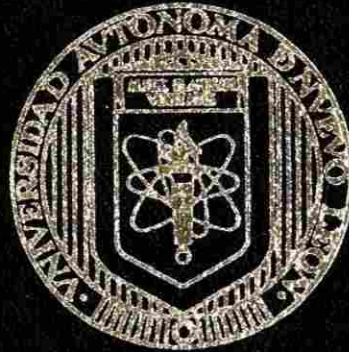


**UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON**

**FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA**



**TECNICAS DE CONTROL PARA ROBOTS  
MANIPULADORES CON FLEXIBILIDAD  
EN LA ARTICULACION**

**TESIS**

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
DOCTOR EN INGENIERIA ELECTRICA**

**PRESENTA:**

**JOSE GUADALUPE ALVAREZ LEAL**

**SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N. L.**

**FEBRERO DE 1999**

TECNICAS DE CONTROL PARA ROBOTS

MANIPULADORES CON FLEXIBILIDAD

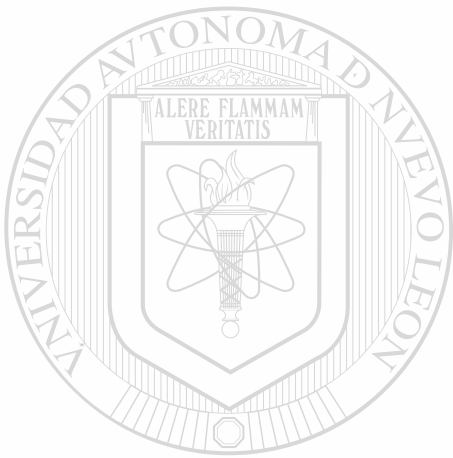
EN LA ARTICULACION

1999

TD  
Z5853  
.M2  
FIME  
1999  
A4



1020126382



# UANL

---

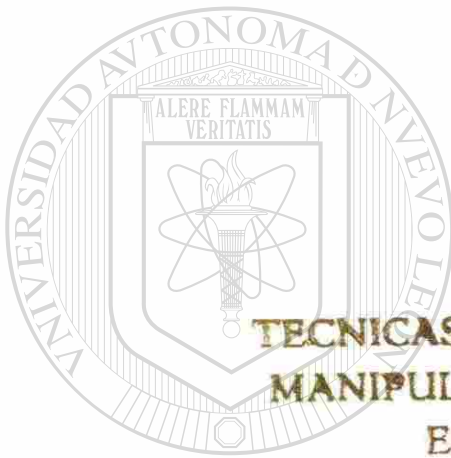
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN**

**FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA**



**TECNICAS DE CONTROL PARA ROBOTS  
MANIPULADORES CON FLEXIBILIDAD  
EN LA ARTICULACION**

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN**  
**TESIS**

**DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS**  
**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
DOCTOR EN INGENIERIA ELECTRNICA**

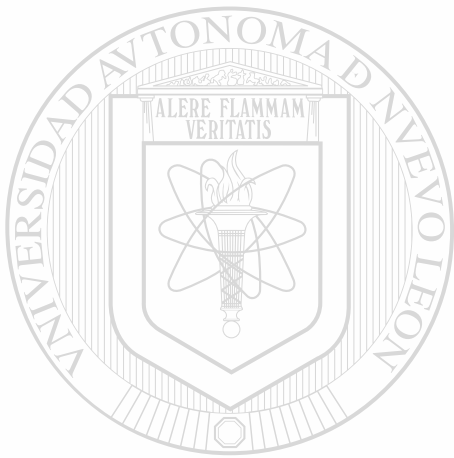
**PRESENTA:**

**JOSE GUADALUPE ALVAREZ LEAL**

**SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N. L. FEBRERO DE 1999**

TD  
25853  
M2  
FINE  
1999  
A4

0131-68460



# UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

®

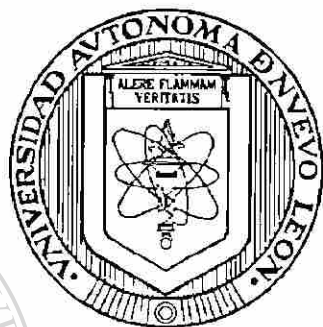
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



FONDO  
TESIS

**UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON**

**FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA**



**TECNICAS DE CONTROL PARA ROBOTS MANIPULADORES  
CON FLEXIBILIDAD EN LA ARTICULACION**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
DOCTOR EN INGENIERIA ELECTRICA

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS  
PRESENTA:

JOSE GUADALUPE ALVAREZ LEAL

San Nicolás de los Garza, N. L.

Febrero de 1999

**TECNICAS DE CONTROL PARA ROBOTS MANIPULADORES  
CON FLEXIBILIDAD EN LA ARTICULACION**

Los miembros del Comité aprueban la Tesis

Doctoral de José Guadalupe Alvarez Leal

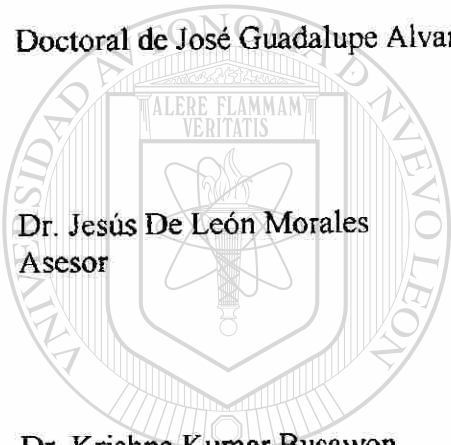
Dr. Jesús De León Morales  
Asesor

Dr. Krishna Kumar Busawon

Dr. Mikhail V. Basin

Dr. José Antonio de la O Serna

Dr. Rafael Martínez Guerra



*Jesús de León Morales*  
\_\_\_\_\_  
*K. Busawon*  
\_\_\_\_\_

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

*Mikhail V. Basin*  
\_\_\_\_\_

*José Antonio de la O Serna*  
\_\_\_\_\_

*Rafael Martínez Guerra*  
\_\_\_\_\_



Copyright 1999 por José Guadalupe Alvarez Leal

Reservados todos los derechos

UANL

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



ESTE TRABAJO DE TESIS ESTA DEDICADO A LA MEMORIA DE  
MIS PROGENITORES



ISAURO ALVAREZ RAMIREZ (-)

JUANITA LEAL ALANIS (-)

UANL

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

QUIENES EN SU PERIODO DE EXISTENCIA, SE PREOCUPARON  
POR DARME LIBERTAD DE PENSAMIENTO, SUSTENTO Y  
EDUCACION.

AGRADEZCO TAMBIEN, DE MANERA MUY ESPECIAL A MI FAMILIA:

ESPOSA

**María de Jesús Lopez Alvarez**

HIJO

**José Michael Alvarez Lopez**

HIJO

**Christopher Gabriel Alvarez Lopez**

HIJA

**Gema Natalie Alvarez Lopez**

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

QUIENES CON GRANDES SACRIFICIOS, ME PERMITIERON CONCLUIR MIS ESTUDIOS DOCTORALES, LOS CUALES SIN IMPORTAR LA DISTANCIA, PERMANECIMOS JUNTOS Y ME DIERON ALIENTOS PARA SEGUIR ADELANTE.

## RECONOCIMIENTOS

Especial reconocimiento para el **Dr. Jesús De León Morales**, Director de mi tesis, persona que se ha distinguido por sus trabajos de investigación, y quien me apoyo en todo momento con mis dudas académicas.

A los profesores del Programa Doctoral, que influyeron en mi formación como investigador:

1.-Dr. Joaquín Collado Moctezuma

2.-Dr. Krishna Busawon

3.- Dr. Salvador Acha Daza

4.- Dr. José Antonio de la O Serna

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Reconocimiento especial, al Dr. Rafael Martínez Guerra, miembro externo del Jurado en mi examen de grado, por su constante esfuerzo en la investigación del Control de Robots manipuladores.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología: **CONACYT**

Finalmente al **Instituto Tecnológico de Saltillo**, donde presto mis servicios como Profesor Investigador.

# RESUMEN

## TECNICAS DE CONTROL PARA ROBOTS MANIPULADORES CON FLEXIBILIDAD EN LA ARTICULACION

Publicación No. \_\_\_\_\_

José Guadalupe Alvarez Leal, Dr. en Ingeniería Eléctrica

Universidad Autónoma de Nuevo León

Profesor Asesor: Dr. Jesús De León Morales

En esta tesis se presentan algoritmos de control para el seguimiento de la trayectoria de un robot manipulador de un simple eslabón, el cual tiene flexibilidad en la articulación. Estos algoritmos se basan en la utilización de observadores de estado para estimar las variables no medibles de las estructuras mecánicas. Además, se hace un estudio de la estabilidad en lazo cerrado del sistema, el cual está constituido por el sistema a controlar y el observador.

Los métodos desarrollados permiten obtener un adecuado desempeño en el seguimiento de la trayectoria del robot flexible en su tarea a realizar. Considerando que por razones físicas o económicas no es posible disponer de la medición completa del vector de estado, se propone observadores de estado que nos permitan estimar la parte del vector de estado no medible, de tal manera que se pueda utilizar esta información para el control del sistema.

También se presenta en este trabajo de tesis un estudio comparativo de los distintos algoritmos de control propuestos, presentando resultados en simulación a un modelo de un robot con articulación flexible. Sin embargo, estas técnicas se pueden utilizar para otras aplicaciones industriales tales como generadores síncronos o procesos químicos.

Una comparación en simulación de las técnicas de control desarrolladas, ante la presencia de perturbaciones o ruido, fue implementada para determinar la robustez del sistema.

# Notación

$R$	Campo de los números reales
$R^n$	Espacio vectorial de dimensión $n$ con elementos reales
$L_f h(x)$	$\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^T f$
$L_f^k h(x)$	$\underbrace{L_f L_f \cdots L_f h}_{k \text{ veces}} \text{ con } L_f^0 h(x) = h(x)$
$[f, g](x)$	$\frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g$ Paréntesis de Lie de $f$ y $g$ . campos vectoriales
$ad_f^k g(x)$	$\underbrace{[f, [f, \dots [f, g]]}_{k \text{ veces}}$
$C^\infty$	Conjunto de funciones con derivadas parciales de cualquier orden
$\langle x, y \rangle$	$x^T y$ Producto escalar de dos vectores $x, y \in R^n$
$\{x_i\}$	$(x_1, x_2, x_3, \dots)$
$\Phi_t^f(x_0)$	flujo solución de $\dot{x} = f(x)$ con $x(0) = x_0$ . i.e. $x(t) = \Phi_t^f(x_0)$
$(f \circ g)(x)$	$f(g(x))$
$A^T$ o $A'$	Transpuesta de la Matriz $A$
$A^{-1}$	Inversa de la Matriz $A$ .
$\Phi^{-1}(r)$	Mapeo inverso
EDO	Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
EDP	Ecuaciones Diferenciales Parciales

$I$	Matriz identidad de orden $n \times n$
$\sigma(A)$	$\{\lambda_i(A) :  \lambda_i I - A  = 0\}$ Valores característicos de la matriz $A$
$\lambda_i(A)$	$i$ -ésimo valor característico de la matriz $A$
$\lambda_{\max}(A)$	$\max \{R_e(\lambda_i(A))\} . i = 1, 2, \dots, n$
$\lambda_{\min}(A)$	$\min \{R_e(\lambda_i(A))\} . i = 1, 2, \dots, n$
$\ A\ $	Norma de la matriz $A$
$\sigma_{\max}(A)$	Máximo valor singular de la matriz $A$
$\sigma_{\min}(A)$	Mínimo valor singular de la matriz $A$
$ A $	Determinante de la matriz $A$
$A < 0$	Matriz definida negativa, es decir $A$ es Hermítica y $\lambda_i(A) < 0$
$A \leq 0$	Matriz negativa semidefinida, $\lambda_i(A) \leq 0 \forall i = 1, 2, \dots, n$
$dh$	$dh = \left[ \frac{\partial h}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial h}{\partial x_2} \right]$ El gradiente de $h$ , es un vector fila
$V(x) > 0$	Forma cuadrática positiva definida
$V(x) < 0$	Forma cuadrática negativa definida
$V(x) \leq 0$	Forma cuadrática negativa semidefinida

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



## INDICE

Resumen	vi
Notación	vii
Índice de Figuras	xi

### CAPITULO 1

#### INTRODUCCION

1.01 Automatización Industrial	1
1.02 Robots flexibles	2
1.03 Robots con flexibilidad en las articulaciones	3
1.04 Aportaciones de la investigación	4
1.05 Organización del trabajo de tesis	4

### CAPITULO 2

#### MODELO MATEMATICO DEL ROBOT CON FLEXIBILIDAD EN LA ARTICULACION

2.06 Manipuladores con Articulaciones Elásticas	6
2.07 Propiedades del Modelo	10
2.08 Modelos simplificados	12
2.09 Modelo del brazo robot con Articulación Flexible	13
2.1 Modelo Matemático	14

### CAPITULO 3

#### METODO GEOMETRICO DIFERENCIAL

3.01 Introducción	16
3.1 Estabilización de una clase de sistemas No Lineales	17
3.2 Análisis de estabilidad en lazo cerrado	19
3.3 Aplicación al modelo matemático del robot flexible	23
3.3.1 Resultados de simulación	26
3.3.2 Conclusiones	29

### CAPITULO 4

#### METODO ALGEBRAICO DIFERENCIAL

4.1 Introducción	30
4.2 Formas canónicas de controlabilidad y observabilidad generalizada	32
4.3 Un enfoque algebraico diferencial para estabilización	

asintótica y seguimiento de salida	34
4.4 Controlador dinámico basado en el observador para Manipuladores con articulación flexible	40
4.4.1 Resultados de simulación	45
4.5 Conclusiones	47

## CAPITULO 5

### METODO MEDIANTE PERTURBACIONES SINGULARES

5.1 Introducción	48
5.2 Modelo del Brazo Robot Manipulador	51
5.3 Control modo deslizante en escala de dos tiempos deslizante	52
5.3.1 Diseño del control en modo deslizante	54
5.4 Un observador No-Lineal	62
5.5 Estabilidad en Lazo Cerrado	67
5.6 Aplicación para el Modelo del Manipulador	75
5.6.1 Diseño de la ley de Control	76
5.6.2 Estimación de las velocidades del motor y del eslabón	79
5.6.3 Estabilidad en lazo cerrado	81
5.6.4 Resultados de simulación	82
5.7 Conclusiones	86

## CAPITULO 6

### ESTUDIO COMPARATIVO DE LAS DISTINTAS TECNICAS DE CONTROL EMPLEADAS

6.01 Introducción	87
6.02 Comparación entre las técnicas de control empleadas	
Resultados en simulación	88
6.1 Análisis ante perturbaciones o ruido	92

## CAPITULO 7

CONCLUSIONES	96
--------------	----

BIBLIOGRAFIA	98
--------------	----

APENDICE	102
----------	-----



# Índice de Figuras

Figura 1.1 Robot Industrial .....	2
Figura 2.1 Articulación Flexible .....	7
Figura 2.2 Modelo del Robot Manipulador .....	15
Figura 3.2 El estado $x_1$ y la señal de referencia $x_{ref}$ .....	27
Figura 3.3 El estado $x_2$ y la señal de $\dot{x}_{ref}$ .....	28
Figura 3.4 Control $u$ .....	28
Figura 3.5 Estado $x_1$ y su estimado $\hat{x}_1$ .....	29
Figura 3.6 Estado $x_2$ y su estimado $\hat{x}_2$ .....	29
Figura 4.1 Gráfica del estado $x_1$ y la señal de referencia $y_R$ .....	46
Figura 4.2 Gráfica del estado $x_2$ y de $\dot{y}_R$ .....	46
Figura 4.3 Gráfica del control $u$ .....	47
Figura 5.1 Gráfica del estado $x_1$ y la señal de referencia $x_{ref}$ .....	83
Figura 5.2 Gráfica del estado $x_2$ y la señal $\dot{x}_{ref}$ .....	84
Figura 5.3 Gráfica del estado $x_1$ y su estimado .....	84
Figura 5.4 Gráfica del estado $x_2$ y su estimado .....	84
Figura 5.5 Gráfica del control $u$ .....	85
Figura 6.1 Gráfica del estado $x_1$ y la señal de referencia $x_{ref}$ .....	90
Figura 6.2 Gráfica del estado $x_2$ y la señal de referencia $\dot{x}_{ref}$ .....	90
Figura 6.3 Gráfica del estado $x_2$ y $x_{ref}$ .....	91
Figura 6.4 Gráfica de los controladores .....	91
Figura 6.5 Estado $x_1$ , $x_{ref}$ y la señal de ruido .....	92
Figura 6.6 Estado $x_2$ y la señal con ruido. Geométrico Diferencial .....	93
Figura 6.7 Estado $x_1$ y la señal de ruido. Algebraico Diferencial .....	93
Figura 6.8 Estado $x_1$ y la señal de ruido. Perturbaciones Singulares .....	94
Figura 6.9 Estado $x_2$ y la señal de ruido. Perturbaciones Singulares .....	94

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.0.1 Automatización Industrial

En la actualidad la industria manufacturera, y en particular la industria relacionada con la metal-mecánica, se encuentra ante la necesidad de adaptar los procesos de producción en función de la demanda, y debe satisfacer los criterios de calidad, que le permitan ser más competitiva y mantenerse en el mercado.

En estos procesos de manufactura se ha destacado un gran interés por el uso de robots. Esto es debido a que son capaces de desempeñar una gran variedad de funciones de manufactura, pueden trabajar en ambientes hostiles para el hombre y presentan una ventaja que no tienen las máquinas especializadas: son multifuncionales y reprogramables. Una consecuencia del uso de los robots, es que se ha obtenido reducción en los costos de producción y de materias primas, además, el tiempo para llevar a cabo las tareas que ejecuta el brazo robot manipulador se ha minimizado de manera importante.

De acuerdo con la asociación mundial de robótica, un robot industrial es un manipulador *reprogramable multifuncional* diseñado para mover materiales, partes, herramientas, o dispositivos especiales, a través de movimientos programados para el desempeño de una variedad de tareas. Un robot de estas características, se dice que posee "inteligencia" si asociamos a los algoritmos de control computacionales uno o varios sistemas de

medición y/o visión.

Típicamente, un robot industrial consiste de varios eslabones rígidos conectados en serie por articulaciones, las cuales pueden ser revolutoras y/o prismáticas. Además, el robot posee un elemento importante conocido como el efector final o herramienta, la cual es determinante, dado que permite definir la tarea que puede desarrollar, por ejemplo, manipular objetos con propósitos de ensamble, soldar, pintar, o bien algunas otras tareas que se le asignan al manipulador. Por otro lado, en el otro extremo de la cadena cinemática, se encuentra una base fija sujeta al piso, tal como se muestra en la siguiente figura:

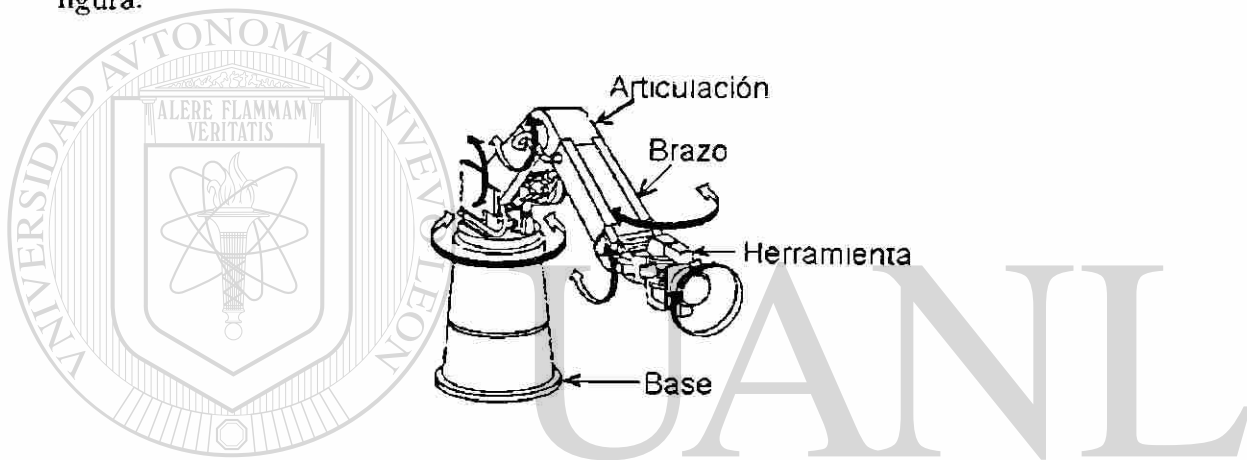


Figura No. 1.1 Robot industrial

### 1.0.2 Robots flexibles

La presencia de flexibilidad en los brazos robots manipuladores es muy común en muchos de los robots industriales. Esta flexibilidad se presenta cuando se utilizan elementos para la transmisión del movimiento, tales como los impulsores armónicos, bandas de transmisión, o bien en el caso de grandes flechas de transmisión, donde un desplazamiento dinámico es introducido entre la posición de los actuadores y la posición de los eslabones.

Muchas veces, esta pequeña deflexión intrínseca es la causa de muchos problemas, especialmente cuando se desea controlar con mucha precisión el seguimiento de la trayectoria, o bien cuando se quiere tener una alta sensibilidad para fuerzas cartesianas en alguna tarea específica a efectuar por el brazo manipulador. Como es de observarse en el

movimiento de los brazos robots. existe una pequeña vibración la cual no podemos despreciar. Estas vibraciones son de pequeña magnitud y de una frecuencia relativamente alta, las cuales permanecen dentro de cierto ancho de banda de interés para el control.

### 1.0.3 Robots con flexibilidad en las articulaciones

En el modelado de brazos robots manipuladores, la deformación puede ser caracterizada como si ésta estuviera concentrada en las articulaciones del robot. Ésta es la principal característica que se reconoce, la cual repercute en la derivación del modelo y la síntesis del control.

Sin embargo, existe una diferencia con respecto aquellos brazos robots con eslabones largos y ligeros, en los que la flexibilidad involucra cuerpos de grandes masas sometidos a deformaciones distribuidas sobre largos segmentos, en tal caso la flexibilidad no puede ser considerada como si ésta estuviera concentrada en las articulaciones, sino que más bien la flexibilidad deberá ser considerada en los eslabones.

Por otro lado, suponer que los robots tiene rigidez perfecta es una hipótesis que difícilmente se puede cumplir. Sin embargo, lo más importante es cómo obtener un modelo matemático que incluya toda clase de flexibilidades, con el fin de evaluar cuantitativamente sus efectos relativos.

Cuando se hace una comparación entre los robots flexibles en las articulaciones y los robots con eslabones rígidos, se observa que el modelo dinámico requiere dos veces el número de coordenadas generalizadas para poder caracterizar completamente la configuración de todos los cuerpos rígidos que lo conforman, tales como los motores y los eslabones. Es de observarse también que actualmente las deformaciones de las articulaciones son bastante pequeñas, y las fuerzas elásticas están típicamente limitadas a el dominio de la linealidad.

En el caso de brazos robots con articulaciones elásticas, el número de entradas de control no es igual al número de grados de libertad del robot. Por consecuencia, las tareas de control son mas difíciles de ejecutar que las diseñadas para el caso de los robots

rígidos. Además, en los brazos robots con flexibilidad en las articulaciones, se observa que para la implementación de una ley de control, se requiere de dos veces el número de sensores, así como de la medición de variables que se encuentran antes y después de la deformación.

El objetivo principal del diseño de controladores para robots flexibles en la articulación es manejar apropiadamente las vibraciones producidas por la elasticidad en las articulaciones, y así efectuar un posicionamiento rápido y un seguimiento preciso de la herramienta del robot. En este trabajo se supone que se tiene rigidez en el eslabón.

#### **1.0.4 Aportaciones de La Investigación**

En el presente trabajo se presentan varias técnicas de control para el seguimiento de la trayectoria de robots manipuladores con flexibilidad en la articulación. Las aportaciones principales se encuentran en los capítulos 3, 4.5 y 6 de la tesis, y en cada uno de estos capítulos se presentan los resultados obtenidos para cada una de las técnicas de control propuestas.

#### **1.0.5 Organización del trabajo de tesis**

El trabajo de tesis está organizado como sigue: En el Capítulo 2, se presenta el modelo matemático de un brazo robot con flexibilidad en la articulación, y se enuncian las principales hipótesis que se considerarán para la obtención del modelo de los robots con flexibilidad en la articulación, así como también se presenta el modelo del brazo robot de un simple eslabón con articulación rotatoria flexible que será considerado a lo largo de este trabajo, y que permitirá el diseño de los distintos algoritmos de control propuestos en este trabajo.

Basado en técnicas de la geometría diferencial se propone, en el Capítulo 3, un controlador basado en un observador para una clase de sistemas no-lineales que son linealizables por retroalimentación de estado. Además, un observador de alta ganancia es diseñado para estimar el estado no medible de esta clase de sistemas. Un análisis de estabilidad del

sistema en lazo cerrado es presentado. Resultados en simulación son mostrados cuando este esquema de control se aplica al modelo del robot.

En el Capítulo 4, se diseña un controlador considerando el método algebraico diferencial para resolver los problemas de estabilización y seguimiento de salida de sistemas no-lineales, utilizando para ello, la estrategia de linealización exacta de la dinámica del error de seguimiento, en esta técnica se propone un observador de alta ganancia para estimar el error de seguimiento. Finalmente, se presentan los resultados de simulación de este esquema de control.

Mediante la teoría basada en perturbaciones singulares, en el Capítulo 5, se presenta un controlador basado en un observador para una clase de sistemas no-lineales singularmente perturbados. Bajo este esquema se dan las condiciones suficientes para garantizar la estabilidad del sistema en lazo cerrado. Resultados son presentados para mostrar el desempeño de esta técnica de control.

En el Capítulo 6, se presenta un estudio comparativo de las técnicas de control propuestas, donde experimentos sobre la robustez de estas técnicas es efectuado, tomando en consideración la presencia de perturbaciones o ruido en el sistema, y la introducción de variaciones en los parámetros del robot

Finalmente, en el Capítulo 7 se dan las conclusiones generales y recomendaciones para trabajos futuros.

En el presente trabajo de investigación, se presenta además un apéndice, en el cual se dan algunos conceptos y definiciones necesarias para la comprensión de esta tesis, empezando con algunas definiciones sobre la teoría de la observación de sistemas no-lineales en tiempo continuo, algunos resultados sobre observadores y su síntesis, definiciones y resultados útiles sobre estabilidad y estabilización de sistemas de control. Finalmente se anexan algunos resultados presentados en este trabajo de investigación, que fueron aceptados y presentados en Congresos Internacionales.

## Capítulo 2

# Modelo matemático del robot con flexibilidad en la articulación

### 2.0.6 Manipuladores con Articulaciones Elásticas

En este capítulo se considera la modelación de robots con elasticidad en las articulaciones. Como se mencionó en la introducción, la presencia de flexibilidad en las articulaciones de los robots, son problemas muy comunes en muchos de los robots industriales.

Para la modelación de robots flexibles en la articulación, deben tomarse en cuenta algunas hipótesis generales acerca de su estructura mecánica, las cuales se enuncia como sigue:

#### Hipótesis

1.- Las deformaciones elásticas deben de ser pequeñas, de tal manera que sus efectos son conocidos, ya que de no ser así tendríamos modelos demasiado complejos, que no son tratables por el diseño del control.

2.- Para la modelización del efecto de la flexibilidad en la articulación, se considera este como si fuera un resorte torsional, tal como se muestra en la Figura 2.1

3.- Los rotores de los actuadores son modelados como si estos fueran cuerpos uniformes cuyo centro de masas está sobre el eje de rotación.

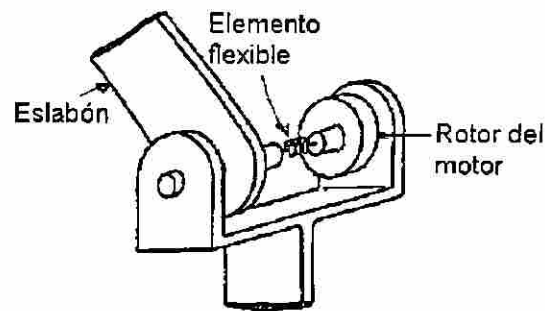


Figura No.2.1 Articulación flexible

Es importante hacer notar que la suposición de la simetría geométrica de los rotores, implica que tanto la matriz de inercia como el término gravitatorio en el modelo dinámico son independientes de la posición interna de los motores.

En base a la formulación Lagrangiana, un conjunto de coordenadas generalizadas tiene que ser utilizada para caracterizar de manera única la configuración del sistema. Dado que el brazo robot está compuesto por  $2n$  cuerpos rígidos ( los eslabones y los actuadores de la estructura del brazo robot), entonces serán necesarias  $2n$  coordenadas. Sea  $q_1$  el vector  $(n \times 1)$  de posición de los eslabones y  $q_2$  el vector  $n \times 1$  que representa las posiciones del actuador normalmente reflejado a través de la relación de engranes. De acuerdo con esta selección, la diferencia  $q_{1,i} - q_{2,i}$  representará la deformación de la  $i$ -ésima articulación. Por otro lado, la cinemática directa de todo el eslabón ( y también de cada extremo del eslabón) deberá ser una función únicamente de las variables del eslabón  $q_1$ .

Ahora, definiendo la *energía cinética* del robot la cual está dada por:

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}^T H(q) \dot{q} \quad (2.1)$$

donde  $q = (q_1, q_2) \in R^{2n}$  y  $H(q)$  representa la matriz de inercia de  $(2n \times 2n)$ , la cual es simétrica y definida positiva para toda  $q$ . Además, para articulaciones rotatorias todos



los elementos de  $H(q)$  son acotados. De acuerdo a las suposiciones anteriores.  $H(q)$  tiene la siguiente estructura interna:

$$H(q) = \begin{pmatrix} H_1(q_1) & H_2(q_1) \\ H_2^T(q_1) & H_3 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

En la ecuación anterior todos las submatrices son matrices de dimension  $(n \times n)$ , donde  $H_1$  contiene todas las propiedades inerciales.  $H_2$  toma en consideración los acoplamientos inerciales entre los giros de los actuadores y los eslabones previos, mientras que  $H_3$  es una matriz diagonal constante que depende de las inercias de los rotores de los motores y de la relación de engranes.

La *energía potencial* está dada como la suma de dos términos, los términos gravitatorios de los actuadores y los de los eslabones.

Suponiendo que las masas de los rotores son simétricas, la energía potencial  $U_g$ , esta expresada por

$$U_g = U_g(q_1) - U_e \quad (2.3)$$

El segundo término de la ecuación anterior se refiere a la elasticidad de la articulación,

la cual puede ser escrita como:

$$U_e = \frac{1}{2}(q_1 - q_2)^T K(q_1 - q_2) \quad (2.4) \text{®}$$

donde  $K = \text{diag} \{k_1, \dots, k_n\}$ ,  $k_i > 0$ ,  $k_i$  representa la constante elástica de la articulación  $i$ . Definiendo ahora la matriz

$$K_E = \begin{pmatrix} K & -K \\ -K & K \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

la energía elástica (2.5) puede ser reescrita como

$$U_e = \frac{1}{2} q^T K_E q \quad (2.6)$$

Por otra parte, las ecuaciones dinámicas del movimiento del robot se obtienen a partir de

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = u_i \quad i = 1, \dots, 2n \quad (2.7)$$

donde  $L(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - U(q, \dot{q})$  es la función Lagrangiana y  $u_i$  representa la fuerza generalizada que desempeña un trabajo sobre las coordenadas  $q_i$ . Puesto que únicamente las coordenadas del motor  $q_2$  son actuadas directamente, se pueden representar todas las fuerzas en el lado derecho de la ecuación (2.7) por

$$u = [0 \dots 0 \quad u_1 \dots u_n]^T \in R^{2n} \quad (2.8)$$

En forma explícita la ecuación (2.7) da lugar a  $2n$  ecuaciones diferenciales de segundo orden de la forma

$$H(q_1) \ddot{q} - C(q, \dot{q}) \dot{q} + K_E q + g(q_1) = u \quad (2.9)$$

en la cual los términos de Coriolis y centrífugos son

$$C(q, \dot{q}) \dot{q} = H(q_1) \ddot{q} - \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial q} \left( \dot{q}^T H(q_1) \dot{q} \right) \right]^T \quad (2.10) \quad \text{®}$$

y el vector de gravedad es

$$g(q_1) = \frac{\partial U_g(q_1)^T}{\partial q} = \begin{pmatrix} g(q_1) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

con

$$g_1 = \left( \frac{\partial U_g(q_1)}{\partial q_1} \right)^T$$

Los términos de fricción viscosa actúan en el eslabón y en el motor. Estos se encuen-

tran a los lados de las articulación elástica y pueden ser fácilmente incluidos en el modelo dinámico.

## 2.0.7 Propiedades del modelo

Al considerar el modelo general (2.9), las siguientes propiedades pueden ser derivadas, algunas de ellas se encuentran también presentes en el caso del modelo del robot rígido.

1.-Los elementos de  $C(q, \dot{q})$  pueden siempre definirse, de tal forma que la matriz  $H - 2C$  resulte *anti-simétrica*. En particular, tal selección es proporcionada por los símbolos de Christoffel

$$C_{ij}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial H_{ij}}{\partial q} \dot{q} + \sum_{k=1}^{2n} \left( \frac{\partial H_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial H_{jk}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k \right], \quad (2.12)$$

para  $i, j = 1, \dots, 2n$ , donde  $q_i$  denota el  $i$ -ésimo elemento del vector  $q$ .

2.-Si  $C(q, \dot{q})$  esta definida como en (2.12), entonces esta puede ser descompuesta como

$$C(q, \dot{q}) = C_A(q_1, q_2) + C_B(q_1, \dot{q}_1) \quad (2.13)$$

$$C_A(q_1, q_2) = \begin{pmatrix} C_{A1}(q_1, q_2) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

$$C_B(q_1, \dot{q}_1) = \begin{pmatrix} C_{B1}(q_1, \dot{q}_1) & C_{B2}(q_1, \dot{q}_1) \\ C_{B3}(q_1, \dot{q}_1) & 0 \end{pmatrix} \quad (2.15) \textcircled{R}$$

donde los elementos de las matrices  $(n \times n)$   $C_{A1}$ ,  $C_{B1}$ ,  $C_{B2}$  y  $C_{B3}$  son

$$C_{A1,ij}(q_1, q_2) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial H_2^i}{\partial q_{1,j}} - \frac{\partial H_2^j}{\partial q_{1,i}} \right) q_2 \quad (2.16)$$

$$C_{B1,ij}(q_1, \dot{q}_1) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial H_{1,ij}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \left( \frac{\partial H_1^i}{\partial q_{1,j}} - \frac{\partial H_1^j}{\partial q_{1,i}} \right) \dot{q}_1 \right] \quad (2.17)$$

$$C_{B2,ij}(q_1, \dot{q}_1) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial H_{2,ij}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial (H_2^T)^j}{\partial q_{1,i}} \dot{q}_1 \right] \quad (2.18)$$

$$C_{B3,ij}(q_1, \dot{q}_1) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial H_{2,ji}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial (H_2^T)^i}{\partial q_{1,j}} \dot{q}_1 \right] \quad (2.19)$$

con  $A^i$  denotando la  $i$ -ésima *fila* de una matriz  $A$ . Estas expresiones resultan a partir de dependencia de la matriz de inercia (2.2) y de la propiedad número 1.

3.- La matriz  $H_2(q_1)$  tiene la siguiente estructura triangular

$$\begin{pmatrix} 0 & H_{2,12}(q_{1,1}) & H_{2,13}(q_{1,1}, q_{1,2}) & \dots & H_{2,1n}(q_{1,1}, \dots, q_{1,n-1}) \\ 0 & 0 & H_{2,23}(q_{1,2}) & \dots & H_{2,2n}(q_{1,2}, \dots, q_{1,n-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & H_{2,n-1,n}(q_{1,n-1}) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Los elementos de la matriz  $H_2$  pueden ser obtenidos mediante la siguiente expresión

$$H_{2,ij} = \frac{\partial^2 T}{\partial q_{1,j} \partial q_{2,i}} \quad (2.20)$$

donde la energía cinética  $T$  representa la suma de la energía cinética de cada eslabón incluyendo la del estator del motor sucesivo y la de cada rotor de los motores. En virtud de que la energía cinética es una forma cuadrática de  $q$ , y tomando en cuenta la selección de variables mencionadas anteriormente, las contribuciones de  $H_2$  se deben solamente a la parte de la energía cinética correspondiente a los rotores, de tal manera que para el  $i$ -ésimo rotor esta energía viene dada por

$$T_{r,i} = \frac{1}{2} m_{r,i} v_{2,i}^T v_{2,i} + \frac{1}{2} \omega_{2,i}^T I_{r,i} \omega_{2,i} \quad (2.21)$$

donde  $v_{2,i}$  y  $\omega_{2,i}$  son la velocidad lineal absoluta y la velocidad angular del rotor, respectivamente, expresadas en un marco de referencia colocado en el correspondiente estator.

Por otro lado,  $m_{r,i}$  e  $I_{r,i}$  representan la masa y el tensor de inercia del rotor. Dado que el

centro de masas del rotor permanece en el eje de rotación. solamente el segundo término del lado derecho de la ecuación anterior contribuye a  $H_{2,ij}$ . La velocidad angular  $w_{2,i}$  puede ser calculada para articulaciones rotacionales por la siguiente fórmula recursiva:

$$\begin{aligned} w_{2,i} &= R_{r,i} \left[ w_{1,i-1} + b_{2,i} \dot{q}_{2,i} \right] \\ w_{1,i} &= R_i(q_{1,i}) \left[ w_{1,i-1} + b_{1,i} \dot{q}_{1,i} \right] \end{aligned} \quad (2.22)$$

en la cual  $w_{1,i}$  es la velocidad absoluta angular del eslabón  $i$  en un marco de referencia sujeto al propio eslabón.  $b_{1,i}$  es el vector unitario asociado a el eje de la  $i$ -ésima articulación.  $b_{2,i}$  es el vector unitario constante de la velocidad angular del rotor  $i$  relativo al eslabón  $i - 1$ .  $R_i$  es la matriz de transformación de  $(3 \times 3)$  desde el marco del eslabón  $i - 1$  al marco de referencia del eslabón  $i$ .  $R_{r,i}$  es la matriz de transformación de  $(3 \times 3)$  desde el marco del eslabón  $i - 1$  al marco de referencia del rotor  $i$ .

4.- Existe una constante positiva  $\alpha$  tal que

$$\left\| \frac{\partial g(q_1)}{\partial q_1} \right\| \leq \alpha \|q_1 - \bar{q}_1\|, \quad \forall q_1, \bar{q}_1 \in R^n \quad (2.23)$$

### 2.0.8 Modelos simplificados

En muchos arreglos cinemáticos comunes, el bloque  $H_2$  en la matriz de inercia del modelo del robot con articulación elástica es *constante*, de tal manera que se pueden efectuar simplificaciones en la modelación, es decir

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$H_2 = \text{constante} \Rightarrow C_{A1} = C_{B2} = C_{B3} = 0$$

esto significa que los términos de Coriolis y centrífugo, los cuales son siempre independientes de  $q_2$ , resultan también ser independientes de  $\dot{q}_2$ . Como consecuencia de lo anterior,

el modelo (2.9) puede ser reescrito de la forma

$$\begin{aligned} H_1(q_1) \ddot{q}_1 + H_2 \ddot{q}_2 + C(q_1, \dot{q}_1) \dot{q}_1 + K(q_1 - q_2) + g_1(q_1) &= 0 \\ H_2^T \ddot{q}_1 + H_3 \ddot{q}_2 + K(q_2 - q_1) &= u \end{aligned} \quad (2.24)$$

donde  $C_1 = C$ .

En algunas estructuras cinemáticas especiales de robots se encuentra que  $H_2 = 0$  y simplificaciones adicionales son inducidas. En consecuencia, no hay acoplamientos inerciales entre el eslabón y las dinámicas del motor

$$\begin{aligned} H_1(q_1) \ddot{q}_1 + C(q_1, \dot{q}_1) \dot{q}_1 - K(q_1 - q_2) + g_1(q_1) &= 0 \\ H_3 \ddot{q}_2 + K(q_2 - q_1) &= u \end{aligned} \quad (2.25)$$

Para modelos de robots generales con articulaciones elásticas, un *modelo reducido* de la forma anterior puede ser obtenido al despreciar algunas contribuciones en la energía del sistema. En particular,  $H_2$  puede ser igual a cero, si la parte angular de la energía cinética de cada rotor se debe únicamente a su propia rotación, esto es  $w_{2,i} = R_{r,i} b_{2,i} \dot{q}_{2,i}$ , o bien

$$T_{r,i} = \frac{1}{2} m_{r,i} v_{2,i}^T v_{2,i} + \frac{1}{2} I_{m,i} \dot{q}_{2,i}^2 \quad (2.26)$$

con el escalar positivo  $I_{m,i} = b_{2,i}^T R_{r,i}^T I_{r,i} R_{r,i} b_{2,i}$ . Cuando la relación de la reducción de engranes es muy grande, esta aproximación es bastante razonable dado que el giro rápido de cada rotor domina en la velocidad angular de los eslabones previos de la cadena cinemática.

## 2.0.9 Modelo del robot con articulación flexible de un grado de libertad

En esta tesis, se propondrán distintas técnicas de control para tratar con los problemas de estabilización y seguimiento de salida, de un robót de un simple eslabón y con articulación revoluta flexible, tal estructura se encuentra formulada con el siguiente modelo

matemático.

## 2.1 Modelo Matemático

En base a la formulación Lagrangiana, el sistema dinámico que describe el comportamiento de un robot de un simple eslabón con articulación rotatoria flexible en un movimiento planar será derivada.

El sistema dinámico  $(\Sigma_M)$  que describe el movimiento del robot ( ver Spong [31]) está dado por el siguiente modelo matemático

$$(\Sigma_M) : \begin{cases} J \ddot{q}_m - B \dot{q}_m + k(q_m - q) = u \\ I \ddot{q} + B_l \dot{q} + mgl \sin(q) - k(q_m - q) = 0 \end{cases} \quad (2.27)$$

donde  $q$  denota la posición angular del eslabón de longitud  $l/2$  y masa  $m$ ,  $q_m$  denota la posición angular del rotor del motor.  $I$  representa la inercia del eslabón.  $J$  es la inercia del motor.  $k$  es el coeficiente de rigidez de la articulación flexible.  $B$  es la fricción viscosa del motor.  $B_l$  representa la fricción viscosa del eslabón.  $g$  es la aceleración gravitacional; y finalmente  $u$  es el vector de torques de los actuadores.

El modelo representado por la ecuación ( 2.27), no toma en cuenta el efecto de la inercia del actuador alrededor de los tres ejes independientes. Sin embargo, se ha demostrado en [31] que la ecuación (2.27) representa de manera apropiada, dentro de un dominio de funcionamiento, la dinámica del manipulador.

El esquema del modelo de robot descrito por (2.27) se ilustra en la Figura 2.2.

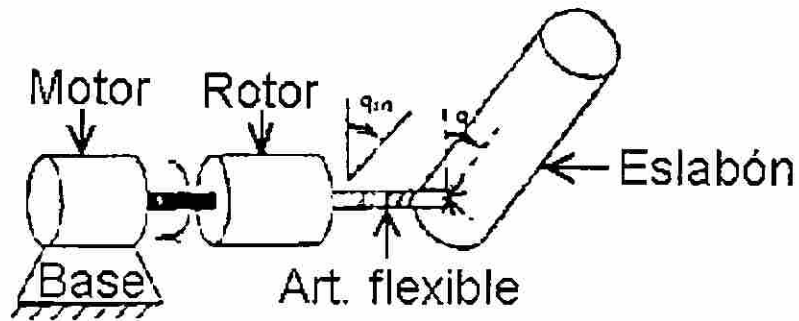
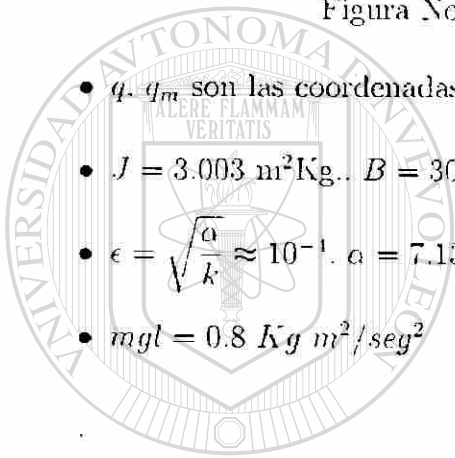


Figura No. 2.2 Modelo del robot manipulador

- $q, q_m$  son las coordenadas generalizadas de posición
- $J = 3.003 \text{ m}^2\text{Kg.}$ ,  $B = 300.3 \text{ NmKg.}$ ,  $k = 100 \text{ Nrad/m}$
- $\epsilon = \sqrt{\frac{\alpha}{k}} \approx 10^{-1}$ ,  $\alpha = 7.13 \times 10^{-8}$
- $mgl = 0.8 \text{ Kg m}^2/\text{seg}^2$



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



## Capítulo 3

# Método Geométrico Diferencial

### 3.0.1 Introducción

En estudios recientes sobre el problema de estabilidad para sistemas no lineales afines en el control, y que están basados en la geometría diferencial, son temas de interés por parte de los investigadores en la materia (ver por ejemplo [6],[11],[29]). Esta metodología está basada en los elementos fundamentales de la geometría diferencial, la cual ha permitido el análisis de estabilidad y diseño de controladores mucho más eficientes que los métodos tradicionales de control clásico. La diferencia fundamental entre las técnicas de control clásico y las que se basan en métodos de geometría diferencial, radica en el hecho que permite obtener resultados más poderosos, además de coadyuvar a comprender mejor los fenómenos que antes eran despreciados o que limitaban su aplicación a solo pequeñas regiones de funcionamiento.

El objetivo del presente capítulo es presentar un algoritmo de control basado en un observador para una clase de sistemas no lineales, los cuales son linealizables por retroalimentación de estado. Además, se propone un observador o sensor computacional, el cual permite estimar las variables de estado, que por razones físicas o económicas, no es posible medir.

En este capítulo se considera un observador para la clase de sistemas no lineales

observable para toda entrada, es decir la propiedad de observabilidad del sistema no se ve afectada por las entradas aplicadas al sistema [ver Teorema 0.13 Apéndice].

Mediante un cambio de coordenadas apropiado es posible, bajo ciertas condiciones estructurales, transformar un sistema no lineal en otro sistema el cual es controlable y que es linealizable por retroalimentación de estado.

### 3.1 Estabilización de una Clase de Sistemas No Lineales

Consideremos la siguiente clase de sistemas no lineales con una entrada y una salida, observables para cualquier entrada y con la siguiente estructura:

$$\Sigma_{NL} : \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B(x) + \Psi(x)u \\ y &= Cx = x_1 \end{aligned}$$

donde  $x \in R^n$ ,  $u \in R$ ,  $y \in R$ , y

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \varphi(r) \end{pmatrix} ; \Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \psi(r) \end{pmatrix} ; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Además, se asume que las funciones  $\varphi$  y  $\psi$  son funciones globalmente Lipschitz.

Un observador para esta clase de sistemas esta dado por

$$\dot{\hat{x}} = A \hat{x} + \Phi(\hat{x}) + \Psi(\hat{x})u - S_{\theta}^{-1}C^T(C \hat{x} - y) \quad (3.1)$$

donde  $S_{\theta}$  es una matriz simétrica definida positiva, solución de la ecuación de Lyapunov

$$\theta S_{\theta} + A^T S_{\theta} + S_{\theta} A = C^T C \quad (3.2)$$

para valores de  $\theta$  suficientemente grandes, donde  $\hat{x}$  es el estimado del estado  $x$ .

Los coeficientes de  $(S_\theta)_{ij}$  son dados por la siguiente expresión

$$(S_\theta)_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} C_{i+j-2}^{\theta-1}}{\theta^{i+j-1}} \quad (3.3)$$

donde  $\left( C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!} \right)$  que se obtiene a partir de la solución de la ecuación (3.2), es una matriz simétrica definida positiva ( ver [6.8.10]).

Como se puede observar el sistema se encuentra en la forma normal que se ha establecido en [5]. También se puede señalar que si  $u$  está acotada, entonces la ecuación (3.0) es un observador exponencial para el sistema dado.

Esto es, si se define  $\varepsilon = \hat{x}(t) - x(t)$ , entonces la dinámica del error de estimación está dada por

$$\dot{\varepsilon} = (A - S_\theta^{-1} C^T C) \varepsilon + (\Phi(\hat{x}) - \Phi(x)) + (\Psi(\dot{\hat{x}}) - \Psi(\dot{x})) u$$

se puede demostrar que converge exponencialmente a cero cuando el tiempo tiende hacia el infinito (ver [8]). Mas precisamente,  $\forall u \in L^\infty(R^-)$ , existe  $k > 0$  tal que  $\|\varepsilon\| \leq k e^{-\frac{t}{\theta}}$ . Además  $\nu(x) \neq 0; \forall x \in R^n$ .

Un controlador que linealice y estabilice al sistema  $\Sigma_{NL}$  está dado por

$$u(x) = \frac{\sum_{j=1}^n a_j x_j - \varphi(x)}{\nu(x)} \quad (3.4)$$

donde los coeficientes  $a_j$  se seleccionan de modo que la matriz  $(A - BK)$  sea Hurwitz. ®

**Observación 1:** Resultados más generales, tanto para sistemas no lineales en forma triangular, como para sistemas multivariables, existen y pueden ser considerados como una extensión de estos (ver [10] para el caso de una simple salida, y en [17] para el caso de múltiples salidas).

## 3.2 Análisis de Estabilidad en Lazo Cerrado

Se discutirá enseguida el principio de separación, el cual consiste en el estudio de la estabilidad del siguiente sistema en lazo cerrado (ver Figura 3.1).

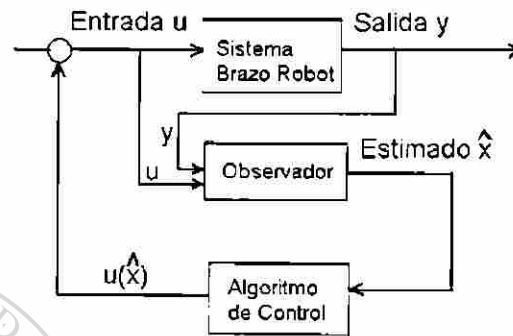


Figura 3.1 Esquema de control en lazo cerrado

En otras palabras, se considera el problema de la estabilidad del sistema aumentado, consistente en el sistema controlado y el observador, cuando la retroalimentación es una función del estado estimado, el cual es proporcionado por el observador.

Para resolver este problema, se considera el siguiente sistema aumentado

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{\hat{x}} = A \hat{x} + \Phi(\hat{x}) + \Psi(\hat{x})u(x) - S_{\theta}^{-1}C^T(C\hat{x} - y) \\ \dot{\varepsilon} = (A - S_{\theta}^{-1}C^TC)\varepsilon + (\Phi(\hat{x}) - \Phi(\hat{x} - \varepsilon)) + (\Psi(\hat{x}) - \Psi(\hat{x} - \varepsilon))u(\hat{x}) \end{cases}$$

aplicando el control  $u$  de la ecuación (3.3), y escribiendo en términos de la dinámica del error y del estado estimado, obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \tilde{A}\hat{x} - S_{\theta}^{-1}C^TC\varepsilon, \\ \dot{\varepsilon} &= (A - S_{\theta}^{-1}C^TC)\varepsilon + (\Phi(\hat{x}) - \Phi(\hat{x} - \varepsilon)) + (\Psi(\hat{x}) - \Psi(\hat{x} - \varepsilon))u(\hat{x}) \end{aligned}$$

donde

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

A continuación se presenta el resultado principal de este capítulo, y el cual se expresa en el siguiente

**Teorema 1.** *Sea  $u(x)$  la retroalimentación de estado dada por (3.3). Asumiendo que  $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|u(x)\| < \infty$ . Entonces, el sistema  $(\Sigma)$  es global y asintóticamente estable.*

**Prueba del Teorema 1.**

Considere  $V(x, \varepsilon) = V_1(\varepsilon) + V_2(x)$ , como una función candidata de Lyapunov, donde  $V_1(\varepsilon) = \varepsilon^T S \varepsilon$  y  $V_2(x) = \hat{x}^T P \hat{x}$ , siendo  $P$  una matriz simétrica definida positiva tal que  $\tilde{A}^T P + P \tilde{A} = -I$ , donde  $I$  es la matriz identidad y  $\tilde{A}^T$  la traspuesta de la matriz  $\tilde{A}$ .

Ahora se demostrará que el sistema  $(\Sigma)$  es globalmente estable.

i) Primero, derivando  $V_1(\varepsilon)$  con respecto al tiempo la función a lo largo de las trayectorias de  $\varepsilon$ , se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (V_1(\varepsilon)) &= \frac{d}{dt} (\varepsilon^T S \varepsilon) = 2\varepsilon^T S \dot{\varepsilon} \\ &= 2\varepsilon^T S_\theta A \varepsilon - 2(C\varepsilon)^2 + 2\varepsilon^T S_\theta (\Phi(\hat{x}) - \Phi(\hat{x} - \varepsilon)) + 2\varepsilon^T S_\theta (\Psi(\hat{x}) - \Psi(\hat{x} - \varepsilon)) u(\hat{x}) \\ &= -\theta \varepsilon^T S_\theta \varepsilon - (C\varepsilon)^2 + 2\varepsilon^T S_\theta (\Phi(\hat{x}) - \Phi(\hat{x} - \varepsilon)) + 2\varepsilon^T S_\theta (\Psi(\hat{x}) - \Psi(\hat{x} - \varepsilon)) u(\hat{x}) \end{aligned}$$

Denotando por  $\|\varepsilon\|_{S_\theta}$  la norma  $(\varepsilon^T S_\theta \varepsilon)^{\frac{1}{2}}$  y utilizando la desigualdad de Schwarz, se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \left( (\|\varepsilon\|_{S_\theta})^2 \right) \leq -\theta (\|\varepsilon\|_{S_\theta})^2 + 2 \|\varepsilon\|_{S_\theta} \left\| \Phi(\hat{x}) - \Phi(\hat{x} - \varepsilon) \right\|_{S_\theta} + 2 \|\varepsilon\|_{S_\theta} \left\| \Psi(\hat{x}) - \Psi(\hat{x} - \varepsilon) \right\|_{S_\theta} r_0$$

donde

$$( r_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|u(x)\| ).$$

Ahora, aprovechando la forma particular de  $S_\theta$ ,  $\Phi$ ,  $\Psi$  y el hecho de que  $\Phi$  y  $\Psi$  son globalmente Lipschitz, se obtiene:

$$\left\| \Phi(\hat{x}) - \Phi(\hat{x} - \varepsilon) \right\|_{S_\theta} \leq \lambda_1 \|\varepsilon\|_{S_\theta}$$

$$\left\| \Psi(\hat{x}) - \Psi(\hat{x} - \varepsilon) \right\| \leq \lambda_2 \|\varepsilon\|_{S_\theta}.$$

para algunas constantes  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  las cuales no dependen de  $\theta$ ,  $\theta \geq 1$ . Entonces,

$$\frac{d}{dt} \|\varepsilon\|_{S_\theta} \leq -\frac{\theta}{2} \|\varepsilon\|_{S_\theta} - \lambda_1 \|\varepsilon\|_{S_\theta} + \lambda_2 \|\varepsilon\|_{S_\theta} r_0.$$

Seleccionando  $\theta$  tal que  $\frac{\theta}{2} - \lambda_1 - \lambda_2 r_0 = \gamma_\theta > 0$ . Resulta que

$$\frac{d}{dt} \|\varepsilon\|_{S_\theta} \leq -\gamma_\theta \|\varepsilon\|_{S_\theta}.$$

y en consecuencia

$$\|\varepsilon\|_{S_\theta} \leq e^{-\gamma_\theta t} \|\varepsilon(0)\|_{S_\theta}$$

(ii) Ahora, derivando la función  $V_2(\hat{x})$  a lo largo de las trayectorias del sistema, resulta que

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (V_2(\hat{x})) &= \frac{d}{dt} (\hat{x}^T P \hat{x}) = 2 \hat{x}^T P \dot{\hat{x}} \\ &= \hat{x}^T P \tilde{A} \hat{x} + \hat{x}^T A^T P \hat{x} - 2 \hat{x}^T P S_\theta^{-1} C^T C \varepsilon = -\hat{x}^T \hat{x} - 2 \hat{x}^T P S_\theta^{-1} C^T C \varepsilon \\ &\leq -\alpha \hat{x}^T P \hat{x} - 2 \hat{x}^T P S_\theta^{-1} C^T C \varepsilon = -\alpha V_2 - 2 \hat{x}^T P S_\theta^{-1} C^T C \varepsilon \end{aligned}$$

para algunas constantes  $\alpha > 0$ .

Utilizando la desigualdad de Schwarz se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(V_2) &\leq -\alpha V_2 + 2\rho_\theta \|\varepsilon\|_{S_\theta} V_2^{\frac{1}{2}}. \\ 2\frac{d}{dt}(V_2^{\frac{1}{2}}) &\leq -\alpha V_2^{\frac{1}{2}} + 2\rho_\theta \|\varepsilon\|_{S_\theta}\end{aligned}$$

Seleccionando  $\theta$  tal que  $\gamma_\theta > \frac{\alpha}{2}$  se completa y finaliza la prueba.  $\square$

Se ha demostrado la estabilidad del sistema en lazo cerrado para la clase de sistemas considerada, en el caso donde la entrada  $u$  está acotada y donde las funciones  $\varphi$  y  $\psi$  son funciones globalmente Lipschitz.

Cuando la entrada  $u$  no este acotada, entonces se tiene

**Corolario 1.** *Asumiendo que  $\nu$  es una constante diferente de cero y  $\varphi$  globalmente Lipschitz. Entonces,  $(\Sigma)$  es global y asintóticamente estable.*

Note que para la prueba del Teorema 1, el acotamiento de  $u(x)$  tiene que ser usado en el término  $(\Psi(\hat{x}) - \Psi(\hat{x} - \varepsilon)) u(\hat{x})$ , el cual desaparece, y por lo tanto, el sistema  $(\Sigma)$  toma la forma siguiente

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} - S_\theta^{-1}C^T C \varepsilon.$$

$$\dot{\varepsilon} = (A - S_\theta^{-1}C^T C) \varepsilon + \Phi(x) - \Phi(x - \varepsilon).$$

**Observación 2:** El control  $u$ , dado en la ecuación (3.3), estabiliza el sistema en  $\hat{x} = 0$ . Dado que el sistema considerado es completamente linealizabile por retroalimentación de estado, entonces se puede diseñar una ley de control que siga una señal de referencia  $y_{ref}$  de salida dada ( ver [8]). Esta ley de control está dada por:

$$u(x) = \frac{1}{\Psi(x)} \left( -\Psi(x) + y_R^{(n)} - \sum_{i=1}^{i-1} a_{i-1} (x_i - y_R^{(i-1)}) \right)$$

Bajo hipótesis similares de acotamiento, como antes, el principio de separación se preserva también para el control de seguimiento de  $y_R$ .

### 3.3 Aplicación al modelo matemático del robot con articulación flexible

La técnica mediante este enfoque geométrico diferencial se aplica al caso de un robot de un simple eslabón el cual tiene flexibilidad en la articulación, y para tal propósito se considera el siguiente modelo matemático descrito por las siguientes ecuaciones dinámicas

$$(\Sigma_M) : \begin{cases} J \ddot{q}_m + B \dot{q}_m + k(q_m - q) = u \\ I \ddot{q} + B_l \dot{q} + mgl \sin(q) - k(q_m - q) = 0 \end{cases}$$

donde  $q$  representa la posición angular del eslabón de longitud  $l/2$ , y masa  $m$ ,  $q_m$  la posición angular del rotor del motor,  $I$  representa la inercia del eslabón,  $J$  es la inercia del motor,  $k$  es el coeficiente de rigidez de la articulación flexible,  $B$  es la fricción viscosa del motor,  $B_l$  representa la fricción viscosa del eslabón,  $g$  es la aceleración gravitacional; y finalmente,  $u$  es el vector de torques del actuador.

Partiendo de las expresiones que describen al sistema  $(\Sigma_M)$ , se define el siguiente cambio de coordenadas :

$x_1 = q_m$  la posición angular del rotor del motor

$x_2 = \dot{q}_m$  la velocidad angular del motor

$x_3 = k(q - q_m)$  representa la fuerza elástica

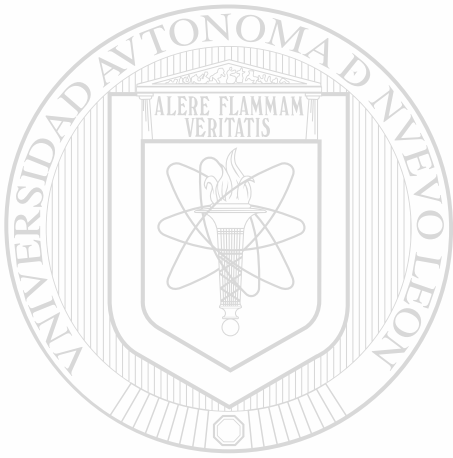
$x_4 = \frac{(q - q_m)}{J}$  es la variación de la velocidad elástica.

Entonces, se obtiene el siguiente modelo dinámico del robot

$$(\Sigma_M) : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \{-B_l x_2 - mgl \sin(x_1) + k(x_3 - x_1)\} / I \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \{-B_l x_4 - k(x_3 - x_1) + u\} / J \\ y = x_1 \end{cases}$$



siendo por nosotros definida la constante  $\bar{\beta}^2 = \frac{1}{k}$ , la cual no deberá confundirse con la constante empleada en la técnica de perturbaciones singulares ( ver Capítulo 5).



# UANL

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Ahora , efectuando un cambio de variable de la forma  $\zeta = \Phi (x)$  , se obtiene

$$\zeta_1 = x_1$$

$$\zeta_2 = x_2 = L_f x_1$$

$$\zeta_3 = -\{B_l x_2 + mgl \sin(x_1) - k(x_3 - x_1)\} / I = L_f^2 x_1$$

$$\zeta_4 = -\{B_l \dot{x}_2 + mgl(\dot{x}_1) \cos(x_1) - k(\dot{x}_3 - \dot{x}_1)\} / I = L_f^3 x_1$$

Puede ser fácilmente verificado que la matriz Jacobiana de  $\Phi (x)$  con respecto a  $\zeta$  , es invertible para toda  $\zeta \in R^4$ .

Entonces, el sistema  $(\Sigma_M)$  se transforma en el siguiente sistema no lineal linealizable por retroalimentación, el cual está dado por

$$\dot{\zeta}_1 = \zeta_2$$

$$\dot{\zeta}_2 = \zeta_3$$

$$\dot{\zeta}_3 = \zeta_4$$

$$\dot{\zeta}_4 = \alpha(\zeta) + \beta(\zeta)u$$

donde

$$\alpha(\zeta) = -I^{-2}B \{-I^{-1}B (R_1) - mglx_2 \cos(x_1) + k(x_4 - x_2)\} + I^{-1}mglx_2^2 \sin(x_1) - I^{-2}mglR_1 \cos(x_1) - I^{-1}k \{I^{-1}R_1 + J_m^{-1}B_m x_4 + k(x_3 - x_1)\}$$

y

$$\beta(\zeta) = I^{-1}kJ_m^{-1}$$

con

$$R_1 = -B_l x_2 - mgl \sin(x_1) + k(x_3 - x_1)$$

Construyendo un observador de alta ganancia para el sistema anterior, se tiene el siguiente sistema ( ver [18] )

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\zeta}}_1 &= \hat{\zeta}_2 - 4\theta(\hat{\zeta}_1 - y) \\ \dot{\hat{\zeta}}_2 &= \hat{\zeta}_3 - 6\theta^2(\hat{\zeta}_1 - y) \\ \dot{\hat{\zeta}}_3 &= \hat{\zeta}_4 - 3\theta^2(\hat{\zeta}_1 - y) \\ \dot{\hat{\zeta}}_4 &= \alpha(\hat{\zeta}) + \beta(\hat{\zeta})u - \theta^4(\hat{\zeta}_1 - y_1)\end{aligned}$$

Con el observador de estado anterior se puede obtener la estimación de las variables no medibles. Entonces, la expresión del control aplicado es de la forma:

$$u = \frac{1}{\beta(\hat{\zeta})} \begin{pmatrix} -\alpha(\hat{\zeta}) - a_1(x_1 - y_{ref}) - a_2(x_2 - \dot{y}_{ref}) \\ -a_3(x_2 - \ddot{y}_{ref}) - a_4(x_2 - \dddot{y}_{ref}) \end{pmatrix}$$

seleccionando los polos , se obtienen los siguientes valores para las  $a_i$ :  $a_1 = 256$ ,  $a_2 = 256$ ,  $a_3 = 96$ ,  $a_4 = 96$ , y  $a_4 = 16$

### 3.3.1 Resultados de Simulación

En esta sección, se presenta los resultados en simulación de un algoritmo de control basado en un observador.

Para llevar a cabo esta aplicación, se consideraron los siguientes valores de las condiciones iniciales.

Las condiciones iniciales para el sistema fueron seleccionadas como:  $x_1(0) = 0.5$ ,  $x_2(0) = 0.5$ ,  $x_3(0) = 0$ ,  $x_4(0) = 0.5$ . Para el observador, las condiciones arbitrarias  $\hat{\zeta}_1(0) = 0.02$ ,  $\hat{\zeta}_2(0) = 0.01$ ,  $\hat{\zeta}_3(0) = 0.002$ ,  $\hat{\zeta}_4(0) = 0.003$ . El parámetro de sintonización del observador fue seleccionado como  $\theta = 3$ .

La señal de referencia para la trayectoria deseada  $y_R(t)$  en la posición del motor, se

estableció como:  $y_R(t) = \sin(t)$ .

Se puede apreciar en la Figura (3.2) que para el controlador propuesto basado en el observador, el estado  $x_1$  sigue a la trayectoria de referencia  $y_R(t)$  con un excelente desempeño, a partir de 6 segundos, mientras que en la Figura (3.3) se muestra la convergencia del estado  $x_2$  hacia  $d(y_R(t))/dt$ . En la Figura (3.4), se ilustra el comportamiento del controlador propuesto  $u$ , mientras que en las Figuras (3.5) y (3.6), se muestra las variables de estado  $x_1$  y  $x_2$  con su respectivo estimado proporcionado por el observador.

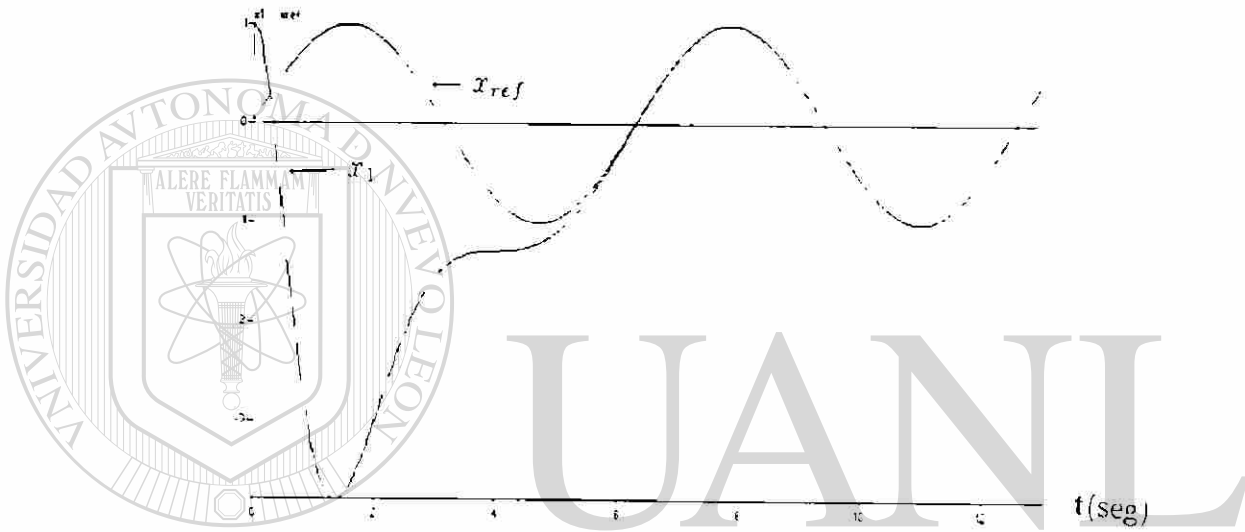


Figura 3.2 El estado  $x_1$  y la señal de referencia  $x_{ref}$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

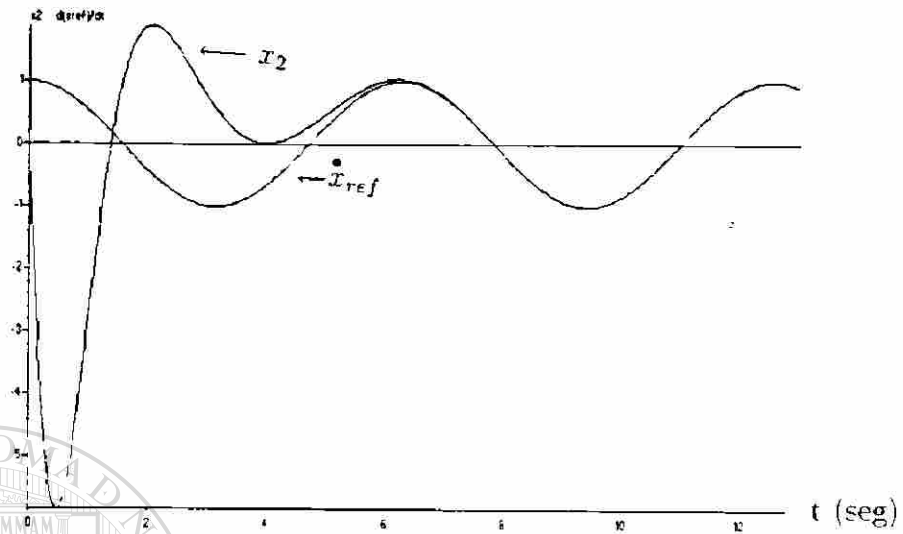


Figura 3.3 El estado  $x_2$  y la señal  $x_{ref}$

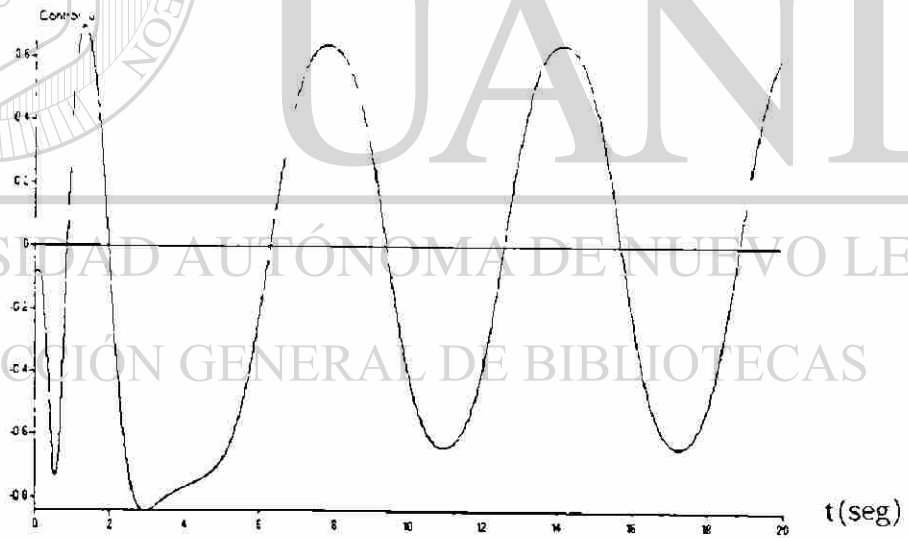


Figura 3.4 Control  $u$

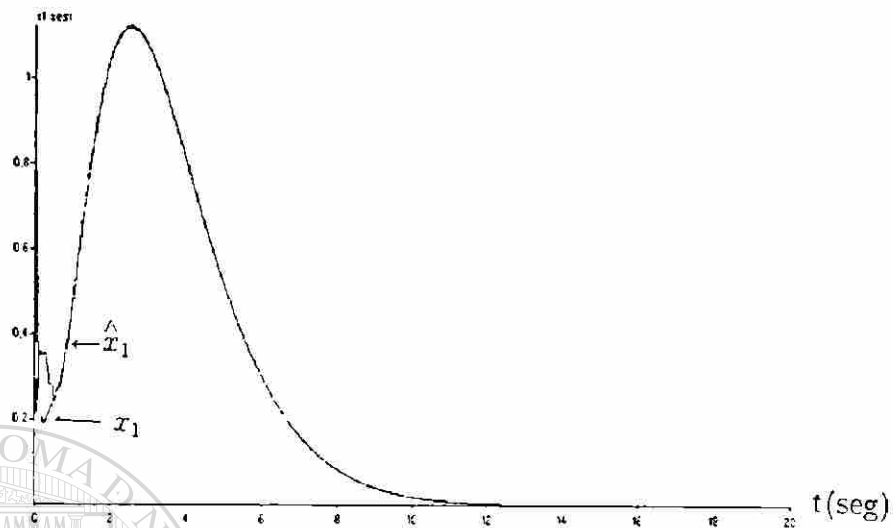


Figura 3.5 Estado  $x_1$  y su estimado  $\hat{x}_1$



Figura 3.6 Estado  $x_2$  y su estimado  $\hat{x}_2$

### 3.3.2 Conclusiones

En este capítulo, se propuso un controlador basado en un observador de alta ganancia para una clase de sistemas no lineales, el cual es linealizable por retroalimentación de salida. Los resultados se aplicaron al modelo del robot flexible.

# Capítulo 4

## Método Algebraico Diferencial

### 4.1 Introducción

Varias técnicas en el diseño de controladores han sido propuestas, desde diferentes perspectivas, para la estabilización de sistemas no-lineales. Recientemente, un número considerable de trabajos han estudiado el problema del control de robots manipuladores con flexibilidad en la articulación. Este problema tiene un interés tanto práctico como teórico. Porque, desde el punto de vista práctico, se debe considerar el efecto de la elasticidad en el robot para diseñar las leyes de control; y desde el punto de vista teórico, el número de grados de libertad es dos veces el número de acciones de control, y las propiedades de igualamiento entre las no-linealidades y las entradas se pierde (ver [6], [29]).

En la literatura, se puede encontrar diferentes esquemas de control para sistemas no-lineales. Muchos de estos esquemas utilizan controladores por retroalimentación estática. Su diseño está basado en técnicas de control adaptivo, perturbaciones singulares, teoría de control no-lineal, y esquemas de control de Lyapunov basados en la energía, o mas recientemente en esquemas basados en desacoplamiento, backstepping, o pasividad ( ver [6], [29]).

Por otro lado, un número considerable de investigadores han estudiado los problemas de estabilidad y seguimiento de salida de sistemas dinámicos usando hasta hoy la más

común de las herramientas matemáticas en la teoría de control de sistemas no-lineales: *Geometría Diferencial*. Sin embargo, si las no linealidades involucradas en el sistema son todas polinomiales, entonces existen métodos del algebra diferencial que pueden ser utilizados en su lugar. Ha sido mostrado por M. Fliess, que el algebra diferencial es una herramienta natural para tratar con sistemas polinomiales.

En esta técnica de control tratamos los problemas de estabilidad y seguimiento de salida para sistemas no-lineales, desde la estrategia de linealización del error por retroalimentación dinámica. Este enfoque está basado en la forma canónica de observabilidad generalizada (FCOG) y la forma canónica de controlabilidad generalizada (FCCG) de Fliess, las cuales son fáciles consecuencias del teorema del elemento primitivo diferencial ( ver ref. [15, 16, 28] ). Recordando que, desde el comportamiento externo del sistema, la forma (FCOG) de Fliess es una descripción generalizada de los estados del sistema donde en general, las ecuaciones de estado dinámicas son dependientes del control, incluyendo un número finito de derivadas del control con respecto al tiempo.

El controlador que se propone en esta tesis es obtenido por medio de linealización exacta de la dinámica del error de seguimiento. Este controlador es una función del vector del error de seguimiento el cual es, en general, parcialmente medible, por lo que es necesario estimarlo. Un observador de alta ganancia es utilizado para estimar el error de seguimiento para implementar nuestro controlador. Finalmente, para garantizar la estabilidad del sistema en lazo cerrado, se presenta un análisis de estabilidad.

Este capítulo está organizado como sigue: La sección 4.2, introduce algunas definiciones y notaciones. Los problemas de estabilización y seguimiento de salida por medio de un observador exponencial, utilizando el enfoque algebraico diferencial, son tratados en la sección 4.3. En la sección 4.4, se introduce un modelo matemático, para describir el comportamiento de un brazo manipulador con flexibilidad en la articulación. En la sección 4.5 los resultados de las simulaciones usando nuestro esquema de control son presentados .



## 4.2 Formas canónicas de observabilidad y controlabilidad generalizadas.

Comenzamos esta técnica de control, introduciendo algunas definiciones y notaciones útiles en este capítulo ( ver bibliografía [13, 15, 16] ).

**Definición 1:** Una extensión del campo diferencial  $L/K$  es dado por dos campos vectoriales  $K$  y  $L$ , tales que : i)  $K$  es un subcampo de  $L$ ; ii) la derivación de  $K$  es la restricción para  $K$  de la derivación de  $L$ .

**Definición 2:** Sea  $u$  un escalar diferencial indeterminado y sea  $K$  un campo diferencial, con derivación denotada por " $\frac{d}{dt}$ ".

Una dinámica  $G/K\langle u \rangle$  es definida como una extensión finita algebraica generada diferencialmente del campo diferencial  $K\langle u \rangle$ , donde  $K\langle u \rangle$  denota el campo diferencial generado por  $K$  y los elementos de un conjunto finito  $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$  de cantidades diferenciales.

**Definición 3:** Considere un subconjunto  $\{u, y\}$  de  $G$  en una dinámica  $G/K\langle u \rangle$ . Un elemento  $x_0$  en  $G$  es llamado algebraicamente observable con respecto a  $\{u, y\}$  si este es algebraico sobre  $K\langle u, y \rangle$ . Esto significa que  $x_0$  puede ser expresado como una función algebraica de las componentes de  $\{u, y\}$  y un número finito de sus derivadas con respecto al tiempo. Por esto, un estado  $x^*$  es llamado algebraicamente observable si y solo si este es algebraicamente observable con respecto a  $\{u, y\}$ .

**Definición 4:** Una dinámica  $G/K\langle u \rangle$  con variable de salida  $y$  en  $G$  es llamada algebraicamente observable si y solo si cualquier estado (generalizado) también lo es.

De acuerdo a el teorema del elemento primitivo diferencial existe un elemento  $\bar{\xi} \in G$  tal que  $G = K\langle u, \bar{\xi} \rangle$ . El grado de trascendencia  $n$  de  $G/K\langle u \rangle$  (ver [10.13.15]), el cual es igual a la dimensión del sistema, y es el entero mas pequeño  $\bar{\xi}$  tal que  $\frac{d^n \bar{\xi}}{dt^n}$  es  $K\langle u \rangle$ -algebraicamente dependiente en  $\left\{ \bar{\xi}, \frac{d\bar{\xi}}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}\bar{\xi}}{dt^{n-1}} \right\}$  la cual es una base trascendente de  $G/K\langle u \rangle$  (ver [13. 16. 17]).

Definiendo el siguiente cambio de variable de la forma  $\xi_i = \frac{d^{i-1}\bar{\xi}}{dt^{i-1}}; 1 \leq i \leq n$ . Es claro que  $\{\xi_i\}_{i=1}^n$  es también una base trascendente de  $G/K\langle u \rangle$ . A partir de aquí, una generalización no-lineal de la forma canónica del controlador es dada por

$$(\Sigma_A) \cdot \begin{cases} \frac{d\xi_i}{dt} = \xi_{i+1}, 1 \leq i \leq n-1 \\ D\left(\frac{d\xi_n}{dt}, \xi, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^\gamma u}{dt^\gamma}\right) = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

donde  $D\left(\frac{d\xi_n}{dt}, \xi, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^\gamma u}{dt^\gamma}\right)$  es un polinomio con coeficientes en  $K$ . Si uno puede resolver localmente para  $\frac{d\xi_n}{dt}$  en la segunda ecuación de  $(\Sigma_A)$ , uno obtiene un sistema explícito de ecuaciones diferenciales de primer orden, conocido como la *Forma Canónica de Controlabilidad Generalizada* (FCCG).

$$(\Sigma_{FCCG}) \cdot \begin{cases} \frac{d\xi_i}{dt} = \xi_{i+1}, 1 \leq i \leq n-1 \\ \frac{d\xi_n}{dt} = L_c\left(\xi, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^\gamma u}{dt^\gamma}\right) \end{cases} \quad \text{UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN} \quad \text{DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS} \quad \text{®}$$

para  $\gamma$  un entero estrictamente positivo.

Ahora, sea  $y$  el escalar de salida y sea  $n$  el entero mas pequeño tal que  $\frac{d^n y}{dt^n}$  es algebraicamente dependiente en

$$\left\{ y, \frac{dy}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^\nu u}{dt^\nu} \right\}$$

es decir significa que:

$$\frac{d^n y}{dt^n} = -L_o \left( y, \frac{dy}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^r u}{dt^r} \right).$$

Usando el siguiente cambio de variable  $\eta_i = \frac{d^i y}{dt^i}$ : para  $1 \leq i \leq n$ . entonces uno puede escribir una representación local del espacio de estado. la cual tiene la forma especial de una *Forma Canónica de observabilidad Generalizada* (FCOG):

$$(\Sigma_{COCF}) : \begin{cases} \frac{d\eta_i}{dt} = \eta_{i-1}, & 1 \leq i \leq n-1 \\ \frac{d\eta_n}{dt} = -L_o \left( \eta, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^r u}{dt^r} \right) \\ y = \eta_1 \end{cases}$$

para  $\nu$  un entero positivo.

### 4.3 Un enfoque algebraico diferencial para estabilización asintótica y seguimiento de salida.

Considere el siguiente sistema no-lineal

$$(\Sigma_{NL}) : \begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x, u) \end{cases} \quad (4.2) \quad \text{®}$$

donde  $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$ .  $(u_1, \dots, u_m) \in R^m$ .  $y \in R$ .  $f$  y  $h$  son asumidos como polinomios en sus argumentos. El sistema (4.1) se supone universalmente observable (ver [13, 15]) con comportamiento externo descrito por ecuaciones de la forma

$$\frac{d^n y}{dt^n} = -L_o \left( y, \frac{dy}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^r u}{dt^r} \right)$$

donde  $L_o$  es un polinomio de sus argumentos.

Definiendo localmente  $\eta_i = \frac{d^{i-1}y}{dt^{i-1}}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , nosotros obtenemos una forma explícita del sistema (4.1) de la manera siguiente:

$$\dot{\eta}_i = \eta_{i-1}, \quad 1 \leq i \leq n-1 \quad (4.1)$$

$$\dot{\eta}_n = -L_o \left( \eta, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^r u}{dt^r} \right) \quad (4.2)$$

Ahora, sea  $y_R(t)$  una función de referencia de salida prescrita la cual es diferenciable al menos  $n$  veces. El problema de seguimiento de salida asintótico consiste en buscar un controlador dinámico descrito por una ecuación diferencial ordinaria escalar variante en el tiempo, la cual es posiblemente implícita, y que tiene como salida:

a) La señal de referencia de salida  $y_R(t)$ , junto con un número finito de sus derivadas con respecto al tiempo

$$\frac{d^i y_R}{dt^i}; 1 \leq i \leq n$$

b) Las coordenadas de estado  $\eta_i$  de el sistema.

El controlador es supuesto para producir una función escalar  $u$ , lo cual obliga a la salida  $y$  para que tenga convergencia asintótica a la señal de referencia  $y_R(t)$ .

Definimos ahora una función de error de seguimiento de salida  $e(t)$  como la diferencia entre  $y(t)$  y la señal  $y_R(t)$ :

$$e(t) = y(t) - y_R(t) \quad (4.3)$$

Por definición,  $\eta_i$  es igual a la  $(i-1)$ -ésima derivada de tiempo de  $y(t)$ , esto es  $\eta_i = \frac{d^i y}{dt^i}$ ; para  $1 \leq i \leq n$ . Entonces, nosotros tenemos lo siguiente

$$\frac{d^i e(t)}{dt^i} = \eta_{i+1} - \frac{d^i y_R(t)}{dt^i}; 1 \leq i \leq n-1 \quad (4.4)$$

$$\frac{d^n e(t)}{dt^n} = \frac{d\eta_n}{dt} - \frac{d^n y_R(t)}{dt^n} = -L_o \left( \eta, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^r u}{dt^r} \right) - \frac{d^n y_R(t)}{dt^n} \quad (4.5)$$

Sea  $p(s) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i s^i$  un polinomio Hurwitz. Por disponer de una dinámica autónoma lineal invariante en el tiempo para la función del error de seguimiento:

$$\frac{d^n e(t)}{dt^n} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \frac{d^i e(t)}{dt^i} = 0 \quad (4.6)$$

se sigue que las ecuaciones (4.5) . (4.6) y (4.7) pueden ser reescritas como

$$\frac{d\eta_n}{dt} - \frac{d^n y_R(t)}{dt^n} + \sum_{i=1}^n a_{i-1} \left( \eta_i - \frac{d^{i-1} y_R(t)}{dt^{i-1}} \right) = 0 \quad (4.7)$$

esto es

$$-L_o \left( \eta, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^\nu u}{dt^\nu} \right) = \frac{d^n y_R(t)}{dt^n} - \sum_{i=1}^n a_{i-1} \left( \eta_i - \frac{d^i y_R(t)}{dt^i} \right) \quad (4.8)$$

**Observación 1.** La ecuación diferencial escalar variante en el tiempo (4.9) implícitamente define  $u$ , la cual da estabilización asintótica hacia cero para el error de seguimiento, de una manera enteramente prescrita por el diseño del conjunto de coeficientes constantes  $\{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}\}$ .

Ahora definiendo  $e_i = \frac{d^{i-1} e(t)}{dt^{i-1}}$ , para  $1 \leq i \leq n$ , como las componentes de un vector de error  $\bar{e} = Col(e_1, e_2, \dots, e_n)$ , nosotros obtenemos

$$\frac{de_i}{dt} = e_{i-1}, \quad 1 \leq i \leq n-1 \quad (4.9)$$

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$\frac{de_n}{dt} = - \sum_{i=1}^n a_{i-1} e_i \quad (4.10)$$

ó bien en forma compacta

$$\frac{d\bar{e}}{dt} = F\bar{e} \quad (4.11)$$

donde

$$-L_o \left( v_R(t) + \bar{e} \cdot u \cdot \frac{du}{dt} \cdots \frac{d^\nu u}{dt^\nu} \right) - \frac{d^n y_R(t)}{dt^n} = - \sum_{i=1}^n a_{i-1} e_i \quad (4.12)$$

con el vector de señales de referencia dado por

$$v_R(t) = Col \left( y_R, \frac{dy_R}{dt}, \cdots, \frac{d^{n-1} y_R}{dt^{n-1}} \right);$$

y

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

El origen,  $e = 0$ , es un punto de equilibrio para la dinámica del error de seguimiento (4.10),(4.11). Nosotros asumimos que  $u$  de (4.13) está definida para todo tiempo, y está acotada para todas las funciones acotadas  $y_R(t)$  las cuales también exhiben derivadas acotadas. Note que el controlador por retroalimentación dinámica depende sobre el vector de estado de la dinámica del error de seguimiento, la cual deberá ser estimada por medio de un observador.

Ahora, escribiendo el sistema (4.10) como sigue:

$$\frac{de}{dt} = Ee + \varphi \left( c \cdot y_R, \frac{dy_R}{dt}, \cdots, \frac{d^n y_R}{dt^n}, u, \frac{du}{dt}, \cdots, \frac{d^\nu u}{dt^\nu} \right)$$

donde los elementos de la matriz  $E$  son dados por

$$E_{ij} = \delta_{i,j-1} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j - 1 \\ 0 & \text{si } i \neq j - 1 \end{cases}$$

y

$$\varphi \left( e, y_R, \dots, \frac{d^n y_R}{dt^n}, u, \dots, \frac{d^\nu u}{dt^\nu} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -L_o \left( u_R(t) + e, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^\nu u}{dt^\nu} \right) - \frac{d^n y_R(t)}{dt^n} \end{pmatrix}$$

Entonces, la estimación del error de seguimiento  $e(t) = y(t) - y_R(t)$  es dado por un observador exponencial ( $\hat{\mathbf{O}}$ ) de la forma

$$(\hat{\mathbf{O}}) : \begin{cases} \frac{d\hat{e}}{dt} = E\hat{e} + \varphi \left( \hat{e}(t), y_R, \frac{dy_R}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}y_R}{dt^{n-1}}, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^\nu u}{dt^\nu} \right) \\ - \Delta_\theta^{-1} [C\hat{e}(t) - e(t)] \end{cases}$$

donde  $\Delta_\theta = \text{diag}(\theta, \theta^2, \theta^3, \dots, \theta^n)$ , para algún  $\theta > 0$  y  $K = (K_1, K_2, \dots, K_n)^T$ ,  $K$  es seleccionado de tal forma que  $\sigma(A - KC) \subset \mathbb{R}^-$  (detalles adicionales pueden encontrarse en la bibliografía [17, 29]).

Sea

$$\sigma(u_\varepsilon, y_R(t), \hat{e}) = -L_o \left( u_R(t) + \hat{e}, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^\nu u}{dt^\nu} \right) - \frac{d^n y_R(t)}{dt^n} + \sum_{i=1}^n a_{i-1} \hat{e}_i = 0$$

y  $u$ , el control resultante basado en el observador desde  $\sigma(u_\varepsilon, y_R(t), \hat{e}(t)) = 0$ .

La dinámica de  $\hat{e}(t)$  y  $\epsilon_0(t) = \hat{e}(t) - e(t)$ , (el error de seguimiento estimado y el error de observación, respectivamente), son dados por:

$$\begin{cases} \frac{d\hat{e}}{dt} = E\hat{e}(t) + \varphi \left( \hat{e}(t), y_R, \frac{dy_R}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}y_R}{dt^{n-1}}, u_\varepsilon, \frac{du_\varepsilon}{dt}, \dots, \frac{d^\nu u_\varepsilon}{dt^\nu} \right) \\ - \Delta_\theta K [C\hat{e}(t) - e_1(t)] \\ \frac{d\epsilon_0(t)}{dt} = (E - \Delta_\theta KC) \epsilon_0(t) + \delta\Phi(\epsilon_0(t), \hat{e}(t)) \end{cases}$$

El sistema anterior puede reescribirse mediante un cambio de variable en el siguiente

sistema.

$$(\Sigma_T) : \begin{cases} \frac{d\hat{e}(t)}{dt} = F\hat{e} - \theta^{-1}\Delta_\theta K \tilde{\epsilon}_0 \\ \frac{d\tilde{\epsilon}_0(t)}{dt} = \theta(E - KC) \tilde{\epsilon}_0(t) + \Delta_\theta^{-1} \delta\Phi(\Delta_\theta^{-1} \tilde{\epsilon}_0(t), \hat{e}(t)) \end{cases}$$

donde

$$\tilde{\epsilon}_0 = \Delta_\theta^{-1} \epsilon_0, \quad \Delta_\theta^{-1} E \Delta_\theta = \theta E, \quad C \Delta_\theta = \theta C, \quad \Delta_\theta^{-1} = \text{diag}(\theta^{-1}, \theta^{-2}, \dots, \theta^{-n})$$

y

$$\delta\Phi(\epsilon_0, \hat{e}) = \begin{pmatrix} \varphi(\hat{c}, y_R, \frac{dy_R}{dt}, \dots, \frac{d^n y_R}{dt^n}, u_{\hat{e}}, \frac{du_{\hat{e}}}{dt}, \dots, \frac{d^\nu u_{\hat{e}}}{dt^\nu}) \\ -\varphi(\epsilon, y_R, \frac{dy_R}{dt}, \dots, \frac{d^n y_R}{dt^n}, u_{\hat{e}}, \frac{du_{\hat{e}}}{dt}, \dots, \frac{d^\nu u_{\hat{e}}}{dt^\nu}) \end{pmatrix}$$

Introduciremos las siguientes

**Suposiciones:**

**A1)**  $\delta\Phi(\Delta_\theta^{-1} \tilde{\epsilon}_0(t), \hat{e}(t))$  es globalmente Lipschitz en  $R^n$  con respecto a  $\Delta_\theta^{-1} \tilde{\epsilon}_0(t)$  y uniformemente con respecto a  $\hat{e}(t)$ .

**A2)** Las señales  $u_{\hat{e}}, y_R(t)$  y sus derivadas de orden superior hasta  $\nu$  al menos están acotadas.

Entonces, nuestro principal resultado puede establecerse de la siguiente manera:

**Teorema 1:** Considere  $u_{\hat{e}}$  la retroalimentación dinámica de estado linealizante la cual es solución de  $\sigma(u_{\hat{e}}, y_R(t), \hat{e}(t)) = 0$ . Supongamos además que A1 y A2 son satisfechas. Entonces el sistema en lazo cerrado  $(\Sigma_T)$  con control  $u_{\hat{e}}$  es globalmente asintóticamente estable (ver [11]).



## 4.4 Controlador dinámico basado en el observador para manipuladores con articulación flexible

En esta sección del Capítulo, nosotros aplicamos los resultados obtenidos en las secciones anteriores para tratar con los problemas de estabilización y seguimiento de salida, de un brazo robót de un simple eslabón y con articulación flexible.

### Modelo Matemático

Basandonos en la formulación Lagrangiana, el sistema dinámico que describe el comportamiento de un brazo robót de un simple eslabón y con articulación flexible es obtenida, desde el Capítulo 3.

Entonces, el modelo dinámico  $(\Sigma_M)$ , del brazo robot manipulador, representado en estas coordenadas resulta ser de la siguiente forma:

$$(\Sigma_M) : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -k_7 x_2 + k_1 x_3 + k_1 u \\ \dot{x}_3 = \frac{x_4}{\beta} \\ \dot{x}_4 = \{-k_2 k_3 \sin(\beta^2 k_3 + x_1) - k_4 x_3 - k_7 x_2 - k_6 \beta x_1 - k_1 u\} / \beta \end{cases} \quad (4.13)$$

donde  $\beta = \frac{1}{k}$ , es una constante, la cual no deberá confundirse con la constante utilizada en la técnica de perturbaciones singulares.

En el modelo del sistema  $(\Sigma_M)$ , las constantes  $k_i$ , son las siguientes:  $k_1 = \frac{1}{J}$ ;  $k_2 = \frac{1}{l}$ ;  $k_3 = mgl$ ;  $k_4 = k_1 + k_2$ ;  $k_5 = \frac{B}{J}$ ;  $k_6 = \frac{B}{l}$ ;  $k_7 = k_6 - k_5$ ;  $u = \tau$ .

**Observación 2:** El sistema  $(\Sigma_M)$  tiene diferente grado relativo, cuando la salida del sistema y es considerada como la posición del motor  $x_1$ , en lugar de la posición del eslabón  $z = x_1 + \beta x_3$ .

Esto es debido a las siguientes consideraciones:

1) Si nosotros consideramos  $z$  como una salida, el sistema resulta dentro de un sistema con grado relativo igual a 4. Entonces, el sistema resultante puede ser exactamente

linealizado por medio de una retroalimentación estática. Esta retroalimentación de estado es una función de la posición, velocidad, aceleración, y "sacudida" ( $\ddot{\ddot{y}}$ ), las cuales son muy difíciles de medir en la práctica.

2) Utilizando la posición del motor  $x_1$  como la salida del sistema, esta resulta ser de grado relativo 2. Por esta razón, la aplicación de nuestra técnica nos permite obtener un controlador dinámico de segundo orden (detalles adicionales pueden ser encontrados en la bibliografía [29]).

Cuando nosotros consideramos el sistema linealizado en el punto de operación, la dinámica cero sigue siendo de fase mínima. Sin embargo, esta propiedad de la dinámica cero es una función del parámetro  $B$ . El hecho de que  $B \neq 0$  es crucial para que el robot flexible esté en fase mínima. Si  $B = 0$ , nuestra técnica no puede ser aplicada, y la dinámica cero resulta ser oscilatoria. En la práctica, esta condición es verificada para muchos manipuladores mecánicos.

La siguiente transformación de coordenadas dependientes de la entrada nos permite obtener una *forma canónica de observabilidad generalizada* (FCOG).

Definiendo el elemento primitivo diferencial  $\eta_1 = x_1$  las siguientes relaciones se cumplen

$$y = \eta_1 = x_1$$

$$\dot{y} = \eta_2 = x_2$$

$$y = \eta_3 = -k_5 x_2 + k_1 x_3 + k_1 u$$

$$\dot{y} = \eta_4 = (k_5)^2 x_2 - k_1 k_5 x_3 + k_1 \mathcal{J}^{-1} x_4 + k_1 k_5 u + k_1 \dot{u}$$

(4.14)

$\{y, \dot{y}, \ddot{y}, \ddot{\ddot{y}}\}$  es una base de trascendencia de  $R(u, y)/R(u)$  la cual representa la dinámica de la ecuación (4.2). El grado de trascendencia de  $R(u, y)/R(u)$  es dado

por  $d^0tr(R(u, y)/R(u)) = 4$  y su transformación inversa correspondiente es

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \eta_1 \\
 x_2 &= \eta_2 \\
 x_3 &= (\eta_3 + k_5\eta_2 - k_1u)/k_1 \\
 x_4 &= \bar{\beta}(\eta_4 - (k_5)^2x_2 + k_1k_5x_3 - k_1k_5u - k_1u) \bar{\beta} / k_1. \quad \bar{\beta} \neq 0
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

La matriz Jacobiano de la transformación de coordenadas de estado (4.3) es dada por.

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -k_5 & k_1 & 0 \\ 0 & (k_5)^2 & -k_1k_5 & k_1\bar{\beta}^{-1} \end{pmatrix}$$

la cual es claramente no singular si  $\bar{\beta}$  es diferente de cero. La forma canónica de controlabilidad generalizada (FCCG) para el sistema (4.2) es entonces.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\eta}_1 = \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 = \eta_3 \\ \dot{\eta}_3 = \eta_4 \\ \eta_4 = -k_1k_2k_3\bar{\beta}^{-2} \sin(\bar{\beta}^2[k_5\eta_2 - k_1u + \eta_3]/k_1 + \eta_1) - \bar{\beta}^{-2}\{k_1k_7 + k_4k_5\}\eta_2 \\ \quad - \{\frac{k_4}{\bar{\beta}^2} + k_5k_6\}\eta_3 - \{k_5 + k_6\}\eta_4 - \frac{k_1}{\bar{\beta}^2}\{k_4 - k_1\}u + k_1k_6\frac{du}{dt} + k_1\frac{d^2u}{dt^2} \\ y = \eta_1 \end{array} \right. \tag{4.16}$$

Finalmente, el comportamiento externo del sistema es dado por

$$\begin{aligned}
 &\frac{d^4y}{dt^4} + \{k_5 + k_6\}\frac{d^3y}{dt^3} + \{\frac{k_4}{\bar{\beta}^2} + k_5k_6\}\frac{d^2y}{dt^2} + \bar{\beta}^{-2}\{k_1k_7 + k_4k_5\}\frac{dy}{dt} \\
 &+ k_1k_2k_3\bar{\beta}^{-2} \sin(\bar{\beta}^2[k_5\frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2} - k_1u]/k_1 + y) + \frac{k_1}{\bar{\beta}^2}\{k_4 - k_1\}u - k_1k_6\frac{du}{dt} - k_1\frac{d^2u}{dt^2} = 0
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Ahora, sea  $y_R(t)$  una trayectoria de referencia de salida deseada de la posición angular. Derivando la referencia de salida deseada  $y_R(t)$  hasta la cuarta derivada, nosotros

podemos aplicar el controlador dinámico

$$-L_o \left( \eta, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^\gamma u}{dt^\gamma} \right) = \frac{d^n y_R(t)}{dt^n} - \sum_{i=1}^n a_{i-1} \left( \eta_i - \frac{d^{i-1} y_R(t)}{dt^{i-1}} \right)$$

con  $n = 4$  y  $\gamma = 2$ .

Definiendo el error de seguimiento como  $e(t) = x_1 - y_R(t)$ , uno obtiene basandose en los resultados de la sección 3, el sistema de ecuaciones diferenciales que describen la dinámica del error de seguimiento como:

$$\frac{de}{dt} = Ee + \varphi \left( e_1, e_2, e_3, e_4, y_R, \frac{dy_R}{dt}, \frac{d^2 y_R}{dt^2}, \frac{d^3 y_R}{dt^3}, \frac{d^4 y_R}{dt^4}, u, \frac{du}{dt}, \frac{d^2 u}{dt^2} \right), y_{TE} = e_1 \quad (4.18)$$

donde

$$E = \delta_{i,j-1} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j - 1 \\ 0 & \text{si } i \neq j - 1 \end{cases}$$

y

$$\varphi \left( e, y_R, \dots, \frac{d^4 y_R}{dt^4}, u, \frac{du}{dt}, \frac{d^2 u}{dt^2} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -L_o \left( y_R(t) + e, u, \frac{du}{dt}, \frac{d^2 u}{dt^2} \right) - \frac{d^4 y_R(t)}{dt^4} \end{pmatrix}$$

Dado que el sistema (4.7) es observable nosotros proponemos el siguiente observador no-lineal exponencial ( ver bibl.[23]) para la estimación del error de seguimiento

$$\frac{d\hat{e}}{dt} = E\hat{e} + \varphi \left( \hat{e}(t), y_R, \dots, \frac{d^4 y_R}{dt^4}, u_{\hat{e}}, \frac{du_{\hat{e}}}{dt}, \frac{d^2 u_{\hat{e}}}{dt^2} \right) - \Delta_o K [C\hat{e}(t) - e_1(t)] \quad (4.19)$$

La linealización exacta de la dinámica del error de seguimiento puede ser ahora completada, igualando la última ecuación diferencial del sistema (4.7) a una expresión lineal invariante en el tiempo en las coordenadas del error (ver [2])

$$-L_o \left( v_R(t) + e. u. \frac{du}{dt}, \frac{d^2u}{dt^2} \right) = \frac{d^4 y_R(t)}{dt^4} - \sum_{i=1}^4 a_{i-1} e_i,$$

donde

$$\begin{aligned} -L_o \left( v_R(t) + e. u. \frac{du}{dt}, \frac{d^2u}{dt^2} \right) &= -k_1 k_2 k_3 \bar{\beta}^{-2} \sin(\bar{\beta}^2 / k_1 [k_5 (e_2 + \frac{dy_R}{dt}) - k_1 u + e_3 - \frac{d^2 y_R}{dt^2}] + e_1 + y_R \\ &\quad - \bar{\beta}^{-2} (k_1 k_7 + k_4 k_5) \left\{ e_2 + \frac{dy_R}{dt} \right\} - \left\{ k_4 / \bar{\beta}^2 + k_5 k_6 \right\} \left\{ e_3 + \frac{d^2 y_R}{dt^2} \right\} \\ &\quad - (k_5 + k_6) \left\{ e_4 + \frac{d^3 y_R}{dt^3} \right\} + k_1 / \bar{\beta}^2 \left\{ k_4 - k_1 \right\} u + k_1 k_6 \frac{du}{dt} + k_1 \frac{d^2 u}{dt^2} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Entonces, escribiendo en las coordenadas originales la ecuación del controlador dinámico, se sigue que:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dt^2} + (a_3 - k_5) \frac{du}{dt} + \left( k_5^2 - a_2 - k_5 a_3 - k_1 \bar{\beta}^{-2} \right) u &= k_2 k_3 \bar{\beta}^{-2} \sin \left( \bar{\beta}^{-2} x_3 + x_1 \right) \\ + \frac{1}{k_1} \left( k_7 \bar{\beta}^{-2} + k_5^3 - a_1 + k_5 a_2 + k_5^2 a_3 \right) x_2 &- \left( \frac{k_4}{\bar{\beta}^2} - k_5^2 - a_2 - a_3 k_5 \right) x_3 - \frac{a_0}{k_1} x_1 \\ + \frac{1}{\bar{\beta}} \left\{ k_5 + k_6 - a_3 \right\} x_4 + \left( \frac{d^4 y_R}{dt^4} + a_3 \frac{d^3 y_R}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 y_R}{dt^2} + a_1 \frac{dy_R}{dt} + a_0 y_R \right) &(k_1)^{-1} \end{aligned} \quad (4.21)$$

y el desempeño dinámico deseado puede ser obtenido seleccionando nosotros adecuadamente  $a_1, a_2, a_3, a_4$ .

Sin embargo, este controlador depende de todos los estados los cuales no son todos medibles. Para vencer esta dificultad nosotros reemplazamos el estado que es estimado por el observador. Para desarrollar este procedimiento, tomamos en consideración que la transformación inversa es dada por (4.4), de tal forma que escribiendo las ecuaciones anteriores, en términos del error de seguimiento, obtenemos:

$$\begin{aligned} x_1 &= e_1 + y_R \\ x_2 &= e_2 + \frac{dy_R}{dt} \\ x_3 &= \left\{ e_3 + \frac{d^2 y_R}{dt^2} + k_5 \left( e_2 + \frac{dy_R}{dt} \right) - k_1 u \right\} / k_1 \\ x_4 &= \left\{ e_4 + \frac{d^3 y_R}{dt^3} + k_5 \left( e_3 + \frac{d^2 y_R}{dt^2} \right) - k_1 \frac{du}{dt} \right\} k_1 / \bar{\beta} \end{aligned}$$

Ahora reemplazando los estados estimados por (4.8) obtenemos

$$\begin{aligned}\hat{x}_1 &= \hat{e}_1 + y_R \\ \hat{x}_2 &= \hat{e}_2 + \frac{dy_R}{dt} \\ \hat{x}_3 &= \left\{ \hat{e}_3 + \frac{d^2 y_R}{dt^2} + k_5 \left( \hat{e}_2 + \frac{dy_R}{dt} \right) - k_1 u \right\} / k_1 \\ \hat{x}_4 &= \left\{ \hat{e}_4 + \frac{d^3 y_R}{dt^3} + k_5 \left( \hat{e}_3 + \frac{d^2 y_R}{dt^2} \right) - k_1 \frac{du}{dt} \right\} k_1 / \beta\end{aligned}$$

Entonces, el controlador dinámico como una función de los estados estimados es dado por

$$\begin{aligned}\frac{d^2 u_e}{dt^2} + k_6 \frac{du_e}{dt} - \frac{1}{\beta^2} \{k_4 - k_1\} u_e &= -k_2 k_3^{-2} \beta \sin(\beta^2 \hat{x}_3 + \hat{x}_1) \\ &- \beta^{-2} \frac{1}{k_1} \{k_1 k_7 + k_4 k_5\} \hat{x}_2 - \frac{1}{k_1} \left\{ \frac{k_5}{\beta^2} + k_5 k_6 \right\} \hat{x}_3 \\ &- \{k_5 - k_6\} \hat{x}_4 - \sum_{i=1}^4 \frac{\sigma_i - 1}{k_1} \left\{ \hat{x}_i + \frac{d^{i-1} y_R}{dt^{i-1}} \right\} + \frac{1}{k_1} \frac{d^4 y_R}{dt^4}\end{aligned}$$

Se calcula el control  $u_e$  de la ecuación anterior en términos de las variables de estado, y el valor resultante se introduce en el sistema dinámico.

#### 4.4.1 Resultados de simulación

Ahora, mostraremos como el controlador dinámico basado en el observador es implementado para el modelo del brazo robot con flexibilidad en la articulación. Las simulaciones

númericas (utilizando SIMNON) fueron realizadas con los siguientes parámetros

$$k_1 = 3.33 \text{ (m}^2 \text{Kg)}^{-1}; k_2 = 1.0 \text{ (m}^2 \text{Kg)}^{-1}; k_3 = 5.0 \text{ Nm}; k_4 = 4.33 \text{ (m}^2 \text{Kg)}^{-1}$$

$$k_5 = 0.333 \text{ s}^{-1}; k_6 = 0.1 \text{ s}^{-1}; k_7 = -0.233 \text{ s}^{-1}; K_s = 100 \text{ N/(m rad}^{-1}\text{)}.$$

Todas las condiciones iniciales, tanto para el sistema, así como para el controlador dinámico fueron escogidas como cero. La trayectoria de referencia deseada  $y_R(t)$  para la posición del motor fue puesta igual a:

$$y_R(t) = 0.5 \sin t$$

La primera tarea para nuestro controlador propuesto basado en el observador fue el de seguir la trayectoria deseada  $y_R(t)$ . La figura 4.1, muestra el estado  $x_1$  y la trayectoria

deseada. Se puede observar que la trayectoria  $x_1$  converge hacia la trayectoria deseada  $y_R(t)$ . La figura 4.2 nos muestra el estado  $x_2$  y  $dy_R/dt$ . en la que también se puede apreciar una convergencia en un tiempo de 1.5 segundos, para el seguimiento de la trayectoria del brazo robot manipulador. Finalmente la figura 4.3 describe el controlador obtenido, propuesto en ésta técnica de control y el cual es aplicado al sistema.

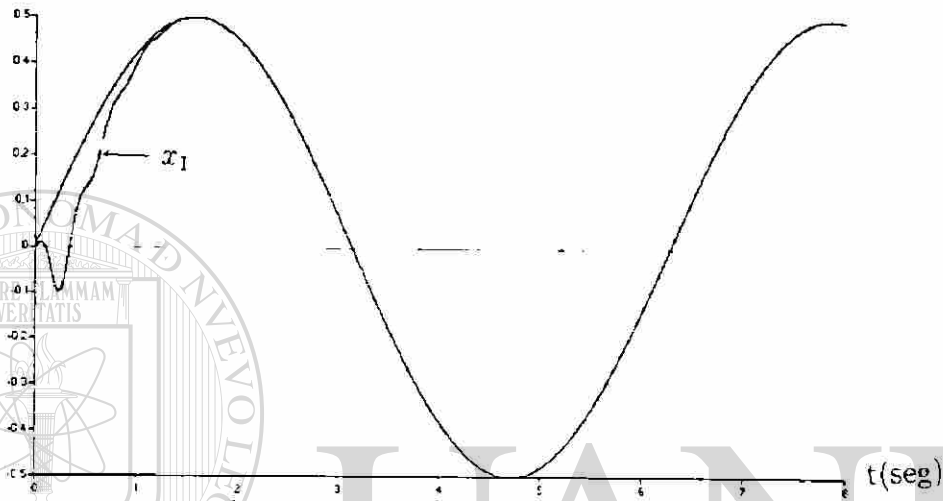


Figura No. 4.1 Grafica del estado  $x_1$  y la señal de referencia  $y_R$



Figura 4.2 Grafica del estado  $x_2$  y de  $dy_R/dt$

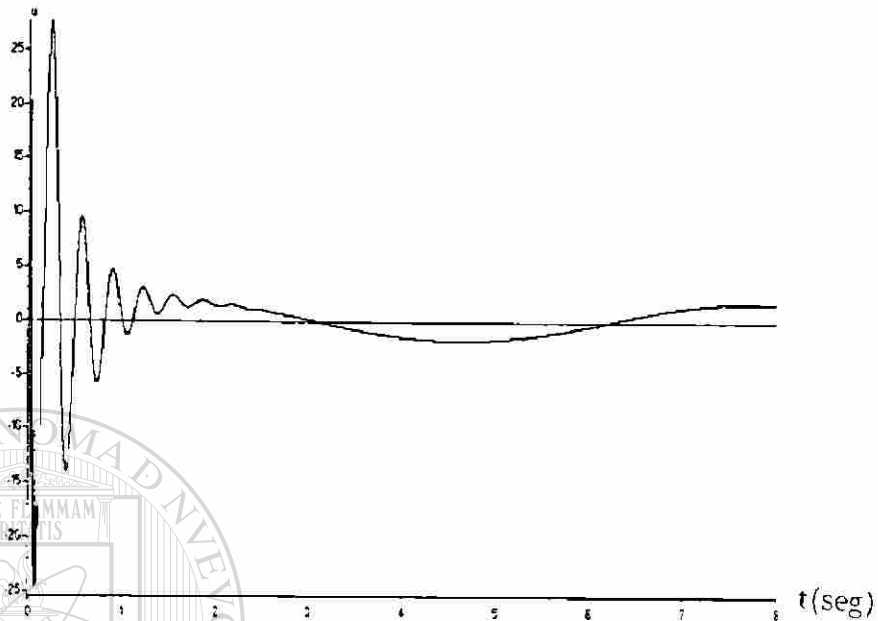


Figura No. 4.3 Grafica del control  $u$

## 4.5 Conclusiones

En este Capítulo, hemos propuesto un controlador basado en un observador para una clase de sistemas no-lineales. En lo particular, hemos dado condiciones suficientes, para garantizar la estabilidad del sistema en lazo-cerrado incluyendo el observador de estado.

Una conexión entre las ganancias del observador, y las ganancias del controlador, nos permitieron obtener el origen globalmente asintóticamente estable. La aplicación de esta técnica en el caso del modelo del brazo robot manipulador, nos permitió obtener, un buen desempeño en el seguimiento de la trayectoria a seguir por el brazo robot manipulador.



# Capítulo 5

## Método Basado en Perturbaciones

### Singulares

En este Capítulo se propone un controlador basado en un observador para una clase de sistemas no-lineales singularmente perturbados. Por otra parte se dan las condiciones suficientes para garantizar la estabilidad del esquema de control basado en observadores del sistema en lazo cerrado. Los resultados en simulación presentados al final del capítulo nos sirven para ilustrar la aplicación de esta técnica de control para un modelo de un brazo robot manipulador con flexibilidad en la articulación.

#### 5.1 Introducción

Durante estos últimos años, se han realizado importantes trabajos de investigación hacia el problema del control de brazos robot con articulaciones flexibles. Entre estos se pueden señalar: Técnicas de linealización por retroalimentación, técnicas de perturbaciones singulares, técnicas de modos deslizantes y técnicas adaptivas. Todas estas técnicas han sido propuestas para resolver el problema (ver. e. g. Brogliato *et al* 1995 y las referencias incluidas en estos, Kokotovic *et al* 1993, Battilotti y Lanari, 1995, Slotine y Hong 1986).

Aún cuando el modelo considerado en esta tesis es completamente linealizable via

retroalimentación de estado, las técnicas para la estabilización por retroalimentación de salida algunas no se aplican. ó bien solamente logran estabilización en conjuntos compactos a través de un observador de alta ganancia (ver e.g. Battilotti y Lanari. 1995).

Recientemente, la técnica de control de robots flexibles tiene bastante atractivo para la investigación. Los algoritmos de control de estructura variable pueden clasificarse dentro de los siguientes: i) métodos de Jerarquización; ii) métodos basados en la estabilidad de Lyapunov y iii) métodos de linealización. Sin embargo, todos estos métodos tienen características en común, tales como 1) variedades deslizantes son seleccionadas como hiperplanos; 2) las leyes de control dependen altamente en la superficie deslizante especificada, esto es, diferentes variedades deslizantes requieren un rediseño del controlador correspondiente; 3) el cálculo de las ganancias de switcheo está basado en el conocimiento de los linderos ó límites en cualquier elemento de las matrices del sistema.

En Stepanenko y Su (1993) un controlador deslizante que depende esencialmente de la selección de una variedad deslizante, es propuesto usando variedades no-lineales, suponiendo el conocimiento de los límites en la planta, la cual vence las últimas dificultades y proporciona una rápida convergencia. Las variedades diferenciales no-lineales ofrecen una rica variedad de diseños alternativos en comparación con las variedades lineales.

Por otra parte, el diseño de observadores para brazos robot con articulación flexible es un problema interesante en la teoría de control, así como también de gran importancia práctica. En efecto muchas técnicas de control para estos robots requieren del conocimiento de cuatro variables para cada articulación, las cuales pueden ser cualquiera de las posiciones y velocidades de los motores y de los eslabones ó bien posiciones, velocidades, aceleraciones y jerks de los eslabones. Algunos resultados interesantes fueron publicados por Tomei (1990).

Más recientemente, una ley de control por retroalimentación de estado (ver [13]), basada en un observador no-lineal, usando métodos de perturbación singular, es diseñada

para una cierta clase de sistemas no-lineales, la cual admite una perturbación singular, para las trayectorias variantes en el tiempo del seguimiento deseado, que requerimos de los brazos robots manipuladores.

El modelo del robot con articulación flexible puede ser dividido en dos subsistemas: los subsistemas lento y rápido, donde las variables lentas son la posición y las velocidades del eslabón y las variables rápidas son las fuerzas elásticas y sus derivadas con respecto al tiempo. En Battilotti y Lanari (1995) las posiciones del eslabón y la fuerza elástica son medibles y las otras variables no, debido a razones económicas o restricciones de carácter técnico. Por esta razón, se propone un observador deslizante para estimar estas variables. Adicionalmente proporcionamos un análisis de estabilidad del sistema aumentado.

En esta técnica un modelo simplificado es considerado, y asumimos que la posición del eslabón está disponible para su medición. En suma, una ley de control basado en las técnicas de modo deslizante para una clase de sistemas no-lineales de sistemas singularmente perturbados, recientemente reportados en Alvarez y Silva, es aplicado al modelo de un robot manipulador de un simple eslabón. Adicionalmente, un observador no-lineal de alta ganancia propuesto por Busawon y otros en 1998, es diseñado para esta clase de sistemas, y también es aplicado a nuestro modelo de robot manipulador con flexibilidad en la articulación.

Este capítulo está organizado de la siguiente forma. En la Sección 2, brevemente hacemos la referencia del modelo del manipulador considerado en esta tesis. En la sección 3, se tiene el diseño de un controlador basado en la técnica de perturbaciones singulares. Para vencer la dificultad de estimar las variables no medibles, un observador no lineal es dado en la sección 4. Un análisis de estabilidad del sistema en lazo cerrado es presentado en la sección 5. En la sección 6, el esquema del controlador basado en el observador obtenido en las secciones previas, es aplicado al modelo del robot. Finalmente, los resultados de simulación y algunas conclusiones terminan el presente capítulo.

## 5.2 Modelo del Brazo Robot Manipulator

Un robot manipulador consiste esencialmente de  $p$  eslabones, interconectados en  $p$  articulaciones dentro de una cadena cinemática. Cada eslabón es manipulado por un actuador, el cual puede ser eléctrico, hidráulico ó neumático. El actuador puede estar localizado directamente en la articulación que actúa ó bien puede ser manipulado a través de una transmisión remota situada en la base del robot. En el modelo de un robot rígido se supone que los acoplamientos entre los actuadores y los eslabones son perfectamente rígidos. Por contraste, en un modelo de robot con articulación flexible se asume que los eslabones son rígidos, pero que los actuadores están acoplados elásticamente a los eslabones.

En esta tesis, se considera un robot flexible de un simple eslabón, el cual es manipulado por el eje de un motor de corriente directa, cuyo rotor está acoplado directamente a el eslabón. El modelo matemático para este manipulador fué dado en el Capítulo 2 y sus ecuaciones son las siguientes:

$$I \ddot{q} + B_l \dot{q} - mgl \sin(q_1) - k(q_m - q) = 0 \quad (5.1)$$

$$J \ddot{q}_m + B \dot{q}_m + k(q_m - q) = u$$

donde  $q$  y  $q_m$  son respectivamente las posiciones angulares del eslabón y del eje del motor, mientras que  $u$  es la fuerza de entrada desde el actuador ( torque del motor),  $I$  es la inercia del brazo,  $J$  representa la inercia del motor,  $B$  es la fricción viscosa del motor,  $B_l$  es la fricción viscosa del eslabón,  $mgl$  es la carga nominal en el brazo y  $k$  es el coeficiente de rigidez de la articulación flexible. El modelo no toma en cuenta la inercia del actuador alrededor de sus tres ejes independientes. Sin embargo, ha sido demostrado por Spong (1990) que esto representa adecuadamente la dinámica del manipulador y esta disponible para el diseño del control.

### 5.3 Control modo deslizantes en escala de Dos tiempos

Consideremos la clase de sistemas no-lineales singularmente perturbados, descritos por las así llamadas *forma estandar singularmente perturbada*.

$$\dot{x} = f_1(x) + F_1(x)z + g_1(x)u, \quad x(t_0) = x_0, \quad (5.2)$$

$$\varepsilon \dot{z} = f_2(x) + F_2(x)z + g_2(x)u, \quad z(t_0) = z_0, \quad (5.3)$$

donde  $x \in B_x \subset R^n$  es el estado lento,  $z \in B_z \subset R^m$  es el estado rápido,  $u \in R^r$  es la entrada de control y  $\varepsilon \in [0, 1)$  es el pequeño parámetro de perturbación.  $f_1$  y  $f_2$  son las columnas de las matrices  $F_1$  y  $F_2$  respectivamente.  $g_1$  y  $g_2$  son asumidas acotadas en sus componentes siendo éstas funciones suaves de  $x$ .  $B_x$  y  $B_z$  representa subconjuntos cerrados y acotados centrados en el origen.  $F_2(x)$  es supuesta no-singular para toda  $x \in B_x$ . También se supone que  $f_1(0) = f_2(0) = 0$  y, para  $u = 0$ , el origen  $(x, z) = (0, 0)$  es un estado de equilibrio aislado.

El sistema reducido lento puede ser encontrado, haciendo  $\varepsilon = 0$  en (5.3), obteniendo así el siguiente sistema lento de orden  $n$

$$\dot{x}_s = f(x_s) + g(x_s)u_s, \quad x_s(t_0) = x_0 \quad (5.4)$$

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$z_s = h(x_s) := -F_2^{-1}(x_s) [f_2(x_s) + g_2(x_s)u_s] \quad (5.5)$$

donde  $x_s$ ,  $z_s$  y  $u_s$  representan respectivamente las componentes lenta de las variables originales  $x$ ,  $z$  y  $u$ , y

$$f(x_s) = f_1(x_s) - F_1(x_s)F_2^{-1}(x_s)f_2(x_s) \quad (5.6)$$

$$g(x_s) = g_1(x_s) - F_1(x_s)F_2^{-1}(x_s)g_2(x_s). \quad (5.7)$$

En (5.4) y (5.5),  $u_s(x_s)$  denota la retroalimentación del estado lento el cual únicamente depende de  $x_s$ . De acuerdo con De Carlo *et al* (1988) y Utkin (1992), la variedad invariante  $n$ -dimensional del sistema (5.2).(5.3) está parametrizada por  $\epsilon$  y sabiendo que la *variedad invariante lenta*, es definida por.

$$M_\epsilon := \{z \in B_z \subset R^m : z = h_\epsilon(x_s, \epsilon) := o(x_s, \epsilon) + v(x_s, \epsilon)u_{es}(x_s, \epsilon)\} \quad (5.8)$$

donde las funciones  $o(x_s, \epsilon)$ ,  $v(x_s, \epsilon)$  y  $u_{es}(x_s, \epsilon)$  satisfacen la así llamada *condición de variedad*

$$f_2 - F_2 o + F_2 v u_{es} + g_2 u_{es} = \epsilon \left( \frac{\partial o}{\partial x_s} + \frac{\partial v}{\partial x_s} u_{es} + v \frac{\partial u_{es}}{\partial x_s} \right) [f_1 + F_1 o + F_1 v u_{es} + g_1 u_{es}] \quad (5.9)$$

para toda  $x_s \in B_x$  y para  $\epsilon$  suficientemente pequeña, donde el subíndice "e" se presenta para la solución exacta. En general, es difícil obtener el subsistema *exacto* desplegado en  $M_\epsilon$ , así una aproximación standard, usualmente hecha, es la expansión en serie de potencias de  $o$ ,  $v$  y  $u_{es}$  alrededor de  $\epsilon = 0$ , *i.e.* una aproximación  $O(\epsilon)$ . Una aproximación  $O(\epsilon)$  para el subsistema lento exacto es precisamente dado por (5.4) junto con  $o(x_s, \epsilon) = -F_2^{-1}(x_s)f_2(x_s) + O(\epsilon)$ ,  $v(x_s, \epsilon) = -F_2^{-1}(x_s)g_2(x_s) + O(\epsilon)$ ,  $u_{es}(x_s, \epsilon) = u_s(x_s) + O(\epsilon)$ ,  $h_\epsilon(x_s, \epsilon) = h(x_s) + O(\epsilon)$ .

La dinámica rápida (también conocida como *boundary layer system*) es obtenida transformando la escala de tiempo (lenta)  $t$  a la escala de tiempo (rápida)  $\tau := (t - t_0)/\epsilon$  e introduciendo la desviación  $z$  desde  $M_\epsilon$ , *i.e.*  $\eta := z - h_\epsilon(x, \epsilon)$ . Entonces el sistema original (5.2).(5.3) resulta como:

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tau} = \varepsilon \{f_1(\tilde{x}) + F_1(\tilde{x})[\eta + h_\epsilon(\tilde{x}, \epsilon)] + g_1(\tilde{x})u\} \quad (5.10)$$

$$\frac{d\eta}{d\tau} = f_2(\tilde{x}) + F_2(\tilde{x})[\eta + h_\epsilon(\tilde{x}, \epsilon)] + g_2(\tilde{x})u - \frac{\partial h_\epsilon(\tilde{x}, \epsilon)}{\partial \tilde{x}} \frac{d\tilde{x}}{d\tau} \quad (5.11)$$

donde  $\eta(t_0) = z_0 - h(x_0)$ ,  $\tilde{z}(\tau) := z(\varepsilon\tau + t_0)$ , con  $\tilde{z}(t_0) = z_0$ , y  $\tilde{x}(\tau) := x(\varepsilon\tau + t_0)$ , con  $\tilde{x}(t_0) = x_0$ . El así llamado *control compuesto* para el sistema original (5.2),(5.3) es definido por.

$$u(x, \eta, \epsilon) = u_{es}(x, \epsilon) + u_{ef}(x, \eta, \epsilon). \quad (5.12)$$

donde  $u_{es}$  y  $u_{ef}$  denotan respectivamente las componentes *lenta* y *rápida* de el control.

La componente  $u_{ef}$  es usada para hacer a  $M_\varepsilon$  atractiva y desaparecer en ella, es decir  $u_{ef}(x, 0, \epsilon) = 0$ . Si  $u_{es}(\tilde{x}, \epsilon)$  y  $\partial h_\epsilon(\tilde{x}, \epsilon)/\partial \tilde{x}$  están acotadas y  $\tilde{x}$  permanece relativamente constante con respecto  $\tau$ , entonces el término  $\epsilon(\partial h_\epsilon(\tilde{x}, \epsilon)/\partial \tilde{x})$  puede ser despreciado para  $\epsilon$  suficientemente pequeño. Dado que la ecuación (5.11) define el subsistema *reducido rápido*, una aproximación  $O(\epsilon)$  puede ser obtenida para este subsistema usando la ecuación (5.5) y haciendo  $\varepsilon = 0$  en (5.10),(5.11), esto es.

$$\frac{d\eta_{apr}}{d\tau} = F_2(\tilde{x})\eta_{apr} + g_2(\tilde{x})u_f \quad (5.13)$$

donde  $\eta_{apr}$ ,  $h(\tilde{x}) = h_\epsilon(\tilde{x}, 0)$  y  $u_f$  son aproximaciones  $O(\epsilon)$  para  $\eta$ ,  $h_\epsilon(\tilde{x}, \varepsilon)$  y  $u_{ef}$  durante la capa frontera inicial y  $\eta_{apr}(0) = z_0 - h(x_0, 0)$ .

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

### 5.3.1 Diseño del control en Modo deslizante

El control en modo deslizante para el sistema (5.2),(5.3) es diseñado en dos etapas. Esto es, un control en modo deslizante es diseñado para cada subsistema reducido, *i.e.* para las aproximaciones  $O(\epsilon)$  de los subsistemas lento y rápido. Entonces ambos controles son combinados para obtener un control compuesto que es aplicado para el sistema (5.2),(5.3). Primero, es diseñado el *control lento* para el subsistema lento (5.4). Para hacer esto.

consideremos una superficie de switcheo no-lineal  $(n - r)$ dimensional definida por.

$$\sigma_s(x_s, x_{sd}) = \begin{pmatrix} \sigma_{s_1}(x_s, x_{sd}) \\ \vdots \\ \sigma_{s_r}(x_s, x_{sd}) \end{pmatrix} = 0 \quad (5.14)$$

donde  $x_{sd} = col(x_{sd_1}, \dots, x_{sd_n})$  es un vector de referencia y cada función  $\sigma_{s_i} : B_x \times B_x \rightarrow R$ ,  $i = 1, \dots, r$ , es una función  $C^1$  tal que  $\sigma_{s_i}(0, 0) = 0$ . El *método del control equivalente* (ver De Carlo *et al* 1988, Nathan y Singh 1987, Utkin 1992) es usado para determinar el sistema reducido lento, restringido para la superficie de switcheo lenta  $\sigma_s(x_s, x_{sd}) = 0$ , obteniendo así el *control equivalente lento*

$$u_{sc} = - \left[ \frac{\partial \sigma_s}{\partial x_s} g(x_s) \right]^{-1} \left[ \frac{\partial \sigma_s}{\partial x_s} f(x_s) - \frac{\partial \sigma_s}{\partial x_{sd}} \dot{x}_{sd} \right] \quad (5.15)$$

donde la matriz  $[\partial \sigma_s / \partial x_s] g(x_s)$  es asumida no singular para toda  $x_s, x_{sd} \in B_x$ . La substitución del control equivalente lento (5.15) en (5.4) da como resultado la ecuación en modo-deslizante lento.

$$\dot{x}_s = f_c(x_s, x_{sd}) + g_c(x_s, x_{sd}) \dot{x}_{sd} \quad (5.16)$$

donde

$$f_c(x_s, x_{sd}) = \left\{ I_n - g(x_s) \left[ \frac{\partial \sigma_s}{\partial x_s} g(x_s) \right]^{-1} \frac{\partial \sigma_s}{\partial x_s} \right\} f(x_s) \quad (5.17)$$

$$g_c(x_s, x_{sd}) = -g(x_s) \left[ \frac{\partial \sigma_s}{\partial x_s} g(x_s) \right]^{-1} \frac{\partial \sigma_s}{\partial x_{sd}} \quad (5.18)$$

con  $I_n$  denotando la matriz identidad de  $n \times n$ .

Para completar el diseño del control lento se establece (De Carlo *et al* 1988, Utkin 1992) que.

$$u_s = u_{se} + u_{sN} \quad (5.19)$$



donde  $u_{s,e}$  es el control equivalente lento (5.15), el cual actúa cuando el sistema reducido lento es restringido a  $\sigma_s(x_s, x_{sd}) = 0$ . mientras que  $u_{s,N}$  actúa cuando  $\sigma_s(x_s, x_{sd}) \neq 0$ . En esta tesis el control  $u_{s,N}$  es seleccionado como.

$$u_{s,N} = -\left[\frac{\partial \sigma_s}{\partial x_s} g(x_s)\right]^{-1} L_s(x_s) \sigma_s(x_s, x_{sd}) \quad (5.20)$$

donde  $L_s(x_s)$  es una matriz definida positiva de  $r \times r$  cuyas componentes son funciones reales no-lineales  $C^0$  acotadas de  $x_s$ , tal que:

$$\|L_s(x_s)\| \leq \rho_s \quad (5.21)$$

para toda  $x_s \in B_r$  con una constante  $\rho_s > 0$ . La ecuación que describe la proyección del movimiento del subsistema lento fuera de  $\sigma_s(x_s, x_{sd}) = 0$  es dada por

$$\dot{\sigma}_s(x_s, x_{sd}) = -L_s(x_s) \sigma_s(x_s, x_{sd}). \quad (5.22)$$

Las propiedades de estabilidad de  $\sigma_s(x_s, x_{sd}) = 0$  en (5.22) pueden ser estudiadas por medio de la función candidata de Lyapunov  $V(x_s, x_{sd}) = (1/2) \sigma_s^T(x_s, x_{sd}) \sigma_s(x_s, x_{sd})$  cuya derivada de tiempo a lo largo de (5.22) satisface  $\dot{V}(x_s, x_{sd}) = \sigma_s^T(x_s, x_{sd}) \dot{\sigma}_s(x_s, x_{sd}) = -\sigma_s^T(x_s, x_{sd}) L_s(x_s) \sigma_s(x_s, x_{sd})$  para toda  $x_s, x_{sd} \in B_r$ . Excepto, desde las propiedades de  $C^1$  de  $\sigma_s(x_s, x_{sd})$  uno tiene que  $\|\sigma_s(x_s, x_{sd}) - \sigma_s(0, x_{sd})\| \leq l_{\sigma_s} \|x_s\|$  y  $\|\sigma_s(0, x_{sd})\| \leq l_{\sigma_{sd}} \|x_{sd}\|$ , para toda  $x_{sd} \in B_l$  donde  $l_{\sigma_s}$  es la constante de Lipschitz de  $\sigma_s(x_s, x_{sd})$  con respecto a  $x_s$  y  $l_{\sigma_{sd}}$  es una constante positiva. Usando la propiedad de  $ab \leq (k/2)a^2 + (1/2k)b^2$ , con  $k \in (0, 1)$ , uno tiene que

$\dot{V}(x_s, x_{sd}) \leq -\rho_s a_1 \|x_s\|^2 - \rho_s a_2 \|x_{sd}\|^2 \leq -\rho_s a_1 \|x_s\|^2$  donde  $a_1 = l_{\sigma_s}^2 + l_{\sigma_s} l_{\sigma_{sd}} / k_1$ ,  $a_2 = l_{\sigma_{sd}}^2 + l_{\sigma_s} l_{\sigma_{sd}} k_1$ , y  $k_1 \in (0, 1)$ . Así, la existencia de un modo deslizante lento puede ser concluida.

La retroalimentación del sistema (5.4) con el control lento (5.19) da como resultado el sistema lento reducido en lazo cerrado.  $\dot{x}_s = f_e(x_s, 0) + p_s(x_s, x_{sd}) \dot{x}_{sd}$

donde

$$p_s(x_s, x_{sd}, \dot{x}_{sd}) = f_e(x_s, x_{sd}) - f_e(x_s, 0) + g(x_s)u_{s,N} + g_e(x_s, x_{sd}) \dot{x}_{sd}. \quad (5.23)$$

Tambi3n, desde el acotamiento de  $f(x_s)$  y las columnas de  $g(x_s)$ , la no-singularidad de la matriz  $[\partial\sigma_s/\partial x_s]g(x_s)$  y la diferenciabilidad continua de  $\sigma_s(x_s, x_{sd})$ , se sigue que.

$$\|p_s(x_s, x_{sd}, \dot{x}_{sd})\| \leq l_1 \|x_s\| + l_2 \|x_{sd}\| + l_3 \|\dot{x}_{sd}\| \quad (5.24)$$

para toda  $x_s, x_{sd}, \dot{x}_s, \dot{x}_{sd} \in B_x$ , donde  $l_1, l_2$  y  $l_3$  son constantes positivas. Ahora introducimos las siguientes suposiciones.

**A1.** El equilibrio  $x_s = 0$  de  $\dot{x}_s = f_e(x_s, 0)$  es localmente exponencialmente estable.

**A2.** El vector de referencias  $x_{sd}(t)$  y sus derivadas de tiempo  $\dot{x}_{sd}$  y  $\ddot{x}_{sd}$  son uniformemente acotadas y satisfacen.

$$\|x_{sd}\| \leq b_1, \quad \|\dot{x}_{sd}\| \leq b_2, \quad \|\ddot{x}_{sd}\| \leq b_3 \quad (5.25)$$

para algunas constantes positivas  $b_1, b_2$  y  $b_3$ .

Por el teorema inverso de Lyapunov (ver Khalil 1990), la suposici3n A1 asegura la existencia de una funci3n de Lyapunov  $V_s(x_s)$ , la cual satisface.

DIRECCI3N GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$c_1 \|x_s\|^2 \leq V_s(x_s) \leq c_2 \|x_s\|^2$$

$$\frac{\partial V_s(x_s)}{\partial x} f_e(x_s, 0) \leq -c_3 \|x_s\|^2 \quad (5.26)$$

$$\left\| \frac{\partial V_s(x_s)}{\partial x} \right\| \leq c_4 \|x_s\|$$

para algunas constantes positivas  $c_1, c_2, c_3$  y  $c_4$ . Se puede utilizar  $V_s(x_s)$  como una funci3n

candidata de Lyapunov para investigar la estabilidad del origen  $x_s = 0$  como un punto de equilibrio para el sistema (5.24). Utilizando las suposiciones A1, A2, (5.28) y usando otra vez la propiedad de  $ab \leq (k/2)a^2 + (1/2k)b^2$ , con  $k \in (0, 1)$ , la derivada de tiempo de  $V_s$  satisface.

$$\dot{V}_s(x_s) \leq -r_1 \|x_s\|^2 + r_2 \quad (5.27)$$

donde

$$r_1 = c_3 - c_4 l_{ps}, \quad r_2 = \frac{c_4}{2\kappa_1} (l_2 b_1 + l_3 b_2) \quad (5.28)$$

con  $\kappa_1 \in (0, 1)$  y  $l_{ps} = [l_1 + \frac{1}{2}(l_2 b_1 + l_3 b_2)\kappa_1]$ . Entonces, si  $l_{ps}$  es suficientemente pequeña para satisfacer

$$l_{ps} \leq \bar{l}_{ps} < \frac{c_3}{c_4} \quad (5.29)$$

el subsistema reducido lento es localmente finalmente acotado (ver apéndice).

El diseño para el subsistema del *control rápido* (5.13) puede ser obtenido de una manera similar al que se obtuvo para el control lento. Esto es, uno considera una superficie de switcheo  $(m - r)$  dimensional rápida definida por.

$$\sigma_f(\eta_{apr}, x_{fd}) = \begin{pmatrix} \sigma_{f_1}(\eta_{apr}, x_{fd}) \\ \vdots \\ \sigma_{f_r}(\eta_{apr}, x_{fd}) \end{pmatrix} = 0 \quad (5.30)$$

donde  $x_{fd} = col(x_{fd_1}, \dots, x_{fd_m})$  es otro vector de referencia, y cada función  $\sigma_{f_i} : B_z \times B_z \rightarrow R$ ,  $i = 1, \dots, r$ , es también una función  $C^1$  tal que  $\sigma_{f_i}(0, 0) = 0$ . El control rápido completo toma la forma.

$$u_f = u_{fe} + u_{fN} \quad (5.31)$$

donde  $u_{fe}$  es el *control equivalente rápido control* dado por.

$$u_{fc}(\tilde{x}, \eta_{apr}, x_{fd}) = - \left[ \frac{\partial \sigma_f}{\partial \eta_{apr}} g_2(\tilde{x}) \right]^{-1} \left[ \frac{\partial \sigma_f}{\partial \eta_{apr}} F_2(\tilde{x}) \eta_{apr} + \frac{\partial \sigma_f}{\partial x_{fd}} \frac{dx_{fd}}{d\tau} \right]. \quad (5.32)$$

y

$$u_{f,N}(\tilde{x}, \eta_{apx}, x_{fd}) = - \left[ \frac{\partial \sigma_f}{\partial \eta_{apx}} g_2(\tilde{x}) \right]^{-1} L_f(\eta_{apx}) \sigma_f(\eta_{apx}, x_{fd}). \quad (5.33)$$

En (5.32) y (5.33), la matriz  $[\partial \sigma_f / \partial \eta_{apx}] g_2(\tilde{x})$  es asumida no singular  $(\tilde{x}, \eta_{apx}, x_{fd}) \in B_x \times B_z \times B_z$ , y  $L_f(\eta_{apx})$  es una matriz definida positiva de dimensión  $r \times r$ , cuyas componentes son funciones reales no-lineales acotadas  $C^0$  de  $\eta_{apx}$ , tal que

$$\|L_f(\eta_{apx})\| \leq \rho_f \quad (5.34)$$

para toda  $(\tilde{x}, \eta_{apx}, x_{fd}) \in B_x \times B_z \times B_z$ , con una constante  $\rho_f$ . La proyección del movimiento del subsistema rápido fuera de  $\sigma_f(\eta_{apx}, x_{fd}) = 0$  es descrito por  $d\sigma_f/d\tau = -L_f(\eta_{apx})\sigma_f(\eta_{apx}, x_{fd})$ , y argumentos similares como los del movimiento del subsistema lento pueden ser aplicados y concluir la existencia de un modo deslizante rápido.

Cuando el control completo rápido (5.31) es substituido dentro de (5.13), el sistema en lazo cerrado del subsistema reducido rápido toma la forma.

$$\frac{d\eta_{apx}}{d\tau} = g_c(\tilde{x}, \eta_{apx}, 0) - p_f(\tilde{x}, \eta_{apx}, x_{fd}, \frac{dx_{fd}}{d\tau}) \quad (5.35)$$

donde

$$p_f(\tilde{x}, \eta_{apx}, x_{fd}, \frac{dx_{fd}}{d\tau}) = g_c(\tilde{x}, \eta_{apx}, x_{fd}) + g_{c1}(\tilde{x}, x_{fd}) \frac{dx_{fd}}{d\tau} - g_c(\tilde{x}, \eta_{apx}, 0) \quad (5.36)$$

con

$$g_c(\tilde{x}, \eta_{apx}, x_{fd}) = F_2(\tilde{x})\eta_{apx} - g_2(\tilde{x}) \left[ \frac{\partial \sigma_f}{\partial \eta_{apx}} g_2(\tilde{x}) \right]^{-1} \left[ \frac{\partial \sigma_f}{\partial \eta_{apx}} F_2(\tilde{x})\eta_{apx} + L_f(\eta_{apx})\sigma_f(\eta_{apx}) \right]. \quad (5.39)$$

$$g_{c_1}(\tilde{x}, x_{fd}) = g_2(\tilde{x}) \left[ \frac{\partial \sigma_f}{\partial \eta_{apx}} g_2(\tilde{x}) \right]^{-1} \left[ \frac{\partial \sigma_f}{\partial x_{fd}} \right] \quad (5.37)$$

A partir del acotamiento de  $f(x_s)$  y las columnas de  $g(x_s)$ , la no singularidad de la matriz  $[\partial \sigma_f / \partial \eta_{apx}] g_2(\tilde{x})$  y la diferenciabilidad continua de  $\sigma_f(\eta_{apx}, x_{fd})$ , se sigue que.

$$\left\| p_f(\tilde{x}, \eta_{apx}, x_{fd}, dx_{fd}/d\tau) \right\| \leq \bar{l}_1 \|\eta_{apx}\| + \bar{l}_2 \|x_{fd}\| + \bar{l}_3 \left\| \frac{dx_{fd}}{d\tau} \right\| \quad (5.38)$$

para toda  $\eta_{apx}, x_{fd}, dx_{fd}/d\tau \in B_z$ , donde  $\bar{l}_1, \bar{l}_2$  y  $\bar{l}_3$  son constantes positivas. Similarmente a el sistema reducido lento, las siguientes suposiciones son introducidas.

**A3.** El equilibrio  $\eta_{apx} = 0$  de  $d\eta_{apx}/d\tau = g_c(\tilde{x}, \eta_{apx}, 0)$  es localmente exponencialmente estable.

**A4.** El vector de referencias  $x_{fd}(t)$  y sus derivadas de tiempo  $dx_{fd}/d\tau$  son uniformemente acotadas y satisfacen.

$$\|x_{fd}\| \leq \bar{b}_1, \quad \|dx_{fd}/d\tau\| \leq \bar{b}_2 \quad (5.39)$$

para algunas constantes positivas  $\bar{b}_1$  y  $\bar{b}_2$ .

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

A partir de la suposición A3, por un teorema inverso de Lyapunov (Khalil 1990),

existe una función de Lyapunov  $W_f(\eta_{apx})$  la cual satisface

$$\begin{aligned} \bar{c}_1 \|\eta_{apx}\|^2 &\leq W_f(\eta_{apx}) \leq \bar{c}_2 \|\eta_{apx}\|^2 \\ \frac{\partial W_f(\eta_{apx})}{\partial \eta_{apx}} g_c(\tilde{x}, \eta_{apx}, 0) &\leq -\bar{c}_3 \|\eta_{apx}\|^2 \end{aligned} \quad (5.40)$$

$$\left\| \frac{\partial W_f(\eta_{apx})}{\partial \eta_{apx}} \right\| \leq \bar{c}_4 \|\eta_{apx}\|$$

para algunas constantes positivas  $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3, \bar{c}_4$ . Se puede usar también  $W_f(\eta_{apr})$  como una función candidata de Lyapunov para investigar la estabilidad del origen  $\eta_{apr} = 0$  como un punto de equilibrio para el sistema (5.37). Usando las suposiciones A3, A4, (5.40) y otra vez la propiedad de  $ab \leq (k/2)a^2 + (1/2k)b^2$ , con  $k \in (0, 1)$ , la derivada de tiempo de  $W_f$  a lo largo de las trayectorias de (5.35) entonces satisface.

$$\frac{dW_f(\eta_{apr})}{d\tau} \leq -\bar{r}_1 \|\eta_{apr}\|^2 + \bar{v}_2 \quad (5.41)$$

donde

$$\bar{r}_1 = \bar{c}_3 - \bar{c}_4 l_{pf}, \quad \bar{v}_2 = \frac{\bar{c}_4}{2\kappa_2} (\bar{l}_2 \bar{b}_1 + \bar{l}_3 \bar{b}_2) \quad (5.42)$$

con  $\kappa_2 \in (0, 1)$  y  $l_{pf} = [l_1 - \frac{1}{2}(\bar{l}_2 \bar{b}_1 + \bar{l}_3 \bar{b}_2)\kappa_2]$ . Si  $l_{pf}$  es suficientemente pequeña para satisfacer la cota.

$$l_{pf} \leq \bar{l}_{pf} < \frac{\bar{c}_3}{\bar{c}_4} \quad (5.43)$$

el sistema reducido rápido (5.35) es localmente finalmente acotado.

Basado en el control de modo-deslizante de orden reducido descrito arriba, las variables de estado lenta y rápido originales, son usadas para construir el control compuesto. es decir obtenemos la expresión siguiente que representa el control compuesto.

$$u(x, x_{sd}, \dot{x}_{sd}, \eta, x_{fd}, dx_{fd}/d\tau) = u_s(x, x_{sd}, \dot{x}_{sd}) + u_f(x, \eta, x_{fd}, dx_{fd}/d\tau) \quad (5.44)$$

donde

$$u_s = - \left[ \frac{\partial \sigma_s}{\partial x} g(x) \right]^{-1} \left[ \frac{\partial \sigma_s}{\partial x} f(x) + \frac{\partial \sigma_s}{\partial x_{sd}} \dot{x}_{sd} + L_s(x) \sigma_s(x) \right]. \quad (5.45)$$

$$u_f = - \left[ \frac{\partial \sigma_f}{\partial \eta} g_2(x) \right]^{-1} \left[ \frac{\partial \sigma_f}{\partial \eta} F_2(x) \eta + \frac{\partial \sigma_f}{\partial x_{fd}} \frac{dx_{fd}}{d\tau} + L_f(\eta) \sigma_f(\eta) \right]. \quad (5.46)$$

Cuando el control compuesto (5.45), (5.46) y (5.47) es substituido en (5.2) y (5.3), se

obtiene el sistema singularmente perturbado no-lineal en lazo cerrado,

$$\dot{x} = f_c(x, \eta, x_{sd}) + g_e(x, x_{sd}) \dot{x}_{sd} \quad (5.47)$$

$$\varepsilon \dot{\eta} = g_c(x, \eta, x_{fd}) + g_{c1}(x, x_{fd}) \varepsilon \dot{x}_{fd} - \varepsilon \frac{\partial h}{\partial x} \left[ f_c(x, \eta, x_{sd}) + g_e(x, x_{sd}) \dot{x}_{sd} \right] \quad (5.48)$$

donde  $\eta = z - h(x)$ ,  $x(t_0) = x_0$ ,  $z(t_0) = z_0 y$

$$f_c(x, \eta, x_{sd}) = f(x) + F_1(x)\eta - g(x) \left[ \frac{\partial \sigma_s}{\partial x} g(x) \right]^{-1} \left[ \frac{\partial \sigma_s}{\partial x} f(x) + L_s(x)\sigma_s(x) \right] \quad (5.49)$$

En esta técnica de control, las funciones candidatas de Lyapunov  $V_s$  y  $W_f$  son instrumental obtenido cuando el control compuesto para investigar las propiedades de estabilidad del sistema en lazo cerrado  $u = u_s + u_f$  es usado y un observador es introducido para estimar el estado del sistema original. Esto es mostrado en la sección 5.4

## 5.4 Un Observador No-Lineal

Las leyes de control desarrolladas en la sección anterior requieren del conocimiento de todo el vector de estado para poder ser implementadas. Como solo es posible tener información de algunas componentes del vector de estado por medición directa, entonces para vencer esta dificultad, y basado en ciertas condiciones de la observabilidad del sistema, es posible substituir esta información desconocida por medio de un *observador* de estado. Este sistema auxiliar nos permite obtener un estimado del vector de estado, a partir de las mediciones de las entradas y salidas del sistema a ser observado.

Como es bien conocido, el observador de Luenberger y el filtro de Kalman son muy utilizados para estimar el estado en el caso de sistemas lineales. Recientemente, algunos estimadores de estado para sistemas no-lineales han sido propuestos (ver. *e.g.* Busawon *et al* 1998, Gauthier *et al* 1992, De Leon *et al* 1996, Hernandez y Barbot 1996, Hammouri y

De Leon 1990 ). La diferencia fundamental entre los sistemas lineales y los no-lineales es que, para sistemas lineales, la entrada no afecta a la observabilidad de los sistemas. Sin embargo, para sistemas no-lineales, existen entradas que vuelven al sistema inobservable. Esta clase de entradas son conocidas como *entradas singulares* (ver apéndice). Como una consecuencia de esto, nosotros clasificamos los sistemas para los cuales es posible diseñar un observador. Cuando las entradas aplicadas al sistema no afectan su observabilidad, estas son llamadas *entradas universales*, y a los observadores diseñados se les refiere *observadores uniformes*. Por otro lado, un observador que puede ser diseñado para un sistema no-lineal con entradas singulares es conocido como un *observador persistente* ó *observador regularmente persistente*. En este capítulo, un observador uniforme el cual permite estimar los estados de un sistema no-lineal y recientemente reportado en Busawon *et al* (1998) es utilizado.

Consideremos el sistema singularmente perturbado (5.2) y (5.3) junto con una variable de salida.

$$y = \pi(x) \tag{5.50}$$

donde  $y \in R$  y  $\pi$  es una función suave. Supongamos que este sistema puede ser escrito, después de una posible transformación de coordenadas  $\zeta = \Phi(x, z)$ , en la forma.

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}(t) &= F(y)\zeta(t) + G(u(t), \zeta(t)) \\ y &= C\zeta(t) \end{aligned} \tag{5.51}$$

donde  $\zeta \in B_x \times B_z$ ,  $u \in R^r$ ,  $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$  y

$$F(y) = \begin{pmatrix} 0 & f_1(y) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & f_2(y) & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & f_{n+m-1}(y) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.52}$$



$$G(u, \zeta) = \begin{pmatrix} g_1(u, \zeta_1) \\ g_2(u, \zeta_1, \zeta_2) \\ \vdots \\ g_{n+m-1}(u, \zeta_1, \dots, \zeta_{n+m-1}) \\ g_{n+m}(u, \zeta_1, \dots, \zeta_{n+m-1}, \zeta_{n+m}) \end{pmatrix}.$$

En (5.3), condiciones necesarias y suficientes son dadas para asegurar la existencia de la descripción (5.51) junto con un procedimiento para obtener mapeos  $\Phi(x, z)$ . También se asume que las funciones  $f_i, i = 1, \dots, n + m - 1$ , son de clase  $C^r, r \geq 1$ , con respecto a  $y$  y que las funciones  $g_i, i = 1, \dots, n + m$ , son globalmente Lipschitz con respecto a  $\zeta$  y uniformemente con respecto a  $u$ . En suma, se asume que existe una clase de controles  $U \subset R^r$  y constantes  $\alpha, \beta$ , tales que para cada  $u \in U$  y cada salida  $y$  asociada a  $u$  y la condición inicial  $\zeta(0) \in B_r \times B_z$ ,

$$0 \leq \alpha \leq f_i(y) \leq \beta, i = 1, \dots, n + m - 1. \quad (5.53)$$

Definimos ahora el sistema.

$$\dot{\hat{\zeta}}(t) = F(y)\hat{\zeta}(t) - G(u(t), \zeta(t)) - S_\theta^{-1}(y)C^T[C\hat{\zeta} - y] \quad (5.54)$$

donde  $\hat{S}_\theta = \Omega(y)S_\theta\Omega(y)$  con

$$\Omega(y) = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \dots & 0 \\ \cdot & f_1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & f_1 f_2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ddots & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \prod_{i=1}^{n-1} f_i \end{pmatrix} \quad (5.55)$$

y asumimos que la derivada de tiempo  $\Omega(y)$  está acotada.  $S_\theta$  es una matriz simétrica

definida positiva la cual es la única solución de la ecuación algebraica de Lyapunov .

$$\theta S_\theta + A^T S_\theta + S_\theta A - C^T C = 0 \quad (5.56)$$

con  $\theta > 0$  y

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Sea  $e(t) = \hat{\zeta}(t) - \zeta(t)$  el error de estimación, cuya dinámica es dada por.

$$\dot{e}(t) = \{F(y) - \bar{S}_\theta^{-1}(y)C^T C\}e(t) + G(u(t), \hat{\zeta}(t)) - G(u(t), \zeta(t)) \quad (5.57)$$

donde  $\bar{S}_\theta$  es una solución de

$$\theta \bar{S}_\theta - F(y)^T \bar{S}_\theta - \bar{S}_\theta F(y) - C^T C = 0.$$

Después de algunos cálculos de computación, uno puede ver que  $F(y) = \Omega^{-1}(y)A\Omega(y)$ .

$C\Omega(y) = C$  y  $S_\theta = (1 - \theta)\Delta_\theta S_1 \Delta_\theta$ , donde  $S_1$  es la solución única de (5.56) con  $\theta = 1$

y  $\Delta_\theta = \text{diag}\{1, 1, \theta, \dots, 1/\theta^{n-m-1}\}$ . Además, dada la estructura triangular de  $G$  y al

hecho de cada una de sus componentes es globalmente Lipschitz con respecto a  $\zeta$  y

uniformemente con respecto a  $u$ , se tiene que.

$$\|G(u(t), \hat{\zeta}(t)) - G(u(t), \zeta(t))\| \leq \tilde{k}_2 \|e(t)\|$$

para alguna constante positiva  $\tilde{k}_2$ . También,  $\sigma(A - S_\theta^{-1}C^T C) = \sigma(\tilde{A}) \subset \mathbb{C}^-$ , donde  $\sigma(\tilde{A})$

denota el espectro de la matriz  $(\tilde{A})$ , así

$$\alpha_M(\tilde{A}) = \tilde{k}_1$$

donde  $\alpha_M(\cdot)$  denota el máximo valor singular de  $(\tilde{A})$ . Pongamos

$$\tilde{\delta}_0 = \sup_{t \geq 0, \varsigma \in B_x \times B_z} \{ \|\Omega^{-1}(C\varsigma)\| \}, \tilde{\delta}_1 = \sup_{t \geq 0, \varsigma \in B_x \times B_z} \{ \|\Omega(C\varsigma)\| \}, \tilde{\delta}_2 = \sup_{t \geq 0, \varsigma \in B_x \times B_z} \{ \|\dot{\Omega}(C\varsigma)\Omega^{-1}(C\varsigma)\| \}$$

donde  $\tilde{\delta}_0, \tilde{\delta}_1$  y  $\tilde{\delta}_2$  son constantes positivas, y reescribiendo (5.60) como

$$\dot{\tilde{e}}(t) = \Omega^{-1}(y) \{ A - S_\theta^{-1} C^T C \} \Omega(y) e(t) + G(u(t), \hat{\varsigma}(t)) - G(u(t), \varsigma(t)) \quad (5.58)$$

para lo cual uno tiene

$$\begin{aligned} \|\dot{\tilde{e}}(t)\| &\leq \|\Omega^{-1}(y)\| \|\{A - S_\theta^{-1} C^T C\}\| \|\Omega(y)\| \|e(t)\| \\ &\quad + \|G(u(t), \hat{\varsigma}(t)) - G(u(t), \varsigma(t))\| \\ &\leq [\tilde{\delta}_0 \tilde{\delta}_1 \tilde{k}_1 + \tilde{\delta}_2] \|e(t)\| \end{aligned} \quad (5.59)$$

Para estudiar la estabilidad de la dinámica del error de seguimiento (5.58), nosotros consideramos el método directo de Lyapunov. Hagamos ahora el siguiente cambio de variable  $\tilde{e}(t) = \Omega(y) \Delta_\theta e(t)$ , así

$$\dot{\tilde{e}}(t) = \theta \{ A - S_1^{-1} C^T C \} \tilde{e}(t) - \Omega(y) \Delta_\theta \{ G(u(t), \hat{\varsigma}(t)) - G(u(t), \varsigma(t)) \} + \dot{\Omega}(y) \Omega^{-1}(y) \tilde{e}(t).$$

Ahora, considerando la siguiente función candidata de Lyapunov  $V_o(\tilde{e}(t)) = \tilde{e}^T(t) S_1 \tilde{e}(t)$  y tomando la derivada de tiempo de esta función a lo largo de las trayectorias de la dinámica del error de estimación (5.58), se sigue que.

$$\dot{V}_o(\tilde{e}(t)) \leq - \left( \theta - \varrho [\tilde{\delta}_0 \tilde{\delta}_1 \tilde{k}_1 + \tilde{\delta}_2] \right) V_o(\tilde{e}(t)) \leq -\mu V_o(\tilde{e}(t))$$

donde  $\varrho = 2L_{\max}(S_1)$ , o equivalentemente

$$\dot{V}_o(e(t)) \leq -\mu N V_o(e(t)) \quad (5.60)$$

donde  $\mu = \theta - \varrho[\tilde{\delta}_0 \tilde{\delta}_1 \tilde{k}_1 + \tilde{\delta}_2]$  es una constante positiva. Entonces

$$\|\bar{e}(t)\| \leq \bar{K} e^{-\mu t}$$

donde  $\bar{K}$  es una constante que depende de las condiciones iniciales  $\|\zeta(0)\|$ , y la constante  $N$  es una función de  $(1/\theta^{n-m-1})$  que es obtenida desde sus linderos ó límites

$$\sqrt{N} \|e\| = (\tilde{k}_3 / \theta^{n-m-1}) |e| \leq |\Omega(y)| \|\Delta_o\|_{\min} \|e\| \leq \|\bar{e}\| \leq |\Omega(y)| \|\Delta_o\|_{\max} |e| \leq \tilde{k}_2 \|e\|$$

donde  $\tilde{k}_3 = \inf_{t \geq 0, \zeta \in B_x \times B_z} \{\|\Omega(C\zeta)\|\}$ . Así, una velocidad de decaecimiento exponencial arbitrario para  $\|\bar{e}(t)\|$  y, consecuentemente, para  $\|e(t)\|$  es obtenido. Esto puede ser obtenido en el siguiente resultado.

**Teorema 1 :** *Asuma que el sistema (5.51). Satisface las suposiciones dadas. Entonces existe una constante positiva  $\theta_0$  tal que, para toda  $u \in U$ , para todas las condiciones iniciales  $\zeta(0), \zeta(0) \in B_x \times B_z$ , para toda  $\theta_0 > 0$ , y  $\theta \geq \theta_0$ , entonces el sistema (5.54) es un observador exponencial para el sistema exponencial (5.51) con una velocidad de decaecimiento arbitrario exponencial.*

(Ver Busawon 1998, para más detalles)

## 5.5 Estabilidad en Lazo Cerrado

Suponga que el control compuesto (5.44),(5.45),(5.46) ha sido diseñado de tal manera que el sistema no-lineal singularmente perturbado (5.47),(5.48) finalmente acotado (ver apéndice), y que un observador (5.54), con velocidad de convergencia exponencial, es también diseñado. La pregunta fundamental de saber, si la estabilidad de el sistema en lazo-cerrado es preservada, cuando el estado es reemplazado por su estimado en la ley de

control, es ahora proclamada ó discutida. Hecho que el control compuesto ahora depende de los estimados  $(\hat{x}, \hat{z})$ , la función  $h$  depende de  $x, \hat{x}, x_{sd}$  y  $\dot{x}_{sd}$ . Consideremos nosotros el sistema aumentado descrito por ecuaciones de la forma.

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{x}} &= f(x) + F_1(x)\eta + g(x)u_s(\hat{x}, x_{sd}, \dot{x}_{sd}) + g_1(x)u_f(\hat{x}, \hat{\eta}, x_{fd}, \frac{dx_{fd}}{d\tau}), \quad x(t_0) = x_0 \\
 \varepsilon \dot{\hat{\eta}} &= F_2(x)\eta + g_2(x)u_f(\hat{x}, \hat{\eta}, x_{fd}, \frac{dx_{fd}}{d\tau}) - \varepsilon \left[ \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial h}{\partial \hat{z}_x} \right) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \right] \dot{\hat{x}} \\
 &\quad - \varepsilon \left\{ \left( \frac{\partial h}{\partial \hat{z}_x} \right) M_x \dot{e} + \left( \frac{\partial h}{\partial x_{sd}} \right) \dot{x}_{sd} + \left( \frac{\partial h}{\partial \dot{x}_{sd}} \right) \ddot{x}_{sd} \right\}, \quad \eta(t_0) = z_0 - h(x_0, x_{sd_0}, \dot{x}_{sd_0}) \\
 \dot{e}(t) &= \Omega^{-1}(y) \{ A - S_\theta^{-1} C^T C \} \Omega(y) e(t) + G(u(t), \hat{\zeta}(t)) - G(u(t), \zeta(t)), \quad e(t_0) = e_0 \\
 y &= C\zeta
 \end{aligned} \tag{5.64}$$

donde  $\zeta = \text{col}(\zeta_x, \zeta_z) = \Phi(x, z)$ , con  $\zeta_x \in B_x$  y  $\zeta_z \in B_z$ ,  $e = \text{col}(e_x, e_z) = \text{col}(\hat{\zeta}_x - \zeta_x, \hat{\zeta}_z - \zeta_z)$  y  $e_x = M_x e$  donde

$$M_x = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observando que el control compuesto ahora depende del estimado  $(\hat{x}, \hat{\eta})$  y que  $d\hat{\zeta}_x/dt = \dot{\hat{z}}_x + d\zeta_x/dt = M_x \dot{e} + (\partial\Phi/\partial x) \dot{\hat{x}}$ , el sistema (5.64) puede ser reescrito como:

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{x}} &= f_c(x, \eta, x_{sd}) + g_e(x, x_{sd}) \dot{x}_{sd} + g(x) \Delta u_s(x, \hat{x}, x_{sd}, \dot{x}_{sd}) \\
 &\quad + g_1(x)u_f(\hat{x}, \hat{\eta}, x_{fd}, dx_{fd}/d\tau), \quad x(t_0) = x_0 \\
 \varepsilon \dot{\hat{\eta}} &= g_c(x, \eta, x_{fd}) + g_{c1}(x, x_{fd}) \varepsilon \dot{x}_{fd} + g_2(x) \Delta u_f(x, \eta, \hat{x}, \hat{\eta}, x_{fd}, dx_{fd}/d\tau) \\
 &\quad - \varepsilon \left[ \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial h}{\partial \hat{z}_x} \right) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \right] \{ f_c(x, \eta, x_{sd}) + g_e(x, x_{sd}) \dot{x}_{sd} \\
 &\quad + g(x) \Delta u_s(x, \hat{x}, x_{sd}, \dot{x}_{sd}) + g_1(x)u_f(\hat{x}, \hat{\eta}, x_{fd}, dx_{fd}/d\tau) \} \\
 &\quad - \varepsilon \left\{ \left( \frac{\partial h}{\partial \hat{z}_x} \right) M_x \dot{e} + \left( \frac{\partial h}{\partial x_{sd}} \right) \dot{x}_{sd} + \left( \frac{\partial h}{\partial \dot{x}_{sd}} \right) \ddot{x}_{sd} \right\}, \quad \eta(t_0) = z_0 - h(x_0, x_{sd_0}, \dot{x}_{sd_0}) \\
 \dot{e}(t) &= \Omega^{-1}(y) \{ A - S_\theta^{-1} C^T C \} \Omega(y) e(t) + G(u(t), \hat{\zeta}(t)) - G(u(t), \zeta(t)), \quad e(t_0) = e_0 \\
 y &= C\zeta
 \end{aligned} \tag{65}$$

donde  $f_c, g_e, g_c$  y  $g_{c_1}$  son definidas al igual que las seccion 3. y

$$\begin{aligned}\Delta u_s(x, \hat{x}, x_{sd}, \dot{x}_{sd}) &= u_s(\hat{x}, x_{sd}, \dot{x}_{sd}) - u_s(x, x_{sd}, \dot{x}_{sd}) \\ \Delta u_f(x, \hat{x}, \hat{\eta}, \hat{\eta}, x_{fd}, dx_{fd}/d\tau) &= u_f(\hat{x}, \hat{\eta}, x_{fd}, dx_{fd}/d\tau) - u_f(x, \eta, x_{fd}, dx_{fd}/d\tau).\end{aligned}\quad (5.66)$$

Desde las propiedades de las funciones involucradas en  $u_s$  y  $u_f$ , uno tiene que  $\Delta u_s$  y  $\Delta u_f$  satisfacen las condicion local Lipschitz.

$$\left\| \Delta u_s(x, \hat{x}, x_{sd}, \dot{x}_{sd}) \right\| \leq m_s \|e\|, \quad \left\| \Delta u_f(x, \hat{x}, \hat{\eta}, \hat{\eta}, x_{fd}, dx_{fd}/d\tau) \right\| \leq m_f \|e\|. \quad (5.67)$$

para toda  $(x, \hat{x}, \eta, \hat{\eta}) \in B_x \times B_x \times B_z \times B_z$ , con  $m_s$  y  $m_f$  como las constantes Lipschitz de  $u_s(x, x_{sd}, \dot{x}_{sd})$  y  $u_f(x, \eta, x_{fd}, dx_{fd}/d\tau)$  con respecto a  $x$  y  $(x, \eta)$ , respectivamente. A partir del hecho que las columnas de  $g(x)$ ,  $g_1(x)$  y  $g_2(x)$  estan acotadas, se tiene que:

$$\begin{aligned}\left\| g(x) \Delta u_s(x, \hat{x}, x_{sd}, \dot{x}_{sd}) \right\| &\leq m_0 m_s \|e\|, \\ \left| g_1(x) u_f(\hat{x}, \hat{\eta}, x_{fd}, dx_{fd}/d\tau) \right| &\leq m_1 (\delta_1 \|x\| + \delta_2 \|\eta\| + \delta_3 \|e\|), \\ \left\| g_2(x) \Delta u_f(x, \hat{x}, \eta, \hat{\eta}, x_{fd}, dx_{fd}/d\tau) \right\| &\leq m_2 m_f \|e\|.\end{aligned}\quad (5.68)$$

para toda  $x, \hat{x} \in B_x$ ,  $\eta, \hat{\eta} \in B_z$ , y  $e \in B_x \times B_z$ ,  $\delta_1, \delta_2, \delta_3, m_0, m_1$  y  $m_2$  son algunas constantes positivas.

En virtud de las propiedades de todas las funciones involucradas en  $f_c(x, \eta, x_{sd}), g_c(x, x_{sd})$ , estas satisfacen las condiciones locales de Lipschitz.

$$\|f_c(x, \eta, x_{sd}) - f_c(x, 0, x_{sd})\| = \|F_1(x)\eta\| \leq l_{f\eta} \|\eta\|, \quad \forall (x, \eta) \in B_x \times B_z \quad (5.69)$$

$$\|g_e(x, x_{sd}) - g_e(0, x_{sd})\| \leq l_{f_{x_2}} \|x\|, \quad \forall x, z \in B_x \quad (5.70)$$

donde  $l_{f\eta}$ ,  $l_{f_{x_2}}$  son las constantes Lipschitz de  $f_c(x, \eta, x_{sd})$ , con respecto a la variable rápida  $\eta$ , y  $g_e(x, x_{sd})$ , con respecto a la variable lenta  $x$ . ademas,  $f_c(0, 0, 0) = 0$  y  $g_e(0, 0) = 0$ , asi que:

$$\|f_e(x, 0, x_{sd})\| \leq l_{f_{x_1}} \|x\| + l_{f_{d_1}} \|x_{sd}\|, \quad \forall x \in B_x \quad (5.71)$$

$$\|g_e(0, x_{sd})\| \leq l_{f_{d_2}} \|x_{sd}\|, \quad \forall x \in B_x \quad (5.72)$$

donde  $l_{f_{x_1}}$  y  $l_{f_{d_1}}$  son constantes positivas y  $l_{f_{d_2}}$  denota la constante de Lipschitz de  $g_e(0, x_{sd})$  con respecto a  $x_{sd}$ . También, de la diferenciabilidad continua de  $h$  con respecto a sus argumentos y de los mapeos de  $\Phi$  esto es lo que sucede.

$$\left\| \frac{\partial h}{\partial x} \right\| \leq l_{h_{x_1}} \cdot \left\| \frac{\partial h}{\partial \zeta_x} \right\| \leq l_{h_{x_2}} \cdot \left\| \frac{\partial h}{\partial x_{sd}} \right\| \leq l_{h_{x_3}} \cdot \left\| \frac{\partial h}{\partial \dot{x}_{sd}} \right\| \leq l_{h_{x_4}} \cdot \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right\| \leq l_\Phi, \quad (5.73)$$

para toda  $x, \zeta_x \in B_x$  con  $l_{h_{x_1}}, l_{h_{x_2}}, l_{h_{x_3}}, l_{h_{x_4}}$  y  $l_\Phi$  siendo constantes positivas. Ahora, pongamos.

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (v_1 - c_4 m_1 \delta_1), \\ \alpha_2 &= \frac{\bar{v}_1}{\epsilon} - \bar{c}_4 (l_{h_{x_1}} - l_{h_{x_2}} l_\Phi) (l_{f_{x_1}} + \delta_2) \\ \alpha_3 &= \mu \bar{N}, \\ \beta_1 &= c_4 (l_{f_{x_1}} + m_1 \delta_2) + \bar{c}_4 (l_{h_{x_1}} + l_{h_{x_2}} l_\Phi) (l_{f_{x_1}} + b_2 l_{f_{x_2}} + m_1 \delta_1) \\ \beta_2 &= c_4 (m_0 m_s + m_1 \delta_1), \\ \beta_3 &= \bar{c}_4 \left\{ (l_{h_{x_1}} + l_{h_{x_2}} l_\Phi) + l_{h_{x_2}} \right\} [m_0 m_s + m_1 \delta_3 + (l_{f_{x_1}} + b_2 l_{f_{x_2}}) b_1] \\ &\quad + \frac{1}{\epsilon} \bar{c}_4 m_2 m_f + \bar{c}_4 l_{h_{x_2}} (\delta_0 \delta_1 k_1 + k_2) \\ \beta_4 &= \bar{c}_4 \left\{ (l_{h_{x_1}} + l_{h_{x_2}} l_\Phi) + l_{h_{x_2}} \right\} (l_{f_{x_1}} + b_2 l_{f_{x_2}}) b_1 + \bar{c}_4 (l_{h_{x_3}} b_2 + l_{h_{x_4}} b_3) \\ \gamma &= v_2 + \frac{\bar{v}_2}{\epsilon} \end{aligned} \quad (5.74)$$

El siguiente resultado nos da condiciones suficientes para asegurar el acotamiento uniforme del sistema aumentado en lazo cerrado del sistema no-lineal singularmente perturbado (5.65).

**Teorema 2:** Considere el sistema no-lineal singularmente perturbado (5.2), (5.3) para la cual un control compuesto (5.44), (5.45), (5.46) es diseñado tal que (5.29) y (5.43) son satisfechas. Suponga que un observador (5.54) con velocidad de convergencia exponencial

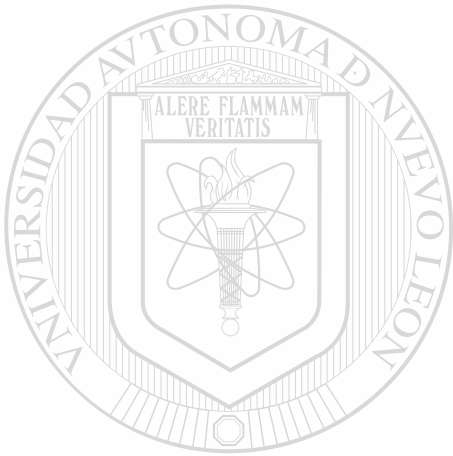
es diseñado. Entonces, existen algunos números  $0 < \theta_i < 1, i = 1, 2, 3, 4$ , tales que

$$\mu_{co} = \min \left\{ \frac{a'}{c_2}, \frac{b'}{\bar{c}_2}, \frac{c'}{\mu \cdot N} \right\} > 0 \quad (5.75)$$

donde

$$a' = \alpha_1 - \frac{\beta_1 \theta_1}{2} - \frac{\beta_2 \theta_2}{2}, b' = \alpha_2 - \frac{\beta_1}{2\theta_1} - \frac{\beta_3 \theta_3}{2} - \frac{\beta_4 \theta_4}{2}, c' = \alpha_3 - \frac{\beta_2}{2\theta_2} - \frac{\beta_3}{2\theta_3} \quad (5.76)$$

para  $\epsilon$ , suficientemente pequeño, entonces el sistema aumentado en lazo cerrado del sistema singularmente perturbado (5.65) es localmente finalmente acotado (ver apéndice)



# UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



**Prueba:**

Consideremos la siguiente función candidata de Lyapunov .

$$L(x, \eta, e) = V_s(x) + W_f(\eta) + V_o(e).$$

Diferenciando  $V_s(x)$  a lo largo de la primera dinámica de (5.65), obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{V}_s \leq & -v_1 \|x\|^2 + v_2 + \left\| \left( \frac{\partial V_s}{\partial x} \right) F_1(x)\eta \right\| \\ & + \left\| \left( \frac{\partial V_s}{\partial x} \right) [g(x)\Delta u_s(x, \hat{x}, x_{sd}, \dot{x}_{sd})] \right\| + \left\| \left( \frac{\partial V_s}{\partial x} \right) [g_1(x)u_f(\hat{x}, \hat{\eta}, x_{fd}, \frac{dx_{fd}}{d\tau})] \right\|. \end{aligned} \quad (5.77)$$

Similarmente, diferenciando  $W_f(\eta)$  a lo largo de la segunda dinámica en (5.65), obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{W}_f = & \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{\partial W_f}{\partial \eta} \right) [g_c(x, \eta, x_{fd}) + g_{c1}(x, x_{fd})\varepsilon \dot{x}_{fd}] \\ & - \left( \frac{\partial W_f}{\partial \eta} \right) \left[ \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial h}{\partial \zeta_x} \right) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \right] [f_c(x, \eta, x_{sd}) + g_c(x, x_{sd}) \dot{x}_{sd}] \\ & - \left( \frac{\partial W_f}{\partial \eta} \right) \left[ \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial h}{\partial \zeta_x} \right) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \right] [g(x)\Delta u_s(x, \hat{x}, x_{sd}, \dot{x}_{sd})] \\ & - \left( \frac{\partial W_f}{\partial \eta} \right) \left[ \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial h}{\partial \zeta_x} \right) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \right] [g_1(x)u_f(\hat{x}, \hat{\eta}, x_{fd}, \frac{dx_{fd}}{d\tau})] \\ & - \left( \frac{\partial W_f}{\partial \eta} \right) \left\{ \left( \frac{\partial h}{\partial \zeta_x} \right) M_x \dot{e} + \left( \frac{\partial h}{\partial x_{sd}} \right) \dot{x}_{sd} + \left( \frac{\partial h}{\partial \dot{x}_{sd}} \right) \ddot{x}_{sd} \right\} \\ & + \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{\partial W_f}{\partial \eta} \right) g_2(x)\Delta u_f(x, \hat{x}, \eta, \hat{\eta}, x_{fd}, \frac{dx_{fd}}{d\tau}). \end{aligned}$$

En la sección 5.3 de este capítulo, mostramos que usando la función  $W_f$ , el sistema (5.37) es localmente uniformemente acotada. Por otra parte, en Kalil (1992) (Capítulo 5, sección 5.7, pags. 234-250), se muestra que cuando  $\dot{x}$  es reemplazado por el estado lento este se conserva, esto es la variable  $x$ , la propiedad de estabilidad local del estado  $\eta_{apz} = z - h(x)$  es conservada, esto es.

$$\left( \frac{\partial W_f}{\partial \eta} \right) \left[ g_c(x, \eta, x_{fd}) + g_{c_1}(x, x_{fd}) \varepsilon \dot{x}_{fd} \right] \leq -\bar{v}_1 \|\eta\|^2 + \bar{v}_2$$

se preserva. Así que,

$$\begin{aligned} \dot{W}_f \leq & -\frac{1}{\epsilon} \bar{v}_1 \|\eta\|^2 + \frac{1}{\epsilon} \bar{v}_2 \\ & + \left\| \left( \frac{\partial W_f}{\partial \eta} \right) \left[ \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial h}{\partial \hat{\zeta}_x} \right) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \right] \left[ f_c(x, \eta, x_{sd}) + g_e(x, x_{sd}) \dot{x}_{sd} \right] \right\| \\ & + \left\| \left( \frac{\partial W_f}{\partial \eta} \right) \left[ \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial h}{\partial \hat{\zeta}_x} \right) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \right] g(x) \Delta u_s(x, \hat{x}, x_{sd}, \dot{x}_{sd}) \right\| \\ & + \left\| \left( \frac{\partial W_f}{\partial \eta} \right) \left[ \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \left( \frac{\partial h}{\partial \hat{\zeta}_x} \right) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \right] g_1(x) u_f(\hat{x}, \hat{\eta}, x_{fd}, \frac{dx_{fd}}{d\tau}) \right\| \\ & + \left\| \left( \frac{\partial W_f}{\partial \eta} \right) \left\{ \left( \frac{\partial h}{\partial \hat{\zeta}_x} \right) M_x \Omega^{-1}(y) \{A - S_0^{-1} C^T C\} \Omega(y) c(t) \right\} \right\| \\ & + \left\| \left( \frac{\partial W_f}{\partial \eta} \right) \left\{ \left( \frac{\partial h}{\partial \hat{\zeta}_x} \right) M_r \{G(u(t), \zeta(t)) - G(u(t), \varsigma(t))\} \right\} \right\| \\ & + \left\| \left( \frac{\partial W_f}{\partial \eta} \right) \left\{ \left( \frac{\partial h}{\partial x_{sd}} \right) \dot{x}_{sd} - \left( \frac{\partial h}{\partial \dot{x}_{sd}} \right) \ddot{x}_{sd} \right\} \right\| \\ & + \frac{1}{\epsilon} \left\| \left( \frac{\partial W_f}{\partial \eta} \right) g_2(x) \Delta u_f(x, \hat{x}, \eta, \hat{\eta}) \right\| \end{aligned} \quad (5.78)$$

En la misma forma, cuando  $V_o(\epsilon)$  es diferenciado a lo largo de las trayectorias de la tercera dinámica de (5.65), y utilizando los resultados de la sección 5.4 (Teorema 1), podemos obtener

$$\dot{V}_o(\epsilon) \leq -\mu_N \|\epsilon\|^2. \quad (5.79)$$

A partir de las ecuaciones (28), (43), (68)-(73), obtenemos

$$\left\| \left( \frac{\partial V_s}{\partial x} \right) F_1 \eta \right\| \leq c_4 l_{f_n} \|x\| \|\eta\|.$$

$$\left\| \left( \frac{\partial V_s}{\partial x} \right) [g \Delta u_s] \right\| \leq c_4 m_0 m_s \|x\| \|e\|.$$

$$\left\| \left( \frac{\partial V_s}{\partial x} \right) [g_1 u_f] \right\| \leq c_4 m_1 (\delta_1 \|x\|^2 + \delta_2 \|x\| \|\eta\| + \delta_3 \|x\| \|e\|).$$

$$\left\| \left( \frac{\partial W_f}{\partial \eta} \right) \left[ \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial h}{\partial \zeta_x} \right) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \right] [f_c + g_e \dot{x}_{sd}] \right\| \leq \bar{c}_4 (l_{h_{x_1}} + l_{h_{x_2}} l_\Phi) [l_{f_\eta} \|\eta\|^2 + (l_{f_{x_1}} + l_{f_{x_2}} b_2) \|x\| \|\eta\| + (l_{f_{d_1}} + l_{f_{d_2}} b_2) b_1 \|\eta\|].$$

$$\left\| \left( \frac{\partial W_f}{\partial \eta} \right) \left[ \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial h}{\partial \zeta_x} \right) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \right] g \Delta u_s \right\| \leq \bar{c}_4 (l_{h_{x_1}} + l_{h_{x_2}} l_\Phi) m_0 m_s \|\eta\| \|e\|. \quad (5.80)$$

$$\left\| \left( \frac{\partial W_f}{\partial \eta} \right) \left[ \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial h}{\partial \zeta_x} \right) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \right] g_1 u_f \right\| \leq \bar{c}_4 (l_{h_{x_1}} + l_{h_{x_2}} l_\Phi) m_1 (\delta_1 \|x\|^2 + \delta_2 \|x\| \|\eta\| + \delta_3$$

$$\left\| \left( \frac{\partial W_f}{\partial \eta} \right) g_2 \Delta u_f \right\| \leq \bar{c}_4 m_2 m_f \|\eta\| \|e\|.$$

$$\left\| \left( \frac{\partial W_f}{\partial \eta} \right) \left\{ \left( \frac{\partial h}{\partial \zeta_x} \right) M_x \Omega^{-1} \{A - S_0^{-1} C^T C\} \Omega e \right\} \right\| \leq \bar{c}_4 l_{h_{x_2}} \tilde{\delta}_0 \tilde{\delta}_1 \tilde{k}_1 \|\eta\| \|e\|$$

$$\left\| \left( \frac{\partial W_f}{\partial \eta} \right) \left\{ \left( \frac{\partial h}{\partial \zeta_x} \right) M_x \{G(u, \tilde{\zeta}) - G(u, \zeta)\} \right\} \right\| \leq \bar{c}_4 l_{h_{x_2}} \tilde{k}_2 \|\eta\| \|e\|$$

$$\left\| \left( \frac{\partial W_f}{\partial \eta} \right) \left\{ \left( \frac{\partial h}{\partial x_{sd}} \right) \dot{x}_{sd} + \left( \frac{\partial h}{\partial \dot{x}_{sd}} \right) \ddot{x}_{sd} \right\} \right\| \leq \bar{c}_4 (l_{h_{x_3}} b_2 + l_{h_{x_4}} b_3) \|\eta\|$$

Combinando estas desigualdades en (5.77), (5.78) y (5.79), y usando la propiedad  $ab \leq (k/2)a^2 + (1/2k)b^2$ , con  $k \in (0, 1)$ , resulta

$$\dot{L} \leq -a' \|x\|^2 - b' \|\eta\|^2 - c' \|e\|^2 + d' \leq -\mu_{co} L + \lambda \quad (5.81)$$

donde  $d' = \gamma + \beta_4/2\theta_4$ . Sea  $\mu_{co}$  definida por (5.75). entonces se sigue que:

$$\dot{L} \leq -\mu_{co}L + d'$$

lo cual implica que

$$L(x(t), \eta(t), e(t)) \leq \left[ L(x_0, \eta_0, e_0) - \frac{d'}{\mu_{co}} \right] e^{-\mu_{co}(t-t_0)} + \frac{d'}{\mu_{co}}.$$

Entonces, los estados  $x, \eta$  y  $e$  son localmente finalmente acotados y deberán converger a la bola dada por

$$(x, \eta, e) = \left\{ (x, \eta, e) : L(x, \eta, e) \leq \frac{d'}{\mu_{co}} \right\},$$

□

Observemos que cuando el estado  $(x, z)$  está disponible (es decir no existe observador en el sistema), y ahí no existe un vector de referencia (i.e.  $x_{sd} = x_{fd} = 0$ ) la primera y la cuarta desigualdad de la ecuación (5.80) resultan en las así llamadas *condiciones de interconexión*, es decir

$$\frac{\partial W_c}{\partial x} [f_c(x, \eta, 0) - f_c(x, 0, 0)] \leq c_1 l_{f_\eta} \|x\| \|\eta\| \quad (5.82)$$

$$\left\| \left( \frac{\partial W_f}{\partial x} \right) [f_c(x, \eta, 0)] \right\| \leq \tilde{c}_1 l_{h_x} [l_{f_\eta} \|\eta\|^2 + l_{f_{x1}} \|x\| \|\eta\|]$$

## 5.6 Aplicación para el Modelo del Manipulador

Mediante la asignación de  $x_1 = q$ ,  $x_2 = \dot{q}$ ,  $z_1 = k(q - q_m)$ ,  $z_2 = \varepsilon k(\dot{q} - \dot{q}_m)$  donde  $k = \frac{\alpha}{\varepsilon^2}$ , es posible escribir el modelo (5.1) en la forma standard singularmente perturbada (5.2), es decir.

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x) + F_1(x)z \\ \varepsilon \dot{z} = f_2(x) + F_2(x)z + g_2(x)u \end{cases} \quad (5.83)$$

con

$$f_1(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{mgl}{J} \sin(x_1) \end{pmatrix}, \quad F_1(x) = F_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{J} & 0 \end{pmatrix}, \quad g_1(x) = 0.$$

$$f_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\alpha mgl}{I} \sin(x_1) + \frac{\alpha B}{J} x_2 \end{pmatrix}, \quad F_2(x) = F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha \left(\frac{1}{I} + \frac{1}{J}\right) & -\frac{\varepsilon B}{J} \end{pmatrix}, \quad g_2(x) = g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ - \end{pmatrix}$$

donde  $\alpha = k\varepsilon^2$  es el coeficiente de rigidez de la articulación flexible, el cual es asumido como una aproximación  $O(\frac{1}{\varepsilon^2})$  para el parámetro  $\varepsilon$ .

### 5.6.1 Diseño de la Ley de Control

Cuando  $\varepsilon = 0$ , uno obtiene una raíz única  $z_{s_1} = \frac{-1}{(I+J)} \{Jmgl \sin(x_{s_1}) + Bx_{s_2} + Iu_s\}$ ,  $z_{s_2} = 0$  y entonces el sistema reducido lento toma la forma (5.4) con

$$f(x_s) = \begin{pmatrix} \dot{x}_{s_2} \\ -\frac{mgl}{(I+J)} \sin(x_{s_1}) - \frac{B}{(I+J)} x_{s_2} \end{pmatrix}, \quad g(x_s) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{(I+J)} \end{pmatrix} \quad (5.84)$$

Dado que se desea que la posición del rotor siga una señal de referencia dada, la siguiente función de switcheo es seleccionada.

$$\sigma_s = s_1(x_1 - x_{sd_1}) + s_2(x_2 - x_{sd_2}) \quad (5.85)$$

donde  $s_1$  y  $s_2$  son coeficientes reales constantes, y  $x_{sd_1}$  es la señal de referencia ( $x_{sd_2} = \dot{x}_{sd_1}$ ). Es supuesto también que  $x_{sd_1}$  y  $x_{sd_2}$  junto con sus derivadas de tiempo están acotadas para toda  $t > 0$ . La selección de la función de switcheo (5.85) conduce, de acuerdo con la sección 5.2, hacia el control lento  $u_s = u_{se} + u_{s,v}$  con

$$u_{se} = mgl \sin(x_{s1}) + [B - \frac{s_1}{s_2} (I + J)]x_{s2} + \frac{s_1}{s_2} (I + J) \dot{x}_{sd1} + (I + J) \dot{x}_{sd2} \quad (5.86)$$

$$u_{sN} = -(I + J)L_s(x_s)\frac{s_1}{s_2}(x_{s1} - x_{sd1}) - (I + J)L_s(x_s)(x_{s2} - x_{sd2}) \quad (5.87)$$

donde  $L_s(x_s)$  ha sido seleccionada, por simplicidad, como una constante estrictamente positiva  $L_s(x_s) = l_s > 0$ . Después de la substitución del control lento  $u_s$  dentro del subsistema reducido lento, nosotros obtenemos el sistema reducido lento en lazo-cerrado

$$\begin{aligned} \dot{x}_s &= f_\epsilon(x_s, 0) + p_s(0, x_{sd}, \dot{x}_{sd}) = A_s x_s + p_s(0, x_{sd}, \dot{x}_{sd}) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{s_1}{s_2} l_s & -(\frac{s_1}{s_2} + l_s) \end{pmatrix} x_s + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{s_1}{s_2} \dot{x}_{sd1} + \dot{x}_{sd2} + l_s \frac{s_1}{s_2} x_{sd1} + l_s x_{sd2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.88)$$

donde  $x_s = 0$  es un punto de equilibrio exponencialmente estable de  $\dot{x}_s = f_\epsilon(x_s, 0)$  siempre que las constantes  $s_1, s_2$  y  $l_s$  sean escogidas de tal forma que el polinomio

$$s^2 + s \left( \frac{s_1}{s_2} + l_s \right) + \frac{s_1 l_s}{s_2} = 0$$

sea Hurwitz. Observemos que  $\|p_s(0, x_{sd}, \dot{x}_{sd})\| \leq l_2 \|x_{sd}\| + l_3 \|\dot{x}_{sd}\|$ . Mediante la selección de  $s_1 > 0$  y  $s_2 > 0$ , uno garantiza el acotamiento finalmente acotado del sistema (5.88).

En particular, existe una función candidata de Lyapunov  $V_s(x_s) = x_s^T P_s x_s$  donde  $P_s$  es una matriz simétrica definida positiva, la cual es solución de la ecuación de Lyapunov  $P_s A_s + A_s^T P_s = -Q_s$ , con  $Q_s$  una matriz arbitraria simétrica definida positiva, tal que la derivada de tiempo de  $V_s$  a lo largo de las trayectorias de (5.88) satisface (5.29) con  $c_3 = \lambda_{\min}(Q_s)$ ,  $c_4 = \lambda_{\max}(P_s)$  y  $l_{p_s} = [l_1 + \frac{1}{2}(l_2 b_1 + l_3 b_2) \kappa_1]$

En esta aplicación, uno necesita justamente estabilizar las variables rápidas hacia el origen. Así, uno puede seleccionar la función de switcheo rápida

$$\sigma_f = \bar{s}_1 \eta_1 + \bar{s}_2 \eta_2 \quad (5.89)$$

donde  $\bar{s}_1$  y  $\bar{s}_2$  son coeficientes reales constantes. En concordancia con la sección 5.3 de este capítulo, el control rápido resulta

$$u_f = u_{f_e} + u_{f_N} \quad (5.90)$$

con

$$u_{f_e} = - \left( \frac{1}{I} + \frac{1}{J} \right) J \eta_{apx1} + \left( \frac{\bar{s}_1 J}{\bar{s}_2 \alpha} - \frac{\varepsilon B}{\alpha} \right) \eta_{apx2} \quad (5.91)$$

$$u_{f_N} = \frac{J}{\alpha} l_f \frac{\bar{s}_1}{\bar{s}_2} \eta_{apx1} + \frac{J l_f}{\alpha} \eta_{apx2} \quad (5.92)$$

donde, por simplicidad,  $L_f(\eta_{apx})$  es seleccionada como una constante estrictamente positiva, es decir  $L_f(\eta_{apx}) = l_f > 0$ . La ecuación en modo deslizante rápido en lazo-cerrado toma la forma siguiente:

$$\frac{d\eta_{apx}}{d\tau} = g_c(\tilde{x}, \eta_{apx}, 0) \quad (5.93)$$

$$= A_f \eta_{apx} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\bar{s}_1}{\bar{s}_2} l_f & -\left( \frac{\bar{s}_1}{\bar{s}_2} + l_f \right) \end{pmatrix} \eta_{apx}$$

Siempre que las constantes  $\bar{s}_1$ ,  $\bar{s}_2$  y  $l_f$  sean seleccionadas de tal manera que el polinomio

$$s^2 + s \left( \frac{\bar{s}_1}{\bar{s}_2} + l_f \right) + \frac{\bar{s}_1}{\bar{s}_2} l_f = 0 \quad (5.94)$$

tenga estrictamente todas las raíces en el semiplano complejo izquierdo, el sistema (5.93) es exponencialmente estable. Por esto, ahí existe una función candidata de Lyapunov  $W_f(\eta_{apx}) = \eta_{apx}^T P_f \eta_{apx}$  donde  $P_f$  es una matriz simétrica definida positiva, la cual es solución de la ecuación de Lyapunov  $P_f A_f + A_f^T P_f = -Q_f$ , con  $Q_f$  una matriz simétrica

definida positiva arbitraria, tal que la derivada  $W_f$  a lo largo de las trayectorias de (5.93) satisface (5.44) con  $\bar{v}_1 = \bar{c}_3 = \lambda_{\min}(Q_f)$  y  $\bar{v}_2 = 0$ , es decir, ahí no la necesitamos para verificar (5.46). Finalmente, el control compuesto resulta

$$u(x, \eta, x_{sd}) = u_s(x, x_{sd}) + u_f(\eta) \quad (5.95)$$

Cuando este control compuesto es substituido dentro de la representación singularmente perturbada del modelo del robot con articulación flexible, uno obtiene el siguiente sistema singularmente perturbado en lazo cerrado

$$\dot{\bar{x}} = f_\epsilon(x, \eta, x_{sd}) + g_\epsilon(x, x_{sd}) \dot{x}_{sd} = A_s x + F_1(x)\eta + p_s(0, x_{sd}, \dot{x}_{sd}) \quad (5.96)$$

$$\epsilon \dot{\eta} = g_\epsilon(x, \eta, 0) - \epsilon \frac{\partial h}{\partial x} [A_s x + F_1(x)\eta + p_s(0, x_{sd}, \dot{x}_{sd})] \quad (5.97)$$

### 5.6.2 Estimación de las velocidades angulares del motor y el eslabón

El controlador diseñado en la subsección 5.1 requiere de una medición completa de las posiciones angulares del eslabón y del eje del motor. Sin embargo, usualmente en la práctica, únicamente se puede disponer de las posiciones angulares. A fin de estimar las velocidades angulares del eslabón y del eje del motor, un observador de alta ganancia es diseñado en esta subsección; otra clase de observadores han sido diseñados para estos manipuladores (Busawon *et al* 1998). Haciendo el siguiente cambio de coordenadas,

$$\zeta_1 = x_1, \quad \zeta_2 = x_2, \quad \zeta_3 = z_1, \quad \zeta_4 = z_2. \quad (5.98)$$

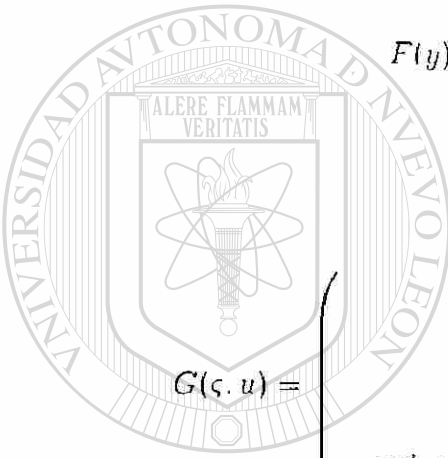
se puede escribir el sistema singularmente perturbado asociado para el manipulador en la forma siguiente:



$$\begin{cases} \dot{\varsigma}_1 = \varsigma_2 \\ \dot{\varsigma}_2 = -\frac{mgl}{I} \sin(\varsigma_1) - \frac{\varsigma_3}{I} + m_1 + m_3 \cos(\varsigma_1) \sin(\varsigma_1) \\ \dot{\varsigma}_3 = \frac{1}{\varepsilon} \varsigma_4 \\ \dot{\varsigma}_4 = -\frac{mgl}{\varepsilon I} \sin(\varsigma_1) + \frac{\alpha B}{\varepsilon J} \varsigma_2 - \frac{\alpha}{\varepsilon} \left( \frac{1}{I} + \frac{1}{J} \right) \varsigma_3 - \frac{B}{J} \varsigma_4 - \frac{\alpha}{\varepsilon J} u \\ y = \varsigma_1 \end{cases} \quad (5.99)$$

con  $\varsigma = \text{col}(\varsigma_1, \varsigma_2, \varsigma_3, \varsigma_4)$  y

$$F(y) = F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\varepsilon} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



$$G(\varsigma, u) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{mgl}{I} \sin(\varsigma_1) \\ 0 \\ -\frac{mgl}{\varepsilon I} \sin(\varsigma_1) + \frac{\alpha B}{\varepsilon J} \varsigma_2 - \frac{\alpha}{\varepsilon} \left( \frac{1}{I} + \frac{1}{J} \right) \varsigma_3 - \frac{B}{J} \varsigma_4 - \frac{\alpha}{\varepsilon J} u \end{pmatrix}$$

Un observador para la variable de estado  $\varsigma$  es de la forma

$$\dot{\hat{\varsigma}}(t) = F\hat{\varsigma}(t) + G(\varsigma, u) - \bar{S}_\theta^{-1}(y)C^T[\hat{\varsigma}_1 - \varsigma_1] \quad (5.100)$$

donde  $\bar{S}_\theta = \Omega(y)S_\theta\Omega(y)$ , siendo  $S_\theta$  la solución única de (56), y

$$\Omega(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon I} \end{pmatrix}.$$

La ganancia del observador  $\bar{S}_\theta^{-1}(y)C^T = (\Omega(y)S_\theta\Omega(y))^{-1}C^T$  tiene la forma.

$$\bar{S}_\theta^{-1}(y)C^T = \begin{pmatrix} 4\theta^4 \\ 6\theta^3 \\ -4I\theta^2 \\ -\varepsilon I\theta \end{pmatrix}.$$

De acuerdo al teorema 1, el origen  $e = 0$  de la estimación de la dinámica del error es un punto de equilibrio exponencialmente estable, mas precisamente, la función candidata de Lyapunov  $V_o(\bar{e}(t)) = \bar{e}^T(t)S_1\bar{e}(t)$ , con  $\bar{e}(t) = \Omega(y)\Delta_\theta c(t)$ , satisface

$$\dot{V}_o(e) \leq -\mu N \|e\|^2, \quad (5.101)$$

donde  $\mu = \theta - \rho[\tilde{\delta}_0\tilde{\delta}_1k_2 + \tilde{\delta}_2]$ ,  $\sqrt{N} = \frac{\tilde{k}_3}{\theta^{n-m-1}}$ ,  $n = 2$ ,  $m = 2$ .

Por supuesto,  $\theta$  se selecciona de tal forma que  $\mu > 0$ .

### 5.6.3 Estabilidad en lazo cerrado

En esta aplicación el sistema aumentado en lazo-cerrado singularmente perturbado (5.65)

resulta:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_c(x, \eta, x_{sd}) + g_c(x, x_{sd}) \dot{x}_{sd} - g(x) \Delta u_s(x, \dot{x}, x_{sd}, \dot{x}_{sd}), \quad y = x_1, \\ \varepsilon \dot{\eta} &= g_c(x, \eta, 0) + g_2(x) \Delta u_f(x, \eta, \dot{x}, \hat{\eta}, 0, 0) \\ &\quad - \varepsilon \left[ \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial h}{\partial x_s} \right) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \right] \dot{x} - \varepsilon \left( \frac{\partial h}{\partial x_s} \right) M_x \dot{e} \\ \dot{e}(t) &= \dot{\bar{e}}(t) = \Omega^{-1}(y) \{ A - S_\theta^{-1} C^T C \} \Omega(y) e(t) + G(u(t), \hat{\zeta}(t)) - G(u(t), \zeta(t)) \end{aligned} \quad (5.102)$$

donde  $\Delta u_s(x, \hat{x}, x_{sd}, \dot{x}_{sd}) = u_s(\hat{x}, x_{sd}, \dot{x}_{sd}) - u_s(x, x_{sd}, \dot{x}_{sd})$  y  $\Delta u_f(x, \eta, \hat{x}, \hat{\eta}, 0, 0) = u_f(\hat{x}, \hat{\eta}, 0, 0) - \Delta u_f(x, \eta, 0, 0)$ .

De estas últimas expresiones uno puede verificar (después de largos cálculos), las condiciones de Lipschitz (5.67) y las desigualdades (5.68).

Así las ecuaciones (5.69)-(5.72) se satisfacen. También, la diferenciabilidad continua de  $h$  con respecto a sus argumentos y del mapeo  $\Phi$ , cuyas componentes son dadas por (5.87) y (5.98), nos permiten sostener las desigualdades (5.73) (también a través de largas operaciones matemáticas). Las constantes (5.74) son dadas por:

$$\alpha_1 = (c_3 - c_4 b_2).$$

$$\alpha_2 = \left( \frac{\tilde{r}_1}{\epsilon} - \bar{c}_4 (l_{h_{x_1}} + l_{h_{x_2}} l_\Phi) (l_{f_\eta} + \delta_2) \right).$$

$$\alpha_3 = \mu \cdot N.$$

$$\beta_1 = c_4 l_{f_\eta} + \bar{c}_4 (l_{h_{x_1}} + l_{h_{x_2}} l_\Phi) l_{f_{x_1}}.$$

$$\beta_2 = c_4 m_0 m_s.$$

$$\beta_3 = \bar{c}_1 \{ (l_{h_{x_1}} + l_{h_{x_2}} l_\Phi) - l_{h_{x_2}} \} (m_0 m_s + l_{f_{x_1}} b_1) + \frac{1}{\epsilon} \bar{c}_4 m_2 m_f + \bar{c}_1 l_{h_{x_2}} (\tilde{\delta}_0 \tilde{\delta}_1 \tilde{k}_1 + \tilde{k}_2).$$

$$\beta_4 = \bar{c}_4 (l_{h_{x_1}} + l_{h_{x_2}} l_\Phi) l_{f_{x_1}} b_1.$$

$$\gamma = r_2.$$

Los valores nominales de los parámetros del robot con articulación flexible fueron escogidos como [16]

$$mgl = 0.8; \quad \alpha = 7.13 \times 10^{-5}; \quad I = 0.031$$

$$J = 0.004; \quad B = 0.007; \quad \varepsilon = 10^{-4}$$

Con estos valores y la selección  $s_1 = 5$ ,  $s_2 = 10$ ,  $l_s = 200$ ,  $\bar{s}_1 = 0.1$ ,  $\bar{s}_2 = 1.0$ ,  $l_f = 0.010$ ,

$\theta = 2$ , la ecuación (5.75) se satisface, y el sistema en lazo cerrado (5.102) es finalmente acotado.

#### 5.6.4 Resultados de Simulación

Nosotros mostramos ahora algunos resultados de simulación cuando el esquema controlador-observador es aplicado para el modelo del brazo robot con articulación flexible. La señal

de referencia a seguir fue puesta como  $x_{sd1} = 0.5 \sin(t)$ . Las condiciones iniciales de las variables del robot, así como para los estimados fueron fijadas a los valores siguientes:  $\varsigma_1(0) = 0$ ,  $\varsigma_2(0) = 0$ ,  $\varsigma_3(0) = 0$ ,  $\varsigma_4(0) = 0$ ,  $\hat{\varsigma}_1(0) = 0.2$ ,  $\hat{\varsigma}_2(0) = 0.02$ ,  $\hat{\varsigma}_3(0) = 0.002$ ,  $\hat{\varsigma}_4(0) = 0.003$ .

Las gráficas de tiempo del sistema en lazo-cerrado muestran el comportamiento dinámico de la posición angular del eslabón, la señal de referencia, la velocidad angular del eslabón, la derivada de tiempo de la señal de referencia son graficadas en las figuras 5.1 y 5.2, mientras que los errores de estimación  $e_1$  y  $e_2$  son dados en las figuras 5.3 y 5.4. Desde estas gráficas, uno puede observar que un buen desempeño en el seguimiento de la trayectoria del brazo robot es obtenida. También la variable de control es conservada dentro de ciertos límites de operación, tal como se muestra en la figura 5.5.

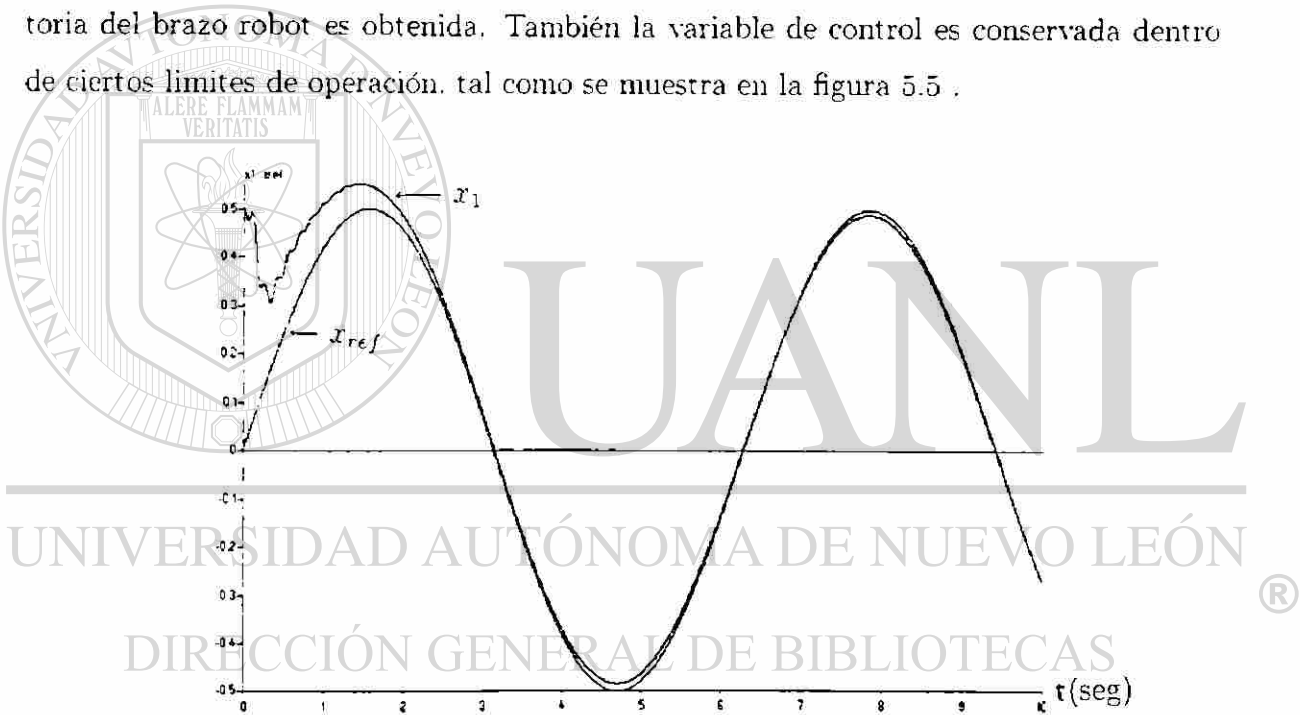


Figura No.5.1 Gráfica del estado  $x_1$  y la señal de referencia  $x_{ref}$

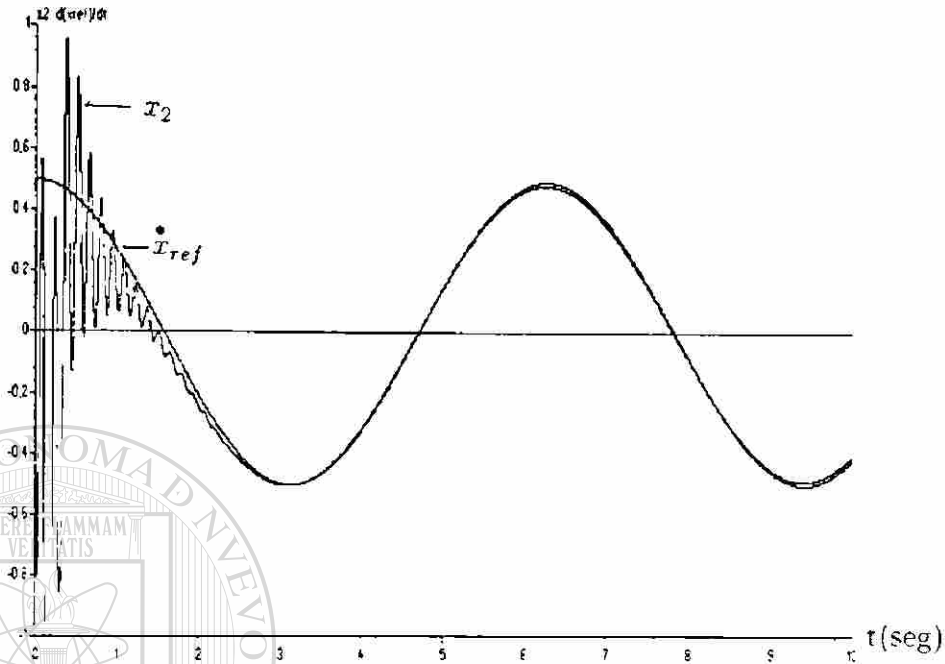


Figura No. 5.2 Gráfica del estado  $x_2$  y la señal  $d(x_{ref})/dt$

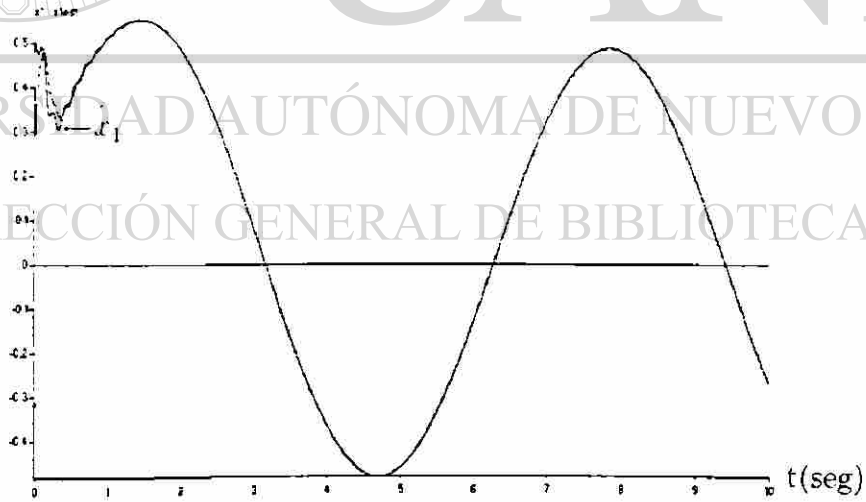


Figura 5.3 Gráfica del estado  $x_1$  y su estimado

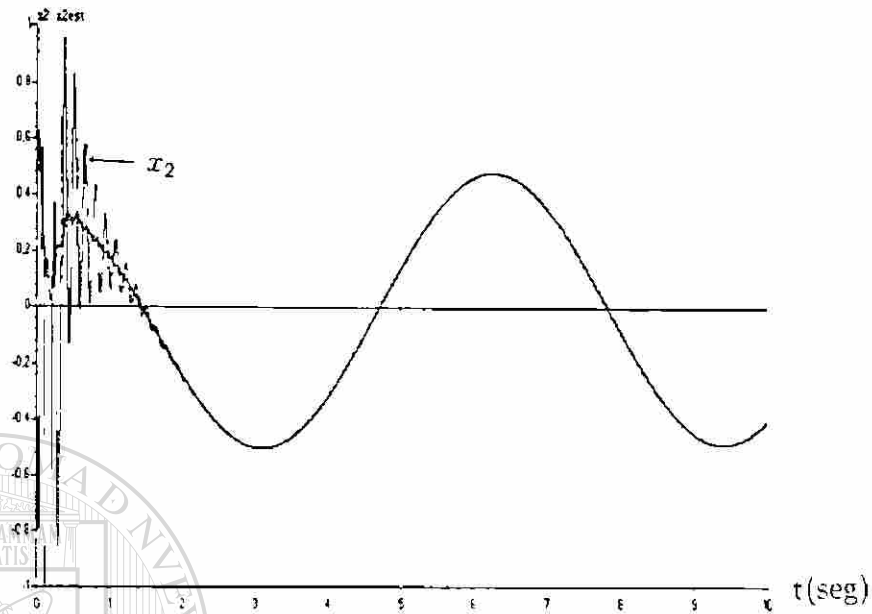


Figura No. 5.4 Gráfica del estado  $x_2$  y su estimado

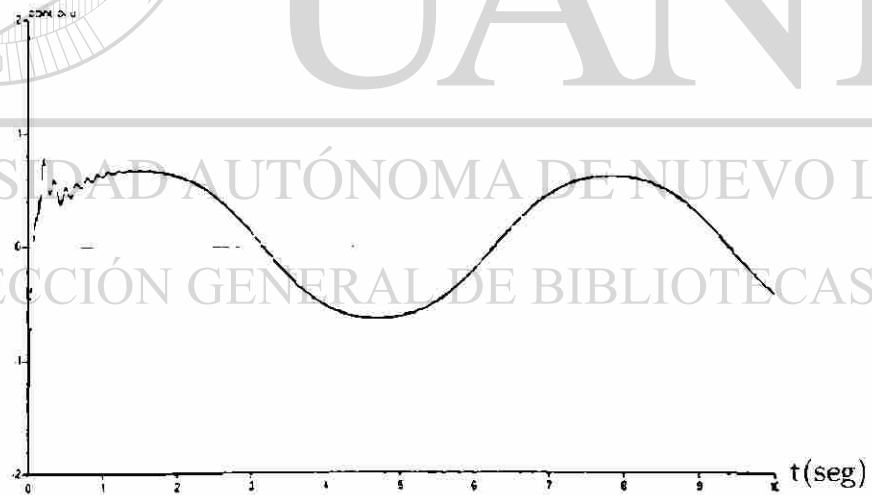
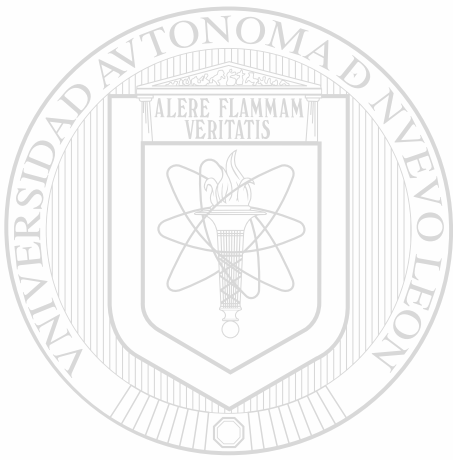


Figura 5.5 Gráfica del control  $u$

## 5.7 Conclusiones

Una estructura no-lineal de control-observador, basada en una clase de sistemas no-lineales singularmente perturbados, nos permitió descomponer el sistema original, en dos subsistemas de menor dimensión, ambos descritos en diferentes escalas de tiempo. esta técnica ha sido presentada y aplicada para el caso del modelo de un brazo robot de un simple eslabón, el cual tiene flexibilidad en la articulación. Un buen desempeño del seguimiento de la trayectoria se puede apreciar en este método para tales dispositivos mecánicos.



# UANL

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

# Capítulo 6

## Estudio Comparativo de las distintas técnicas de Control empleadas.

### 6.0.1 Introducción

En este capítulo presentaremos un estudio comparativo, mediante resultados de simulación, de las técnicas de control para la estabilización global de sistemas no-lineales con aplicación para el caso de robots manipuladores con flexibilidad en la articulación han sido desarrollado en capítulos anteriores.

Considerando el modelo del brazo robot manipulador dado por

$$\begin{aligned} I \ddot{q} + B_l \dot{q} + mgl \sin(q) &= k(q_m - q) \\ J \ddot{q}_m + B \dot{q}_m + k(q_m - q) &= u \end{aligned} \quad (6.1)$$

donde la primera ecuación de (6.1) representa la *dinámica del eslabón* y la segunda ecuación la *dinámica del motor*.

En este estudio se aplicarán las técnicas control para la estabilización y seguimiento de la trayectoria, las cuales se resumen en lo siguiente:

- *Método Geométrico Diferencial*

El diseño de un controlador para una clase de sistemas no-lineales feedback linealizante



mediante un observador de alta ganancia.

- *Método Algebraico Diferencial*

Un controlador dinámico linealizante por retroalimentación de estado, basando en las formas canónicas de observabilidad generalizada (FCOG) y de controlabilidad generalizada (FCCG) de Fliess. Este controlador está basado en la linealización del error de seguimiento, la estabilidad del sistema, así como el seguimiento de la trayectoria deseada para el manipulador con articulación flexible. La dinámica del error de seguimiento es estimada por un observador con el sistema en lazo cerrado.

- *Método basado en Perturbaciones Singulares*

Un controlador basado en un observador para una cierta clase de sistemas no-lineales Singularmente Perturbados fue diseñado. Condiciones suficientes para garantizar la estabilidad del esquema de control basado en estimadores de estado con el sistema en lazo cerrado fueron establecidas.

## 6.0.2 Comparación entre las técnicas de Control empleadas. Resultados en simulación

Ahora, mostramos una comparación entre los esquemas de estos controladores, implementados para el modelo de un robot de un simple eslabón, con articulación flexible.

Las simulaciones se efectuaron como sigue: se consideró a la señal de referencia deseada  $x_{ref} = \sin(t)$ , como la señal a seguir por la posición angular del motor  $x_1$ .

En cada una de las estrategias de control se seleccionaron los parámetros de diseño como sigue:

Para la ley de control basada en la teoría de perturbaciones singulares, así como las ganancias, fueron seleccionadas, como sigue:

$$s_1 = 20; s_2 = 25; l_s = 60; s_{f1} = 1; \quad s_{f2} = 10; l_f = 0.1.$$

El parámetro  $\theta$  en las ecuaciones del observador fue  $\theta = 20$ .

Las condiciones iniciales de las variables del robot, y los estimados, se seleccionaron como:

$$x_1(0) = 0, x_2(0) = 0, z_1(0) = 0, z_2(0) = 0, \hat{x}_1(0) = 0.2, \hat{x}_2(0) = 0.02, \hat{z}_1(0) = 0.002, \hat{z}_2(0) = 0.003.$$

Para la técnica basada en el enfoque geométrico diferencial, las condiciones iniciales del sistema, así como las del observador fueron las siguientes:

$$x_1(0) = 1, x_2(0) = 0.1, x_3(0) = 1, x_4(0) = 0.1, \\ \hat{x}_1(0) = 1, \hat{x}_2(0) = 0.3, \hat{x}_3(0) = 1, \hat{x}_4(0) = 1.$$

El parámetro  $\theta$  en las ecuaciones del observador, así como sus ganancias, fueron seleccionadas como:

$$\theta = 3, k_1 = 24, k_2 = 10, k_3 = 15, k_4 = 10.$$

Por otra parte las ganancias del controlador se seleccionaron como:  $a_1 = 16, a_2 = 32, a_3 = 24, a_4 = 8$ .

En las Figura 6.1 se muestran la posición angular del eslabón, usando todos los esquemas de control, y la señal de referencia deseada. La velocidad angular del eslabón, así como la derivada de la señal de referencia se muestran en la Figura 6.2. A partir de estas graficas, podemos observar, el buen desempeño para el seguimiento de la trayectoria de cada una de las metodologías propuestas. Sin embargo, podemos notar que el esquema de control basado en perturbaciones singulares presenta menos oscilaciones que los otros esquemas de control. Además, la acción de control esta dentro de los límites físicos.

Aunque el control basado en la técnica geométrica diferencial, su acción es aun menor que el basado en la técnica perturbaciones singulares, su desempeño no es muy adecuado. Más aún, el método basado en la técnica del algebra diferencial presentó una alta oscilación y una acción de control mas severa, estos son mostrados en la figura 6.3

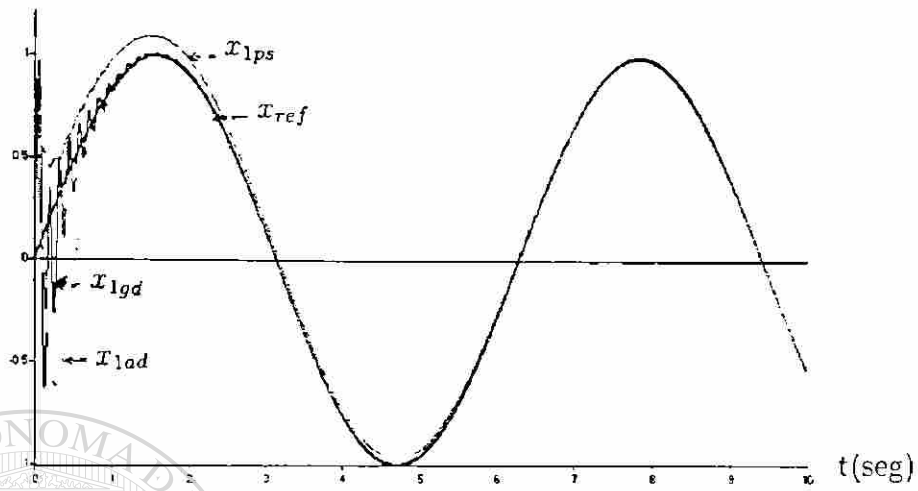


Figura 6.1 Gráfica del estado  $x_1$  y la señal de referencia  $x_{ref}$

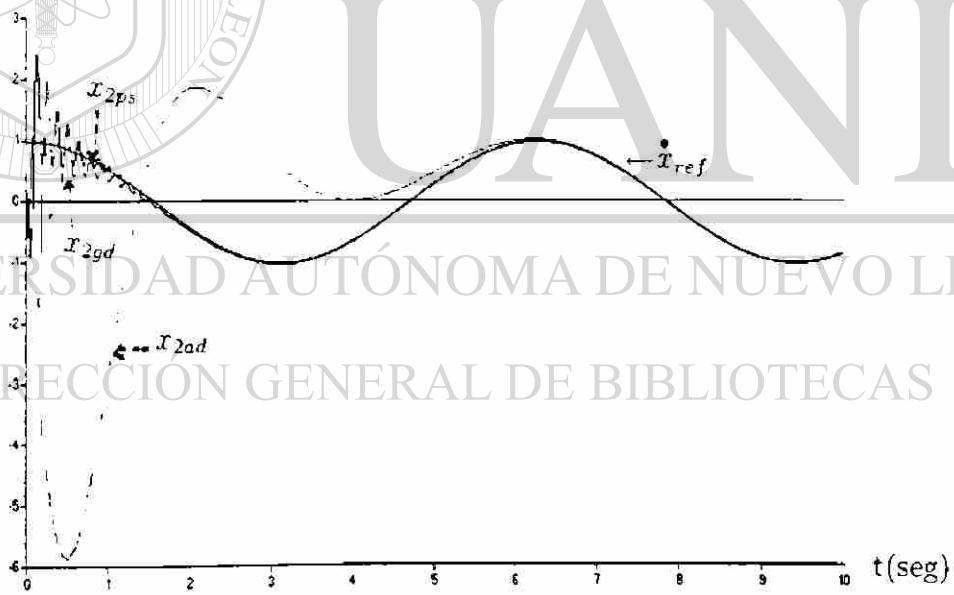


Figura 6.2 Gráfica del estado  $x_2$  y la señal de referencia  $x_{ref}$

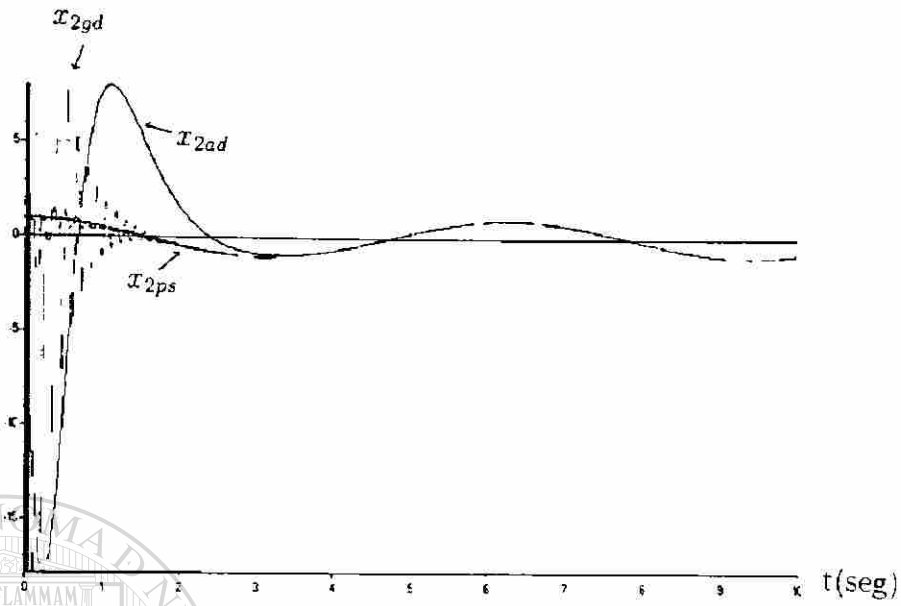


Figura 6.3 Gráficas del estado  $x_2$  y  $x_{ref}$

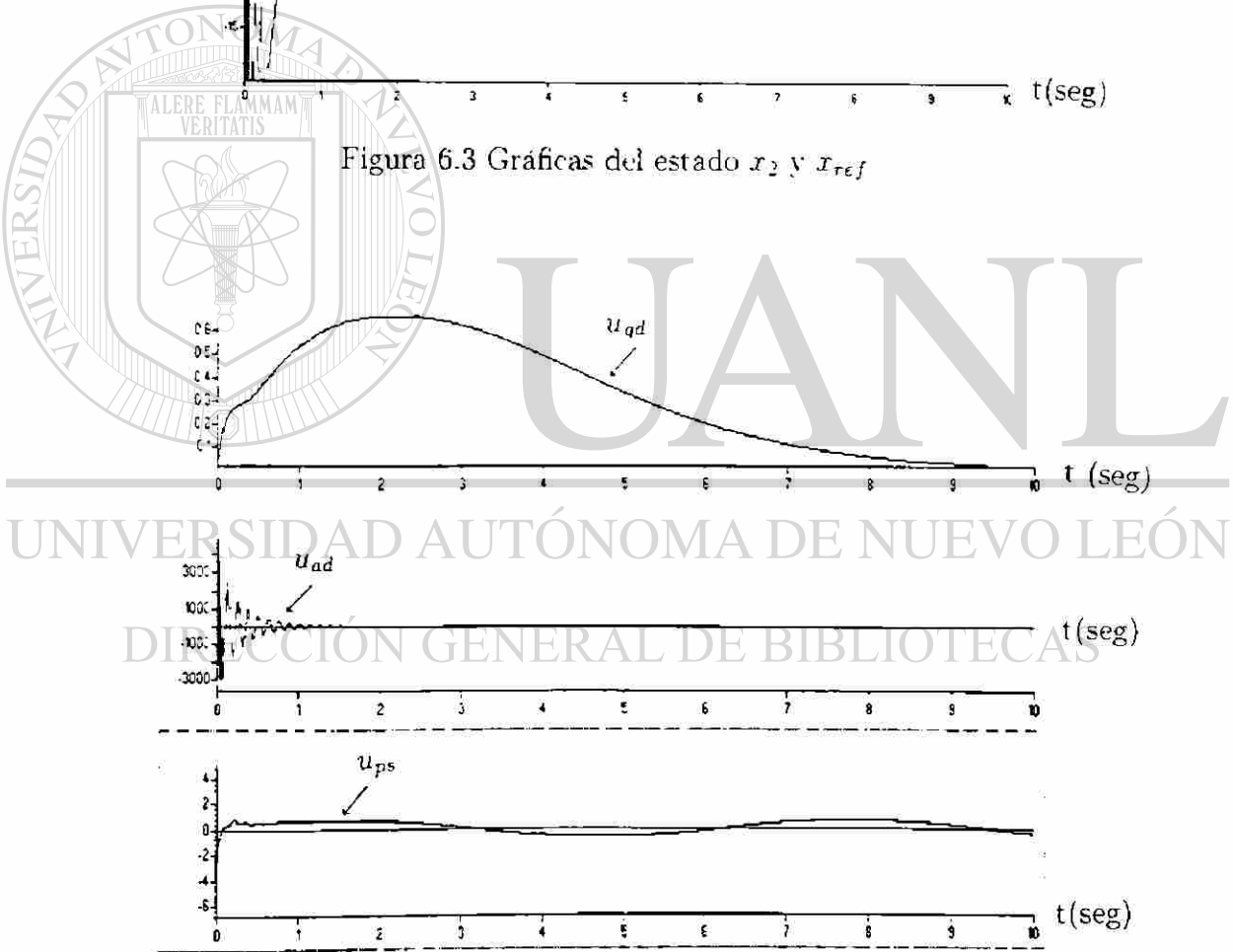


Figura 6.4 Gráfica de los controladores

## 6.1 Análisis ante perturbaciones o ruido

Un análisis de la técnicas de control desarrolladas, ante la presencia de perturbaciones fue implementada con una señal de ruido gaussiano  $f(t) = 0.05norm(t)$ , con media aritmética cero, desviación estandar 1, y magnitud de 5%, con respecto a la magnitud de la señal de salida. La figura 6.5 muestra el comportamiento del estado  $x_1, x_{ref}$  y la señal de ruido, mientras que la figura 6.6, nos muestra el comportamiento del estado  $x_2$ , y la señal de ruido, mediante la técnica del método *Geométrico Diferencial*. La figura 6.7 muestra el comportamiento del estado  $x_1, x_{ref}$ , y la señal de ruido, la figura 6.8, nos muestra el comportamiento del estado  $x_2$ , y la señal de ruido, mediante la técnica del método *Algebráico Diferencial*, y finalmente, Por otro lado, la figura 6.9 muestra el comportamiento del estado  $x_1, x_{ref}$ , y la señal de ruido, y finalmente la figura 6.10, nos muestra el comportamiento del estado  $x_2$ , y la señal de ruido, mediante la técnica de *Perturbaciones Singulares*.

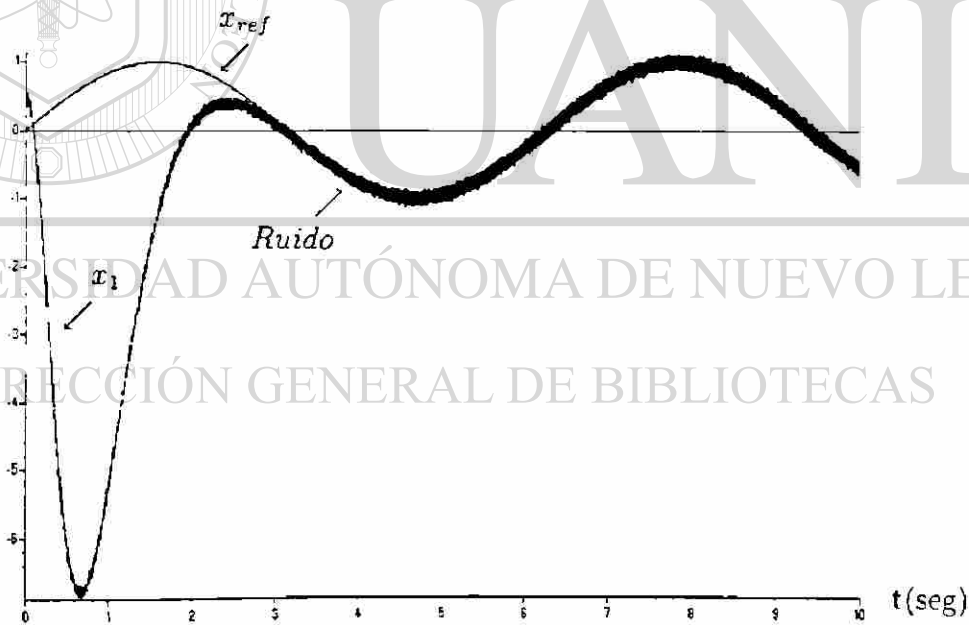


Figura 6.5 Estado  $x_1, x_{ref}$  y la señal de ruido

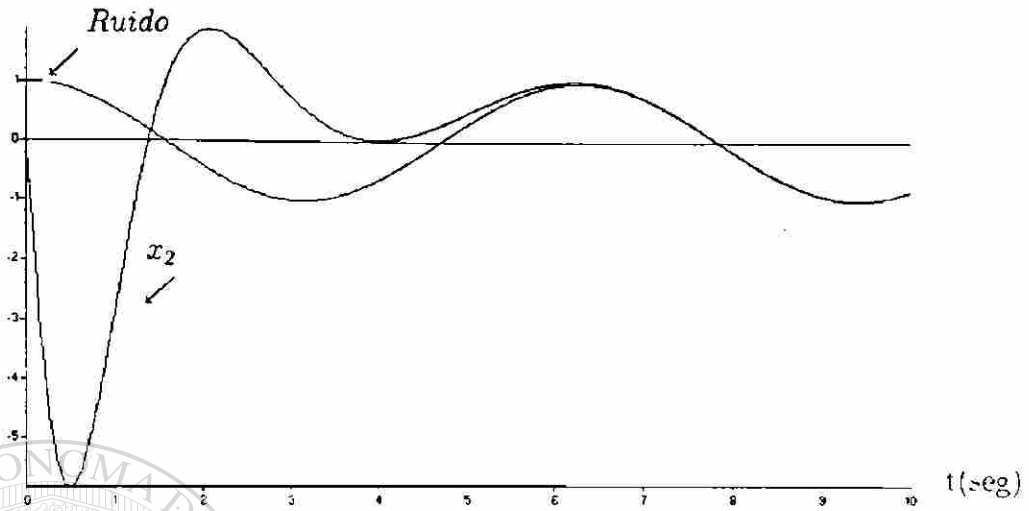


Figura 6.6 Estado  $x_2$  y la señal con ruido. Geométrico Diferencial

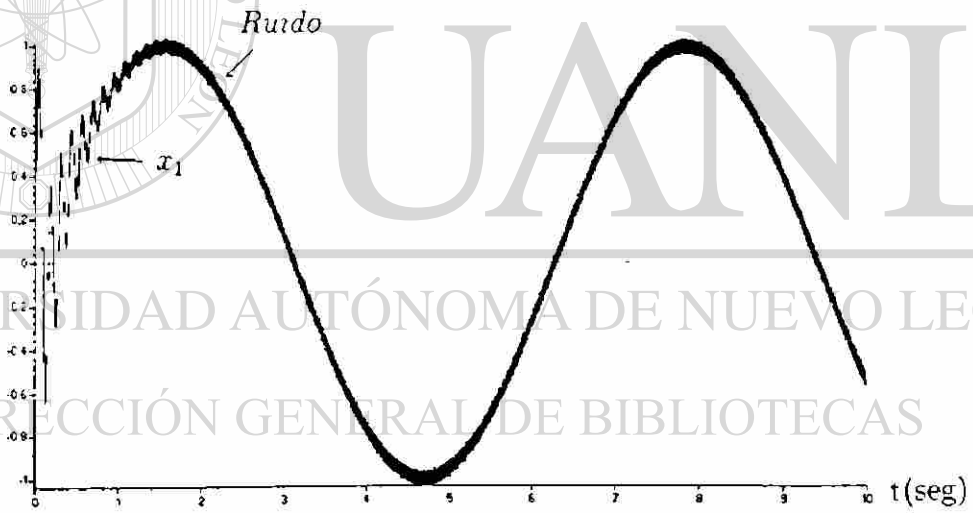


Figura 6.7 Estado  $x_1$  y la señal de ruido. Algebraico Diferencial

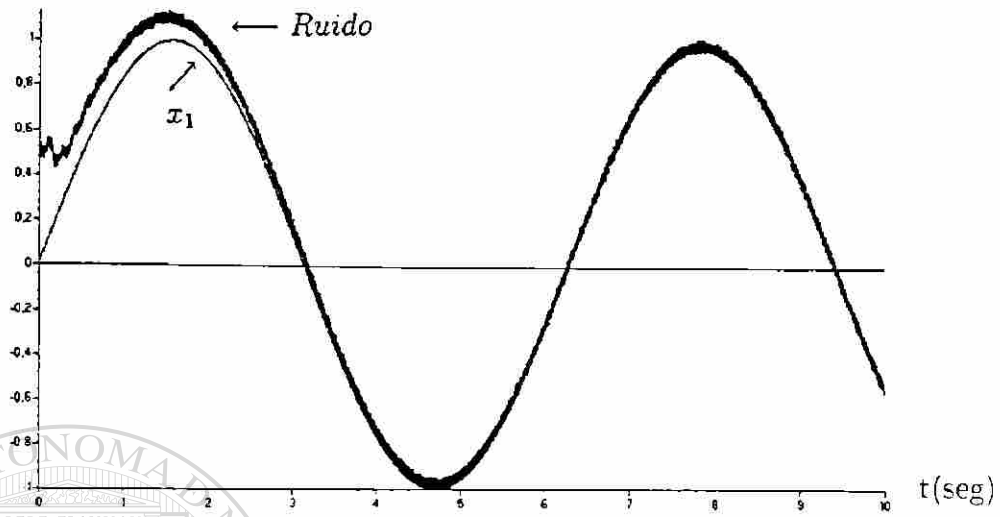


Figura 6.8 Estado  $x_1$  y la señal de ruido. Perturbaciones Singulares

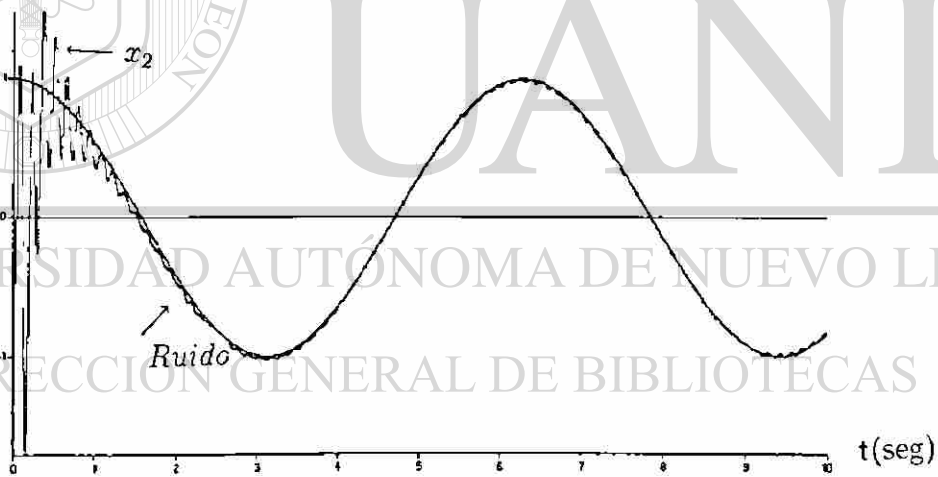


Figura 6.9 El estado  $x_1$  y la señal de ruido. Perturbaciones singulares

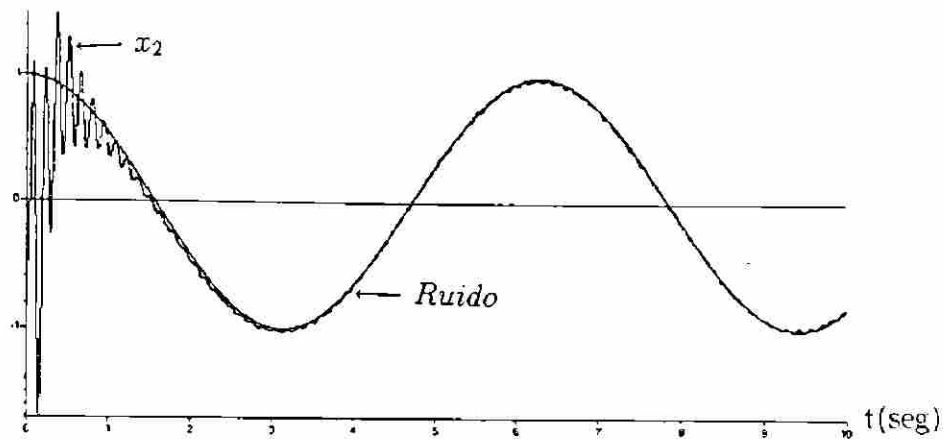


Figura 6.10 El estado  $x_2$  y la señal de ruido. Perturbaciones singulares



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



# Capítulo 7

## Conclusiones

En el presente trabajo de tesis se presentaron tres técnicas de control basadas en un observador, para la estabilidad y el seguimiento de la trayectoria de un brazo robot de un simple eslabón con articulación flexible.

En cada una de las estrategias de control estudiadas, se hizo uso de un observador no lineal para estimar la parte del vector de estado no medible, permitiendo implementar estas estrategias.

En todas las técnicas presentadas, un estudio de estabilidad del sistema en lazo cerrado fue presentado, es decir en cada uno de los casos, condiciones necesarias para garantizar la estabilidad del sistema en lazo cerrado fueron presentadas. Además, resultados en simulación fueron mostrados para ilustrar el desempeño de cada una de estas estrategias de control.

Un estudio comparativo de las técnicas estudiadas ha sido desarrollado para ilustrar el desempeño de estas, siendo la metodología basada en perturbaciones singulares la que mejor resultados mostró.

Por otra parte, extensión de estos resultados a el caso multivariable es un problema abierto, siendo actualmente tema de investigación. Así como las aplicaciones a modelos de robots con múltiples eslabones es también un tema de investigación. De hecho, aplicaciones a otro tipo de procesos puede ser realizada de manera similar.

En un análisis desarrollado en las tres técnicas de control para robots manipuladores con flexibilidad en la articulación, se sometió el sistema ante la presencia de ruido en la señal de salida (*perturbaciones en la salida*), obteniéndose los siguientes resultados:

1.-En cada una de las tres técnicas, se sigue conservando la convergencia del estado estimado, hacia la señal de referencia deseada.

2.-El método basado en la metodología Algebraico Diferencial, resulta demasiado lento en su respuesta

3.-La técnica basada en el enfoque Geométrico diferencial, resulta ser mejor comparado con el método Algebraico Diferencial, en cuanto a rapidez de convergencia.

4.- El método basado en la técnica de Perturbaciones Singulares, resultó ser el mejor en su respuesta de seguimiento de la trayectoria, ante la presencia de ruido en la señal de salida, presentando menos oscilaciones, con respecto a los otros dos métodos.

Por otra parte se efectuó un análisis, para determinar el desempeño del brazo robot manipulador con flexibilidad en la articulación, ante la presencia de incertidumbres paramétricas de la estructura del robot, teniendo como resultado lo siguiente:

El observador basado en la técnica de modos deslizantes, resultó ser el único que presenta mejor robustez, ante la presencia de incertidumbres paramétricas.

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

# Bibliografía

- [1] Alvarez-Leal, J.G., De León -Morales, J. y Martínez-Guerra, R., "*Control de Robots Manipuladores con Flexibilidad en la Articulación: Un Enfoque Algebraico Diferencial*". Academia Nacional de Investigación en Robótica, Torreón, Coahuila, México.. Sep. 1997
- [2] Alvarez, J.M. and G. Silva. " *Two time scale sliding mode control for a class of nonlinear system*". to appear in Int. J. of Robotics and Nonlinear Control
- [3] Bastin, G. and M. Gevers "*Stable Adaptive Observers for nonlinear time Varying Systems*". IEEE, Tran. Automatic Control, Vol 33, 1988, pp. 650-658.
- [4] Battilotti and Lanary 1995. "*Global set point control via link position measurement for flexible joint robot system* ", System and Control Letters, Vol. 25, pp 21-29
- [5] Bornard, G. N. Couenne and F. Celle, "*Regularly persistent observers for bilinear system*" Proc. of the Int. Conf. New Trends in Nonlinear system Theory, Lectures Notes In Contr. and Information Sciences, Vol. 122, Springer-Verlag, 1988
- [6] Bornard, G. and H. Hammouri. " *A high gain observer for a class of uniformly observable system* ". IEEE (CDC 91), Brighton, Great Britain.
- [7] Brogliato, B., R. Ortega, R Lozano. "*Global tracking controllers for flexible-joint manipulators: a comparative study* ". Automatica, Vol. 31, No. 7 , pp. 941-956, 1995.

- [8] Brogliato, B., Rey "Experimental compararison of nonlinear controlllers for flexible joint manipulator ", International Journal of Robotics Research Vol. No. 7, pp 260-281.
- [9] Busawon, K., 1993 "Sur les observateurs des systèmes nonlinéaires et le principe de separation ", Ph.D. Thesis. Université Claude Bernard Lyon I, Lyon France.
- [10] Busawon, K., M.Farza and H. Hammouri, "An observer for a special class of Non-linear Systems ", International Journal of Control, Vol.71, No.3, pp. 405-418, 1998
- [11] De Carlo, S. H. Zak and G. Matthe, "Variable Structure Control of nonlinear multivariable systems: A tutorial ", Proc. of the IEEE, 1998. Vol 76, No. 3. pp 212-233
- [12] De León-Morales, J. and Alvarez-Leal, J.G., "A Comparative Study of Speed and Position Control of a Flexible Joint Robot Manipulator" 1998 IEEE/RSJ International Conference. Victoria Conference Centre. Victoria. B.C., 1998. CANADA. Volume 1. pp 679-684
- [13] De León Morales, J., Alvarez Leal, J.G., and Martinez Guerra, R., "A Dynamical Linearizing Feedback Controller for Robots with Flexible Joint ", Proceedings of 1997 IEEE International Conference on Control Applications, Hartford, CT, U.S.A. pp. 306-311
- [14] De León-Morales, J., Alvarez-Leal, J.G., Castro-Linares, R. and Alvarez-Gallegos, J.M., "Speed and Position Control of a flexible Joint Robot Manipulator via a Nonlinear Control-Observer Scheme", Proceedings of 1997 IEEE International Conference on Control Applications, Hartford. CT, U.S.A. pp 312-317
- [15] Diop, S., Fliess. M. "On nonlinear observability", Proc. of the first European Control Conference. Commault et al, Grenoble 1991, Paris, Hermes, pp. 152-157.
- [16] Doolin, Brian F. and Clyde F. Martin. *Introduction to Differential Geometry for Engineers*. Marcel Dekker. Inc. New York. 1990.

- [17] Fliess, M. "Generalized controller canonical forms for linear and nonlinear dynamics". IEEE Trans. Automat. Control, Vol. AC-35 Sep 1990, pp 994-1001.
- [18] Fliess, M., "Nonlinear Control Theory and Differential algebra", in Modelling and Adaptive Control. C. Byrnes and A Kurszhanski Eds. lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol. 105 Springer-Verlag-Berlin, 1988,pp 134-145.
- [19] Fliess, M. "Quelques remarques sur les observateurs non lineaires", Proc. of the Coll. GRETSI Traitement Signal Images. Nice, 1987, pp. 169-172
- [20] Gauthier, J.P., H Hammouri and S. Othman. "A simple observer for nonlinear system . Application to bioreactors". IEEE Trans. Aut. Control, Vol.37. No. 6, pp. 875-880. 1992.
- [21] Jurdjevic. V. *Geometric Control Theory*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 51. 1997.
- [22] Kokotovic, P.V., H. K. Khalil, J., O'Reilly *Singular Perturbation Methods in control Analysis and Design*. Academic Press, London 1993
- [23] Marino, R. and M.W. Spong "Nonlinear control techniques for flexible joint manipulators: a single link case study", "Nonlinear control techniques for flexible joint manipulators: a single link case study", Proc. IEEE Conf. Robotics and Automation, San Francisco, (1986), pp.1030-1036
- [24] Martinez-Guerra, R. and De León -Morales, J. "Observers for a Multi-input Multi-output Bilinear System Class: A differentialy approach". J. of Math. and Computer Modelling, Vol 20, No. 12. 1994. pp. 125-132.
- [25] Martinez-Guerra, R. and De León -Morales, J. "Some results about nonlinear observers for a class of bilinear systems", American Control Conference, Seattle, Washington, 1995. pp. 1643-1644.

- [26] Nicosia, S., P. Tomei, A. Tornambe, "A Nonlinear Observer for Elastic Robots", Journal Robotics and Automation, Vol. 4, 1988 pp 45-52..
- [27] Nijmeijer, H. and A.J. Van der Schaft. *Nonlinear Dynamic Control Systems*. Springer Verlag New York . 1990.
- [28] Saberi, A. and Khalil, "Quadratic-Type Lyapunov Functions for singularly Perturbed Systems", IEEE Trans. Aut. Cont., Vol. AC-29, No.6 pp. 542-550, 1984.
- [29] Sira-Ramirez, H., "The differential Algebraic approach in nonlinear Dynamical Feedback controlled landing maneuvers", IEEE Trans. Automat. Control . Vol. 37, April, 1992. pp. 518-524.
- [30] Sira-Ramirez, H., S. Ahmad, M. Zribi. "Dynamical Feedback control of robotic manipulators with joint flexibility". IEEE Trans. On Systems, man and cybernetics. Vol 22. No. 4. July-August 1992. pp. 736-747.
- [31] Slotine, J.J. and S. Hong, "Two-Time scale sliding control of manipulators with flexible joints", Proc. of the 1986 American Control Conference, Seattle, Washington. pp. 805-810.
- [32] Spong, M. and M. Vidyasagar. *Robot Dynamics and Control*. John Wiley and Sons. 1989
- [33] Spong, M. "Control of flexible joint robots: a survey", Technical report, No. UIUL-ENG-90- 2203/DC-116, coordinated Science Laboratory, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1990.
- [34] Vidyasagar, M. . *Nonlinear Systems Analysis*. Prentice Hall, New Jersey. 2<sup>nd</sup> Edition. 1993.
- [35] Vidyasagar, M. . *New Directions of Research in Nonlinear System Theory*. Proceedings of the IEEE, Vol. 74. N°8. August 1986

# APENDICE A

## 0.1 Conceptos y definiciones

En este apéndice, se darán algunos conceptos y definiciones necesarias para la comprensión de este trabajo. Para comenzar, daremos algunas definiciones de base sobre la teoría de la observación de sistemas no lineales en tiempo continuo. A continuación, recordaremos algunos resultados sobre los observadores y su síntesis. Posteriormente, se presentarán algunas definiciones y resultados útiles referentes a la estabilidad y estabilización de sistemas, y finalmente se anexan algunos resultados presentados en este trabajo de investigación, que fueron aceptados y presentados en Congresos Internacionales.

Primero, consideremos los sistemas no lineales de la forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(u, x) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (0.1)$$

donde el estado  $x \in M$ , una variedad analítica ( $C^\infty$ ); la entrada  $u \in U \subset \mathbb{R}^m$ ; la salida  $y \in \mathbb{R}^p$ . Para toda  $u \in U$ ,  $f_u(x) = f(u, \cdot)$  denota el campo vectorial  $C^\infty$  sobre  $M$  y la función  $h = (h_1, \dots, h_p)$  es también  $C^\infty$ .

Designaremos por  $x_u(t, x_0)$  la solución de (2.1) a partir de la condición inicial  $x_u(0, x_0) = x_0$ .

## 0.2 Observabilidad de sistemas no lineales

La noción de observabilidad puede ser formulada de varias maneras en el contexto no lineal. En este trabajo adoptaremos la formulación dada por Hermann Krener que se

establece a partir de la noción de distinguibilidad de estados.

**Definición 0.1** (*Distinguibilidad-Indistinguibilidad*): Dos estados iniciales  $x_0 \in M$ ,  $x_1 \in M$ ,  $x_0 \neq x_1$ , son indistinguibles si para todo  $t \geq 0$  y para toda entrada admisible  $u : [0, t] \rightarrow U$  las trayectorias correspondientes de (0.1) que resultan de  $x_0$ ,  $x_1$  son tales que  $h(x_u(t, x_0)) = h(x_u(t, x_1))$ . Recíprocamente, decimos que dos estados iniciales  $x_0 \in M$ ,  $x_1 \in M$ ,  $x_0 \neq x_1$ , son distinguibles si existe  $t \geq 0$  y una entrada admisible  $u : [0, t] \rightarrow U$  tales que  $h(x_u(t, x_0)) \neq h(x_u(t, x_1))$ .

**Definición 0.2** (*Observabilidad*): Un sistema es observable en  $x_0 \in M$  si para otro estado  $x_1 \neq x_0$  es distinguible de  $x_0$ . Un sistema es observable si es observable en todo  $x_0 \in M$ .

Para los sistemas lineales, la observabilidad esta caracterizada por la famosa condición de rango:

**Teorema 0.3:** El sistema lineal estacionario :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad x \in R^n, u \in R^m, y \in R^p \quad (0.2)$$

es observable si y sólo si la matriz  $[C^T \ A^T C^T \ \dots \ A^{n-1} C^T]^T$  es de rango pleno.

La distinguibilidad es un concepto global. Sucede frecuentemente que para generar dos trayectorias a partir de  $x_0$  y de  $x_1$ , se tiene uno que alejar lo suficientemente de  $x_0$  y  $x_1$ .

Las dos definiciones que siguen son de naturaleza local.

**Definición 0.4** (*Observabilidad local*): Se dice que el sistema (0.1) es localmente observable en  $x_0$  si para toda vecindad abierta  $V_{x_0}$  de  $x_0$  el conjunto de puntos que son



indistinguibles de  $x_0$  en  $V_{x_0}$  vía las trayectorias en  $V_{x_0}$  es el punto  $x_0$  el mismo.

Cuando se trata de distinguir  $x_0$  de sus vecinos, podemos avistar la condición de observabilidad local. Desde este punto de vista, se tiene:

**Definición 0.5 (Observabilidad local débil):** Se dice que el sistema (0.1) es **localmente débil observable** en  $x_0$  si existe una vecindad abierta  $V_{x_0}$  de  $x_0$  tal que para toda vecindad abierta  $V'_{x_0} \subset V_{x_0}$ , el conjunto de puntos que son indistinguibles de  $x_0$  en  $V'_{x_0}$  vía las trayectorias en  $V'_{x_0}$  es el punto  $x_0$  el mismo.

De manera general, un sistema es localmente debilmente observable si todo estado  $x_0$  puede ser instantáneamente distinguido de sus vecinos al utilizar las trayectorias que permanecen en una vecindad de  $x_0$ .

La propiedad de observabilidad local debil es importante, puesto que ella puede ser verificada por medio de una simple condición algebraica como en el caso lineal. Por lo anterior, nos lleva a definir el espacio de observación.

**Definición 0.6 (Espacio de observación):** Se llama **espacio de observación**  $\mathcal{O}$  el más pequeño subespacio vectorial de funciones reales de  $M$  que contiene  $h_1, \dots, h_p$ , y que sea cerrado por la derivación de Lie con respecto a todos los campos vectoriales del tipo  $f_u$ ,  $u \in U$ , fijo.

**Teorema 0.7:** Sea  $d\mathcal{O}$  el espacio de diferenciales de los elementos de  $\mathcal{O}$ . Designemos por  $d\mathcal{O}(x_0)$  la evaluación de  $d\mathcal{O}$  en  $x_0$ . Si:

$$\dim d\mathcal{O}(x_0) = n \quad (0.3)$$

entonces el sistema es localmente debilmente observable en  $x_0$ .

La condición (0.3) se llama condición de rango. Si la condición (0.3) se verifica para todo  $x_0 \in M$ , se dice entonces que el sistema (2.1) es observable en el sentido del rango.

El teorema anterior da una condición suficiente de observabilidad local débil. El siguiente teorema da una condición necesaria:

**Teorema 0.8:** *Supongamos que el sistema (0.1) es localmente débilmente observable. Entonces la condición (0.3) se cumple casi en todas partes en  $M$ , es decir,  $\dim d\mathcal{O}(x) = n$  en todo punto  $x$  que pertenece a un abierto denso  $M'$  en  $M$ .*

### 0.3 Entradas universales

Notemos que la definición de observabilidad dada anteriormente, no implica que toda función de entrada distinga parejas de punto de  $M$ . En la práctica, desearíamos centrarnos en el caso donde la entrada  $u$  que siendo fija, toda pareja de estados distintos den lugar a salidas diferentes. En efecto, este no es el caso en que se pueda reconocer el estado inicial del sistema a partir de la información anterior sobre la entrada y la salida. Esto no lleva a la noción de entrada universal.

**Definición 0.9 (Entrada universal):** *Una entrada admisible  $u : [0, T] \rightarrow U$  es universal para el sistema (2.1) sobre  $[0, T]$  si, para toda pareja de estados diferentes distintos  $x_0$  y  $x_1$ , se tiene  $h(x_u(t, x_0)) \neq h(x_u(t, x_1))$  en al menos en un tiempo  $t \in [0, T]$ . Una entrada universal sobre  $R^+$  es universal.*

**Definición 0.10 (Entrada singular):** *Una entrada no universal es una entrada singular.*

El problema de la existencia de entradas universales ha sido estudiado por varios autores (Sontag, Sussmann). Ellos han demostrado que el conjunto de entradas universales es

denso en el espacio de entradas admisibles con una topología conveniente para los sistemas localmente débilmente observables.

## 0.4 Los sistemas uniformemente observables

Consideremos el sistema (0.1). En general, existen entradas singulares  $u$  tales que el sistema autónomo asociado:

$$\begin{cases} \dot{x} = f_u(x) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (0.4)$$

no sea observable.

La noción de entrada universal permite definir una clase interesante de sistemas: los sistemas uniformemente observables.

**Definición 0.11** (*Sistemas uniformemente observables localmente uniformemente observables*): Un sistema en el cual todas las entradas son universales se llama uniformemente observable, o simplemente, observable para toda entrada. Un sistema es localmente uniformemente observable si y solo si para todo punto  $x \in M$  existe una vecindad  $V_x$  de  $x$  tal que el sistema permanecerá en esta vecindad es uniformemente observable.

Los sistemas lineales observables son uniformemente observables.

El problema de la caracterización de estos sistemas en el caso mono-salida ha sido abordado por Williamson (williamson) para los sistemas bilineales y por Gauthier et Bornard (Gauthier-Bornard) para los sistemas afines en el control. estos resultados se resumen en los dos teoremas siguientes:

**Teorema 0.12** : *Consideremos el sistema bilineal:*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + uBx + Fu \\ y = Cx \end{cases} \quad (0.5)$$

donde  $x \in R^n$ ,  $u \in R^m$ ,  $y \in R$ ;  $A$ ,  $B$ ,  $F$ ,  $C$  son matrices de dimensiones apropiadas.

Una condición necesaria y suficiente para que el sistema (0.5) sea uniformemente observable es que pueda transformarse por un cambio de coordenadas  $z = Tx$ , en:

$$\begin{cases} \dot{z} = \bar{A}z + u\bar{B}z + \bar{F}u \\ y = \bar{C}z \end{cases} \quad (0.6)$$

donde:

$$\bar{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_1 & \dots & \dots & a_n \end{pmatrix}, \bar{B} = TBT^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{b}_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{b}_{n1} & \dots & \bar{b}_{nn} \end{pmatrix}, \bar{C} = CT^{-1} = [1, 0, \dots, 0].$$

**Teorema 0.13 :** Consideremos el sistema afín en el control:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i \\ y = h(x) \end{cases} \quad (0.7) \quad x \in R^n, u \in R^m, y \in R.$$

### DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Una condición necesaria y suficiente para que el sistema (0.7) sea localmente uniformemente observable es que exista un sistema de coordenadas locales sobre  $R^n$  tal que (0.7) sea casi por todos lados localmente de la forma:

$$\begin{cases} \dot{z} = \bar{A}z + \varphi(z) + \sum_{i=1}^m \bar{g}_i(z)u_i \\ y = \bar{C}z \end{cases} \quad (0.8)$$

$$\text{donde } \bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}, \varphi(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi_n(z) \end{pmatrix}, \bar{C} = [1.0.\dots.0]$$

y  $\bar{g}_{i,j}(z) = \bar{g}_j(z_1, \dots, z_j)$  para  $j = 1, \dots, n; i = 1, \dots, m$ .

La caracterización de estos sistemas en el caso multivariable es todavía un problema abierto.

## 0.5 Observadores

Un observador o reconstructor de estado es un sistema dinámico que permite obtener una estimación del valor instantáneo del estado no medible de un sistema a partir de informaciones anteriores de las entradas del sistema original.

**Definición 0.14 (Observador):** Sea el sistema dinámico:

$$(\Sigma) \begin{cases} \dot{x} = f(u, x) \\ y = h(x) \end{cases}$$

Se llama *observador* de  $(\Sigma)$  un sistema dinámico auxiliar  $(O)$  cuyas entradas están constituidas por las entradas y las salidas del sistema  $(\Sigma)$  y cuyo vector de salida  $\hat{x}$  es el estado estimado :

$$(O) \begin{cases} \dot{z} = \bar{f}(u, y, z) \\ \hat{x} = \bar{h}(u, y, z) \end{cases}$$

tal que  $\|e(t)\| = \|\hat{x}(t) - x(t)\| \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

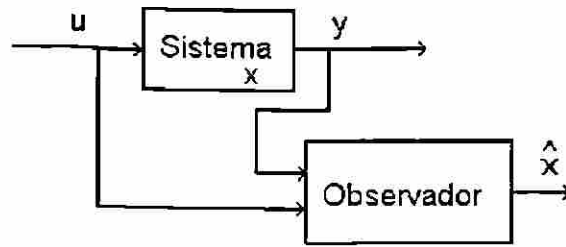


Figura 0-1: Esquema del observador

Cuando  $\|e(t)\|$  tiende exponencialmente hacia cero cuando  $t \rightarrow \infty$ , se dice que el observador es exponencial. El esquema de un observador se muestra en la figura siguiente:

### 0.5.1 Síntesis de observadores

El estudio de la propiedad de observabilidad constituye una primera etapa en la construcción de un observador. En efecto, para garantizar el buen funcionamiento de un observador es necesario que el sistema permanezca "suficientemente observable" bajo todas las entradas aplicadas.

Es entonces evidente que uno de los obstáculos para la construcción de observadores es la presencia de entradas singulares. Este obstáculo no existe en los sistemas lineales estacionarios observables, puesto que estos sistemas no tiene entradas singulares. El observador más común para estos sistemas es el de Luenberger (Luenberger).

- **Sistemas lineales estacionarios**

Sea el sistema lineal observable:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (0.9)$$

donde  $x \in R^n$ ,  $u \in R^m$ ,  $y \in R^p$  y las matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  son de dimensiones apropiadas.

El sistema gobernado por:

$$\dot{x} = Ax + Bu - K(Cx - y) \quad (0.10)$$

donde la matriz  $K$  es seleccionada tal que los valores propios de  $A - KC$  tienen parte real negativa, es un observador exponencial para el sistema (0.9).

#### • Sistema lineal variante en el tiempo

Para los sistemas lineales con parámetros variantes en el tiempo, existe el observador de Kalman bajo la hipótesis de la observabilidad completa uniforme:

**Definición 0.15** (*Observabilidad completa uniforme*): El sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) \\ y(t) = C(t)x(t) \end{cases} \quad x \in R^n, u \in R^m, y \in R^p \quad (0.11)$$

es completamente uniformemente observable si existe  $T > 0$ ,  $\alpha > 0$  y  $t_0 > 0$  tales que,

para toda  $t \geq t_0$ , se tiene:

$$G(t, t+T) = \int_t^{t+T} o^T(\tau, t) C(\tau)^T C(\tau) o(\tau, t) d\tau > \alpha I$$

donde  $I$  es la matriz identidad y  $o(\tau, t)$  es la matriz de transición de la parte autónoma de (0.11) definida por:

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau} o(\tau, t) = A(\tau) o(\tau, t) \\ o(t, t) = I \end{cases}$$

Es bien conocida la versión determinista del filtro de Kalman-Bucy (kalman-busy) que proporciona un observador no inicializado para los sistemas lineales variantes en el tiempo completamente observables. En efecto, se ha demostrado que si  $A(t)$  y  $C(t)$  son acotados y si el sistema (0.11) es uniformemente completamente observable, entonces el sistema:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) - S(t)^{-1}C(t)^TQ(C(t)\hat{x}(t) - y(t)) \\ \dot{S}(t) = -\theta S(t) - A(t)^T S(t) - S(t)A(t) + C(t)^TQC(t) \\ S(0) = S_0 \end{cases} \quad (0.12)$$

donde  $\theta > 0$  y  $S_0, Q$  que son matrices definidas positivas, es un observador exponencial para (0.11).

#### • Sistema afín en el estado

El resultado anterior puede ser extendido a los sistemas afines en el estado:

$$\begin{cases} \dot{x} = A(u)x + B(u) \\ y = C(u)x \end{cases} \quad x \in R^n, u \in R^m, y \in R^p \quad (0.13)$$

Se puede apreciar que toda función  $u$  fija genera un sistema lineal con parámetros variantes en el tiempo. Por consecuencia, se puede definir el Gramiano de observabilidad para estos sistemas, para  $u$  fija como sigue:

$$G(u, t, t+T) = \int_t^{t+T} o_u^T(\tau, t) C^T(u(\tau)) C(u(\tau)) o_u(\tau, t) d\tau$$

donde  $o_u(\tau, t)$  es la matriz de transición definida por:

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau} o_u(\tau, t) = A(u(\tau)) o_u(\tau, t) \\ o_u(t, t) = I \end{cases}$$

El sistema (0.13) puede tener varias entradas singulares. En (hamouri-De León) se de-



muestra que las entradas universales no son suficientes para hacer funcionar un observador para los sistemas que poseen entradas singulares. Esto proviene del hecho que una entrada universal trasladada en el tiempo no puede ser universal. Es por esto que la noción de entradas persistentes ha sido introducida para garantizar el funcionamiento del observador, sobre todo en presencia de ruido o de perturbaciones. Ahora introduciremos la noción de entrada persistente.

**Definición 0.16** (*Entrada regularmente persistente*): Una función de entrada  $u$  es regularmente persistente para el sistema (0.13) si existe  $T > 0$ ,  $\alpha > 0$  y  $t_0 > 0$  tales que el valor propio más pequeño de la matriz  $G(u, t, t - T)$  es superior a  $\alpha$  por  $t \geq t_0$ .

El siguiente teorema permite garantizar la construcción de un observador tipo Kalman extendido para los sistemas afines en el estado.

**Teorema 0.17 :** *Toda entrada regularmente persistente aplicada a un sistema afín al estado (0.13) genera un sistema lineal con parámetros variantes en el tiempo completamente uniformemente observable.*

Por consecuencia, se obtiene el siguiente resultado: consideremos el sistema (0.13) con matrices  $A(u)$ ,  $B(u)$  y  $C(u)$  uniformemente acotadas sobre el dominio de las entradas

admisibles. Entonces, para toda entrada regularmente persistente para (0.13), el sistema

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A(u)\hat{x} + B(u) - S^{-1}C(u)^T Q(C(u)\hat{x} - y) \\ \dot{S} = -\theta S - A(u)^T S - SA(u) + C(u)^T Q C(u) \\ S(0) = S_0 \end{cases} \quad (0.14)$$

con  $\theta > 0$  y  $S_0, Q$  matrices definidas positivas, es un observador exponencial para el sistema (0.13).

## 0.6 Estabilidad y estabilización

### 0.6.1 Estabilidad

El problema de estabilidad de un sistema corresponde al comportamiento de la trayectoria de este cuando su estado inicial está próximo del punto de equilibrio. Esta idea es intuitiva y resulta muy compleja para los sistemas no lineales. Por consecuencia una larga lista de definiciones han sido propuestos. El objetivo de la teoría de la estabilidad es de poder obtener conclusiones sobre el comportamiento de un sistema sin tener que calcular su solución. Aquí presentaremos algunas definiciones que son las más utilizadas en la literatura principalmente sobre la estabilidad en el sentido de Lyapunov, la estabilidad asintótica y la estabilidad asintótica uniforme.

Consideremos el sistema:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) \quad (0.15)$$

donde  $x \in R^n$  y  $f : R^n \times R^+ \rightarrow R^n$  es continua. Supongase también que la ecuación (0.15) posee una solución única que corresponde a cada condición inicial.

Esto es en el caso en que  $f$  es globalmente Lipschitz. Designemos por  $x(t, x_0, t_0)$  la solución al instante  $t$  de (0.15) surgida de la condición inicial  $x(t_0, x_0, t_0) = x_0$ .

Recordemos que un estado  $x_e \in R^n$  es un punto de equilibrio para el sistema (0.15) si:  $f(x_e, t) = 0, \forall t \geq 0$ . Asumiendo que  $x_e$  es un punto de equilibrio de (0.15).

**Definición 0.18** (*Estabilidad en el sentido de Lyapunov*): El punto de equilibrio  $x_e$  de (0.15) es estable o estable en el sentido de Lyapunov sí, para todo  $\varepsilon > 0$  y para todo  $t_0 \in R^+$ , existe  $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$  tal que:  $\|x_0 - x_e\| < \delta \Rightarrow \|x(t, x_0, t_0) - x_e\| < \varepsilon$  para todo  $t \geq t_0$ .

Puesto que todas las normas son sobre  $R^n$  son topologicamente equivalentes.

Cuando  $\delta$  depende solamente de  $\varepsilon$ . se habla de estabilidad uniforme:

**Définición 0.19** (*Estabilidad uniforme*): El punto de equilibrio  $x_e$  de (2.15) es uniformemente estable si para todo  $\varepsilon > 0$ . existe  $\delta(\varepsilon) > 0$  tal que  $\|x_0 - x_e\| < \delta$ .  $\forall t_0 > 0$   
 $\Rightarrow \|x(t, x_0, t_0) - x_e\| < \varepsilon$ .  $\forall t \geq t_0$ .

Para los sistemas autónomos  $\dot{x}(t) = f(x(t))$ . no hay distinción entre estabilidad y estabilidad uniforme.

El punto de equilibrio  $x_e$  es inestable si  $x_e$  no es estable.

La definición precedente no garantiza que las soluciones convergen hacia el punto de equilibrio. Definimos entonces la noción de atractividad de un punto de equilibrio y de estabilidad asintótica:

**Définición 0.20** (*Atractividad*): El punto de equilibrio  $x_e$  de (2.15) es atractivo si. para todo  $t_0 \in R^+$ . existe  $\eta(t_0) > 0$  tal que :  $\|x_0 - x_e\| < \eta(t_0) \Rightarrow \|x(t_0 + t, x_0, t_0)\| \rightarrow x_e$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Notemos que las soluciones inicializadas en estados diferentes en  $B_{\eta(t_0)} = \{x: \|x - x_e\| < \eta(t_0)\}$  pueden aproximarse a  $x_e$  a velocidades diferentes.

La siguiente definición garantiza una convergencia uniforme hacia  $x_e$ .

**Définición 0.21** (*Atractividad uniforme*): El punto de equilibrio  $x_e$  es uniformemente atractivo si existe  $\eta > 0$  tal que:  $\|x_0 - x_e\| < \eta$ .  $\forall t_0 \geq 0 \Rightarrow \|x(t_0 + t, x_0, t_0)\| \rightarrow x_e$  cuando  $t \rightarrow \infty$  uniformemente en  $x_0, t_0$ .

*De manera equivalente: El punto de  $x_e$  es uniformemente atractivo si  $\forall \varepsilon > 0$  existe un tiempo  $T(\varepsilon)$  tal que :  $\|x_0 - x_e\| < \eta, \forall t_0 \geq 0 \Rightarrow \|x(t_0 + t, x_0, t_0) - x_e\| < \varepsilon, \forall t \geq T(\varepsilon)$ .*

**Definición 0.22** *(Estabilidad aintótica y uniformemente asintótica): El punto de equilibrio  $x_e$  de (2.15) es asintóticamente estable si es estable y atractivo. Es uniformemente asintóticamente estable si es uniformemente estable y uniformemente atractivo.*

Notemos que la atractividad y la estabilidad son dos propiedades independientes, es decir un punto de equilibrio puede ser atractivo sin ser estable. Sin embargo, no está todavía establecido si es posible para un punto de equilibrio ser uniformemente atractivo al ser inestable.

Los conceptos de estabilidad introducidos anteriormente son de naturaleza local en el sentido donde ellos describen el comportamiento de las trayectorias inicializadas próximas al punto de equilibrio. La definición que sigue describe el comportamiento global de las trayectorias.

**Definición 0.23** *(Estabilidad asintótica global): El punto de equilibrio  $x_e$  de (0.15) es globalmente asintóticamente estable si este es uniformemente estable, y sí para un número par de números positivos  $M, \varepsilon$  con  $M$  arbitrariamente grande y  $\varepsilon$  arbitrariamente pequeño, existe un tiempo finito  $T(M, \varepsilon)$  tal que :  $\|x_0 - x_e\| < M, \forall t_0 \geq 0 \Rightarrow \|x(t_0 + t, x_0, t_0) - x_e\| < \varepsilon, \forall t \geq T(M, \varepsilon)$ .*

Dentro de la práctica del estudio de la estabilidad se hace uso del segundo método de Lyapunov (ó método directo). Este consiste en definir una función de Lyapunov con las características apropiadas donde la existencia implica el tipo de estabilidad deseado. Notemos también, que podemos considerar que,  $x_e = 0$ , dado que siempre podemos realizar un cambio de variable, tal que nosotros caemos siempre en este caso. Para lo siguiente supongamos que es efectivamente el caso.

**Definición 0.23a** (*Estabilidad finalmente uniformemente acotada*): Una solución  $x(t) : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  del sistema  $\dot{x} = f(x)$  con condición inicial  $x(t_0) = x_0$  es llamada finalmente uniformemente acotada (uniformly ultimately bounded) con respecto a un conjunto  $S$ , si existe una constante no negativa  $T(x_0, S)$  tal que :

$$x(t) \in S \text{ para toda } t \geq t_0 + T \quad (0.16)$$

Finalmente uniformemente acotada quiere decir que la trayectoria solución del sistema  $\dot{x} = f(x)$  comienza en  $x_0$  en un tiempo  $t_0$  y deberá finalmente entrar y permanecer dentro del conjunto  $S$ .

**Definición 0.24** (*Función de Lyapunov*): De manera general, se llama función de Lyapunov para el sistema (0.15) una función real  $V(x, t)$  que posee las siguientes propiedades:

- i)  $V(x, t)$  es de clase  $C^1$  tal que  $V(0, t) = 0$ ;
- ii)  $V(x, t)$  es definida positiva, i.e. existe una función real continua no decreciente  $\alpha$  tal que  $\alpha(0) = 0$  y  $0 < \alpha(\|x\|) \leq V(x, t)$ ,  $\forall t, \forall x \neq 0$  con  $\alpha(\|x\|) \rightarrow \infty$  cuando  $\|x\| \rightarrow \infty$ .
- iii) Existe una función real  $\gamma$  tal que  $\gamma(0) = 0$  y la derivada  $\dot{V}$  de  $V$  siguiendo las trayectorias de (0.15) es tal que:  $\dot{V}(x, t) \leq -\gamma(\|x\|) < 0$ ,  $\forall t, \forall x \neq 0$ .

iv) Existe una función real continua, no decreciente  $\beta$  tal que  $\beta(0) = 0$  y

$$V(x, t) \leq \beta(\|x\|), \forall t.$$

## DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

El siguiente teorema de Lyapunov muestra la existencia de tal función  $V$  es una condición necesaria y suficiente para la estabilidad asintótica uniforme.

**Teorema 0.25:** El origen del sistema (0.15), es un punto de equilibrio uniformemente asintóticamente estable si y solo si (0.15) admite una función de Lyapunov  $V$ .

Las propiedades requeridas de  $V$  pueden ser suavizadas según el tipo de estabilidad de-

seada. Entonces se tiene el siguiente corolario:

**Corolario 0.26:** *El origen del sistema (0.15), es un punto*

*a) Estable si y solo si (0.15) admite una función de Lyapunov  $V$  que satisface las condiciones i), ii) y ii\*) :  $\dot{V}(x, t) \leq 0$  para todo  $x$  y  $t$ .*

*b) uniformemente estable si y solo si (0.15) admite una función de Lyapunov  $V$  que satisface las condiciones i), ii) iv) y ii\*).*

**Corolario 0.27:** *Para un sistema dinámico continuo autónomo:*

$$\dot{x} = f(x) : f(0) = 0 \quad (0.17)$$

*la estabilidad asintótica está asegurada para la existencia de una función real  $V(x)$  de clase  $C^1$ , tal que  $V(0) = 0$  y*

- $V(x) > 0$  para todo  $x \neq 0$
- $\dot{V}(x) < 0$  para todo  $x \neq 0$
- $V(x) \rightarrow \infty$  cuando  $\|x\| \rightarrow \infty$ .

En el caso de sistemas lineales  $\dot{x} = Ax$ , la estabilidad asintótica esta caracterizada por la existencia de una forma cuadrática definida positiva  $V(x) = x^T P x$  tal que :  $A^T P + P A = -Q$  donde  $Q$  es una matriz definida positiva.

El siguiente teorema recíproco (inverso) es muy útil en el estudio de los sistemas dinámicos.

**Teorema 0.28:** *Sea el sistema autónomo (0.16). Si el punto de equilibrio 0 es asintóticamente estable entonces (0.16) admite una función de Lyapunov que es de clase  $C^\infty$  en una vecindad de  $x_0$ .*

## 0.6.2 Estabilización

Uno de los problemas del control consiste en la estabilización de sistemas. Aquí recordaremos algunos resultados sobre la estabilización por retroalimentación de estado estático y dinámico. La estabilización de un sistema no lineal es un tema muy complicado. Existen pocos resultados generales que conciernen a este punto. Al mismo tiempo es difícil concluir sobre la estabilidad o la no estabilidad global asintótica de un sistema no lineal general.

Primeramente, recordemos que todo sistema lineal controlable es estabilizable por retroalimentación de estado estática lineal. Esto no es en general cierto, para los sistemas no lineales. En otros términos, existen sistemas no lineales controlables pero no estabilizables. De este hecho, un tema importante de estudio en la teoría del control es la caracterización de clases de sistemas que son estabilizables por retroalimentación de estado.

**Definición 0.29** (Estabilización): *De manera general, se dice que el sistema  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$  es estabilizable en el origen si existe una retroalimentación de estado  $u = u(x)$ , al menos continua, tal que el sistema en lazo-cerrado  $\dot{x} = f(x) + g(x)u(x)$  admite el origen como punto de equilibrio asintóticamente estable.*

### DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

En lo que sigue, introduciremos algunas precisiones sobre las terminologías concernientes a los tipos de retroalimentación de estado utilizados en la práctica.

**Definición 0.30** (Retroalimentación de estado estática) *Se llama retroalimentación de estado estática regular para el sistema no lineal:*

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad x \in R^n, u \in R^m \quad (0.18)$$

una función  $u = \alpha(x) + \beta(x)v$  donde  $\alpha : R^n \rightarrow R^m$  y  $\beta : R^n \rightarrow R^{m \times m}$  son funciones regulares tales que la matriz  $\beta(x)$  es invertible para todo  $x \in R^n$  y  $v = (v_1, \dots, v_m)$  representa el nuevo vector de control.

Una variante importante de esta retroalimentación regular es que solamente utiliza la salida.

**Definición 0.31** (Retroalimentación de estado estática de salida): Se llama retroalimentación de estado estática de salida para el sistema no lineal con salida:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x), \end{cases} \quad x \in R^n, u \in R^m, y \in R^p \quad (0.19)$$

una función  $u = \tilde{\alpha}(y) + \tilde{\beta}(y)v$  donde  $\tilde{\alpha} : R^p \rightarrow R^m$  y  $\tilde{\beta} : R^p \rightarrow R^{m \times m}$  son funciones regulares tales que la matriz  $\tilde{\beta}(y)$  sea invertible para todo  $y \in R^p$  y  $v = (v_1, \dots, v_m)$  representa el nuevo vector de control.

Puesto que  $y = h(x)$  la retroalimentación de estado estática de salida es un caso particular de la retroalimentación de estado estática anterior. Entonces, en general solo se puede esperar menos de las propiedades en el caso de una retroalimentación de salida.

## DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

**Definición 0.32** (Retroalimentación de estado dinámica): Una retroalimentación de estado dinámica para el sistema (0.17) es definida por la relación:

$$\begin{cases} \dot{z} = \gamma(z, x) + \delta(z, x)v \\ u = \alpha(z, x) + \beta(z, x)v \end{cases}$$

donde  $z = (z_1, \dots, z_q) \in R^q$ , y  $\gamma : R^q \times R^n \rightarrow R^q$ ,  $\delta : R^q \times R^n \rightarrow R^{q \times m}$ ,  $\alpha : R^q \times R^n \rightarrow R^m$  y  $\beta : R^q \times R^n \rightarrow R^{m \times m}$  son funciones regulares y  $v = (v_1, \dots, v_m)$  representa el nuevo



vector de control.

De hecho, la retroalimentación de estado dinámica puede ser considerada como la composición de un sistema (0.17) con el sistema:

$$\begin{cases} \dot{z} = \gamma(z, \tilde{x}) + \delta(z, \tilde{x})v \\ \tilde{u} = \alpha(z, \tilde{x}) + \beta(z, \tilde{x}) \end{cases} \quad (0.20)$$

donde  $\tilde{x}$  y  $\tilde{u}$  son respectivamente relacionados con  $x$  y con  $u$ . El sistema (0.19) es frecuentemente llamado compensador y esquemáticamente se puede representar como sigue:

**Definición 0.33** (Retroalimentación de estado dinámica de salida): Una retroalimentación de estado dinámica de salida para el sistema (0.18) está definida por la relación:

$$\begin{cases} \dot{z} = \gamma(z, y) + \delta(z, y)v \\ u = \alpha(z, y) + \beta(z, y) \end{cases}$$

donde  $z = (z_1, \dots, z_q) \in R^q$ , e  $\gamma : R^q \times R^p \rightarrow R^q$ ,  $\delta : R^q \times R^p \rightarrow R^{q \times m}$ ,  $\alpha : R^q \times R^p \rightarrow R^m$  y  $\beta : R^q \times R^p \rightarrow R^{m \times m}$  son funciones regulares y  $v = (v_1, \dots, v_m)$  representan el nuevo vector de control

## 0.7 El principio de separación

La mayor parte de las leyes de control son funciones de estado del sistema. Cuando solo se dispone de una parte del vector de estado, no se puede aplicar los algoritmos de control diseñados. Una forma de evitar este problema es cerrar el lazo de control a través de un observador, es decir, una vez que se tiene un algoritmo de control para el sistema y que un observador ha sido diseñado para este último, se procede a reemplazar el estado

desconocido por el estado estimado en el algoritmo de control.

La pregunta que se plantea ahora es saber si la estabilidad del sistema en lazo cerrado se preserva. El estudio de la estabilidad del sistema en lazo cerrado mediante un observador se conoce como principio de separación. Esta terminología proviene del hecho de que la síntesis tanto de la ley de control, así como del observador se llevan al *finalmente uniformemente acotada* cabo separadamente.

Este problema es de carácter muy especial. En general, se trata de encontrar un compromiso entre la velocidad de convergencia del observador y la velocidad de la acción de estabilización.

Para los sistemas lineales, el principio de separación se verifica de que el sistema sea controlable y observable. Esto se traduce mediante una descomposición del espectro del sistema en lazo cerrado con el estado estimado, el espectro del sistema con el del observador que permanece sin cambio, la estabilidad del sistema retroalimentado con el observador depende entonces solo de la estabilidad del observador y del sistema retroalimentado sin observador.

En el contexto no lineal, existen muy pocos resultados concernientes al principio de separación, siendo actualmente un problema abierto.

Notemos también de paso que la estrategia del principio de separación es equivalente a una estabilización dinámica por retroalimentación de salida.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

## APENDICE B

En esta parte del apéndice se anexan algunos de los resultados presentados en este trabajo y que fueron aceptados para su publicación en Congresos Internacionales

### **1.- A DYNAMICAL LINEARIZING FEEDBACK CONTROLLER FOR ROBOTS WITH FLEXIBLE JOINT**

Presentado en el evento Conference on Control Application CCA ' 97 en Hartford, CT, U.S.A.

### **2.- SPEED AND POSITION CONTROL OF A FLEXIBLE JOINT ROBOT MANIPULATOR VIA A NONLINEAR CONTROL-OBSERVER SCHEME**

Presentado en el evento Conference on Control Application CCA ' 97 en Hartford, CT, U.S.A.

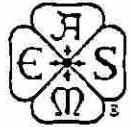
### **3.- A COMPARATIVE STUDY OF SPEED AND POSITION CONTROL OF A FLEXIBLE JOINT ROBOT MANIPULATOR**

Presentado en el evento 1998 IEEE RSJ INTERNATIONAL CONFERENCE Victoria Conference Centre, B.C., CANADA

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

### **4.- OBSERVED-BASED CONTROLLER FOR A FLEXIBLE JOINT ROBOT MANIPULATOR**

Presentado en el evento 37th IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL • Tampa, Florida, U.S.A. December •1998



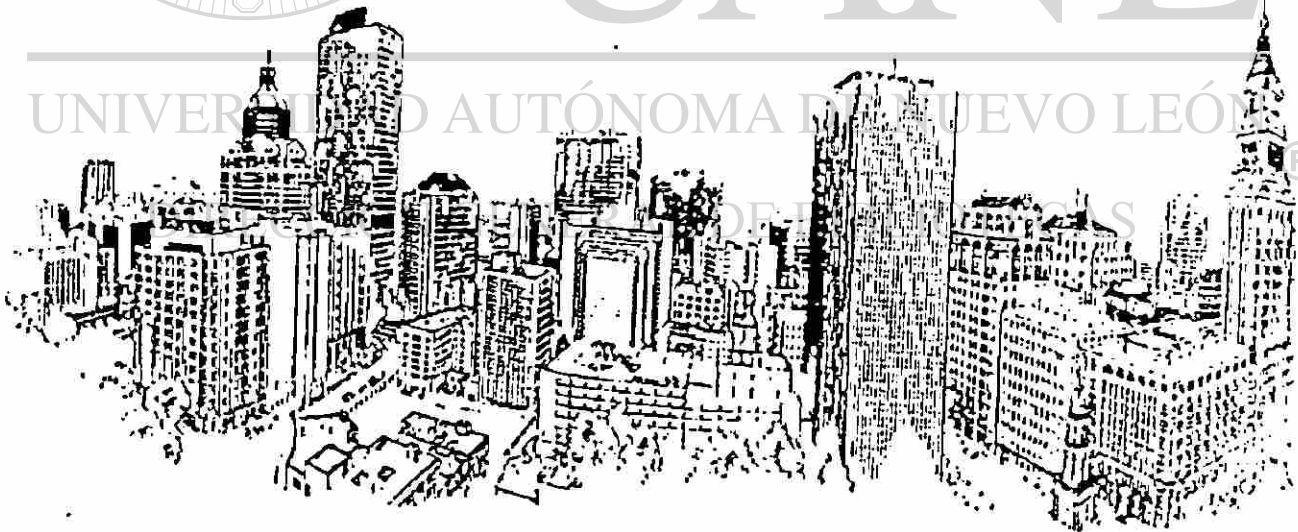
Proceedings of the

1997 IEEE International  
Conference on Control Applications



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



Sheraton Hartford Hotel  
Hartford, Connecticut USA  
October 5-7, 1997

Proceedings of the  
**1997 IEEE International  
Conference on Control Applications**

October 5-7, 1997



Sheraton Hartford Hotel  
Hartford, Connecticut USA

UANE

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



IEEE



IEEE Control Systems Society  
ASME Dynamic Systems & Control Division

97CH36055

# A DYNAMICAL LINEARIZING FEEDBACK CONTROLLER FOR ROBOTS WITH FLEXIBLE JOINT.

Jesús De León-Morales<sup>1</sup>, José G. Alvarez-Leal<sup>2</sup>, Rafael Martínez-Guerra<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Universidad Autónoma de Nuevo León  
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica  
Apartado Postal 148-F, San Nicolás de los Garza, N. L.  
C.P., 66451, MEXICO  
e-mail: jleon@ccr.dsi.uanl.mx

<sup>2</sup>Instituto Tecnológico de Saltillo, MEXICO

<sup>3</sup>Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa, MEX.

## ABSTRACT

Techniques of differential algebra are used to derive an observer-based controller applied to a flexible manipulator. A dynamical linearizing feedback controller is derived on the basis of Fliess' Generalized Observability Canonical Form (GOCF). Our controller actually achieves both stability and tracking by linearizing the tracking error. The controller is then of error-driven type; the dynamics of the error is estimated by an observer in the closed-loop. An analysis of the stability of the closed-loop system is given. Simulation results are presented for illustrating the performance of this observer-based controller scheme, when is applied to a mathematical model of a robot with flexible joints.

### 1.- INTRODUCTION

Several controller design techniques have been proposed, from different perspectives, for the stabilization of nonlinear systems. Recently, a considerable number of works have studied the problem of the control of robots manipulators with joint flexibility. This problem has a practical and theoretical interest. Because, from a practical point of view, we must be consider the effect of the elasticity in the robot to design the control laws; and from theoretical point of view, the number of degree of freedom is twice the number of control actions, and the matching property between nonlinearities and inputs is lost [8, 9].

In the literature, we can find different control schemes for nonlinear systems. Most of these schemes make use of the static feedback control schemes. The design of these static feedback are based on Adaptive control, Singular perturbations, Nonlinear control theory, and Energy-based Lyapunov control schemes, or more recently, Decoupling-based schemes, Backstepping-based schemes, or Passivity-based schemes [8, 9]. Further-

more, a considerable number of researchers have studied the stability and output tracking problems of dynamically systems using the commonest mathematical tool in nonlinear control theory of today: *differential geometry*. However, if the nonlinearities involved are all polynomial there are methods from differential algebra that can be used instead. It has been showed by M. Fliess that the differential algebra is a natural mathematical tool for dealing with polynomial systems.

We treat the stability and output tracking problems for nonlinear systems from the dynamical feedback error linearization strategy. The approach is based on Fliess' generalized observability canonical form (GOCF) and the generalized controller canonical form (GCCF) which are easy consequences of the differential primitive element theorem [2, 3, 5]. Recall that, from the external behavior of the system, the Fliess' GOCF is a generalized state description of the system where, in general, the state dynamics equations are control-dependent, including a finite number of the control time derivatives.

The controller we propose is obtained by means of exact linearization of the tracking error dynamics. This controller is a function of tracking error vector which is, in general, partially measurable, then it is necessary to estimate it. A variety of approaches have been proposed in the synthesis of nonlinear observers to overcome this difficulty. For that a high gain observer is used to estimate the tracking error in order to implement our controller. Finally, to guarantee the stability of the closed-loop system using the proposed observer-based controller, an analysis of the stability of the system in closed loop is given.

This note is organized as follows: In section 2, we introduce the generalized observability and controller canonical forms. The stabilization and output tracking

problems by means of an exponential observer, using the differential algebraic approach, are dealt in section 3. In section 4, we introduce a mathematical model which describes the behavior of a robot manipulator with joint flexibility. And simulation results are presented using our observer-based controller scheme. Some concluding remarks and proposals for further work will close the paper.

## 2.- GENERALIZED OBSERVABILITY AND CONTROLLER CANONICAL FORMS.

According to the theorem of the differential primitive element there exist an element  $\xi \in G$  such that  $G = K\langle u, \xi \rangle$ . The Transcendence degree  $n$  of  $G/K\langle u \rangle$  [2, 3], which is equal to the dimension of the system (1), and is the smallest integer such that  $\frac{d^n \xi}{dt^n}$  is  $K\langle u \rangle$ -algebraically dependent on  $\left\{ \xi, \frac{d\xi}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}\xi}{dt^{n-1}} \right\}$  which is a transcendence basis of  $G/K\langle u \rangle$  [2, 3]. Defining the following change of variable of the form  $\xi_i = \frac{d^{i-1}\xi}{dt^{i-1}}; 1 \leq i \leq n$ . It is clear that  $\{\xi_i\}_{i=1}^n$  is a transcendence basis of  $G/K\langle u \rangle$  too. Hence, a nonlinear generalization of the controller canonical form is given by

$$(\Sigma_A) : \begin{cases} \frac{d\xi_i}{dt} = \xi_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-1 \\ D\left(\frac{d\xi_n}{dt}, \xi, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^\gamma u}{dt^\gamma}\right) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

where  $D\left(\frac{d\xi_n}{dt}, \xi, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^\gamma u}{dt^\gamma}\right)$  is a polynomial with coefficients in  $K$ . If one can locally solve for  $\frac{d\xi_n}{dt}$  in the second equation (1), one obtains an explicit system of first order differential equations, known as the Generalized Controller Canonical Form (GCCF).

$$(\Sigma_{GCCF}) : \begin{cases} \frac{d\xi_i}{dt} = \xi_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-1 \\ \frac{d\xi_n}{dt} = L_c\left(\xi, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^\gamma u}{dt^\gamma}\right) \end{cases}$$

for  $\gamma$  a strictly positive integer. Now, let  $y$  be the scalar output and let  $n$  be the smallest integer such that  $\frac{d^n y}{dt^n}$  is algebraically dependent on

$$\left\{ y, \frac{dy}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^\nu u}{dt^\nu} \right\}$$

that means

$$\frac{d^n y}{dt^n} = -L_o\left(y, \frac{dy}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^\nu u}{dt^\nu}\right)$$

Defining the following change of variable  $\eta_i = \frac{d^i y}{dt^i}$ ; for  $1 \leq i \leq n$ , then one can write a local state space representation which has the special form of a Generalized Observability Canonical Form (GOCF):

$$(\Sigma_{GOCF}) : \begin{cases} \frac{d\eta_i}{dt} = \eta_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-1 \\ \frac{d\eta_n}{dt} = -L_o\left(\eta, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^\nu u}{dt^\nu}\right) \\ y = \eta_1 \end{cases} \quad (2)$$

for  $\nu$  a strictly positive integer.

## 3.- A DIFFERENTIAL ALGEBRAIC APPROACH TO ASYMPTOTIC STABILIZATION AND OUTPUT TRACKING.

Consider the following Nonlinear System

$$(\Sigma_{NL}) : \begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x, u) \end{cases} \quad (3)$$

where  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}$ ,  $f$  and  $h$  are assumed to be polynomial in their arguments. Systems  $(\Sigma_{NL})$  are assumed to be universally observable (see [2, 3]) with external behavior described by equations of the form.

$$\frac{d^n y}{dt^n} = -L_o\left(y, \frac{dy}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^\nu u}{dt^\nu}\right)$$

where  $L_o$  is a polynomial of its arguments.

By defining locally  $\eta_i = \frac{d^{i-1}y}{dt^{i-1}}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , we obtain an explicit GOCF of systems  $(\Sigma_{NL})$  as follows  $\eta_i = \eta_{i+1}$ ,  $1 \leq i \leq n-1$ ;  $\eta_n = -L_o\left(\eta, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^\nu u}{dt^\nu}\right)$  for some  $\gamma > 0$ .

Now, let  $y_R(t)$  be a prescribed reference output function which is differentiable at least  $n$  times. The asymptotic output tracking problem consists in finding a dynamical controller described by a time-varying scalar ordinary differential equation, which is possible implicit, and which has as input:

a) The output reference signal  $y_R(t)$ , together with a finite number of its time derivatives

$$\frac{d^i y_R}{dt^i}; 1 \leq i \leq n$$

and b) The state coordinates  $\eta_i$  of the system.

The controller is supposed to produce a scalar function  $u$ , which locally forces  $y$  to asymptotically converge towards  $y_R(t)$ . Define an output tracking error function  $e(t)$  as

$$e(t) = y(t) - y_R(t) \quad (4)$$

By definition,  $\eta_i$  is equal to the  $(i-1)$ -th time derivative of  $y(t)$ , that is  $\eta_i = \frac{d^{i-1}y}{dt^{i-1}}$ ; for  $1 \leq i \leq n$ . Then, we have

$$\frac{d^i e(t)}{dt^i} = \eta_{i+1} - \frac{d^i y_R(t)}{dt^i}; 1 \leq i \leq n-1 \quad (5)$$

$$\frac{d^n e(t)}{dt^n} = \frac{d\eta_n}{dt} - \frac{d^n y_R(t)}{dt^n} \quad (6)$$

Let  $p(s) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i s^i$  be Hurwitz polynomial. By requiring a linear time-invariant autonomous dynamics for the tracking error function:

$$\frac{d^n e(t)}{dt^n} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \frac{d^i e(t)}{dt^i} = 0 \quad (7)$$

it follows from (5) and (6), that (7) may be rewritten as

$$\frac{d\eta_n}{dt} - \frac{d^n y_R(t)}{dt^n} + \sum_{i=1}^n a_{i-1} \left( \eta_i - \frac{d^{i-1} y_R(t)}{dt^{i-1}} \right) = 0 \quad (8)$$

that is

$$-L_o \left( \eta, u, \dots, \frac{d^{\nu} u}{dt^{\nu}} \right) = \frac{d^n y_R(t)}{dt^n} - \sum_{i=1}^n a_{i-1} \left( \eta_i - \frac{d^i y_R(t)}{dt^i} \right) \quad (9)$$

**Remark 1.** The scalar time-varying differential equation (9) implicitly defines  $u$ , which accomplishes asymptotic stabilization to zero for the tracking error, in a manner entirely prescribed by the set of constant design coefficients  $\{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}\}$

Let  $e_i = \frac{d^{i-1} e(t)}{dt^{i-1}}$ , for  $1 \leq i \leq n$ , be the components of an error vector  $e = \text{Col}(e_1, e_2, \dots, e_n)$ . We obtain

$$\frac{de}{dt} = Fe \quad (10)$$

where

$$-L_o \left( \psi_R(t) + e, u, \dots, \frac{d^{\nu} u}{dt^{\nu}} \right) - \frac{d^n y_R(t)}{dt^n} = - \sum_{i=1}^n a_{i-1} e_i \quad (11)$$

with reference signals vector given by

$$\psi_R(t) = \text{Col} \left( y_R, \frac{dy_R}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1} y_R}{dt^{n-1}} \right);$$

and

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

The origin,  $e = 0$ , is an equilibrium point for the tracking error dynamics (10). We assume that the solution  $u$  of (11) is defined for all time, and is bounded for all bounded functions  $y_R(t)$  which also exhibit bounded derivatives. Note that the dynamical feedback controller depends on the state vector of the tracking error dynamics, which should be estimated by means of an observer.

Now, writing the system (10) as follows:

$$\frac{de}{dt} = Ee + \varphi \left( e, y_R, \frac{dy_R}{dt}, \dots, \frac{d^n y_R}{dt^n}, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^{\nu} u}{dt^{\nu}} \right)$$

where the elements of the matrix  $E$  are given by

$$E_{ij} = \delta_{i,j-1} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j - 1 \\ 0 & \text{everywhere} \end{cases}$$

and

$$\varphi \left( e, y_R, \dots, \frac{d^n y_R}{dt^n}, u, \dots, \frac{d^{\nu} u}{dt^{\nu}} \right) \left( 0 \dots 0 \quad -L_o \left( \psi_R(t) + e, u, \dots, \frac{d^{\nu} u}{dt^{\nu}} \right) - \frac{d^n y_R(t)}{dt^n} \right)^T$$

Then, the estimation of the tracking error  $e(t) = y(t) - y_R(t)$  is given by an exponential nonlinear observer (O) of the form:

$$(O) : \begin{cases} \frac{d\hat{e}}{dt} = E\hat{e} - \Delta_0 K [C\hat{e}(t) - e_1(t)] \\ \quad + \varphi \left( \hat{e}(t), y_R, \dots, \frac{d^{n-1} y_R}{dt^{n-1}}, u, \dots, \frac{d^{\nu} u}{dt^{\nu}} \right) \end{cases}$$

where  $\Delta_\theta = \text{diag}(\theta, \theta^2, \dots, \theta^n)$  for some  $\theta > 0$  and  $K = (K_1, K_2, \dots, K_n)^T$ ,  $K$  is chosen such that  $\sigma(A - KC) \subset \mathbb{R}^-$  (See [6, 7] for more details).

Let

$$\sigma(u_{\hat{e}}, y_R(t), \hat{e}) = - \frac{d^n y_R(t)}{dt^n} + \sum_{i=1}^n a_{i-1} \hat{e}_i - L_o \left( \psi_R(t) + \hat{e}, u, \dots, \frac{d^{\nu} u}{dt^{\nu}} \right)$$

and  $u_{\hat{e}}$  be the observer-based control resulting from  $\sigma(u_{\hat{e}}, y_R(t), \hat{e}(t)) = 0$ .

The dynamics of  $\hat{e}(t)$  and  $e_0(t) = \hat{e}(t) - e(t)$ , (the estimate tracking error and the observation error, respectively), are given by:

$$\begin{cases} \frac{d\hat{e}}{dt} = E\hat{e}(t) - \Delta_\theta K [C\hat{e}(t) - e_1(t)] \\ \quad + \varphi \left( \hat{e}(t), y_R, \dots, \frac{d^{n-1} y_R}{dt^{n-1}}, u_{\hat{e}}, \dots, \frac{d^{\nu} u_{\hat{e}}}{dt^{\nu}} \right) \\ \frac{de_0(t)}{dt} = (E - \Delta_\theta KC) e_0(t) + \delta\Phi(e_0(t), \hat{e}(t)) \end{cases}$$

which becomes

$$(\Sigma_{TOTAL}) : \begin{cases} \frac{d\tilde{e}(t)}{dt} = F\tilde{e} - \theta^{-1} \Delta_\theta K \tilde{e}_0 \\ \frac{de_0}{dt} = \theta(E - KC) \tilde{e}_0(t) \\ \quad + \Delta_\theta^{-1} \delta\Phi(\Delta_\theta \tilde{e}_0(t), \hat{e}(t)) \end{cases} \quad (12)$$

where

$$\begin{aligned} \tilde{e}_0 &= \Delta_\theta^{-1} e_0, \quad \Delta_\theta^{-1} E \Delta_\theta = \theta E, \quad C \Delta_\theta = \theta C, \\ \Delta_\theta^{-1} &= \text{diag}(\theta^{-1}, \theta^{-2}, \dots, \theta^{-n}) \end{aligned}$$

and

$$\delta\Phi(e_0, \hat{e}) = \varphi \left( \hat{e}(t), y_R, \dots, \frac{d^n y_R}{dt^n}, u_{\hat{e}}, \dots, \frac{d^{\nu} u_{\hat{e}}}{dt^{\nu}} \right) - \varphi \left( e(t), y_R, \dots, \frac{d^n y_R}{dt^n}, u_{\hat{e}}, \dots, \frac{d^{\nu} u_{\hat{e}}}{dt^{\nu}} \right)$$

ASSUMPTIONS:



A1.-  $\delta\Phi(\Delta_0 \tilde{e}_0(t), \tilde{e}(t))$  is globally Lipschitzian in  $R^n$  with respect to  $\Delta_0 \tilde{e}_0(t)$  and uniformly with respect to  $\tilde{e}(t)$ .

A2.- The signals  $u_\varepsilon$  and its derivatives up to  $n$  at least are bounded.

**THEOREM 1:** Consider  $u_\varepsilon$  the linearizing dynamic state feedback which is solution of  $\sigma(\tilde{e}(t), u_\varepsilon, y_R(t)) = 0$ . Suppose that assumptions A1 and A2 are satisfied. Then the closed loop system  $(\Sigma_{TOTAL})$  with control  $u_\varepsilon$  is globally asymptotically stable.

#### 4- OBSERVER-BASED CONTROLLER OF FLEXIBLE JOINT MANIPULATORS.

In this section, we apply the results obtained in the above sections to deal with the estimation and tracking problems of a single-link flexible joint manipulator [8].

##### MATHEMATICAL MODEL

Based on Lagrangian dynamics considerations, the dynamical system describing the behavior of a single-link flexible joint robot is obtained.

The dynamical system  $(\Sigma_M)$  describing the motion of the robot is given by

$$(\Sigma_M) : \begin{cases} \tau = D_m \dot{q}_m + B_m \dot{q}_m + K_s(q_m - q) \\ 0 = D \ddot{q} + B \dot{q} + mgl \sin(q) - K_s(q_m - q) \end{cases} \quad (12)$$

where  $q$  denote the angular position of the link of length  $\frac{1}{2}$  and mass  $m$  and let  $q_m$  be the angular position of the motor,  $D$  denotes the inertia of the link,  $D_m$  denotes the motor inertia,  $K_s$  is the flexible joint stiffness coefficient,  $B$  is the motor viscous damping, and  $B_m$  denotes the link viscous damping, and  $g$  is the gravitational acceleration; and  $\tau$  is the vector of actuators torques.

Let us define  $\bar{\beta}^2 = \frac{1}{K_s}$ , which is not to be considered as a small constant related to the singular perturbation techniques. Defining the following change of coordinates:  $x_1 = q_m$ , the angular position of motor;  $x_2 = \dot{q}_m$ , the angular velocity of motor;  $x_3 = K_s(q - q_m)$ , the elastic force;  $x_4 := \frac{(q - q_m)}{\bar{\beta}}$ , the elastic velocity variation. Then, the dynamical model  $(\Sigma_M)$  represented in the new coordinates results as follows

$$(\Sigma_M) : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -k_5 x_2 + k_1 x_3 + k_1 u \\ \dot{x}_3 = \frac{x_4}{\bar{\beta}} \\ \dot{x}_4 = \{-k_2 k_3 \sin(\bar{\beta}^2 k_3 + x_1) - k_4 x_3 - k_7 x_2 - k_6 \bar{\beta} x_4 - k_1 u\} / \bar{\beta} \end{cases} \quad (13)$$

where  $k_1 = \frac{1}{D_m}$ ;  $k_2 = \frac{1}{D}$ ;  $k_3 = mgl$ ;  $k_4 = k_1 + k_2$ ;  $k_5 = \frac{B_m}{D_m}$ ;  $k_6 = \frac{B}{D}$ ;  $k_7 = k_6 - k_5$ ;  $u = \tau$

**Remark 2:** The system  $(\Sigma_M)$  has different relative degree, when the system output  $y$  is considered as the motor position  $x_1$  instead of the link position  $z = x_1 + \bar{\beta} x_3$ .

On the other hand, an operation point of the system can be achieved when a torque input  $u = u^0$  constant is applied, that is

$$\begin{aligned} u &= u^0; x_1(u^0) = \bar{\beta}^2 U + \sin^{-1}\left(\frac{u^0}{k_3}\right); x_2 = 0; \\ x_3(u^0) &= -u^0; x_4(u^0) = 0; z(u^0) = \sin^{-1}\left(\frac{u^0}{k_3}\right). \end{aligned} \quad (14)$$

When we consider the linearized system in the operating point, the zero dynamic follows to be minimum phase. However, this zero dynamic's property is a function of the parameter  $B$ . The fact that  $B \neq 0$  is crucial for the flexible robot to be a minimum phase. If  $B = 0$ , this technique can not to be applied, and the zero dynamic becomes oscillatory. In practice, this condition is verified for most mechanical manipulators. The following coordinate transformation depending on the input which allows us to obtain a generalized observability canonical form (GOCF). For that, we have:

$$\begin{aligned} y &= \eta_1 = x_1 \\ \dot{y} &= \eta_2 = x_2 \\ \ddot{y} &= \eta_3 = -k_5 x_2 + k_1 x_3 + k_1 u \\ \ddot{\ddot{y}} &= \eta_4 = (k_5)^2 x_2 - k_1 [k_5 x_3 + \bar{\beta}^{-1} x_4 + k_5 u + \frac{dx_4}{dt}] \end{aligned} \quad (15)$$

$\{y, \dot{y}, \ddot{y}, \ddot{\ddot{y}}\}$  is a transcendence basis of  $\mathcal{R}\langle u, y \rangle / \mathcal{R}\langle u \rangle$  which represents the nonlinear dynamics given in (13). The transcendence degree of  $\mathcal{R}\langle u, y \rangle / \mathcal{R}\langle u \rangle$  is given by  $\dim_{tr}(\mathcal{R}\langle u, y \rangle / \mathcal{R}\langle u \rangle) = 4$  and its corresponding inverse transformation.

$$\begin{aligned} x_1 &= \eta_1 \\ x_2 &= \eta_2 \\ x_3 &= (\eta_3 + k_5 \eta_2 - k_1 u) / k_1 \\ x_4 &= \bar{\beta} [\eta_4 - (k_5)^2 \eta_2 + k_1 k_5 \eta_3 - k_1 k_5 u - k_1 \frac{dx_4}{dt}] / k_1 \end{aligned} \quad (16)$$

The Jacobian matrix of the state coordinate transformation (15) is given by

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -k_5 & k_1 & 0 \\ 0 & (k_5)^2 & -k_1 k_5 & k_1 \bar{\beta} \end{pmatrix}$$

which is clearly no singular if  $\bar{\beta}$  is different to zero. Then the (GOCF) of (13) is given by

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 = \eta_3 \\ \dot{\eta}_3 = \eta_4 \\ \dot{\eta}_4 = -k_1 k_2 k_3 \bar{\beta}^{-2} \sin(\bar{\beta}^2 [k_5 \eta_2 - k_1 u + \eta_3]) / k_1 + \eta_1 - \bar{\beta}^{-2} \{k_1 k_7 + k_4 k_5\} \eta_2 - \{ \frac{k_7}{\bar{\beta}} + k_5 k_6 \} \eta_3 - \{k_5 + k_6\} \eta_4 - \frac{k_7}{\bar{\beta}} \{k_4 - k_1\} u + k_1 k_6 \frac{du}{dt} + k_1 \frac{d^2 u}{dt^2} \end{cases} \quad (17)$$

And finally, the external behavior of the system is given by

$$\begin{aligned} & \frac{d^4 y}{dt^4} + \{k_5 + k_6\} \frac{d^3 y}{dt^3} + \left\{ \frac{k_4}{\beta} + k_5 k_6 \right\} \frac{d^2 y}{dt^2} \\ & + \beta^{-2} \{k_1 k_7 + k_4 k_5\} \frac{dy}{dt} \\ & + k_1 k_2 k_3 \beta^{-2} \sin(\beta^2) \left[ k_5 \frac{dy}{dt} + \frac{d^2 y}{dt^2} - k_1 u \right] / k_1 + y \\ & - \frac{k_4}{\beta} \{k_4 - k_1\} u - k_1 k_6 \frac{du}{dt} - k_1 \frac{d^2 u}{dt^2} = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Now, let  $y_R(t)$  be a desired output reference trajectory of the angular position. Deriving the desired output reference  $y_R(t)$  up to fourth time-derivative, we can apply the dynamical controller

$$-L_o \left( \eta, u, \dots, \frac{d^\gamma u}{dt^\gamma} \right) = \frac{d^n y_R(t)}{dt^n} - \sum_{i=1}^n a_{i-1} \left( \eta_i - \frac{d^{i-1} y_R(t)}{dt^{i-1}} \right)$$

with  $n = 4$  and  $\gamma = 2$ .

Defining the tracking error as  $e(t) = x_1 - y_R(t)$ , one obtains the system of differential equations describing the tracking error dynamics as

$$\frac{de}{dt} = Ee + \varphi \left( e_1, \dots, e_4, y_R, \dots, \frac{d^4 y_R}{dt^4}, u, \frac{du}{dt}, \frac{d^2 u}{dt^2} \right) \quad (19)$$

with output  $y_T = e_1$ . Since system (19) is observable we propose the following nonlinear exponential observer for the estimation of the tracking error [6]:

$$\frac{d\hat{e}}{dt} = E\hat{e} - \Delta_\theta K [C\hat{e}(t) - e_1(t)] \quad (20)$$

$$+ \varphi \left( \hat{e}(t), y_R, \dots, \frac{d^4 y_R}{dt^4}, u_e, \frac{du_e}{dt}, \frac{d^2 u_e}{dt^2} \right) \quad (21)$$

Exact linearization of the tracking error dynamics can be now accomplished by equating the last differential of the system (19) to a linear time invariant expression in the error coordinates:

$$\begin{aligned} -L_o \left( \psi_R(t) + e, u, \frac{du}{dt}, \frac{d^2 u}{dt^2} \right) &= \frac{d^4 y_R(t)}{dt^4} - \sum_{i=1}^4 a_{i-1} e_i \\ &= -k_1 k_2 k_3 \beta^{-2} \sin(\beta^2) / k_1 \left[ k_5 (e_2 + \frac{dy_R}{dt}) + \frac{d^2 y_R}{dt^2} \right. \\ &\quad \left. - k_1 u + e_3 \right] + y_R(t) \\ &\quad - \beta^{-2} (k_1 k_7 + k_4 k_5) (k_4 - k_1) u + k_1 k_6 \frac{du}{dt} \\ &\quad + k_1 \frac{d^2 u}{dt^2} - (k_5 + k_6) \frac{d^2 y_R}{dt^2} - \left( \frac{k_4}{\beta} + \frac{k_6}{k_6} \right) \frac{d^2 y_R}{dt^2} \\ &\quad - \beta^{-2} (k_1 k_7 + k_4 k_5) \frac{dy}{dt} - \sum_{i=1}^4 a_{i-1} e_i \end{aligned} \quad (22)$$

Then, writing in the original coordinates the equation

of the dynamical controller, it follows that

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 u}{dt^2} + (a_3 - k_5) \frac{du}{dt} + \left( k_5^2 - k_5 a_3 - k_1 \beta^{-2} \right) u = \\ & - \frac{a_0}{k_1} x_1 - \left( \frac{k_7}{\beta} - \frac{a_1}{k_1} + \frac{k_4 a_2}{k_1} + \frac{k_3}{k_1} - \frac{k_6 a_3}{k_1} \right) x_2 \\ & + \left( \frac{k_4}{\beta} + \frac{k_5}{\beta} - \frac{a_3}{\beta} \right) x_4 + \frac{k_2 k_3}{\beta^2} \sin(x_1 + \beta^2 x_3) \\ & + \left( \frac{d^4 y_R}{dt^4} + a_3 \frac{d^3 y_R}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 y_R}{dt^2} + a_1 \frac{dy_R}{dt} + a_0 y_R \right) (k_1)^{-1} \end{aligned} \quad (23)$$

and the desired dynamic performance can be obtained by choosing suitable  $a_1, a_2, a_3, a_4$ .

However, this controller depends on all state which is unmeasurable. To overcome this difficulty we will replace the state estimated by the observer. To achieve this goal we take into account that the inverse transformation is given by (ec.16), and written in terms of the tracking error, we obtain

$$\begin{aligned} x_1 &= e_1 + y_R \\ x_2 &= e_2 + \frac{dy_R}{dt} \\ x_3 &= \left\{ e_3 + \frac{d^2 y_R}{dt^2} + k_5 (e_2 + \frac{dy_R}{dt}) - k_1 u \right\} / k_1 \\ x_4 &= \left\{ e_4 + \frac{d^3 y_R}{dt^3} + k_5 (e_3 + \frac{d^2 y_R}{dt^2}) - k_1 \frac{du}{dt} \right\} k_1 / \beta \end{aligned}$$

Now, replacing the states estimated given by the observer (20, 21) we get

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 &= \hat{e}_1 + y_R \\ \hat{x}_2 &= \hat{e}_2 + \frac{dy_R}{dt} \\ \hat{x}_3 &= \left\{ \hat{e}_3 + \frac{d^2 y_R}{dt^2} + k_5 (\hat{e}_2 + \frac{dy_R}{dt}) - k_1 u \right\} / k_1 \\ \hat{x}_4 &= \left\{ \hat{e}_4 + \frac{d^3 y_R}{dt^3} + k_5 (\hat{e}_3 + \frac{d^2 y_R}{dt^2}) - k_1 \frac{du}{dt} \right\} \beta / k_1 \end{aligned}$$

Then, the dynamical controller as a function of the estimates is given by

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 u_e}{dt^2} + k_6 \frac{du_e}{dt} - \frac{1}{\beta} \{k_4 - k_1\} u_e = -k_2 k_3^{-2} \beta \sin(\beta^2) \hat{x}_3 + \hat{x}_1 \\ & - \beta^{-2} \frac{1}{k_1} \{k_1 k_7 + k_4 k_5\} \hat{x}_2 - \frac{1}{k_1} \left\{ \frac{k_4}{\beta} + k_5 k_6 \right\} \hat{x}_2 \\ & - \{k_5 + k_6\} \hat{x}_4 - \sum_{i=1}^4 \frac{a_{i-1}}{k_1} \left\{ \hat{x}_i + \frac{d^{i-1} y_R}{dt^{i-1}} \right\} + \frac{1}{k_1} \frac{d^4 y_R}{dt^4} \end{aligned}$$

**Remark 3:** The above dynamical controller does not exhibit any singularities if  $\beta \neq 0$ . However, by considering a more general systems, the synthesis of a dynamical controller could be introduce some difficulties which are related to impasse points, nonminimum phase regions and others( further details can be found in [8]).

### 5.- SIMULATION RESULTS

Now, we will show how the observer-based dynamical controller scheme is implemented to a model of a flexible joint robot. The simulation were performed with the following parameters

$$\begin{aligned} k_1 &= 3.33 \text{ (m}^2 \text{Kg)}^{-1}; k_2 = 1.0 \text{ (m}^2 \text{Kg)}^{-1}; k_3 = 5.0 \\ & \text{Nm}; k_4 = 4.33 \text{ (m}^2 \text{Kg)}^{-1} \\ k_5 &= 0.333 \text{ s}^{-1}; k_6 = 0.1 \text{ s}^{-1}; k_7 = -0.233 \text{ s}^{-1}; K_s = \\ & 100 \text{ N/(m rad}^{-1}). \end{aligned}$$

All initial conditions, for the system and the dynamical controller were chosen to be zero. The desired reference trajectory  $y_R(t)$  for the motor position was set  $y_R(t) = 0.5 \sin t$ . The first task for the proposed observer-based controller was to track a desired reference. Figure 1 shows the state  $x_1$  and the desired reference trajectories. We can see, in figure 1, that the trajectory  $x_1$  converges towards the desired reference trajectory  $y_R(t)$ . In figure 2 shows the state  $x_2$  and the desired reference  $y'_R(t)$ . Finally, the figure 3 depicts the obtained controller applied to the system using this technique observed-based controller.

## 6.- CONCLUDING REMARKS

An observer-based controller has been proposed for a class of nonlinear systems. In particular, sufficient conditions have been given to guarantee the stability of the closed-loop system including the observer. A connection between the gain of the observer and the gain of the controller in order to have the origin globally asymptotically stable was obtained.

Concerning the multi-variable case, this technique can be extended to a class of multi-variable systems with a suitable canonical form.

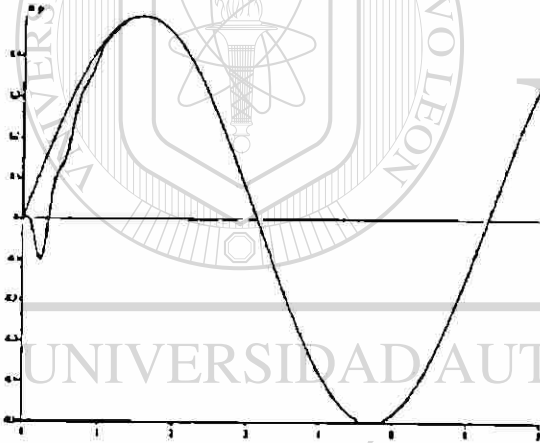


Figure 1

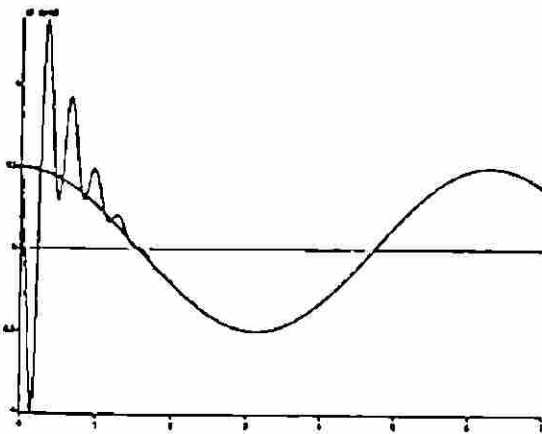


Figure 2

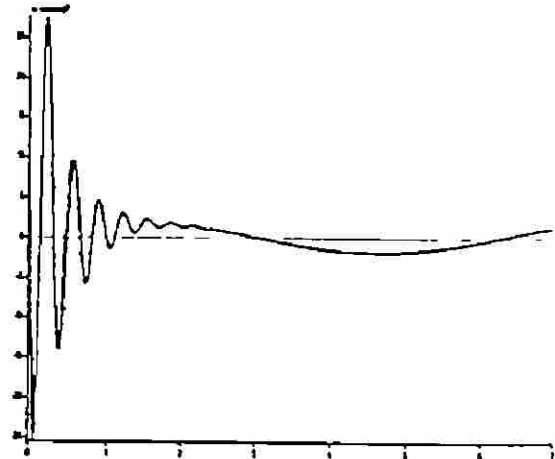


Figure 3

## 7.- REFERENCES

- [1] Diop, S Fliess, M. "On nonlinear observability" Proc. of the first European Control Conference. Commaut et al, Grenoble 1991, Paris, Hermes, pp. 152-157.
- [2] Fliess, M. "Generalized controller canonical forms for linear and nonlinear dynamics". IEEE Trans Automat. Control, Vol. AC-35 Sep 1990, pp 994-1001.
- [3] Fliess, M. "Nonlinear Control Theory and Differential algebra" in Modelling and Adaptive Control. C. Byrnes and A Kurszhanski Eds. lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol. 105 Springer-Verlag-Berlin, 1988, pp 134-145.
- [4] Fliess, M. "Quelques remarques sur les observateurs non lineaires", Proc. of the Coll. GRETSI Traitement Signal Images. Nice, 1987, pp. 169-172.
- [5] Sira-Ramirez, H. "The differential Algebraic approach in nonlinear Dynamical Feedback controlled landing maneuvers", IEEE Trans. Automat. Control, Vol. 37, April, 1992, pp. 518-524.
- [6] Martinez-Guerra, R, DeLeon -Morales, J. "Observers for a Multi-input Multi-output Bilinear System Class: A differential approach". J. of Math. and Computer Modelling, Vol 20, No. 12, 1994, pp. 125-132.
- [7] Martinez-Guerra, R, DeLeon -Morales, J. "Some results about nonlinear observers for a class of bilinear systems", American Control Conference, Seattle, Washington, 1995, pp. 1643-1644.
- [8] H. Sira-Ramirez, S. Ahmad, M. Zribi. "Dynamical Feedback control of robotic manipulators with joint flexibility", IEEE Trans. On Systems, man and cybernetics. Vol 22, No. 4, July-August 1992, pp 736-747.
- [9] B. Brogliato, R. Ortega, R Lozano. "Global tracking controllers for flexible-joint manipulators: a comparative study. Automatica, Vol. 31, No. 7, pp 41-956, 95.

# Speed and Position Control of a Flexible Joint Robot Manipulator via a Nonlinear Control-Observer Scheme<sup>1</sup>

J. De León-Morales  
UANL, Fac. Ing. Mecánica y Eléctrica  
Apdo. Postal 148-F  
66451 San Nicolás de los Garza, N. L., México  
Fax: (+52) 83 76 45 14  
E-mail: jleon@ccr.dsi.uanl.mx

J. G. Alvarez-Leal  
Instituto Tecnológico de Saltillo  
Apdo. Postal 58, Suc. C  
25280 Saltillo, Coahuila  
México

R. Castro-Linares, Jm. Alvarez-Gallegos  
CINVESTAV-IPN, Depto. Ing. Eléctrica  
Apdo. Postal 14-740  
07000 México, D.F., México  
Fax: (+52) 5 740 70 89  
E-mail: rcastro@ctrl.cinvestav.mx

## Abstract

A nonlinear control-observer structure for a class of nonlinear singularly perturbed systems, based on a two-time scale sliding-mode technique and a high gain estimator, is presented. The structure is applied to the model of a single-link flexible joint robot manipulator.

in [4], is designed for that class of systems and also applied to the robot manipulator model.

## 2. Model of the Manipulator.

### 1. Introduction.

During the last few years, considerable research efforts have been directed toward the control problem of flexible joint robots (see, for example, [3] and the references therein). On the other hand, the observer problem for flexible joint manipulators is an important one in robot control theory and of great practical importance. In fact, many control techniques for these robots require the knowledge of four variables for each joint, which may be either positions and velocities of the motors and of the links or positions, velocities, accelerations and jerks of the links. Some interesting results on the observer problem for these robots are reported in [8].

In this paper, a control law based on the sliding mode technique for a class of nonlinear singularly perturbed systems, recently reported in [1] and [5], is applied to the model of a single-link flexible joint robot manipulator. In addition, a nonlinear high gain observer, based on the one proposed

In this work, a single-link flexible joint robot manipulator directly actuated by a direct current electrical motor (hub motor) and whose rotor is elastically coupled to the link is considered (see Fig. 1). The mathematical model for the manipulator is given by the following equations (see [7] for a detailed derivation of the model)

$$\begin{aligned} I\ddot{q}_1 + mgl\sin(q_1) + k(q_1 - q_2) &= 0 \\ J\ddot{q}_2 + B\dot{q}_2 - k(q_1 - q_2) &= u \end{aligned} \quad (1)$$

where  $q_1$  and  $q_2$  are the angular positions of the link and the hub motor, respectively, while  $u$  is the input force from the actuator (motor torque).  $I$  is the inertia of the arm,  $J$  denotes the motor inertia,  $B$  is the motor viscous friction,  $mgl$  is the nominal load in the arm and  $k$  is the flexible joint stiffness coefficient. The model considered does not take into account the inertia of the actuator about the three independent axes. However, it has been shown that it adequately represents the manipulator dynamics and it is suitable for control design [7].

<sup>1</sup>Work supported in part by CONACYT, Mexico, under Grant # 4417-A9406.

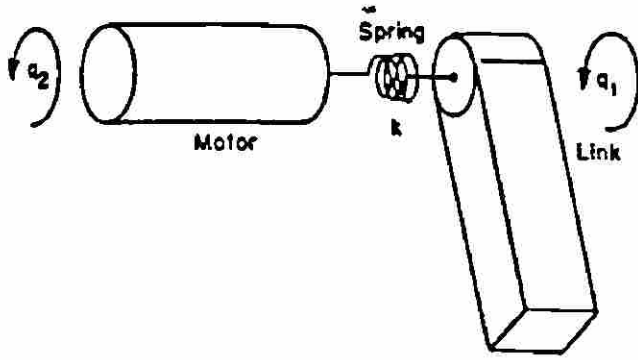


Figure 1: Single-link flexible joint robot manipulator.

### 3. Two-Time Scale Sliding Mode Control.

Let us consider the following class of nonlinear singularly perturbed systems

$$\dot{x} = f_1(x) + F_1(x)z + g_1(x)u, \quad x(t_0) = x_0, \quad (2)$$

$$\epsilon \dot{z} = f_2(x) + F_2(x)z + g_2(x)u, \quad z(t_0) = z_0 \quad (3)$$

where  $t_0 \geq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  is the slow state,  $z \in \mathbb{R}^m$  is the fast state,  $u \in \mathbb{R}^r$  is the control input,  $\epsilon$  is a small positive parameter such that  $\epsilon \in [0, 1]$ , and  $f_1, f_2$ , the columns of the matrices  $F_1, F_2, g_1$  and  $g_2$  are assumed to be bounded analytical real vector fields.  $F_2(x)$  is assumed to be nonsingular for all  $x \in \mathbb{R}^n$ . In addition, it is supposed that  $f_1(0) = f_2(0) = 0$  and, for  $u = 0$ , the origin is an isolated equilibrium state.

#### 3.1. The Singular Perturbation Methodology.

The singular perturbation methodology permits to decompose the original system in two subsystems of lower dimension, both described in different time scales. The slow reduced system is found by making  $\epsilon = 0$  in (2)-(3), resulting in the following reduced  $n - m$  order slow system

$$\dot{x}_s = f(x_s) + g(x_s)u_s, \quad x_s(t_0) = x_0, \quad (4)$$

$$z_s = h(x_s) := -F_2^{-1}(x_s)[f_2(x_s) + g_2(x_s)u_s] \quad (5)$$

where  $x_s \in \mathbb{R}^n$ ,  $z_s \in \mathbb{R}^m$  and  $u_s \in \mathbb{R}^r$  denote the slow components of the original variables  $x, z$  and  $u$ , respectively, and

$$f(x_s) := f_1(x_s) - F_1(x_s)F_2^{-1}(x_s)f_2(x_s), \quad (6)$$

$$g(x_s) := g_1(x_s) - F_1(x_s)F_2^{-1}(x_s)g_2(x_s). \quad (7)$$

Then the slow manifold can be defined as  $\mathcal{M}_\epsilon := \{z \in \mathbb{R}^m : z = h(x)\}$ , and the so-called manifold condition

$$\frac{\partial h}{\partial x}[f_1(x) + F_1(x)z + g_1(x)u] = f_2(x) + F_2(x)z + g_2(x)u$$

must be satisfied for  $\mathcal{M}_\epsilon$  to be an invariant manifold [6].

The fast dynamics (also named boundary layer system) is obtained by transforming the (slow) time scale  $t$  to the

(fast) time scale  $\tau := (t - t_0)/\epsilon$  and making the change of variables  $\eta := z - h(x, \epsilon)$ . The original system (2)-(3) then becomes

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{d\tau} &= \epsilon [f_1(\bar{x}) + F_1(\bar{x})[\eta + h(\bar{x})] + g_1(\bar{x})u], \\ \frac{d\eta}{d\tau} &= f_2(\bar{x}) + F_2(\bar{x})[\eta + h(\bar{x})] + g_2(\bar{x})u - \frac{\partial h(\bar{x})}{\partial \bar{x}} \frac{d\bar{x}}{d\tau} \end{aligned} \quad (8)$$

where  $\bar{z}(\tau) := z(\epsilon\tau + t_0)$ , with  $\bar{z}(0) = z_0$ , and  $\bar{x}(\tau) := x(\epsilon\tau + t_0)$ , with  $\bar{x}(0) = x_0$ .  $u = u_s + u_f$  is the composite control for the full order system where  $u_s$  and  $u_f$  denotes the slow and fast controls, respectively. If  $\epsilon$  is small enough,  $\bar{x}$  remains relatively constant with respect to the fast time  $\tau$ . Besides, if  $u_s$  and  $\partial h(\bar{x})/\partial \bar{x}$  are bounded, then the term  $[\partial h(\bar{x})/\partial \bar{x}] \cdot [d\bar{x}/d\tau]$  can be neglected. Since the second equation in (8) defines the fast reduced subsystem, an  $O(\epsilon)$  approximation for this subsystem can be obtained from equation (5) and setting  $\epsilon = 0$  in (8), namely  $d\hat{\eta}/d\tau = F_2(\bar{x})\hat{\eta} + g_2(\bar{x})u_f$ , with  $\hat{\eta}(0) = z_0 - h(x_0)$ , being  $\hat{\eta}$  an  $O(\epsilon)$  approximation of  $\eta$  in the initial boundary layer.

#### 3.2. Sliding-Mode Control Design.

The sliding-mode control for the complete system is designed in two stages. First, the slow control  $u_s(x_s) \in \mathbb{R}^r$  is designed. To do this, let us consider a slow nonlinear switching surface defined by  $\sigma_s(x_s) = \text{col}(\sigma_{s_1}(x_s), \dots, \sigma_{s_r}(x_s)) = 0$  where all the slow switching surfaces  $\sigma_{s_i}(x_s)$ ,  $i = 1, \dots, r$ , are assumed to be locally Lipschitz-continuous functions for all  $x_s$  in  $\mathbb{R}^n$ . The equivalent control method [9] is used to determine the slow reduced system motion restricted to the slow switching surface  $\sigma_s(x_s) = 0$ , obtaining the so-called slow equivalent control

$$u_{s_e} = -([\partial \sigma_s / \partial x_s] g(x_s))^{-1} [\partial \sigma_s / \partial x_s] f(x_s) \quad (9)$$

where, of course, the matrix  $[\partial \sigma_s / \partial x_s] g(x_s)$  is assumed to be nonsingular for all  $x_s \in \mathbb{R}^n$ . Substitution of the slow equivalent control in (4) yields the following slow sliding-mode equation

$$\dot{x}_s = \left[ I_n - g(x_s) \left[ \frac{\partial \sigma_s}{\partial x_s} g(x_s) \right]^{-1} \frac{\partial \sigma_s}{\partial x_s} \right] f(x_s) =: f_c(x_s) \quad (10)$$

where  $I_n$  denotes the  $n \times n$  identity matrix. If one wants to guarantee the local stability of system (10), the nonlinear function  $\sigma_s(x_s)$  should be chosen such that

$$\text{Re} \lambda \left\{ \frac{\partial f_c}{\partial x_s} \right\} \leq -c_s < 0, \quad \forall x_s \in \mathbb{R}^n \quad (11)$$

is satisfied, where  $\lambda(\cdot)$ , denotes the  $(n - r)$  nonzero eigenvalues of the linear approximation of (10). Obviously, in order to satisfy the above condition, the stabilization of the linear approximation of the slow reduced system is necessary. The following control law [9] can be used to complete the design of the slow control

$$u_s = u_{s_e} + u_{s_N} \quad (12)$$

where  $u_s$  is the slow equivalent control given in (9), which acts when the slow reduced system is restricted to  $\sigma_s(x_s) = 0$ , while  $u_{s,n}$  is the discontinuous part of the slow control  $u_s$  acting when  $\sigma_s(x_s) \neq 0$ . In this work the control  $u_{s,n}$  is selected as a nonlinear feedback law of the type

$$u_{s,n}(x_s) = -([\partial\sigma_s/\partial x_s] \cdot g(x_s))^{-1} L_s(x_s)\sigma_s(x_s) \quad (13)$$

where  $L_s(x_s)$  is a positive-definite matrix of dimension  $r \times r$ , whose elements are bounded nonlinear real functions of  $x_s$ . Hence, the following equation is obtained

$$\dot{\sigma}_s(x_s) = [\partial\sigma_s/\partial x_s] \dot{x}_s = -L_s(x_s)\sigma_s(x_s). \quad (14)$$

The stability of the slow reduced system in the sliding surface is assured if condition (11) is fulfilled.

The fast sliding-mode control can be obtained in a similar way than the one used for the slow sliding-mode control. This control law is given by

$$u_f = - \left[ \frac{\partial\sigma_f}{\partial \bar{\eta}} g_2(\bar{x}) \right]^{-1} \left[ \frac{\partial\sigma_f}{\partial \bar{\eta}} F_2(\bar{x})\bar{\eta} + L_f(\bar{\eta})\sigma_f(\bar{\eta}) \right] \quad (15)$$

where  $\sigma_f(\bar{\eta}) = 0$  is the switching surface and  $L_f(\bar{\eta})$  is a positive matrix of dimension  $r \times r$ . The fast sliding mode dynamics is given by

$$\frac{\partial\sigma_f}{\partial \tau} = -L_f(\bar{\eta})\sigma_f(\bar{\eta}), \quad (16)$$

and the same arguments used for the slow subsystem can be applied to the boundary layer system to carry out its stability analysis [1].

The composite control for the original nonlinear singularly perturbed system (2)-(3) can then be expressed by [6]

$$u = u_s + u_f. \quad (17)$$

The asymptotic stability properties of the closed-loop system nonlinear singularly perturbed system are studied in [1] and [5].

#### 4. A High Gain Nonlinear Observer.

When all the inputs applied to a nonlinear system do not affect its observability, these are called *universal inputs* and the state estimators or observers designed are referred as *uniform observers*. In the literature, many observers have been proposed for nonlinear systems (see, for example, [2] and the references therein). In this paper, a uniform observer which allows to estimate the states of a nonlinear system is developed. Let us suppose that the singularly perturbed system (2)-(3) can be written, after

a (possible) state coordinate transformation  $\zeta = \Phi(x, z)$ , in the form [4]

$$\frac{d\zeta}{dt} = F(y)\zeta + G(u, \zeta) \quad (18)$$

together with a single output  $y \in \mathbb{R}$

$$y = C\zeta \quad (19)$$

where  $\zeta \in \mathbb{R}^{n+m}$ ,  $u \in \mathbb{R}^r$  is the control input,  $C = [1, 0, 0, \dots, 0, 0]$  and

$$F(y) = \begin{bmatrix} 0 & f_1(y) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & f_2(y) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f_{n+m-1}(y) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

$$G(u, \zeta) = \begin{bmatrix} g_1(u, \zeta_1) \\ g_2(u, \zeta_1, \zeta_2) \\ \vdots \\ g_{n+m-1}(u, \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{n+m-1}) \\ g_{n+m}(u, \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{n+m-1}, \zeta_{n+m}) \end{bmatrix}.$$

It is also assumed that the functions  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, n+m-1$ , are of class  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , with respect to  $y$  and that the functions  $g_i$ ,  $i = 1, \dots, n+m$ , are globally Lipschitz with respect to  $\zeta$  and uniformly with respect to  $u$ . In addition, one assumes there is a class of bounded controls  $U \subset \mathbb{R}^r$ , a compact set  $K \subset \mathbb{R}^{n+m}$ , and constants  $\alpha$  and  $\beta$  such that, for each  $u \in U$  and each output  $y$  associated  $u$  and the initial condition  $\zeta(0) \in K$ ,

$$\alpha \leq f_i(y) \leq \beta, \quad i = 1, \dots, n+m-1. \quad (20)$$

Let us define the system

$$\frac{d\hat{\zeta}}{dt} = F(y)\hat{\zeta} + G(u, \hat{\zeta}) - \bar{S}_\theta^{-1}(y)C^T[C\hat{\zeta} - y] \quad (21)$$

where  $\bar{S}_\theta = \Omega(y)S_\theta\Omega(y)$  with

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_1(y) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & f_1(y)f_2(y) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \prod_{i=1}^{n+m-1} f_i(y) \end{bmatrix},$$

and  $S_\theta$  being a symmetric positive definite matrix which is the unique solution of the algebraic equation

$$\theta S_\theta + A^T S_\theta + S_\theta A - C^T C = 0 \quad (22)$$

where the matrix  $A$  is in the Brunovsky canonical form. In addition, one also assumes that  $\bar{\Omega}$  is bounded.

Let  $y(t)$  be the output of system (18) associated to the initial state  $\zeta(0) \in K$  and the input  $u \in U$ . From (20), it

follows that  $\Omega(y)$  is invertible and, when premultiplying both sides of (22) by  $\Omega$ , one obtains

$$\theta \bar{S}_\theta + F^T(y) \bar{S}_\theta + \bar{S}_\theta F(y) - C^T C = 0$$

where one can verify that  $F(y) = \Omega^{-1}(y)A\Omega(y)$  and  $C\Omega(y) = C$ . Let  $e(t) = \hat{\zeta}(t) - \zeta(t)$  be the estimation error, then

$$\dot{e} = [F(y) - \bar{S}_\theta^{-1}(y)C^T C]e + [G(u, \hat{\zeta}) - G(u, \zeta)].$$

If one defines the diagonal matrix  $\Delta_\theta = \text{diag}(1, 1/\theta, \dots, 1/\theta^{n+m-1})$ , it is possible to show that  $S_\theta = (1/\theta)\Delta_\theta S_1 \Delta_\theta$  where  $S_1$  is the unique solution to equation (22) with  $\theta = 1$ . If the change of variable  $\bar{e} = \Omega(y)\Delta_\theta e$  is now introduced, one has

$$\frac{d\bar{e}}{dt} = \theta[A - S_1^{-1}C^T C]\bar{e} + \Omega(y)\Delta G_\theta(u, \zeta, \hat{\zeta}) + \dot{\Omega}(y)\Omega^{-1}(y)\bar{e}$$

where  $\Delta G_\theta(u, \zeta, \hat{\zeta}) = \Delta_\theta[G(u, \hat{\zeta}) - G(u, \zeta)]$ , and the Lyapunov candidate function

$$V_e(\bar{e}) = \bar{e}^T S_1 \bar{e}$$

can be used to prove the following result via stability Lyapunov methods.

**Theorem 4.1** Consider the system (18). Then there exists  $\theta_0 > 0$  such that for all  $\theta \geq \theta_0$ , for all  $u \in \mathcal{U}$  and for all  $\zeta(0)$  and  $\hat{\zeta}(0)$  that belong to  $\mathcal{K}$ , the system (21) is an exponential observer for system (15) with arbitrarily decay exponential rate.

The stability of the closed-loop system when a composite control (17) is used and the state is replaced by its estimate (21) can be carried out following the same lines of [5].

## 5. Application to the Model of the Manipulator.

### 5.1. Control Law Design.

By means of the assignment  $x = \text{col}(q_1, \dot{q}_1)$ ,  $z = \text{col}(k(q_1 - q_2), \epsilon k(\dot{q}_1 - \dot{q}_2))$  where  $\epsilon \in [0, 1)$ , it is possible to write the model (1) in the standard singularly perturbed form (2)-(3) with

$$f_1(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{mgl}{J} \sin(x_1) \end{bmatrix},$$

$$F_1(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1/I & 0 \end{bmatrix},$$

$$f_2(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\alpha mgl}{J} \sin(x_1) + \frac{\alpha B}{J} x_2 \end{bmatrix},$$

$$F_2(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\alpha(I+J)}{J} & -\frac{\epsilon B}{J} \end{bmatrix},$$

$$g_1(x) = 0, \quad g_2(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\alpha/J \end{bmatrix}$$

where  $\alpha = k\epsilon^2$ , this is the flexible joint stiffness coefficient is assumed to be a  $O(1/\epsilon^2)$  for the parameter  $\epsilon$  [7]. The slow reduced system then takes the form (4) with

$$f(x_s) = \begin{bmatrix} x_{s2} \\ -\frac{mgl}{(I+J)} \sin(x_{s1}) - \frac{B}{(I+J)} x_{s2} \end{bmatrix},$$

$$g(x_s) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{(I+J)} \end{bmatrix}$$

while the  $O(\epsilon)$  approximation of the exact fast subsystem has the form

$$\frac{d\tilde{\eta}}{d\tau} = A_2 \tilde{\eta} + B_2 u_f \quad (23)$$

where

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\alpha(I+J)}{J} & -\frac{\epsilon B}{J} \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\alpha/J \end{bmatrix}.$$

The approximation (23) is stable since the eigenvalues of the matrix  $A_2$  have all negative real parts.

Since it is desired that the rotor position tracks a reference signal, the following slow switching function is chosen:

$$\sigma_s(x_s) = s_1(x_{s1} - x_r) + s_2(x_{s2} - \dot{x}_r) \quad (24)$$

where  $s_1$  and  $s_2$  are constant real coefficients, and  $x_r$  is the reference signal. It is also assumed that  $x_r(t)$  and  $\dot{x}_r(t)$  are bounded for all  $t \geq 0$ . The choice (24) leads, in accordance to section 3, to the slow control (12) with

$$u_{s,e} = mgl \sin(x_{s1}) + (B - \frac{s_1(I+J)}{s_2})x_{s2}, \quad (25)$$

$$u_{s,N} = -\frac{s_1(I+J)}{s_2} L_s(x_s)(x_{s1} - x_r) - (I+J)L_s(x_s)(x_{s2} - \dot{x}_r) \quad (26)$$

where  $L_s(x_s)$  has been selected, for simplicity, as a strictly positive constant, i.e.  $L_s(x_s) = \ell_s > 0$ . After substitution of the slow control in the slow reduced system one can easily verify that the closed-loop slow sliding-mode equation is stable if the constants  $s_1$ ,  $s_2$  and  $\ell_s$  are chosen in such a way that all the roots of the polynomial  $s^2 + s(s_1/s_2 + \ell_s) + (s_1\ell_s/s_2) = 0$  are in the strictly left-half complex plane. On the other hand, from  $\dot{\sigma}_s = -\ell_s \sigma_s$  one has that there exists a slow sliding manifold.

For the fast subsystem, one chooses the fast switching function

$$\sigma_f(\tilde{\eta}) = \bar{s}_1 \tilde{\eta}_1 + \bar{s}_2 \tilde{\eta}_2 \quad (27)$$

where  $\bar{s}_1$  and  $\bar{s}_2$  are also constant real coefficients. In accordance to equation (15), one obtains the fast control

$$u_f = \left\{ \frac{L_f(\hat{\eta})J\bar{s}_1}{\alpha\bar{s}_2} - \left(\frac{J}{I} + 1\right)\hat{\eta}_1 + \left[ \frac{J\bar{s}_1}{\alpha\bar{s}_2} - \frac{\epsilon B}{\alpha} + \frac{L_f(\hat{\eta})J}{\alpha} \right]\hat{\eta}_2 \right\} \quad (28)$$

where, again, for simplicity,  $L_f(\hat{\eta})$  is chosen as a strictly positive constant, i.e.  $L_f(\hat{\eta}) = \ell_f > 0$ . In the same manner, and after substitution of this control into (23) one has that the closed-loop fast sliding-mode equation is asymptotically stable whenever the constants  $\bar{s}_1$ ,  $\bar{s}_2$ , and  $\ell_f$  are chosen such that the polynomial  $s^2 + s(\bar{s}_1/\bar{s}_2 + \ell_f) + (\bar{s}_1\ell_f/\bar{s}_2) = 0$  has all roots strictly in the left-half complex plane. In the same way, from  $\partial\sigma_f/\partial\tau = -\ell_f\sigma_f$ , there also exists a fast sliding manifold.

## 5.2. Estimation of the Link and Hub Motor Angular Speeds.

The controller designed in subsection 5.1 requires a full measurement of the link and hub motor angular positions and speeds. However, only angular position measurements are usually available in practice. In order to estimate the angular speeds of the link and the hub motor, a high gain observer is designed in this subsection; other kinds of observers have been designed for this type of manipulators [8]. By making the coordinate transformation  $\zeta_1 = \tau_1$ ,  $\zeta_2 = \tau_2$ ,  $\zeta_3 = z_1$  and  $\zeta_4 = z_2$  one can write the singularly perturbed system associated to the manipulator in the form (18) with  $\zeta = \text{col}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4)$  and

$$F(y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\epsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$G(\zeta, u) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{mgl}{I}\sin(\zeta_1) \\ 0 \\ G_3(\zeta, u) \end{bmatrix}$$

where

$$G_3(\zeta, u) = -\frac{\alpha mgl}{\epsilon I}\sin(\zeta_1) + \frac{\alpha B}{\epsilon J}\zeta_2 - \frac{\alpha(I+J)}{\epsilon IJ}\zeta_3 - \frac{B}{J}\zeta_4 - \frac{\alpha}{\epsilon}u.$$

A high gain observer for the state variable  $\zeta$  that has the form (21) is then proposed where  $S_\theta$  is the unique solution of equation (22).

## 5.3. Simulation Results.

The single-link flexible joint robot manipulator described by equations (1) was simulated together with the controller and observer designed in subsections 5.1 and 5.2, and using the nominal values  $I = 0.031$ ,  $J = 0.004$ ,  $B = 0.007$ ,  $k = 7.13$  and  $mgl = 0.8$ , together with  $\epsilon = 0.0001$  (i.e.  $\alpha = 7.13 \times 10^{-8}$ ) [7]. The control law

gains were chosen as  $s_1 = 20$ ,  $s_2 = 25$ ,  $\ell_f = 60$ ,  $\bar{s}_1 = 1$ ,  $\bar{s}_2 = 10$  and  $\ell_f = 0.1$ . Such a selection guarantees the stability of the slow and fast sliding-mode equations and the existence of the corresponding sliding modes. The parameter  $\theta$  in the observer equations was chosen as  $\theta = 20$ . From this choice, a solution to equation (20) was found. The initial conditions of the manipulator variables and the estimates were fixed to  $q_1(0) = 0$ ,  $\dot{q}_1(0) = 0$ ,  $q_2(0) = 0$ ,  $\dot{q}_2(0) = 0$ ,  $\hat{z}_1(0) = 0.2$ ,  $\hat{z}_2(0) = 0.01$ ,  $\hat{z}_3(0) = 0.002$  and  $\hat{z}_4(0) = 0.003$ . The reference signal considered was  $x_r(t) = 0.5\sin(t)$ . The time closed-loop plots showing the dynamic behavior of the link angular position, the reference signal, the link angular speed, the time derivative of the reference signal, and the estimation errors  $e_1$  and  $e_2$  are given in figures 2 and 3. From these plots, one can notice that a good tracking performance is obtained. Also, the control variable is kept within practical limits of operation.

## 6. Conclusions.

A nonlinear control-observer structure based on a class of nonlinear singularly perturbed systems and canonical representations has been presented and applied to the model of a single-link flexible joint robot manipulator. A good trajectory tracking performance is obtained for the link angular position when the structure is used, thus making it a promising approach for the control of such electromechanical devices.

## References

- [1] Jm. Alvarez and G. Silva, "Two time scale sliding mode control for a class of nonlinear systems," to appear in Int. J. of Robust Non. Contr.
- [2] G. Bornard, F. Celle-Couenne and G. Gilles, "Observability and observers," in Systèmes Non Linéaires, A. J. Fossard and D. Normand-Cyrot Editors, Masson, Paris, Vol.1, pp. 177-221, 1993.
- [3] B. Brogliato, R. Ortega and R. Lozano, "Global tracking controllers for flexible-joint manipulators: a comparative study," Automatica, Vol. 31, No. 7, pp 41-956, 1995.
- [4] K. Busawon, *Sur les observateurs des systèmes non-linéaires et le principe de separation*, Ph.D. thesis, Université Claude Bernard Lyon I, Lyon, France, 1993.
- [5] J. De-León, R. Castro and Jm. Alvarez, "Two-Time scale sliding mode control and state estimation for nonlinear systems," in Prep. 13th IFAC World Congress, San Francisco, CA, vol. F, pp. 265-270, 1996.
- [6] P. V. Kokotovic and H. K. Khalil, J. O'Reilly, *Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design*, Academic Press, London, 1986.
- [7] M. W. Spong, "Control of flexible joint robots: a survey," Technical Report No. UIUL-ENG-90-2203/DC-



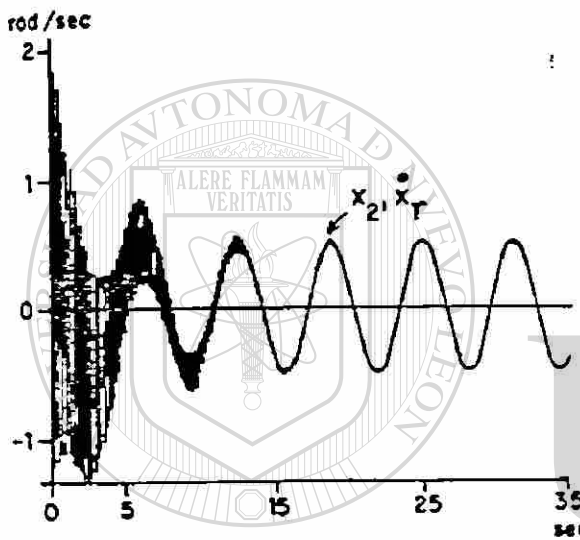
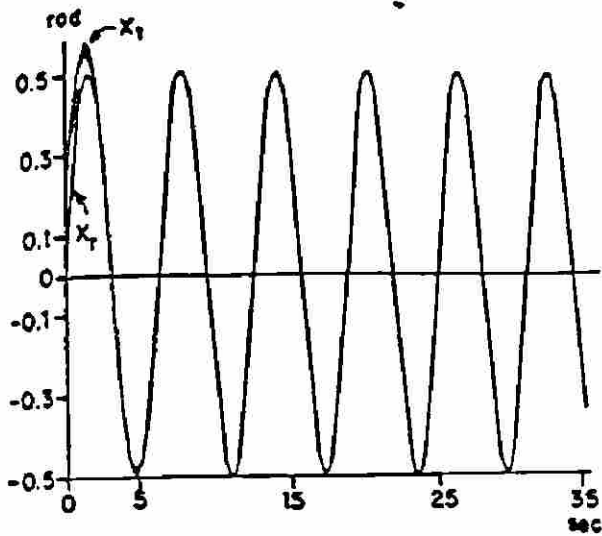


Figure 2: Time response of  $x_1$ ,  $x_r$ ,  $x_2$  and  $\dot{x}_r$ .

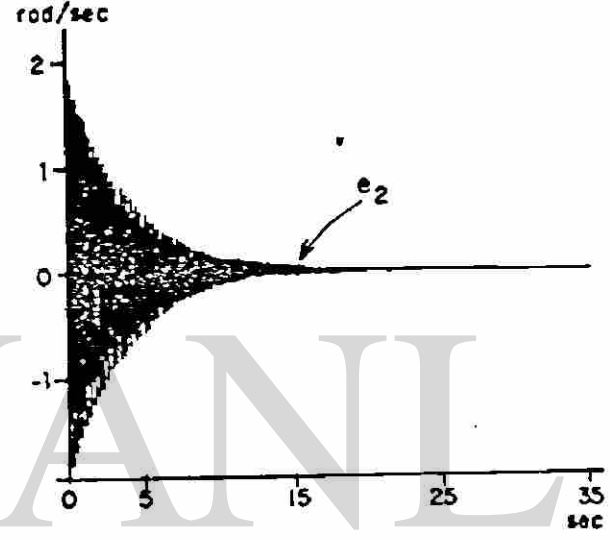
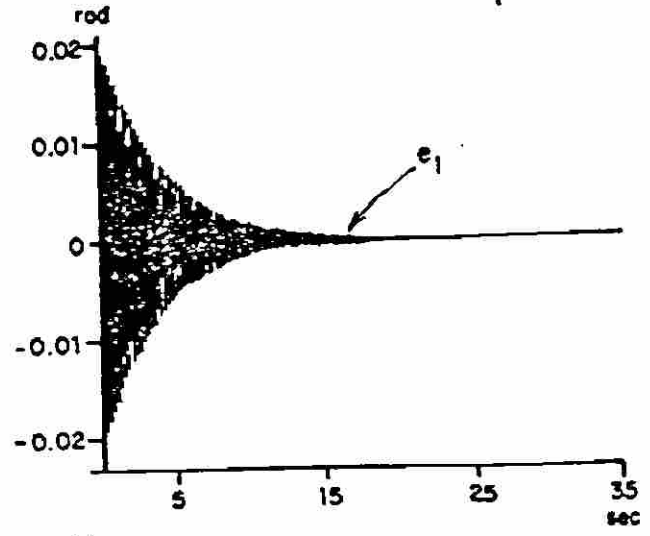


Figure 3: Time response of the estimation errors  $e_1 = \hat{\zeta}_1 - \zeta_1$  and  $e_2 = \hat{\zeta}_2 - \zeta_2$ .

116, Coordinated Science Laboratory, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1990.

[8] P. Tomei, "An observer for flexible joint robots," IEEE Trans. Aut. Contr., Vol. 35, No. 6, pp. 739-743, 1990.

[9] V. I. Utkin, *Sliding Modes in Control and Optimization*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

PROCEEDINGS

1998 IEEE/RSJ INTERNATIONAL CONFERENCE

Volume 1  
98CH36190

IROs '98

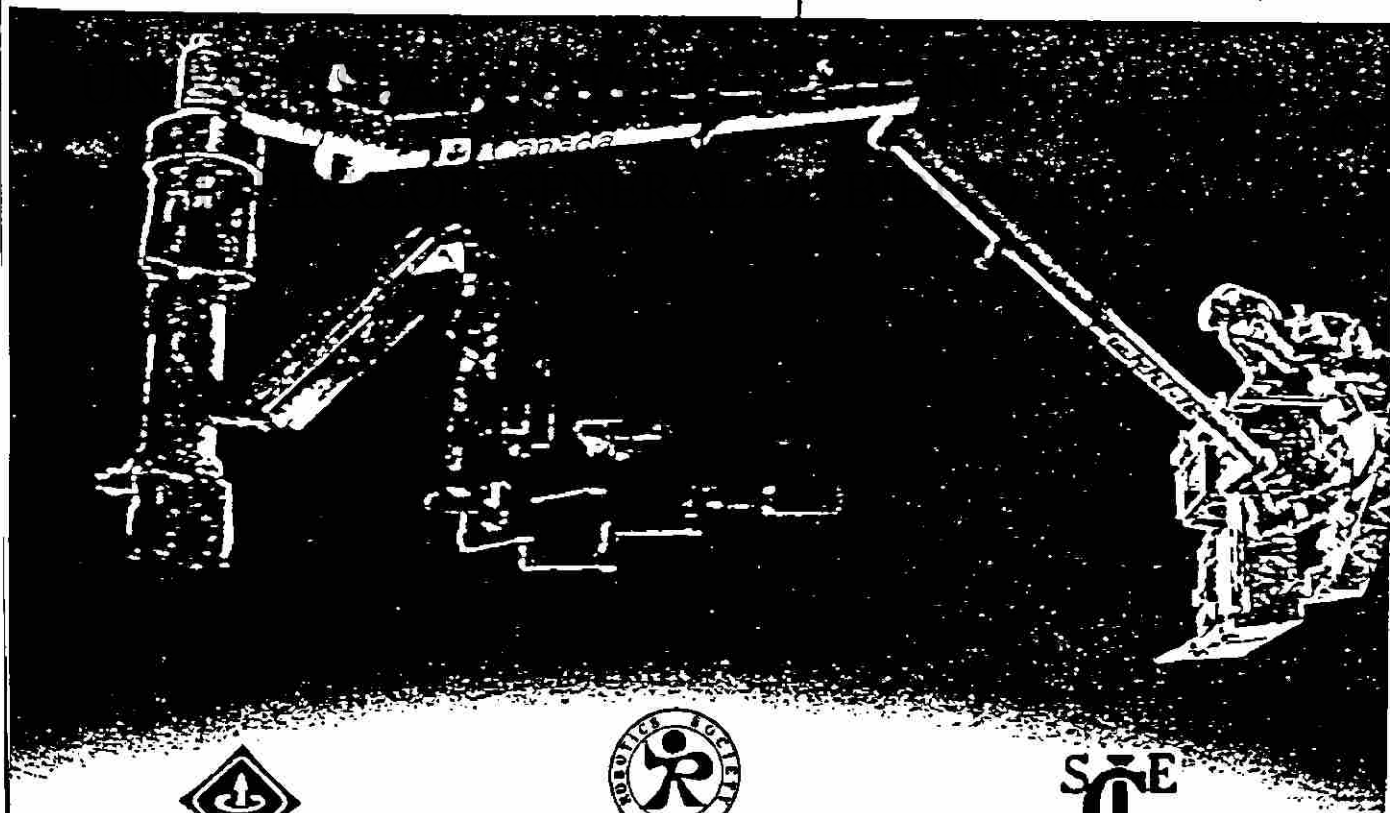
0110 1100 1100 1100
1101 1001 0111 0101
1001 1000 1001 1001
1001 1001 0010 0111
1000 1001 1001 1100
0100 1011 1011 0111
1010 1000 1000 0110
0111 0010 1001 0110
1001 0110 1011 1101
0000 1011 0110 0000
0100 0001 0110 1000

# INTELLIGENT ROBOTS AND SYSTEMS

October 13-17, 1998

Victoria Conference Centre

Victoria, B.C., Canada



# Proceedings

## 1998 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems

### Innovations in Theory, Practice and Applications

October 13 - 17, 1998  
Victoria Conference Centre  
Victoria, B.C., Canada

#### *Sponsoring Organizations*

IEEE Industrial Electronics Society  
IEEE Robotics and Automation Society  
Robotics Society of Japan  
Society of Instrumentation and Control Engineers  
New Technology Foundation

**Volume 1**  
**Pages 1 - 690**

## TASK PLANNING AND OPTIMIZATION

Empirical Modeling and Comparison of Robotic Tasks.....	642
<i>Jane Mulligan</i>	
Optimization of Process Dynamics in Robotic Manipulation.....	648
<i>G. Prokop and F. Pfeiffer</i>	
Assembly Model Data in Robot Cell Systems.....	655
<i>Satori Kojima, Peter Kerites, Takanori Hayashi, and Hideki Hashimoto</i>	
A Graph-Rewriting Approach to High-Level Task Planning - An Introduction .....	661
<i>Nilanjan Sarkar and Medha Shukla Sarkar</i>	

## FLEXIBLE MANIPULATORS II

Combined PD Feedback and Distributed Piezoelectric-Polymer Vibration Control of a Single-Link Flexible Manipulator .....	667
<i>Dong Sun and James K. Mills</i>	
Dynamic Modeling of Flexible-Link Manipulators Using Neural Networks with Application to the SSRMS .....	673
<i>H.A. Talebi, R.V. Patel, and H. Asmer</i>	
A Comparative Study of Speed and Position Control of a Flexible Joint Robot Manipulator.....	679
<i>J. De León-Morales and J. G. Alvarez Leal</i>	
A Numerical Method to Minimize Tracking Error of Multi-Link Elastic Robot .....	685
<i>Pritam Kumar Sarkar, Motoji Yamamoto, and Akira Mohri</i>	

---

## Volume 2 (pages 691-1375)

## VISUAL SERVOING

2D 1/2 Visual Servoing Stability Analysis with Respect to Camera Calibration Errors .....	691
<i>Ezio Malis, Francois Chaumette, and Sylvie Boudet</i>	
Pose Alignment of an Eye-In-Hand System Using Image Morphing.....	698
<i>Rahul Singh, Richard M. Voyles, David Littau, and Nikolaos P. Papanikolopoulos</i>	
Optimal Motion Control for Image-Based Visual Servoing by Decoupling Translation and Rotation .....	705
<i>Koichiro Deguchi</i>	
Precise Planar Positioning Using Visual Servoing Based on Coarse Optical Flow.....	712
<i>Takashi Mitsuda, Yoji Miyazaki, Noriaki Maru, Karl F. MacDorman, and Fumio Miyazaki</i>	

# A Comparative Study of Speed and Position Control of a Flexible Joint Robot Manipulator.

J. De León-Morales

Universidad Autónoma de Nuevo León

Programa Doctoral en Ingeniería

A. P. 148-F, San Nicolás de Los Garza; N. L. C.P. 66451.

J. G. Alvarez-Leal

Instituto Tecnológico de Saltillo.

Apdo. Postal 58, Suc. C.

25280 Saltillo, Coahuila.

## ABSTRACT

During the last few years, considerable research efforts have been directed toward the control problem of a flexible joint robots. In this paper we investigate two techniques for position and speed control of a single flexible joint robot manipulator. The connection between the two controllers are studied and compared using a flexible joint robot model.

Keywords: Flexible Joint Robots, Singular Perturbations, Differential Algebra, Observers.

## 1 INTRODUCTION

During the last few years, considerable research efforts have been directed toward the control problem of flexible joint robots. In this paper we propose a controller based on an observer which is designed using two methodologies. Singular Perturbations Theory and Differential Algebra. On the other hand, the observer problem for flexible joint robots is an important one in robot control theory and the great practical importance. In fact many control techniques for these robots require the knowledge of four variables for each joint, which may be either positions and velocities of the motors and of the links or positions, velocities, accelerations and jerks of the links. Some interesting results on the observer problem for these robots are given for each controller.

Several controller design techniques have been proposed, from different perspectives, for the stabilization of nonlinear systems [1, 8, 12]. Recently, a considerable number of works have studied the robot control problem with joint flexibility. From a practical point of view, the effect of the elasticity in the robot must be considered in the control design. Moreover, the number of degree of freedom is twice the number of control actions, and the matching property between nonlinearities and inputs is lost [1].

Two-time scale sliding Mode control based on singularly perturbed theory for a class of nonlinear systems is proposed. Moreover, a dynamical feedback error linearization strategy based on Fliess' generalized observability canonical form (GOCF) and the generalized controller canonical form (GCCF) is given (see [4,6,10]).

On the other hand, the controllers designed here, require the knowledge of the whole vector state to be implemented. It is possible to substitute the unknown information by means of an auxiliary system called observer. In this paper, a high gain observers are used to estimate the state of the system for each methodology in order to implement ours controllers [2, 5].

This paper is organized as follows, a control law based on the sliding mode technique for a class of nonlinear singularly perturbed systems, as well as an observer is proposed in section 2. In section 3, using techniques of the differential algebra, a controller based on an observer is designed. Numerical simulations of these two schemes of control are given and compared. Finally, some conclusions close this paper.

## 2 TWO-TIME SCALE SLIDING MODE CONTROL

Let us consider the following class of nonlinear singularly perturbed systems

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x) + F_1(x)z + g_1(x)u, & x(t_0) = x_0, t_0 \geq 0 \\ \epsilon \dot{z} = f_2(x) + F_2(x)z + g_2(x)u, & z(t_0) = z_0 \end{cases} \quad (1)$$

where  $x \in R^n$  is the slow state,  $z \in R^m$  is the fast state,  $u \in R^r$  is the control input,  $\epsilon$  is a small positive parameter such that  $\epsilon \in [0, 1)$ , and  $f_1, f_2$ , the columns of the matrices  $F_1, F_2, g_1$  and  $g_2$  are assumed to be bounded analytical real vector fields. In addition, it is supposed that,  $f_1(0) = f_2(0) = 0$  and, for  $u = 0$ , the origin is an isolated equilibrium state. Moreover  $F_2(x)$  is assumed to be nonsingular for all  $x \in B_x$ , where  $B_x$  denote the

ball centered in  $x = 0$ .

## 2.1 THE SINGULAR PERTURBATION METHODOLOGY

The singular perturbation methodology permits to decompose the original system in two subsystems of lower dimension, both described in different time scales [7, 8]. The slow reduced system is found by making  $\varepsilon = 0$  in (1), resulting in the following reduced  $n - l$  order slow system

$$\dot{\bar{x}}_s = f(x_s) + g(x_s)u_s, \quad x_s(t_0) = x_0 \quad (2)$$

with  $x_s = h(x_s) := -F_2^{-1}(x_s)[f_2(x_s) + g_2(x_s)u_s]$ , and  $x_s \in R^n$ ,  $z_s \in R^m$  and  $u_s \in R^r$  denote the slow components of the original variables  $x$ ,  $z$  and  $u$ , respectively, and  $f(x_s) := f_1(x_s) - F_1(x_s)F_2^{-1}(x_s)f_2(x_s)$ ;  $g(x_s) := g_1(x_s) - F_1(x_s)F_2^{-1}(x_s)g_2(x_s)$ . The fast dynamics is  $\frac{d\hat{\eta}}{d\tau} = F_2(\bar{x})\hat{\eta} + g_2(\bar{x})u_f$ ;  $\hat{\eta}(0) = z_0 - h(x_0, 0)$ , being  $\hat{\eta}$  an  $O(\varepsilon)$  approximation of  $\eta$  in the initial boundary layer and  $\bar{x}(\tau) = x(\varepsilon\tau + t_0)$ ,  $\tau = (t - t_0)$ .

## 2.2 SLIDING-MODE CONTROL DESIGN

### 2.2.1 THE SLOW SUBSYSTEM

The equivalent control method [3] is used to determine the slow reduced system motion restricted to the slow switching surface  $\sigma_s(x_s) = \text{Col}(\sigma_{s_1}(x_s), \dots, \sigma_{s_r}(x_s)) = 0$ , where all the slow switching surfaces  $\sigma_{s_i}(x_s)$ ,  $i = 1, \dots, r$ ; are assumed to be locally Lipschitz-continuous functions for all  $x_s \in R^n$ , obtaining the so-called slow equivalent control

$$u_{s,e} = -[s_s(x_s)g(x_s)]^{-1}s_s(x_s)f(x_s); \quad (3)$$

where  $s_s(x_s) = \frac{\partial \sigma_s}{\partial x_s}$ , and the matrix  $s_s(x_s)g(x_s)$  is assumed nonsingular  $\forall x_s \in R^n$ .

Obviously, in order to satisfy the above condition, the stabilization of the linear approximation of the slow reduced system is necessary. The following control law can be used to complete the design of the slow control

$$u_s = u_{s,e} + u_{s,N} \quad (4)$$

where  $u_{s,e}$  is the slow equivalent control given by (3), which acts when the slow reduced system is restricted to  $\sigma_s(x_s) = 0$ , while  $u_{s,N}$  is the discontinuous part of the control  $u_s$  acting when  $\sigma_s(x_s) \neq 0$  (see [3]). In this work the control  $u_{s,N}$  is selected as a nonlinear feedback law of the type

$$u_{s,N} = -[s_s(x_s)g(x_s)]^{-1}L_s(x_s)\sigma_s(x_s) \quad (5)$$

where  $L_s(x_s)$  is a positive definite matrix of dimension  $r \times r$ ,  $\forall x_s \in B_{z_s}$ , whose elements are bounded nonlinear real functions of  $x_s$ .

The complete slow control law for the slow reduce subsystem is follows

$$u_s(x_s) = -[s_s(x_s)g(x_s)]^{-1}\{s_s(x_s)f(x_s) + L_s(x_s)\sigma_s(x_s)\} \quad (6)$$

### 2.2.2 THE FAST SUBSYSTEM

Consider the fast nonlinear switching surface defined by  $\sigma_f(\hat{\eta}) = \text{Col}(\sigma_{f_1}(\hat{\eta}), \dots, \sigma_{f_r}(\hat{\eta})) = 0$ , where all the slow switching surfaces  $\sigma_{f_i}(\hat{\eta})$ ,  $i = 1, \dots, r$ ; are assumed to be locally Lipschitz-continuous functions for all  $\hat{\eta} \in R^n$ . By using the equivalent control method for restricting the motion of the fast subsystem on the fast surface  $\sigma_f(\hat{\eta}) = 0$ , then the fast equivalent control is given by

$$u_{f,e}(\hat{\eta}) = -(s_f(\hat{\eta})g_2(\bar{x}))^{-1}s_f(\hat{\eta})F_2(\bar{x})\hat{\eta}, \quad (7)$$

where  $s_f(\hat{\eta}) = \frac{\partial \sigma_f}{\partial \hat{\eta}}(\hat{\eta})$ , and the matrix  $s_f(\hat{\eta})g_2(\bar{x})$  is nonsingular. In a similar way, the discontinuous fast control  $u_{f,N}(\hat{\eta})$  has the following form

$$u_{f,N}(\hat{\eta}) = -\left\{s_f(\hat{\eta})g_2(\bar{x})\right\}^{-1}L_f(\hat{\eta})\sigma_f(\hat{\eta}) \quad (8)$$

where  $L_f$  is a positive definite matrix and  $s_f(\hat{\eta})g_2(\bar{x})$  is nonsingular (see [13]). Then the complete fast control law for the fast reduce subsystem is follows

$$u_f(x_s) = -\{s_f(x)g_2(x)\}^{-1}\{s_f(\eta)F_2(x)\eta + L_f(\eta)\sigma_f(\eta)\} \quad (9)$$

The composite control for the original nonlinear singularly perturbed system (1) can be expressed by

$$u = u_s + u_f. \quad (10)$$

However, the above control was obtained in function of the variables  $x_s$  and  $\hat{\eta}$ . In order to express this composite control in function of the original variables  $x$  and  $z$ , we replace  $x_s$  by  $x$ , and  $\hat{\eta}$  by  $z - h(x)$  in such a way the composite controller is given by

$$u = -\{s_s(x)g(x)\}^{-1}\{s_s(x)f(x) + L_s(x)\sigma_s(x)\} - \{s_f(x)g_2(x)\}^{-1}\{s_f(\eta)F_2(x)\eta + L_f(\eta)\sigma_f(\eta)\} \quad (11)$$

## 2.3 A HIGH GAIN NONLINEAR OBSERVER

Let us suppose that the singularly perturbed system (1) can be written, after a state coordinate transformation  $\varsigma = \Phi(x, z)$ , in the following form [2]:

$$\begin{cases} \dot{\varsigma}(t) = F(y(t))\varsigma(t) + G(u(t), \varsigma(t)) \\ y = C\varsigma(t) \end{cases} \quad (12)$$

where  $\zeta \in R^n$ ,  $u \in R^r$ ,  $y \in R$ ,  $C = (1 \ 0 \ \dots \ 0)$ ,  
 $F(y(t))_{i,j} = \begin{cases} f_i(y(t)) & \text{if } i=j-1 \\ 0 & \text{everywhere} \end{cases}$ ,  $G(u, \zeta) =$   
 $Col(g_1(u, \zeta_1), g_2(u, \zeta_1, \zeta_2), \dots, g_n(u, \zeta_1, \dots, \zeta_n))$

It is also assumed that the functions  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , are of class  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , with respect to  $y$  and that the functions  $g_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  are globally Lipschitz with respect to  $\zeta$  and uniformly with respect to  $u$ . In addition, one assume there is a class of bounded controls  $U \subset R^r$ , and a compact set  $K \subset R^n$ , and constants  $\alpha$  and  $\beta$ , such that for each  $u \in U$  and each output  $y(t)$  associated  $u$  and the initial condition  $\zeta(0) \in K$ ,  $0 \leq \alpha \leq f_i(y(t)) \leq \beta$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ . Let us define the system

$$\dot{\hat{\zeta}}(t) = F(y(t))\hat{\zeta}(t) + G(u(t), \zeta(t)) - \bar{S}_\theta^{-1}(y)C^T[C\hat{\zeta} - y] \quad (13)$$

with  $\Omega(y) = Diag\{1, f_1(y), f_1(y)f_2(y), \dots, \prod_{i=1}^{n-1} f_i(y)\}$ ,  $\bar{S}_\theta = \Omega(y)S_\theta\Omega(y)$ , and assume that the time derivative of  $\Omega(y)$  is bounded.  $S_\theta$  is a symmetric positive definite matrix which is the unique solution of the algebraic Lyapunov:  $\theta S_\theta + A^T S_\theta + S_\theta A - C^T C = 0$ , with  $\theta > 0$ , and  $A_{i,j} = \delta_{i,j-1} = \begin{cases} 1 & \text{if } i=j-1 \\ 0 & \text{everywhere} \end{cases}$

## 2.4 APPLICATION TO THE MODEL OF THE FLEXIBLE ROBOT

In this work, we consider a single-link flexible joint robot directly actuated by a direct current electrical motor (hub motor) whose rotor is elastically coupled to the link [1,10,11]. The mathematical model for the manipulator is given by

$$\begin{aligned} I \ddot{q}_1 + B_v \dot{q}_1 + mgl \sin(q_1) + k(q_1 - q_2) &= 0 \\ J \ddot{q}_2 + B \dot{q}_2 - k(q_1 - q_2) &= u \end{aligned} \quad (14)$$

where  $q_1$  and  $q_2$  are the angular positions of the link and the hub motor, respectively, while  $u$  is the input force from the actuator (motor torque).  $I$  is the inertia of the arm,  $J$  denotes the motor inertia,  $B$  is the motor viscous damping.  $B_v$  is the link viscous damping,  $mgl$  is the nominal load in the arm and  $k$  is the flexible joint stiffness coefficient.

By means of the assignment

$$x_1 = q_1, x_2 = \dot{q}_1, z_1 = k(q_1 - q_2), z_2 = \varepsilon k(\dot{q}_1 - \dot{q}_2),$$

where  $k = \frac{\alpha}{\varepsilon^2}$  and  $\varepsilon \in [1, 0)$ , it is possible to write the model (14) in the standard singularly perturbed form (1),

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{mgl}{I} \sin(x_1) - \frac{B_v}{I} x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{I} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\varepsilon} z_1 \\ \dot{\varepsilon} z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\alpha B}{J} x_2 - \frac{\alpha mgl}{I} \sin(x_1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\alpha(\frac{1}{I} + \frac{1}{J}) & 0 \\ 0 & -\frac{B}{J} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\alpha}{J} \end{pmatrix} u \quad (15)$$

where  $\alpha = k\varepsilon^2$ , this is the flexible joint stiffness coefficient which is assumed to be a  $O(\frac{1}{\varepsilon})$  for the parameter  $\varepsilon$ .

Since it is desired that the rotor position tracks a reference signal, the following slow switching function is chosen

$$\sigma_s = s_1(x_1 - x_{ref}) + s_2(x_2 - \dot{x}_{ref}) \quad (16)$$

where  $s_1$  and  $s_2$  are constant real coefficients, and  $x_{ref}$  is the reference signal. It is also assumed that  $x_{ref}$  and  $\dot{x}_{ref}$  are bounded for all  $t > 0$ . Then, the slow control

$$u_s = \begin{pmatrix} B - \frac{s_1}{s_2}(I + J) - l_s(I + J) \end{pmatrix} x_2 + mgl \sin(x_1) - (I + J) l_s \frac{s_1}{s_2} (x_1 - x_{ref})$$

where  $L_s(x_s) = l_s > 0$ .

For the fast subsystem, one chooses the fast switching function  $\sigma_f = \sigma_{f1} \hat{\eta}_1 + \sigma_{f2} \hat{\eta}_2$  where are also constant real coefficients. In accordance to equation (9), one obtains the fast control

$$u_f = - \left( \frac{J}{I} + 1 \right) \eta_1 + \frac{s_{f1}}{s_{f2}} \frac{J}{\alpha} \eta_2 + \frac{J}{\alpha} l_s \frac{s_{f1}}{s_{f2}} \eta_1 + \frac{J l_s}{\alpha} \eta_2$$

and  $L_f(\hat{\eta}) = l_f > 0$  and  $s_f(\eta) = (s_{f1} \quad s_{f2})$ .

By making the following change of coordinates  $\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2, \xi_3 = z_1, \xi_4 = z_2$ , we obtain:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = -\frac{mgl}{I} \sin(\xi_1) - \frac{B_v}{I} \xi_2 - \frac{1}{I} \xi_3 \\ \dot{\xi}_3 = \frac{1}{\varepsilon} \xi_4 \\ \dot{\xi}_4 = -\frac{mgl}{\varepsilon I} \sin(\xi_1) + \frac{\alpha B}{\varepsilon J} \xi_2 - \frac{\alpha}{\varepsilon} \left( \frac{1}{I} + \frac{1}{J} \right) \xi_3 - \frac{B}{\varepsilon J} \xi_4 - \frac{\alpha}{\varepsilon J} u \\ y = \xi_1 \end{cases}$$

A high gain observer for the state variable that has the form

$$\dot{\hat{\xi}}(t) = F(y(t))\hat{\xi}(t) + G(u(t), \hat{\xi}(t)) - \bar{S}_\theta^{-1}(y)C^T[C\hat{\xi} - y]$$

where  $\bar{S}_\theta = \Omega(y)S_\theta\Omega(y)$ ,

$$F(y(t)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G(x, u) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{m\alpha l}{T} \sin(\xi_1) - \frac{B_f}{T} \xi_2 \\ 0 \\ -\frac{m\alpha l}{T} \sin(\xi_1) + \frac{\alpha B}{J} \xi_2 - \frac{\alpha}{\epsilon} (\frac{1}{T} + \frac{1}{J}) \xi_3 - \frac{B_f}{J} \xi_4 - \frac{\alpha}{J} u \end{pmatrix}$$

### 3 A DIFFERENTIAL ALGEBRAIC APPROACH

Consider the following Nonlinear System

$$(\Sigma_{NL}) : \begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x, u) \end{cases} \quad (17)$$

where  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}$ ,  $f$  and  $h$  are assumed to be polynomial in their arguments. Systems  $(\Sigma_{NL})$  are assumed to be universally observable (see [4, 6, 7]) with external behavior described by equations of the form.

$$\frac{d^n y}{dt^n} = -L_o \left( y, \frac{dy}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^r u}{dt^r} \right)$$

where  $L_o$  is a polynomial of its arguments. By defining locally  $\eta_i = \frac{d^{i-1}y}{dt^{i-1}}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , we obtain an explicit GOCF of systems  $(\Sigma_{NL})$  as follows

$$\dot{\eta}_i = \eta_{i+1}, 1 \leq i \leq n; \quad \dot{\eta}_n = -L_o \left( \eta, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^r u}{dt^r} \right) \quad (18)$$

for some  $\gamma > 0$ . Now, let  $y_R(t)$  be a prescribed reference output function which is differentiable at least  $n$  times,  $\frac{d^i y_R}{dt^i}$ ;  $1 \leq i \leq n$ . The controller is supposed to produce a scalar function  $u$ , which locally forces  $y$  to asymptotically converge towards  $y_R(t)$ . Define an output tracking error function  $e(t)$  as  $e(t) = y(t) - y_R(t)$ . By definition,  $\eta_i$  is equal to the  $(i-1)$ -th time derivative of  $y(t)$ , that is  $\eta_i = \frac{d^{i-1}y}{dt^{i-1}}$ ; for  $1 \leq i \leq n$ . Then, we have

$$\frac{d^i e(t)}{dt^i} = \eta_{i+1} - \frac{d^i y_R(t)}{dt^i}; \quad 1 \leq i \leq n-1; \quad (19)$$

$$\frac{d^n e(t)}{dt^n} = \frac{d\eta_n}{dt} - \frac{d^n y_R(t)}{dt^n}$$

Let  $p(s) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i s^i$  be Hurwitz polynomial and  $\bar{u} = (u, \dots, \frac{d^{r-1}u}{dt^{r-1}})$ . By requiring a linear time-invariant autonomous dynamics for the tracking error function:

$$\frac{d^n e(t)}{dt^n} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \frac{d^i e(t)}{dt^i} = 0.$$

Let  $e_i = \frac{d^{i-1}e(t)}{dt^{i-1}}$ , for  $1 \leq i \leq n$ , be the components of the error vector  $e = Col(e_1, e_2, \dots, e_n)$ , then we obtain

$$\frac{de}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} e = Fe \quad (20)$$

where

$$-L_o \left( \psi_R(t) + e, \bar{u}, \frac{d^r u}{dt^r} \right) - \frac{d^n y_R(t)}{dt^n} = - \sum_{i=1}^n a_{n-1} e_i \quad (21)$$

with  $\psi_R(t) = Col \left( y_R, \frac{dy_R}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}y_R}{dt^{n-1}} \right)$ , reference signals vector, and  $\bar{Y}_R = \left( y_R, \frac{dy_R}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}y_R}{dt^{n-1}} \right)$ . Now, writing the system (19) as follows:

$$\frac{de}{dt} = Ee + \varphi \left( e, \bar{Y}_R, \frac{d^r y_R}{dt^r}, \bar{u}, \frac{d^r u}{dt^r} \right) \quad (22)$$

where the elements of the matrix  $E$  are given by  $E_{i,j} = \delta_{i,j-1} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j-1 \\ 0 & \text{everywhere} \end{cases}$  and

$$\varphi \left( e, \bar{Y}_R, \frac{d^r y_R}{dt^r}, \bar{u}, \frac{d^r u}{dt^r} \right) = Col \left( 0 \dots 0 -L_o \left( \psi_R(t) + e, \bar{u}, \frac{d^r u}{dt^r} \right) - \frac{d^n y_R(t)}{dt^n} \right).$$

Then, the estimation of the tracking error  $e(t) = y(t) - y_R(t)$  is given by an exponential nonlinear observer (O) of the form [9]:

$$(O) : \begin{cases} \frac{d\hat{e}}{dt} = E\hat{e} - \Delta_0 K [C\hat{e}(t) - e_1(t)] \\ \quad \quad \quad + \varphi \left( \hat{e}(t), \bar{Y}_R, \frac{d^r y_R}{dt^r}, \bar{u}, \frac{d^r u}{dt^r} \right) \end{cases} \quad (23)$$

where  $\Delta_0 = diag(\theta, \theta^2, \dots, \theta^n)$  for some  $\theta > 0$  and  $K = Col(k_1, \dots, k_n)$ ,  $K$  is chosen such that  $\sigma(A - KC) \subset \mathbb{R}^-$ . Let  $\sigma(u_{\hat{e}}, y_R(t), \hat{e}) = -\frac{d^n y_R(t)}{dt^n} + \sum_{i=1}^n a_{i-1} \hat{e}_i - L_o \left( \psi_R(t) + \hat{e}, \bar{u}, \frac{d^r y_R}{dt^r} \right)$  and  $u_{\hat{e}}$  be the observer-based control resulting from  $\sigma(u_{\hat{e}}, y_R(t), \hat{e}(t)) = 0$ .

#### 3.1 CONTROL BASED ON DIFFERENTIAL ALGEBRA

From the dynamical system  $(\Sigma_R)$  which describing the motion of the robot, the parameter  $B_v$  must be different to zero because if  $B_v = 0$ , this technique can not be applied, and the zero dynamics becomes oscillatory (see [10]). Now let us define  $\bar{\beta}^2 = \frac{1}{k}$ , which is not to be considered as a small constant related to the singular perturbation techniques. Defining the following change of coordinates:

$$x_1 = q_2, x_2 = \dot{q}_2, x_3 = k(q_1 - q_2); x_4 = \frac{(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)}{\bar{\beta}}$$



Then, the dynamical model ( $\Sigma_R$ ) represented in the new coordinates results as follows

$$(\Sigma_M) : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -k_5 x_2 + k_1 x_3 + k_1 u \\ \dot{x}_3 = \frac{e_4}{\beta} \\ \dot{x}_4 = \{-k_2 k_3 \sin(\beta^2 k_3 + x_1) - k_4 x_3 - k_7 x_2 \\ -k_6 \beta x_4 - k_1 u\} / \beta \end{cases} \quad (24)$$

where  $k_1 = \frac{1}{J}$ ;  $k_2 = \frac{1}{J}$ ;  $k_3 = mgl$ ;  $k_4 = k_1 + k_2$ ;  $k_5 = \frac{B}{J}$ ;  $k_6 = \frac{B}{J}$ ;  $k_7 = k_6 - k_5$ .

The following coordinate transformation depending on the input which allows us to obtain a generalized observability canonical form (GOCF). For that, we have:

$$y = \eta_1 = x_1, \quad \dot{y} = \eta_2 = x_2, \quad \ddot{y} = \eta_3 = -k_5 x_2 + k_1 x_3 + k_1 u,$$

$$\ddot{\ddot{y}} = \eta_4 = (k_5)^2 x_2 - k_1 \{k_5 x_3 + \beta^{-1} x_4 + k_5 u + \frac{du}{dt}\}$$

and its corresponding inverse transformation is

$$x_1 = \eta_1, \quad x_2 = \eta_2, \quad x_3 = (\eta_3 + k_5 \eta_2 - k_1 u) / k_1,$$

$$x_4 = \beta \{ \eta_4 - (k_5)^2 x_2 + k_1 k_5 x_3 - k_1 k_5 u - k_1 \frac{du}{dt} \} / k_1.$$

Then the (GOCF) of (24) is given by

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = \eta_2, & \dot{\eta}_2 = \eta_3, & \dot{\eta}_3 = \eta_4, \\ \dot{\eta}_4 = -k_1 k_2 k_3 \beta^{-2} \sin(\beta^2 [k_5 \eta_2 - k_1 u + \eta_3] / k_1 + \eta_1) \\ - \beta^{-2} \{k_1 k_7 + k_4 k_5\} \eta_2 - \{ \frac{k_4}{\beta} + k_5 k_6 \} \eta_3 \\ - \{k_5 + k_6\} \eta_4 - \frac{k_2}{\beta} \{k_4 - k_1\} u + k_1 k_6 \frac{du}{dt} + k_1 \frac{d^2 u}{dt^2} \end{cases} \quad (25)$$

Now, let  $y_R(t)$  be a desired output reference trajectory of the angular position. Defining the tracking error as  $e(t) = x_1 - y_R(t)$ , then the tracking error dynamics is  $\frac{de}{dt} = Ee + \varphi(e_1, \dots, e_4, y_R, \dots, \frac{d^4 y_R}{dt^4}, u, \frac{du}{dt}, \frac{d^2 u}{dt^2})$ , with output  $y_T = e_1$ . Then, the following system is a nonlinear exponential observer for the estimation of the tracking error [9]:  $\frac{d\hat{e}}{dt} = E\hat{e} - \Delta_\theta K [C\hat{e}(t) - e_1(t)] + \varphi(\hat{e}(t), y_R, \dots, \frac{d^4 y_R}{dt^4}, u, \frac{du}{dt}, \frac{d^2 u}{dt^2})$ .

Then, the dynamical controller is given by

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dt^2} + (a_3 - k_5) \frac{du}{dt} + \left( k_5^2 - k_5 a_3 - k_1 \beta^{-2} \right) u = - \frac{a_2}{k_1} x_1 \\ - \left( \frac{k_7}{\beta} - \frac{a_1}{k_1} + \frac{k_5 a_2}{k_1} + \frac{k_3^2}{k_1} - \frac{k_4 a_3}{k_1} \right) x_2 + \left( \frac{k_4}{\beta} + \frac{k_5}{\beta} - \frac{a_3}{\beta} \right) x_4 \\ + \frac{k_2 k_3}{\beta} \sin(x_1 + \beta^2 x_3) + \left( \frac{d^4 y_R}{dt^4} + \sum_{i=1}^4 a_{i-1} \frac{d^{i-1} y_R(t)}{dt^{i-1}} \right) \frac{1}{k_1} \end{aligned}$$

and the desired dynamic performance can be obtained by choosing suitable  $a_1, a_2, a_3, a_4$ . However, this controller depends on all state which is unmeasurable, then we will

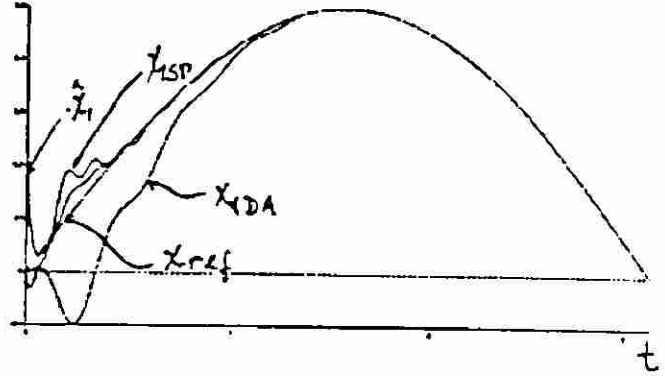


Figure 1 - Time response of the link angular position  $x_{1,PS}$  and  $x_{1,DA}$  the estimate  $\hat{x}_1$  and the reference signal  $x_{ref}$

replace the state estimated by the observer. Then, the dynamical controller as a function of the estimates is given by

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \hat{u}}{dt^2} + k_6 \frac{d\hat{u}}{dt} - \frac{1}{\beta} \{k_4 - k_1\} u_e = -k_2 k_3^{-2} \beta \sin(\beta^2 \hat{x}_3 + \hat{x}_1) \\ - \beta^{-2} \frac{1}{k_1} \{k_1 k_7 + k_4 k_5\} \hat{x}_2 - \frac{1}{k_1} \left\{ \frac{k_4}{\beta} + k_5 k_6 \right\} \hat{x}_3 \\ - \{k_5 + k_6\} \hat{x}_4 - \sum_{i=1}^4 \frac{a_{i-1}}{k_1} \left\{ \hat{x}_i + \frac{d^{i-1} y_R}{dt^{i-1}} \right\} + \frac{1}{k_1} \frac{d^4 y_R}{dt^4} \end{aligned}$$

where  $\hat{x}_1 = \hat{e}_1 + y_R$ ,  $\hat{x}_2 = \hat{e}_2 + \frac{dy_R}{dt}$ ,  $\hat{x}_3 = \{ \hat{e}_3 + \frac{d^2 y_R}{dt^2} + k_5 (\hat{e}_2 + \frac{dy_R}{dt}) - k_1 u \} / k_1$ ,  $\hat{x}_4 = \{ \hat{e}_4 + \frac{d^3 y_R}{dt^3} + k_5 (\hat{e}_3 + \frac{d^2 y_R}{dt^2}) - k_1 \frac{du}{dt} \} / \beta / k_1$ , is the inverse transformation in terms of the estimated tracking error.

## 4 SIMULATION RESULTS

Now, we will show how the controllers scheme are implemented to a model of a flexible joint robot. The simulation were performed with the following parameters  $k_1 = 3.33(m^2 Kg)^{-1}$ ;  $k_2 = 1.0(m^2 Kg)^{-1}$ ;  $k_3 = 5.0Nm$ ;  $k_4 = 4.33(m^2 Kg)^{-1}$ ;  $k_5 = 0.333s^{-1}$ ;  $k_6 = 0.1s^{-1}$ ;  $k_7 = -0.233s^{-1}$ ;  $k = 100N/(mrad^{-1})$ . All initial conditions, for the system and the dynamical controller based on Differential Algebraic Approach were chosen to be zero.

The control law based on the Singularly Perturbation Theory, the gains were chosen as follows:  $s_1 = 20$ ;  $s_2 = 25$ ;  $l_s = 60$ ;  $s_{f1} = 1$ ;  $s_{f2} = 10$ ;  $l_f = 0.1$ . Such a selection guarantees the stability of the slow and fast sliding modes systems and the existence of the corresponding sliding modes. The parameter  $\theta$  in the observer equations was chosen as  $\theta = 20$ . From this initial conditions of the robot variables and the estimates were fixed to  $x_1(0) = 0$ ,  $x_2(0) = 0$ ,  $x_3(0) = 0$ ,  $x_4(0) = 0$ ,  $\hat{x}_1(0) = 0.2$ ,  $\hat{x}_2(0) = 0.02$ ,  $\hat{x}_3(0) = 0.002$ ,  $\hat{x}_4(0) = 0.003$ .

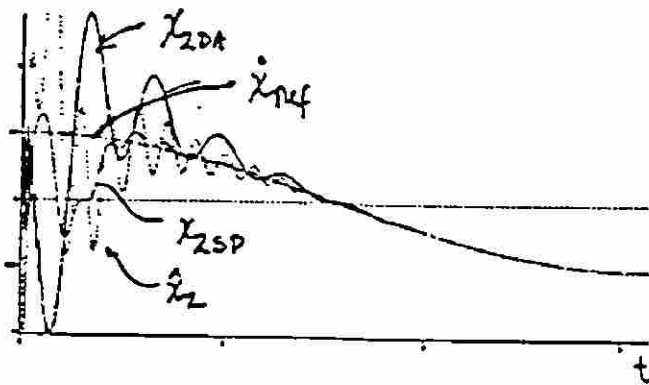


Figure 2 - Time response of the link angular speed  $x_{2SP}$  and  $x_{2DA}$ , the estimate  $\hat{x}_2$  and time derivative of the reference signal  $\dot{x}_{ref}$

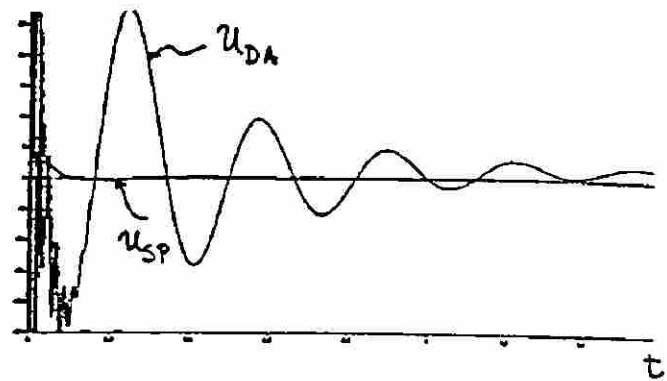


Figure 3 - Time response of the control input  $u_{SP}$  and  $u_{DA}$

The reference signal considered was  $x_{ref} = 0.5 \sin(t)$ . The time closed-loop plots showing the dynamic behavior of the link angular position using both schemes, the estimated and the desired reference signal, is plotted in figure 8.1. The link angular speed using Singular Perturbation Theory and Differential Algebra, the estimated and the time derivative of the reference signal are plotted in Figure 8.2. From these plots, one can notice that a good tracking performance is obtained.

Finally, the Figure 8.3 depicts the obtained controller applied to the system using these techniques. From figure 8.3, we can say that the control designed using singular perturbation theory is more robust and requires less energy to execute the control action than this designed by differential algebra. On the other hand, in both cases, the estimates converge to the state of the system.

## 5 CONCLUSIONS

Two controllers based on an observer were presented using the singular perturbation theory and based on differential algebra. A comparative study was done showing the performance of each controller, taking into account the design simplicity, and performance. High gain observers are given in order to estimate the unmeasurable state of the robot in each control scheme. Simulation results were given where these schemes are implemented to a mathematical model of a flexible robot.

## 6 REFERENCES

- [1] B. Brogliato, R. Ortega, R. Lozano, "Global tracking controllers for flexible-joint manipulators: a comparative study". *Automatica*, Vol. 31, No. 7, pp 41-956, 1995.
- [2] K. Busawon, "Sur les observateurs des systèmes nonlinéaires et le principe de separation" Ph.D. thesis.

Université Claude Bernard Lyon I, Lyon, France, 1993.

- [3] R. A. De Carlo, S. H. Zak and G P. Matthews, "Variable structure control of nonlinear multivariable systems: A tutorial", *Proc. of the IEEE*, Vol. 76, No. 3, pp. 212-233, 1988.
- [4] Diop, S Fliess, M. "On nonlinear observability" *Proc. of the first European Control Conference. Commaut et al, Grenoble 1991, Paris, Hermes*, pp. 152-157.
- [5] J. De-Leon, R. Castro and Jm. Alvarez, "Two-time scale sliding mode control and state estimation for nonlinear systems," in *Prep. 13th IFAC World Congress, San Francisco, CA, vol. F, pp. 265-270, 1996*.
- [6] Fliess, M. "Generalized controller canonical forms for linear and nonlinear dynamics". *IEEE Trans. Automat. Control*, Vol. AC-35 Sep 1990, pp 994-1001.
- [7] P. V. Kokotovic H. K. Khalil and J. O'Reilly, "Singular Perturbation Methods in control Analysis and Design", Academic Press, London, 1993.
- [8] R. Marino and M. W. Spong, "Nonlinear control techniques for flexible joint manipulators: a single link case study", *Proc. IEEE Conf. Robotics and Automation, San Francisco*, pp.1030-1036, 1986.
- [9] Martinez-Guerra, R, De Leon -Morales, J. "Observers for a Multi-input Multi-output Bilinear System Class: A differential approach". *J. of Math. and Computer Modelling*, Vol 20, No. 12, 1994, pp. 125-132.
- [10] H. Sira-Ramirez, S. Ahmad, M. Zribi "Dynamical Feedback control of robotic manipulators with joint flexibility", *IEEE Trans. On Systems, man and cybernetics*. Vol 22, No. 4, July-August 1992, pp 736-747.
- [11] M. W. Spong & M. Vidyasagar, "Robot dynamics and control", J. Wiley and Sons, Inc., New York, 1989.
- [12] J. J. Slotine and S. Hong, "Two-time scale sliding control of manipulators with flexible joints", *Proc. of the 1986 ACC, Seattle, Washington*, pp. 805-810, 1986.
- [13] V. I. Utkin, "Sliding Modes in Control and Optimization", Springer-Verlag, 1992.

# FINAL PROGRAM AND BOOK OF ABSTRACTS

## 37<sup>th</sup> IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

December 16-18, 1998

Hyatt Regency Westshore  
Tampa, Florida, USA



IEEE CONTROL SYSTEMS SOCIETY



16:20  
*Slow control for global stabilization of feedforward systems with exponentially unstable Jacobian linearization* . . . . . 1452  
 Grognard, F. Univ. Catholique de Louvain  
 Sepulchre, Rodolphe J. Univ. de Liege  
 Bastin, Georges Univ. Catholique de Louvain

16:40  
*Global asymptotic stability for the averaged implies semi-global practical asymptotic stability for the actual* . . . . . 1458  
 Teel, Andrew R. Univ. of California-Santa Barbara  
 Peuteman, Joan Univ. Gent  
 Aeyels, Dirk Univ. Gent

17:00  
*Control of unknown nonlinear systems using output feedback* . . . . . 1464  
 Kosmatopoulos, Elias B. Univ. of Southern California

17:20  
*An LMI approach to the control of a class of nonlinear systems* . . . . . 1470  
 Kiriakidis, Kiriakos U.S. Naval Academy

17:40  
*Stabilization of orthogonal piecewise linear systems using piecewise linear Lyapunov-like functions* . . . . . 1476  
 Yfoulis, C. A. UMIST  
 Muir, A. UMIST  
 Pettit, N. B. O. L. Danfoss A/S  
 Wellstead, P. E. UMIST

18:00  
*Decentralized global robust stabilization of a class of large-scale interconnected minimum-phase nonlinear systems* . . . . . 1482  
 Xie, Shoulie Nanyang Tech. Univ.  
 Xie, Lihua Nanyang Tech. Univ.

Wilson's Plover N&S

**WP14**  
**Advanced Methods for Robot Control II**  
 Chair: Spong, Mark W. Univ. of Illinois at Urbana-Champaign  
 Co-chair: Meressi, Tesfay Univ. of Massachusetts Dartmouth

16:00  
*Control of redundant manipulators using logic-based switching* . . . . . 1488  
 Bishop, Bradley E. U.S. Naval Academy  
 Spong, Mark W. Univ. of Illinois at Urbana-Champaign

16:20  
*Variable structure controller design for flexible-link robots under gravity* . . . . . 1494  
 Yang, H. National Univ. of Singapore  
 Krishnan, Hariharan National Univ. of Singapore  
 Ang, Jr., M. H. National Univ. of Singapore

16:40  
*Observer-based controllers for a flexible joint robot manipulator* . . . . . 1500  
 De Leon-Morales, J. FIME-UANL  
 Alvarez-Leal, J. C. Inst. Tech. de Saltillo

17:00  
*Control of a car-like robot using a virtual vehicle approach* . . . . . 1502  
 Egerstedt, M. Royal Inst. of Tech.  
 Hu, Xiaoming Royal Inst. of Tech.  
 Stotsky, Alexander A. Royal Inst. of Tech.

17:20  
*Robotic action planning with the application of explanation-based learning* . . . . . 1508  
 Tian, Hua Tongji University

17:40  
*Output regulation of robot manipulators under actuator constraints* . . . . . \*  
 Laib, Abdelhamid Ecole Superieure D'Electricite

18:00  
*Modeling and control of a three dimensional gantry robot* . . . . . 1514  
 Meressi, Tesfay Univ. of Massachusetts-Dartmouth

White Ibis N

**WP15**  
**Control of Automotive Systems**  
 Chair: Dunn, M. T. Ford Research Lab.  
 Co-chair: Larsen, Michael Univ. of California-Santa Barbara

16:00  
*Hub-coupled dynamometer control* . . . . . 1516  
 Sureshbabu, Natarajan Ford Motor Company  
 Dunn, M. T. Ford Research Lab.

16:20  
*Fundamental study of low fuel consumption control scheme based on combination of direct fuel injection engine and continuously variable transmission* . . . . . 1522  
 Takahashi, Shinsuke Hitachi, Ltd.

16:40  
*Adaptive control of diesel engine-dynamometer systems* . . . . . 1530  
 Yanakiev, Diana P. Cummins Engine Company

17:00  
*Passivation design for a turbocharged diesel engine model* . . . . . 1535  
 Larsen, Michael Univ. of California-Santa Barbara  
 Kokotovic, Petar V. Univ. of California-Santa Barbara

17:20  
*Application of sliding-mode servo controllers to electronic throttle control* . . . . . 1541  
 Yokoyama, Makoto Niigata Univ.  
 Shimizu, H. Niigata Univ.  
 Okamoto, N. Unisia Jecs Co.

17:40  
*Sliding mode control for an Eddy current brake system* . . . . . \*  
 Park, Kyihwan Kwangju Inst. of Science & Tech.  
 Lee, Kap-Jin Kwangju Inst. of Science & Tech.

# Observer-based controllers for a flexible joint robot manipulator

J. De León-Morales\* & J. G. Alvarez-Leal\*\*

\*Programa Doctoral en Ingeniería, FIME-UANL

A. P. 148-F, S. Nicolas de Los Garza; N. L. C.P. 66451., MEXICO.

\*\*Instituto Tecnológico de Saltillo.

Apdo. Postal 58, Suc. C. 25280 Saltillo, Coahuila., MEXICO.

## ABSTRACT

In this paper, observer-based controllers are designed using Singular Perturbations Theory and Differential Algebra, for position and speed control of a single flexible joint robot manipulator. Both schemes are compared in simulation.

### 1. Two-Time Scale Sliding Mode Control

Let us consider the following class of nonlinear singularly perturbed (SP) systems (see [2])

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x) + F_1(x)z + g_1(x)u, & x(t_0) = x_0, t_0 \geq 0 \\ \epsilon \dot{z} = f_2(x) + F_2(x)z + g_2(x)u, & z(t_0) = z_0 \end{cases} \quad (1)$$

where  $x \in R^n$  is the slow state,  $z \in R^m$  is the fast state,  $u \in R^r$  is the input,  $\epsilon$  is a small positive parameter such that  $\epsilon \in [0, 1)$ , and  $f_1, f_2$ , the columns of the matrices  $F_1, F_2, g_1$  and  $g_2$  are assumed to be bounded analytical real vector fields. We assume that  $f_1(0) = f_2(0) = 0$  and, for  $u = 0$ , the origin is an isolated equilibrium state.  $F_2(x)$  is assumed to be nonsingular for all  $x \in B_x$ , where  $B_x$  denote the ball centered in  $x = 0$ . The slow reduced system is found by making  $\epsilon = 0$  in (1), we obtain  $\dot{x}_s = f(x_s) + g(x_s)u_s, x_s(t_0) = x_0$  with  $z_s = \hat{\eta}(x_s) := -F_2^{-1}(x_s)[f_2(x_s) + g_2(x_s)u_s]$ , and  $x_s \in R^n, z_s \in R^m$  and  $u_s \in R^r$  denote the slow components of the original variables  $x, z$  and  $u$ , respectively, and  $f(x_s) := f_1(x_s) + F_1(x_s)F_2^{-1}(x_s)f_2(x_s); g(x_s) := g_1(x_s) + F_1(x_s)F_2^{-1}(x_s)g_2(x_s)$ . The fast dynamics is  $\frac{d\hat{\eta}}{d\tau} = F_2(\bar{x})\hat{\eta} + g_2(\bar{x})u_f; \hat{\eta}(0) = z_0 - h(x_0, 0)$ , being  $\hat{\eta}$  an  $O(\epsilon)$  approximation of  $\eta$  in the initial boundary layer and  $\bar{x}(\tau) = x(\epsilon\tau + t_0), \tau = (t - t_0)$ .

### 2. Sliding-Mode Control Design

The equivalent control method is used to determine the slow reduced system motion restricted to the slow switching surface  $\sigma_s(x_s) = \text{col}(\sigma_{s_1}(x_s), \dots, \sigma_{s_r}(x_s)) = 0$ , where  $\sigma_{s_i}(x_s), i = 1, \dots, r$  are assumed to be locally Lipschitz-continuous functions for  $\forall x_s \in$

$R^n$ . Then the slow equivalent control is  $u_{s,e} = -\{s_s(x_s)g(x_s)\}^{-1}s_s(x_s)f(x_s)$ ; where  $s_s(x_s) = \frac{\partial \sigma_s}{\partial x_s}$ , and the matrix  $s_s(x_s)g(x_s)$  is assumed nonsingular  $\forall x_s \in R^n$ . The slow control is given by  $u_s = u_{s,e} - u_{s,N}$  where  $u_{s,e}$  is the slow equivalent control, which acts when the slow reduced system is restricted to  $\sigma_s(x_s) = 0$ , while  $u_{s,N}$  is the discontinuous part of the control  $u_s$  acting when  $\sigma_s(x_s) \neq 0$ . Then, we get  $u_{s,N} = -\{s_s(x_s)g(x_s)\}^{-1}L_s(x_s)\sigma_s(x_s)$  where  $L_s(x_s) \in R^{r \times r}, \forall x_s \in B_x$ . The complete slow control law is follows

$$u_s = -\{s_s(x_s)g(x_s)\}^{-1}\{s_s(x_s)f(x_s) + L_s(x_s)\sigma_s(x_s)\}$$

The fast nonlinear switching surface defined by  $\sigma_f(\hat{\eta}) = \text{col}(\sigma_{f_1}(\hat{\eta}), \dots, \sigma_{f_r}(\hat{\eta})) = 0$ , where  $\sigma_{f_i}(\hat{\eta}), i = 1, \dots, r$ , are assumed to be locally Lipschitz-continuous functions for all  $\hat{\eta} \in R^m$ . The fast equivalent control is given by  $u_{f,e}(\hat{\eta}) = -\{s_f(\hat{\eta})g_2(\bar{x})\}^{-1}s_f(\hat{\eta})F_2(\bar{x})\hat{\eta}$ , where  $s_f(\hat{\eta}) = \partial \sigma_f / \partial \hat{\eta}$ , and  $s_f(\hat{\eta})g_2(\bar{x})$  is nonsingular. The discontinuous fast control is given by  $u_{f,N}(\hat{\eta}) = -\{s_f(\hat{\eta})g_2(\bar{x})\}^{-1}L_f(\hat{\eta})\sigma_f(\hat{\eta})$ , where  $L_f$  is a positive definite matrix. Then the complete fast control law is

$$u_f = -\{s_f(x)g_2(x)\}^{-1}\{s_f(\hat{\eta})F_2(x)\hat{\eta} + L_f(\hat{\eta})\sigma_f(\hat{\eta})\}$$

The composite control for the original nonlinear singularly perturbed system (1) can be expressed by

$$u = u_s + u_f.$$

### 3. A High Gain Nonlinear Observer

In order to implement the above controller we design an observer. Let us suppose that the SP system (1) can be written in the following form (see [1]):

$$\dot{\varsigma} = F(y)\varsigma + G(u, \varsigma), \quad y = C\varsigma,$$

where  $\varsigma \in R^n, u \in R^r, y \in R, C = (1 \ 0 \ \dots \ 0)$ ,  $F(y)_{ij} = f_i(y)$  if  $i = j - 1$  else  $F(y)_{ij} = 0; G(u, \varsigma) = \text{col}(g_1(u, \varsigma_1), \dots, g_n(u, \varsigma_1, \dots, \varsigma_n))$ . We assume that the functions  $f_i, i = 1, \dots, n - 1$ , are of class  $C^r, r \geq 1$ , w. r. t.  $y$  and that the functions  $g_i, i = 1, \dots, n$ , are globally Lipschitz w. r. t.  $\varsigma$  and uniformly w. r. t.  $u$ . In addition, one assume there are constants  $\alpha$  and  $\beta$ , such

that for each  $u \in U$  and each output  $y(t)$  associated  $u$  and the initial condition  $\zeta(0) \in K$ ,  $0 \leq \alpha \leq f_i(y(t)) \leq \beta$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ . Let us define the system

$$\dot{\zeta} = F(y)\zeta + G(u, \zeta) - \tilde{S}_\theta^{-1}(y)C^T[C\zeta - y]$$

with  $\Omega = \text{Diag}\{1, f_1(y), \dots, \prod_{i=1}^{n-1} f_i(y)\}$ ,  $\tilde{S}_\theta = \Omega S_\theta \Omega$ , and assume that the time derivative of  $\Omega$  is bounded.  $S_\theta = S_\theta^T > 0$  is the unique solution of  $\theta S_\theta + A^T S_\theta + S_\theta A - C^T C = 0$ ; with  $\theta > 0$ , and  $A_{ij} = 1$  if  $i = j-1$  else  $A_{ij} = 0$ .

#### 4. A Differential Algebraic Approach

Now, we consider the following nonlinear system

$$(\Sigma_{NL}) : \dot{x} = f(x, u), \quad y = h(x, u)$$

where  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}$ ,  $f$  and  $h$  are assumed to be polynomial in their arguments (see [3,4]). Systems  $(\Sigma_{NL})$  are assumed to be universally observable with external behavior described by  $\frac{d^m y}{dt^m} = -L_0(y, \frac{dy}{dt}, \dots, \frac{y^{n-1}}{dt^{n-1}}, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^m u}{dt^m})$  where  $L_0$  is a polynomial of its arguments. By defining  $\eta_i = \frac{d^{i-1} y}{dt^{i-1}}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , we obtain an explicit GOCF of system  $(\Sigma_{NL})$  as follows  $\eta_i = \eta_{i+1}$ ,  $1 \leq i \leq n-1$ ;  $\eta_n = -L_0(\eta, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^m u}{dt^m})$ ; for some  $\gamma > 0$ . Now, let  $y_R$  be a prescribed reference output function which is differentiable at least  $n$  times. Define an output tracking error function  $e$  as  $e = y - y_R$ . Let  $c_i = \frac{d^{i-1} y_R}{dt^{i-1}}$ , for  $1 \leq i \leq n$ , be the components of the error vector  $c = \text{col}(c_1, c_2, \dots, c_n)$ ,  $\dot{y}_R = (y_R, \dots, \frac{d^{n-1} y_R}{dt^{n-1}})$ ,  $\psi_R = \text{col}(\dot{y}_R, \dots, \frac{d^{n-1} y_R}{dt^{n-1}})$ , then we obtain

$$\frac{dc}{dt} = Ee + \varphi(e, \dot{y}_R, \frac{d^2 y_R}{dt^2}, \dots, \frac{d^m y_R}{dt^m}, \dot{u}, \frac{d^2 u}{dt^2}, \dots, \frac{d^m u}{dt^m})$$

where the elements of the matrix  $E$  are given by  $E_{ij} = 1$  if  $i = j-1$  else  $E_{ij} = 0$ , and  $\varphi(e, \dot{y}_R, \frac{d^2 y_R}{dt^2}, \dots, \frac{d^m y_R}{dt^m}, \dot{u}, \frac{d^2 u}{dt^2}, \dots, \frac{d^m u}{dt^m}) = \text{col}(0, \dots, 0, -L_0(\psi_R + c, \dot{u}, \frac{d^2 u}{dt^2}, \dots, \frac{d^m u}{dt^m}))$ . We assume that  $\varphi$  is Lipschitz w. r. t.  $e$  and uniformly w. r. t.  $\dot{y}_R, \frac{d^2 y_R}{dt^2}, \dots, \frac{d^m y_R}{dt^m}, \dot{u}, \frac{d^2 u}{dt^2}, \dots, \frac{d^m u}{dt^m}$ . Then, an exponential nonlinear observer of the above system is given by

$$\frac{d\hat{e}}{dt} = E\hat{e} - \Delta_\theta K[C\hat{e} - e_2] - \varphi(\hat{e}, \dot{y}_R, \frac{d^2 y_R}{dt^2}, \dots, \frac{d^m y_R}{dt^m}, \dot{u}, \frac{d^2 u}{dt^2}, \dots, \frac{d^m u}{dt^m})$$

where  $\Delta_\theta = \text{diag}(\theta, \theta^2, \dots, \theta^n)$  for some  $\theta > 0$  and  $K = \text{col}(k_1, \dots, k_n)$ .  $K$  is chosen such that  $\sigma(A - KC) \subset \mathbb{R}^-$ . Let

$$\pi(u_2, y_R, \hat{e}) = -\frac{d^m y_R}{dt^m} + \sum_{i=1}^n a_{i-1} \hat{e}_i - L_0(\psi_R + \hat{e}, \dot{u}, \frac{d^2 u}{dt^2}, \dots, \frac{d^m u}{dt^m})$$

and  $u_2$  be the observer-based control resulting from

$$\pi(u_2, y_R, \hat{e}) = 0.$$

#### 5. Application to the Flexible Robot

In order to compare both schemes, we consider the following model of the flexible robot

$$I \ddot{q}_1 + B_v \dot{q}_1 + mgl \sin(q_1) + k(q_1 - q_2) = 0$$

$$J \ddot{q}_2 + B \dot{q}_2 - k(q_1 - q_2) = u$$

where  $q_1, q_2$ : the angular positions of the link and the hub motor,  $u$ : the input force from the actuator.  $I$ : the arm inertia,  $J$ : the motor inertia,  $B$ : the motor viscous damping,  $B_v$ : the link viscous damping,  $mgl$ :

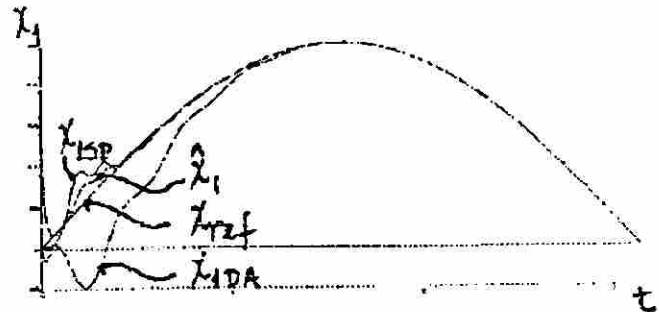


Figure 1 - Time response of the link angular position  $x_{1SP}$ ,  $x_{1DA}$ , the estimate  $\hat{x}_1$  and the reference  $x_{ref}$

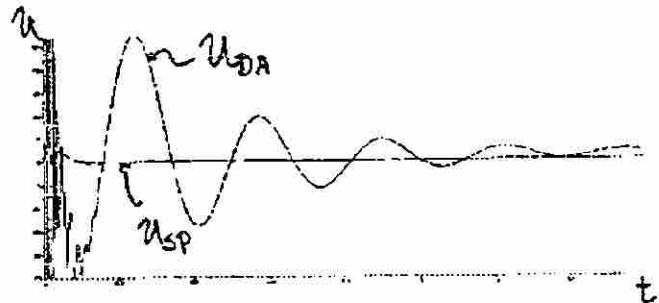


Figure 2 - Time response of the control  $u_{SP}$  and  $u_{DA}$

the nominal load in the arm and  $k$ : the joint stiffness. The reference signal considered was  $x_{ref} = 0.5 \sin(t)$ . The time closed-loop plots showing the dynamic behavior of the link angular position using both schemes, the estimated and the desired reference signal, is plotted in figure 1. From this plot, one can notice that a good tracking performance is obtained. Finally, the figure 2 depicts the obtained controller applied to the system using these techniques. From figure 2, we can say that the control designed using SP is more robust and requires less energy to execute the control action than this designed by Differential Algebra.

#### References

- [1] K. Busawon, "Sur les observateurs des systèmes non-linéaires et le principe de separation" Ph.D. thesis, Université Claude Bernard Lyon I, France, 1993.
- [2] J. De-Leon, R. Castro and Jm. Alvarez, "Two-time scale sliding mode control and state estimation for nonlinear systems," in Prep. 13th IFAC, San Francisco, CA, vol. F, pp. 265-270, 1996.
- [3] Fliess, M. "Generalized controller canonical forms for linear and nonlinear dynamics". IEEE TAC, Vol. AC-35 Sep 1990, pp 994-1001.
- [4] Martínez-Guerra, R, De Leon -Morales, J. "Observers for a Multi-input Multi-output Bilinear System Class: A differential approach". J. of Math. and Comp. Modelling, Vol 20, No. 12, 1994, pp. 125-132.

