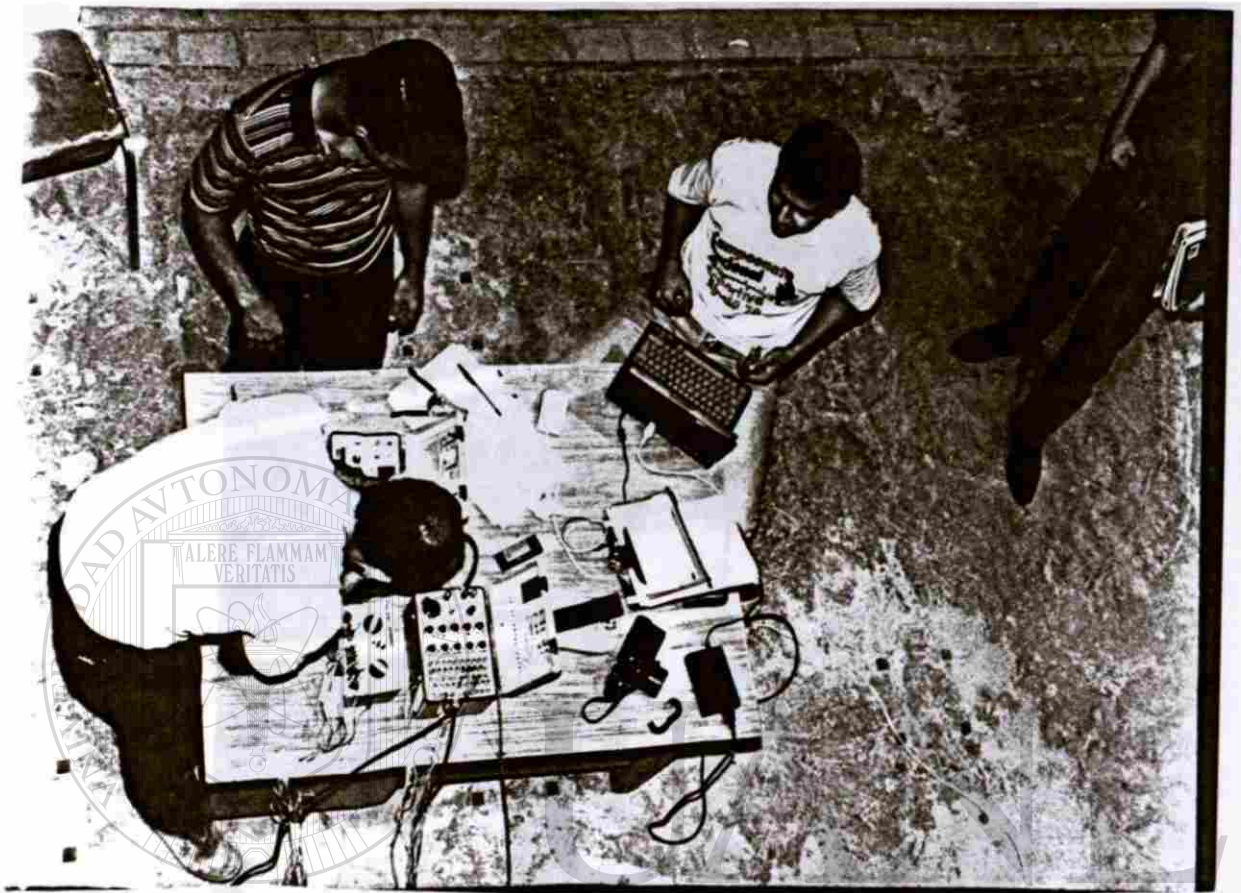
**FOTO 8.14** Para la aplicación del momento en la otra dirección se utilizó un polipasto de 5 toneladas, también se aprecian las celdas de carga para medir las cargas aplicadas por cada gato hidráulico. Se utilizaron dos celdas de carga a compresión (para los gatos hidráulicos) y una a tensión (para el polipasto), se pueden ver junto a la perica (llave). En la parte inferior se colocaron neoprenos para uniformizar la carga.



**FOTO 8.15** Se muestran las bombas de presión para accionar los gatos hidráulicos y también se pueden apreciar las placas para la transmisión de carga sobre la columna(en la carga axial).

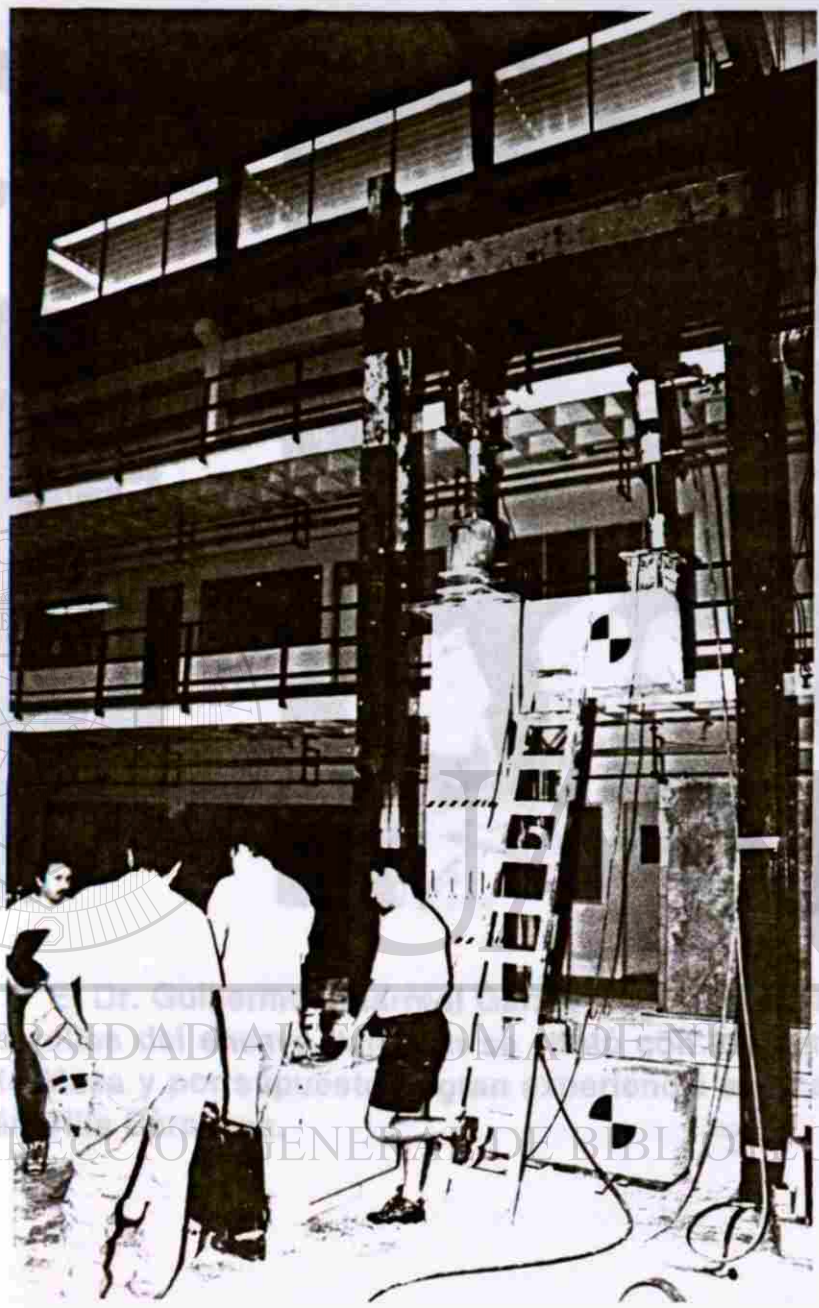


**FOTO 8.16** Una última prueba a cada uno de los 20 strain gages colocados en la columna, prueba realizada por el Ing. José Román Villa Bárcenas.

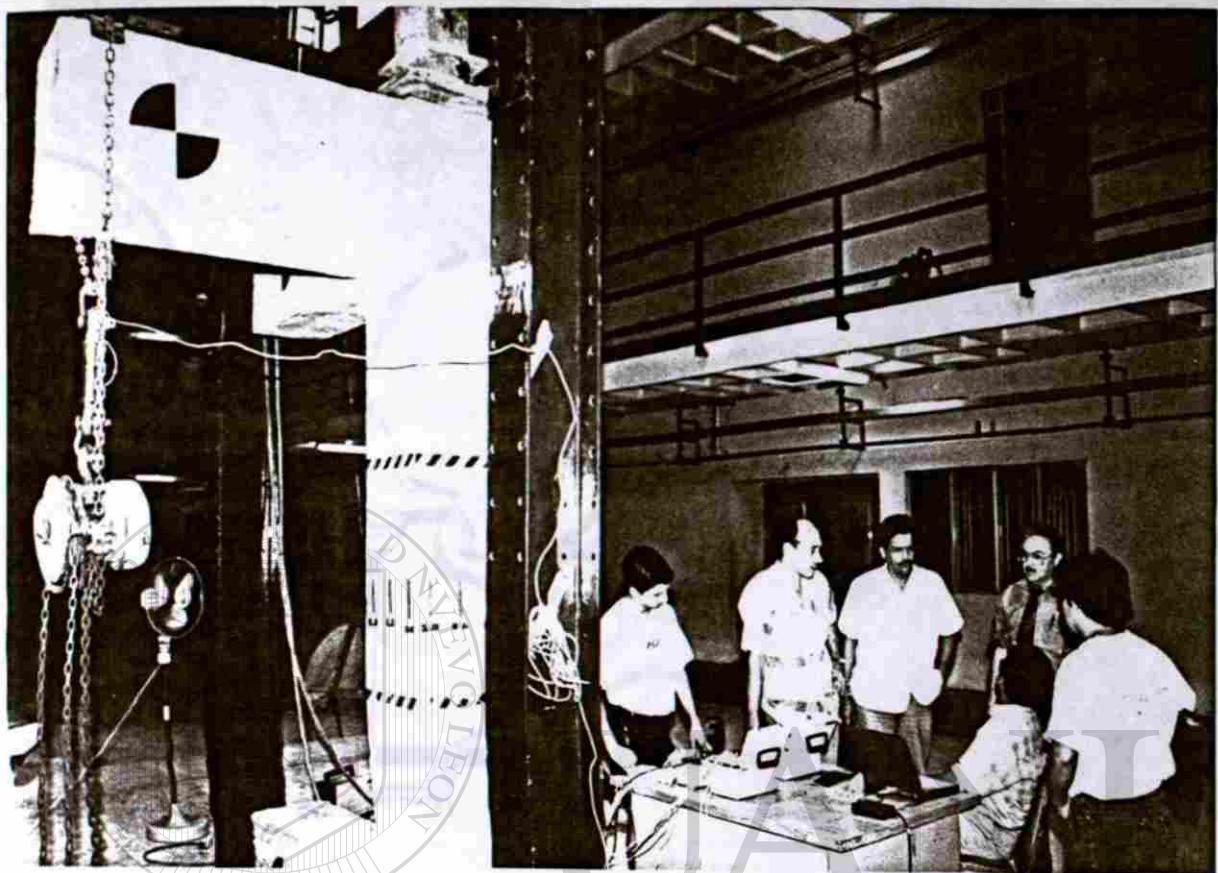


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
**FOTO 8.17 Colocación de todos los strain gages a las canaleras y de aquí al puente de Winston.** ®  
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

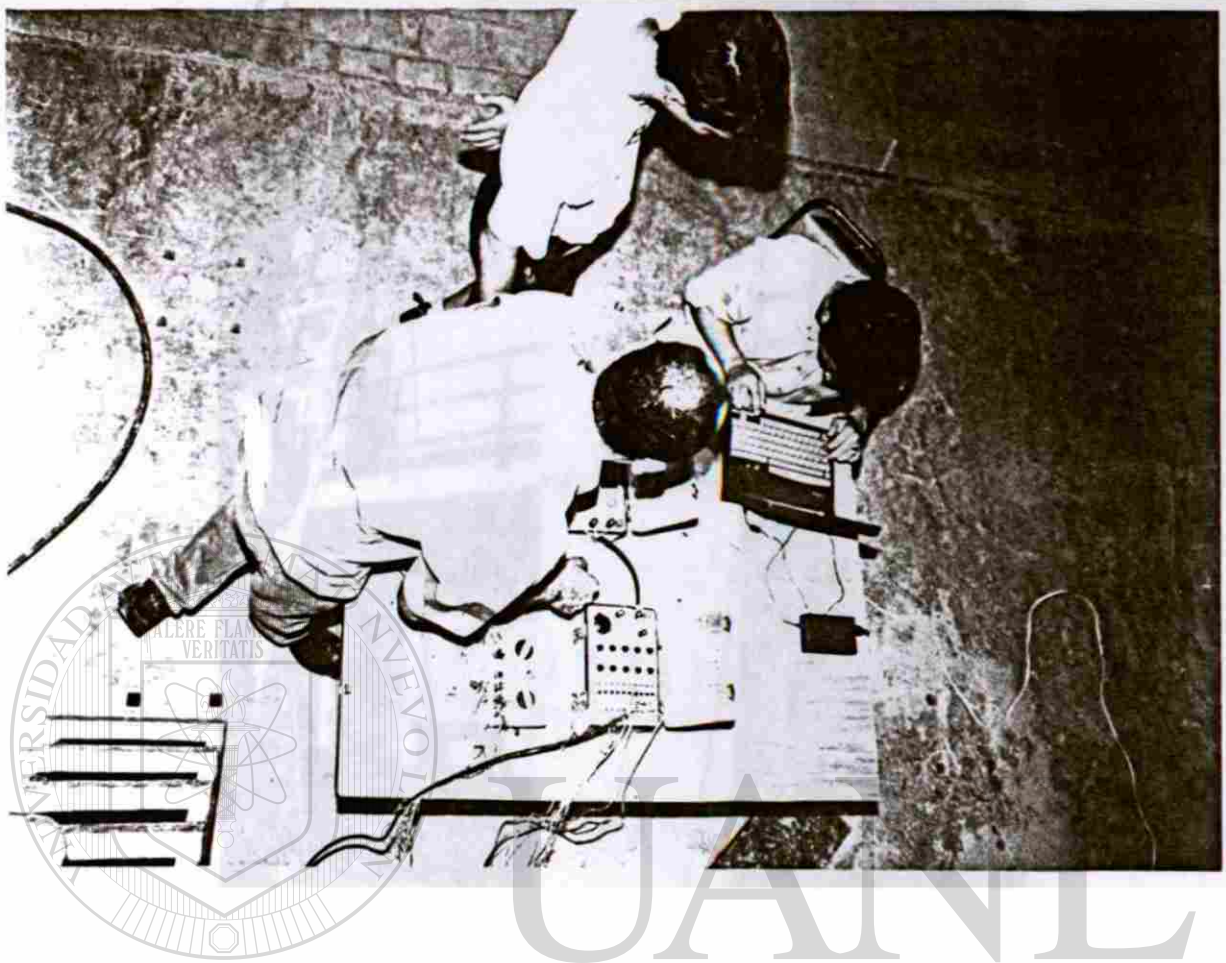




**FOTO 8.18** Una vez todo colocado y listo, conviene realizar una junta para prever todas las posibles eventualidades durante el ensaye.



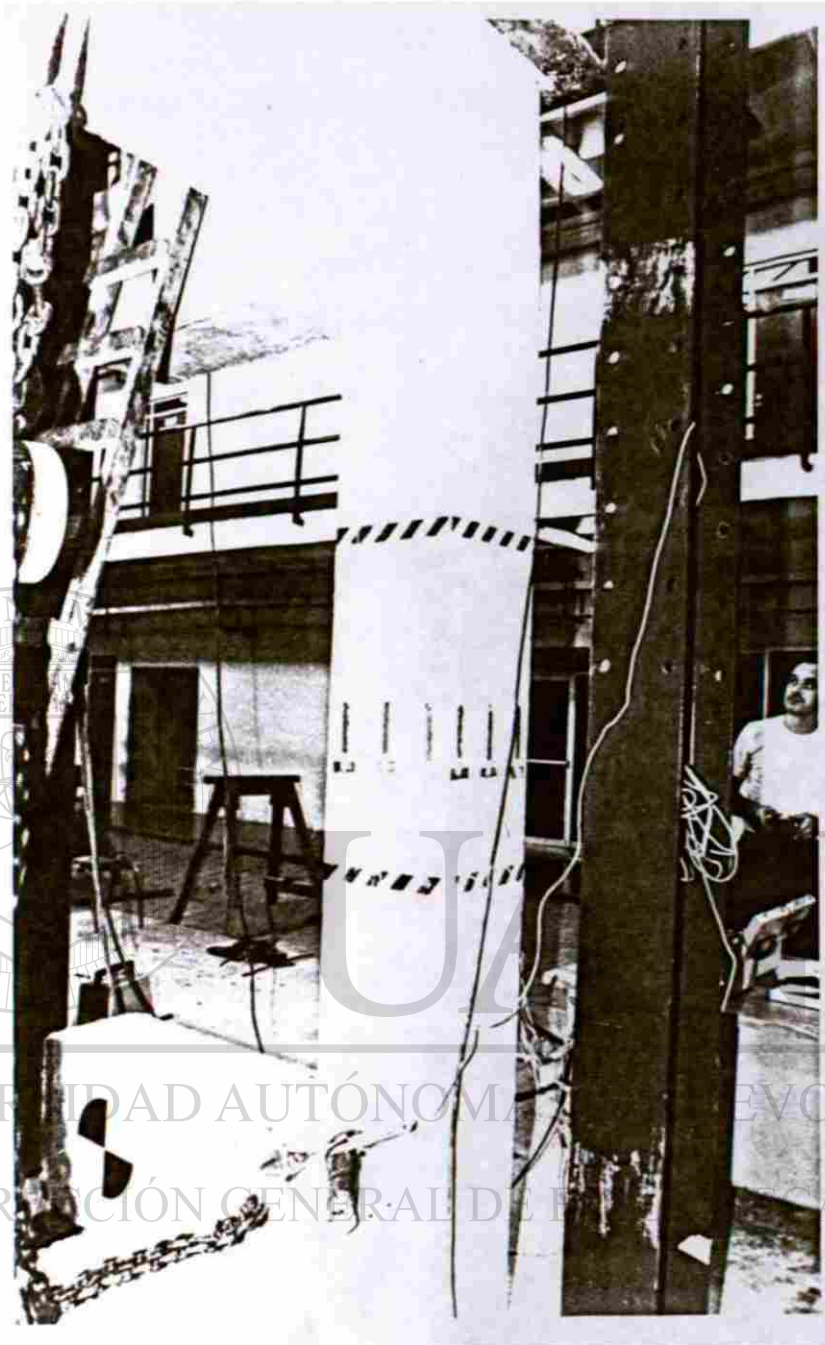
**FOTO 8.19 El Dr. Guillermo Villarreal Garza, asesor de ésta Tesis revisó todos los detalles del ensaye, también se contó con los comentarios del Ing. Rodolfo Meza y por supuesto la gran experiencia en ensayos del Ing. José Román Villa Bárcenas.**



**FOTO 8.20 — Adquisición de datos durante el ensaye.**

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

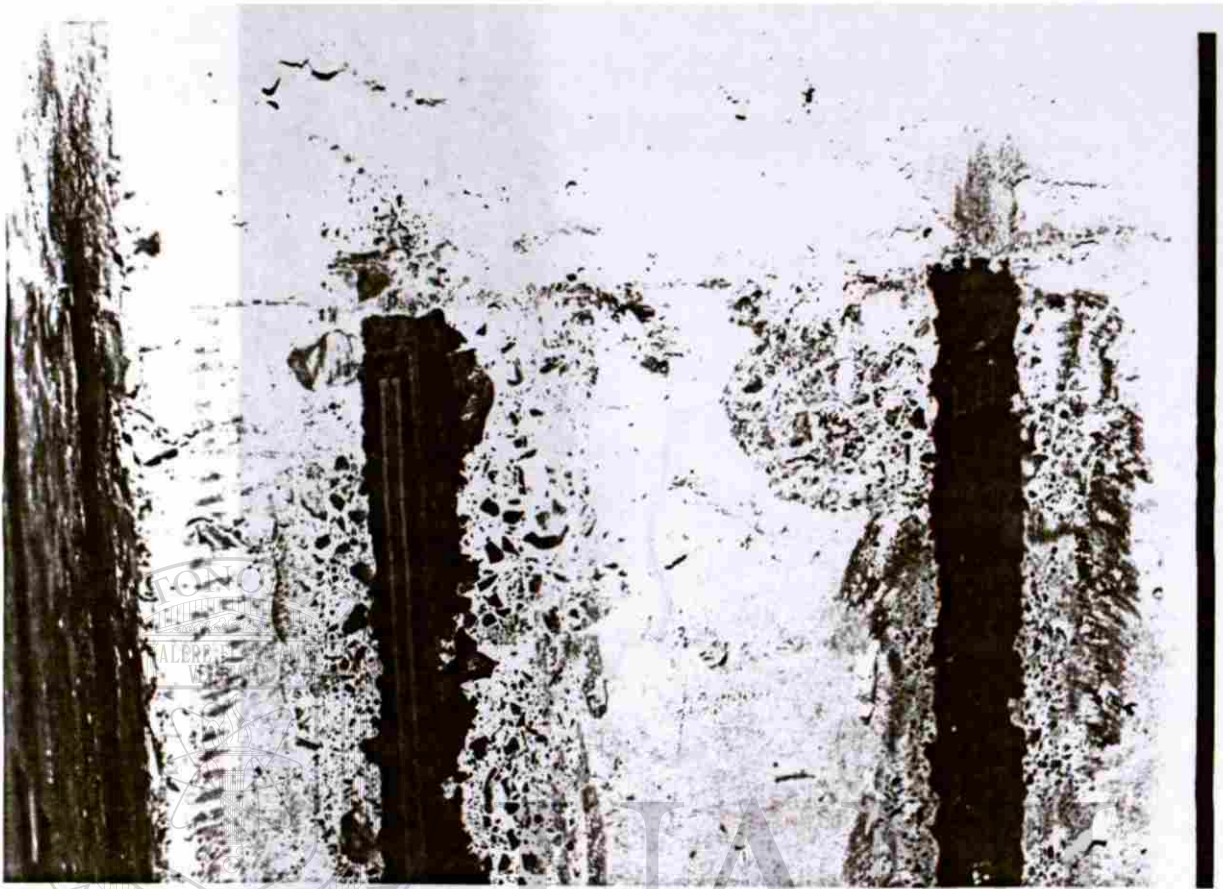
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



**FOTO 8.21 Se muestran grietas en la columna.**



**FOTO 8.22** Detalle de strain gage fallado por el paso de una grieta transversal a él.



**FOTO 8.23** Dos strain gages fallados por grietas. La configuración de las grietas fue que todas ellas eran paralelas entre sí y perpendiculares el eje de la columna, son inevitables y representan un problema para la medición con los strain gages.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



**FOTO 8.24** Detalle de grieta por flexión presentada.

## **DESCRIPCION DEL ENSAYE**

Se tomó como un parámetro invariable, la deformación máxima del concreto como  $\epsilon = 0.001$ .

1.- Para cargas axiales de 0 ton, 10 ton, 20 ton, 30 ton y 40 ton, y cero momento en ambas direcciones, se leyeron las deformaciones en los 20 strain gages.

2.- Para incrementos  $\Delta P_x = 10$  ton comenzando en 0 ton hasta 40 ton, aplicar un momento igual en cada brazo  $M_x = M_y$  de forma que la fibra más esforzada en compresión sea de 0.001 .

3.- Para incrementos  $\Delta P_x = 10$  ton comenzando en 0 ton y hasta 40 ton, aplicar una relación de momentos  $M_x$  vs.  $M_y$  ( $M_x = 0.18M_y$ ) de forma que la fibra más esforzada a compresión sea de 0.001 .

4.- Para incrementos  $\Delta P_x = 10$  ton comenzando en 0 ton y hasta 40 ton, aplicar una relación de momentos  $M_x$  vs.  $M_y$  ( $M_x = 0.57M_y$ ) de forma que la fibra más esforzada en compresión sea de 0.001 .

5.- Para incrementos  $\Delta P_x = 10$  ton comenzando en 0 ton y hasta 40 ton, aplicar una relación  $M_x = 0$   $M_y$  de tal forma que la fibra más esforzada en compresión sea de 0.001 .



En las siguientes páginas se presenta el registro del ensayo de compresión del concreto del espécimen y su tabulación de esfuerzo contra deformación, para obtener el módulo de elasticidad; luego se presenta el registro de las mediciones en cada una de las celdas de carga y en cada strain gage.

Se graficó, los diferentes niveles de esfuerzo reportado por cada strain gage del concreto y en cada gráfica se especifica cual fué el momento aplicado en cada dirección así como la carga axial. En la primera gráfica se explica la dirección de la aplicación de los momentos. La carga axial siempre fué de compresión.

En las gráficas los esfuerzos indicados como negativos representan los esfuerzos de compresión.



UANL

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

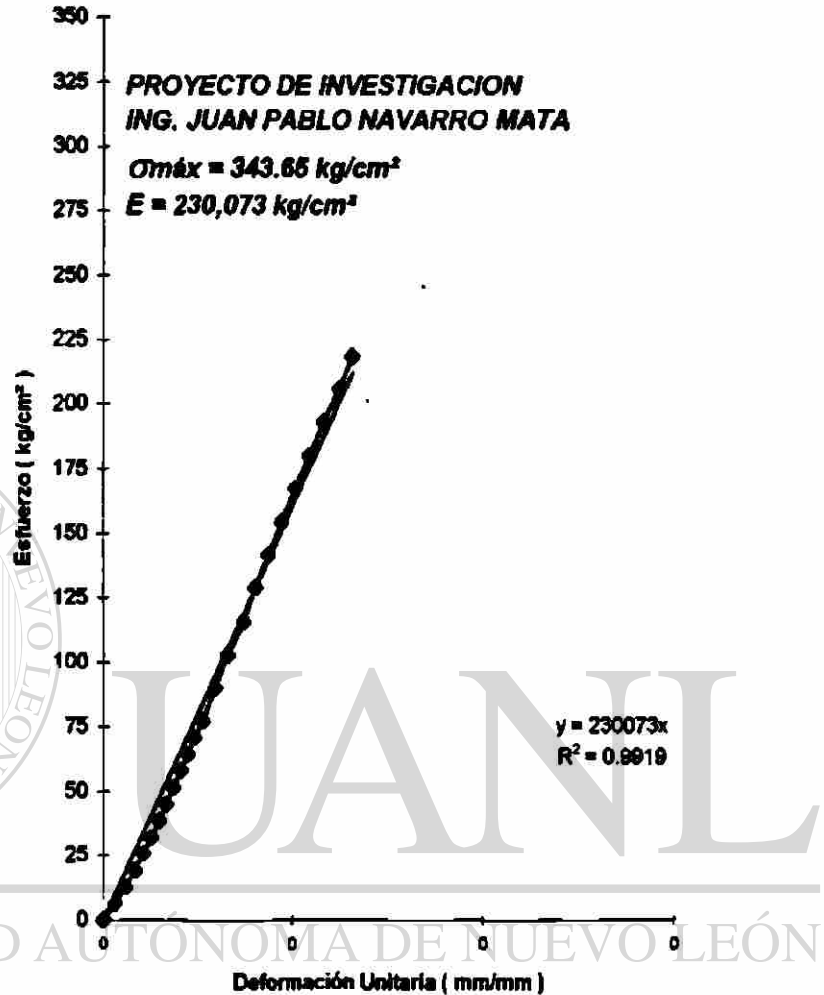


DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Cilindro No. Unico  
 Diámetro ( cm ) = 9.95  
 Area ( cm<sup>2</sup> ) = 77.76

| Deformación Inicial ( mm/mm )                | Esfuerzo ( kg/cm <sup>2</sup> ) |
|--|---------------------------------|
| 0.000000                                     | 0.00                            |
| 0.000042                                     | 6.43                            |
| 0.000081                                     | 12.86                           |
| 0.000116                                     | 19.29                           |
| 0.000147                                     | 25.72                           |
| 0.000178                                     | 32.15                           |
| 0.000207                                     | 38.58                           |
| 0.000232                                     | 45.01                           |
| 0.000260                                     | 51.44                           |
| 0.000287                                     | 57.87                           |
| 0.000312                                     | 64.30                           |
| 0.000337                                     | 70.73                           |
| 0.000365                                     | 77.16                           |
| 0.000410                                     | 90.02                           |
| 0.000459                                     | 102.89                          |
| 0.000515                                     | 115.75                          |
| 0.000559                                     | 128.61                          |
| 0.000608                                     | 141.47                          |
| 0.000658                                     | 154.33                          |
| 0.000709                                     | 167.19                          |
| 0.000762                                     | 180.05                          |
| 0.000815                                     | 192.91                          |
| 0.000874                                     | 205.77                          |
| 0.000921                                     | 218.63                          |
| 0.000972                                     | 231.49                          |
| 0.001037                                     | 244.35                          |
| 0.001044                                     | 257.21                          |
| 0.001222                                     | 270.07                          |
| 0.001286                                     | 282.94                          |
| 0.001457                                     | 308.66                          |
| 0.001705                                     | 334.38                          |
| <b>σ<sub>máx</sub> ( kg/cm<sup>2</sup> )</b> | <b>343.65</b>                   |

## ENSAYE DE COMPRESION EN CILINDRO DE CONCRETO



| CANAL     |            | $P_x$    |           |          |             | $M_x$      |          |            | $M_y$ |
|-----------|------------|----------|-----------|----------|-------------|------------|----------|------------|-------|
| Increment | 1 cel comp | P        | 2 cel mom | P        | 1om. (kg-m) | 3 cel carr | P        | mom(kg-m)  |       |
| 1         | 0          | 0        | 607       | 0        | 0           | 4283       | 9636.75  | 11498.5701 |       |
| 2         | 355        | 9340.05  | 543       | -336     | -409.651    | 4283       | 9636.75  | 11498.5701 |       |
| 3         | 1902       | 50041.62 | 0         | -3186.75 | -3885.29    | 0          | 0        | 0          |       |
| 4         | 1828       | 48042.06 | -378      | -5171.25 | -6304.79    | 4280       | 9630     | 11490.516  |       |
| 5         | 0          | 0        | 0         | -3186.75 | -3885.29    | 0          | 0        | 0          |       |
| 6         | 0          | 0        | -704      | -6882.75 | -8391.45    | 0          | 0        | 0          |       |
| 7         | 395        | 10392.45 | -704      | -6882.75 | -8391.45    | 0          | 0        | 0          |       |
| 8         | 760        | 19995.6  | -1062     | -8762.25 | -10682.9    | 0          | 0        | 0          |       |
| 9         | 1140       | 29993.4  | -999      | -8431.5  | -10279.7    | 0          | 0        | 0          |       |
| 10        | 1520       | 39991.2  | -1041     | -8652    | -10548.5    | 0          | 0        | 0          |       |
| 11        | 0          | 0        | -587      | -6268.5  | -7642.56    | -582       | -1309.5  | -1562.4954 |       |
| 12        | 380        | 9997.8   | -881      | -7812    | -9524.39    | -872       | -1962    | -2341.0584 |       |
| 13        | 780        | 20521.8  | -817      | -7476    | -9114.74    | -804       | -1809    | -2158.4988 |       |
| 14        | 1140       | 29993.4  | -698      | -6851.25 | -8353.04    | -734       | -1651.5  | -1970.5698 |       |
| 15        | 1520       | 39991.2  | -712      | -6924.75 | -8442.66    | -710       | -1597.5  | -1906.137  |       |
| 16        | 1900       | 49989    | -629      | -6489    | -7911.39    | -631       | -1419.75 | -1694.0457 |       |
| 17        | -1824      | -47989.4 |           | -3186.75 | -3885.29    | -308       | -693     | -826.8876  |       |
| 18        | 380        | 9997.8   | -1282     | -9917.25 | -12091.1    | -215       | -483.75  | -577.2105  |       |
| 19        | 760        | 19995.6  | -1067     | -8788.5  | -10714.9    | -182       | -409.5   | -488.6154  |       |
| 20        | 1141       | 30019.71 | -1024     | -8562.75 | -10439.7    | -166       | -373.5   | -445.6602  |       |
| 21        | 1521       | 40017.51 | -855      | -7675.5  | -9357.97    | -150       | -337.5   | -402.705   |       |
| 22        | 1901       | 50015.31 | -593      | -6300    | -7680.96    | -106       | -238.5   | -284.5782  |       |
| 23        | 0          | 0        | -737      | -7056    | -8602.68    | -353       | -794.25  | -947.6991  |       |
| 24        | 380        | 9997.8   | -640      | -6546.75 | -7981.8     | -306       | -688.5   | -821.5182  |       |
| 25        | 760        | 19995.6  | -700      | -6861.75 | -8365.85    | -340       | -765     | -912.798   |       |
| 26        | 1141       | 30019.71 | -542      | -6032.25 | -7354.52    | -282       | -634.5   | -757.0854  |       |
| 27        | 1521       | 40017.51 | -574      | -6200.25 | -7559.34    | -285       | -641.25  | -765.1395  |       |
| 28        | 1901       | 50015.31 | -487      | -5743.5  | -7002.48    | -273       | -614.25  | -732.9231  |       |

| 1       | 1          | 1          | 2       | 2          | 2          | 3       | 3          | 3          |
|---------|------------|------------|---------|------------|------------|---------|------------|------------|
| 1 acero | Def.uni.(m | Esf.(kg/cm | 2 acero | Def.uni.(m | Esf.(kg/cm | 3 acero | Def.uni.(m | Esf.(kg/cm |
| -1345   | 0          | 0          | -3843   | 0          | 0          | -1928   | 0          | 0          |
| -1385   | -20        | -42        | -3881   | -38        | -79.8      | -1958   | -30        | -83        |
| -1500   | -155       | -325.5     | -3988   | -145       | -304.5     | -2069   | -141       | -296.1     |
| -1457   | -112       | -235.2     | -3768   | 75         | 157.5      | -2298   | -370       | -777       |
| 1842    | 3187       | 6692.7     | -1010   | 2833       | 5949.3     | 4270    | 6198       | 13015.8    |
| -547    | 798        | 1675.8     | -3571   | 272        | 571.2      | -2187   | -259       | -543.9     |
| -667    | 678        | 1423.8     | -3850   | -7         | -14.7      | -2243   | -315       | -661.5     |
| -902    | 443        | 930.3      | -3690   | 153        | 321.3      | -2237   | -309       | -648.9     |
| -1029   | 316        | 663.6      | -3714   | 129        | 270.9      | -2276   | -348       | -730.8     |
| -1103   | 242        | 508.2      | -3721   | 122        | 256.2      | -2325   | -397       | -833.7     |
| -1288   | 57         | 119.7      | -3708   | 135        | 283.5      | -975    | 953        | 2001.3     |
| 8612    | 9957       | 20909.7    | -19850  | -16007     | -33614.7   | -4204   | -2276      | -4779.6    |
| 261     | 1606       | 3372.6     | -6004   | -2161      | -4538.1    | -1187   | 741        | 1556.1     |
| -1314   | 31         | 65.1       | -3507   | 336        | 705.6      | -640    | 1288       | 2704.8     |
| -1411   | -66        | -138.6     | -3467   | 376        | 789.6      | -652    | 1276       | 2679.6     |
| -1476   | -131       | -275.1     | -3477   | 366        | 768.6      | -677    | 1251       | 2627.1     |
| 33      | 1378       | 2893.8     | -3300   | 543        | 1140.3     | -1119   | 809        | 1698.9     |
| -404    | 941        | 1976.1     | -3349   | 494        | 1037.4     | -1163   | 765        | 1606.5     |
| -635    | 710        | 1491       | -3406   | 437        | 917.7      | -1220   | 708        | 1486.8     |
| -572    | 773        | 1623.3     | -3656   | 187        | 392.7      | -1358   | 570        | 1197       |
| -893    | 452        | 949.2      | -3400   | 443        | 930.3      | -1368   | 560        | 1176       |
| -141    | 1204       | 2528.4     | -3433   | 410        | 861        | -1478   | 450        | 945        |
| -450    | 895        | 1879.5     | -3780   | 63         | 132.3      | -797    | 1131       | 2375.1     |
| -807    | 538        | 1129.8     | -3306   | 537        | 1127.7     | -788    | 1140       | 2394       |
| -894    | 451        | 947.1      | -3315   | 528        | 1108.8     | -834    | 1094       | 2297.4     |
| -1071   | 274        | 575.4      | -3395   | 448        | 940.8      | -1159   | 769        | 1614.9     |
| -1067   | 278        | 583.8      | -3389   | 454        | 953.4      | -1144   | 784        | 1646.4     |
| -1178   | 167        | 350.7      | -3421   | 422        | 886.2      | -1237   | 691        | 1451.1     |

| 4       | 4           | 4           | 5       | 5           | 5           | 1     | 1           | 1           |
|---------|-------------|-------------|---------|-------------|-------------|-------|-------------|-------------|
| 4 acero | Def.uni.(m) | Esf.(kg/cm) | 5 acero | Def.uni.(m) | Esf.(kg/cm) | 1 con | Def.uni.(m) | Esf.(kg/cm) |
| 80      | 0           | 0           | -212    | 0           | 0           | -2566 | 0           | 0           |
| 11      | -69         | -144.9      | -258    | -46         | -96.6       | -2582 | -16         | -3.792      |
| -64     | -144        | -302.4      | -381    | -149        | -312.9      | -2759 | -193        | -45.741     |
| 511     | 431         | 905.1       | -126    | 86          | 180.6       | -2744 | -178        | -42.186     |
| 1208    | 1128        | 2368.8      | 969     | 1181        | 2480.1      | -2631 | -65         | -15.405     |
| 2448    | 2368        | 4972.8      | 981     | 1173        | 2483.3      | -2461 | 105         | 24.885      |
| 2128    | 2048        | 4300.8      | 867     | 1079        | 2265.9      | -2524 | 42          | 9.954       |
| 2023    | 1943        | 4080.3      | 625     | 837         | 1757.7      | -2541 | 25          | 5.925       |
| 1800    | 1720        | 3612        | 488     | 698         | 1465.8      | -2562 | 4           | 0.948       |
| 1729    | 1649        | 3462.9      | 428     | 640         | 1344        | -2592 | -26         | -6.162      |
| 1999    | 1919        | 4029.9      | 1242    | 1454        | 3053.4      | -3121 | -555        | -131.535    |
| 1835    | 1755        | 3685.5      | 14760   | 14972       | 31441.2     | -3241 | -675        | -159.975    |
| 2405    | 2325        | 4882.5      | 4037    | 4249        | 8922.9      | -3300 | -734        | -173.958    |
| 2335    | 2255        | 4735.5      | 1629    | 1841        | 3866.1      | -3337 | -771        | -182.727    |
| 2337    | 2257        | 4739.7      | 1578    | 1790        | 3759        | -3442 | -876        | -207.612    |
| 2131    | 2051        | 4307.1      | 1409    | 1621        | 3404.1      | -3248 | -682        | -161.634    |
| 1979    | 1899        | 3987.9      | 840     | 1052        | 2209.2      | -2441 | 125         | 29.625      |
| 1907    | 1827        | 3836.7      | 730     | 942         | 1978.2      | -2470 | 96          | 22.752      |
| 1876    | 1796        | 3771.6      | 692     | 904         | 1898.4      | -2534 | 32          | 7.584       |
| 1860    | 1780        | 3738        | 886     | 1098        | 2305.8      | -2589 | -23         | -5.451      |
| 1860    | 1780        | 3738        | 653     | 865         | 1816.5      | -2689 | -123        | -29.151     |
| 1845    | 1765        | 3706.5      | 653     | 865         | 1816.5      | -2780 | -214        | -50.718     |
| 1864    | 1784        | 3748.4      | 1093    | 1305        | 2740.5      | -2648 | -82         | -19.434     |
| 1840    | 1760        | 3696        | 686     | 898         | 1885.8      | -2761 | -195        | -46.215     |
| 1836    | 1756        | 3687.6      | 678     | 890         | 1869        | -2876 | -310        | -73.47      |
| 1857    | 1777        | 3731.7      | 644     | 856         | 1797.6      | -2946 | -380        | -90.06      |
| 1865    | 1785        | 3748.5      | 640     | 852         | 1789.2      | -2951 | -385        | -91.245     |
| 1849    | 1769        | 3714.9      | 631     | 843         | 1770.3      | -3049 | -483        | -114.471    |

| 2     | 2           | 2           | 3     | 3           | 3           | 4     | 4           | 4           |
|-------|-------------|-------------|-------|-------------|-------------|-------|-------------|-------------|
| 2 con | Def.uni.(m) | Esf.(kg/cm) | 3 con | Def.uni.(m) | Esf.(kg/cm) | 4 con | Def.uni.(m) | Esf.(kg/cm) |
| -3450 | 0           | 0           | -845  | 0           | 0           | -3193 | 0           | 0           |
| -3456 | -6          | -1.422      | -750  | 1595        | 378.015     | -3185 | 8           | 1.896       |
| -3619 | -169        | -40.053     | -617  | 228         | 54.036      | -3309 | -116        | -27.492     |
| -3894 | -444        | -105.228    | -1074 | -229        | -54.273     | -3813 | -620        | -146.94     |
| -4145 | -695        | -164.715    | -1250 | -405        | -95.985     | -4204 | -1011       | -239.607    |
| -3861 | -411        | -97.407     | -1243 | -398        | -94.326     | -4322 | -1129       | -267.573    |
| -4007 | -557        | -132.009    | -1270 | -425        | -100.725    | -4313 | -1120       | -265.44     |
| -4033 | -583        | -138.171    | -1224 | -379        | -89.823     | -4313 | -1120       | -265.44     |
| -4089 | -639        | -151.443    | -1243 | -398        | -94.326     | -4313 | -1120       | -265.44     |
| -4165 | -715        | -169.455    | -1249 | -404        | -95.748     | -4320 | -1127       | -267.099    |
| -4264 | -814        | -192.918    | -858  | 187         | 44.319      | -3419 | -226        | -53.562     |
| -4701 | -1251       | -296.487    | -136  | 709         | 168.033     | -3165 | 28          | 6.636       |
| -4450 | -1000       | -237        | -74   | 771         | 182.727     | -3193 | 0           | 0           |
| -4442 | -992        | -235.104    | -167  | 678         | 160.686     | -3154 | 39          | 9.243       |
| -4450 | -1000       | -237        | -496  | 349         | 82.713      | -3248 | -55         | -13.035     |
| -4536 | -1086       | -257.382    | 19    | 864         | 204.768     | -3296 | -103        | -24.411     |
| -4703 | -1253       | -296.961    | -860  | -15         | -3.555      | -4807 | -1614       | -382.518    |
| -4441 | -991        | -234.867    | -164  | 681         | 161.397     | -4245 | -1052       | -249.324    |
| -4450 | -1000       | -237        | -1316 | -471        | -111.627    | -4042 | -849        | -201.213    |
| -4460 | -1010       | -239.37     | -1308 | -463        | -109.731    | -4047 | -854        | -202.398    |
| -4450 | -1000       | -237        | -1231 | -386        | -91.482     | -4005 | -812        | -192.444    |
| -4450 | -1000       | -237        | -1045 | -200        | -47.4       | -3961 | -768        | -182.016    |
| -4450 | -1000       | -237        | -1080 | -235        | -55.695     | -3673 | -480        | -113.76     |
| -4450 | -1000       | -237        | -937  | -92         | -21.804     | -3572 | -379        | -89.823     |
| -4450 | -1000       | -237        | -1034 | -189        | -44.793     | -3654 | -461        | -109.257    |
| -4450 | -1000       | -237        | -1015 | -170        | -40.29      | -3779 | -586        | -138.882    |
| -4450 | -1000       | -237        | -1124 | -279        | -66.123     | -3829 | -636        | -150.732    |
| -4450 | -1000       | -237        | -1093 | -248        | -58.776     | -3803 | -610        | -144.57     |

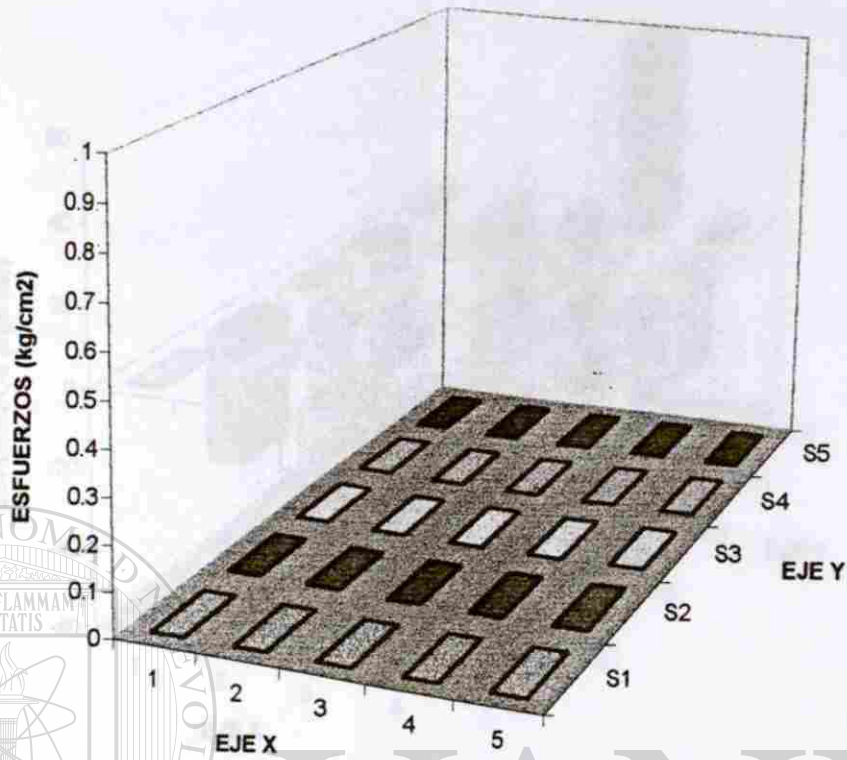
| 5     | 5           | 5          | 6     | 6           | 6          | 7     | 7           | 7          |
|-------|-------------|------------|-------|-------------|------------|-------|-------------|------------|
| 5 con | Def.uni.(m) | Esf.(kg/cm | 6 con | Def.uni.(m) | Esf.(kg/cm | 7 con | Def.uni.(m) | Esf.(kg/cm |
| -3049 | 0           | 0          | -2567 | 0           | 0          | -3073 | 0           | 0          |
| -2955 | 94          | 22.278     | -2583 | -16         | -3.792     | -3100 | -27         | -6.399     |
| -3165 | -116        | -27.492    | -2597 | -30         | -7.11      | -3147 | -74         | -17.538    |
| -3703 | -654        | -154.998   | -2892 | -325        | -77.025    | -2950 | 123         | 29.151     |
| -3944 | -895        | -212.115   | -3073 | -506        | -119.922   | -2991 | 82          | 19.434     |
| -4218 | -1169       | -277.053   | -3052 | -485        | -114.945   | -2859 | 214         | 50.718     |
| -4050 | -1001       | -237.237   | -2997 | -430        | -101.91    | -2902 | 171         | 40.527     |
| -3987 | -938        | -222.306   | -2999 | -432        | -102.384   | -2920 | 153         | 36.261     |
| -3862 | -813        | -192.681   | -3017 | -450        | -106.65    | -2946 | 127         | 30.099     |
| -3779 | -730        | -173.01    | -3021 | -454        | -107.598   | -2946 | 127         | 30.099     |
| -2643 | 406         | 96.222     | -2374 | 193         | 45.741     | -2808 | 465         | 110.205    |
| -1004 | 2045        | 484.665    | -1387 | 1180        | 279.66     | 0     | 0           | 0          |
| 1067  | 4116        | 975.492    | -1442 | 1125        | 266.625    | 0     | 0           | 0          |
| 946   | 3995        | 946.815    | -1454 | 1113        | 263.781    | 0     | 0           | 0          |
| 640   | 3689        | 874.293    | -1487 | 1080        | 255.96     | 0     | 0           | 0          |
| -2284 | 5333        | 1263.921   | -1543 | 1024        | 242.688    | 0     | 0           | 0          |
| 0     | 0           | 0          | 0     | 0           | 0          | 0     | 0           | 0          |
| 0     | 0           | 0          | 0     | 0           | 0          | 0     | 0           | 0          |
| 0     | 0           | 0          | 0     | 0           | 0          | 0     | 0           | 0          |
| 0     | 0           | 0          | 0     | 0           | 0          | 0     | 0           | 0          |
| 0     | 0           | 0          | 0     | 0           | 0          | 0     | 0           | 0          |
| 0     | 0           | 0          | 0     | 0           | 0          | 0     | 0           | 0          |
| 0     | 0           | 0          | 0     | 0           | 0          | 0     | 0           | 0          |
| 0     | 0           | 0          | 0     | 0           | 0          | 0     | 0           | 0          |
| 0     | 0           | 0          | 0     | 0           | 0          | 0     | 0           | 0          |
| 0     | 0           | 0          | 0     | 0           | 0          | 0     | 0           | 0          |
| 0     | 0           | 0          | 0     | 0           | 0          | 0     | 0           | 0          |
| 0     | 0           | 0          | 0     | 0           | 0          | 0     | 0           | 0          |
| 0     | 0           | 0          | 0     | 0           | 0          | 0     | 0           | 0          |

| 8     | 8          | 8          | 9     | 9          | 9          | 10     | 10         | 10         |
|-------|------------|------------|-------|------------|------------|--------|------------|------------|
| 8 con | Def.uni.(m | Esf.(kg/cm | 9 con | Def.uni.(m | Esf.(kg/cm | 10 con | Def.uni.(m | Esf.(kg/cm |
| -2214 | 0          | 0          | -3682 | 0          | 0          | -3284  | 0          | 0          |
| -2307 | -93        | -22.041    | -3678 | 4          | 0.948      | -3324  | -40        | -9.48      |
| -2397 | -183       | -43.371    | -3662 | 20         | 4.74       | -3425  | -141       | -33.417    |
| 0     | 0          | 0          | -3643 | 39         | 9.243      | -3318  | -34        | -8.058     |
| 0     | 0          | 0          | -3671 | 11         | 2.607      | -3325  | -41        | -9.717     |
| 0     | 0          | 0          | 0     | 0          | 0          | -3334  | -50        | -11.85     |
| 0     | 0          | 0          | 0     | 0          | 0          | -3342  | -58        | -13.746    |
| 0     | 0          | 0          | 0     | 0          | 0          | -3346  | -62        | -14.694    |
| 0     | 0          | 0          | 0     | 0          | 0          | -3353  | -69        | -16.353    |
| 0     | 0          | 0          | 0     | 0          | 0          | -3336  | -52        | -12.324    |
| 0     | 0          | 0          | 0     | 0          | 0          | -3678  | -394       | -93.378    |
| 0     | 0          | 0          | 0     | 0          | 0          | -3069  | 215        | 50.955     |
| 0     | 0          | 0          | 0     | 0          | 0          | -3082  | 202        | 47.874     |
| 0     | 0          | 0          | 0     | 0          | 0          | -3029  | 255        | 60.435     |
| 0     | 0          | 0          | 0     | 0          | 0          | -3073  | 211        | 50.007     |
| 0     | 0          | 0          | 0     | 0          | 0          | -3085  | 199        | 47.163     |
| 0     | 0          | 0          | 0     | 0          | 0          | -3154  | 130        | 30.81      |
| 0     | 0          | 0          | 0     | 0          | 0          | -3119  | 165        | 39.105     |
| 0     | 0          | 0          | 0     | 0          | 0          | -3088  | 196        | 46.452     |
| 0     | 0          | 0          | 0     | 0          | 0          | -3089  | 195        | 46.215     |
| 0     | 0          | 0          | 0     | 0          | 0          | -3081  | 203        | 48.111     |
| 0     | 0          | 0          | 0     | 0          | 0          | -3106  | 178        | 42.186     |
| 0     | 0          | 0          | 0     | 0          | 0          | -3086  | 198        | 46.926     |
| 0     | 0          | 0          | 0     | 0          | 0          | -3049  | 235        | 55.695     |
| 0     | 0          | 0          | 0     | 0          | 0          | -3074  | 210        | 49.77      |
| 0     | 0          | 0          | 0     | 0          | 0          | -3067  | 217        | 51.429     |
| 0     | 0          | 0          | 0     | 0          | 0          | -3111  | 173        | 41.001     |
| 0     | 0          | 0          | 0     | 0          | 0          | -3119  | 165        | 39.105     |

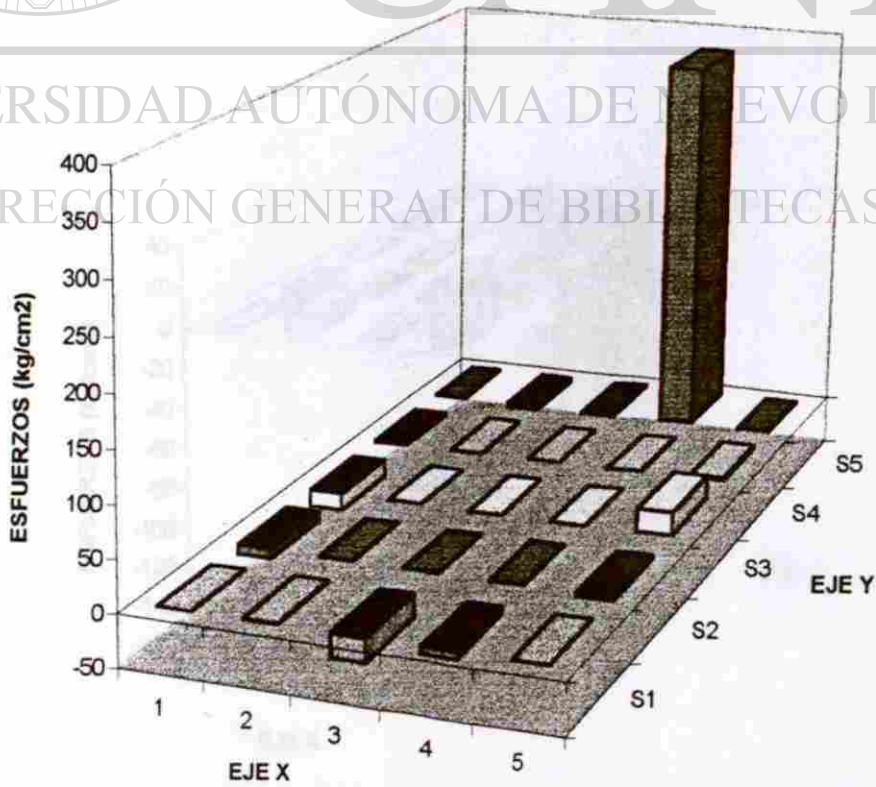


| 11     | 11         | 11         | 12     | 12         | 12           |  |  |
|--------|------------|------------|--------|------------|--------------|--|--|
| 11 con | Def.uni.(m | Esf.(kg/cm | 12 con | Def.uni.(m | Esf.(kg/cm2) |  |  |
| -4044  | 0          | 0          | -3014  | 0          | 0            |  |  |
| -4115  | -71        | -16.827    | -3022  | -8         | -1.898       |  |  |
| -4257  | -213       | -50.481    | -3179  | -165       | -39.105      |  |  |
| 0      | 0          | 0          | 0      | 0          | 0            |  |  |
| 0      | 0          | 0          | 0      | 0          | 0            |  |  |
| 0      | 0          | 0          | 0      | 0          | 0            |  |  |
| 0      | 0          | 0          | 0      | 0          | 0            |  |  |
| 0      | 0          | 0          | 0      | 0          | 0            |  |  |
| 0      | 0          | 0          | 0      | 0          | 0            |  |  |
| 0      | 0          | 0          | 0      | 0          | 0            |  |  |
| 0      | 0          | 0          | 0      | 0          | 0            |  |  |
| 0      | 0          | 0          | 0      | 0          | 0            |  |  |
| 0      | 0          | 0          | 0      | 0          | 0            |  |  |
| 0      | 0          | 0          | 0      | 0          | 0            |  |  |
| 0      | 0          | 0          | 0      | 0          | 0            |  |  |
| 0      | 0          | 0          | 0      | 0          | 0            |  |  |
| 0      | 0          | 0          | 0      | 0          | 0            |  |  |
| 0      | 0          | 0          | 0      | 0          | 0            |  |  |
| 0      | 0          | 0          | 0      | 0          | 0            |  |  |
| 0      | 0          | 0          | 0      | 0          | 0            |  |  |
| 0      | 0          | 0          | 0      | 0          | 0            |  |  |
| 0      | 0          | 0          | 0      | 0          | 0            |  |  |
| 0      | 0          | 0          | 0      | 0          | 0            |  |  |
| 0      | 0          | 0          | 0      | 0          | 0            |  |  |
| 0      | 0          | 0          | 0      | 0          | 0            |  |  |
| 0      | 0          | 0          | 0      | 0          | 0            |  |  |
| 0      | 0          | 0          | 0      | 0          | 0            |  |  |
| 0      | 0          | 0          | 0      | 0          | 0            |  |  |
| 0      | 0          | 0          | 0      | 0          | 0            |  |  |
| 0      | 0          | 0          | 0      | 0          | 0            |  |  |
| 0      | 0          | 0          | 0      | 0          | 0            |  |  |
| 0      | 0          | 0          | 0      | 0          | 0            |  |  |

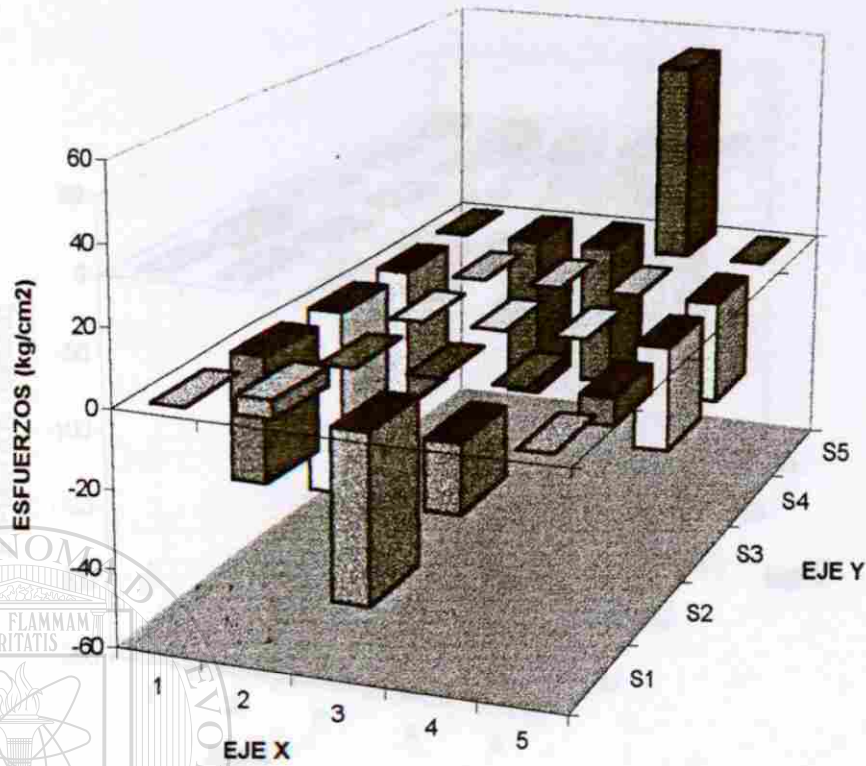
GRAFICA DE ESFUERZOS (kg/cm<sup>2</sup>) para  $P_x=0$  ,  $M_y=0$  ,  $M_x=0$  kg-m



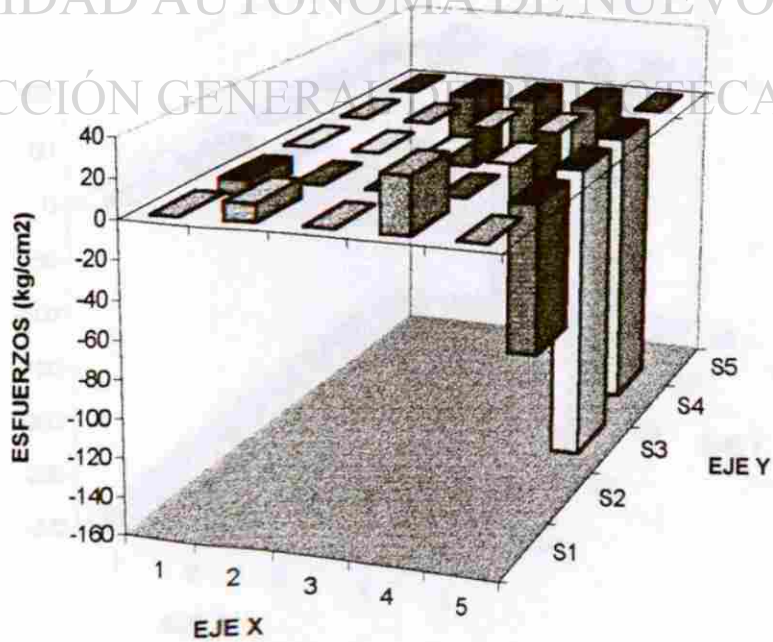
GRAFICA DE ESFUERZOS (kg/cm<sup>2</sup>) para  $P_x=9.34$  ton. ,  $M_x=0.4096$  ton.-m ,  $M_y=11.4905$  ton.-m



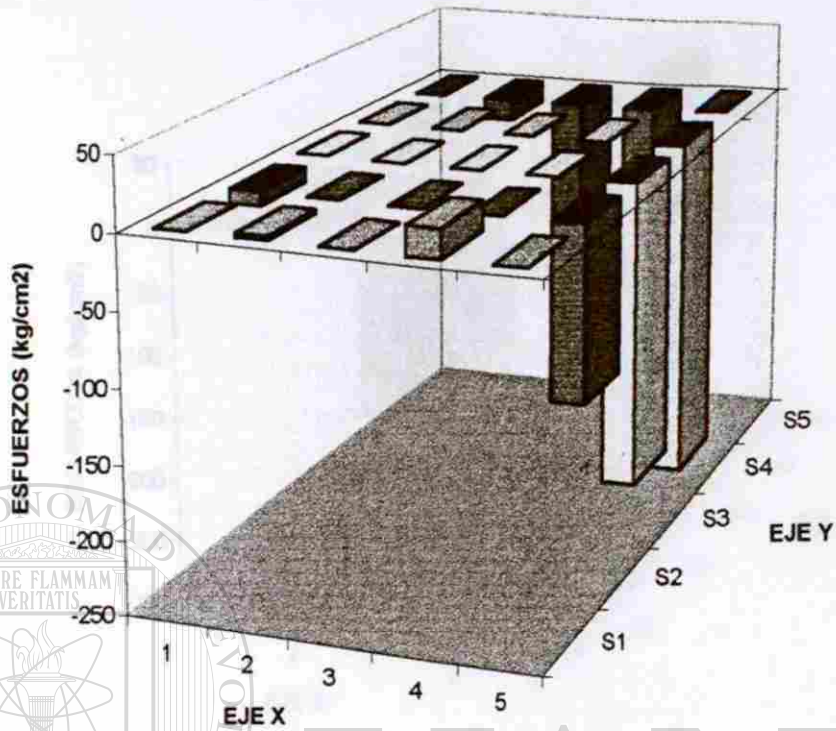
**GRAFICA DE ESFUERZOS (kg/cm<sup>2</sup>) para Px=50 ton. ,  
Mx=3.885 ton.-m , My=0 ton.-m**



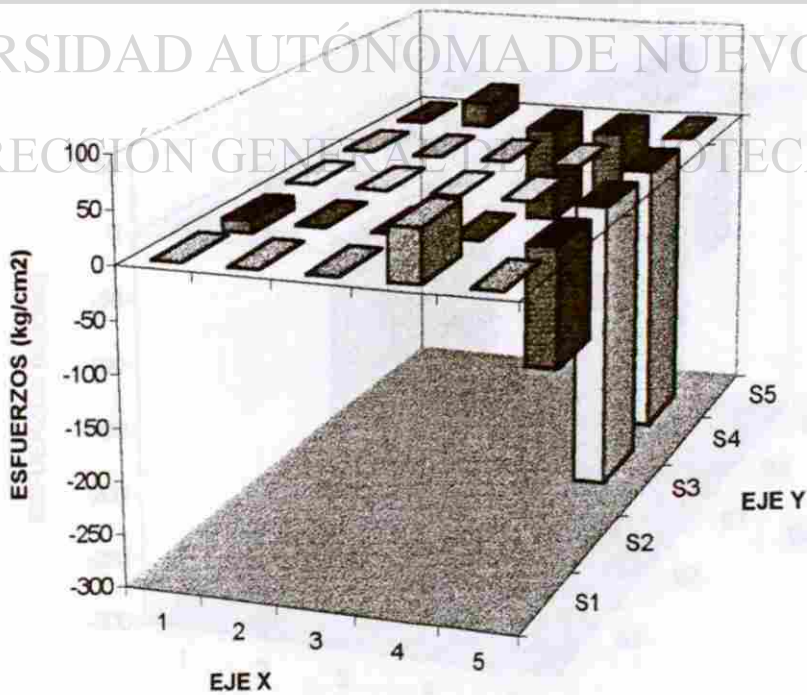
**GRAFICA DE ESFUERZOS (kg/cm<sup>2</sup>) para Px=48.042 ton. , Mx=6.304 ton.-  
m , My=11.482 ton.-m**



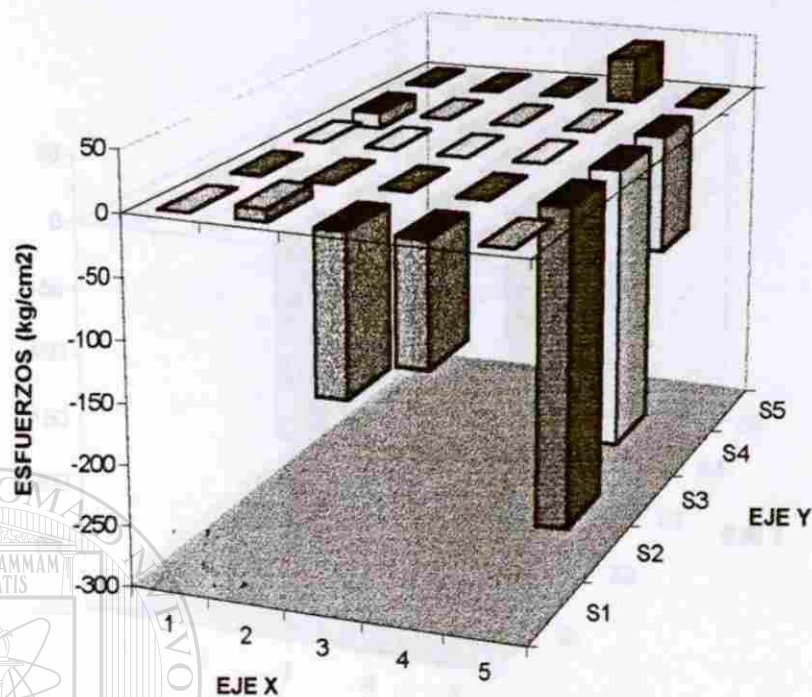
GRAFICA DE ESFUERZOS (kg/cm<sup>2</sup>) para  $P_x=0$  ton. ,  
 $M_x=3.855$  ton.-m ,  $M_y=0$  ton. -m



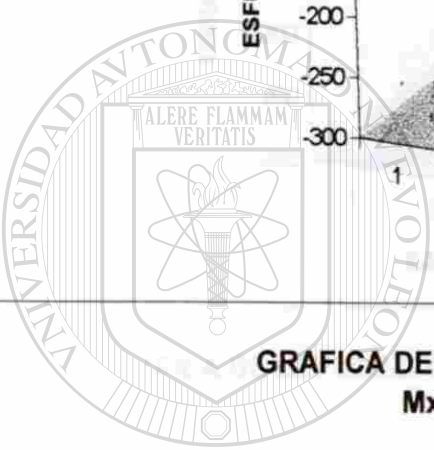
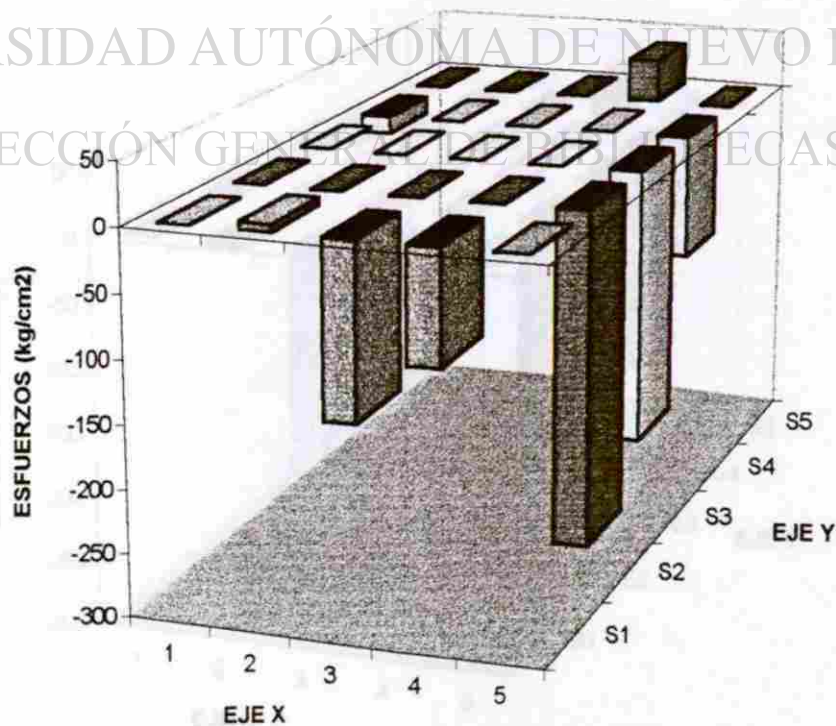
GRAFICA DE ESFUERZOS (kg/cm<sup>2</sup>) para  $P_x=0$  ton. ,  
 $M_x=8.391$  ton.-m ,  $M_y=0$  ton.-m



**GRAFICA DE ESFUERZOS (kg/cm<sup>2</sup>) para Px=10.392 ton. , Mx=8.391 ton.-m , My=0 ton.-m**



**GRAFICA DE ESFUERZOS (kg/cm<sup>2</sup>) para Px=20 ton. , Mx=10.682 ton.-m , My=0 ton.-m**

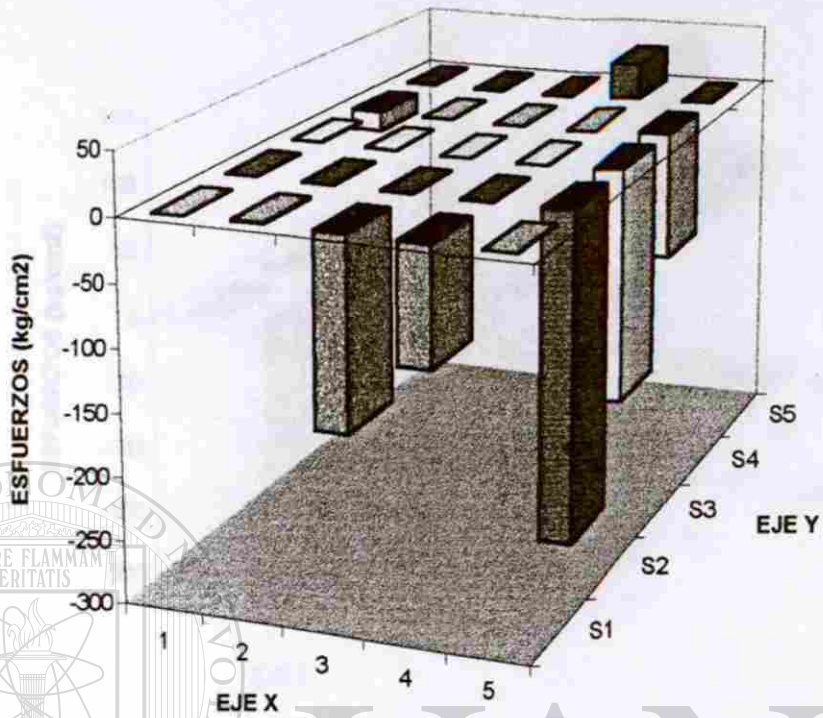


UANL

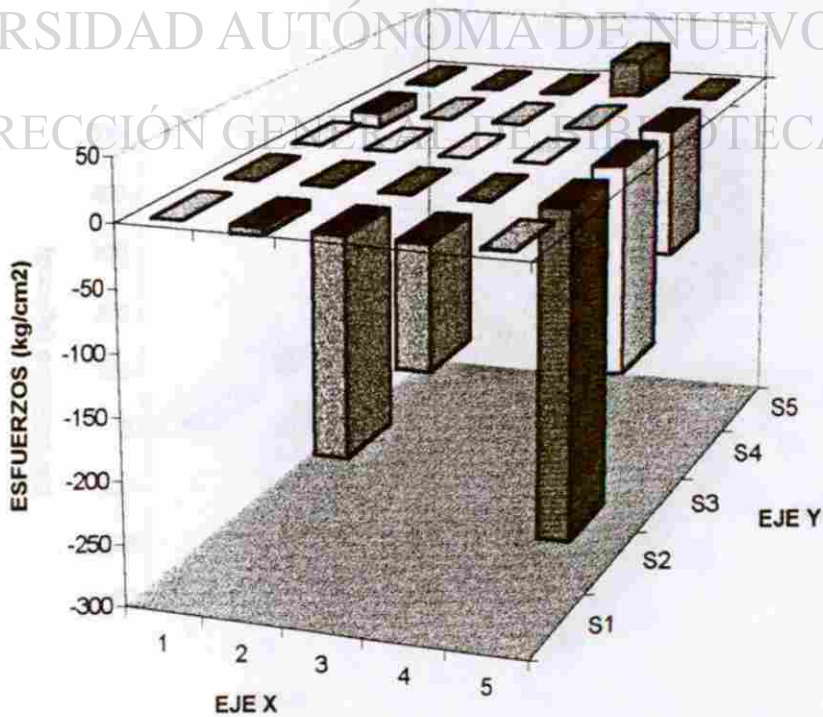
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

®

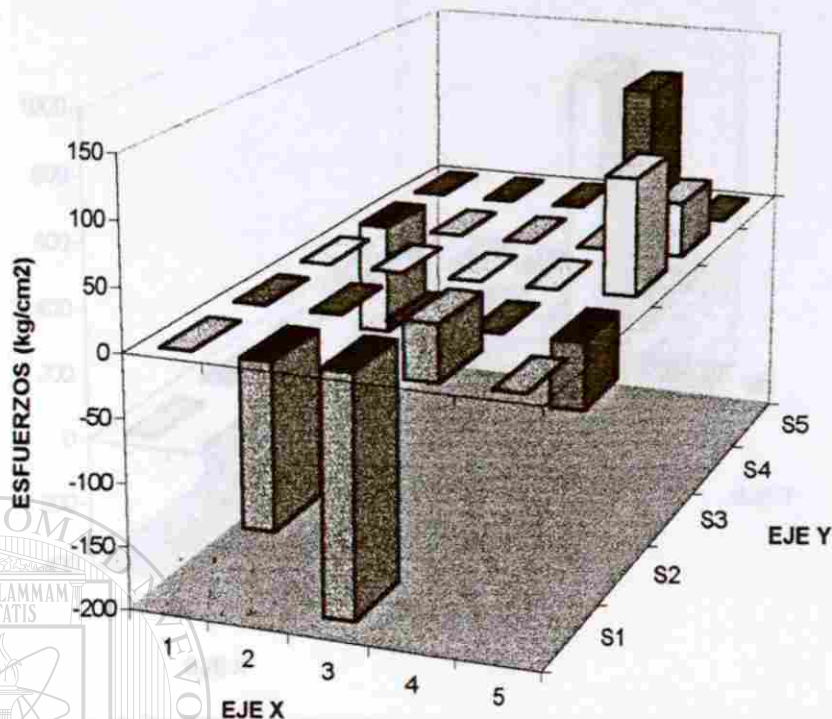
**GRAFICA DE ESFUERZOS (kg/cm<sup>2</sup>) para Px=30 ton. ,  
Mx=10.279 ton.-m , My=0 ton.-m**



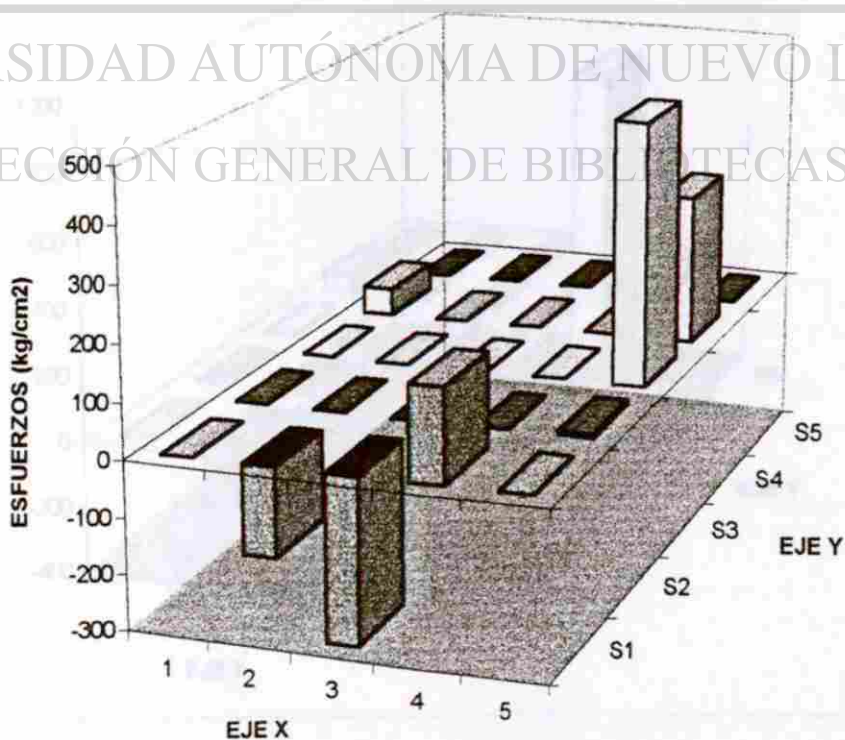
**GRAFICA DE ESFUERZOS (kg/cm<sup>2</sup>) para Px=40 ton. , Mx=10.548 ton.-m ,  
My=0 ton.-m**



**GRAFICA DE ESFUERZOS (kg/cm<sup>2</sup>) para Px=0 ton. ,  
Mx=7.642 ton.-m , My=1.57 ton.-m**



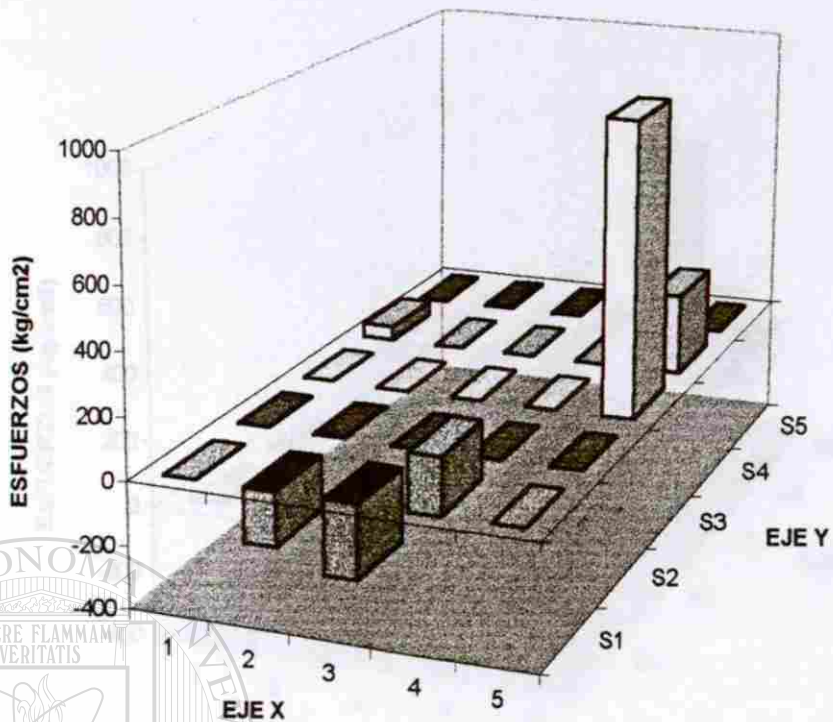
**GRAFICA DE ESFUERZOS (kg/cm<sup>2</sup>) para Px=10 ton. ,  
Mx=9.524 ton.-m , My=2.349 ton.-m**



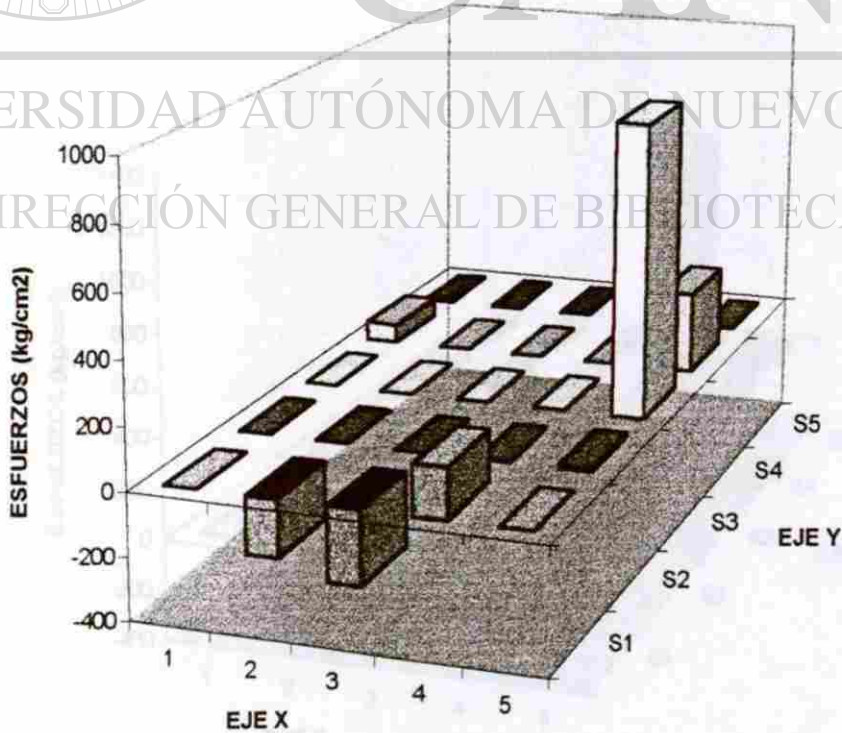
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

®

**GRAFICA DE ESFUERZOS (kg/cm<sup>2</sup>) para Px=20 ton. ,  
Mx=9.114 ton.-m , My=2.166 ton.-m**

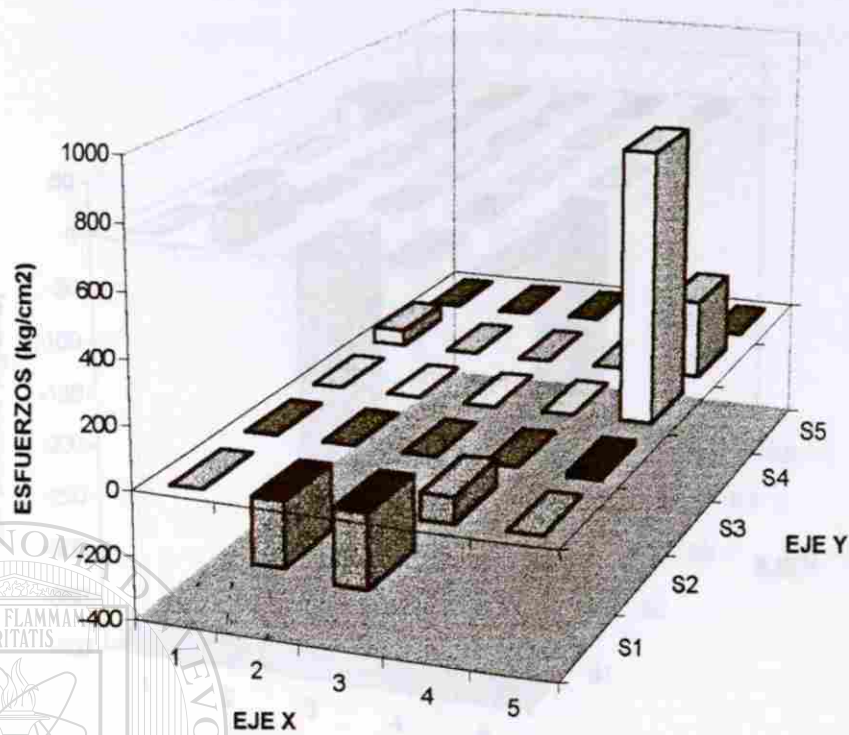


**GRAFICA DE ESFUERZOS (kg/cm<sup>2</sup>) para Px=30 ton. ,  
Mx=8.353 ton.-m , My=1.978 ton.-m**

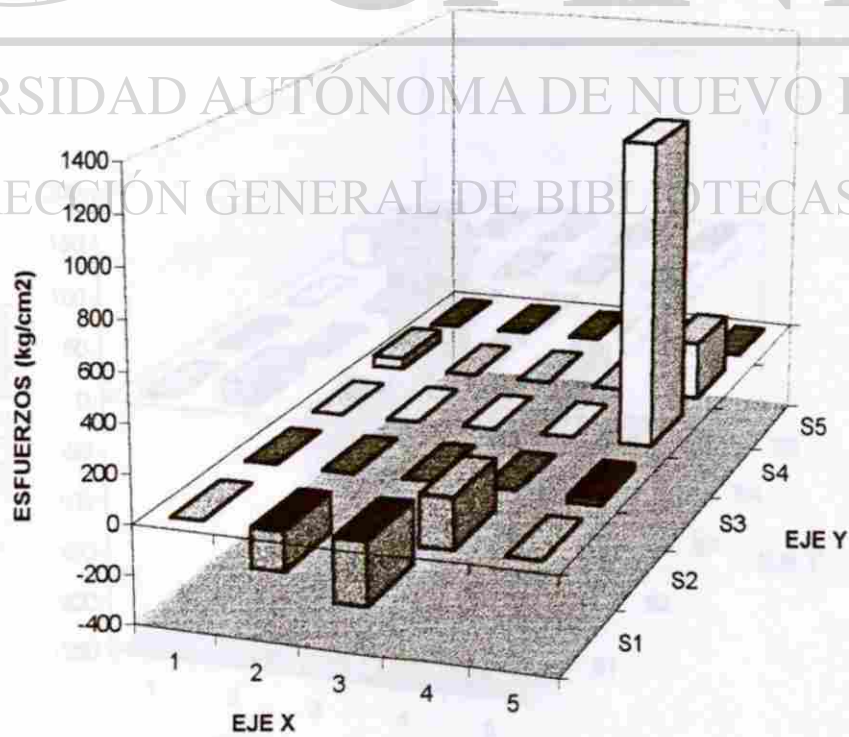




**GRAFICA DE ESFUERZOS (kg/cm<sup>2</sup>) para Px=40 ton. ,  
Mx=8.442 ton.-m , My=1.914 ton.-m**

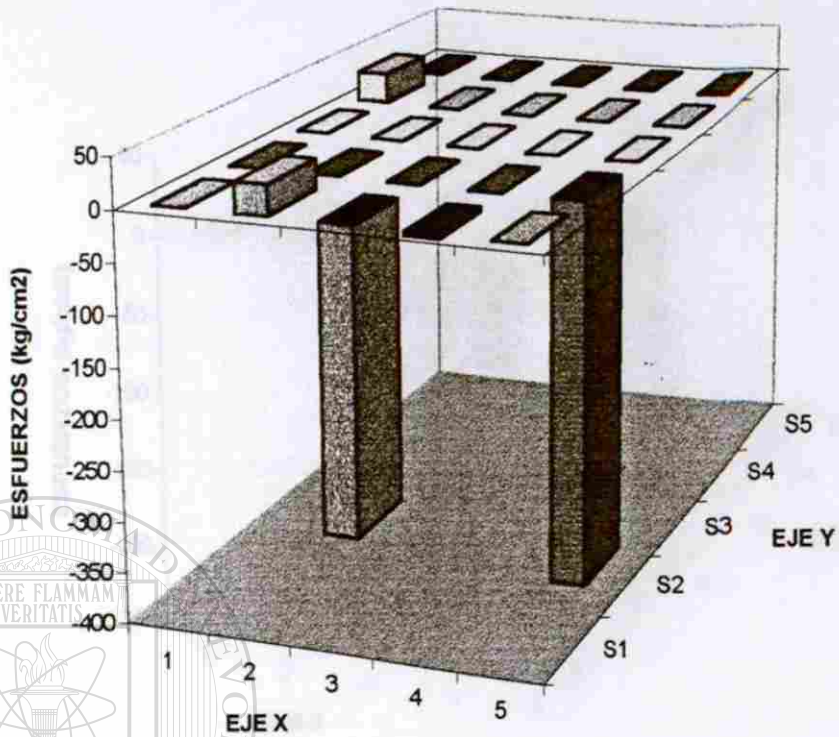


**GRAFICA DE ESFUERZOS (kg/cm<sup>2</sup>) para Px=50 ton. ,  
Mx=7.911 ton.-m , My=1.702 ton.-m**

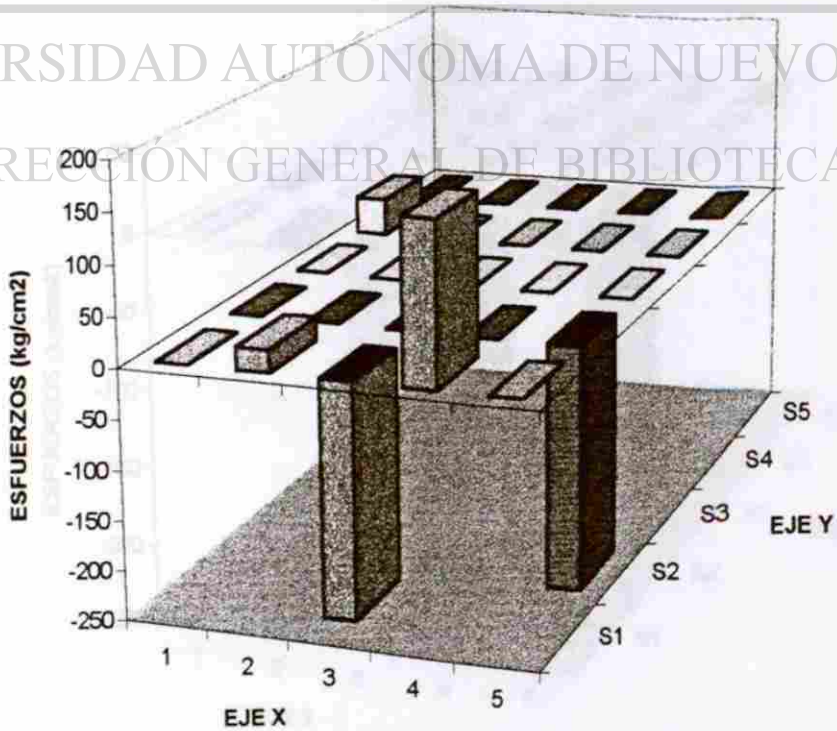


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

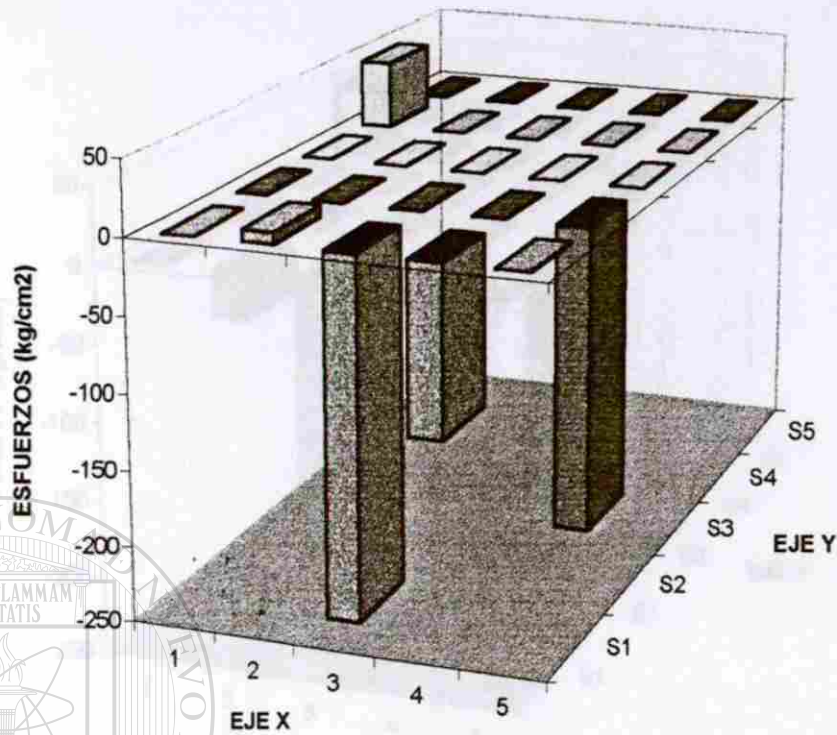
**GRAFICA DE ESFUERZOS (kg/cm<sup>2</sup>) para Px=48 ton. ,  
Mx=3.885 ton.-m , My=0.835 ton.-m**



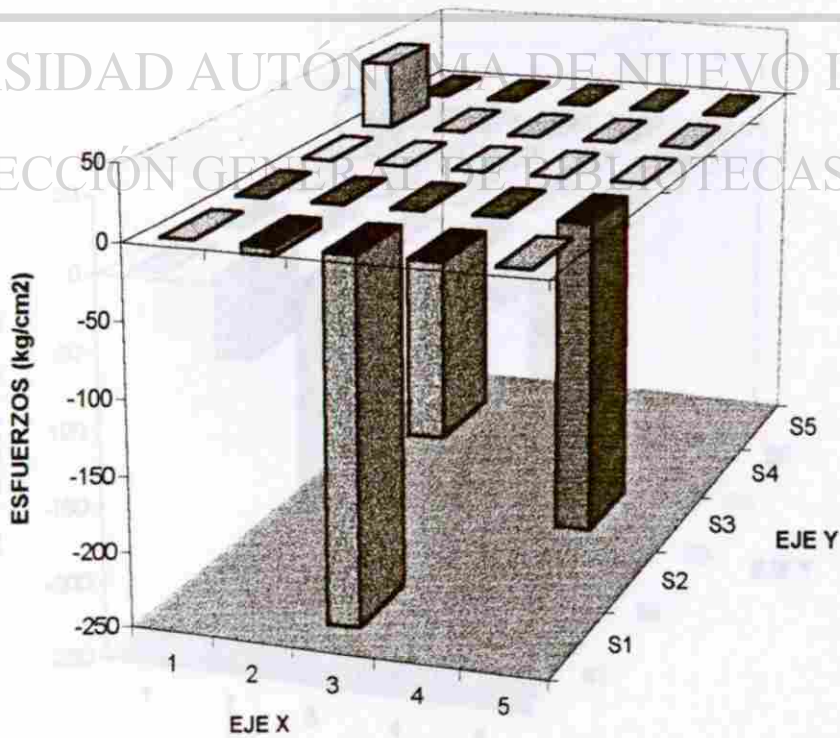
**GRAFICA DE ESFUERZOS (kg/cm<sup>2</sup>) para Px=10 ton. ,  
Mx=12.091 ton.-m , My=0.585 ton.-m**



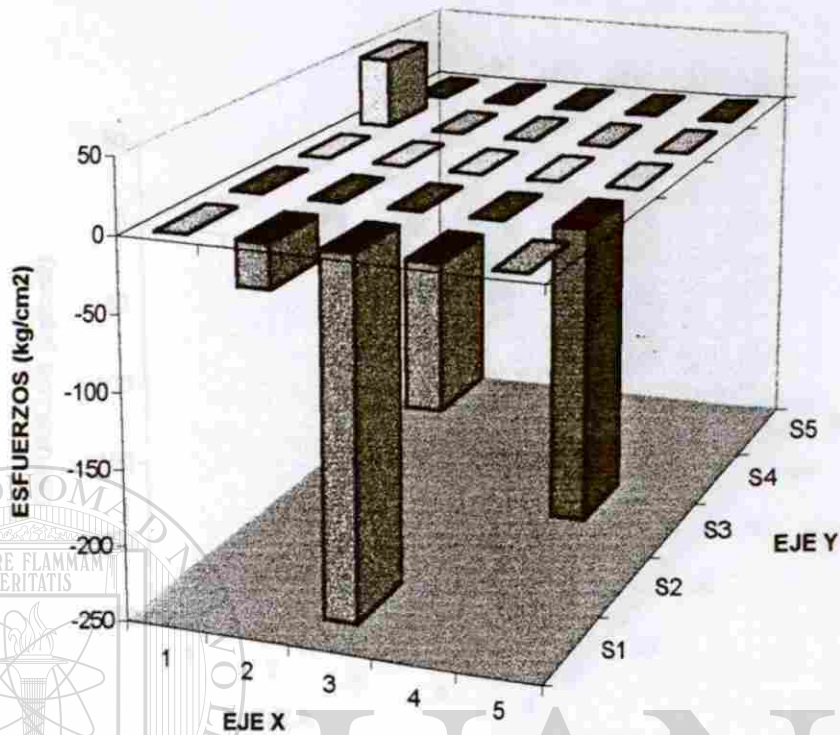
**GRAFICA DE ESFUERZOS (kg/cm<sup>2</sup>) para Px=20 ton. ,  
Mx=10.714 ton.-m , My=0.497 ton.-m**



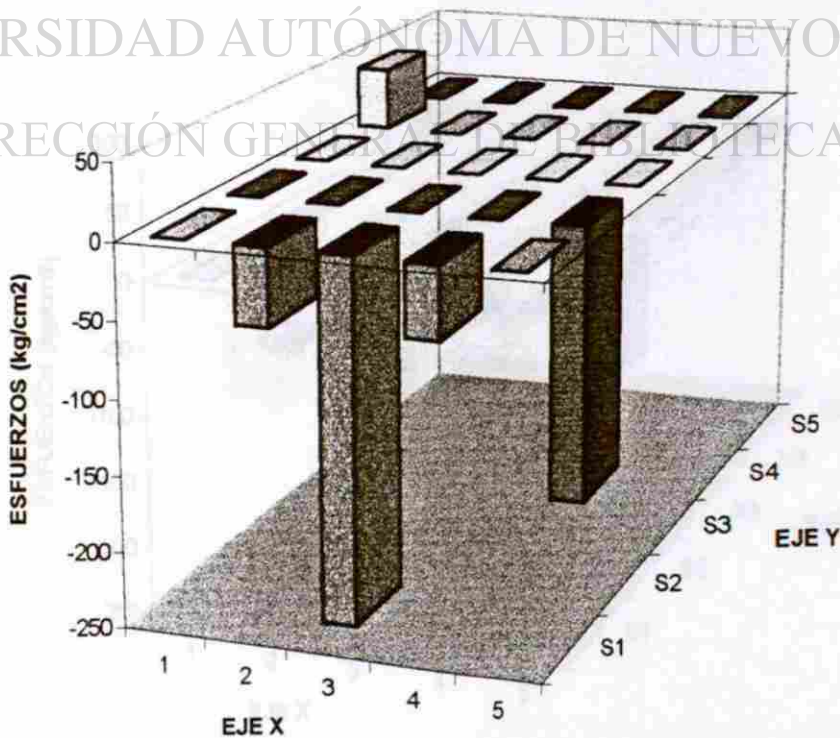
**GRAFICA DE ESFUERZOS (kg/cm<sup>2</sup>) para Px=30 ton. ,  
Mx=10.439 ton.-m , My=0.454 ton.-m**



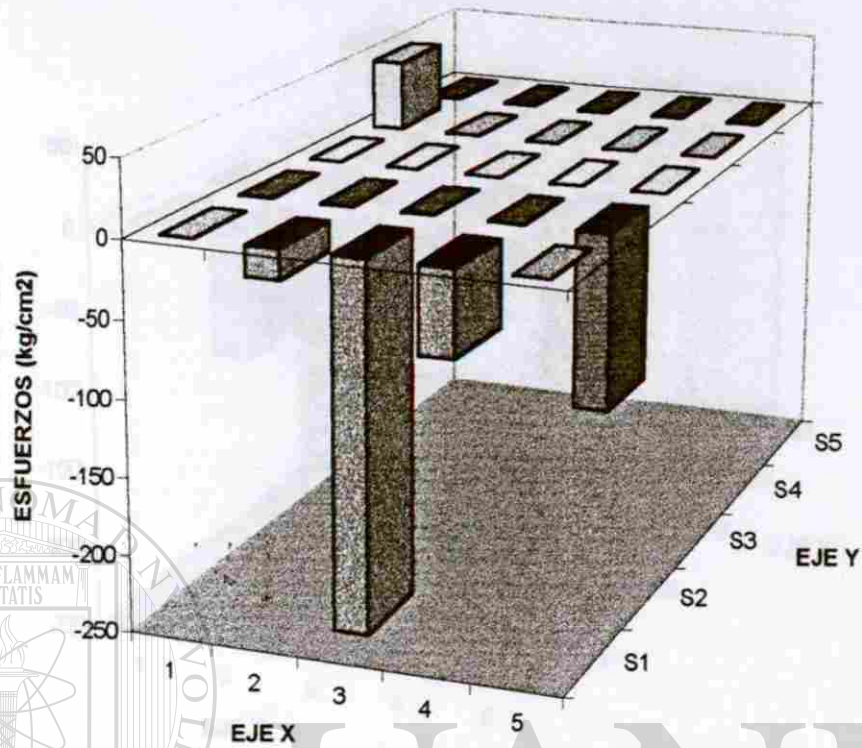
**GRAFICA DE ESFUERZOS (kg/cm<sup>2</sup>) para P<sub>x</sub>=40 ton. ,  
M<sub>x</sub>=9.358 ton.-m , M<sub>y</sub>=0.411 ton.-m**



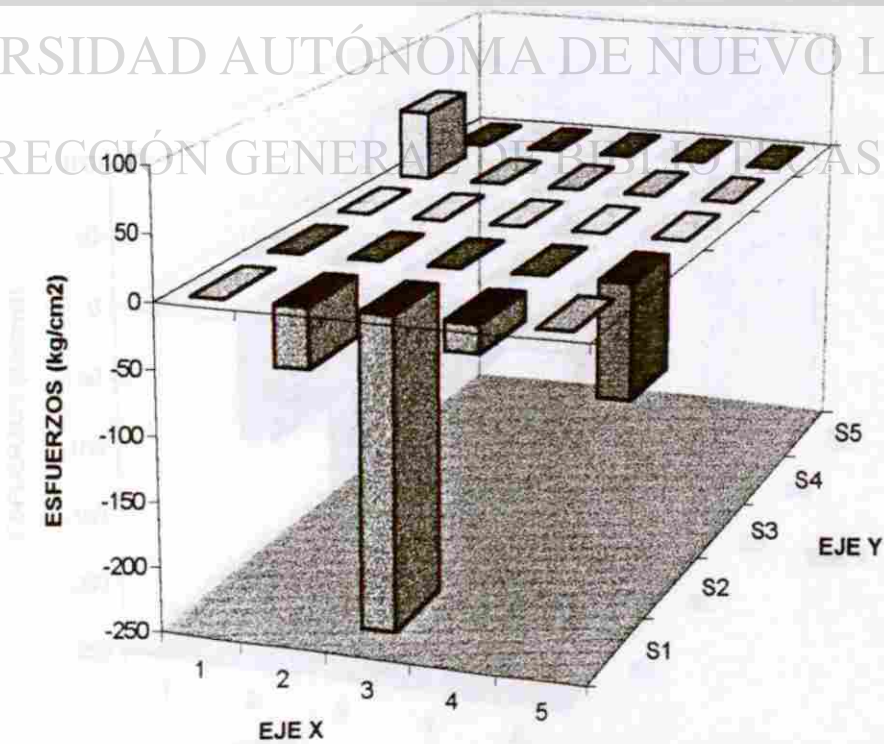
**GRAFICA DE ESFUERZOS (kg/cm<sup>2</sup>) para P<sub>x</sub>=50 ton. ,  
M<sub>x</sub>=7.681 ton.-m , M<sub>y</sub>=0.293 ton.-m**



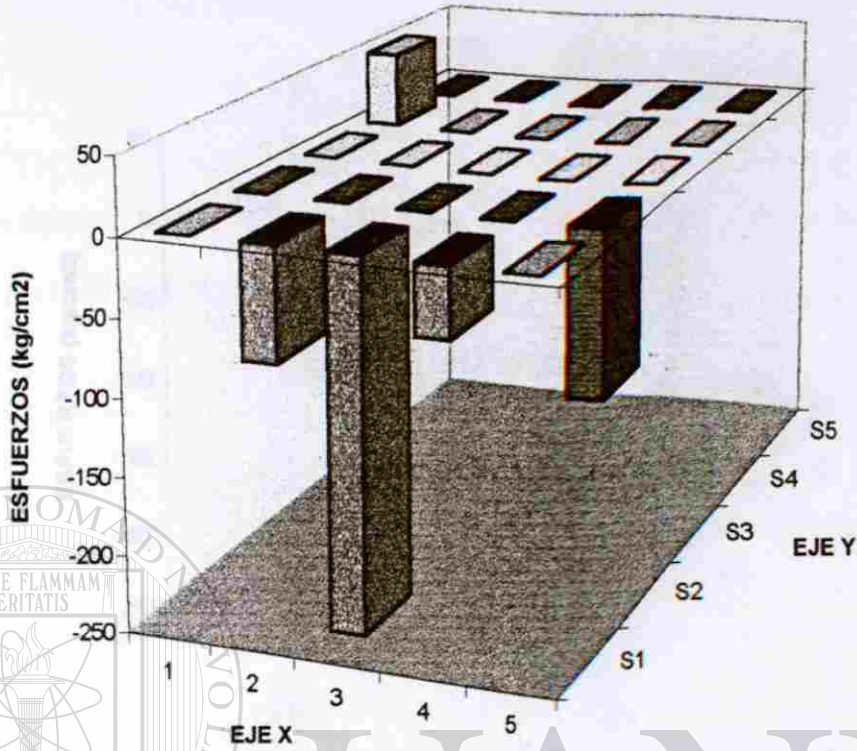
**GRAFICA DE ESFUERZOS (kg/cm<sup>2</sup>) para Px=0 ton. ,  
Mx=8.603 ton.-m , My=0.956 ton.-m**



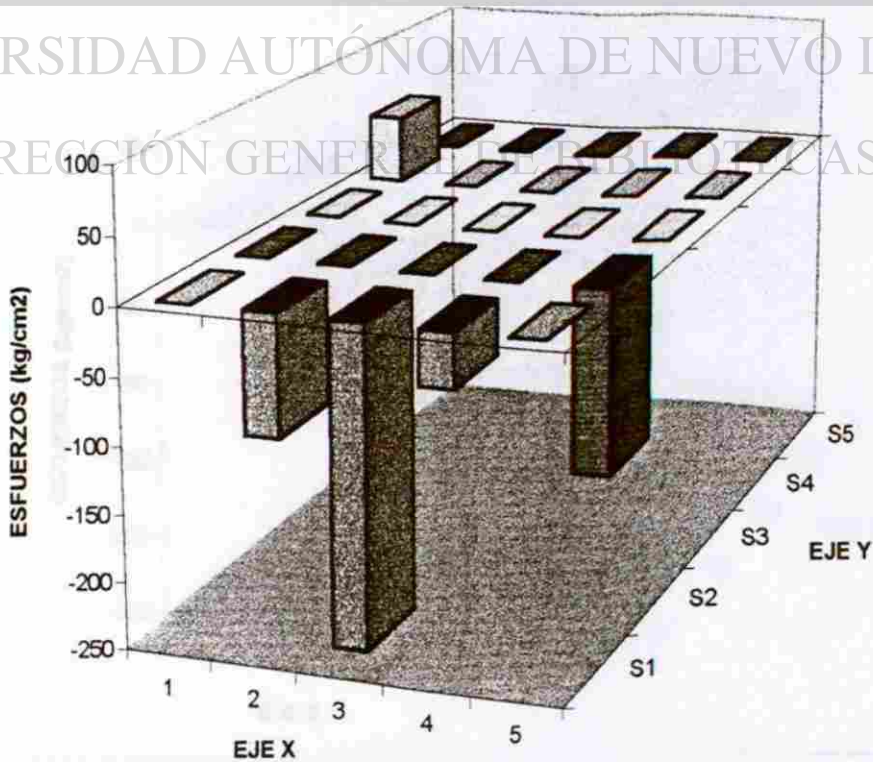
**GRAFICA DE ESFUERZOS (kg/cm<sup>2</sup>) para Px=10 ton. ,  
Mx=7.982 ton.-m , My=0.829 ton.-m**



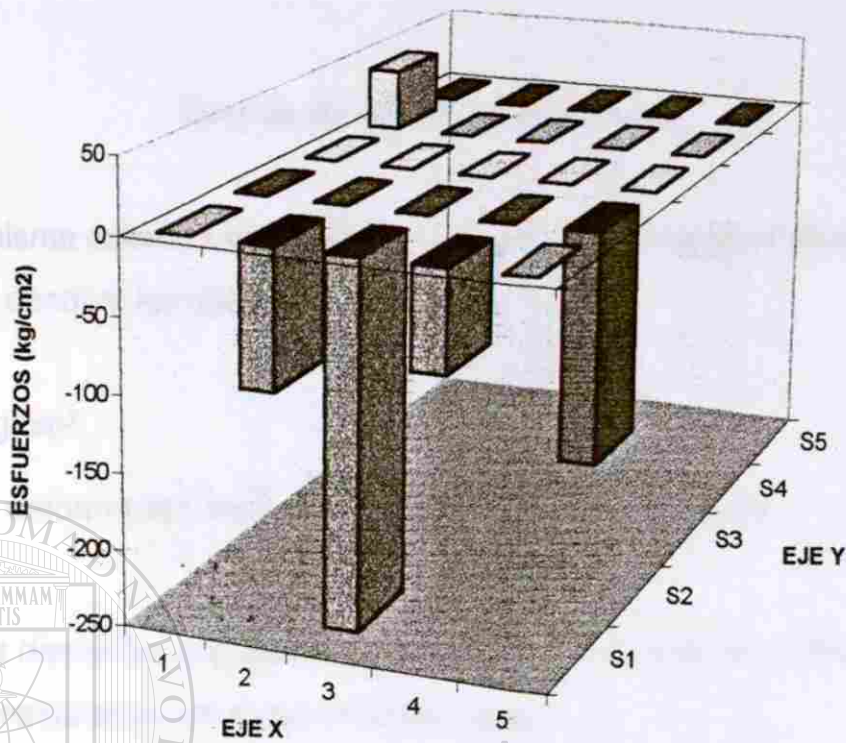
**GRAFICA DE ESFUERZOS (kg/cm<sup>2</sup>) para Px=20 ton. ,  
Mx=8,366 ton.-m , My=0.921 ton.-m**



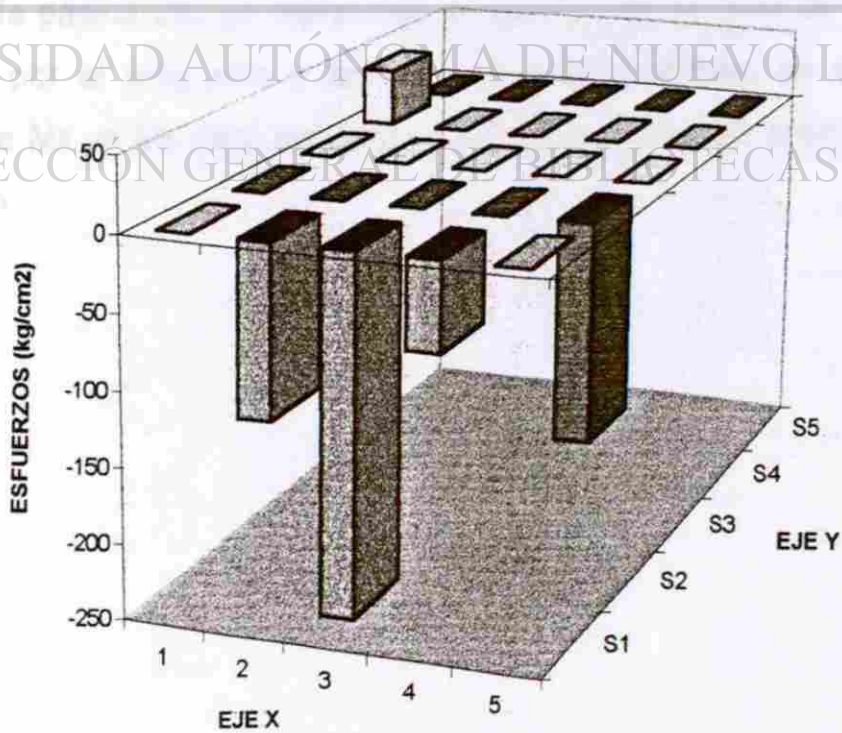
**GRAFICA DE ESFUERZOS (kg/cm<sup>2</sup>) para Px=30 ton. ,  
Mx=7.354 ton.-m , My=0.765 ton.-m**



**GRAFICA DE ESFUERZOS (kg/cm<sup>2</sup>) para Px=40 ton. ,  
Mx=7.559 ton.-m , My=0.773 ton.-m**



**GRAFICA DE ESFUERZOS (kg/cm<sup>2</sup>) para Px=50 ton. ,  
Mx=7 ton.-m , My=0.741 ton.-m**



### **Corrida de Columna de Ensaye.**

Para la misma columna del ensaye, se corrió en el programa diseñado en esta Tesis, dándole los datos de laboratorio:

$$f'c = 250 \text{ kg/cm}^2.$$

$$\epsilon = 0.001 \text{ deformación máxima que se permitió en el ensaye.}$$

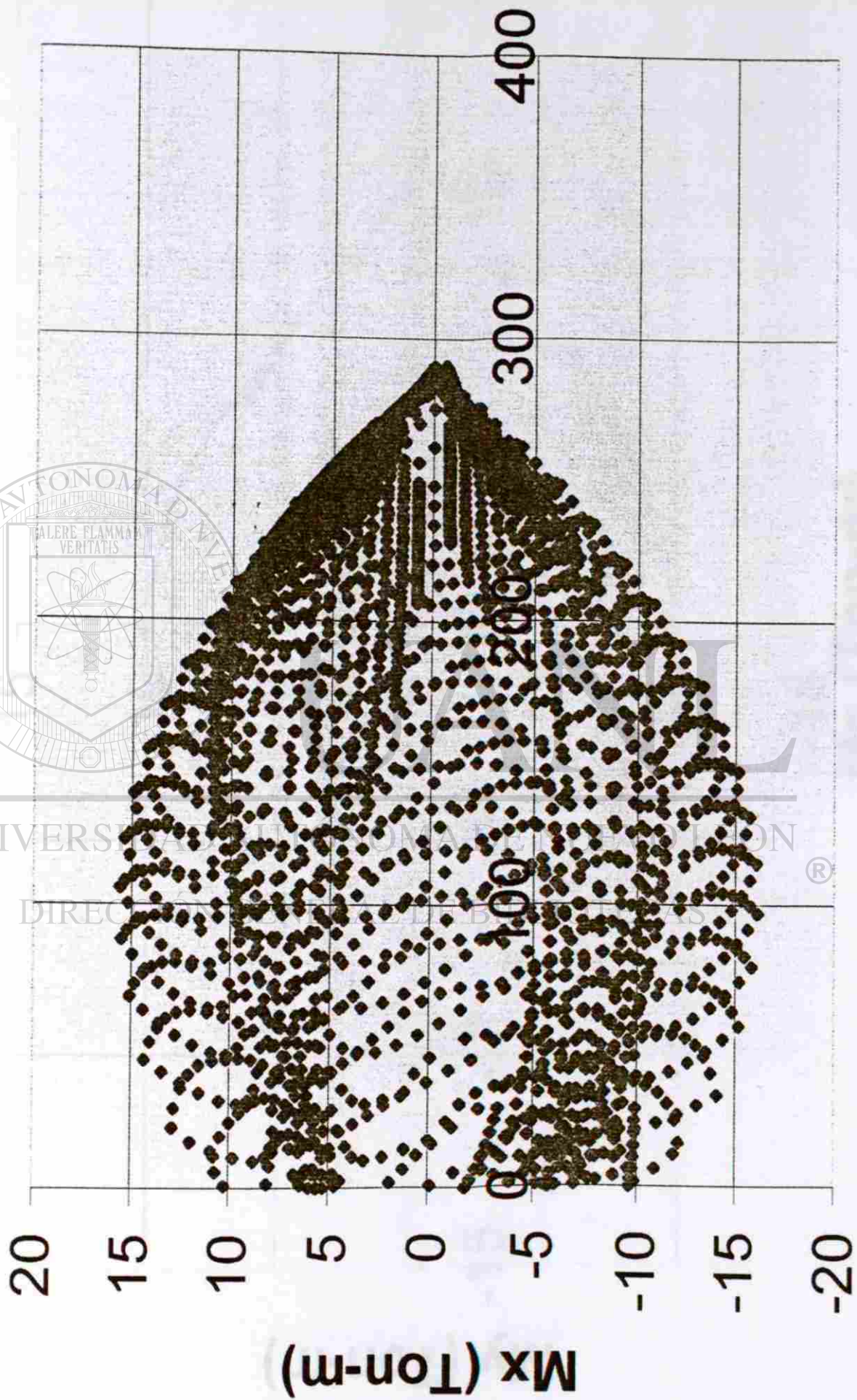
Se le dieron las coordenadas del acero de refuerzo, tal como quedó en el modelo, considerando los recubrimientos reales.

El módulo de elasticidad utilizado fue el proporcionado por el ensaye.

En la página 222 se representa la envolvente de falla de esta columna reportada por el programa y en las siguientes páginas, se obtuvieron las gráficas de  $M_x$  vs  $M_y$  para las cargas axiales con que se ensayó la columna espécimen.



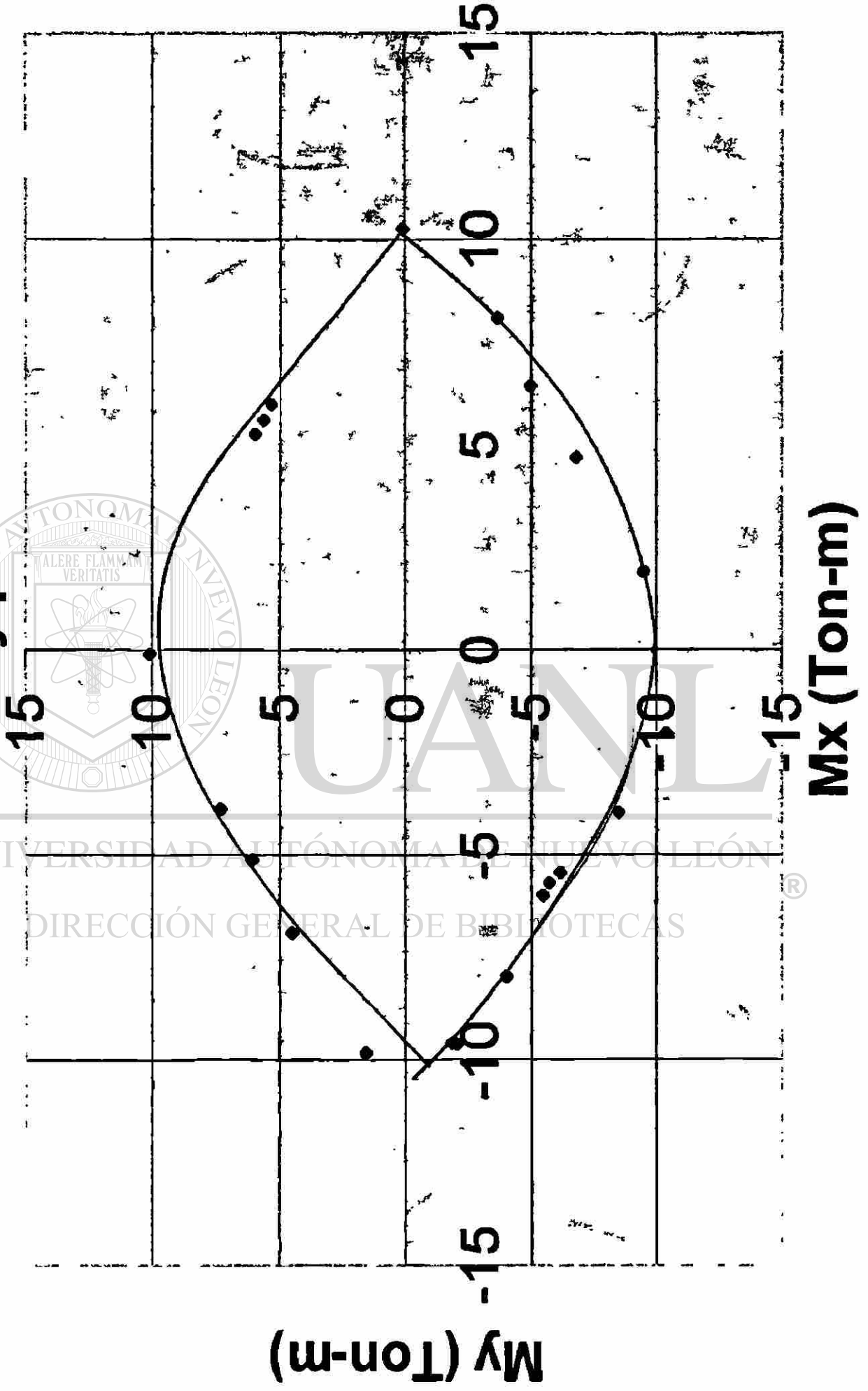
# Gráfica de Px vs Mx



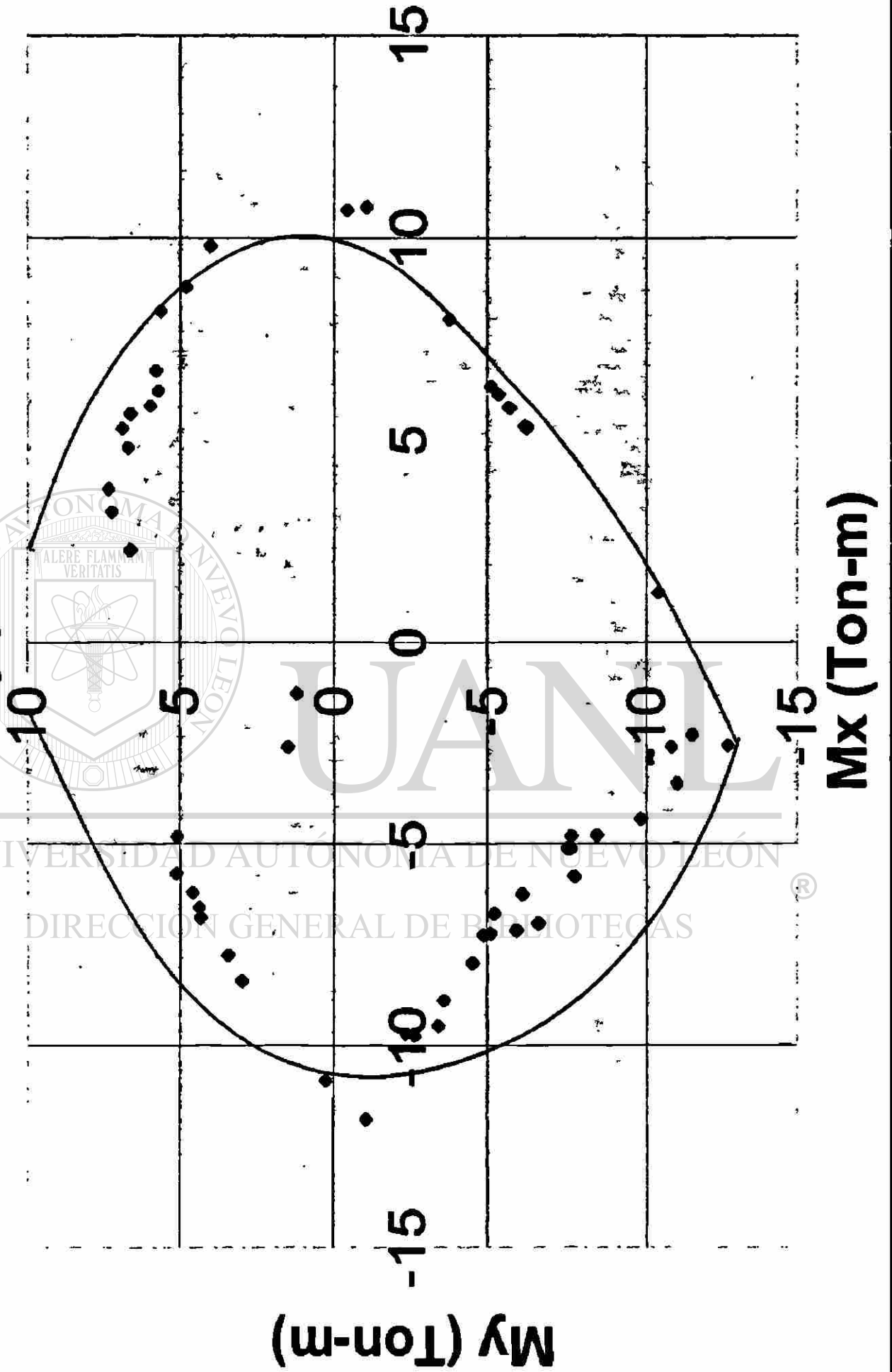
Px (Ton)

Mx (Ton-m)

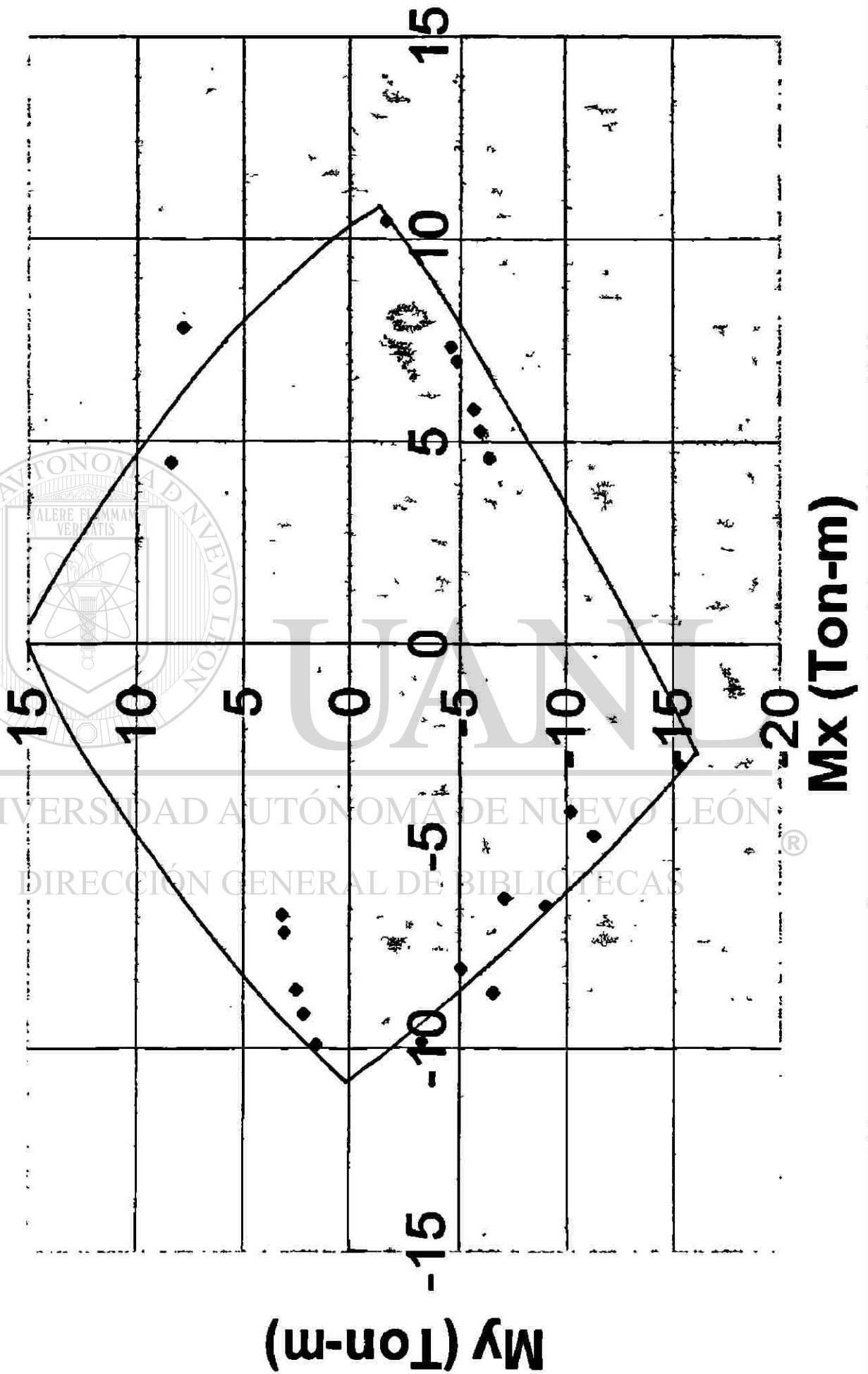
# Gráfica de Mx vs My para Px=0 ton



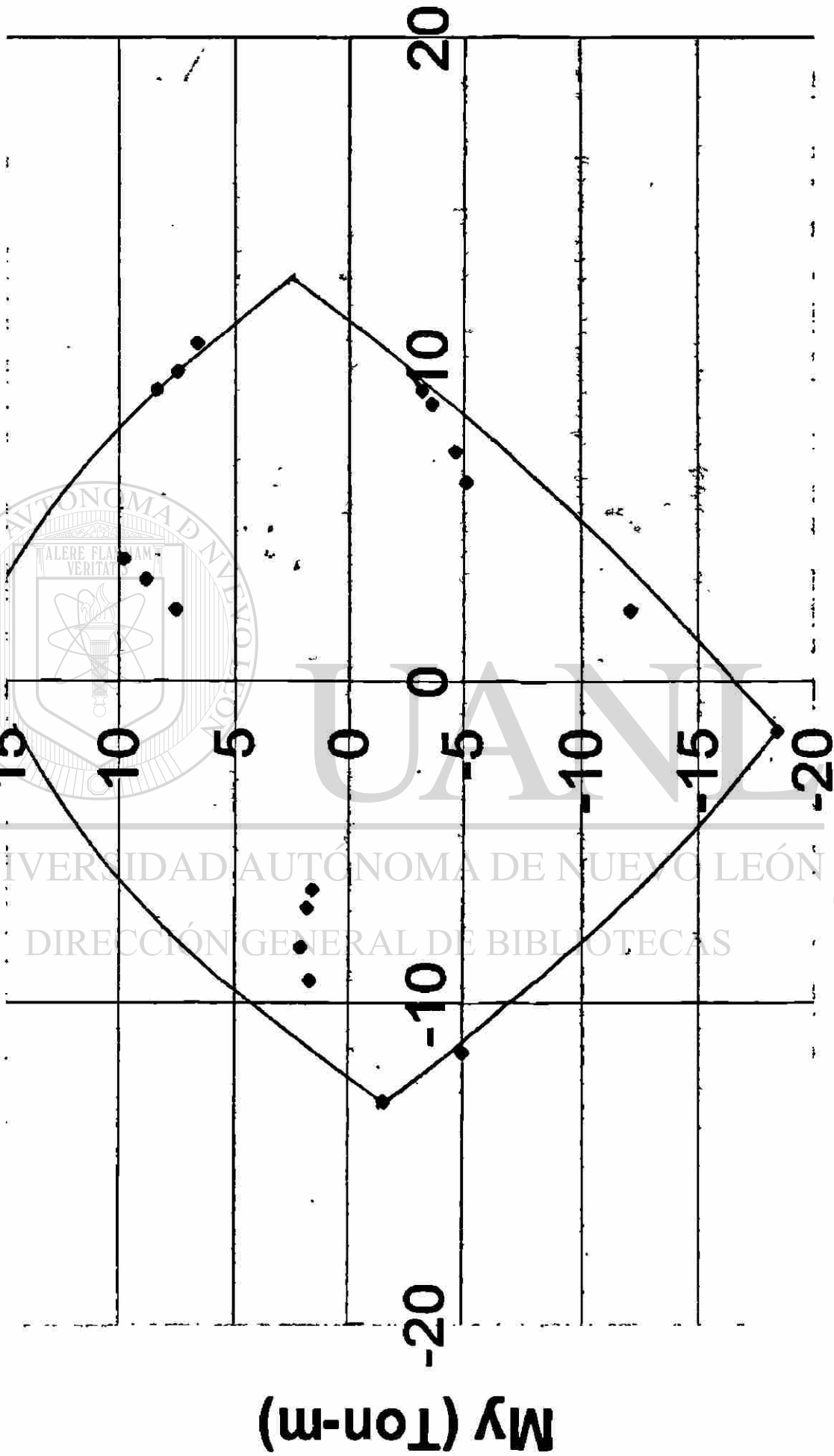
# Gráfica de $M_x$ vs $M_y$ para $P_x=10$ Ton.



# Gráfica de Mx vs My para Px=20 Ton.



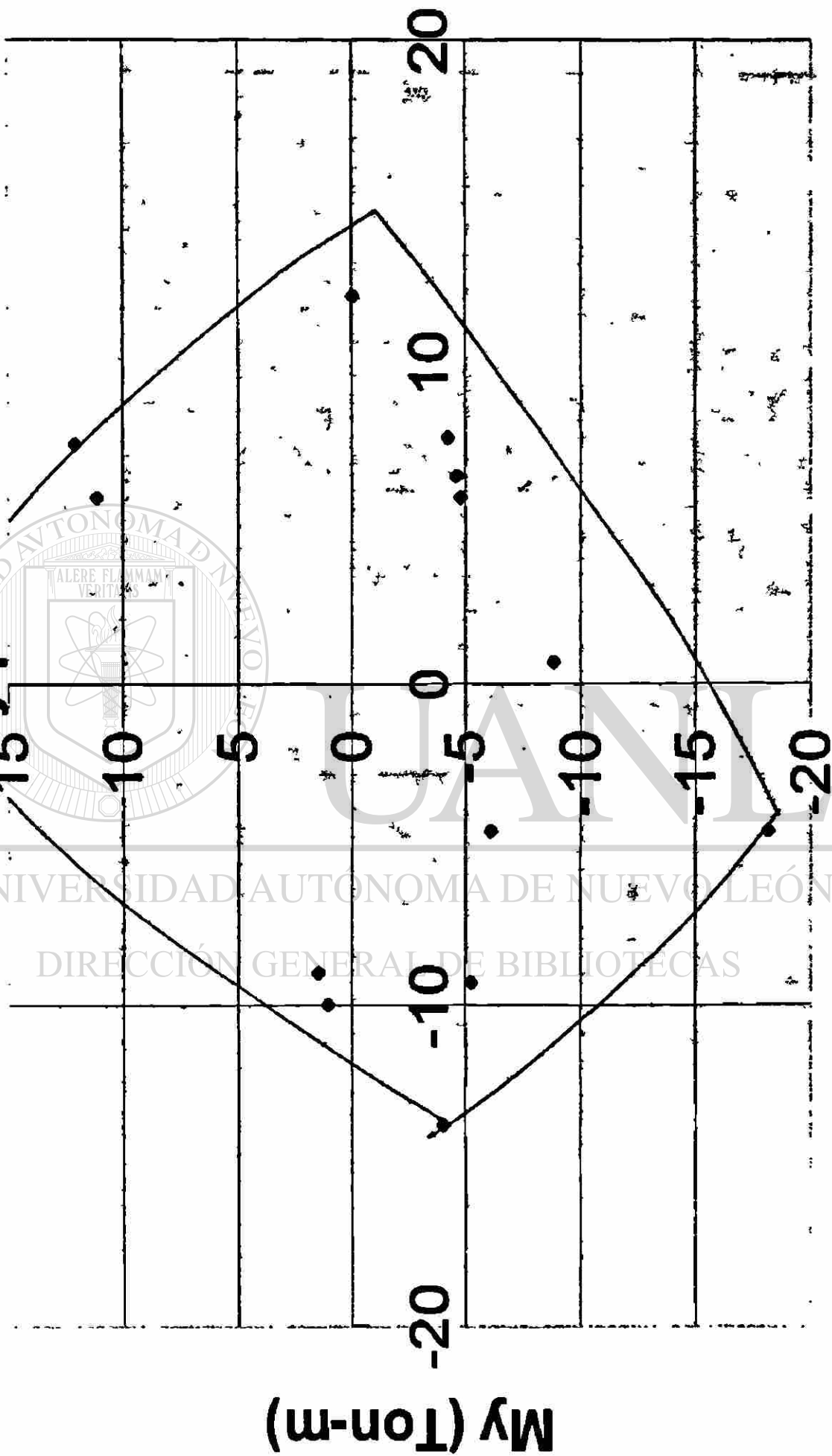
# Gráfica de $M_x$ vs $M_y$ para $P_x=30$ Ton.



$M_x$  (Ton-m)

$M_y$  (Ton-m)

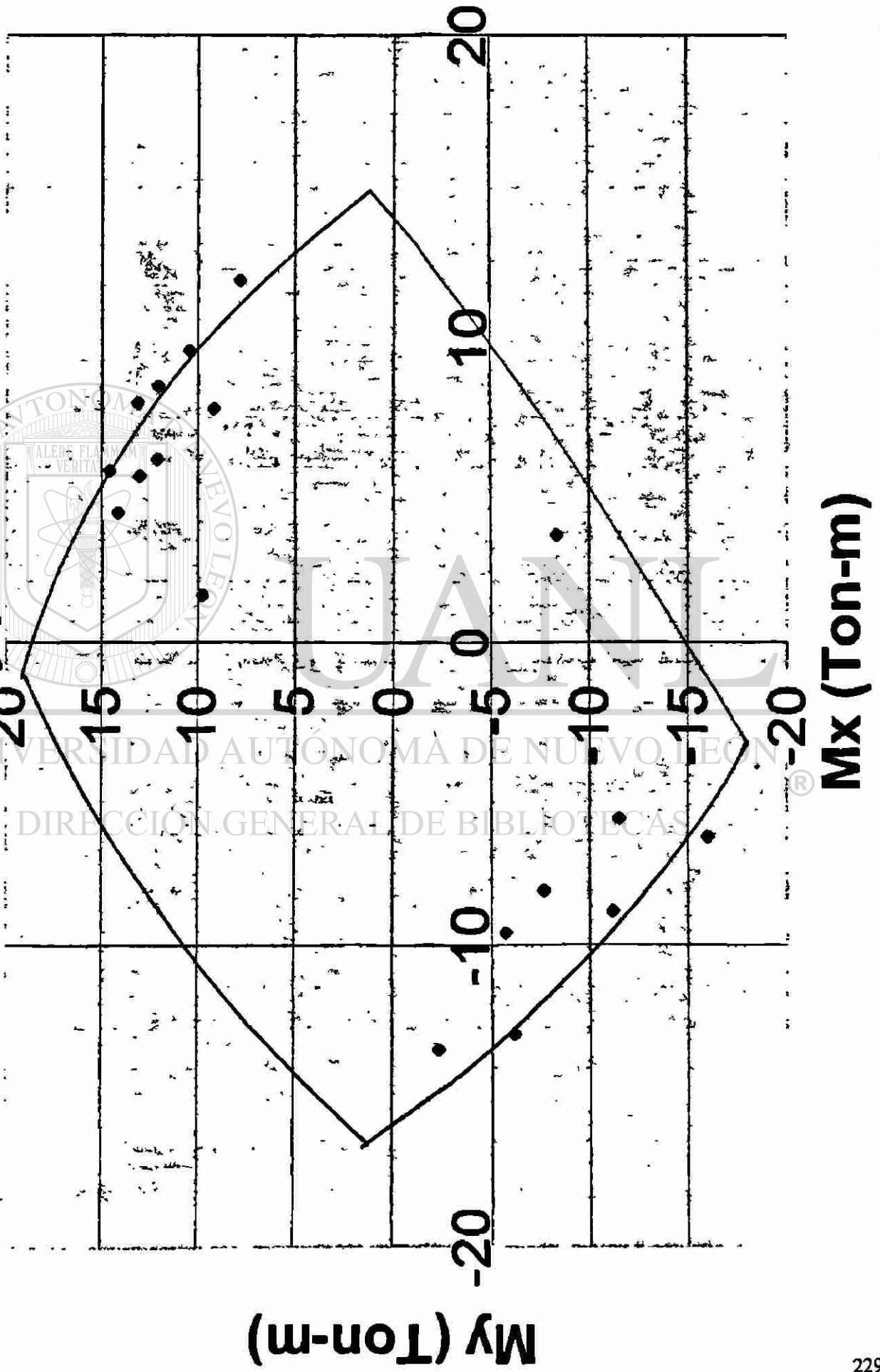
# Gráfica de $M_x$ vs $M_y$ para $P_x=40$ Ton.



$M_x$  (Ton-m)

®

# Gráfica de $M_x$ vs $M_y$ para $P_x=50$ Ton.



## **CAPITULO 9**

### **CONCLUSIONES.**

Se estableció un algoritmo de uso general que permite obtener la resistencia última de columnas de cualquier sección transversal sujetas a carga axial y flexión biaxial. Hasta ahora, la literatura estructural de este tema solo incluye soluciones de ciertas formas de sección transversales como las cuadradas, rectangulares y circulares.

Se proporcionó el diagrama de flujo, con el fin de poder escribir la lógica en cualquier lenguaje, en este trabajo se escribió en "Basic". Es muy conveniente conjuntar las disciplinas de la Ingeniería Estructural y la de Ingeniería en Sistemas para lograr un avance mas pleno.

Con el fin de validar los resultados de este análisis se solucionaron seis iteraciones con secciones diferentes en los cuales se previó alguna complicación especial para el programa, con la intención de fallarlo, lo cual no sucedió y condujo a resultados exactos. Los resultados obtenidos provienen del análisis matemático exacto y no contemplan ningún factor de reducción.

Se corrió el programa para dos secciones conocidas, una sección cuadrada y otra circular. Paralelamente se analizó utilizando los diagramas de interacción para momentos uniaxiales y el método aproximado de la carga inversa



obteniendo resultados iguales en ambos casos adicionalmente; uno de esos casos se comparó con el programa de la PCA y no se encontró concordancia. El programa de PCA muestra resultados factorizados y para la comparativa fueron desfactorizados, resultando aún así conservadores.

En el ensaye de la columna a escala natural, los primeros resultados del ensaye coinciden con la corrida del programa, y las deformaciones reportadas en los strain gages coinciden de forma significativa con el análisis; el hecho de que después se alejen del comportamiento reportado por el modelo obedece a la degradación de la columna por el ciclo de carga y descarga a la que fué sometida, de hecho, a las curvas que representan este comportamiento se les denomina "Diagramas de Comportamiento Histerético", por lo tanto, para proseguir, esta investigación, se precisa de muchos más especímenes y ser utilizados en una o dos ocasiones. Esos especímenes se pueden aprovechar para otra investigación sobre comportamiento histerético de columnas sujetas a cargas y momentos cíclicos biaxiales.

En este trabajo, no se hizo mucho hincapié en el análisis de resultados debido a que el modelo durante el ensaye se presentaron algunos problemas que ahora nos sirven para dar algunas sugerencias para las siguientes etapas de este proyecto de investigación

- a) Se puede reducir la longitud del espécimen a un metro.
- b) Los brazos para la aplicación de los momentos flectores pueden ser de acero.
- c) Para lograr la transmisión del momento a la columna se sugiere una placa de acero soldando las varillas y rellenando con grout.
- d) El nivel de deformaciones unitarias máximo que sea de 0.001 ya que más adelante el nivel de agrietamientos es muy alto y daña los strain gages del concreto.

- e) **Todas las grietas son paralelas entre si y perpendiculares a el eje axial, estas grietas en ocasiones están separadas mas de 10 cm, por lo cual se recomienda colocar los strain gages en varios niveles paralelos para evitar que todos se dañen al mismo tiempo al pasar una grieta en medio de ellos.**
- f) **La sección de la columna deberá de tener una sección más pequeña con el fin de llevarla hasta su carga máxima.**
- g) **Es muy conveniente contar con un equipo adecuado de adquisición de datos con capacidad para monitorear constantemente el comportamiento de los strain gages y no perder información valiosa.**



# UANL

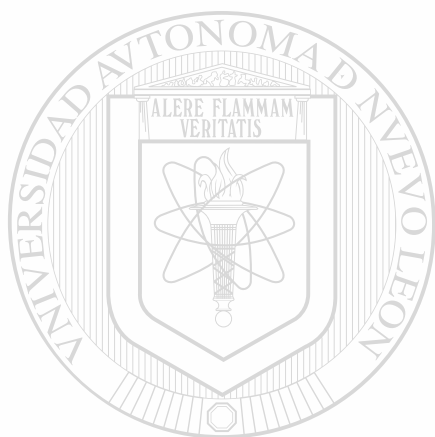
---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

## APENDICE



# UANL

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

RESUMEN DE PROPORCIONES Y DETERMINACIONES DE CONCRETO SIN ADITIVO.  
 CONCRETO FABRICADO DEL 04 AL 08 DE SEPTIEMBRE DE 1995 ( 1ª SEMANA ).  
 LOS MATERIALES ESTAN SECOS Y SE INCLUYE EL AGUA DE ABSORCION  
 CENIZA VOLANTE DE LA PLANTE CARBOELECTRICA DE RIO ESCONDIDO, AGREGADA EN ADICION AL CONSUMO DE CEMENTO.  
 RELACION A/CP = 0.35, PARA TODAS LAS BRIGADAS.

|   | BRIGADA 1  | BRIGADA 2  | BRIGADA 3 | BRIGADA 4 | BRIGADA 5 |
|---|------------|------------|-----------|-----------|-----------|
| <b>PROPORCIONAMIENTO ( kg/m<sup>3</sup> )</b>         |            |            |           |           |           |
| AGUA  | 219.6      | 211.1      | 206.9     | 203.3     | 195.3     |
| ABSORCION   | 15.4       | 14.9       | 14.6      | 14.3      | 13.7      |
| CEMENTO PORTLAND I                                    | 4.5        | 384        | 376       | 369       | 355       |
| CONSUMO   | SIN        | 76.7       | 112.9     | 147.8     | 177.5     |
| CENIZA  | SIN        | 20         | 30        | 40        | 50        |
| AGREGADO GRUESO                                       | 1134       | 1090       | 1068      | 1049      | 1008      |
| AGREGADO FINO   | 628        | 604        | 592       | 582       | 559       |
| <b>PROPIEDADES FISICAS DEL CONCRETO FRESCO</b>        |            |            |           |           |           |
| REL. A/CE EN PESO                                     | 0.55       | 0.46       | 0.43      | 0.40      | 0.37      |
| AIRE ( % )  | 0.7        | 1.3        | 1.7       | 1.9       | 4.4       |
| PESO VOL. TEORICO                                     | 2396       | 2239       | 2449      | 2442      | 2292      |
| CONC. FRESCO ( kg/m <sup>3</sup> )                    |            |            |           |           |           |
| PESO VOLUMETRICO                                      | 2410       | 2237       | 2367      | 2324      | 2382      |
| CONC. FRESCO ( kg/m <sup>3</sup> )                    |            |            |           |           |           |
| TEMP. CONCRETO  | 32.0       | 33.5       | 35.0      | 37.0      | 38.0      |
| FRESCO ( ° C )  |            |            |           |           |           |
| REVENIMIENTO ( cm )                                   | 20.0       | 10.0       | 8.0       | 5.0       | 3.0       |
| VeBe ( s )  | no se tom6 | no se tom6 | 3.60      | 7.80      | 8.80      |
| <b>CONDICIONES AMBIENTALES DEL CUARTO DE MEZCLADO</b> |            |            |           |           |           |
| TEMP. AMBIENTE ( ° C )                                | 28.0       | 28.0       | 28.0      | 28.0      | 27.5      |
| HUMEDAD RELATIVA ( % )                                | 92         | 92         | 85        | 92        | 92        |

| $\rho$ | $M_2 = 10^{-1} z$ tabulated factor |                | $M_1 = 10^{-1} z$ tabulated factor |                |
|--------|------------------------------------|----------------|------------------------------------|----------------|
|        | EXTERIOR COLUMNS                   |                | INTERIOR COLUMNS                   |                |
|        | $f'_c = 4,000$                     | $f'_c = 5,000$ | $f'_c = 4,000$                     | $f'_c = 5,000$ |
| 0.005  | 4.13                               | 4.56           | 3.10                               | 3.42           |
| 0.01   | 4.37                               | 4.78           | 3.28                               | 3.58           |
| 0.02   | 4.86                               | 5.21           | 3.64                               | 3.91           |
| 0.03   | 5.31                               | 5.65           | 4.01                               | 4.23           |
| 0.04   | 5.83                               | 6.08           | 4.37                               | 4.56           |
| 0.05   | 6.31                               | 6.51           | 4.74                               | 4.89           |
| 0.06   | 6.80                               | 6.95           | 5.10                               | 5.21           |
| 0.07   | 7.28                               | 7.38           | 5.47                               | 5.54           |
| 0.08   | 7.79                               | 7.81           | 5.83                               | 5.86           |

Table 2-3 One-Step Combined Strength-Stiffness Design Factors  $M_2$  and  $M_1$

Example 5. (Continued)

Interior Columns:  $e = 1.6'$

$$\delta = \frac{1}{1 - 0.00364(36)} = 1.15 \text{ vs. } 1.10 \text{ from Ex. 3 corrected for } \rho = 145. \text{ See Table 2-2}$$

$$e = (1.15)(0.10)(16) = 1.84'$$

See page 3-65. For 16 x 16, 6-#6, road (MA)  $P_u = 552k > (M) P_u = 542k > (2)(230)$ . Use  $\rho \geq 0.005$  (ACI 10.8.4). Final design: 16" x 16"; 4-#6.

**BI-AXIAL BENDING**

**Introduction.** Bi-axial bending of columns occurs when the columning causes bending moment simultaneously about both principal axes. commonly encountered case of such loading is a corner column. The does not require that the moments resulting from use of the minimum eccentricity be considered simultaneously (ACI 10.11.7).

**Design for Bi-axial Bending Effects.** Round columns, even with minimum 4 bars, possess essentially polar symmetry; bi-axial moment simply be combined,  $M_u = \sqrt{(M_x)^2 + (M_y)^2}$ , with no further complication.

For square and rectangular columns, the exact solution for bi-axial bending using only the design assumptions, page 2-3, is too complicated for design. The solution has been reduced to a minimum of very simple calculations with coefficients obtained from Figs. 2-13 and 2-14 following. The coefficients are applied to magnify the uniaxial applied design moment which load capacity can be read directly from tables in Chapter 3.

**BI-AXIAL BENDING**  
 $f'_c = 60,000 \text{ psi}$   
 $\phi$  INCLUDED  
 $\alpha = M_{ox}/M_{oy}$   
 $P_t = \frac{A_s f_y}{b d}$

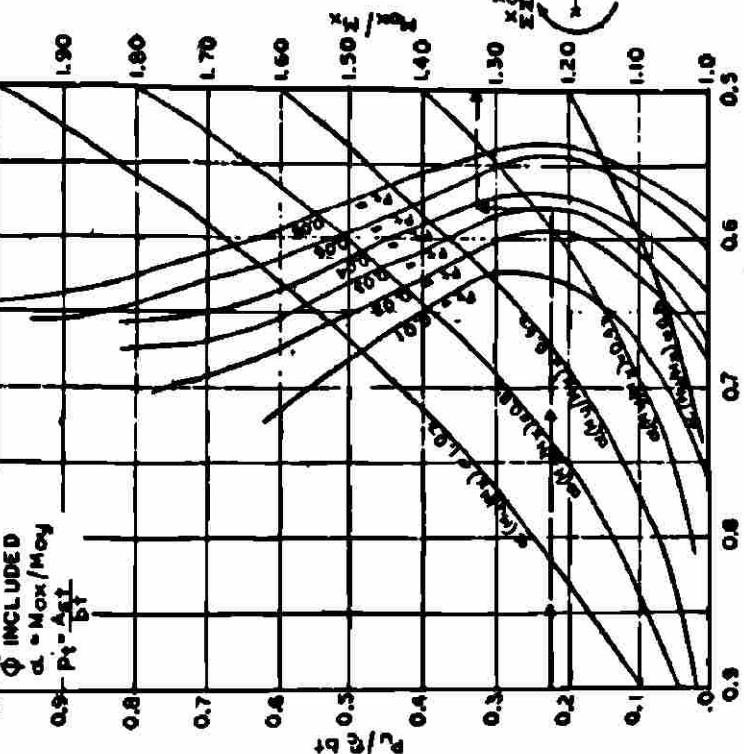
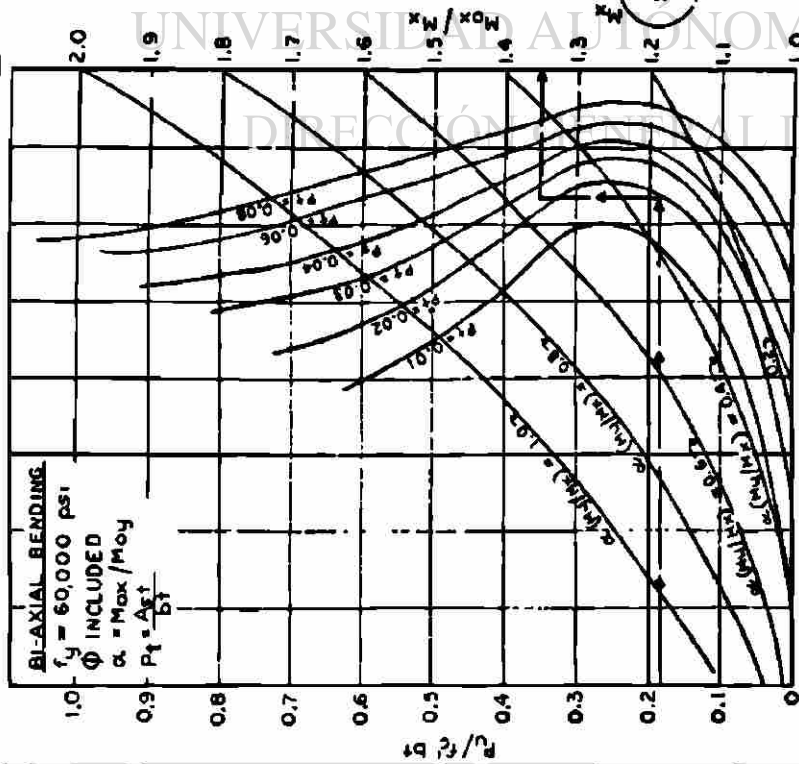


Fig. 2-13 Bi-axial Bending—Bars in 4 Faces

The abscissae,  $\beta$ , here and in Fig. 2-14 are identical.  $\beta$  values are shown for information only and are not employed in using Figs. 2-13 and 2-14. ( $\beta$  is the ordinate to curves in 2-15.) See page 2-33 for mathematical derivation.



**Fig. 2-14 Bi-axial Bending—4 Bars**  
**Examples Using Charts (Figs. 2-13 and 2-14)**  
 To illustrate the simplicity with which the biaxial bending capacity of a column can be obtained, three examples are presented in detail.

**Example 1—Square Column**

Given:  
 $f'_c = 4,000$  psi  
 $f_s = 60,000$  psi  
 $P_u = 196$  kips  
 $M_x = 134$  ft. kips  
 $M_y = 71$  ft. kips

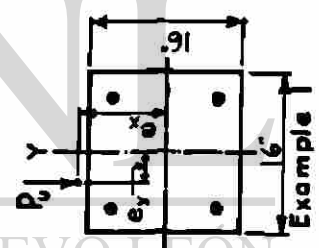
Desired column size  $16' \times 16'$ ; 4 bars  
 To find area of steel required for biaxial bending

Solution:  
 Assume initially  $p_1 = 0.02$      $\alpha = M_{ox}/M_{oy} = 1.0$   
 Compute

$$\frac{M_x}{M_{ox}} = \frac{71}{134} = 0.53$$

$$P_u/f_c M = \frac{196}{(4)(16 \times 16)} = 0.19$$

$M_{ox}$  = Uniaxial bending capacity about X axis.  
 $M_{oy}$  = Uniaxial bending capacity about Y axis.  
 $M_x$  and  $M_y$  = design moments about X and Y axis, respectively.



With  $P_u/f_c M = 0.19$ , proceed horizontally in Fig. 2-14 to curve  $p_1 = 0.02$ , then vertically to  $M_x/M_{ox} = 0.53$ , read  $M_{ox}/M_s = 1.34$  at right ordinate.

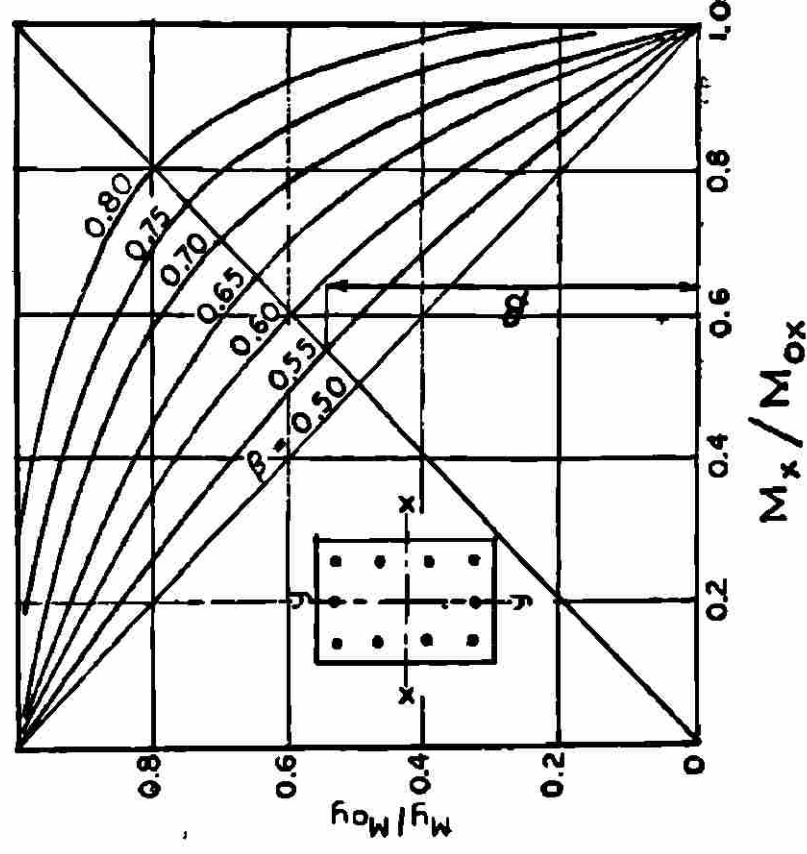
Hence, uniaxial design moment to supply biaxial bending resistance  
 $M_{ox} = 134 \times 1.34 = 180$  ft.-kips  
 $M_{ox}/P_u = \frac{(180)(12)}{196} = 11.00$  inches

From table page 3-20 with  $e = 11.0$  in., interpolate for solution  
 Use: 4-#10 bars;  $P_u = 203$  kips;  $p_1 = 0.0198$

By use of the linear variation of biaxial bending given by the formula:

$$\frac{M_x}{M_{ox}} + \frac{M_y}{M_{oy}} = 1; M_{ox} = M_{oy} = 134 + 71 = 205 \text{ ft.-kips}$$

For  $P_u = 196$  k and  $e_s = e_y = \frac{205 \times 12}{196} = 12.5$  in.; interpolate from table, 3-20,  $P_u = 199$  k for 8-#9, which amounts to about 50 per cent more reinforcement that required by the more accurate solution.



$$\left(\frac{M_x}{M_{ox}}\right)^n + \left(\frac{M_y}{M_{oy}}\right)^n = 1 \quad n = \frac{\log 0.5}{\log \beta}$$

**Fig. 2-15 Bi-axial Bending Basic Relationships—Equation (2-1)**

### Example 2—Square Column

Check the approximate solution of Example 3, Chapter 3, by the more exact methods here. Given:

$$P_u = 400 \text{ k} \quad f'_c = 4,000 \text{ psi}$$

$$e_s = e_y = 2.25 \text{ in.} \quad \text{Bars - Grade 60}$$

Check the approximate solution  $16'' \times 16''$ , 4 - #10,  $p_t = 0.0198$

$$M_x = e_x P_u = 900 \text{ in.-kips}$$

$$M_y = e_y P_u = 900 \text{ in.-kips}$$

$$\alpha = \frac{M_{ax}}{M_{ay}} = 1.0 \quad \text{By symmetry about X-X and Y-Y.}$$

$$\frac{M_x}{\alpha M_y} = 1.0 \quad \frac{P_u}{f'_c M} = \frac{(400)}{(4)(16 \times 16)} = 0.39$$

As in Example 1, enter Fig. 2-14 with 0.39, proceed right to  $p_t = 0.02$ , up to

$$\frac{M_x}{\alpha M_y} = 1.0, \text{ right to the ratio, } M_{ax}/M_x = 1.65.$$

$$M_{ax} = (1.65)(900) = 1,485 \text{ in.-kips}$$

$$e_x = (1.65)(2.25) = 3.71 \text{ in.}$$

Enter load capacity tables, page 3-20, and read for 4-#8  $e = 3 \text{ in.}$ ,  $P_u = 476 \text{ kips}$ ,  $e = 4 \text{ in.}$ ,  $P_u = 408 \text{ kips}$ . Check:  $P_t = 0.0123$ . Enter Fig. 2-14, for  $p_t = 0.0123$ , read  $M_{ax}/M_x = 1.59$ .

Use:  $16'' \times 16''$ , 4-#8.

Note: The "straight-line" approximation of Example 3, Chapter 3, is always conservative. For a combined bending vector at 45 degrees ( $M_x = M_y$ ) the difference between the straight line and more exact methods is, of course, maximum.

### Example 3—Rectangular Section

Given:

$$f'_c = 5,000 \text{ psi}$$

$$f_y = 60,000 \text{ psi}$$

$$P_u = 300 \text{ kips}$$

$$M_x = 270 \text{ ft.-kips}$$

$$M_y = 70 \text{ ft.-kips}$$

$$\text{Column } 12'' \times 24''$$

Assume:

$$p_t = 0.03$$

$$r_x = 0.67$$

$$r_y = 1.00$$

Compute:

$$\sqrt{q} = \sqrt{(0.03)(60/5)} = 0.6$$

$$\frac{M_y}{M_x} = (1.93)(70/270) = 0.50$$

$$P_u/f'_c M = 300/(5)(12)(24) = 0.21 \quad \alpha = \frac{1 - 0.7(1 - 1.0)(0.6)(1 + 0.6)(12)}{1 - 0.7(1 - 0.67)(0.6)(1 + 0.8)(24)} = 1.93$$

in which:

$$q = p_t f_y / f'_c$$

$$r_x = \text{ratio of steel area in furthest rows from } x \text{ axis to total steel area}$$

$$r_y = \text{ratio of steel area in outermost rows from } y \text{ axis to total steel area}$$

$$h_x \text{ and } h_y = \text{height of member about } x \text{ and } y \text{ axis respectively}$$

$$g_x \text{ and } g_y = \text{ratio of distance between outermost rows to total height about } x \text{ and } y \text{ axis}$$

From Fig. 2-13 with  $P_u/f'_c M = 0.21$ ,  $p_t = 0.03$  and  $\alpha M_y/M_x = 0.50$   $M_{ax}/M_x = 1.32$   
Hence:  $M_{ax} = 1.32 \times 270 = 356 \text{ ft.-kips}$

The determination of steel required for rectangular sections can best be pursued by utilizing tables with bars arranged in the same pattern as that for which the ratios,  $r_x$  and  $r_y$ , were assumed. This approach will be followed. With arrangement shown in sketch, and utilizing the table on page 3-105, enter with  $P_u = 300 \text{ kips}$  and  $e_x =$

$$\frac{356 \times 12}{300} = 14.24 \text{ in.}$$

For 6-#10, 3L-2S, read:  $P_u = 370 \text{ k}$  for  $e_x = 12 \text{ in.}$   
 $p_t = 0.0264$   $P_u = 267 \text{ k}$  for  $e_x = 16 \text{ in.}$

Interpolating for  $e = 14.24 \text{ in.}$ ,  $P_u = 314 \text{ k} > 300$ .

Since the actual steel ratio is less than the assumed ratio, the selection of design should be checked with corrected constants. Note that  $r_x$  and  $r_y$  as assumed are unchanged since the pattern assumed is that selected, 3L-2S.

$$\sqrt{q} = \frac{\sqrt{(0.0264)(60/5)}}{1 - (0.7)(0.33)(0.564)} = \frac{0.564}{(1.6 \times 12)} = 1.94 = 1.93$$

Actual  $M_{ax}$  and  $M_{ay}$  values are available in the load capacity tables of this book. Enter table with  $P_u = 314 \text{ k}$  and read for capacity about MI axis:

$$P_u = 353 \text{ k at } e_y = 6''$$

$$P_u = 269 \text{ k at } e_y = 8''$$

Interpolating for  $P_u = 314 \text{ k}$ ,  $e_y = 6.98''$   $M_{ay} = 2,170 \text{ in.-kips.}$

$$\alpha = \frac{(314 \times 14.24)}{2170} = 2.06$$

$$\alpha(M_y/M_x) = (2.06)(70/270) = 0.535$$

Enter Fig. 2-13 with  $\alpha(M_y/M_x) = 0.535$ ,  $P_u/f'_c M = 0.21$ , and  $p_t = 0.0264$ .

$M_{ax}/M_x = 1.32$ ; selected design is O.K.

Use:  $12'' \times 24''$ , 6-#10, 3L-2S.

### Derivations and Basis for Charts

The determination of the reinforcement required in a rectangular column to resist a prescribed set of biaxial bending moments with a specified axial load can be most simply achieved by determining the uniaxial capacities which will yield the prescribed biaxial resistance. It has been well established that even for rectangular sections with width to depth varying from one third to three, and different bar arrangements, that the biaxial bending capacity can be approximated by the formula:

$$(M_x/M_{ax})^n + (M_y/M_{ay})^n = 1 \dots \dots \dots (2-1)$$

in which:

$M_x$  = applied moment about the  $x$  axis at  $P_u$   
 $M_y$  = applied moment about the  $y$  axis at  $P_u$   
 $M_{ux}$  = uniaxial moment capacity about  $x$  axis at  $P_u$   
 $M_{uy}$  = uniaxial moment capacity about  $y$  axis at  $P_u$   
 $n$  = exponent dependent on bar arrangement,  $f_y$ ,  $P_u$ ,  $f'_c$ , axial load and  $g$ .

It is apparent that when  $n = 1$ ,  $M_x/M_{ux}$  varies linearly with respect to  $M_y/M_{uy}$ , as shown in Fig. 2-15. This response is correct for a homogeneous material behaving elastically. However, for reinforced concrete, due to the effect of cracking and inelastic response,  $n$  is always greater than 1. The relationship implied by equation (2-1) yields a series of curves sometimes labelled as sub- or superellipses as can be seen in Fig. 2-15.

For the purpose of design, it is more convenient to restate equation (2-1)

as:

$$\left(\frac{M_x}{M_{ux}}\right)^n + \left(\frac{M_y}{M_{uy}} \cdot \frac{M_x}{M_{ux}} \cdot \frac{M_{uy}}{M_{ux}}\right)^n = 1 \dots \dots \dots (2-2a)$$

Factoring and letting  $M_{xy}/M_{uy} = \alpha$  we have

$$\left(\frac{M_x}{M_{ux}}\right)^n \left[1 + \left(\alpha \frac{M_y}{M_x}\right)^n\right] = 1 \dots \dots \dots (2-2b)$$

which on transposing yields

$$\frac{M_{xy}}{M_x} = \left[1 + \left(\alpha \frac{M_y}{M_x}\right)^n\right]^{1/n} \dots \dots \dots (2-2c)$$

It should be noted that the value of  $M_{xy}/M_x$  is expressed as the function of two variables  $\left(\frac{M_y}{M_x}\right)$  and  $n$ . The value,  $M_y/M_x$ , is a given quantity. For a square section, with symmetrical reinforcement  $\alpha = 1.0$ . For rectangular sections, with reinforcement symmetrical about the bending axis, the value of  $\alpha$  is closely approximated by the formula:

$$\alpha = \frac{M_{xy}}{M_x} = \frac{[1 - .7(1 - r_x)]\sqrt{q}(1 + g_x)h_y}{[1 - .7(1 - r_y)]\sqrt{q}(1 + g_y)h_x} \dots \dots \dots (2-3)$$

in which:

- $q = \frac{A_s f_y}{b l f'_c} = p, f'_c$
- $r_x$  = ratio of steel area in furthestmost rows from  $x$  axis to total steel area
- $r_y$  = ratio of steel area in outermost rows from  $y$  axis to total steel area
- $h_x$  and  $h_y$  = height of member about  $x$  and  $y$  axis respectively
- $g_x$  and  $g_y$  = ratio of distance between outermost rows to total height about  $x$  and  $y$  axis

For the average condition, it will be found that  $\alpha = h_y/h_x$ .

With the value of  $n$  known, it is apparent that a series of curves can be plotted relating  $M_{xy}/M_x$  to  $\alpha(M_y/M_x)$ . Although as previously stated,  $n$  is a function of six variables, through extensive computer calculations, it was found that  $n$  is affected primarily by four variables,  $P_u/f'_c b l$ ,  $f_y$ ,  $P_u$ , and bar

arrangement, with the two other variables having a negligible effect. Consequently, this made it possible to express the behaviour of biaxial bending in Figs. 2-13 and 2-14, with the results having an accuracy of about 4 per cent. The value of  $n$  for any specific cross section can be obtained by calculation of the values of  $M_{ux}$ ,  $M_{uy}$ , and  $M_x$  associated with  $M_y$ , using the general assumptions for design in the Code (ACI 10.3). From a computational point of view, it was more meaningful and expedient to relate  $n$  to a new variable. Let  $\beta = M_y/M_{ux}$  when  $M_x/M_{ux} = M_y/M_{uy}$ , then equation (2-1) becomes:

$$\begin{aligned}
 2\beta^n - 1 & \\
 \beta^n - 0.5 & \\
 n \log \beta - \log 0.5 & \\
 n & = \log 0.5 / \log \beta
 \end{aligned}$$

It should be recognized that  $\beta$  is the ordinate to curves at the intersection of the diagonal and the curves in the sketch. While it may be of some interest to know the value of  $\beta$ , to avoid superfluous notation, its value is not shown in Fig. 2-13 and Fig. 2-14. Each of these figures represents the superposition of two graphs having identical abscissas. The first chart yields the value of  $\beta$  as abscissa with  $P_u/f'_c b l$  as ordinate for various values of  $P_u$ . The second chart gives the value of  $M_{ux}/M_x$  as ordinate, for various values of  $\alpha(M_y/M_x)$  with  $\beta$  as abscissa. For design, as shown in Fig. 2-13, enter the chart with a specified value,  $P_u/f'_c b l$ , horizontally to an assumed value of  $P_u$ . From this intersection, proceed vertically to the proper  $\alpha(M_y/M_x)$  curve. The value of  $M_{ux}/M_x$  is read at the right ordinate. Since  $M_x$  is a specified value,  $M_{ux}$  is easily calculated.

With  $M_{ux}$  known, the designer must determine the percentage of reinforcement from uniaxial column charts. This must be followed by a check that the required  $p$ , agrees with the assumed  $p$ .

Load capacity tables for columns under combined bending and axial loads are generally restricted to the case of steel at top and bottom only or uniformly spaced about the periphery. With other bar arrangements, a designer should interpolate between the two sets of values. If the data is restricted to solely the capacity of columns with steel at top and bottom, the capacity for other distribution of reinforcement can be closely approximated by the formula:

$$M_u = [1 - 0.7(1 - \rho_y)\sqrt{q}]M_{ux} \dots \dots \dots (2-4)$$

where  $M_{ux}$  is the moment capacity of the section with the steel confined to a top and bottom row.





## **RESUMEN AUTOBIOGRAFICO**

**JUAN PABLO NAVARRO MATA**

**Candidato para el Grado de  
Maestro en Ciencias con Especialidad en  
Ingeniería Estructural**



**Tesis: SOLUCIÓN ANALÍTICA DEL MODELO MATEMÁTICO DE COLUMNAS  
CON SECCIONES GEOMÉTRICAS ARBITRARIAS SOMETIDAS A LA  
COMBINACIÓN DE FLEXIÓN BIAxIAL Y CARGA AXIAL**

**Campo de Estudio: Ingeniería Estructural**

**Biografía:**

**Datos personales: Nace en Monterrey, Nuevo León el 25 de Septiembre de 1967, hijo de José Navarro Moya y María del Carmen Mata Molina.**

**Educación: Egresado de la Universidad Autónoma de Nuevo León, con la Licenciatura de Ingeniería Civil en 1991, obteniendo el premio a la Mejor Tesis de Licenciatura en el área de Ciencias y Tecnología otorgado por la UANL; premio a la investigación en Ingeniería, otorgado por CEMEX y premio Especial CEMEX 1993.**

**Experiencia Profesional: Supervisión de Obra Civil de 1989 a 1993, Diseño Estructural en el Departamento de Estructuras, Instituto de Ingeniería de 1993 – 1996. Investigación en el área de Ingeniería Estructural y Desarrollo de Modelos Académicos 1994-1998. Desde 1994 imparte materias de Estática, Física para Ingenieros, Mecánica de Materiales y Análisis Estructural en la Facultad de Ingeniería Civil, UANL.**

