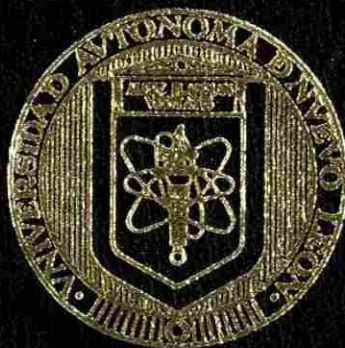


UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA
Y ELECTRICA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSTGRADO



EL METODO DEL ELEMENTO FINITO APLICADO EN LA SOLUCION DE
PROBLEMAS DE TRANSFERENCIA DE CALOR EN UNA DIMENSION

POR

ADRIAN SALAZAR VARGAS

TESIS

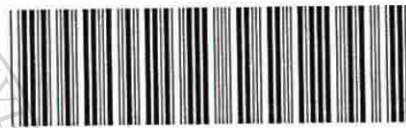
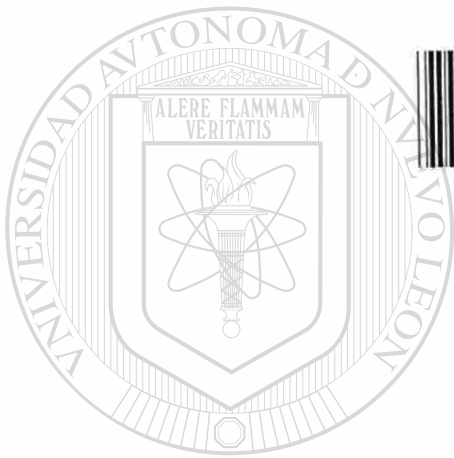
EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE
LA INGENIERIA MECANICA CON ESPECIALIDAD EN
TERMICA Y FLUIDOS

SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N. L.
NOVIEMBRE DE 1999

1988
S 24 1999
FIM 2585
M2 853
ME

EL METODO DEL ELEMENTO FINITO APLICADO EN LA SOLUCION DE
PROBLEMAS DE TRANSFERENCIA DE CALOR EN UNA DIMENSION

U
A
Z
L



1020130043

UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA
Y ELECTRICA

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSTGRADO



EL METODO DEL ELEMENTO FINITO APLICADO EN LA SOLUCION DE
PROBLEMAS DE TRANSFERENCIA DE CALOR EN UNA DIMENSION

POR

ADRIAN SALAZAR VARGAS

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEÓN

TESIS

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE
LA INGENIERIA MECANICA CON ESPECIALIDAD EN
TERMICA Y FLUIDOS

SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N. L.
NOVIEMBRE DE 1999

TM
Z5853
.M2
FIME
999
S24

0134 87 .0



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

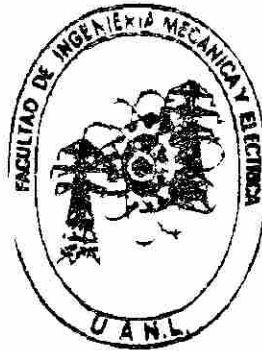


FONDO
TESIS

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA
Y ELECTRICA

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSTGRADO



EL METODO DEL ELEMENTO FINITO APLICADO EN LA SOLUCION DE
PROBLEMAS DE TRANSFERENCIA DE CALOR EN UNA DIMENSION

POR

ADRIAN SALAZAR VARGAS

TESIS

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

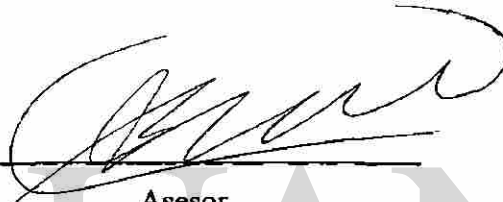
EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE
LA INGENIERIA MECANICA CON ESPECIALIDAD EN
TERMICA Y FLUIDOS

SAN NICOLAS DE LOS GARZA, N. L.
NOVIEMBRE DE 1999

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSTGRADO

Los miembros del comité de tesis recomendamos que la tesis EL METODO DEL ELEMENTO FINITO APLICADO EN LA SOLUCION DE PROBLEMAS DE TRANSFERENCIA DE CALOR EN UNA DIMENSION realizada por el ING. ADRIAN SALAZAR VARGAS sea aceptada para su defensa como opción al grado de Maestro en Ciencias de la Ingeniería Mecánica con especialidad en Térmica y Fluidos.

El Comité de Tesis



Asesor
M. C. Guadalupe E. Cedillo Garza




Coasesor
M.C. Roberto Villarreal Garza



Coasesor
M.C. Tomas N. Matrinez Perez

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



Vo. Bo.
M.C. Roberto Villarreal Garza
División de Estudios de Postgrado

San Nicolás de los Garza, N.L. a 16 de Noviembre de 1999

PROLOGO

El método del elemento finito representa una herramienta muy útil como alternativa para la solución de problemas complejos de transferencia de calor.

El método del elemento finito permite el análisis de problemas complejos en dos y tres dimensiones.

En ésta tesis nos abocaremos a la solución de problemas de una sola dimensión. Aquí el dominio total del problema será dividido en sub-dominios a los cuales llamaremos elementos finitos, y la intersección entre ellos la conoceremos como nodo.

La solución individual aproximada de cada elemento finito aportará suficiente información para la solución del problema global en la medida en que se disminuya el tamaño de cada sub-división o elemento finito del dominio total.

Los programas computacionales actuales han venido a facilitar la metodología de solución para el método del elemento finito aplicado a problemas complejos de transferencia de calor.

INDICE	Página
Síntesis	i

CAPITULO 1. Introducción.

1.1. - Comentarios generales.	1
1.2. - Antecedentes históricos.	3
1.3. - El concepto básico del elemento finito.	4

CAPITULO 2. - Formulaciones integrales y métodos variacionales.

2.1. - La forma integral pesada.	14
2.2. - Conceptos y fórmulas matemáticas.	17
2.3. - Formulación débil en problemas de valor frontera.	28
2.4. - Métodos variacionales de aproximación.	45

CAPITULO 3. - Análisis del elemento finito en problemas de una dimensión con valor frontera de segundo orden.

3.1. - Comparación del elemento finito con los métodos variacionales.	66
3.2. - Pasos básicos para el análisis del elemento finito.	70

CAPITULO 4. - Análisis de error del elemento finito.

4.1. - Errores de aproximación.	123
4.2. - Diversas medidas de errores.	124
4.3. - Convergencia de la solución.	125
4.4. - Exactitud de la solución.	126

CAPITULO 5. - Solución a problemas de transferencia de calor en una dimensión aplicando el método del elemento finito con auxilio de un programa de computadora. 136

CAPITULO 6. - Conclusiones y recomendaciones.	154
CAPITULO 7. - Bibliografía.	157
CAPITULO 8. - Listado de tablas.	158
CAPITULO 9. - Listado de figuras.	159
CAPITULO 10. - Apéndice.	161
CAPITULO 11. - Resumen autobiográfico.	164



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

SINTESIS

CAPITULO 1. Observaciones fundamentales del metodo del elemento finito, ejemplos de su aplicación, comentarios con respecto a otros métodos similares y antecedentes históricos.

CAPITULO 2. Conocimiento de fórmulas de integración básicas, exposición principal de la integral pesada para ecuaciones algebraicas con coeficientes desconocidos. Comentarios de los diferentes métodos variacionales, con sus correspondientes formulaciones integrales. Notas y terminología referente a dominio y frontera, problemas de valor inicial y valor propio, obtención de la ecuación para integración por partes y la forma débil. Teorema del gradiente, teorema de divergencia, funcionales, simbolo variacional, formulación pesada y formulación débil para análisis y solución de problemas de valor frontera. Conocimientos necesarios para la obtención de la formulación débil, las formas lineal y bilineal, las funciones cuadráticas, exposición de los métodos variacionales de aproximación Raileigh-Ritz, Petrov-Galerkin, cuadrado mínimo, el método de colocación, ejemplos y comparación de resultados.

CAPITULO 3 Exposición del alcance de los métodos de aproximación variacionales. Análisis del método del elemento finito en problemas de una sola dimensión con valor frontera de segundo orden, características básicas del método, pasos involucrados en la solución de un problema, características necesarias para solución de problemas mediante métodos computacionales. Pasos para la formulación de la ecuación modelo de un problema utilizando el método del elemento finito, obtención de las ecuaciones elemento, análisis de la formulación débil, aproximación de la solución, comentarios sobre las funciones interpolación de la familia Lagrange y Hermite. Obtención de las ecuaciones para elemento lineal, elemento cuadrático, la conectividad de los elementos para conocer las ecuaciones de ensamble, solución de un ejemplo para indicar como

imponer las condiciones frontera en las ecuaciones algebraicas para su solución y el post-procesamiento de la solución en cuanto a la relación error-número de elementos.

CAPITULO 4. Comentarios, análisis de las fuentes básicas de error en la solución de ecuaciones diferenciales dadas. Conocimientos de las distintas formas de medir la diferencia entre dos funciones, la convergencia de la solución del elemento finito hacia la solución verdadera y la exactitud de la solución..

CAPITULO 5. Análisis y solución a problemas complejos de transferencia de calor en una dimensión por medio del elemento finito y un programa de computadora como una herramienta auxiliar muy útil para conocer la solución mediante los métodos variacionales y con el auxilio de un sistema de cómputo. Elaboración del archivo de datos de entrada al programa de acuerdo al problema y condiciones particulares, así como resultados obtenidos.

CAPITULO 6. De acuerdo al análisis, conocimientos de la metodología y el desarrollo en la solución de los problemas expuestos, se obtienen conclusiones con referencia a la solución manejada con otros métodos variacionales y el método del elemento finito.

CAPITULO 7. Apoyo bibliográfico utilizado.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

CAPITULO 8. Listado de tablas utilizadas y páginas de ubicación.

CAPITULO 9. Lista de figuras utilizadas y páginas de ubicación

CAPITULO 10. Glosario de conceptos y terminología utilizados.

CAPITULO 11. Presentación de la autobiografía del sustentante.

CAPITULO 1

INTRODUCCION

1.1. Comentarios Generales:

Virtualmente, cada fenómeno en la naturaleza sea biológico, geológico o mecánico, se puede describir con ayuda de las leyes de la Física en términos de ecuaciones algebraicas, diferenciales o integrales, relacionando diversas cantidades de interés. Para determinar la concentración de esfuerzos en un recipiente a presión, con agujeros impares, numerosos refuerzos y sujeto a cargas mecánicas, térmicas y/o aerodinámicas, para encontrar la contaminación en el agua del mar o en la atmósfera, en la simulación del estado del tiempo para entender y predecir los mecanismos de formación de tornados y tormentas, son unos cuantos ejemplos de muchos problemas prácticos importantes.

La mayoría de los Ingenieros y Científicos que estudian los fenómenos físicos están implicados en dos tareas principales:

1. La formulación matemática de los procesos físicos.
2. El análisis numérico del modelo matemático.

La formulación matemática de un proceso físico requiere de las leyes de la Física y además, ciertas herramientas matemáticas, la formulación consiste en exposiciones

matemáticas, a menudo ecuaciones diferenciales que relacionan cantidades de interés para el entendimiento y/o diseño de procesos físicos. El desarrollo del modelo matemático de un proceso se obtiene a través de suposiciones referentes a cómo trabaja el proceso. En una simulación numérica, usamos un método numérico y una computadora para evaluar el modelo matemático y estimar las características del proceso.

Mientras que la derivación de las ecuaciones que rigen para la mayoría de los problemas no es difícil, su solución por métodos exactos de análisis es una enorme tarea. En tales casos, métodos de análisis aproximados proveen medios alternativos de solución, tales como los métodos de Rayleigh-Ritz ó Galerkin.

En la aproximación de diferencia finita de una ecuación diferencial, las derivadas se reemplazan por cocientes diferentes (o la función se expande en una serie Taylor) que involucran los valores de la solución en puntos de malla discretos del dominio. Las ecuaciones algebraicas que resultan se resuelven, luego de imponer las condiciones de frontera, para los valores de la solución en los puntos de la malla.

En la solución de una ecuación diferencial por el método variacional, la ecuación se pone en una forma equivalente, la integral pesada y luego la solución aproximada sobre

el dominio se supone que es una combinación $(\sum_j c_j \phi_j)$ de funciones aproximación ϕ_j ; escogidas apropiadamente y coeficientes no determinados, c_j .

Los coeficientes c_j , se determinan de modo que la exposición de la integral equivalente a la ecuación diferencial original se satisfaga.

Los diferentes métodos variacionales, por ejemplo: Rayleigh-Ritz, Galerkin y el método de cuadrados mínimos difieren uno del otro en la selección de la forma integral, funciones peso, y/o funciones de aproximación. Tienen la desventaja de que las funciones de aproximación para problemas con dominio arbitrario son difíciles de construir.

El método del elemento finito supera la desventaja de los métodos variacionales tradicionales mediante un procedimiento sistemático para la derivación de las funciones

de aproximación, en subregiones del dominio. El método se basa en tres características que lo hace superior a los demás métodos:

Primero, un dominio geoméricamente complejo del problema se representa como un conjunto de subdominios geoméricamente simples llamados elementos finitos. Segundo, sobre cada elemento finito, las funciones de aproximación se derivan bajo la idea básica de que cualquier función continua puede ser representada por una combinación lineal de polinomios algebraicos. Tercero, se obtienen relaciones algebraicas entre los coeficientes no determinados (valores nodales) satisfaciendo las ecuaciones que rigen, a menudo en un sentido de integral pesada, sobre cada elemento. Por lo tanto, el método del elemento finito, puede verse en particular como una aplicación hábil de los métodos Rayleigh-Ritz o residuo pesado. En él, las funciones aproximación son a menudo consideradas como polinomios algebraicos y los parámetros no determinados representan los valores de la solución de un número finito de puntos preseleccionados, llamados nodos, en la frontera y en el interior del elemento. Las funciones aproximación se derivan usando los conceptos de la teoría de la interpolación, y son por lo tanto, llamadas funciones interpolación. Encuentra uno que el grado de las funciones de interpolación depende del número de nodos en el elemento y del orden de la ecuación diferencial a resolverse.

1.2. ANTECEDENTES HISTORICOS.

La idea de representar un dominio dado, como un conjunto de partes discretas no es solamente hacia el elemento finito. El valor de π fue estimado por los antiguos matemáticos, considerando que el perímetro de un polígono inscrito en un círculo se aproxima a la circunferencia del último. Ellos predijeron el valor de π con aproximación de casi 40 dígitos, representando el círculo como un polígono de un número finitamente grande de número de lados. En los tiempos modernos, la idea encontró aplicación en el análisis estructural de aeronaves, donde, por ejemplo, alas y fuselaje son tratados como ensambles de largueros, revestimiento y paneles de corte. En 1941, Hrenikoff introdujo el llamado método armazón, en el cual, un medio elástico plano se representó como un conjunto de barras y vigas. Courant en 1943 usó un

Considérese el problema de determinar el perímetro de un círculo de radio R (ver fig. 1.1a). Los antiguos matemáticos estimaron el valor de la circunferencia por aproximación, mediante segmentos de línea cuyas longitudes eran medibles. El valor aproximado de la circunferencia es obtenido sumando las longitudes de los segmentos de línea usados para representarla. Aunque este es un ejemplo trivial, ilustra varias ideas y pasos involucrados en el análisis del elemento finito de un problema. Nosotros planeamos en los pasos involucrados en el cálculo un valor aproximado de la circunferencia del círculo. Haciéndolo así introducimos ciertos términos que se usan en el análisis del elemento finito de cualquier problema.

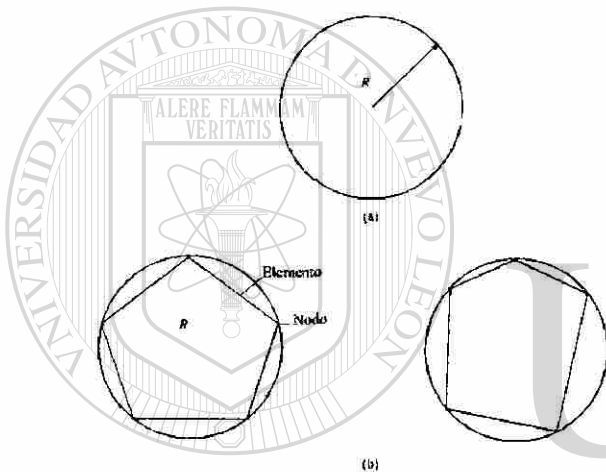
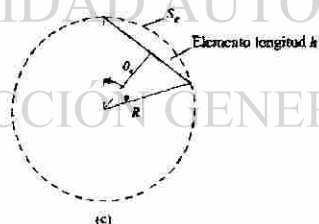


Figura 1.1^a Aproximación de la circunferencia de un círculo mediante elementos línea

Círculo de radio R .

Mallas uniforme y no uniforme usadas para representar la circunferencia del círculo.

Un elemento típico



Discretización del elemento finito. Primero, el dominio (por ejemplo la circunferencia del círculo) se representa como un conjunto de número finito n de subdominios, denominados segmentos línea. Esto se llama discretización del dominio. Cada subdominio (segmento línea) se llama un elemento. El conjunto de elementos es llamado malla del elemento finito. Los elementos están conectados unos a otro en puntos llamados nodos. En el caso presente, discretizamos la circunferencia en una malla de 5 ($n = 5$) segmentos línea. Los segmentos línea pueden ser de diferente longitud. Cuando

todos los elementos (eje. segmentos línea) son de igual longitud se dice que la malla es uniforme; lo contrario se llama malla no uniforme ver figura (1.1b).

Ecuaciones del elemento. Un elemento típico (ejemplo el segmento Ω^e) se aísla y se requieren sus propiedades por ejemplo longitud y se calculan por algún medio apropiado. Haga que h_e sea la longitud del elemento Ω^e en la malla para un elemento típico Ω^e , h_e está dado por (ver fig. 1.1c)

$$h_e = 2R \text{Sen} \frac{1}{2} \theta_e \quad (1.1)$$

donde R es el radio del círculo y $\theta_e < \pi$ es el ángulo subtendido por el segmento línea.

Las ecuaciones anteriores se llaman ecuaciones elemento.

3. Ensamble de ecuaciones elemento y solución. El valor aproximado de la circunferencia (o perímetro) del círculo se obtiene colocando las propiedades del elemento de manera significativa; este proceso se llama el ensamble de las ecuaciones elemento. Este está basado en el caso presente en la idea simple de que el perímetro total de polígono (elementos ensamblados) es igual a la suma de las longitudes de los elementos individuales:

$$P_n = \sum_{e=1}^n h_e \quad (1.2)$$

Entonces P_n representa una aproximación del perímetro real p . Si la malla es uniforme, o h_e es la misma para cada elemento de la malla, entonces $\theta_e = \frac{2\pi}{n}$, y tenemos:

$$P_n = n \left(2R \operatorname{Sen} \frac{\pi}{n} \right) \quad (1.3)$$

4. Convergencia y error estimado. Para éste problema simple, conocemos la solución exacta: $p = 2\pi R$. Podemos estimar el error en la aproximación y mostrar que la solución aproximada P_n converge a p exacta en el límite cuando $n \rightarrow \infty$. Considere el elemento típico Ω^e . El error en la aproximación es igual a la diferencia entre la longitud del sector y la del segmento línea (vea figura 1.1c)

$$E_e = |S_e - h_e| \quad (1.4)$$

Donde $S_e = R\theta_e$ es la longitud del sector. Por tanto, el error estimado para un elemento en la malla está dado por

$$E_e = R \left| \frac{2\pi}{n} - 2 \operatorname{Sen} \frac{\pi}{n} \right| \quad (1.5)$$

El error total (llamado error global) está dado por la multiplicación de E_e por n :

$$E = 2R \left(\pi - n \operatorname{Sen} \frac{\pi}{n} \right) = 2\pi R - P_n \quad (1.6)$$

Mostramos ahora que E tiende a cero como $n \rightarrow \infty$. Haciendo $x = \frac{1}{n}$, tenemos

$$P_n = 2Rn \operatorname{Sen} \frac{\pi}{n} = 2R \frac{\operatorname{Sen} \pi x}{x}$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2R \frac{\operatorname{sen} \pi x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2\pi R \frac{\cos \pi x}{1} \right) = 2\pi R \quad (1.7)$$

de aquí, E_n tiende a cero como $n \rightarrow \infty$. Esto completa la prueba de convergencia.

En resumen, se demuestra que la circunferencia de un círculo puede ser aproximada tanto como queramos mediante un número finito de funciones lineales. Conforme el número de elementos aumente, mejora la aproximación, el error en la aproximación disminuye.

Determinación aproximada del centro de masa.

Otro ejemplo elemental para ilustrar el concepto de elemento finito consiste en el cálculo del centro de masa de un cuerpo continuo.

Se recordará, de un primer curso de estática de cuerpos rígidos que el cálculo del centro de una masa irregular o el centroide de un volumen irregular hace uso del método llamado de cuerpos compuestos, en el cual un cuerpo es dividido convenientemente (discretización malla) en varias partes (elementos) de forma simple, para los cuales, la masa y el centro de masa (propiedades del elemento) pueden calcularse fácilmente. El centro de masa del cuerpo total, se obtiene usando el principio de Varignon del momento (una base para el ensamble de las propiedades del elemento).

$$(m_1 + m_2 + \dots + m_n) \bar{X} = m_1 \bar{x}_1 + m_2 \bar{x}_2 + \dots + m_n \bar{x}_n \quad (1.8)$$

Donde \bar{X} es la coordenada x del centro de masa del cuerpo total, m_e es la masa de la e -ésima parte \bar{x}_e es la coordenada x del centro de masa de la e -ésima parte. Expresiones similares se establecen para las coordenadas x e y del centro de masa del

cuerpo total. Relaciones analógicas se establecen para líneas compuestas, áreas y volúmenes respectivamente.

Cuando un cuerpo dado, no es expresable en términos de formas geométricas simples (elementos) para el cual la masa y el centro de masa puedan ser representadas matemáticamente, es necesario usar un método de aproximación para representar las propiedades de un elemento. Como un ejemplo, considere el problema de encontrar el centroide (\bar{X}, \bar{Y}) del área irregular (región) mostrada en la Fig.1.2. La región puede dividirse en un número finito de tiras rectangulares (elementos). Un elemento típico con un ancho de h_e y de altura b_e . El área de la e-ésima tira está dada por : $A_e = h_e b_e$. El área A_e es una aproximación del área verdadera del elemento debido a que b_e es una altura promedio estimada del elemento. Las coordenadas del centroide de la región se obtienen aplicando el principio del momento:

$$\bar{X} = \frac{\sum_e A_e \bar{x}_e}{\sum_e A_e}, \quad \bar{Y} = \frac{\sum_e A_e \bar{y}_e}{\sum_e A_e}$$

donde \bar{x}_e y \bar{y}_e son las coordenadas del centroide del e-ésimo elemento con respecto al sistema de coordenadas usado para el cuerpo total. Cuando el centro de masa es requerido, A_e en las ecuaciones anteriores se reemplaza por la masa $m_e = \rho_e A_e$, ρ_e es la densidad de la masa del e-ésimo elemento; para un cuerpo homogéneo, ρ_e es la misma para todos los elementos.

Se notará que la exactitud de la aproximación se mejorará incrementando el número de tiras usadas (decreciendo su ancho) se usan elementos rectangulares en la discusión presente, sólo por razones de simplicidad. Uno puede escoger el uso de elementos de cualquier tamaño y forma que aproximen al área dada, hacia una exactitud satisfactoria. Por ejemplo, un elemento trapezoidal requerirá dos alturas para calcular el área

$$A_e = \frac{1}{2} h_e (b_e + b_{e+1})$$

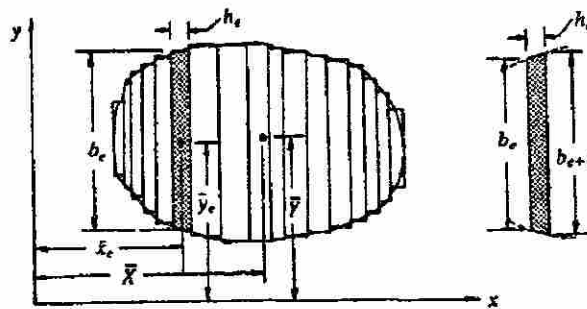


Figura 1.2

Determinación aproximada del centroide de masa (o geométrico) de una región irregular dividiéndolo en una serie de subregiones rectangulares o trapezoidales.

Donde b_e y b_{e+1} son las alturas izquierda y derecha del e-ésimo elemento.

Algunas Observaciones:

En resumen, en el método del elemento finito, un dominio dado, es dividido en subdominios, llamados elementos finitos, y una solución aproximada hacia el problema se desarrolla sobre cada uno. La subdivisión de un total en partes tiene dos ventajas:

1. Permite una representación exacta de geometría compleja y la inclusión de materiales heterogéneos.
2. Da lugar a una representación exacta de la solución dentro de cada elemento, para descubrir efectos locales (grandes gradientes de la solución)

Los tres pasos fundamentales del método del elemento finito son:

1. Dividir el total en partes (ambos para representar la geometría y solución del problema).
2. Sobre cada parte, buscar una aproximación a la solución como una combinación de valores nodales y funciones aproximación.
3. Derivar las relaciones algebraicas entre los valores nodales de la solución para cada parte, y ensamble las partes para obtener la solución del total.

Aunque los ejemplos anteriores ilustran la idea básica del método del elemento finito hay otras características que no se presentaron o no aparecen en la discusión de los ejemplos.

Algunas observaciones son, en orden:

1. Uno puede discretizar un dominio, dependiendo de su forma, en una malla de más de un tipo de elemento. Por ejemplo en la aproximación de un dominio irregular, uno puede usar una combinación de rectángulos y triángulos.
2. Si más de un tipo de elemento es usado en la representación del dominio, uno de cada clase será aislado y sus ecuaciones desarrolladas.
3. Las ecuaciones que rigen, son generalmente más complejas que las consideradas en los primeros dos ejemplos. Son generalmente ecuaciones diferenciales. En la mayoría de los casos las ecuaciones no pueden resolverse sobre un elemento, por dos razones. **Primero**, no permiten la solución exacta. De aquí que los métodos variacionales entren en juego. **Segundo**, las ecuaciones discretas obtenidas en los métodos variacionales no pueden resolverse independientemente de los elementos restantes debido a que el ensamble de los elementos está sujeto a cierta continuidad, frontera y/o condiciones iniciales.
4. Hay dos diferencias principales en la forma de la solución aproximada usada en el método del elemento finito y la que se usó en el método variacional clásico (por ejemplo: método variacional aplicado al dominio total). **Primero**, en lugar de representar la solución u como una combinación lineal $(u = \sum_j c_j \phi_j)$ en términos

de parámetros arbitrarios c_j , como en los métodos variacionales, en el método del elemento finito la solución es representada a menudo como una combinación lineal $(u = \sum_j u_j \psi_j)$ en términos de los valores u_j de u (y posiblemente sus derivadas) en los puntos nodales. **Segundo**, las funciones aproximadas en el método del elemento finito son por lo regular polinomios que se resuelven usando la teoría de interpolación. Sin embargo, el método del elemento finito no está restringido, al uso de aproximaciones, que son combinaciones lineales de valores nodales u_j y funciones interpolaciones ψ_j , que son polinomios algebraicos. Uno puede usar, en adición a valores nodales, variables sin nodo (como en el método Rayleigh-Ritz) para representar la aproximación de una función.

5. El número y localización de los nodos en un elemento depende de: a)La geometría del elemento. b)El grado de aproximación polinomial. c)La forma integral de las ecuaciones. Mediante la representación de la solución requerida en términos de sus valores en los nodos, uno obtiene la solución aproximada en los nodos.
6. El ensamble de elementos, en un caso general, está basado en la idea de que la solución (y posiblemente sus derivadas para ecuaciones de mayor orden) es continua en las fronteras del inter-elemento.
7. En general, el ensamble del elemento finito está sujeto a la frontera y/o condiciones iniciales. Las ecuaciones discretas asociadas con la malla del elemento finito, se resuelven solamente después de que se imponen la frontera y/o las condiciones iniciales
8. Hay tres fuentes de error en la solución de elemento finito: a)Las debidas a la aproximación del dominio (que fue el error presentado en los dos ejemplos). b)Las debidas a la aproximación de la solución. c)Las debidas al cálculo numérico. La estimación de estos errores, en general, no es materia sencilla. Sin embargo bajo ciertas condiciones, pueden estimarse para un elemento y problema dado.
9. La exactitud y convergencia de la solución del elemento finito depende de la ecuación diferencial, su forma integral y el elemento usado.

Exactitud se refiere a la diferencia entre la solución exacta y la solución de elemento finito, mientras la convergencia se refiere a la exactitud conforme el número de elementos en la malla se incrementa.

10. Para problemas dependientes del tiempo, se sigue una formulación en dos etapas. En la primera, las ecuaciones diferenciales son aproximadas mediante el método del elemento finito para obtener una serie de ecuaciones diferenciales en tiempo. En la segunda, las ecuaciones diferenciales en tiempo se resuelven exactamente o aún más aproximadas por métodos variacionales o métodos de diferencia finita para obtener ecuaciones algebraicas, las cuales se resuelven para los valores nodales.

11. Cuando las condiciones de continuidad de ensamble se reemplazan por las condiciones de contacto, el método se conoce como el método del elemento discreto (DEM). En el método del elemento discreto, elementos individuales pueden tener movimientos finitos (desplazamientos y rotaciones). Tales métodos tienen aplicaciones en mecánica de rocas, mecánica de hielo, y otros campos donde un continuo es desintegrado durante la deformación o el medio original es un conjunto de partículas individuales (medio granular y biología molecular).

CAPITULO 2

FORMULACIONES INTEGRALES Y METODOS VARIACIONALES.

2.1 LA FORMA INTEGRAL PESADA.

En el método del elemento finito, usamos una exposición integral para establecer relaciones algebraicas entre los coeficientes u_j de la aproximación

$$u \approx \sum_{j=1}^n u_j \psi_j$$

(2.1)

Donde u representa la solución de una ecuación diferencial particular. El uso de una exposición integral equivalente a la ecuación diferencial de dominio se necesita por el hecho de que la sustitución de (2.1) en la ecuación diferencial de dominio no siempre resulta con el número de ecuaciones algebraicas lineales independientes requerido para los coeficientes desconocidos. Una forma de asegurarse que hay exactamente el mismo número de ecuaciones como de incógnitas es considerar que el error sea como en la integral pesada.

A continuación se darán más detalles sobre esto.

Suponga que deseamos determinar una solución aproximada de la ecuación.

$$-\frac{d}{dx}\left(x\frac{d\mu}{dx}\right)+u=0 \quad \text{para } 0 < x < 1 \quad (2.2a)$$

$$u(0)=1, \quad \left(x\frac{du}{dx}\right)_{x=1}=0 \quad (2.2b)$$

buscamos una solución aproximada, sobre el dominio completo $\Omega=(0,1)$ en la forma,

$$u \approx U_N \equiv \sum_{j=1}^N c_j \phi_j(x) + \phi_0(x) \quad (2.3)$$

donde c_j son los coeficientes a determinar $\phi_j(x)$ y $\phi_0(x)$ son funciones preseleccionadas de modo que las condiciones frontera del problema se satisfagan para la solución aproximada de N parámetros U_N . Por ejemplo si

$$N=2(\phi_1=x^2-2x, \phi_2=x^3-3x, \phi_0=1)$$

$$u \approx U_N = u_1(x^2-2x) + c_2(x^3-3x) + 1$$

Lo cual satisface las condiciones de frontera (2.2b) del problema para cualquier valor de c_1 y c_2 . Las constantes c_1 y c_2 son determinadas de modo que la solución aproximada U_N en (2.3) satisfaga (2.2a) en algún sentido. Si queremos que U_N satisfaga (2.2a) en el sentido exacto, obtenemos

$$\begin{aligned} -\frac{dU_N}{dx} - x\frac{d^2U_N}{dx^2} + U_N &= -2c_1(x-1) - 3c_2(x^2-1) - 2c_1x - 6c_2x^2 \\ &+ c_1(x^2-2x) + c_2(x^3-3x) + 1 = 0 \end{aligned}$$

Ya que esta expresión puede ser cero para cualquier valor de x , los coeficientes de las diferentes potencias de x deben ser cero.

$$\begin{aligned}
 1 + 2c_1 + 3c_2 &= 0 \\
 -(6c_1 + 3c_2) &= 0 \\
 c_1 - 9c_2 &= 0 \\
 c_2 &= 0
 \end{aligned}$$

Estas ecuaciones son inconsistentes; no hay solución para las ecuaciones. Por otro lado requerimos que la solución aproximada U satisfaga la ecuación diferencial (2.2a) en el sentido de integral-pesada .

$$\int_0^1 w R dx = 0 \quad (2.4a)$$

donde R es llamado residuo

$$R = -\frac{dU_N}{dx} - x \frac{d^2 U_N}{dx^2} + U_N$$

y w es llamada la función peso. De (2.4a) obtenemos ecuaciones independientes lineales que son funciones independientes de w . Por ejemplo, si tomamos $w = 1$ y $w = x$ obtenemos.

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_0^1 1R dx = (1 + 2c_1 + 3c_2) + \frac{1}{2}(-6c_1 - 3c_2) + \frac{1}{3}(c_1 - 9c_2) + \frac{1}{4}c_2 \\
 0 &= \int_0^1 xR dx = \frac{1}{2}(1 + 2c_1 + 3c_2) + \frac{1}{3}(-6c_1 - 3c_2) + \frac{1}{4}(c_1 - 9c_2) + \frac{1}{5}c_2
 \end{aligned}$$

6

$$\frac{2}{3}c_1 + \frac{5}{4}c_2 = 1 \quad (2.4b)$$

$$\frac{3}{4}c_1 + \frac{31}{20}c_2 = \frac{1}{2}$$

que proporcionan dos ecuaciones lineales independientes para c_1 y c_2

$$\left(\text{dando } c_1 = \frac{222}{23} \text{ y } c_2 = -\frac{100}{23} \right)$$

Por lo tanto, las exposiciones integrales del tipo (2.4a) proporcionan medios de obtención de muchas ecuaciones algebraicas tantos como coeficientes desconocidos en la aproximación. Este capítulo trata con la construcción de diferentes tipos de exposiciones integrales usadas en diferentes métodos variacionales. Un método variacional es en el cual se buscan soluciones aproximadas del tipo $u \approx \sum_j c_j \phi_j + \phi_0$ y los coeficientes c_j se determinan usando una exposición integral. El método variacional difiere de otros en la selección de la función peso w y la exposición integral usada, lo cual dicta la selección de las funciones aproximación ϕ_j . En el método del elemento finito, un dominio dado es visto como un ensamble de subdominios (elementos), y una solución aproximada se busca sobre cada subdominio de la misma manera como en los métodos variacionales, por lo tanto el estudio del método variacional es informativo, antes de estudiar el método del elemento finito, nuestro objetivo en este capítulo es ilustrar los pasos básicos en las formulaciones integrales y las aproximaciones asociadas de varios problemas frontera. Hacia este objetivo; primero introducimos terminología y anotaciones. ®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

2.2 PROBLEMAS DE VALOR FRONTERA, INICIAL, VALOR PROPIO.

Dominio y frontera. El objetivo de la mayoría de los análisis es determinar funciones desconocidas, llamadas variables dependientes, que satisfagan una serie dada de ecuaciones diferenciales en un dominio dado o región y alguna condición de frontera del dominio. Un dominio es un conjunto de puntos en el espacio, con la propiedad de que si P es un punto en el dominio entonces todos los puntos cierran hacia P perteneciendo al dominio. Si dos puntos cualesquiera del dominio pueden unirse mediante una línea tendida completamente dentro de él, entonces se dice que el dominio

es convexo y simplemente conectado. Las fronteras de un dominio son la serie de puntos tal que, en cualquier cercanía de esos puntos, hay puntos que pertenecen al dominio como hay puntos que no. Notar que de la definición que los puntos en las fronteras no pertenecen al dominio. Usaremos el símbolo Ω para representar un dominio arbitrario y Γ representa su frontera.

Una función de diversas variables se dice que es de la clase $C^m(\Omega)$ en un dominio Ω si todas sus derivadas parciales existen e incluyen el m-ésimo orden y son continuas en Ω . Por lo tanto, si f es de clase C^0 en dos dimensiones entonces f es continua (ejem. $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ existen, pero no pueden ser continuas). Las letras x e y serán usadas para coordenadas rectangulares de un punto en dos dimensiones.

Cuando las variables dependientes son funciones de dos variables independientes (x e y) el (dos dimensiones) dominio es una superficie (un plano) y la frontera es la curva que lo encierra. No es raro encontrar problemas en que la variable dependiente y posiblemente sus derivadas están especificadas en puntos interiores el dominio (ejem. Doble de vigas continuas).

Se dice que una ecuación diferencial describe un problema de valor frontera, si la variable dependiente y posiblemente sus derivada toman valores especificados de la frontera, un problema de valor inicial es en el que la variable dependiente y posiblemente sus derivada son especificadas inicialmente (ejem. en tiempo $t = 0$). Los problemas de valor inicial generalmente son problemas dependientes del tiempo. Ejemplos de problemas de frontera y valor inicial se dan a continuación.

Problemas de valor frontera:

$$-\frac{d}{dx}\left(a\frac{du}{dx}\right) = f \quad \text{para } 0 < x < 1 \quad (2.5)$$

$$u(0) = d_0, \quad \left(a \frac{du}{dx} \right)_{x=1} = g_0 \quad (2.6)$$

Problema de valor inicial:

$$\rho \frac{d^2 u}{dt^2} + au = f \quad \text{para } 0 < t \leq t_0 \quad (2.7)$$

$$u(0) = u_0, \quad \left(\frac{du}{dt} \right)_{t=0} = v_0 \quad (2.8)$$

Problemas de valor inicial y frontera:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \rho \frac{\partial u}{\partial t} = f(x, t) \quad \text{para } \begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < t \leq t_0 \end{cases} \quad (2.9)$$

$$u(0, t) = d_0(t), \quad \left(a \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=1} = g_0(t), \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad (2.10)$$

Las condiciones en (2.6) se llaman condiciones frontera, las de (2.8) condiciones iniciales. Cuando cualquiera de los valores especificados (ejemplo, d_0, g_0, u_0 y v_0) no

son cero, las condiciones son no-homogéneas, por lo contrario se dice que son homogéneas: Por ejemplo $u(0) = d_0$ es una condición de frontera no-homogénea y la

condición de frontera homogénea, asociada es $u(0) = 0$. La serie de cantidades especificadas ($a, g_0, d_0, \rho, u_0, v_0$) se llaman los datos del problema. Las ecuaciones diferenciales en las que el lado derecho f es cero se llaman ecuaciones diferenciales homogéneas.

Problema valor propio. El problema de determinar los valores de la constante λ tal que:

$$-\frac{d}{dx}\left(a\frac{du}{dx}\right) = \lambda u \quad \text{para } 0 < x < 1 \quad (2.11)$$

$$u(0) = 0, \quad \left(a\frac{du}{dx}\right)\Big|_{x=1} = 0$$

Se llama el problema de valor propio asociado con la ecuación diferencial (2.5). Los valores de λ para los cuales (2.11) satisface se llaman valores propios, y las funciones asociadas se llaman funciones propias.

La solución clásica (o exacta) de una ecuación diferencial es la función que satisface idénticamente la ecuación diferencial y las condiciones de frontera.

RELACIONES INTEGRALES

La integración por partes se usa frecuentemente en la formulación integral de ecuaciones diferenciales. En casos de dos dimensiones la integración por partes se conoce más como los teoremas de gradiente y divergencia. En esta sección, derivamos algunas identidades usuales para uso posterior.

FORMULA PARA INTEGRACION POR PARTES. Considere que u, v, w son funciones de las coordenadas x suficientemente diferenciables. Luego la siguiente formula de integración por parte deduce:

$$\int_a^b w \frac{dv}{dx} dx = \int_a^b w dv = -\int_a^b v dw + [wv]_a^b \quad (2.12)$$

$$= -\int_a^b v \frac{dw}{dx} dx + w(b)v(b) - w(a)v(a)$$

Esta identidad puede demostrarse fácilmente. Primero, anote la siguiente identidad de la regla diferenciación del producto

$$\frac{d}{dx}(wv) = \frac{dw}{dx}v + w\frac{dv}{dx}$$

Por lo tanto

$$w \frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}(wv) - \frac{dw}{dx}v$$

Integrando ambos lados en el intervalo (a,b), obtenemos

$$\begin{aligned} \int_a^b w \frac{dv}{dx} dx &= \int_a^b \left[\frac{d}{dx}(wv) - \frac{dw}{dx}v \right] dx \\ &= \int_a^b \frac{d}{dx}(wv) dx - \int_a^b \frac{dw}{dx}v dx \\ &= [wv]_a^b - \int_a^b \frac{dw}{dx}v dx \end{aligned}$$

Que es lo mismo como en (2.12)

Enseguida, considere la expresión

$$\int_a^b w \frac{d^2u}{dx^2} = \int_a^b w \frac{d}{dx} \left(\frac{du}{dx} \right) dx$$

$$= \int_a^b w \frac{d}{dx} dx, \quad v \equiv \frac{du}{dx}$$

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Usando (2.12), se obtiene

$$\begin{aligned} \int_a^b w \frac{d^2u}{dx^2} dx &= - \int_a^b v \frac{dw}{dx} dx + w(b)v(b) - w(a)v(a) \\ &= - \int_a^b \frac{du}{dx} \frac{dw}{dx} dx + w(b) \frac{du}{dx}(b) - w(a) \frac{du}{dx}(a) \end{aligned} \tag{2.13a}$$

ó

$$- \int_a^b \frac{du}{dx} \frac{dw}{dx} dx = \int_a^b w \frac{d^2u}{dx^2} dx + w(a) \frac{du}{dx}(a) - w(b) \frac{du}{dx}(b) \tag{2.13b}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned}\int_a^b v \frac{d^4 w}{dx^4} dx &= \int_a^b v \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right) dx \\ &= \int_a^b v \frac{d^2 u}{dx^2} dx, \quad \text{cuando } u \equiv \frac{d^2 w}{dx^2}\end{aligned}$$

Usando (2.13a) cuando $w = v$, se escribe del lado derecho como

$$-\int_a^b \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx + v(b) \frac{du}{dx}(b) - v(a) \frac{du}{dx}(a) \quad (2.14a)$$

Usamos (2.13b) con $w = u$ y $u = v$ para escribir (2.14a) como

$$\int_a^b u \frac{d^2 v}{dx^2} dx + u(a) \frac{dv}{dx}(a) - u(b) \frac{dv}{dx}(b) + v(b) \frac{du}{dx}(b) - v(a) \frac{du}{dx}(a) \quad (2.14b)$$

Y, al final, reemplazamos u por el actual valor $u = d^2 w / dx^2$, llegamos a

$$\begin{aligned}\int_a^b v \frac{d^4 w}{dx^4} dx &= \int_a^b \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2 v}{dx^2} dx + \frac{d^2 w}{dx^2}(a) \frac{dv}{dx}(a) - \frac{d^2 w}{dx^2}(b) \frac{dv}{dx}(b) \\ &\quad + v(b) \frac{d^3 w}{dx^3}(b) - v(a) \frac{d^3 w}{dx^3}(a)\end{aligned} \quad (2.15)$$

Las ecuaciones (2.13a) y (2.15) se usan en la formulación débil de ecuaciones diferenciales de segundo y cuarto orden respectivamente.

Haga que ∇ y ∇^2 representan, respectivamente, al operador gradiente y al operador Laplaciano en el sistema cartesiano de coordenadas rectangulares (x, y) :

$$\nabla = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y}, \quad \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (2.16)$$

Donde \hat{i} y \hat{j} representan los vectores base unitarios a lo largo de las coordenadas x e y respectivamente. El signo de intercalación " ^ " sobre los vectores indica que son de longitud unitaria. Si $F(x,y)$ y $G(x,y)$ son funciones escalares de clase $C^0(\Omega)$ en el dominio de dos dimensiones Ω , se establecen los siguientes teoremas de gradiente y divergencia.

TEOREMA DEL GRADIENTE

$$\int_{\Omega} \text{grad } F dx dy = \int_{\Omega} \nabla F dx dy = \int_{\Gamma} \hat{n} F ds$$

$$\int_{\Omega} \left(\hat{i} \frac{\partial F}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial F}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Gamma} (n_x \hat{i} + n_y \hat{j}) F ds \quad (2.17a)$$

La segunda ecuación da lugar (debido a que dos vectores son iguales, si y solo si, sus componentes son iguales) a que se establezcan las siguientes relaciones:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial x} dx dy = \int_{\Gamma} n_x F ds, \quad \int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial y} dx dy = \int_{\Gamma} n_y F ds \quad (2.17b)$$

TEOREMA DE LA DIVERGENCIA

$$\int_{\Omega} \text{div } G dx dy = \int_{\Omega} \nabla \cdot G dx dy = \int_{\Gamma} \hat{n} \cdot G ds \quad (2.18)$$

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\Gamma} (n_x G_x + n_y G_y) ds$$

Aquí el punto representa al producto escalar de vectores, \hat{n} representa al vector unitario normal a la superficie Γ del dominio Ω , n_x y n_y , (G_x, G_y) son los componentes

rectangulares de $\hat{n}(G)$ y el círculo de la integral frontera indica que la integral se hace sobre la frontera completa (ver Fig. 2.1)

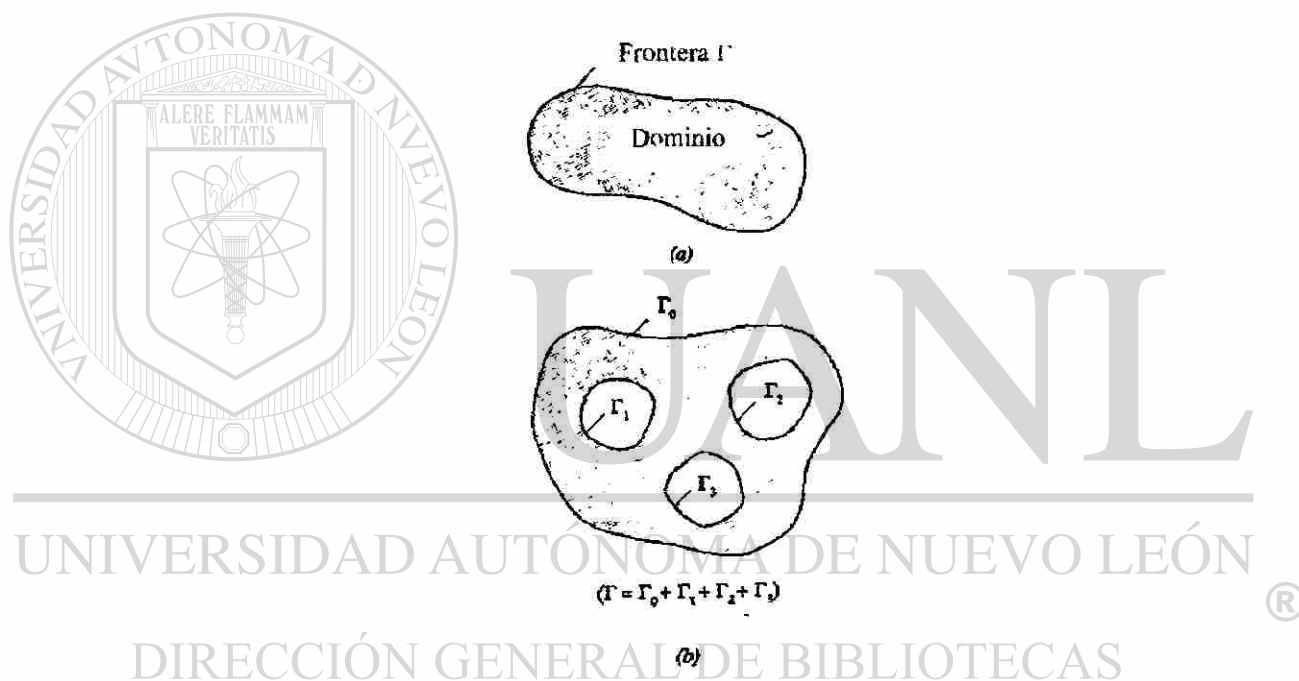


Fig. 2.1

La dirección cosenos n_x y n_y del vector unitario \hat{n} se pueden escribir como:

$$n_x = \cos(x, \hat{n}), \quad n_y = \cos(y, \hat{n}) \quad (2.19)$$

Donde $\cos(x, \hat{n})$ es el coseno del ángulo entre la dirección positiva x y el vector \hat{n} .

Las siguientes identidades, pueden demostrarse usando los teoremas del gradiente y divergencia se usarán en la continuación. Considere w y G sean funciones escalares definidas en el dominio Ω de dos dimensiones.

Entonces:

$$\int_{\Omega} (\nabla G) w \, dx \, dy = - \int_{\Omega} (\nabla w) G \, dx \, dy + \int_{\Gamma} \hat{n} w G \, ds \quad (2.20 \text{ a})$$

Y

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 G) w \, dx \, dy = \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla G \, dx \, dy - \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n} w \, ds \quad (2.20 \text{ b})$$

Donde $\frac{\partial}{\partial n}$ representa a la derivada normal del operador:

$$\frac{\partial}{\partial n} = \hat{n} \cdot \nabla = n_x \frac{\partial}{\partial x} + n_y \frac{\partial}{\partial y} \quad (2.21)$$

La siguiente forma de la ecuación (2.20 a) con un cambio aproximado de variables, se usa

$$\int_{\Omega} w \frac{\partial G}{\partial x} \, dx \, dy = - \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x} G \, dx \, dy + \int_{\Gamma} n_x w G \, ds \quad (2.22 \text{ a})$$

$$\int_{\Omega} w \frac{\partial G}{\partial y} \, dx \, dy = - \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial y} G \, dx \, dy + \int_{\Gamma} n_y w G \, ds \quad (2.22 \text{ b})$$

FUNCIONALES:

Una expresión integral de la forma:

$$I(u) = \int_a^b F(x, u, u') \, dx, \quad u = u(x), \quad u' = \frac{du}{dx}$$

Donde el integrando $F(x, u, u')$ es una función dada de los argumentos x, u y du se llama funcional. El valor $I(u)$ de la integral depende de u ; de aquí que la anotación $I(u)$ sea apropiada. Sin embargo, para una u dada, $I(u)$ representa un valor escalar. Usaremos el término funcional para describir funciones definidas por integrales cuyos argumentos involucrados son funciones. Una funcional es una "función de funciones". Matemáticamente, una funcional es un operador I reconociendo u en el escalar $I(u)$ se dice lineal en u si y sólo si satisface la relación:

$$I(\alpha u + \beta v) = \alpha I(u) + \beta I(v) \quad (2.23)$$

Para cualquier escalar α y las variables dependientes u y v .

Una funcional $B(u, v)$ se dice que es bilineal si está es lineal en cada uno de sus argumentos u y v .

$$\begin{aligned} B(u, \alpha v_1 + \beta v_2, v) &= \alpha B(u, v_1, v) + \beta B(u, v_2, v) \\ &\text{(linealidad en el primer argumento)} \\ B(u, \alpha v_1 + \beta v_2) &= \alpha B(u, v_1) + \beta B(u, v_2) \\ &\text{(linealidad en el segundo argumento)} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Donde u, u_1, u_2, v, v_1 y v_2 son variables dependientes. Una forma bilineal $B(u, v)$ se dice que es simétrico en sus argumentos u, v si:

$$B(u, v) = B(v, u) \quad (2.25)$$

Para todos u y v .

Un ejemplo de una funcional lineal es:

$$I(v) = \int_0^L v f \, dx + \frac{dv}{dx}(L) M_0$$

Donde $f = f(x)$ y M_0 son cantidades conocidas. Un ejemplo de una función bilineal es

$$B(u, w) = \int_0^L a \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} dx$$

Donde $a = a(x)$ es una función conocida.

EL SIMBOLO VARIACIONAL.

Considere la función $F = F(x, u, u')$. Para un valor fijo arbitrario de la variable independiente x , F depende de u y u' . El cambio αv en u , donde α es una constante y v es una función, es llamada la variación de u y representada por δu :

$$\delta u = \alpha v \quad (2.26)$$

El operador δ se llama el símbolo variacional. La variación δu de una función u representa un cambio admisible en la función $u(x)$ en un valor fijo de la variable independiente x . Si u es especificada en un punto (generalmente en la frontera), la variación de u es cero, ello debido a que el valor especificado no puede variarse. Entonces, la variación de una función de u debería, satisfacer la forma homogénea de las condiciones frontera para u . La variación δu en u es un cambio virtual. Asociado con este cambio en u (ejemplo u tendiendo a $u + \alpha u$), hay un cambio en F . En analogía con la diferenciación total de una función de dos variables, la primera variación de F en u es definida por

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial u'} \delta u' \quad (2.27)$$

Notar la analogía entre la primera variación (2.27), y la diferenciación total de F ,

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial u} du + \frac{\partial F}{\partial u'} du' \quad (2.28)$$

Ya que x no es variada durante la variación de u hacia $u + \delta u$, $dx = 0$ y la analogía entre δF y dF llega a ser evidente, δ actúa como un operador diferencial con respecto a las

variables dependientes. Se puede verificar fácilmente que las leyes de variación de sumas, productos, relaciones, potencias, y así sucesivamente son completamente análogas a las leyes de diferenciación correspondiente. Por ejemplo si $F_1 = F_1(u)$ y $F_2 = F_2(u)$ entonces:

$$1. \quad \delta(F_1 \pm F_2) = \delta F_1 \pm \delta F_2 \quad (2.29)$$

$$2. \quad \delta(F_1 F_2) = F_2 \delta F_1 + F_1 \delta F_2$$

$$3. \quad \delta \left(\frac{F_1}{F_2} \right) = \frac{F_2 \delta F_1 - F_1 \delta F_2}{F_2^2}$$

$$4. \quad \delta \left[(F_1)^n \right] = n(F_1)^{n-1} \delta F_1$$

Aún más, el operador variacional puede conmutar con los operadores diferencial e integral (así como se fijan las coordenadas x, y coordenadas Lagrangianas):

$$\frac{d}{dx} (\delta u) = \delta \left(\frac{du}{dx} \right) = \alpha \frac{dv}{dx} = \delta u' = \delta \left(\frac{du}{dx} \right) \quad (2.30a)$$

$$\delta \int_a^b u(x) dx = \int_a^b \delta u(x) dx \quad (2.30b)$$

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

2.3 FORMULACION DEBIL EN PROBLEMAS DE VALOR FRONTERA

De la sección 2.1, recordar que la motivación para formulaciones integrales de problemas de valor frontera se debe al hecho de que los métodos variacionales de aproximación, el Ritz, Galerkin, colocación o en general métodos de residuo-compensado, están basados en las exposiciones de integral-pesada de las ecuaciones que rigen. De aquí el método del elemento finito es una técnica para construir funciones aproximación requeridos en aplicación de elemento discreto de cualquier metodo variacional, es necesario estudiar la formulación de integral-pesada y la formulación

débil de ecuaciones diferenciales. En adición a la razón anterior, las formulaciones suaves también facilitan, de manera natural, la clasificación de condiciones frontera en condiciones natural y esencial. La cual juega un papel importante en la derivación de las funciones aproximación y la selección de los grados de libertad nodales del modelo de elemento finito.

En esta sección, nuestro objetivo primario será construir la forma suave de una ecuación diferencial dada y clasificar las condiciones frontera asociadas con la ecuación. Una forma débil es una exposición de integral-pesada de una ecuación diferencial en la que diferenciación se distribuye entre las variables dependientes y la función peso e incluye las condiciones frontera naturales del problema.

INTEGRAL PESADA Y FORMULACIÓN DEBIL

Considere el problema de resolver la ecuación diferencial

$$-\frac{d}{dx} \left[a(x) \frac{du}{dx} \right] = q(x) \quad \text{para } 0 < x < L \quad (2.31a)$$

Para la solución $u(x)$, sujeta a las condiciones frontera:

$$u(0) = u_0, \quad \left(a \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=L} = Q_0 \quad (2.31b)$$

Donde a y q son funciones conocidas de las coordenadas x , u_0 y Q_0 son valores conocidos, y L es la longitud del dominio en una dimensión. Las funciones a y q y las constantes u_0 y Q_0 a lo largo de la longitud L del dominio, son los datos del problema. La solución u es la variable dependiente en el problema. Cuando los valores especificados son diferentes de cero ($u_0 \neq 0$ o $Q_0 \neq 0$), las condiciones de frontera son no homogéneas; cuando los valores especificados son cero, las condiciones frontera son

homogéneas. La forma homogénea de la condición frontera $u(0) = u_0$ es $u(0) = 0$ y la forma homogénea de la condición frontera $\left(a \frac{du}{dx}\right)\Big|_{x=L} = Q_0$.

Deberá recordarse que el propósito único de desarrollar una exposición de integral-pesada de una ecuación diferencial es tener los medios para obtener N relaciones algebraicas lineales independientes, entre los coeficientes c_j de la aproximación.

$$u \approx U_N = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j(x) + \phi_0(x) \quad (2.32)$$

Esta es perfecta si se escogen N funciones de peso lineales independientes en la exposición integral-pesada, como se verá pronto.

Hay tres pasos en la obtención de la forma débil, si ésta existe de una ecuación diferencial. Esos pasos se ilustran por medio del modelo de ecuación diferencial y condiciones frontera en (2.31).

PASO 1. Mover todas las expresiones de la ecuación diferencial hacia un lado, multiplique toda la ecuación por una función w , llamada la función peso, e integral sobre el dominio $\Omega=(0,L)$ del problema.

$$0 = \int_0^L w \left[-\frac{d}{dx} \left(a \frac{du}{dx} \right) - q \right] dx \quad (2.33)$$

A lo cual llamamos exposición de integral-pesada o residuo compensado equivalente a la ecuación original (2.31a). La expresión en el paréntesis rectangular no es idénticamente cero cuando u se reemplaza para su aproximación, matemáticamente, (2.33) es una exposición en que el error en la ecuación diferencial (debido a la aproximación de la solución) es cero en el sentido de la integral-pesada.

Cuando u es la solución exacta, (2.33) es trivial, la exposición integral (2.33) nos permite escoger N funciones linealmente independientes, para w y obtener N ecuaciones para c_1, c_2, \dots, c_N de (2.32).

Notar que la exposición de integral-pesada de cualquier ecuación diferencial puede desarrollarse. La función peso w en (2.33) puede ser cualquier función integrable diferente de cero. En general, la función peso w es la exposición integral está sujeta a menos requisitos de rigurosa continuidad que la variable dependiente u . La exposición de integral-pesada es equivalente a solamente a la ecuación diferencial y no incluye condiciones frontera.

PASO 2. Mientras la exposición de integral pesada (2.33) nos permite obtener el número necesario N de relaciones algebraicas entre c_j para N selecciones diferentes de la función peso w , se requiere que las funciones aproximación sea tal que U_N sea diferenciables cuantas veces sea llamada en la ecuación diferencial original y satisfaga las condiciones de frontera especificadas. Si esto no es importante, uno puede proceder con la exposición integral (2.33) y obtener ecuaciones algebraicas necesarias para c_j . Métodos aproximados basados en la integral-pesada de la forma (2.33) se conocen como métodos residuales compensado. Si la diferenciación se distribuye entre la solución aproximada U_N y la función peso w , la forma integral resultante requerirá de condiciones de suavidad continúa en ϕ_j , y entonces la exposición integral-pesada es llamada la forma débil. La formulación débil tiene dos características deseables.

Primero, requiere de continuidad más suave de la variable dependiente, y ordinariamente esto da lugar a una serie simétrica de ecuaciones algebraicas en los coeficientes.

Segundo las condiciones de frontera natural del problema, se incluyen en la forma débil, y por lo tanto la solución aproximada U_N es requerida para satisfacer solamente las condiciones frontera esenciales del problema. Estas dos características de una forma débil juegan un papel importante en el desarrollo de modelos de elemento finito de un problema.

La distribución equitativa de diferenciación entre la función peso y la variable dependiente es posible solamente si las derivadas que aparecen en la ecuación diferencial son de igual orden. El trato de diferenciabilidad de la variable dependiente a la función peso es dictado por la necesidad de incluir físicamente términos de frontera significativos en la forma débil, a pesar del efecto sobre los requisitos de continuidad. Por otro lado, el trato de diferenciación desde la variable dependiente hasta la función peso no deberá llevarse a cabo si conduce a términos de frontera que físicamente no son significativos.

Regresando a la exposición integral (2.33) integramos el primer término de la expresión por partes para obtener :

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_0^L \left\{ w \left[-\frac{d}{dx} \left(a \frac{du}{dx} \right) \right] - wq \right\} dx \\
 &= \int_0^L \left(\frac{dw}{dx} a \frac{du}{dx} - wq \right) dx - \left[wa \frac{du}{dx} \right]_0^L
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Donde la fórmula de integración por partes

$$\int_0^L w dv = - \int_0^L v dw + [wv]_0^L \tag{2.35}$$

Con $v = -adu / dx$ es usada en el primer término para arribar a la segunda línea de (2.34)

Una parte importante del paso 2 es que identifica los dos tipos de condiciones frontera asociados con cualquier ecuación diferencial: natural y esencial.

La clasificación es importante para los métodos variacionales de aproximación considerados en este capítulo y las formulaciones de elemento finito presentadas en los capítulos 3-5 . La siguiente regla se usa para identificar las condiciones frontera y su forma. Después del trato de diferenciación entre la función peso y la variable por

ejemplo después de completar el paso 2 examine todos los términos frontera de la exposición integral. Los términos frontera involucrarán tanto la función peso como la variable dependiente. Los coeficientes de la función peso y sus derivadas en las expresiones frontera son llamados las variables secundarias (SV). La especificación de las variables secundarias en la frontera, constituye las condiciones de frontera natural (NBC). Para el caso en cuestión, el término frontera es $w\left(a\frac{du}{dx}\right)$. El coeficiente de la función peso es $a\frac{du}{dx}$. De aquí la variable secundaria es de la forma $a\frac{du}{dx}$.

Las variables secundarias siempre tienen significado físico, y son por lo regular cantidades de interés.

La variable dependiente de un problema, expresada en la misma forma que la función peso que aparece en el término frontera, se llama la variable primaria (PV), y su especificación en la frontera constituye la condición de frontera esencial (EBC). Para el caso en consideración, la función peso aparece en la expresión frontera [ver (2.34)] como w . Por lo tanto, la variable dependiente u es la variable primaria, y la condición de frontera inicial involucra especificación u en los puntos frontera.

Debe notarse que el número y forma de las variables primaria y secundaria dependen del orden de la ecuación diferencial. El número de las variables primaria y secundaria siempre es el mismo, y para cada variable primaria hay una variable secundaria asociada. (Ejemplo: desplazamiento y fuerza, temperatura y calor y otras). Solamente una del par de variables primaria o secundaria se puede especificar en un punto de la frontera.

Entonces un problema dado puede tener sus condiciones frontera en una de tres categorías: (i) todas las condiciones de frontera especificadas son EBC; (ii) algunas de las condiciones frontera son EBC y el resto son NBC; o (iii) todas las condiciones frontera son NBC. Para una ecuación simple de segundo orden, como en el caso presente, hay una variable primaria u y una variable secundaria Q . En un punto de

frontera, sólo uno del par (u, Q) puede especificarse. Para una ecuación de cuarto orden tal como la teoría clásica de vigas (Euler-Bernoulli), hay de dos de cada clase (ejemplo: dos PV_s y dos SV_s) como se ilustrará más tarde. En general una ecuación diferencial de $2m$ th orden tiene mPV_s y mSV_s , esto es m pares de variables primarias y secundarias.

Considere la ecuación $Q \equiv \left(a \frac{du}{dx} \right) n_x$

Q = variable secundaria.

donde n_x representa dirección coseno.

(2.36)

n_x = los ángulos entre eje x y el normal a la frontera

Para una dimensión, la normal a los puntos de frontera está siempre a lo largo de la longitud del dominio. Por tanto $n_x = -1$ en el extremo izquierdo y $n_x = 1$ en el extremo derecho de dominio: $n_x(0) = -1$ y $n_x(L) = 1$

En (2.36), (2.34) toma la forma:

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_0^L \left(a \frac{dw}{dx} \frac{dv}{dx} - wq \right) dx - \left[wa \frac{du}{dx} \right]_0^L \\
 &= \int_0^L \left(a \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} - wq \right) dx - \left(wa \frac{du}{dx} n_x \right)_{x=0} - \left(wa \frac{du}{dx} \right)_{x=L} \\
 &= \int_0^L \left(a \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} - wq \right) dx - (wQ)_0 - (wQ)_L
 \end{aligned}
 \tag{2.37}$$

La ecuación 2.37 es llamada la forma débil de la ecuación diferencial (2.31) débil se refiere a la continuidad reducida de, la cual se requiere que sea diferenciable dos veces en la forma integral pesada (2.33) pero sólo una vez en 2.37.

Paso 3. El tercer y último paso de la formulación suave es imponer las condiciones frontera reales al problema. Se requiere que la función peso w desaparezca en los puntos frontera esencial especificadas se requiere que w satisfaga la forma homogénea de las condiciones de frontera esenciales especificadas del problema. Este requerimiento en w podrá verse arbitrario cuando se está familiarizado con cálculo variacional. En las formulaciones débiles, la función peso tiene un significado de cambio virtual (ó variación) de la variable primaria. Si una variable primaria se especifica en punto, el cambio virtual debe ser cero. Para el problema en cuestión las condiciones frontera están dadas, en (2.31b). Mediante las reglas de clasificación de las condiciones frontera, $u = u_0$ es la condición de frontera esencial y $\left(a \frac{du}{dx}\right)_{x=L} = Q_0$ es la condición de frontera natural. La función w es necesario que satisfaga.

$w(0) = 0$, debido a que $u(0) = u_0$ ya que $w(0) = 0$ y

$$Q(L) = \left(a \frac{du}{dx}\right)_{x=L} = \left(a \frac{du}{dx}\right)_{x=L} = Q_0 g$$

(2.37) reduce a la expresión:

$$0 = \int_0^L \left(a \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} - wq \right) dx - w(L)Q_0 \quad (2.38)$$

Que es la forma débil equivalente a la ecuación diferencial original (2.31a) y a la condición de frontera natural (2.31b).

Los términos " forma variacional " y " forma débil " serán usados alternativamente.

La forma débil de una ecuación diferencial es una exposición de integral -pesada equivalente a la ecuación diferencial y las condiciones de frontera natural especificadas en el problema. La forma débil existe para todos los problemas - lineales o no- que son descritas por ecuaciones diferenciales lineal y de igual orden, la forma débil resultante tendrá una forma bilineal simétrica en la variable dependiente u y la función peso w .

FORMAS LINEAL Y BILINEAL Y FUNCIONES CUADRATICAS.

Es informativo, aunque no necesario para el uso de métodos variacionales o métodos del elemento finito, ver la relación entre la forma débil y el mínimo de una función cuadrática asociada con la ecuación diferencial, la forma débil (2.38) contiene dos tipos de expresiones, las que comprenden la variable dependiente u y la función peso w y las que envuelven sólo las últimas. Representamos esos dos tipos de expresiones por $B(w, u)$ y $I(w)$ respectivamente:

$$B(w, u) = \int_0^L a \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} dx, \quad I(w) = \int_0^L wq dx + w(L)Q_0 \quad (2.39)$$

De aquí la exposición débil (2.38) puede expresarse en la forma

$$0 = B(w, u) - I(w) \quad (2.40)$$

La cual es llama el problema variacional (o suave) asociado con las ecuaciones (2.31). Usando las definiciones de las formas lineal y bilineal de la sección 2.2.3 puede verificarse que $B(w, u)$ es bilineal y simétrica en w y u y que $I(w)$ es lineal [ver 2.23 y

2.24] . El problema variacional asociado con (2.31 a,b) puede expresarse como uno de encontrar la solución u tal que u tal que:

$$B(w, u) = I'(w) \quad (2.41)$$

cumple para cualquier w que satisfaga la forma homogénea de las condiciones de frontera esencial especificada y condiciones de continuidad implicado por la forma débil la función w se puede ver como una variación (o incremento) de la solución real u^* ,

$$u = u^* + w \quad (2.42)$$

y u es la solución variacional, ejemplo la solución de(2.41). ya que u y u^* pueden satisfacer cualquier condición de frontera esencial especificada(en adición , u^* también satisface cualquier condición de frontera natural especificada), se sigue que w debe satisfacer la forma homogénea de la condición de frontera esencial especificada. Por lo tanto en la notación de(2.26), w es la variación, ver sección (2.24) de la solución:

$$w = \delta u$$

Entonces (2.40) se puede escribir como:

$$0 = B(\delta u, u) - I'(\delta u)$$

si $B(\cdot, \cdot)$ es simétrica, podemos escribir:

$$\begin{aligned} &= \delta \left[\frac{1}{2} B(u, u) \right] - \delta [I(u)] \\ &= \delta I(u) \end{aligned} \quad (2.43 \text{ a})$$

donde

$$I(u) = \frac{1}{2} B(u, u) - I(u) \quad (2.43b)$$

Arribando a la segunda línea de la (2.43a) las siguientes identidades son usadas:

$$B(\delta u, u) = \int_{a_0}^L a \frac{d\delta u}{dx} \frac{du}{dx} dx = \delta \int_0^L a \left[\left(\frac{du}{dx} \right)^2 \right] dx \quad (2.44a)$$

$$= \frac{1}{2} \delta \int_0^L a \frac{du}{dx} \frac{du}{dx} dx = \frac{1}{2} \delta [B(u, u)]$$

$$I(\delta u) = \int_0^L \delta u q dx + \delta u(L) Q_0$$

$$= \delta \left[\int_0^L u q dx + u(L) Q_0 \right] = \delta [I(u)] \quad (2.44 b)$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Notar que la llave de paso en la derivación de la funcional $I(u)$ de la forma suave es la linealidad y simetría de la forma bilineal $B(w, u)$.

La relación $B(\delta u, u) = \frac{1}{2} \delta B(u, u)$ se cumple sólo si $B(w, u)$ es bilineal y simétrica en w y en u . Por tanto siempre que $B(w, u)$ sea bilineal y simétrica y $I(w)$ sea lineal, la funcional cuadrática está dada por (2.34b). Cuando $B(w, u)$ no es lineal en w y u , pero es simétrica, la funcional $I(u)$ puede ser derivada, pero no de (2.43b)

La ecuación (2.43a) representa la condición necesaria para la funcional $I(u)$ para tener un valor extremo. Para problemas de mecánica de sólidos, $I(u)$ representa la funcional de la energía potencial total y (2.43a) es la exposición del principio de la energía potencial total.

De todas las funciones admisibles u , que hacen de la energía potencial total $I(u)$ un mínimo, también satisfacen la ecuación diferencial y la condición frontera en (2.31). En otras palabras, la forma suave de una ecuación diferencial es la misma que la exposición del principio de energía potencial total. Para problemas de mecánica de sólidos, la funcional $I(u)$ puede no tener el significado de energía pero no obstante, es usado para análisis matemático.

Como se dijo antes, cada ecuación diferencial admite una exposición de integral-pesada, y una forma débil existe siempre que la ecuación sea de orden de dos o mayor. Sin embargo no todas las ecuaciones admiten la formulación funcional. Para que exista la funcional, la forma bilineal asociada deberá ser simétrica en sus argumentos. Por otro lado, los métodos variacionales y el método del elemento finito no requiere de una funcional, una exposición integral una forma débil de la ecuación a resolverse es suficiente. Si cuenta uno con una funcional, la forma débil se obtiene tomando su primera variación.

Ejemplo 2.1. Considere la ecuación diferencial

$$-\frac{d}{dx}\left(\alpha \frac{du}{dx}\right) - cu + x^2 = 0 \text{ para } 0 < x < 1 \quad (2.45a)$$

sujeto a las condiciones frontera:

$$u(0) = 0 \quad \left(\alpha \frac{du}{dx}\right)\Big|_{x=1} = 1 \quad (2.45b)$$

los datos son [cf.(2.31)] $q = -x^2$, $Q_0 = 1$ $u_0 = 0$.

Siguiendo los tres pasos para la construcción de exposiciones variacionales obtenemos:

$$1. \quad 0 = \int_0^1 w \left[-\frac{d}{dx} \left(a \frac{du}{dx} \right) - cu + x^2 \right] dx$$

$$2. \quad 0 = \int_0^1 \left(a \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} - cwu + wx^2 \right) dx - \left(wa \frac{dw}{dx} \right)_0^1 \quad (2.46)$$

Del termino frontera; es claro que la especificación de u es una condición de frontera esencial, y la especificación de $a \frac{du}{dx}$ es una condición de frontera natural. Ya que $a \frac{du}{dx} = 1$ en $x = 1$ y $w = 0$ en $x = 0$ (debido a que u es especificada aquí) obtenemos la forma débil:

$$3. \quad 0 = \int_0^1 \left(a \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} - cwu \right) dx + \int_0^1 wx^2 dx - w(1) \quad (2.47a)$$

$$0 = B(w, u) - I(w) \quad (2.47b)$$

Donde:

$$B(w, u) = \int_0^1 \left(a \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} - cwu \right) dx$$

$$I(w) = -\int_0^1 wx^2 dx + w(1) \quad (2.47c)$$

ya que $B(\cdot, \cdot)$ es bilineal y simétrica y $I(\cdot)$ es lineal, podemos calcular la funcional cuadrática de (2.43):

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[a \left(\frac{du}{dx} \right)^2 - cu^2 + 2ux^2 \right] dx - u(1) \quad (2.48)$$

Las ecuaciones del tipo de (2.45) son de interés en el estudio de la deflexión de un cable ($c = 0$), donde u representa la deflexión transversal y a la tensión en el cable. Los primeros dos términos en la funcional cuadrática representan la energía elástica de deformación, mientras el último término representa al trabajo desarrollado por la fuerza distribuida en movimiento a través del desplazamiento u .

El siguiente ejemplo ilustra la formulación variacional de una ecuación diferencial de cuarto orden en una dimensión.

Ejemplo 2.2. Considere el problema de encontrar la solución w a la ecuación diferencial.

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[b(x) \frac{d^2 w}{dx^2} \right] - f(x) = 0 \text{ para } 0 < x < 1 \quad (2.49)$$

sujeta a las condiciones de frontera

$$w(0) = \frac{dw}{dx} \Big|_{x=0} = 0, \quad \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \Big|_{x=L} = M_0, \quad \left[\frac{d}{dx} \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \right] \Big|_{x=L} = 0 \quad (2.50)$$

Esta ecuación interesa por ejemplo, en el estudio de la flexión elástica de vigas (bajo la hipótesis de Euler-Bernoulli). En este caso, w representa la deflexión transversal de las vigas, L es la longitud total de la viga, $b(x) \geq 0$ es la rigidez a la flexión de la viga (por ejemplo, el producto del módulo de elasticidad E y el momento de inercia I : $b = EI$), $f(x)$ es la carga transversal distribuida, y M_0 es el momento de flexión. La solución w es la variable dependiente del problema, y las otras cantidades (L, b, f, M_0) que son conocidas, son los datos del problema ya que la ecuación contiene una derivada de cuarto orden. La integramos dos veces por partes para distribuir las derivadas por igual entre la variable dependiente w y la función peso v , e integrando el primer término por partes, dos veces con respecto a x obtenemos [ver 2.15].

$$0 = \int_0^L v \left[\frac{d^2}{dx^2} \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - f \right] dx \quad (2.51)$$

$$0 = \int_0^L \left[\left(-\frac{dv}{dx} \right) \frac{d}{dx} \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - vf \right] dx + \left[v \frac{d}{dx} \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \right]_0^L$$

$$= \int_0^L \left(b \frac{d^2 v}{dx^2} \frac{d^2 w}{dx^2} - vf \right) dx + \left[v \frac{d}{dx} \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{dv}{dx} b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \right]_0^L \quad (2.52)$$

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

De la última línea, se sigue que la especificación de w y $\frac{dw}{dx}$ constituye las condiciones de frontera esencial (geométrica o estática), y la especificación de

$$\frac{d}{dx} \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = V \text{ (fuerza cortante)} \quad (2.53a)$$

$$\left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = M \text{ (momento de flexión)} \quad (2.53b)$$

Constituyen las condiciones de frontera natural. En el caso presente, las condiciones de frontera especificadas son (debido a las condiciones)

$$w(0) = \left(\frac{dw}{dx} \right)_{x=0} = 0$$

De aquí, la función peso es necesario que satisfaga las condiciones

$$v(0) = \left(\frac{dv}{dx} \right)_{x=0} = 0 \quad (2.54)$$

Las condiciones de frontera son:

$$\left[\frac{d}{dx} \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \right]_{x=L} = 0, \quad \left(b \frac{d^2 w}{dx^2} \right)_{x=L} = M_0 \quad (2.55)$$

Usando (2.54) y (2.55) en (2.52), obtenemos

$$0 = \int_0^L \left(b \frac{d^2 v}{dx^2} \frac{d^2 w}{dx^2} - v F \right) dx - \left(\frac{dv}{dx} \right)_{x=L} M_0 \quad (2.56a)$$

$$B(v, w) = \lambda(v) \quad (2.56b)$$

Donde

$$B(v, w) = \int_0^L b \frac{d^2 v}{dx^2} \frac{d^2 w}{dx^2} dx \quad (2.56c)$$

$$I(v) = \int_0^L v f dx + \left(\frac{dv}{dx} \right)_{x=L} M_0$$

La forma cuadrática, comúnmente conocida como la energía potencial total de la viga, se obtiene usando (2.56c) y (2.43b)

$$I(w) = \int_0^L \left[\frac{b}{2} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 - w f \right] dx - \left(\frac{dw}{dx} \right)_{x=L} M_0 \quad (2.57)$$

Note que para la ecuación de cuarto orden, las condiciones de frontera esencial involucra, no solamente la variable dependiente sino también la primera derivada. Como se vio antes, en cualquier punto de la frontera, solo una de las dos condiciones frontera puede especificarse (esencial o natural). Por ejemplo, si la deflexión transversa se especifica en un punto de frontera entonces uno no puede especificar la fuerza cortante V en el mismo punto, y viceversa. Comentarios similares se aplican a la pendiente dw/dx y al momento de flexión M . Notar que en el caso presente, w y dw/dx son las variables primarias, y V y M son las variables secundarias.

2.4 MÉTODOS VARIACIONALES DE APROXIMACION.

Nuestro objetivo en esta sección es estudiar los métodos de aproximación variacionales. Estos incluyen los métodos de Rayleigh-Ritz , Galerkin , Petrov-Galerkin , cuadrado mínimo, y colocación. En todos ellos, veremos una solución aproximada en la forma de una combinación lineal de funciones de aproximación ϕ_j , convenientes y parámetros no determinados $c_j: \Sigma, C, \phi_j$. Los parámetros c_j son determinados de manera que la solución aproximada satisfaga la forma integral pesada o forma débil de la ecuación que rige o minimiza la función cuadrática asociada con la ecuación estudiada. Los diferentes métodos difieren uno de otro en la selección de la función peso w y las funciones de aproximación ϕ_j .

El objetivo primario de esta sección es presentar un número de métodos variacionales clásicos. El método del elemento finito, hace uso de los métodos variacionales para formular la ecuación directa sobre un elemento.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

EL METODO RAYLEIGH-RITZ

En el método Rayleigh-Ritz , los coeficientes C_j de la aproximación se determinan usando la forma débil del problema , y la selección de las funciones peso están restringidas a las funciones de aproximación , $w = \phi_j$. Recuerde que la forma débil contiene tanto la ecuación diferencial que rige y las condiciones frontera naturales del problema, y es menos estricta en los requerimientos de continuidad en la solución aproximada de la ecuación diferencial original o su forma integral pesada. El método se describe para un problema variacional lineal.

Considere el problema variacional de encontrar la solución u tal que

$$B(w, u) = \lambda(w) \quad (2.58)$$

Para todas las funciones suficientemente diferenciables w que satisfacen la forma homogénea de cualquier condición de frontera esencial especificada en u . Cuando la funcional B es bilineal y simétrica y λ es lineal, el problema (2.58) equivale a la minimización de la funcional cuadrática

$$I(u) = \frac{1}{2} B(u, u) - \lambda(u) \quad (2.59)$$

En el método Rayleigh-Ritz; vemos una solución aproximada a (2.64) en la forma de una serie finita

$$u_N = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j + \phi_0 \quad (2.60)$$

donde las constantes c_j llamadas los coeficientes de Ritz, se escogen tal que (2.58) cumpla para $w = \phi_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$). (2.58) cumple para N diferentes selecciones de w , así que las ecuaciones algebraicas N en c_j son obtenidas. La ecuación algebraica i th se obtiene sustituyendo ϕ_i por w :

$$B\left(\phi_i, \sum_{j=1}^N c_j \phi_j + \phi_0\right) = \lambda(\phi_i) \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

Si B es bilineal, la sumatoria y las constantes c_j pueden colocarse fuera del operador. Tenemos

$$\sum_{j=1}^N B(\phi_i, \phi_j) C_j = \lambda(\phi_i) - B(\phi_i, \phi_0) \quad (2.61a)$$

ó

$$\sum_{j=1}^N B_{ij} C_j = F_i, \quad B_{ij} = B(\phi_i, \phi_j), F_i = \lambda(\phi_i) - B(\phi_i, -\phi_0) \quad (2.61b)$$

lo cual representa la i ésima ecuación algebraica en un sistema de N ecuaciones algebraicas lineales en N constantes C_j . Las columnas (e hileras) de los coeficientes de la matriz $B_{ij} = B(\phi_i, \phi_j)$ pueden ser independientes linealmente para que se pueda invertir la matriz coeficiente en (2.61).

Para formar bi-lineales simétricas, el método Rayleigh-Ritz puede verse también como uno que busca una solución de la forma en (2.60) en el cual, los parámetros son determinados minimizando la funcional cuadrática correspondiente a la bi-lineal (simétrica, esto es, la funcional $I(u)$ en (2.59). [Sustituyendo después u_N de (2.60) por u en la (2.59) e integrando, la funcional $I(u)$ llega a ser una función (cuadrática) ordinaria de los parámetros c_1, c_2, \dots, c_N] es que su derivada parcial con respecto a cada parámetro sea cero:

$$\frac{\partial I}{\partial c_1} = 0, \frac{\partial I}{\partial c_2} = 0, \dots, \frac{\partial I}{\partial c_N} = 0 \quad (2.62)$$

Entonces, hay N ecuaciones lineales algebraicas en N incógnitas, c_j ($j = 1, 2, \dots, N$). Esas ecuaciones son exactamente las mismas como las de (2.61) para todos los problemas para los cuales el problema variacional (2.58) es equivalente a $\delta I = 0$. Por supuesto, cuando $B(\cdot, \cdot)$ no es simétrica, no tendremos una funcional cuadrática. En otras palabras, (2.61) es más general que (2.62), y son las mismas cuando $B(\cdot, \cdot)$ es bilineal y simétrica. En la mayoría de los problemas de interés en el presente estudio, tendremos una forma bilineal simétrica.

Retornando al método de aproximación u_N Rayleigh-Ritz en (2.60) observamos que u_N debe satisfacer las condiciones de frontera esencial especificadas del problema; cualquier condición de frontera natural especificada estará incluida ya en el problema variacional (2.58). La forma particular de u_N en (2.60) facilita la satisfacción de las condiciones de frontera especificadas. Usaremos la forma:

$$u_N = \sum_{j=1}^N C_j \phi_j(x)$$

No será necesario satisfacer las condiciones de frontera no homogéneas. Por ejemplo, suponga que u_N es requerida para satisfacer la condición $u_N(x_0) = \mu_0$ en un punto de frontera $x = x_0$:

$$\sum_{j=1}^N C_j \phi_j(x_0) = \mu_0$$

Ya que c_j son parámetros desconocidos a ser determinados, no es fácil de escoger $\phi_j(x)$ tal que cumpla esta relación. Si $u_0 = 0$ entonces cualquier ϕ_j tal que $\phi_j(x_0) = 0$ satisfacción del requerimiento. Escribiendo la solución aproximada u_N en la forma (2.60), una suma de partes homogéneas y no homogéneas, las condiciones de frontera esenciales no homogéneas pueden satisfacer por $\phi_0, \phi_0(x_0) = u_0$ y ϕ_j son requeridas a satisfacer la forma homogénea de la misma condición frontera, $\phi_j(x_0) = 0$. De esta manera, u_N satisface las condiciones frontera especificadas:

$$\begin{aligned} u_N(x_0) &= \sum_{j=1}^N C_j \phi_j(x_0) + \phi_0(x_0) \\ &= 0 + u_0 \end{aligned}$$

Si todas las condiciones de frontera esenciales especificadas son homogéneas (en consecuencia el valor especificado u_0 es cero). Entonces ϕ_0 se toma como cero y ϕ_j deberá satisfacer las mismas condiciones, $\phi_j(x_0) = 0$. Ya que ϕ_j satisface las condiciones de frontera esenciales homogéneas, la selección de $w = \phi_j$ es consistente con los requerimientos de una función de peso. Las funciones aproximación ϕ_j satisfacen las siguientes condiciones

1) (a) ϕ_j deberá ser tal que $B(\phi_i, \phi_j)$ este bien definida y no-cero [Esto es, suficientemente diferenciable como lo requiera la forma bilineal $B(\cdot, \cdot)$].

(b) ϕ_j debe satisfacer mínimo la forma homogénea de las condiciones de frontera esencial del problema. (2.63)

2) Para cualquier $m \in \mathbb{N}$, la serie de $\left\{ \phi_i \right\}_{i=1}^m$ a lo largo de las columnas (e hileras) de $B(\phi_i, \phi_j)$ debe ser linealmente independiente.

Ya que ambas condiciones frontera $[u(0) = u(1) = 0]$ son del tipo esencial, podemos seleccionar ϕ_i en el parámetro N de la aproximación Ritz, para satisfacer las condiciones $\phi_i(0) = \phi_i(1) = 0$ seleccionamos las siguientes funciones: $\phi_0 = 0$ y

$$\phi_1 = x(1-x), \phi_2 = x^2(1-x), \dots, \phi_N = x^N(1-x) \quad (2.68)$$

Si uno selecciona las funciones $\phi_1 = x^2(1-x), \phi_2 = x^3(1-x)$ etc., [no incluyendo] el requerimiento 3 en las condiciones (2.63) se viola, debido a que la serie no puede ser usada para generar el termino lineal x si la solución exacta lo contiene. Como regla, uno debe arrancar con la función admisible de orden inferior e incluir todas las funciones de orden mas alto hasta el grado deseado.

La solución parámetro N Rayleigh-Ritz para el problema es de la forma

$$u_N = C_1\phi_1 + C_2\phi_2 + \dots + C_N\phi_N = \sum_{j=1}^N c_j\phi_j \quad (2.69)$$

Sustituyendo esto en el problema variacional $B(w, \mu) = \lambda(w)$ obtenemos

$$\int_0^1 \left[\frac{d\phi_i}{dx} \left(\sum_{j=1}^N C_j \frac{d\phi_j}{dx} \right) - \phi_i \left(\sum_{j=1}^N C_j \phi_j \right) \right] dx = - \int_0^1 \phi_i x^2 dx$$

$$\sum_{j=1}^N C_j \int_0^1 \left(\frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} - \phi_i \phi_j \right) dx = - \int_0^1 \phi_i x^2 dx$$

ó

$$\sum_{j=1}^N C_j B(\phi_i, \phi_j) = \lambda(\phi_i) \quad (2.70a)$$

1020130043

Donde los coeficientes $B(\phi_i, \phi_j)$ y $\lambda(\phi_i)$ están definidos por

$$B(\phi_i, \phi_j) = \int_0^1 \left(\frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} - \phi_i \phi_j \right) dx, \quad \lambda(\phi_i) = - \int_0^1 x^2 \phi_i dx \quad (2.70b)$$

El mismo resultado se puede obtener usando (2.59) [en vez de 2.58] tenemos

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\left(\frac{du}{dx} \right)^2 - u^2 + 2x^2 u \right] dx$$

Sustituyendo para $u \approx u_N$ de (2.75) en la funcional de arriba obtenemos:

$$I(c_j) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\left(\sum_{j=1}^N c_j \frac{d\phi_j}{dx} \right)^2 - \left(\sum_{j=1}^N c_j \phi_j \right)^2 + 2x^2 \left(\sum_{j=1}^N c_j \phi_j \right) \right] dx \quad (2.71)$$

Las condiciones necesarias para la minimización de I , la cual es una función cuadrática de las variables c_1, c_2, \dots, c_N son:

$$\begin{aligned} \frac{\delta I}{\delta c_i} = 0 &= \int_0^1 \left[\frac{d\phi_i}{dx} \left(\sum_{j=1}^N c_j \frac{d\phi_j}{dx} \right) - \phi_i \left(\sum_{j=1}^N c_j \phi_j \right) + \phi_i x^2 \right] dx \\ &= \sum_{j=1}^N B_{ij} - F_i \end{aligned}$$

donde:

$$B_{ij} = \int_0^1 \left(\frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} - \phi_i \phi_j \right) dx, \quad F_i = - \int_0^1 x^2 \phi_i dx$$

Que son las mismas como en (2.70). Las ecuaciones (2.70a, b) cumplen para cualquier selección de funciones aproximación permisibles ϕ_i .

Para la selección de funciones aproximación en (2.68).

Los coeficientes de la matriz $B_{ij} \equiv B(\phi_i, \phi_j)$ y coeficientes del vector $F_i \equiv \lambda(\phi_i) - B(\phi_i - \phi_0) = \lambda(\phi_i)$ pueden calcularse usando:

$$\phi_i = x^i(1-x) = x^i - x^{i+1}$$

$$\frac{d\phi_i}{dx} = ix^{i-1} - (i+1)x^i$$

Tenemos:

$$B_{ij} = \int_0^1 \{ [ix^{i-1} - (i+1)x^i] [jx^{j-1} - (j+1)x^j] - (x^i - x^{i+1})(x^j - x^{j+1}) \} dx \quad (2.72a)$$

$$= \frac{2ij}{(i+j)((i+j)^2 - 1)} - \frac{2}{(i+j+1)(i+j+2)(i+j+3)}$$

$$F_i = - \int_0^1 x^2 (x^i - x^{i+1}) dx = - \frac{1}{(3+i)(4+i)} \quad (2.72b)$$

La ecuación (2.70) se puede escribir en forma matricial como

$$[B]\{c\} = \{F\} \quad (2.73)$$

Por ejemplo cuando $N=2$ (2.73) será

$$\frac{1}{420} \begin{bmatrix} 126 & 63 \\ 63 & 52 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = -\frac{1}{60} \begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

Usando la regla Cramer's para resolver las ecuaciones da

$$c_1 = -\frac{10}{123} = -0.0813, \quad c_2 = -\frac{21}{123} = -0.1707$$

La solución del parámetro dos Rayleigh-Ritz está dada por

$$\begin{aligned} u_2 &= c_1 \phi_1 + c_2 \phi_2 = \left(-\frac{10}{123}\right)(x - x^2) + \left(-\frac{21}{123}\right)(x^2 - x^3) \\ &= -\frac{1}{123}(10x + 11x^2 - 21x^3) \end{aligned}$$

La solución exacta de (2.65) y (2.66a) está dada por:

$$u(x) = \frac{\text{sen } x + 2 \text{sen}(1-x)}{\text{sen } 1} + x^2 - 2 \quad (2.74)$$

Los valores de los coeficientes de Ritz para varios valores de N pueden obtenerse resolviendo (2.73). Una comparación de la solución Rayleigh-Ritz (2.69) con la solución exacta (2.74) se presenta en la tabla 2.1 y fig. 2.2.

Serie 2. Para la segunda serie de condiciones frontera (2.66b) forma bi-lineal es la misma que la dada en (2.67) y (2.70b). La forma lineal está dada por $\phi_0 = 0$

$$\lambda(w) = -\int_0^1 wx^2 dx + w(1) \quad (2.75a)$$

Y por lo tanto tenemos:

$$F_i = -\int_0^1 x^2 \phi_i dx + \phi_i(1) \quad (2.75b)$$

En este caso, las ϕ_i deberán ser selectas para satisfacer la condición $\phi_i(0) = 0$ debido a que EBC solo están en $x=0$. La siguiente selección de ϕ_i reúne los requerimientos:

$$\phi_i = x^i \quad (2.76)$$

Los coeficientes B_j y F_i pueden calcularse usando (2.76) en (2.70b) y (2.75b) respectivamente:

$$B_j = \int_0^1 (ijx^{i+j-2} - x^{i+j}) dx = \frac{ij}{1+j-1} - \frac{1}{i+j+1} \quad (2.77)$$

$$F_j = -\int_0^1 x^{i+2} dx + 1 = -\frac{1}{i+3} + 1$$

TABLA 2.1

Comparación de las soluciones Rayleigh-Ritz y exactas de la ecuación:

$$-\frac{d^2u}{dx^2} - u + x^2 = 0 \text{ para } 0 < x < 1; \quad u(0) = u(1) = 0$$

Coeficiente Ritz*	x	Solución Rayleigh-Ritz $-10u$			Solución exacta
		N=1	N=2	N=3	
N=1:	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$c_1 = -0.1667$	0.1	0.1500	0.0885	0.0954	0.955
N=2	0.2	0.2667	0.1847	0.1890	0.1890
$c_1 = -0.0813$	0.3	0.3500	0.2783	0.2766	0.2764
$c_2 = -0.1707$	0.4	0.4000	0.3590	0.3520	0.3518
N=3:	0.5	0.4167	0.4167	0.4076	0.4076
$c_1 = -0.0952$	0.6	0.4000	0.4410	0.4340	0.4342
$c_2 = -0.1005$	0.7	0.3500	0.4217	0.4200	0.4203
$c_3 = -0.0702$	0.8	0.2667	0.3486	0.3529	0.3530
	0.9	0.1500	0.2115	0.2183	0.2182
	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0

*La solución para el parámetro cuatro Rayleigh-Ritz coincide con la solución exacta hasta cuatro posiciones decimales

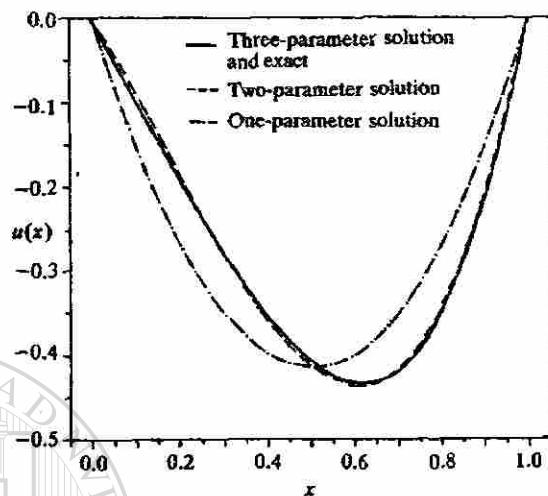


Figura. 2.2 Comparación de la solución Rayleigh-Ritz con la solución exacta de (2.65) y (2.66a). La solución parámetro tres y la solución exacta no difieren en la escala del dibujo.

TABLA 2.2

Comparación de las soluciones Rayleigh-Ritz y exactas de la ecuación:

$$-\frac{d^2u}{dx^2} - u + x^2 = 0 \text{ para } 0 < x < 1; \quad u(0) = 0, \quad \left(\frac{du}{dx}\right)_{x=1} = 1$$

Coeficiente Ritz*	x	Solución Rayleigh-Ritz			Solución exacta
		N=1	N=2	N=3	
N=1: c ₁ =-1.1250	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	0.1	0.1125	0.1280	0.1271	0.1262
N=2 c ₁ =1.2950 c ₂ =-0.15108	0.2	0.2250	0.2530	0.2519	0.2513
	0.3	0.3375	0.3749	0.3740	0.3742
	0.4	0.4500	0.4938	0.4934	0.4944

N=3:	0.5	0.5625	0.6097	0.6099	0.6112
$c_1=1.2831$	0.6	0.6750	0.7226	0.7234	0.7244
$c_2=-0.11424$	0.7	0.7850	0.8325	0.8337	0.8340
$c_3=-0.02462$	0.8	0.9000	0.9393	0.9407	0.9402
	0.9	1.0125	1.0431	1.0443	1.0433
	1.0	0.1250	1.1442	1.1442	1.1442

*El parámetro cuatro de la solución Rayleigh-Ritz coincide con la solución exacta hasta cuatro posiciones decimales.

La solución exacta en el presente caso está dada por:

$$u(x) = \frac{2 \cos(1-x) - \operatorname{sen} x}{\cos 1} + x^2 - 2 \quad (2.78)$$

En la tabla 2.2 se presenta una comparación de la solución Rayleigh-Ritz con la solución exacta.

EL MÉTODO DE RESIDUOS PESADOS

Como se señaló anteriormente, uno puede escribirse siempre la forma integral pesada de una ecuación lineal o no lineal (en las variables dependientes). La forma débil puede desarrollarse si las ecuaciones son de segundo orden o mayor aún si ellas son no lineales. Sin embargo, no siempre es posible construir una variacional cuya primera variación sea igual a la forma variacional. El método Rayleigh-Ritz puede también aplicarse a todos los problemas, incluyendo problemas no lineales, que tienen forma débil. En este método, las funciones peso son igualadas necesariamente a las usadas en la aproximación. El método de residuos pesado es una generalización del método Rayleigh-Ritz en que las funciones peso pueden escoger de una serie de funciones independientes y requiere solamente la forma integral pesada para determinar los parámetros. El método de residuos pesados puede usarse para aproximar la forma integral pesada de cualquier ecuación. Ya que la forma posterior no incluye cualquier condición de frontera especificada del problema, las funciones aproximación deberán

seleccionarse de modo que la solución aproximada satisfaga las condiciones de frontera esencial y natural. En adición, las funciones peso pueden seleccionarse independientemente de las funciones aproximación, pero se requiere que sean independientes (así que las ecuaciones algebraicas resultantes sean linealmente independientes). Esta flexibilidad es ventajosa en ciertos problemas lineales.

En esta sección, discutimos primero el método general de residuos pesados y luego consideramos ciertos casos especiales que se conocen con nombres específicos (ej. métodos Galerkin y cuadrado mínimo).

El método de residuos pesados se puede describir en su generalidad considerando la ecuación operador

$$A(u) = f \text{ en } \Omega \quad (2.79)$$

Donde A es un operador (lineal o no lineal), a menudo un operador diferencial, actuando sobre la variable dependiente u y f es una función conocida de las variables independientes. Algunos ejemplos de tales operadores son:

$$1. \quad A(u) = -\frac{d}{dx} \left(a \frac{du}{dx} \right) + cu$$

$$2. \quad A(u) = \frac{d^2}{dx^2} \left(b \frac{d^2u}{dx^2} \right) \quad (2.80)$$

$$3. \quad A(u) = -\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial}{\partial y} \right) \right]$$

$$4. \quad A(u) = -\frac{d}{dx} \left(u \frac{du}{dx} \right)$$

$$5. \quad A(u, v) = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

Para que un operador A sea lineal en sus argumentos, debe satisfacer la relación:

donde Ω es un dominio de dos dimensiones, y ϕ_i son las funciones peso, las cuales en general, no son las mismas que las funciones aproximación ϕ_i . La serie $\{\phi_i\}$ debe ser una serie independiente. Por otro lado, las ecuaciones dadas por (2.84) no serán linealmente independientes y no serán solucionables.

Los requerimientos en ϕ_0 y ϕ_i para el método residuo-pesado son distintos de los del método Rayleigh-Ritz, los cuales están basados en la forma débil (integral) de la ecuación diferencial. El requisito de diferenciabilidad sobre ϕ_i en el método de residuo pesado es dictado por la exposición integral (2.84), opuesto a la forma suave del método Rayleigh-Ritz. Por lo tanto, ϕ_i debe tener derivadas diferentes del cero hacia arriba en orden de aparición en la ecuación operador (2.79). Ya que la forma integral pesada (2.84) no incluye cualquiera de las condiciones frontera especificadas (esencial o natural), debemos requerir también que u_N en (2.82) satisfaga todas las condiciones frontera especificadas del problema. Consecuentemente, ϕ_0 se requiere que satisfaga todas las condiciones frontera especificadas, y ϕ_i se requiere que satisfaga la forma homogénea de todas las condiciones frontera especificadas del problema. Esos requerimientos sobre ϕ_0 y ϕ_i incrementarán el orden de las expresiones polinomiales

usadas por el método residuo pesado. En general, las ϕ_i usadas en este método son funciones de mayor orden que las usadas en el método Rayleigh-Ritz, y las funciones usadas en el pasado pueden no satisfacer los requisitos de continuidad (diferenciabilidad) del método o residuo pesado. Varios casos especiales del método residuo pesado se discuten en los siguientes párrafos.

EL METODO PETROV-GALERKIN. El método residuo pesado está referido al método Petrov-Galerkin cuando $\psi_i \neq \phi_i$. Cuando el operador A es lineal (2.84) puede simplificarse a la forma

$$\sum_{j=1}^N \left[\int_{\Omega} \phi_j A(\phi_j) dx dy \right] c_j = \int_{\Omega} \psi_i [f - A(\phi_0)] dx dy$$

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} c_j = F_i \quad (2.84)$$

observe que la matriz coeficiente $[A]$ no es simétrica:

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \psi_i A(\phi_j) dx dy \neq A_{ji} \quad (2.85)$$

EL METODO GALERKIN . Para la selección de la función peso ψ_i igual a la de la función aproximación ϕ_j , el método del residuo pesado es mejor conocido como el método Galerkin. Las ecuaciones algebraicas de la aproximación de Galerkin son:

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} c_j = F_i \quad (2.86a)$$

Donde

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \phi_i A(\phi_j) dx dy, F_i = \int_{\Omega} \phi_i [f - A(\phi_0)] dx dy \quad (2.86b)$$

De nuevo observamos que A_{ij} no es simétrica.

En general el método Galerkin no es el mismo que el de Rayleigh-Ritz, esto en cuanto a lo requerido para determinar los coeficientes c_j .

Las funciones aproximación usadas en el método Galerkin se requieren que sea de mayor orden que las usadas en el método Rayleigh-Ritz .

Si la ecuación lo permite y uno lo quiere, la diferenciación puede transferirse de la solución u a la función peso $w = \phi_i$; y con ello obtener una forma débil para relajar los requisitos de continuidad en las funciones de aproximación e incluyen las condiciones de frontera natural especificadas del problema.

Los métodos Rayleigh-Ritz y Galerkin producen las mismas condiciones en los dos casos: (i) cuando las condiciones de frontera especificadas del problema son todas del tipo esencial, y por lo tanto los requerimientos sobre ϕ_i en los dos métodos llegan a ser los mismos y la forma integral pesada se reduce a la forma débil; y (ii) cuando las funciones de aproximación del método Galerkin son usadas en el método Rayleigh-Ritz.

EL METODO DE CUADRADO MINIMO. En este método, determinamos los parámetros, minimizando la integral del cuadrado del residuo (2.83):

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \int_{\Omega} R^2(x, y, c_j) dx dy = 0$$

$$\int \frac{\partial R}{\partial \alpha_i} R dx dy = 0 \quad (2.87a)$$

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

La comparación de (2.87a) con (2.83) muestra que $\varphi = \partial R / \partial \alpha_i$ si A es un operador

lineal, $\varphi_i = A(\phi_i)$ y (2.87a) llega a

$$\sum_{j=1}^N \left[\int_{\Omega} A(\phi_i) A(\phi_j) dx dy \right] C_j = \int_{\Omega} A(\phi_i) [f - A(\phi_0)] dx dy$$

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} c_j = F_i \quad (2.87b)$$

Donde:

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \phi_i A(\phi_j) dx dy, \quad F_i = \int_{\Omega} \phi_i [f - A\phi_0] dx dy \quad (2.87c)$$

Notar que la matriz coeficiente A_{ij} es simétrica, pero involucra el mismo orden de diferenciación como el de la ecuación diferencial gobernante.

EL METODO DE COLOCACION. En el método de colocación obtenemos una solución aproximada u_N a (2.79) en la forma de (2.82) requiriendo que el residuo en la ecuación sea idénticamente cero en N puntos seleccionados $x^i \equiv (x^i, y^i)$ ($i = 1, 2, \dots, N$) en dominio de Ω .

$$R(x^i, y^i, c_j) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (2.88)$$

La selección de los puntos x^i es crucial en la obtención de un sistema de ecuaciones bien acondicionado y para la obtención de una solución exacta. El método de colocación puede mostrarse como un caso especial de (2.84) con $\psi_i = \delta(x^i, y^i)$ donde $\delta(x)$ es la función delta Dirac definida por:

$$\int_{\Omega} f(x) \delta(x - \xi) dx dy = f(\xi) \quad (2.89)$$

Con esta selección de funciones peso, la exposición de residuo pesado llega a ser:

$$\int_{\Omega} \delta(x - x^i) R(x, c_j) dx dy = 0$$

ó

$$R(x^i, c_j) = 0 \quad (2.90)$$

Consideremos un ejemplo para ilustrar el uso de varios casos del método residuo pesado.

Ejemplo 2.6. Considere la ecuación diferencial [ver ejemplo 2.4 en condiciones de frontera serie 2]

$$-\frac{d^2u}{dx^2} - u + x = 0, \quad u(0) = 0, \quad u'(1) = 1 \quad (2.91)$$

Para un método de residuo pesado, ϕ_0 y ϕ_1 deben satisfacer las condiciones siguientes:

$$\phi_0(0) = 0, \quad \phi_0'(1) = 1 \quad (\text{satisface las condiciones de frontera real})$$

$$\phi_1(0) = 0, \quad \phi_1'(1) = 0 \quad (\text{satisface la forma homogénea de las condiciones frontera especificadas})$$

Para una selección de polinomios algebraicos, suponemos que $\phi_0(x) = a + bx$ y se usan las dos condiciones en ϕ_0 para determinar las constantes a y b . Obtenemos

$$\phi_0(x) = x$$

Ya que hay dos condiciones homogéneas, debemos suponer un polinomio de parámetro tres como mínimo para obtener una función no cero, $\phi_1 = a + bx + cx^2$.

Usando las condiciones sobre ϕ_1 , obtenemos:

$$\phi_1 = -c_x(2-x)$$

La constante c puede ser igual a la unidad debido a que se observará dentro del parámetro c_1 .

Para ϕ_2 podemos suponer una de las formas

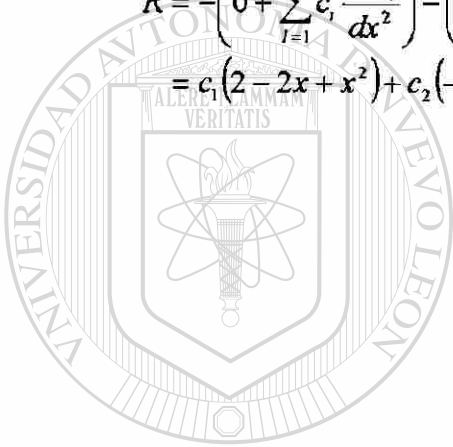
$$\phi_2 = a + bx + dx^3 \quad \text{ó} \quad \phi_2 = a + cx^3 + dx^3$$

con $d \neq 0$; ϕ_2 no contiene todos los términos de todos los ordenes en cualquier caso pero, la solución aproximada es completa debido a que $\{\phi_1, \phi_2\}$ contiene todos los términos arriba del grado tres. Para la primer selección de ϕ_2 , obtenemos:

$$\phi_2 = x^2\left(1 - \frac{2}{3}x\right)$$

El residuo en la aproximación de la ecuación es:

$$\begin{aligned} R &= -\left(0 + \sum_{i=1}^N c_i \frac{d^2 \phi_i}{dx^2}\right) - \left(\phi_0 + \sum_{i=1}^N c_i \phi_i\right) + x^2 \\ &= c_1(2 - 2x + x^2) + c_2(-2 + 4x - x^2 + \frac{2}{3}x^2) - x + x^2 \end{aligned} \quad (2.92)$$



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



CAPITULO 3

ANALISIS DEL ELEMENTO FINITO EN PROBLEMAS DE UNA DIMENSION CON VALOR FRONTERA DE SEGUNDO ORDEN

3.1 COMPARACION DE ELEMENTO FINITO CON LOS METODOS VARIACIONALES.

Los métodos variacionales tradicionales descritos en el capítulo 2 dejan de ser efectivos debido a un defecto serio, particularmente, la dificultad de construir las funciones aproximación. Las funciones aproximación, aparte de satisfacer continuidad, independencia lineal, perfección, y condiciones de frontera esenciales, son arbitrarias, la selección se hace más difícil cuando el dominio dado es geoméricamente complejo. La calidad de la aproximación es afectada directamente por la selección de las funciones aproximación, es inquietante conocer que entonces no existe procedimiento para construir las.

Debido a este defecto, a pesar de la simplicidad en obtener soluciones aproximadas, los métodos variacionales tradicionales de aproximación, nunca se consideran competitivos computacionalmente, cuando se comparan con los esquemas tradicionales de diferencia finita.

Idealmente hablando, un método computacional efectivo debe tener las siguientes características:

1. Debe tener una matemática perfecta así como bases físicas.

2. No deberá tener limitaciones cuando se considere la geometría, la composición física del dominio, o la naturaleza de la carga.
3. El procedimiento formulativo deberá ser independiente de la forma del dominio y la forma específica de las condiciones frontera.
4. El método deberá ser flexible en cuanto a los grados de aproximación sin reformular el problema completo.
5. Deberá involucrar un procedimiento sistemático que pueda automatizarse para usarse en computadoras digitales.

El método del elemento finito es una técnica en la que el dominio está representado como un conjunto de dominios simples, llamadas elementos finitos, tal que, es posible construir sistemáticamente las funciones aproximación necesitadas en una aproximación variacional o residuo pesado de la solución de un problema sobre cada elemento. Por lo tanto, el método del elemento finito difiere de los métodos tradicionales estudiados antes en la manera de cómo se construyen las funciones aproximación.

El método del elemento finito tiene tres características básicas:

1. **División del todo en partes.** Lo cual representa geoméricamente un dominio completo como un conjunto geométrico de dominios simples, que dan lugar a una derivación sistemática de las funciones aproximación.
2. **Derivación de funciones aproximación sobre cada elemento,** las funciones aproximación son por lo regular, polinomios algebraicos que se derivan usando la teoría de interpolación.
3. **Ensamble de elementos.** Basado en la continuidad de la solución y balance de flujos internos. El ensamble de elementos representa una analogía discreta del dominio natural, y el sistema asociado de ecuaciones algebraicas representa una analogía numérica del modelo matemático del problema que se está analizando.

Las tres características constituyen los tres pasos principales de la formulación del elemento finito. La geometría de los elementos usada para representar el dominio de un problema deberá ser, tal que, las funciones aproximación puedan ser derivadas únicas. Las funciones aproximación dependen no solamente de la geometría, sino también, del

número y localización de puntos llamados nodos, en el elemento y las cantidades a ser interpoladas (ejem. solución, o solución y sus derivadas). Una vez que las funciones aproximación se han derivado, el procedimiento para obtener relaciones algebraicas entre los coeficientes desconocidos (lo cual da los valores de la solución en los nodos del elemento finito) es exactamente el mismo usado en los métodos **Rayleigh-Ritz** y residuo pesado.

El método del elemento finito, no sólo supera el defecto de los métodos variacionales tradicionales, sino que también está dotado de una técnica computacional efectiva.

Los pasos básicos involucrados en el análisis del elemento finito de un problema se dan en la tabla 3.1

TABLA 3.1:

Pasos involucrados en el análisis del elemento finito de un problema:

1. Discretización (o representación) del dominio dado en un conjunto de elementos finitos preseleccionados. (Este paso puede postponerse hasta que se complete la formulación de la ecuación del elemento finito)
 - a) Construya la malla del elemento finito de los elementos preseleccionados
 - b) Número de nodos y elementos
 - c) Genere las propiedades geométricas (coordenadas y áreas de sección transversal) necesarias para el problema.
2. Derivación de las ecuaciones de elemento para todos los elementos típicos en la malla.
 - a) Construir la formulación variacional de la ecuación diferencial dada sobre el elemento típico.
 - b) Suponga que la variable dependiente típica u es de la forma.

$$u = \sum_{i=1}^n u_i \psi_i$$

y sustituya en el paso 2a para obtener las ecuaciones de elemento en la forma

$$[K^e]\{u^e\} = \{F^e\}$$

- c) Derive o seleccione, si están disponibles en la redacción, funciones interpolación de elementos ψ_i , y calcule las matrices de elemento.
3. Ensamble las ecuaciones de elemento para obtener las ecuaciones del problema total
- Identificar las condiciones de continuidad de inter-elemento entre las variables primarias (relaciones entre los grados de libertad locales y los grados de libertad globales-conectividad de elementos) mediante la relación nodos del elemento a nodos globales.
 - Identificar las condiciones de equilibrio entre las variables secundarias (relación entre la fuente local o componentes fuerza y las componentes de la fuente especificada globalmente).
 - Ensamble las ecuaciones de elemento usando los pasos 3a y 3b.
4. Imposición de las condiciones frontera de un problema.
- Identificar los grados de libertad globales primarios especificados.
 - Identificar los grados de libertad globales secundarios especificados (si no se dan en el paso 3b).

5. Solución de las ecuaciones ensambladas.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

6. Postprocesamiento de los resultados.

- Calcular el gradiente de la solución de otras cantidades deseadas de los grados de libertad primarios calculados en el paso 5.
- Represente los resultados en forma tabular o gráfica.

En las secciones que siguen, nuestro objetivo será introducir muchas ideas fundamentales que forman las bases del método del elemento finito. Los pasos básicos de un análisis de elemento finito se introducen vía un modelo de ecuación diferencial de segundo orden, representativa de muchos sistemas de una ecuación de una dimensión.

3.2 PASOS BASICOS PARA EL ANALISIS DEL ELEMENTO FINITO

MODELO DE PROBLEMA DE VALOR FRONTERA

Considere el problema de encontrar la función $u = (x)$ que satisfaga la ecuación diferencial :

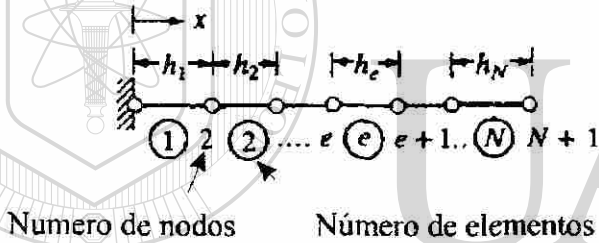
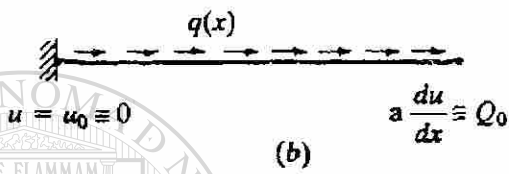
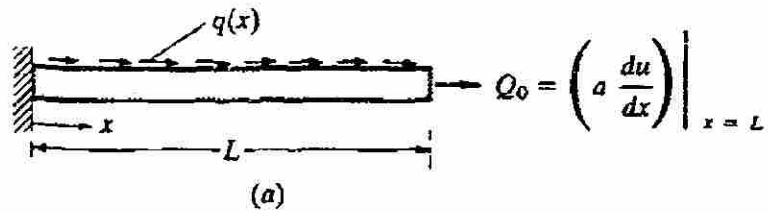
$$-\frac{d}{dx} \left(a \frac{du}{dx} \right) + cu - q = 0 \quad \text{para: } 0 < x < L \quad (3.1)$$

y las condiciones frontera

$$u(0) = u_0, \quad \left(a \frac{du}{dx} \right)_{x=L} = Q_0 \quad (3.2)$$

donde $a = a(x)$, $c = c(x)$, $q = q(x)$, u_0 y Q_0 son los datos del problema (cantidades conocidas).

La ecuación 3.1 está en conexión con la descripción analítica de muchos procesos físicos. Por ejemplo, conducción y convección de calor en una pared plana o aleta (transferencia de calor en una dimensión), flujo a través de canales y tuberías, deflexión transversal de cables, deformación axial de barras (ver fig. 3.1a) y muchos otros procesos descritos en la tabla(3.1). La tabla 3.2 contiene una lista de varios campos de problemas descritos por (3.1).



(b)
Figura 3.1 Discretización del elemento finito de un dominio en una dimensión: (a) problema físico; (b) idealización matemática; (c) discretización del elemento finito.

TABLA 3.2

Algunos ejemplos de las ecuaciones de segundo orden en una dimensión

$$-\frac{d}{dx}\left(a\frac{du}{dx}\right) = q \quad \text{para } 0 < x < L$$

Condiciones: de frontera esencial: $u|_{x=0} = u_0$ de frontera natural $\left(a\frac{du}{dx}\right)|_{x=L} = Q_0$

Campo	Variable primaria		Término fuente	Variable secundaria
	u	a	q	Q_0
1. Deflexión transversal de un cable	Deflexión transversal	Tensión en cable	Carga transversal distribuida	Fuerza axial
2. Deformación axial de una barra	Desplazamiento longitudinal	EA(E=módulo, A= Área secc. Transv.)	Fricción o fuerza de contacto sobre barra	Fuerza axial
3. Transferencia de calor	Temperatura	Conductividad térmica	Generación de calor	Calor
4. Flujo a través de tubos	Presión hidrostática	$\pi D^2/128\mu$ D=Diámetro μ = viscosidad	Fuente de flujo (generalmente cero)	Razón de flujo
5. Flujo laminar incompresible a través de un canal bajo gradiente a presión constante	Velocidad	Viscosidad	Gradiente de presión	Esfuerzo axial
6. Flujo a través de un medio poroso	Fuente de fluido	Coefficiente de permeabilidad	Flujo de fluido	Flujo
7. Electrostática	Potencial electrostático	Constante dieléctrica	Densidad de carga	Flujo eléctrico

5. Flujo laminar incompresible a través de un canal bajo gradiente a presión constante	Velocidad	Viscosidad	Gradiente de presión	Esfuerzo axial
6. Flujo a través de un medio poroso	Fuente de fluido	Coefficiente de permeabilidad	Flujo de fluido	Flujo
7. Electrostática	Potencial electrostático	Constante dieléctrica	Densidad de carga	Flujo eléctrico

Cuando $c(x) = 0$.

A continuación se presenta paso por paso un procedimiento para la formulación y solución de (3.1) mediante el método del elemento finito.

DISCRETIZACION DEL DOMINIO

El dominio del problema en el caso presente, consiste en que todos los puntos entre $x = 0$ y $x = L$; $\Omega(0,L)$; ver fig. 3.1(b). El dominio Ω se divide en dos series de elementos finitos, un elemento típico de longitud h_e , existe y está localizado entre los puntos A y

B. El conjunto de tales elementos se llama la malla del elemento finito del dominio. (ver fig 3.1c). La razón para dividir el dominio en elementos finitos es doble: primero,

para representar la geometría del dominio; y, segundo para aproximar la solución sobre cada elemento de la malla para representar mejor la solución sobre el dominio entero.

La aproximación del dominio en el caso presente no es interés, ya que es una línea recta.

Si el dominio es una curva entonces la aproximación mediante una serie de líneas rectas o curvas es necesaria para representarlo. La aproximación de la solución sobre cada elemento de la malla es mas simple que su aproximación sobre el dominio entero.

Recordar que en los métodos variacionales tradicionales, la solución requiere satisfacer las condiciones frontera del problema. Esto presenta algunas restricciones en la selección de funciones aproximación, especialmente cuando existe discontinuidad en la geometría, propiedades del material, y/o carga del problema.

Para conectar los elementos e imponer continuidad de la solución en nodos comunes a elementos, identificamos los extremos de cada elemento línea como los nodos del elemento.

Dependiendo del grado de aproximación polinomial usado para representar la solución, se pueden identificar nodos adicionales dentro del elemento. Los nodos juegan el papel de puntos de interpolación, en la construcción de las funciones aproximación de un elemento.

El número de elementos usados en un problema, depende del tipo de elemento y exactitud deseada. Siempre que un problema se resuelva por el método del elemento finito por primera vez, uno requiere investigar las características de convergencia de aproximación del elemento finito refinando la malla gradualmente (incrementado el número de elementos) y comparando la solución con los obtenidos por elementos de mayor orden. El orden de un elemento se refiere al grado de polinomio usado para representar la solución sobre el elemento.

DERIVACION DE LAS ECUACIONES ELEMENTO

La derivación de ecuaciones de elemento finito, esto es ecuaciones algebraicas que relacionan las variables primarias con las variables secundarias en los nodos de los elementos involucran tres pasos.

1. Construir la forma débil o residuo pesado de la ecuación diferencial.
2. Suponer la forma de la aproximación sobre un elemento finito típico.
3. Derivar las ecuaciones de elemento finito mediante la sustitución de la solución aproximada en la forma débil o residuo pesado.

Un elemento típico $\Omega^e = (x_A, x_B)$, cuyos puntos extremos tienen las coordenadas $x = x_A$ y $x = x_B$, se aísla de la malla (ver fig 3.2a). Damos una solución aproximada a la ecuación que rige sobre el elemento, usando el método **Rayleigh-Ritz**.

En principio, cualquier método que permita la derivación de las relaciones algebraicas necesarias entre los valores nodales de la variable dependiente puede usarse. Aquí se desarrollan las ecuaciones, algebraicas usando el método **Rayleigh-Ritz**, que se basa en la forma débil de la ecuación diferencial. Las ecuaciones resultantes de la aplicación de un método variacional, son relaciones entre las variables primarias

(aquellas involucradas en la especificación de las condiciones frontera esenciales) y las variables secundarias (las involucradas en la especificación de las condiciones de frontera naturales). Los tres pasos en la derivación de las ecuaciones de elemento finito de un elemento típico de la malla se discuten enseguida:

PASO 1: FORMA DEBIL. En el método del elemento finito damos una solución aproximada a (3.1) sobre cada elemento finito. La aproximación polinomial de la solución para un elemento finito Ω^e es de la forma:

$$U^e = \sum_{j=1}^n u_j^e \psi_j^e(x) \quad (3.3)$$

donde u_j^e son los valores de la solución en los nodos del elemento finito y ψ_j^e son las funciones aproximación sobre el elemento. Los coeficientes u_j^e son determinados de modo que (3.1) sea satisfecha en sentido de integral pesada. El número necesario y suficiente de relaciones algebraicas entre los u_j^e puede obtenerse, cambiando la forma de la ecuación diferencial (3.1) en una forma integral pesada.

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} w \left[-\frac{d}{dx} \left(a \frac{du}{dx} \right) + cu - q \right] dx \quad (3.4)$$

donde $w(x)$ representa a la función peso y $\Omega^e = (x_A, x_B)$ es el dominio de un elemento típico (ver fig. 3.2a). Para $u \approx U^e$ y cada selección independiente de w , obtenemos una ecuación algebraica independiente relacionando todos los u_j^e del elemento. Un total de n ecuaciones independientes se requieren resolver para n valores u_j^e . Cuando se escoge

que w sea ψ_i^e y (3.4) se usa para obtener la i -ésima ecuación de las n ecuaciones requeridas, el modelo del elemento finito resultante (sistema de ecuaciones algebraicas entre los valores modales) es el modelo del elemento finito Galerkin. Ya que (3.4) contiene la segunda derivada de U^e , las funciones aproximación ψ_j^e pueden ser doblemente diferenciables. En adición, si las variables secundarias son incluidas en el modelo, ψ_i^e puede ser cúbica.

Para suavizar la continuidad requerida de las funciones $\psi_j^e(x)$, nos ocupamos de la diferenciación de (3.4) desde u hasta w tal que u y w sean igualmente diferenciadas una vez cada una en el presente caso. La forma integral resultante es llamada la forma débil de (3.1). Esta forma, no tan solo es equivalente a (3.1) sino también contiene las condiciones frontera natural del problema. El procedimiento de tres pasos de construcción de la forma débil de (3.1) se presentó en el cap. 2 y es visitada de nuevo en el siguiente párrafo.

El primer paso es multiplicar la ecuación diferencial gobernante con una función peso e integrar sobre un elemento típico. El segundo paso es llevar a cabo la diferenciación desde u hasta w , usando integración por partes. Considere la identidad.

$$-w \left[\frac{d}{dx} \left(a \frac{du}{dx} \right) \right] = -\frac{d}{dx} \left(wa \frac{du}{dx} \right) + a \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} \quad (3.5^a)$$

Lo cual es simplemente la regla de la diferenciación del producto aplicada al producto de dos funciones, $a \frac{du}{dx}$ y w . Integrando esta identidad sobre el dominio del elemento obtenemos:

$$-\int_{x_A}^{x_B} w \left[\frac{d}{dx} \left(a \frac{du}{dx} \right) \right] dx = -\int_{x_A}^{x_B} \frac{d}{dx} \left(wa \frac{du}{dx} \right) dx + \int_{x_A}^{x_B} \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} dx = -\left[wa \frac{du}{dx} \right]_{x_A}^{x_B} + \int_{x_A}^{x_B} a \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} dx \quad (3.5b)$$

Sustituyendo (3.5b) en (3.4) llegamos al resultado

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \left(a \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} + cwu - wq \right) dx - \left[wa \frac{du}{dx} \right]_{x_A}^{x_B} \quad (3.6)$$

El tercer y último paso es identificar las variables primarias y secundarias de la forma (débil) variacional. Esto requiere que clasifiquemos las condiciones frontera esencial (ó geométrica) y natural (o fuerza). La clasificación se hace únicamente examinando el término frontera que aparece en la forma débil (3.6).

$$\left[wa \frac{du}{dx} \right]_{x_A}^{x_B}$$

Como una regla, el coeficiente de la función peso en la expresión frontera se llama la variable secundaria, y su especificación constituye la condición frontera natural. La incógnita dependiente en la misma forma como en la función peso en la expresión frontera es la variable primaria, y su especificación constituye la condición frontera esencial. Para el modelo de ecuación a la mano, las variables primarias y secundarias son:

$$u \text{ y } a \frac{du}{dx} \equiv Q$$

En el escrito de la forma final de la expresión variacional (o débil), suponemos que todas las condiciones frontera en el nivel del elemento son del tipo natural, así que pueden incluirse en la exposición variacional.

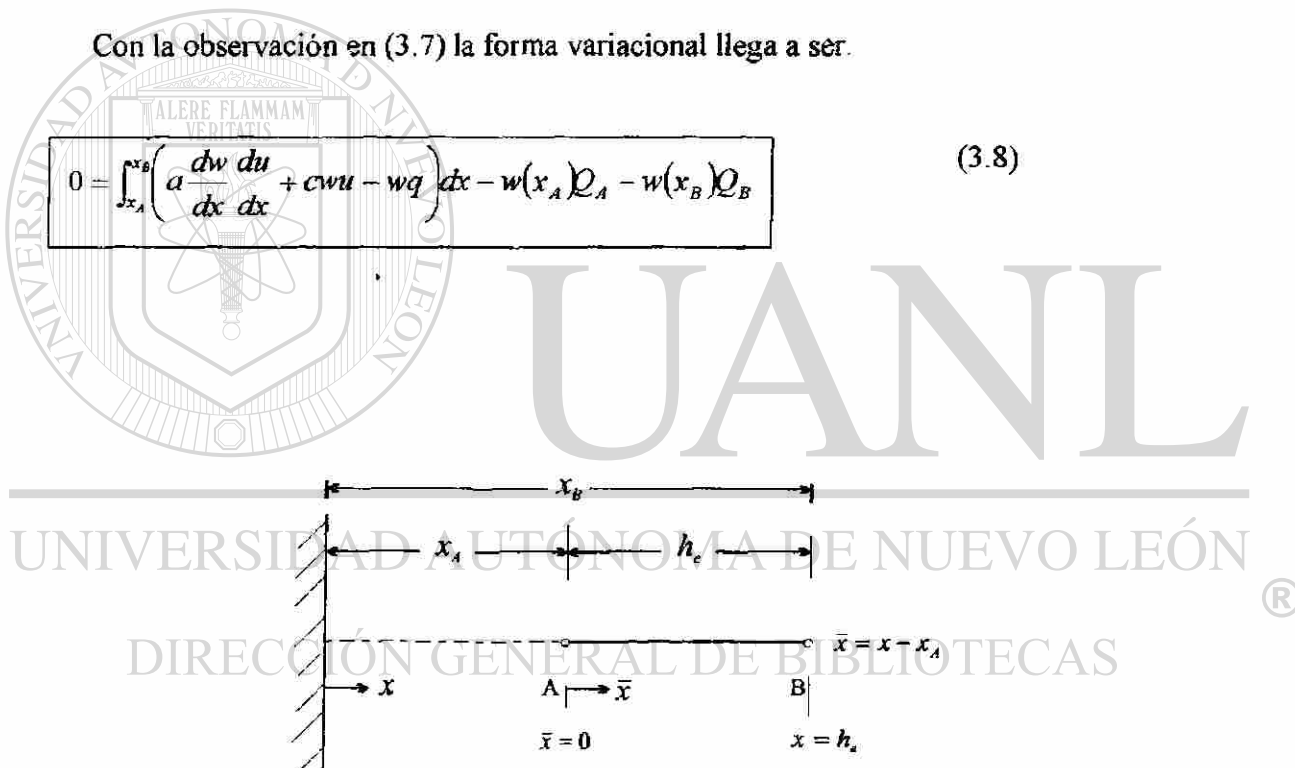
$$-Q_A = \left(a \frac{du}{dx} \right)_{x_A}, \quad -Q_B = \left(a \frac{du}{dx} \right)_{x_B}, \quad (3.7)$$

Las variables primarias y secundarias en los nodos se muestran sobre el elemento típico fig. 3.2 (b).

Esta figura es el diagrama de cuerpo libre del elemento típico. Con sus fuerzas internas (reacciones) Q_1^e y Q_2^e . Las cantidades $Q_1^e \equiv Q_A$ y $Q_2^e \equiv Q_B$ tienen el significado de fuerzas en la deformación axial de barras; Q_1^e es una fuerza compresiva mientras Q_2^e es una fuerza a tensión (algebraicamente ambas positivas como se muestra en la fig. 3.2b).

Con la observación en (3.7) la forma variacional llega a ser.

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \left(a \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} + cwu - wq \right) dx - w(x_A) Q_A - w(x_B) Q_B \quad (3.8)$$



$$Q_1^e = - \left(a \frac{du}{dx} \right)_{x=x_A} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{c} u(x_A) = u_1^e \\ \circ \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} u(x_B) = u_2^e \\ \circ \\ 2 \end{array} \quad \rightarrow \quad Q_2^e = - \left(a \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=x_B}$$

Fig. 3.2. Discretización del elemento finito de un dominio en una dimensión para el modelo de problema (3.1) (a) Un elemento finito típico de la malla de elemento finito en

fig. 3.1 (c), x = coordenada global \bar{x} = coordenada local, (b) un elemento típico, con la definición de variables primarias (u) y secundarias (Q) de los nodos elementos.

La ec. (3.8) completa el procedimiento de tres pasos para construir la forma débil en (3.8) contiene dos tipos de expresiones; las que contienen w y u , y las que contienen solo w . Agrupando en una expresión simple llamada la forma bilineal:

$$B(w, u) \equiv \int_{x_A}^{x_B} \left(a \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} + cwu \right) dx \quad (3.9a)$$

Representando todos los términos que contienen solamente w por $I(w)$, llamada la forma lineal.

$$I(w) = \int_{x_A}^{x_B} wq dx + w(x_A)Q_A + w(x_B)Q_B \quad (3.9b)$$

La exposición variacional puede escribirse ahora como:

$$B(w, u) = I(w) \quad (3.10)$$

La cual se llama el problema variacional asociado (3.1) como se verá mas tarde, la forma bilineal resulta directamente en la matriz coeficiente del elemento, y la forma lineal aparece en el vector columna al lado derecho de las ecuaciones del elemento finito.

Cuando se tiene interés en matemáticas aplicadas, o mecánica de sólidos y estructural se apreciará el hecho de que el problema variacional (3.10) no es nada, pero la exposición de la minimización de una cuadrática funcional o de energía potencial total $I(u)$:

$$\delta I = 0$$

donde δ es el símbolo variacional (ver sec. 2.3.3) e I es la funcional cuadrática definida por [ver(2.43b)]

$$I(u) = \frac{1}{2} B(u, u) - \lambda(u) \quad (3.11)$$

La ecuación (3.11) se cumple solo cuando $\lambda(u)$ es lineal en u y $B(w, u)$ es bilineal y simétricamente en u y w .

Cuando (3.1) describe la deformación axial de una barra $\frac{1}{2} B(u, u)$ representa la energía elástica de deformación almacenada en la barra, $\lambda(u)$ representa al trabajo desarrollado por las fuerzas aplicadas y $I(u)$ representa la energía potencial total del elemento barra. Es importante notar, que las formulaciones de elemento finito, no requieren de la existencia de la funcional $I(u)$. La cual es necesitada como una forma de obtener exactamente n ecuaciones algebraicas entre las u_j^e de (3.3) de modo que la ecuación diferencial gobernante sea satisfecha sobre el elemento de manera significativa. En el presente estudio, usamos la forma suave de la ecuación diferencial (3.8) ó (3.10) y el método **Rayleigh-Ritz** para obtener las n ecuaciones algebraicas entre las variables nodales u_i^e y Q_i^e .

Paso 2. Aproximación de la solución. La forma débil sobre un elemento es equivalente a la ecuación diferencial y a las condiciones de frontera natural del elemento. Las condiciones de frontera esencial del elemento, digamos $u(x_A) = u_A$, y $u(x_B) = u_B$ no están incluidas en la forma débil. De aquí que puedan incluirse en la aproximación de $u(x)$. Por lo tanto, la aproximación de $u(x)$ debe ser un interpolante, es decir igual a u_A en x_A y u_B en x_B .

Una vez que la forma débil contiene la derivada de primer orden de u , cualquier función continua sería candidata para la solución del elemento finito. Representemos la solución del elemento finito sobre el elemento $\Omega^e = (x_A, x_B)$ por U^e . Entonces daremos la solución aproximada U^e en forma de polinomios algebraicos. La razón para esta

selección es doble: primero, la teoría de interpolación de análisis numérico puede usarse para obtener las funciones aproximación sistemáticamente sobre un elemento; segundo, la evaluación numérica de integrales de los polinomios algebraicos es sencilla.

Como en los métodos variacionales, la solución aproximación U^e debe cumplir ciertos requisitos para que sea convergente con la solución real u así como se incrementa el número de elementos. Estos son:

1. La solución aproximada deberá ser continua sobre el elemento, y diferenciable, así requerida por la forma débil.
2. Deberá ser un polinomio completo, esto es, incluir todos los términos desde el menor hasta el de mayor orden usado.
3. Deberá ser un interpolante de las variables primarias en los nodos del elemento finito.

La razón para el primer requisito es obvia; asegura una matriz coeficiente no cero. El segundo requisito es necesario para capturar todos los estados posibles, esto es constante lineal y así sucesivamente de la solución real.

El tercer requisito es necesario para satisfacer las condiciones de frontera esencial del elemento y forzar continuidad de las variables primarias en puntos comunes a varios elementos.

Para la exposición variacional a la mano, el polinomio de mínimo orden es lineal. Un polinomio lineal completo es la forma.

$$U^e = a + bx \quad (3.13)$$

donde a y b son constantes. Esta expresión cumple los primeros dos requisitos en (3.12). Para satisfacer el tercero:

$$U^e(x_A) = u_1^e, \quad U^e(x_B) = u_2^e \quad (3.14)$$

Expresamos las constantes a y b en (3.13) en términos de u_1^e y u_2^e . Las ecuaciones (3.14) provee dos relaciones entre (a, b) y (u_1^e, u_2^e)

$$\begin{aligned} u_1^e &= a + bx_A \\ u_2^e &= a + bx_B \end{aligned} \quad (3.15a)$$

o en forma de matriz

$$\begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_A \\ 1 & x_B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} \quad (3.15b)$$

Invirtiendo (3.15b) por la regla de Cramer's obtenemos

$$\begin{aligned} a &= \frac{u_1^e x_B - u_2^e x_A}{x_B - x_A} = \frac{1}{h_e} (u_1^e x_B - u_2^e x_A) \equiv \frac{1}{h_e} (\alpha_1^e u_1^e + \alpha_2^e u_2^e) \\ b &= \frac{1 u_1^e - 1 u_2^e}{1 x_A - 1 x_B} = \frac{1}{h_e} (u_2^e - u_1^e) \equiv \frac{1}{h_e} (B_1^e u_1^e - B_2^e u_2^e) \end{aligned} \quad (3.15c)$$

donde $h_e = x_B - x_A$ y

$$\alpha_i^e = (-1)^j x_j^e, \quad \beta_i^e = (-1)^i; \quad x_1^e = x_A, \quad x_2^e = x_B \quad (3.15d)$$

En (3.15d), i y j permutan en un orden natural

Si $i=1$, entonces $j=2$, si $i=2$, entonces $j=1$

α_i^e y β_i^e se introducen para mostrar la forma típica de las funciones interpolación. La sustitución de (3.15c) en (3.13) produce:

$$\begin{aligned}
 U^e(x) &= \frac{1}{h_e} [(\alpha_1^e u_1^e + \alpha_2^e u_2^e) + (\beta_1^e u_1^e + \beta_2^e u_2^e)x] \\
 &= \frac{1}{h_e} (\alpha_1^e + \beta_1^e x) u_1^e + \frac{1}{h_e} (\alpha_2^e + \beta_2^e x) u_2^e
 \end{aligned}$$

Esto es :

$$U^e(x) = \psi_1^e(x) u_1^e + \psi_2^e(x) u_2^e = \sum_{j=1}^2 \psi_j^e(x) u_j^e \quad (3.16a)$$

donde :

$$\psi_1^e(x) = \frac{1}{h_e} (\alpha_1^e + \beta_1^e x) = \frac{x_B - x}{x_B - x_A}, \quad \psi_2^e(x) = \frac{1}{h_e} (\alpha_2^e + \beta_2^e x) = \dots \quad (3.16b)$$

Las cuales se llaman funciones aproximación del elemento finito lineal.

Para la interpolación lineal (3.16) marcamos los extremos como nodos 1 y 2, y

renombramos las variables secundarias como :

$$Q_A = Q_1^e, \quad Q_B = Q_2^e \quad (3.17)$$

El número de nodos global para elementos conectados en serie puede relacionarse con el número de nodos del elemento. Para elementos lineales, el número de nodos global del elemento Ω^e son e y $e+1$, y las coordenadas globales de los nodos del elemento son x_e, x_{e+1} (esto es $x_A = x_e$ y $x_B = x_{e+1}$)

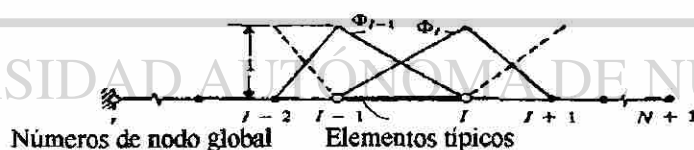
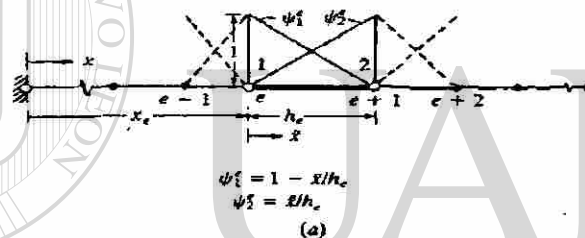
Notar que las funciones interpolación del elemento ψ_i^e en (3.16b) están expresadas en términos de la coordenada global x (la coordenada del problema) pero se definen solamente en el dominio del elemento $\Omega^e = (x_A, x_B) = (x_e, x_{e+1})$. Si los

expresamos en términos de una coordenada \bar{x} con origen en el nodo 1 del elemento, ψ_i^e (3.16b) toma las formas:

$$\psi_1^e(\bar{x}) = 1 - \frac{\bar{x}}{h_e}, \quad \psi_2^e(\bar{x}) = \frac{\bar{x}}{h_e} \quad (3.18)$$

La coordenada \bar{x} se llama la local o coordenada elemento. Las funciones ψ_i^e se muestran en la fig 3.3(a). Notar que ψ_1^e es igual a 1 en el nodo 1 y cero en el nodo 2, y ψ_2^e es igual a 1 en el nodo 2 y cero en el nodo 1. Estas propiedades de ψ_i^e se conocen como las propiedades de interpolación.

Las funciones interpolación global Φ_I se pueden definir en términos de las funciones interpolación del elemento correspondiente al nodo global I (ver



$$\Phi_I = \begin{cases} \phi_2^{i-1} & \text{para } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \phi_1^i & \text{para } x_i \leq x \leq x_{i+1} \end{cases}$$

(b)

Figura 3.3. Funciones interpolación a) local, b) global para el elemento dos nodos lineal ($x_A = x_e, x_B = x_{e+1}$)

fig.3.3 b), ya que $U^e(x)$ de (3.16a) es una interpolante de $u(x)$ sobre los elementos Ω^e , ψ_i^e son llamadas También funciones interpolación. Las funciones interpolación derivadas usando la dependiente desconocida - no sus derivadas- en los nodos (esto es

funciones interpolación con continuidad c^0) se llaman la familia **Lagrange** de funciones interpolación. Cuando la dependiente desconocida y sus derivadas en los nodos se usan para derivar las funciones interpolación, las funciones interpolación resultantes se conocen como la familia **Hermite** de funciones interpolación.

Notar que ψ_i^e son derivadas sistemáticamente; arrancando con un grado de polinomios algebraicos supuesto para la dependiente desconocida y determinando los coeficientes del polinomio en términos de los grados de libertad primarios, expresamos la variable dependiente como una combinación lineal de funciones aproximación y las variables nodal primarias. La llave del procedimiento es seleccionar el número y localización de nodos en el elemento, tal que, la geometría del elemento este perfectamente definida. El número de nodos debe ser suficiente, para permitir el grado de interpolación supuesto de la solución, en términos de las variables primarias. Para una aproximación polinomial, lineal, dos nodos con una incógnita primaria por nodo, son suficientes para definir la geometría del elemento, siempre que los dos nodos sean los extremos del elemento. Ya que un polinomio cuadrático se define únicamente por tres parámetros, un total de tres puntos nodales deben ser identificados en el elemento.

Para definir la geometría del elemento, dos de los nodos deben ser los extremos del elemento. El tercero puede identificarse dentro del elemento.

Retornando a la aproximación lineal (3.13) que se rehace como (3.16a), notamos que la solución verdadera es aproximada sobre cada elemento mediante un polinomio lineal $U^e(x)$ (vea fig. 3.4a). El error en la aproximación, $E = u(x) - U^e(x)$, puede reducirse disminuyendo el tamaño del elemento h_e o incrementando el grado de la aproximación (ver fig. 3.4b).

Una aproximación cuadrática, es de la forma:

$$U^e(x) = a + bx + cx^2 \quad (3.19)$$

La cual requiere tres nodos para reescribir U^e en términos de los valores de $u(x)$ en los nodos. Dos de los nodos están identificados en los extremos de los elementos para definir la geometría, y el tercer nodo se toma del interior del elemento. En teoría el tercer elemento puede colocarse en cualquier punto interior. Sin embargo, el punto

medio del elemento, equidistante de los nodos extremos es la mejor selección. Otras selecciones (punto cuarto) se dictan mediante consideraciones especiales (para tener un cierto grado de singularidad en la derivada de la solución).

Por lo tanto, identificamos tres nodos en el elemento de longitud h_e (ver fig. 3.5a) y reescribimos $U^e(x)$ en términos de los tres valores nodales, (u_1^e, u_2^e, u_3^e) . Tenemos:

$$\begin{aligned} u_1^e &= U^e(x_1^e) = a + bx_1^e + c(x_1^e)^2 \\ u_2^e &= U^e(x_2^e) = a + bx_2^e + c(x_2^e)^2 \\ u_3^e &= U^e(x_3^e) = a + bx_3^e + c(x_3^e)^2 \end{aligned} \quad (3.20a)$$

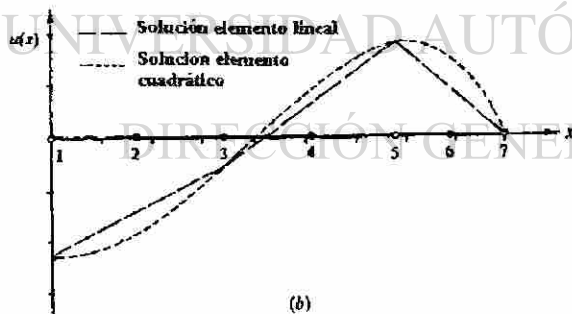
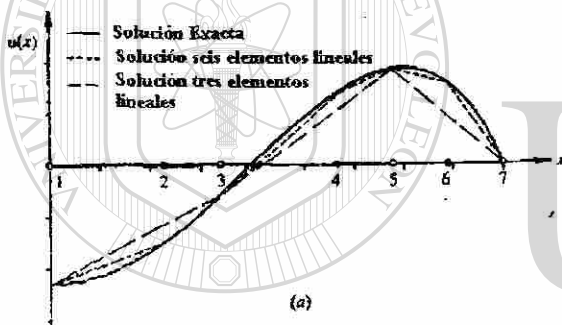


Figura 3.4

Refinamiento de soluciones de elemento finito

a) Refinamiento de la malla usando elementos lineales

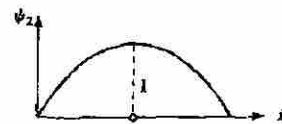
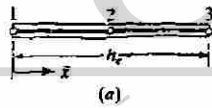
b) Solución cuadrática del elemento usando tres elementos

o en forma de matriz :

$$\begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \\ u_3^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1^e & (x_1^e)^2 \\ 1 & x_2^e & (x_2^e)^2 \\ 1 & x_3^e & (x_3^e)^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} \quad (3.20b)$$

donde x_i^e es la coordenada global del i -ésimo nodo del elemento Ω^e . Invirtiendo las ecuaciones de arriba, obtenemos

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{D^e} \sum_{i=1}^3 \alpha_i^e u_i^e, & \alpha_i^e &= x_j^e (x_k^e)^2 - x_k^e (x_j^e)^2 \\ b &= \frac{1}{D^e} \sum_{i=1}^3 \beta_i^e u_i^e, & \beta_i^e &= (x_j^e)^2 - (x_k^e)^2 \\ c &= \frac{1}{D^e} \sum_{i=1}^3 \gamma_i^e u_i^e, & \gamma_i^e &= -(x_j^e - x_k^e), \quad D^e = \sum_{i=1}^3 \alpha_i^e \end{aligned} \quad (3.21)$$



(b)

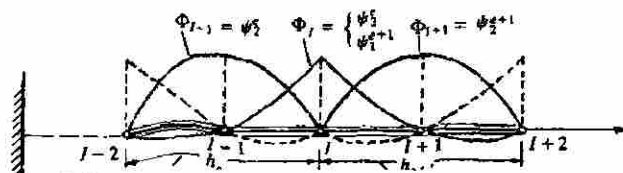


Figura 3.5

Elemento cuadrático **Lagrange** de una dimensión y sus funciones interpolación a) geometría del elemento, b) funciones interpolación, c) funciones interpolación global correspondientes a las funciones interpolación cuadráticas. I representa al número global, e al número de elemento e i al número de nodo del elemento.

y (3.19) toma la forma :

$$U^e(x) = \psi_1^e(x)u_1^e + \psi_2^e(x)u_2^e + \psi_3^e(x)u_3^e = \sum_{j=1}^3 \psi_j^e(x)u_j^e \quad (3.22)$$

donde ψ_j^e son las funciones interpolación cuadrática de **Lagrange**,

$$\psi_i^e(x) = \frac{1}{D^e} (\alpha_i^e + \beta_i^e + \gamma_i^e x^2) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.23)$$

Aquí D^e representa al determinante de la matriz en 3.20b), y α_i^e, β_i^e y γ_i^e están definidas por 3.21). Los subíndices usados (3.21) permutan en un orden natural.

$$\begin{array}{ll} \text{si } i=1 & \text{el } j=2 \text{ y } k=3 \\ \text{si } i=2 & \text{el } j=3 \text{ y } k=1 \\ \text{si } i & \text{E}^{\text{th}} \text{ elemento } \quad \text{1 y } k=2 \end{array} \quad \text{(e-1)th elemento} \quad (3.24)$$

Por ejemplo, α_2^e, β_3^e y γ_1^e , están dados por

$$\alpha_2^e = x_3^e (x_1^e)^2 - x_1^e (x_2^e)^2, \quad \beta_3^e = (x_1^e)^2 - (x_2^e)^2, \quad \gamma_1^e = x_3^e - x_2^e$$

Las funciones interpolación cuadráticas pueden expresarse en términos de una coordenada local \bar{x} , con origen en el nodo 1, el extremo izquierdo del elemento. La coordenada global x está relacionada con la coordenada local \bar{x} mediante la relación

$$x = x_1^e + \bar{x} \quad (3.25)$$

donde $x_1^e = x_A$ es la coordenada global del primer nodo del elemento Ω^e . Para un elemento cuadrático, con el nodo interior, nodo 2, localizado en $\bar{x} = \alpha h_e$, tenemos:

$$\begin{aligned}\psi_1^e(\bar{x}) &= \left(1 + \frac{\bar{x}}{h}\right) \left(1 - \frac{1}{\alpha} \frac{\bar{x}}{h}\right) \\ \psi_2^e(\bar{x}) &= \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \frac{\bar{x}}{h} \left(1 - \frac{\bar{x}}{h}\right) \\ \psi_3^e(\bar{x}) &= \frac{\alpha}{(1-\alpha)} \frac{\bar{x}}{h} \left(1 - \frac{1}{\alpha} \frac{\bar{x}}{h}\right)\end{aligned}\quad (3.26)$$

donde $0 < \alpha < 1$ y $x_2^e = x_1^e + \alpha h_e$. Para $\alpha = \frac{1}{2}$, cuando el nodo 2 se coloca en el punto medio del elemento, (3.26) llega a ser:

$$\begin{aligned}\psi_1^e(\bar{x}) &= \left(1 - \frac{\bar{x}}{h}\right) \left(1 - \frac{2\bar{x}}{h}\right) \\ \psi_2^e(\bar{x}) &= 4 \frac{\bar{x}}{h} \left(1 - \frac{\bar{x}}{h}\right) \\ \psi_3^e(\bar{x}) &= -\frac{\bar{x}}{h} \left(1 - \frac{2\bar{x}}{h}\right)\end{aligned}\quad (3.27)$$

La gráfica de las funciones interpolación cuadrática se da en la fig. 3.5(b). La función ψ_i^e es igual a 1 el nodo i y cero en los otros dos nodos, pero varía cuadráticamente entre los nodos.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Toda la familia de funciones interpolación de **Lagrange** satisfacen las siguientes propiedades, conocidas como las propiedades interpolación.

$$\begin{aligned}(1) \quad \psi_i^e(x_j^e) &= \delta_{ij} \equiv \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \\ (2) \quad \sum_{j=1}^n \psi_j^e(x) &= 1, \text{ de aquí } \sum_{j=1}^n \frac{d\psi_j^e}{dx} = 0\end{aligned}\quad (3.28)$$

donde $n-1$ es el grado de polinomios interpolación y x_j^e es la coordenada global del nodo j en el elemento Ω^e . Se puede verificar que las funciones interpolación lineales en (3.16) y las funciones interpolación cuadráticas en (3.26) y (3.27) satisfacen las dos propiedades en (3.28). La primera es un resultado directo del requisito $U^e(x_j^e) = u_j^e$, y la segunda viene de la inclusión de un termino constante en el polinomio. Por ejemplo, si la aproximación U^e es para representar un estado de solución uniforme, $U^e = U_0^e = \text{constante}$, entonces todas las $u_i^e = U_0^e$, y tenemos:

$$U_0^e = \sum_{j=1}^n U_0^e \psi_j^e(x)$$

$$1 = \sum_{j=1}^n \psi_j^e(x)$$

Las propiedades de interpolación (3.28) pueden usarse para construir las funciones de interpolación de **Lagrange** de cualquier grado. Por ejemplo, las funciones interpolación cuadráticas (3.27) pueden derivarse usando la propiedad (1) de (3.28). De aquí $\psi_1^e(\bar{x})$ debe desaparecer en los nodos 2 y 3 esto es en $\bar{x} = \frac{1}{2}h_e$ y $x = h_e$, esta es de

la forma :

$$\psi_1^e(\bar{x}) = C \left(\bar{x} - \frac{1}{2}h_e \right) (\bar{x} - h_e)$$

la constante C se determina de modo que ψ_1^e es igual a 1 en $\bar{x} = 0$:

$$1 = C \left(0 - \frac{1}{2}h_e \right) (0 - h_e) \quad \text{ó} \quad C = \frac{2}{h_e^2}$$

Esto da :

$$\psi_1^e(\bar{x}) = \frac{2}{h_e^2} \left(\bar{x} - \frac{1}{2}h_e \right) (\bar{x} - h_e) = \left(1 - \frac{\bar{x}}{h_e} \right) \left(1 - \frac{2\bar{x}}{h_e} \right)$$

Que es la misma como en (3.27). Las otras dos funciones interpolación pueden derivarse de manera similar.

Aunque aquí se presenta una discusión detallada sobre como construir las funciones interpolación de **Lagrange** para elementos en una dimensión, se encuentran disponibles en bibliografías de análisis numérico, y su derivación es independiente de la física del problema a resolverse. Su derivación depende solamente de la geometría del elemento y del número y localización de los nodos. El número de nodos debe ser igual al número de nodos en el polinomio. Por lo tanto, las funciones interpolación derivadas arriba se usan no solamente en la aproximación del elemento finito del problema a la mano, sino también en problemas que admiten la interpolación **Lagrange** de las variables, esto es, todos los problemas para los que las variables primarias son las incógnitas dependientes de las ecuaciones que rigen:

PASO 3. MODELO DEL ELEMENTO FINITO. La forma débil (3.8) ó (3.10) es equivalente a la ecuación diferencial (3.1) sobre el elemento Ω^e y también contiene las condiciones de frontera natural (3.7). Más aún las aproximaciones del elemento finito (3.16a) ó (3.22) satisfacen las condiciones de frontera esencial (3.14) del elemento. La sustitución de (3.16a) ó (3.22) en (3.8) darán las ecuaciones algebraicas necesarias entre los valores nodales u_i^e y Q_i^e del elemento Ω^e . Para formular el modelo del elemento finito basado en la forma débil (3.8) no se necesita decidir el grado de aproximación de U^e . El modelo puede desarrollarse para un grado de interpolación arbitrario.

$$u \approx U^e = \sum_{j=1}^n U_j^e \psi_j^e(x) \quad (3.29)$$

donde ψ_j^e son las funciones de interpolación de **Lagrange** de grado $n-1$. Cuando $n > 2$, la forma débil en (3.8) debe ser modificada para que incluya las variables secundarias diferentes a cero, si en el interior de cualquier nodo :

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \left(a \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} + cwu \right) dx - \int_{x_A}^{x_B} wq dx - \sum_{i=1}^n w(x_i^e) Q_i^e \quad (3.30)$$

donde x_i^e es la coordenada global del i -ésimo nodo del elemento Ω^e . Si los nodos 1 y n representan los extremos del elemento entonces Q_1^e y Q_n^e representan las fuentes de punto desconocidos. Y todas las demás Q_i^e son siempre conocidas (es decir fuentes de punto aplicado).

Siguiendo el procedimiento Rayleigh-Ritz desarrollado en la sección 2.4 sustituimos (3.29) para u y $\psi_1^e, \psi_2^e, \dots, \psi_n^e$ para w forma débil (3.30) para obtener n ecuaciones algebraicas:

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \left[a \frac{d\psi_1^e}{dx} \left(\sum_{j=1}^n u_j^e \frac{d\psi_j^e}{dx} \right) + c\psi_1^e \left(\sum_{j=1}^n u_j^e \psi_j^e(x) \right) - \psi_1^e q \right] dx - \sum_{j=1}^n \psi_1^e$$

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \left[a \frac{d\psi_2^e}{dx} \left(\sum_{j=1}^n u_j^e \frac{d\psi_j^e}{dx} \right) + c\psi_2^e \left(\sum_{j=1}^n u_j^e \psi_j^e(x) \right) - \psi_2^e q \right] dx - \sum_{j=1}^n \psi_2^e \quad (3.31a)$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \left[a \frac{d\psi_i^e}{dx} \left(\sum_{j=1}^n u_j^e \frac{d\psi_j^e}{dx} \right) + c\psi_i^e \left(\sum_{j=1}^n u_j^e \psi_j^e(x) \right) - \psi_i^e q \right] dx - \sum_{j=1}^n \psi_i^e$$

(i -ésima ecuación)

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \left[a \frac{d\psi_n^e}{dx} \left(\sum_{j=1}^n u_j^e \frac{d\psi_j^e}{dx} \right) + c\psi_n^e \left(\sum_{j=1}^n u_j^e \psi_j^e(x) \right) - \psi_n^e q \right] dx - \sum_{j=1}^n \psi_n^e$$

Notar que le número de ecuaciones algebraicas es de acuerdo a las variables primarias del elemento. La i -ésima ecuación algebraica puede escribirse como:

$$0 = \sum_{j=1}^n K_{ij}^e u_j^e - f_i^e - Q_i^e \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.31b)$$

Donde:

$$K_{ij}^e = \int_{x_A}^{x_B} \left(\frac{d\psi_i^e}{dx} \frac{d\psi_j^e}{dx} + c \psi_i^e \psi_j^e \right) dx = \mathbf{B}(\psi_i^e, \psi_j^e), \quad f_i^e = \int_{x_A}^{x_B} q \psi_i^e dx = I(\psi_i^e) \quad (3.31c)$$

Notar que la propiedad (1) de interpolación de (3.28) se usa para escribir:

$$\sum_{j=1}^n \psi_j^e(x_i^e) Q_j^e = Q_i^e \quad (3.32)$$

Las ecuaciones (3.31a) pueden expresarse en términos de los coeficientes k_{ij}^e, f_i^e y Q_i^e como:

$$\begin{aligned} k_{11}^e u_1^e + k_{12}^e u_2^e + \dots + k_{1n}^e u_n^e &= f_1^e + Q_1^e \\ k_{21}^e u_1^e + k_{22}^e u_2^e + \dots + k_{2n}^e u_n^e &= f_2^e + Q_2^e \\ &\vdots \\ k_{n1}^e u_1^e + k_{n2}^e u_2^e + \dots + k_{nn}^e u_n^e &= f_n^e + Q_n^e \end{aligned} \quad (3.33a)$$

Las ecuaciones algebraicas (3.33a) pueden escribirse en forma matricial como:

$$[K^e] \{u^e\} = \{f^e\} + \{Q^e\} \quad (3.33b)$$

La matriz $[k^e]$ se llama la matriz coeficiente, o matriz de rigidez en las aplicaciones de la mecánica estructural. El vector columna $\{f^e\}$ es el vector fuente o vector fuerza, en problemas de mecánica estructural. Observe que (3.33) contiene $2n$ incógnitas: $(u_1^e, u_2^e, \dots, u_n^e)$ y $(Q_1^e, Q_2^e, \dots, Q_n^e)$ llamada grados de libertad nodal primario y secundario del elemento. De aquí no se pueden resolver sin tener n condiciones adicionales. Algunas de ellas se proveen por las condiciones de frontera y el resto por balance de las variables secundarias Q_i^e en nodos comunes a diferentes elementos. Este balance puede implementarse colocando los elementos al mismo tiempo. (esto es, ensamblando las ecuaciones elemento). Con el ensamble de ecuaciones y la imposición de las condiciones de frontera obtendremos el mismo número de ecuaciones algebraicas que el número de grados de libertad desconocidos primario y secundario. La matriz coeficiente $[k^e]$, que es simétrica, y el vector fuente $\{f^e\}$ pueden evaluarse para un elemento dado y datos $(a, c, y q)$ para los valores de las constantes del elemento discreto $a, c, y q$ (digamos a_e, c_e y q_e) los coeficientes k_{ij}^e y f_i^e pueden evaluarse fácilmente para un elemento típico

ELEMENTO LINEAL. Para una malla de elementos lineales Ω^e está localizado entre los nodos globales $x_A = x_e$ y $x_B = x_{e+1}$ (ver fig. 3.2). De aquí:

$$K_{ij}^e = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \left(a_e \frac{d\psi_i^e}{dx} \frac{d\psi_j^e}{dx} + c_e \psi_i^e \psi_j^e \right) dx, \quad f_i^e = \int_{x_e}^{x_{e+1}} q_e \psi_i^e dx$$

ó en el sistema de coordenadas local \bar{x}

$$K_{ij}^e = \int_0^h \left(a_e \frac{d\psi_i^e}{d\bar{x}} \frac{d\psi_j^e}{d\bar{x}} + c_e \psi_i^e \psi_j^e \right) d\bar{x}, \quad f_i^e = \int_0^h q_e \psi_i^e d\bar{x}$$

donde: $x = x_{e+1}^1 + \bar{x}$, y

$$dx = d\bar{x}, \quad \frac{d\psi_i^e}{dx} = \frac{d\psi_i^e}{d\bar{x}}$$

Las ψ_i^e se pueden expresar en términos de \bar{x} [ver(3.18)] como:

$$\psi_1^e(\bar{x}) = 1 - \frac{\bar{x}}{h_e}, \quad \psi_2^e(\bar{x}) = \frac{\bar{x}}{h_e}$$

Podemos calcular K_{ij}^e y f_i^e evaluando las integrales. Tenemos:

$$K_{11}^e = \int_0^{h_e} \left[a_e \left(-\frac{1}{h_e} \right) \left(-\frac{1}{h_e} \right) + c_e \left(1 - \frac{\bar{x}}{h_e} \right) \left(1 - \frac{\bar{x}}{h_e} \right) \right] d\bar{x}$$

$$= \frac{a_e}{h_e} + \frac{1}{3} c_e h_e$$

$$K_{12}^e = \int_0^{h_e} \left[a_e \left(-\frac{1}{h_e} \right) \frac{1}{h_e} + c_e \left(1 - \frac{\bar{x}}{h_e} \right) \frac{\bar{x}}{h_e} \right] d\bar{x}$$

$$= -\frac{a_e}{h_e} + \frac{1}{6} c_e h_e = k_{21}^e \quad (\text{por simetría})$$

$$K_{22}^e = \int_0^{h_e} \left[a_e \frac{1}{h_e} \frac{1}{h_e} + c_e \frac{\bar{x}}{h_e} \frac{\bar{x}}{h_e} \right] d\bar{x} = \frac{a_e}{h_e} + \frac{1}{3} c_e h_e$$

Similarmente:

$$f_1^e = \int_0^{h_e} q_e \left(1 - \frac{\bar{x}}{h_e} \right) d\bar{x} = \frac{1}{2} q_e h_e, \quad f_2^e = \int_0^{h_e} q_e \left(\frac{\bar{x}}{h_e} \right) d\bar{x} = \frac{1}{2} q_e h_e$$

Por lo tanto, para la constante q_e , la fuente total $q_e h_e$ es distribuida igualmente en los dos nodos. la matriz coeficiente y el vector columna son:

$$[K^e] = \frac{a_e}{h_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{c_e h_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.34a)$$

$$\{f^e\} = \frac{q_e h_e}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (3.34b)$$

Si $a = a_e x$ y $c = c_e$, la matriz coeficiente $[k^e]$ puede evaluarse como :

$$[K^e] = \frac{a_e}{h_e} \left(\frac{x_e + x_{e+1}}{2} \right) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{c_e h_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

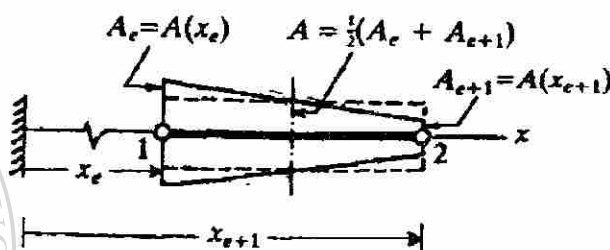


Figura 3.6. Aproximación de un elemento con sección transversal variable linealmente mediante un elemento con sección transversal constante.

Cuando a es una función lineal de x , esto equivale a reemplazar a en la matriz coeficiente con su valor promedio [comparar (3.34) con (3.35)]:

$$a_{avg} = \frac{1}{2}(x_e + x_{e+1})a_e \quad (3.36)$$

Por ejemplo, en el estudio de barras con sección transversal variable linealmente

$$a = EA(x) = E \left(A_e + \frac{A_{e+1} - A_e}{h_e} \bar{x} \right)$$

Estas cantidades reemplazan la sección transversal variable con una sección transversal constante dentro de cada elemento, el área de la sección transversal de la sección constante, siendo el área promedio de la sección transversal del elemento que

varía linealmente (ver fig. 3.6). Aquí A_e representa al área de la sección transversal en x_e y A_{e+1} es tal que $x = x_{e+1}$.

Cuando a, c y q son polinomios algebraicos en x , la evaluación K_y^e y f_j^e es sencilla. Cuando son funciones de x complicadas se buscará la evaluación numérica de las integrales en $[K^e]$ y $\{f^e\}$.

Cuando a y q son constantes del elemento discreto y $c=0$, las ecuaciones del elemento finito correspondiente al elemento lineal son:

$$\frac{a_e}{h_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix} = \frac{q_e h_e}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1^e \\ Q_2^e \end{Bmatrix} \quad (3.37a)$$

$$\frac{a_e}{h_e} u_1^e - \frac{a_e}{h_e} u_2^e = \frac{1}{2} q_e h_e + Q_1^e$$

$$-\frac{a_e}{h_e} u_1^e + \frac{a_e}{h_e} u_2^e = \frac{1}{2} q_e h_e + Q_2^e \quad (3.37b)$$

ELEMENTO CUADRÁTICO. para una malla de elemento cuadrático, el elemento

Ω^e está localizado entre los nodos globales $x_A = x_{2e-1}$ y $x_B = x_{2e+1}$. De aquí.

$$K_{ij}^e = \int_{x_{2e-1}}^{x_{2e+1}} \left(a_e \frac{d\psi_i^e}{dx} \frac{d\psi_j^e}{dx} + c_e \psi_i^e \psi_j^e \right) dx = \int_0^h \left(a_e \frac{d\psi_i^e}{dx} \frac{d\psi_j^e}{dx} + c_e \psi_i^e \psi_j^e \right) dx \quad (3.38)$$

$$f_i^e = \int_{x_{2e-1}}^{x_{2e+1}} \psi_i^e q_e dx = \int_0^h \psi_i^e q_e d\bar{x}$$

Donde las funciones interpolación cuadrática de **Lagrange** $\psi_i^e(\bar{x}) (i=1,2,3)$ están dadas en (3.27). Evaluando las integrales en (3.38), obtenemos:

$$\begin{aligned}
 K_{11}^e &= \int_0^{h_e} \left\{ a_e \left(-\frac{3}{h_e} + \frac{4\bar{x}}{h_e^2} \right) \left(-\frac{3}{h_e} + \frac{4\bar{x}}{h_e^2} \right) + c_e \left[1 - \frac{3\bar{x}}{h_e} + 2 \left(\frac{\bar{x}}{h_e} \right)^2 \right] \left[1 - \frac{3\bar{x}}{h_e} + 2 \left(\frac{\bar{x}}{h_e} \right)^2 \right] \right\} d\bar{x} \\
 &= \frac{7}{3} \frac{a_e}{h_e} + 12 \frac{2}{15} c_e h_e \\
 K_{12}^e &= K_{21}^e = \int_0^{h_e} \left\{ a_e \left(-\frac{3}{h_e} + \frac{4\bar{x}}{h_e^2} \right) \left(\frac{4}{h_e} - \frac{8\bar{x}}{h_e} \right) + c_e \left[\frac{1-3\bar{x}}{h_e} + 2 \left(\frac{\bar{x}}{h_e} \right)^2 \right] \left[4 \frac{\bar{x}}{h_e} \left(1 - \frac{\bar{x}}{h_e} \right) \right] \right\} d\bar{x} \\
 &= \frac{8}{3} \frac{a_e}{h_e} + \frac{2}{30} c_e h_e
 \end{aligned}$$

así sucesivamente. Similarmente:

$$\begin{aligned}
 f_1^e &= \int_0^{h_e} q_e \left[1 - \frac{3\bar{x}}{h_e} + 2 \left(\frac{\bar{x}}{h_e} \right)^2 \right] d\bar{x} = \frac{1}{6} q_e h_e = f_3^e \quad (\text{por simetría}) \\
 f_2^e &= \int_0^{h_e} q_e \left[4 \frac{\bar{x}}{h_e} + \left(1 - \frac{\bar{x}}{h_e} \right) \right] d\bar{x} = \frac{4}{6} q_e h_e
 \end{aligned}$$

Notar que, para elementos cuadráticos, la fuente total $q_e h_e$, no está distribuida igualmente entre los nodos. La distribución no es equivalente a la de dos elementos

lineales de longitud $\frac{1}{2} h_e$. Por lo tanto, el cálculo de f_i^e estaría basado en las funciones

interpolación de ese elemento. La suma de f_i^e para cualquier elemento sería igual a la integral de $q(x)$ sobre el elemento:

$$\sum_{i=1}^n f_i^e = \int_{x_A}^{x_B} q(x) dx \quad (3.39)$$

Los valores de a, c , y q , las matrices del elemento de un elemento cuadrático son:

$$[K^e] = \frac{a_e}{3h_e} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & 8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} + \frac{c_e h_e}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (3.40a)$$

$$\{f^e\} = \frac{q_e h_e}{6} \begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (3.40b)$$

CONECTIVIDAD DE ELEMENTOS

En la obtención de las ecuaciones del elemento, aislamos un elemento típico (el e -ésimo) de la malla y formulamos el problema variacional (o forma débil) y desarrollamos su modelo de elemento finito. Para resolver el problema total, debemos poner los elementos de vuelta en sus posiciones originales. Haciendo esto, antes de la discretización, imponemos la continuidad de las variables primarias y el balance de las variables secundarias en los nodos de conexión entre los elementos. La continuidad de las variables primarias se refiere aquí a la naturaleza de la solución evaluada simple; el balance de las variables secundarias se refiere al equilibrio de fuentes punto en la unión de varios elementos. Por lo tanto el ensamble de elementos se lleva a cabo imponiendo las dos condiciones siguientes:

1. Continuidad de las variables primarias en nodos conectando

$$u_n^e = u_1^{e+1} \quad (3.41a)$$

esto es, el último valor nodal del elemento Ω^e es el mismo que el primer valor nodal del elemento adyacente Ω^{e+1}

2. Balance de las variables secundarias en los nodos conectados

$$Q_n^e + Q_1^{e+1} = \begin{cases} 0 & \text{si no se aplica fuente de punto externa} \\ Q_0 & \text{si una fuente de punto externa de magnitud } Q_0 \text{ se aplica} \end{cases} \quad (3.41b)$$

En el escrito de (3.41) se supuso que los elementos están conectados en secuencia. La continuidad de las variables primarias $u_2^e = u_1^{e+1}$, y el balance de las variables secundarias $Q_2^e + Q_1^{e+1}$ para una malla de elementos lineales se ilustra en la Fig.3.7. El

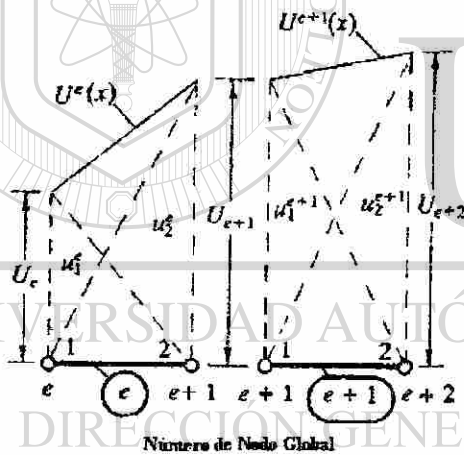
balance de las variables secundarias puede interpretarse como la continuidad de $a \frac{du}{dx}$ (no $a \frac{dU^e}{dx}$) en el punto común a los elementos Ω^e y Ω^{e+1} (cuando no hay cambio en $a \frac{du}{dx}$ se impone externamente)

$$\left(a \frac{du}{dx} \right)^e = \left(a \frac{du}{dx} \right)^{e+1}$$

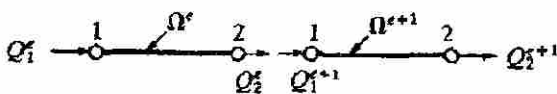
ó

$$\left(a \frac{du}{dx} \right)^e + \left(-a \frac{du}{dx} \right)^{e+1} = 0 \tag{3.42}$$

$$Q_2^e + Q_1^{e+1} = 0$$



(a)



(b)

Figura 3.7.

Ensamble de dos elementos lineales de Lagrange :

a) continuidad de la variable primaria.

b) balance de las variables secundarias.

La continuidad de las variables primarias en el inter-elemento es impuesta por el renombre de las variables u_n^e y u_1^{e+1} en $x = x_N$ como uno y el mismo, particularmente el valor de u en el nodo global N :

$$u_n^e = u_1^{e+1} \equiv U_N \quad (3.43)$$

donde $N = (n-1)e + 1$ es el número de nodo global correspondiente al nodo n del elemento Ω^e y el nodo 1 del elemento Ω^{e+1} . Por ejemplo, una malla de E elementos finitos lineales ($n = 2$), tenemos:

$$\begin{aligned} u_1^1 &= U_1 \\ u_2^1 &= u_1^2 = U_2 \\ u_2^2 &= u_1^3 = U_3 \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

(3.44)

$$\begin{aligned} u_2^{E-1} &= u_1^E = U_E \\ u_2^E &= U_{E+1} \end{aligned}$$

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Para ejecutar el balance de las variables secundarias Q_n^e (3.41b) es claro que podemos hacer $Q_n^e + Q_1^{e+1}$ igual a cero o un valor especificado solamente si tenemos tales expresiones en nuestras ecuaciones. Para obtener tales expresiones, debemos agregar la n -ésima ecuación del elemento Ω^e a la primera ecuación del elemento Ω^{e+1} esto es, agregamos:

$$\sum_{j=1}^n K_{nj}^e u_j^e = f_n^e + Q_n^e$$

$$\text{y } \sum_{j=1}^n K_{1j}^{e+1} u_j^{e+1} = f_1^{e+1} + Q_1^{e+1}$$

para dar:

(3.45)

$$\sum_{j=1}^n (K_{nj}^e u_j^e + K_{1j}^{e+1} u_j^{e+1}) = f_n^e + f_1^{e+1} + (Q_n^e + Q_1^{e+1})$$

$$= f_n^e + f_1^{e+1} + Q_0$$

Este proceso reduce el número de ecuaciones desde $2E$ hasta $E+1$. La primera ecuación del primer elemento y la última ecuación del último elemento permanecerán invariables, excepto para el renombre de las variables primarias. El lado izquierdo de (3.45) puede escribirse en términos de los valores nodales globales como:

$$\begin{aligned} & (K_{n1}^e u_1^e + K_{n2}^e u_2^e + \dots + K_{nm}^e u_m^e) + (K_{11}^{e+1} u_1^{e+1} + K_{12}^{e+1} u_2^{e+1} + \dots + K_{1n}^{e+1} u_n^{e+1}) \\ &= (K_{n1}^e U_N + K_{n2}^e U_{N+1} + \dots + K_{nm}^e U_{N+n-1}) \\ &+ (K_{11}^{e+1} U_{N+n-1} + K_{12}^{e+1} U_{N+n} + \dots + K_{1n}^{e+1} U_{N+2n-2}) \\ &= K_{n1}^e U_N + K_{n2}^e U_{N+1} + \dots + K_{n(n-1)}^e U_{N+n-2} \\ &+ (K_{nm}^e + K_{11}^{e+1}) U_{N+n-1} + K_{12}^{e+1} U_{N+n} + \dots + K_{1n}^{e+1} U_{N+2n-2} \end{aligned} \quad (3.46)$$

donde $N = (n-1)e + 1$. Para una malla de E elementos lineales ($n=2$), tenemos:

$$K_{11}^1 U_1 + K_{12}^1 U_2 = f_1^1 + Q_1^1 \quad (\text{invariable})$$

$$K_{21}^1 U_1 + (K_{22}^1 + K_{11}^2) U_2 + K_{12}^2 U_3 = f_2^1 + f_1^2 + Q_2^1 + Q_1^2$$

$$K_{21}^2 U_2 + (K_{22}^2 + K_{11}^3) U_3 + K_{12}^3 U_4 = f_2^2 + f_1^3 + Q_2^2 + Q_1^3$$

(3.47a)

Recordar, que toda la discusión anterior de ensamble, está basada en la suposición de que los elementos están conectados en serie. En general, varios elementos pueden ser conectados en un nodo y los elementos no tienen que ser necesariamente numerados. En este caso, la idea de arriba se mantiene, con el cambio de que los coeficientes de todos los elementos conectados en un modo se sumarán.

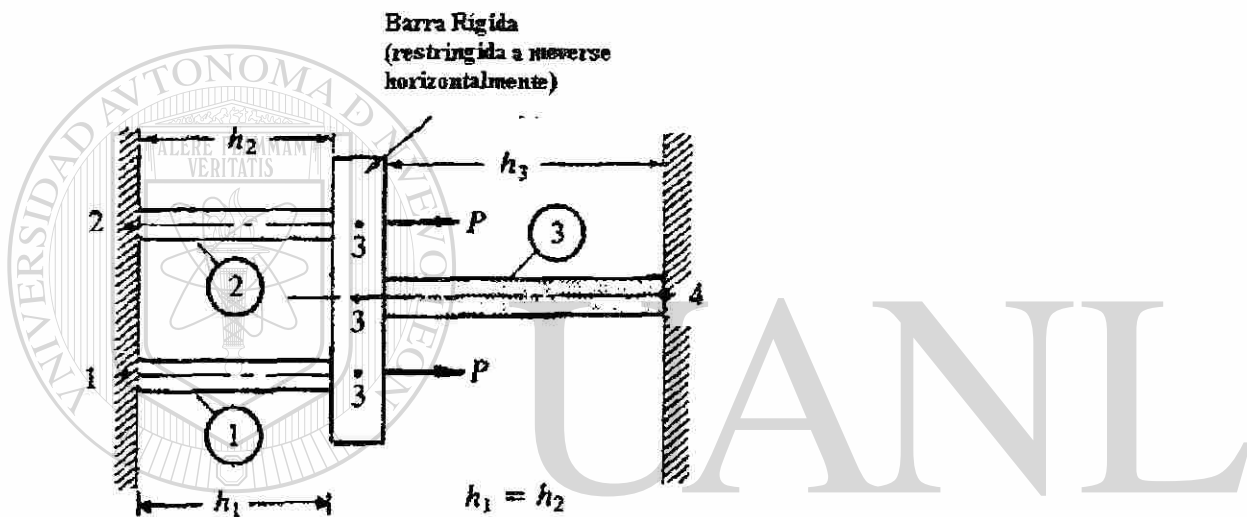


Figura 3.8

La geometría y malla del elemento finito de una estructura barra.

Por ejemplo, considere la estructura que consiste en tres elementos barra mostrados en la fig. 3.8. Considere que la barra de conexión es rígida (esto es, no deformable) y obligada a permanecer horizontal todo el tiempo. Entonces las condiciones de continuidad y balance

$$u_2^1 = u_1^3 = u_2^2 \equiv U_3, \quad Q_2^1 + Q_1^3 + Q_2^2 = 2P \quad (3.48)$$

Para conseguir estas condiciones, debemos sumar la segunda ecuación del elemento 1, la primera ecuación del elemento 3, y la segunda ecuación del elemento 2:

$$\begin{aligned} (K_{21}^1 u_1^1 + K_{22}^1 u_2^1) + (K_{11}^3 u_1^3 + K_{12}^3 u_2^3) + (K_{21}^2 u_1^2 + K_{22}^2 u_2^2) \\ = f_2^1 + f_1^3 + f_2^2 + Q_2^1 + Q_1^3 + Q_2^2 \end{aligned} \quad (3.49)$$

Anotamos la siguiente correspondencia de los valores nodales local y global (ver fig. 3.8)

$$u_1^1 = U_1, \quad u_1^2 = U_2, \quad u_2^1 = u_1^3 = u_2^2 = U^3, \quad u_2^3 = U_4$$

De aquí (3.49) llega a ser:

$$\begin{aligned} K_{21}^1 U_1 + K_{21}^2 U_1 + (K_{22}^1 + K_{11}^3 + K_{22}^2) U_3 + K_{12}^3 U_4 = f_2^1 + f_1^3 + f_2^2 + Q_2^1 + Q_1^3 + Q_2^2 \\ = f_2^1 + f_1^3 + f_2^2 + 2P \end{aligned}$$

Las otras ecuaciones permanecen invariables, excepto para el renombre de las variables primarias. Las ecuaciones ensambladas son:

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & 0 & K_{12}^1 & 0 \\ 0 & K_{11}^2 & K_{12}^2 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{21}^2 & \hat{K} & K_{12}^3 \\ 0 & 0 & K_{21}^3 & K_{22}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^1 \\ f_1^2 \\ f_2^1 + f_1^3 + f_2^2 \\ f_2^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_1^1 \\ Q_1^2 \\ Q_2^1 + Q_1^3 + Q_2^2 \\ Q_2^3 \end{bmatrix} \quad (3.50) \quad \text{®}$$

Donde: $\hat{K} = K_{22}^1 + K_{11}^3 + K_{22}^2$

Los coeficientes de la matriz ensamblada pueden obtenerse directamente. Notamos que el coeficiente global K_{IJ} , es una propiedad física del sistema, relacionando el nodo global I al nodo global J . Para deformación axial de barras, K_{IJ} representa la fuerza requerida en el nodo I para inducir un desplazamiento unitario en el nodo J , mientras los desplazamientos en los demás nodos son cero. Por lo tanto, K_{IJ} es igual a la suma de

todos los K_e^e para los cuales i corresponde a I y j a J , e i y j son los nodos locales del elemento Ω^e . Por lo tanto, si tenemos una correspondencia entre los números de nodos del elemento y el número de nodos global entonces los coeficientes global ensamblados pueden escribirse en términos de los coeficientes del elemento. La correspondencia se puede expresar mediante una matriz $[B]$, llamada la matriz de conectividad, cuyo coeficiente b_{ij} tiene el siguiente significado:

b_{ij} es el número de nodo global correspondiente al j -ésimo nodo del elemento i .

Por ejemplo, para la estructura de la fig. 3.8, la matriz $[B]$ es de orden 3×2 (3 elementos y 2 nodos por elemento).

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Este arreglo puede usarse en una variedad de formas, no solo para ensamble, sino también en la implementación de la computadora en cálculos de elemento finito. La matriz $[B]$ se usa para ensamblar matrices coeficientes como sigue:

$$K_{11}^1 = K_{11},$$

Debido a que el nodo local 1 del elemento 1 corresponde al nodo global 1.

$$K_{12}^1 = K_{13},$$

Debido a que los nodos locales 1 y 2 del elemento 1 corresponde a los nodos globales 1 y 3 respectivamente

Y así sucesivamente. Cuando se conecta más de un elemento a un nodo global, los coeficientes del elemento son sumados. Por ejemplo, el nodo global 3 aparece en las tres hileras (elementos) de la matriz $[B]$, implicando que los tres elementos están conectados en el nodo 3. Más específicamente, esto indica que el nodo 2 del elemento 1, nodo 2 del elemento 2, y el nodo 1 del elemento 3 son los mismos que el nodo global 3. De aquí

$$K_{22}^1 + K_{22}^2 + K_{11}^3 = K_{33}$$

Para la malla de la figura 3.8 tenemos:

$$K_{23} = K_{12}^2,$$

Debido a que el nodo global 2 es el mismo que el nodo 1 y el nodo global 3 es el mismo que el nodo 2 del elemento 2.

$$K_{24} = 0,$$

Debido a que los nodos globales 2 y 4 no pertenecen al mismo elemento.

$$K_{33} = K_{22}^1 + K_{22}^2 + K_{11}^3$$

y así sucesivamente.

IMPOSICION DE CONDICIONES FRONTERA.

Hasta este punto, la naturaleza específica del problema no ha sido utilizada en el desarrollo del modelo del elemento finito o en el ensamble de elementos finitos. En otras palabras, las discusiones en las secciones anteriores, es válida para cualquier ecuación diferencial que sea un caso especial de la ecuación del modelo (3.1). Un problema particular difiere de otros, en la especificación de los datos y condiciones frontera. Aquí discutimos como imponer las condiciones frontera de un problema, sobre la serie ensamblada de ecuaciones algebraicas. Sobre esto último. Usamos el problema en la figura 3.8. Sus condiciones de frontera son evidentes en la estructura. Los grados de libertad primarios conocidos (desplazamientos) son:

$$u_1^1 = U_1 = 0, \quad u_1^2 = U_2 = 0, \quad u_2^3 = U_4 = 0, \quad (3.51a)$$

Los grados de libertad secundarios conocidos (fuerzas) son:

$$Q_2^1 = Q_2^2 = Q_1^3 = 2P \quad (3.51b)$$

Las fuerzas Q_2^1, Q_2^2 y Q_1^3 son desconocidas (fuerzas de reacción) y pueden determinarse en la postcomputación, es decir, después de que se determinen los grados de libertad primarios.

Imponiendo las condiciones frontera (3.51) sobre el sistema ensamblado de las ecuaciones (3.50), y para f_i^e :

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & 0 & K_{12}^1 & 0 \\ 0 & K_{11}^2 & K_{12}^2 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{21}^2 & K_{22}^1 + K_{22}^2 + K_{12}^3 & K_{12}^3 \\ 0 & 0 & K_{21}^3 & K_{22}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 = 0 \\ U_2 = 0 \\ U_3 \\ U_4 = 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1^1 \\ Q_1^2 \\ 2P \\ Q_2^3 \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

debido a que U_1, U_2 y U_4 son cero

Esto contiene cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas: U_3, Q_1^1, Q_1^2 y Q_2^3 .

SOLUCION DE ECUACIONES

Como un procedimiento estándar en el análisis del elemento finito, los grados de libertad primarios desconocidos, son determinados considerando primero, que las ecuaciones algebraicas corresponden a las variables primarias desconocidas. Por lo tanto, en el caso presente, consideramos la tercera ecuación en (3.52) para resolver U_3 .

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$K_{21}^1 U_1 + K_{21}^2 U_2 + (K_{22}^1 + K_{22}^2 + K_{11}^3) U_3 + K_{12}^3 U_4 = 2P$$

ó

$$(K_{22}^1 + K_{22}^2 + K_{11}^3) U_3 = 2P - (K_{21}^1 U_1 + K_{21}^2 U_2)$$

Las variables secundarias desconocidas, se determinan considerando las ecuaciones restantes de (3.52), esto es, aquellas que contienen las variables secundarias desconocidas.

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & 0 & K_{12}^1 & 0 \\ 0 & K_{11}^2 & K_{12}^2 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{21}^2 & K_{22}^1 + K_{22}^2 + K_{12}^3 & K_{12}^3 \\ 0 & 0 & K_{21}^3 & K_{22}^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 = 0 \\ U_2 = 0 \\ U_3 \\ U_4 = 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1^1 \\ Q_1^2 \\ 2P \\ Q_2^3 \end{Bmatrix} \quad (3.52)$$

debido a que U_1, U_2 y U_4 son cero

Es posible, aunque no común con programa de computadora, mover todas las incógnitas al lado izquierdo en (3.52) y resolver para toda a la vez. Sin embargo este proceso requiere mas tiempo computacional en problemas prácticos.

En general, las ecuaciones del elemento finito ensambladas se pueden repartir convenientemente en la forma siguiente:

$$\begin{bmatrix} [K^{11}] & [K^{12}] \\ [K^{21}] & [K^{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U^1\} \\ \{U^2\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F^1\} \\ \{F^2\} \end{Bmatrix} \quad (3.55)$$

donde $\{U^1\}$ es la columna de variables primarias conocidas, $\{U^2\}$ es la columna de variables primarias desconocidas, $\{F^1\}$ es la columna de variables secundarias desconocidas, y $\{F^2\}$ es la columna de variables secundarias conocidas. Escribiendo (3.55) como dos ecuaciones matriz obtenemos:

$$[K^{11}]\{U^1\} + [K^{12}]\{U^2\} = \{F^1\} \quad (3.56a)$$

$$[K^{21}]\{U^1\} + [K^{22}]\{U^2\} = \{F^2\} \quad (3.56b)$$

De (3.56b), tenemos:

$$\boxed{\{U^2\} = [K^{22}]^{-1}(\{F^2\} - [K^{21}]\{U^1\})} \quad (3.56c)$$

Una vez que $\{U^2\}$ se conoce, $\{F^1\}$ puede calcularse de (3.56a).

POSTPROCESAMIENTO DE LA SOLUCION

La solución de las ecuaciones del elemento finito da los valores nodales de las incógnitas primarias (esto es, desplazamiento, velocidad o temperatura). El postprocesamiento de los resultados incluye uno o más de lo siguiente:

1. El calculo de cualquier variable secundaria (el gradiente de la solución).
2. Interpretación de los resultados para checar si tiene sentido la solución (una comprensión de los procesos físicos y la experiencia son las guías cuando no hay disponibles otras soluciones para comparación).

3. Tabular y/o graficar la presentación de resultados. Para determinar la solución u como una función continua de posición x , regresamos a la aproximación (3.29) sobre cada elemento:

$$u(x) \approx \begin{cases} U^1(x) = \sum_{j=1}^n u_j^1 \psi_j^1(x) \\ U^2(x) = \sum_{j=1}^n u_j^2 \psi_j^2(x) \\ \vdots \\ U^N(x) = \sum_{j=1}^n u_j^N \psi_j^N(x) \end{cases}$$

donde N es el número de elemento en la malla. Dependiendo del valor x , se usa la ecuación de elemento correspondiente de (3.57). La derivada de la solución se obtiene por diferenciación de (3.57)

$$\frac{du}{dx} \approx \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n u_j^1 \frac{d\psi_j^1}{dx} \\ \sum_{j=1}^n u_j^2 \frac{d\psi_j^2}{dx} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n u_j^N \frac{d\psi_j^N}{dx} \end{array} \right. \quad (3.58)$$

Notar que la derivada $\frac{dU^e}{dx}$ de la solución del elemento finito lineal U^e es constante dentro de cada elemento, y es discontinua en los nodos debido a que la continuidad de la derivada de la solución del elemento finito en los nodos de conexión no es impuesta:

$$\frac{dU^e}{dx} \neq \frac{dU^{e-1}}{dx}$$

La derivada calculada para diferentes elementos que se encuentran en un nodo es siempre discontinua en todas las aproximaciones C^0 (esto es aproximaciones en que solo los valores función son interpolados), a menos que la solución aproximada, coincida con la solución real.

Las variables secundarias Q_j^e pueden calcularse de dos formas diferentes. En (3.54b), determinamos las variables secundarias desconocidas, Q_1^1, Q_1^2 y Q_2^3 de las ecuaciones ensambladas del problema en la fig. 3.8 ya que las ecuaciones ensambladas a menudo representan las relaciones equilibrio de un sistema, las Q_i^e de ellas serán representadas por $(Q_i^e)_{equil}$

Las Q_i^e pueden determinarse también usando las definiciones en (3.7), reemplazando u con U . Representaríamos Q_i^e calculado de ésta forma por $(Q_i^e)_{def}$. Ya que $(Q_i^e)_{def}$ se calculan usando la aproximada U^e , no son tan exactas como $(Q_i^e)_{equil}$. Sin embargo, en códigos de computadora del elemento finito, $(Q_i^e)_{def}$ se calculan en vez de $(Q_i^e)_{equil}$. Esto se debe principalmente a aspectos computacionales.

Recordar que, al llegar a resultado (3.54b), usamos parte de la matriz coeficiente ensamblada. En la solución numérica de ecuaciones algebraicas simultáneas en una computadora, la matriz coeficiente ensamblada original se modifica con frecuencia, y por lo tanto los coeficientes requeridos para la determinación de las variables secundarias no están disponibles, a menos que sean asegurados en un arreglo adicional.

Para el problema en la fig. 3.8. Tenemos:

$$(Q_1^1)_{def} = -\left(EA \frac{dU}{dx}\right)\Big|_{x=0} = -EA \frac{U_3 - U_1}{h_1} = -\frac{EA}{h_1} U_3 = K_{12}^1 U_3$$

$$(Q_1^2)_{def} = -\left(EA \frac{dU}{dx}\right)\Big|_{x=0} = K_{12}^3 U_3$$

$$(Q_2^3)_{def} = \left(EA \frac{dU}{dx}\right)\Big|_{x=h_1+h_2} = EA \frac{U_4 - U_3}{h_3} \quad (3.59)$$

$$= -\frac{EAU_3}{h_3} = K_{21}^3 U_3$$

donde h_1 y h_2 son las longitudes de los elementos 1 y 3, respectivamente. Las Q_i calculados usando las definiciones (3.7) son los mismos que los derivados de las ecuaciones ensambladas en general para el problema en la fig. 3.8. Esta igualdad no es esperada en general. De hecho, cuando el vector fuente q no es cero, la variables secundarias calculadas de las definiciones (3.7) estarán en error comparadas con las calculadas de las ecuaciones ensambladas. El error decrece conforme el número de elementos del grado de interpolación se incrementa.

Esto completa los pasos básicos involucrados en el análisis del elemento finito de la ecuación modelo (3.1).

COMENTARIOS SOBRE LOS PASOS DESCRITOS PARA EL MODELO DE ECUACION

Comentario 1. Aunque el método Rayleigh-Ritz se usó para obtener las ecuaciones del elemento, cualquier otro método podría usarse. Tal como el residuo ponderado, (cuadrado mínimo o Galerkin).

Comentario 2. Los pasos 1-6 (ver tabla 3.1) son comunes para cualquier problema. La derivación de las funciones interpolación dependen solamente de la geometría del elemento, y el número y posición de nodos en el elemento. El número de nodos en el elemento y el grado de aproximación usado están relacionados.

Comentario 3. Las ecuaciones del elemento finito (3.31) son derivadas para la ecuación lineal del operador:

$$A(u) = q, \text{ donde } A = -\frac{d}{dx} \left(a \frac{d}{dx} \right) + c$$

Son válidas para cualquier problema físico que se describe por la ecuación $A(u) = q$ o sus casos especiales. Uno necesita solamente interpretar las cantidades apropiadamente. En la tabla 3.2 se enlistan ejemplos de problemas descritos por este operador. Por tanto, un programa de computadora escrito para el análisis del elemento finito de (3.1) puede usarse para analizar cualquiera de los problemas de esta tabla.

Notar también que los datos $a = a(x), c = c(x), q = q(x)$ pueden ser diferentes en cada elemento.

Comentario 4. La integración de las matrices elemento en (3.31c) puede llevarse a cabo en una computadora, usando integración numérica. Cuando esas integrales son complicadas algebraicamente, no tiene una otra selección, más que la integración numérica.

Comentario 5. Como se notó en (3.48) y (3.51b), las fuentes punto en los nodos, están incluidas en el modelo del elemento finito vía el balance de fuentes en los nodos. Por tanto, en la construcción de las mallas de elemento finito, uno incluiría nodos en los lugares de las fuentes punto. Si una fuente punto no ocurre en un nodo, es posible distribuirla a los nodos elemento. Haga que Q_0 represente una fuente punto en el punto $x_0, x_A \leq x_0 \leq x_B$. La fuente punto Q_0 puede ser representada como una función mediante

$$q(x) = Q_0 \delta(x - x_0)$$

donde la función delta Dirac $\delta(\cdot)$ está definida por:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = F(x_0)$$

La contribución de la función $q(x)$ a los nodos del elemento $\Omega^e = (x_A, x_B)$ se calcula de

[ver(3.31c)]

$$f_i^e = \int_{x_A}^{x_B} q(x) \psi_i^e(x) dx = \int_{x_A}^{x_B} Q_0 \delta(x - x_0) \psi_i^e(x) dx = Q_0 \psi_i^e(x_0) \quad (3.60)$$

donde ψ_i^e son las funciones interpolación del elemento Ω^e . Por tanto, la fuente punto Q_0 es distribuida al nodo i de elemento mediante el valor $Q_0 \psi_i^e(x_0)$. La ecuación (3.60) cumple para cualquier elemento sin tomar en cuenta el grado de la interpolación, la naturaleza de la interpolación (polinomios **Lagrange** o **Hermite**), o la dimensión (1-D, 2-D ó 3-D) del elemento. Para funciones interpolación **Lagrange** en 1-D, (3.60) produce

$$f_1^e = Q_0 \frac{x_B - x_0}{h_e} = \alpha Q_0, \quad f_2^e = Q_0 \frac{x_B - x_0}{h_e} = \alpha Q_0$$

donde $\alpha = (x_B - x_0)/h_e$ es la razón de la distancia entre el nodo 2 y la fuente, a la longitud del elemento.

Comentario 6 Hay tres fuentes de error que pueden contribuir a la inexactitud de la solución de elemento finito de un problema:

1. Error en la aproximación del dominio, el cual se debe a la aproximación del dominio.
2. Errores computacionales, los cuales deben a la evaluación inexacta de los coeficientes K_y^e y f_i^e ó se introducen obligadamente a la aritmética finita en una computadora.
3. Error de aproximación, debido a la aproximación de la solución mediante polinomios de piezas discretas.

Una vez que la geometría del problema es representada exactamente, la aproximación lineal es capaz de representar la solución exacta en los nodos (para $a=EA=constante, c=0, f=0$). El primero y tercer tipo de errores son cero en el problema de la figura 3.8. El único error que puede introducirse en el resultado numérico final es posible debido a la evaluación por computadora de los coeficientes K_y^e y f_i^e y la solución de ecuaciones algebraicas.

Comentario 7. La aproximación usada en métodos matriciales de análisis estructural para resolver el problema en la fig 3.8, no es muy diferente el presentado aquí. La diferencia consiste en la derivación de las ecuaciones elemento (3.37a). En los métodos matriciales de análisis estructural, las ecuaciones elemento se obtienen directamente de las definiciones de esfuerzo y deformación y sus relaciones. Por ejemplo, considere el diagrama de cuerpo libre de un elemento barra (ver fig 3.2b). De un curso de cuerpos deformables tenemos :

fuerza=esfuerzo X área de la sección transversal

esfuerzo= módulo de Young's X deformación

deformación=elongación/longitud original

La deformación, es la deformación promedio (o de Ingeniería). Matemáticamente, la deformación se define como $\varepsilon = du/dx$, siendo u el desplazamiento, que incluye movimiento de cuerpo rígido tal como la elongación en una barra. De aquí, la fuerza en el extremo izquierdo del elemento barra es:

$$P_1^e = A^e \sigma_1^e = A^e E^e \varepsilon_1^e = A^e E^e \frac{u_1^e - u_2^e}{h_e} = \frac{a_e}{h_e} (u_1^e - u_2^e)$$

donde σ es el esfuerzo y E es el módulo de Young's. Similarmente la fuerza en el extremo derecho es:

$$P_2^e = \frac{a_e}{h_e} (u_2^e - u_1^e)$$

En forma de matriz, esas relaciones pueden expresarse como:

$$\frac{a_e}{h_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1^e \\ P_2^e \end{Bmatrix} \quad (3.61)$$

La cual es la misma que (3.37a) con $P_i^e = Q_i^e + f_i^e$. Note que en la derivación de las ecuaciones de elemento hemos usado el conocimiento de la mecánica de materiales y la suposición de que la deformación es constante (o el desplazamiento es lineal) sobre

la longitud del elemento. Las ecuaciones del tipo (3.61) pueden también obtenerse para un elemento resorte, un elemento flujo en un tubo, un elemento resistencia eléctrica y así sucesivamente. Si se requiere una representación de mayor orden de la deformación (o desplazamiento) no podemos escribir directamente las relaciones fuerza-desplazamiento (3.61). Debemos usar el principio de desplazamiento virtual, equivalente a la forma débil de la ecuación que rige.

Comentario 8 : Otra interpretación de (3.37) puede darse en términos de la aproximación de diferencia finita. En cualquier punto, x está dada por:

$P(x) = EA \frac{du}{dx}$. Usando la aproximación diferencia, aproximamos $\frac{du}{dx}$ y escribimos:

$$-P_1^e \equiv P(x)|_{x_e} = E^e A^e \left[u(x_{e-1}) - u(x_e) \right] / h_e \quad (3.62^a)$$

$$P_2^e \equiv P(x)|_{x_{e+1}} = E^e A^e \left[u(x_{e+1}) - u(x_e) \right] / h_e \quad (3.62^b)$$

Las cuales son las mismas como en (3.61), con $u_1^e = u(x_e)$ y $u_2^e = u(x_{e+1})$. A menudo se usa la interpolación lineal para obtener el valor de u en un punto diferente a los nodos (o puntos malla)

Comentario 9. Para el modelo del problema considerado las matrices de elemento $[K^e]$ en (3.31b) son simétricas: $K_{ij}^e = K_{ji}^e$. Esto le facilita a uno calcular $K_{ij}^e (i = 1, 2, \dots, n)$ para $j \leq i$ solamente. En otras palabras, uno necesita calcular solamente los términos diagonal y los términos diagonal superior o inferior. Debido a la simetría de las matrices elemento, la matriz global ensamblada también será simétrica. Por tanto, necesita uno almacenar solamente el triángulo superior, incluyendo la diagonal de la matriz ensamblada en un programa de elemento finito. Otra característica propia del método del elemento finito es el esparcimiento de la matriz ensamblada. Ya que $K_{ij} = 0$ si los nodos globales no pertenecen al mismo elemento, en la matriz coeficiente global todos los coeficientes mas allá de una cierta distancia de la diagonal son cero (matriz bandeada). el máximo distancia entre el elemento diagonal, incluyendo el mas reciente de una hilera y el último coeficiente no cero en esa hilera se llama el ancho medio de banda y se puede calcular con la ecuación

$$\text{ancho de banda medio} = \max(|b_{11} - b_{in}| + 1) \times NDF$$

donde E es el número de elementos en la malla, NDF es el número de grados de libertad por nodo, n es el número de nodos por elemento y b_{ij} son los coeficiente de la matriz conectividad. Una matriz es bandeada y simétrica, necesita uno almacenar solamente las entradas en la banda superior o inferior de la matriz.

La simetría de la matriz coeficiente depende del tipo de ecuación diferencial, su forma variacional, y el número de ecuaciones del elemento finito. El esparcimiento de la matriz es el resultado de las funciones interpolación del elemento finito que tienen valores no cero solamente sobre un elemento del dominio.

Comentario 10. El balance (ó equilibrio) de las variables secundarias (o fuerzas) Q_i^e en las fronteras del inter elemeto se expresa por (3.41b). Estas sumatorias imponen la condición de que la variable secundaria $a \frac{du}{dx}$ en el nodo, donde u es la solución real, sea continua. Sin embargo, esto no implica continuidad de $a \frac{dU^e}{dx}$, donde U^e es la solución del elemento finito. Por tanto en general, tenemos:

$$Q_2^e + Q_1^{e+1} = 0 \text{ o } Q_0 \quad (3.63a)$$

pero :

$$\left(a \frac{dU^e}{dx} \right)_{x_r} + \left(-a \frac{dU^{e+1}}{dx} \right)_{x_r} \neq 0 \text{ o } Q_0 \quad (3.63b)$$

Nota: en la mayoría de los libros del método de elemento finito, este punto no está claro para el lector. Esos libros consideran la forma cuadrática (3.11) del problema total y omiten la suma de las contribuciones inter elemento (para elementos lineales)

$$\sum_{e=1}^N \left(\sum_{i=1}^2 Q_i^e u_i^e \right) \quad (i)$$

en la forma cuadrática del problema. Sin embargo estas sumatorias imponen condiciones de equilibrio de la forma (3.63a). Cuando se especifica que la variable secundaria no es cero (digamos Q_0) en una frontera inter elemento (digamos en el nodo global 2), tenemos

$$Q_2^1 + Q_1^2 = Q_0 \quad (ii)$$

En otros libros, Q_0 se incluye en la funcional como $Q_0 U_2$, donde U_2 es el valor de u en el nodo global 2.

La forma variacional de la ec. (3.1) sobre el dominio entero (cuando $c = 0$), está dada por:

$$0 = \int_0^L \left(a \frac{dv}{dx} \frac{du}{dx} - vq \right) dx - v(x_2) Q_0 \quad (iii)$$

Cuando u es aproximada mediante funciones que se definen para un intervalo local (que es el caso del método del elemento finito), el uso de la forma variacional implica la omisión de la suma de las contribuciones inter elemento de (i).

Ya que ψ_i^e ($R = 1, 2, 3$) es cero en cualquier elemento Ω^f , para $e \neq f$ (ver fig.3.3b), la solución de elemento finito (global), para el dominio entero está dada por:

$$U_e(x) = \sum_{e=1}^3 \left(\sum_{i=1}^2 u_i^e \psi_i^e \right) \equiv \sum_{I=1}^4 U_I \Phi_I(x) \quad (iv)$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
donde $\Phi_I(x)$ ($I = 1, 2, 3, 4$) son las funciones de interpolación global continuas: ®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$\Phi_I(x) = \begin{cases} \psi_2^{(I-1)}(x) & \text{para } x_{I-1} \leq x \leq x_I \\ \psi_1^I(x) & \text{para } x_I \leq x \leq x_{I+1} \end{cases} \quad (v)$$

Sustituyendo (iv) para u y $v = \Phi_I$ en (iii), obtenemos:

$$0 = \int_0^L a \frac{d\Phi_I}{dx} \left(\sum_{j=1}^4 U_j \frac{d\Phi_j}{dx} - \Phi_I q \right) dx - \Phi_I(x_2) Q_0 \quad (\text{vi})$$

ya que ϕ_I es diferente de cero solo entre x_{I+1} y x_{I-1} , las integrales son:

$$0 = \int_{x_{I-1}}^{x_{I+1}} \left[a \frac{d\Phi_I}{dx} \left(U_{I-1} \frac{d\Phi_{I-1}}{dx} + U_I \frac{d\Phi_I}{dx} + U_{I+1} \frac{d\Phi_{I+1}}{dx} \right) - \Phi_I q \right] dx - \Phi_I(x_2) Q_0 \quad (\text{vii})$$

y tenemos (para una malla de tres elementos):

$$I=1 \quad 0 = \int_{x_1=0}^{x_2} \left[a \frac{d\Phi_1}{dx} \left(U_1 \frac{d\Phi_1}{dx} + U_2 \frac{d\Phi_2}{dx} \right) - \Phi_1 q \right] dx - \Phi_1(x_2) Q_0$$

$$I=2 \quad 0 = \int_{x_1=0}^{x_3} \left[a \frac{d\Phi_2}{dx} \left(U_1 \frac{d\Phi_1}{dx} + U_2 \frac{d\Phi_2}{dx} + U_3 \frac{d\Phi_3}{dx} \right) - \Phi_2 q \right] dx - \Phi_2(x_2) Q_0$$

$$I=3 \quad 0 = \int_{x_2}^{x_4=L} \left[a \frac{d\Phi_3}{dx} \left(U_2 \frac{d\Phi_2}{dx} + U_3 \frac{d\Phi_3}{dx} + U_4 \frac{d\Phi_4}{dx} \right) - \Phi_3 q \right] dx - \Phi_3(x_2) Q_0$$

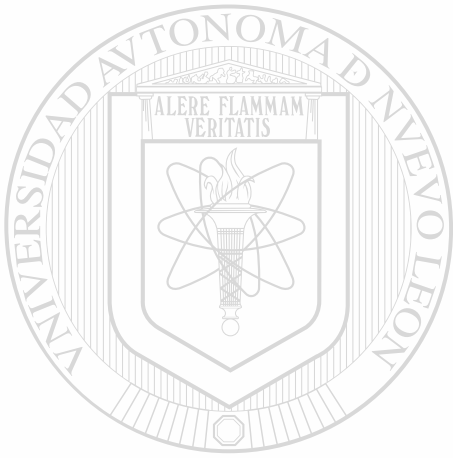
(viii)

$$I=4 \quad 0 = \int_{x_1}^{x_4=L} \left[\alpha \frac{d\Phi_4}{dx} \left(U_3 \frac{d\Phi_3}{dx} + U_4 \frac{d\Phi_4}{dx} \right) - \Phi_4 q \right] dx - \Phi_4(x_2) Q_0$$

Esas ecuaciones, llevando a cabo las integraciones, dan la (3.47) con la última columna en la posición reemplazada por:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ Q_0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(ix)



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

CAPITULO 4

ANALISIS DE ERROR DEL ELEMENTO FINITO

4.1. ERRORES DE APROXIMACIÓN

Los errores introducidos al interior de la solución de una ecuación diferencial dada pueden atribuirse a tres fuentes básicas.

1. Error de aproximación del dominio, debido a la aproximación del dominio.
2. Errores de cuadratura y aritmética finita, debidos a la evaluación numérica de integrales y al cálculo numérico en una computadora.
3. Error de aproximación, debido a la aproximación de la solución.

$$u \approx u_h \equiv \sum_{I=1}^N U_I \phi_I \quad (4.1)$$

donde U_I , representa el valor de u en el nodo global I , y ϕ_I representa la función interpolación global asociada con el nodo global I (ver Fig. 3.3b).

En los problemas de una dimensión discutidos, los dominios considerados han sido líneas rectas. Por lo tanto la aproximación del dominio no ha sido necesaria. En problemas de dos dimensiones que involucran dominios no rectangulares, errores de aproximación del dominio son introducidos en las soluciones del elemento finito. En general pueden interpretarse como errores en la especificación de los datos del problema debido a que resolvemos ahora la ecuación diferencial dada sobre un dominio

modificado. Como refinemos la malla, el dominio es representado más exactamente, y, por lo tanto, los errores de aproximación frontera se espera se aproximen a cero.

Cuando los cálculos del elemento finito se desarrollan en una computadora, errores redondeados en el cálculo de números y errores debido a la evaluación numérica de integrales son introducidos en la solución. En la mayoría de los problemas lineales con número pequeño razonablemente de grados de libertad totales en el sistema, esos errores se espera sean pequeños (o cero cuando solamente se desea exactitud en un punto decimal).

El error introducido en la solución del elemento finito U^e debido a la aproximación de la variable dependiente u en un elemento Ω^e es inherente a cualquier problema:

$$u \approx u_h = \sum_{e=1}^N \sum_{i=1}^n u_i^e \psi_i^e = \sum_{I=1}^M U_I \phi_I \quad (4.2)$$

Donde u_h es la solución de la solución del elemento finito sobre el dominio ($u_h = U^e$ en Ω^e), N es el número de elementos en la malla M es el número total de nodos globales, y n es el número de nodos en un elemento. Deseamos conocer como el error $E = u - u_h$ medido de manera significativa se comporta conforme se incrementa el

número de elementos en la malla. Se puede demostrar que el error aproximación es cero para ecuaciones simples de segundo orden y de cuarto orden con coeficientes constantes del elemento discreto [ver (4.30)-(4.35)]

4.2. DIVERSAS MEDIDAS DE ERRORES

Hay varias maneras de medir la “diferencia”(o distancia) entre dos funciones cualquiera u y u_h . El error de punto discreto es la diferencia de u y u_h en cada punto del dominio. Puede uno también definir la diferencia de u y u_h a ser el máximo de todos los valores absolutos de las diferencias de u y u_h en el dominio $\Omega = (a, b)$:

$$\|u - u_h\|_{\infty} \equiv \max_{a \leq x \leq b}$$

La medida de la diferencia se llama *la supmétrica*. Notar que la supmétrica es un número real, de todas formas, el error de punto discreto es una función y no califica como distancia o norma en sentido matemático. La norma de una función es un número real no negativo.

Más medidas usadas generalmente (o normas) de la diferencia de dos funciones son la norma de energía y la norma L_2 (pronunciada norma L-dos).

Para cualquier función integrable cuadrada u y u_h , definida sobre el dominio $\Omega = (a, b)$, las dos normas son definidas por:

$$\text{norma energía } \|u - u_h\|_m = \left(\int_a^b \sum_{i=0}^m \left| \frac{d^i u}{dx^i} - \frac{d^i u_h}{dx^i} \right|^2 dx \right)^{1/2} \quad (4.4)$$

$$\text{norma } L_2 \|u - u_h\|_0 = \left(\int_a^b |u - u_h|^2 dx \right)^{1/2} \quad (4.5)$$

Donde $2m$ es el orden de la ecuación diferencial a resolver. El término “norma energía” se usa para indicar que esta norma contiene derivadas del mismo orden que la funcional cuadrática (la cual, para la mayoría de los problemas en mecánica de sólidos, representa a la energía) asociada con la ecuación. En la Fig. 4.1 se ilustran diversas medidas de la distancia entre dos funciones. Estas definiciones pueden modificarse fácilmente para dominios en dos dimensiones.

4.3 CONVERGENCIA DE LA SOLUCIÓN

La solución del elemento finito u_h en (4.1) se dice que converge en la norma energía a la solución verdadera u si:

$$\|u - u_h\| \leq ch^p \quad \text{para } p > 0$$

Donde c es una constante independiente de u y u_h , h es la longitud característica de un elemento. La constante p es llamada la razón de convergencia. Notar que la convergencia depende tanto de h como de p ; p depende del orden de la derivada de u [ver 4.15 abajo]. Por lo tanto, el error en la aproximación puede reducirse, ya sea

reduciendo el tamaño de los elementos, o incrementando el grado de aproximación. La convergencia de las soluciones del elemento finito con los refinamientos de la malla (esto es, se usan más de la misma clase de elementos) es el término convergencia $-h$. La convergencia con el incremento en el grado de polinomios es llamada convergencia $-p$.

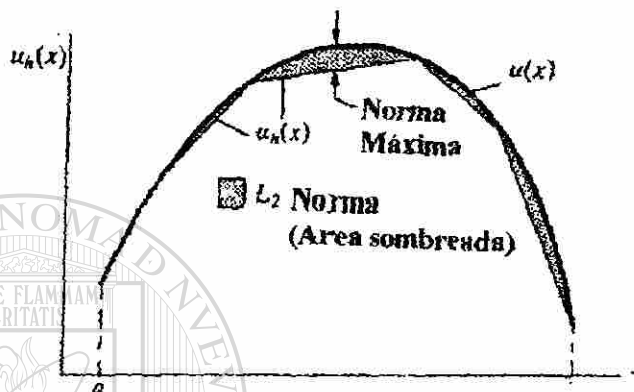


Figura 4.1 Diferentes medidas de error, $E = u - u_h$, entre la solución exacta u y la solución del elemento finito u_h , se ilustran la norma máxima y la norma L_2 .

4.4 EXACTITUD DE LA SOLUCIÓN

Regresando a la cuestión de estimar el error de aproximación, consideremos una ecuación diferencial del orden $2m$ ésimo en una dimensión ($m=1$, ecuaciones de segundo orden, $m=2$ ecuaciones de cuarto orden):

$$\sum_{i=1}^m (-1)^i \frac{d^i u}{dx^i} \left(a_i \frac{d^i u}{dx^i} \right) = f \quad \text{for } 0 < x < L \quad (4.7)$$

Donde los coeficientes $a_1(x)$ y $a_2(x)$, se supone que son positivos. Suponga que las condiciones de frontera esencial del problema son:

$$u(0) = u(L) = 0 \quad (m = 1, 2) \quad (4.8)$$

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=0} = \left(\frac{du}{dx}\right)_{x=L} = 0 \quad (m=2) \quad (4.9)$$

La formulación variacional de (4.7) y (2.9) esta dada por:

$$0 = \int_0^L \left(\sum_{i=1}^m a_i \frac{d^i v}{dx^i} \frac{d^i u}{dx^i} - vf \right) dx \quad (4.10)$$

La función cuadrática correspondiente a la forma variacional es:

$$I(u) = \int_0^L \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^m a_i \left(\frac{d^i u}{dx^i} \right)^2 \right] dx - \int_0^L uf dx \quad (4.11)$$

Ahora considere una discretización del dominio del elemento finito mediante N elementos de igual longitud h . Si u_h representa a la solución del elemento finito en (4.1) tenemos, de (4.11)

$$I(u_h) = \int_0^L \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^m a_i \left(\frac{d^i u_h}{dx^i} \right)^2 \right] dx - \int_0^L u_h f dx \quad (4.12)$$

En los párrafos siguientes, demostramos que en la energía I asociada con la solución del elemento finito se aproxima a la energía verdadera de arriba, y nosotros damos entonces un error estimado. Confinamos nuestra discusión, por razón de simplicidad a la ecuación de segundo orden ($m=1$).

De (4.11) y (4.12) y

$$f = -\frac{d}{dx} \left(a_1 \frac{du}{dx} \right)$$

tenemos:

$$\begin{aligned}
I(u_h) - I(u) &= \int_0^L \frac{1}{2} \left[a_1 \left(\frac{du_h}{dx} \right)^2 - a_1 \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + 2f(u - u_h) \right] dx \\
&= \int_0^L \left[\frac{a_1}{2} \left(\frac{du_h}{dx} \right)^2 - \frac{a_1}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 - \frac{d}{dx} \left(a_1 \frac{du}{dx} \right) (u - u_h) \right] dx \\
&= \int_0^L \left\{ \frac{a_1}{2} \left[\left(\frac{du_h}{dx} \right)^2 - \left(\frac{du}{dx} \right)^2 \right] + a_1 \frac{du}{dx} \frac{d}{dx} (u - u_h) \right\} dx \\
&= \int_0^L \frac{a_1}{2} \left[\left(\frac{du_h}{dx} \right)^2 + \left(\frac{du}{dx} \right)^2 - 2 \frac{du}{dx} \frac{d}{dx} \right] dx \\
&= \int_0^L \frac{a_1}{2} \left(\frac{du_h}{dx} - \frac{du}{dx} \right)^2 dx \geq 0
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Por lo tanto:

$$I(u_h) \geq I(u) \tag{4.14}$$

La igualdad se mantiene solo para $u = u_h$. La ecuación (4.14) implica que la convergencia de la energía de la solución del elemento finito a la energía verdadera, es desde arriba. Ya que la relación en (4.14) se mantiene para cualquier u_h , la no igualdad

también indica que la solución verdadera u minimiza la energía. Una relación similar se puede establecer para la ecuación de cuarto orden ($m = 2$).

Ahora, suponga que las funciones interpolación del elemento finito Φ_I , ($I = 1, 2, \dots, M$) son polinomios completos de grado K . Entonces el error en la norma energía puede mostrarse para que satisfaga la no igualdad.

$$e_m \equiv |u - u_h|_m \leq ch^p, \quad p = k + 1 - m > 0 \tag{4.15}$$

Donde c es una constante. Esta estimación implica que el error tiende a cero como la p ésima potencia de h como h es disminuida (o el número de elementos es incrementado). En otras palabras, el logaritmo del error en la norma energía tiende a cero en la relación de $k + 1 - m$; el error en la norma L_2 disminuirá en consecuencia

mas rápidamente en la relación $k + 1$; esto es, las derivadas convergen mas lentamente que la relación por sí sola.

Errores estimados del tipo (4.15), son muy usados porque da una idea de la exactitud de la solución aproximada, conozcamos o no la solución verdadera. Mientras el estimado da una idea, de cómo rápidamente la solución del elemento finito converge a la solución verdadera m cuando se refine la malla.

Esta decisión corresponde a los analistas, porque sólo ellos saben la tolerancia razonable para los problemas que se estén resolviendo.

Como un ejemplo de estimación del error en la aproximación, (4.15), considere el elemento lineal (dos nodos) para una ecuación de segundo orden ($m = 1$).

Tenemos para un elemento:

$$u_h = u_1(1-s) + u_2s \quad (4.16)$$

Donde $s = \frac{x}{h}$ y x es la coordenada local. Ya que u_2 puede verse como una función de u_1 vía (4.16) puede uno expandir u_2 en una serie de Taylor alrededor del nodo 1 para obtener.

$$u_2 = u_1 + u_1' + \frac{1}{2}u_1'' + \dots \quad (4.17)$$

Donde $u' = \frac{du}{ds}$. Sustituyendo esto en (4.16) obtenemos:

$$u_h = u_1 + u_1's + \frac{1}{2}u_1'' + \dots \quad (4.18)$$

Expandiendo la solución verdadera en una serie Taylor, alrededor del nodo 1, obtenemos

$$u = u_1 + u_1's + \frac{1}{2}u_1'' + \dots \quad (4.19)$$

Por lo tanto, tenemos de (4.18) y (4.19)

$$|u_h - u| \leq \frac{1}{2} (s - s^2) \max_{0 \leq s \leq 1} \left| \frac{d^2 u}{ds^2} \right| = \frac{1}{2} (s - s^2) h^2 \max_{0 \leq s \leq h} \left| \frac{d^2 u}{dx^2} \right| \quad (4.20)$$

$$\left| \frac{d}{dx} (u_h - u) \right| \leq \frac{1}{2} h \max_{0 \leq x \leq h} \left| \frac{d^2 u}{dx^2} \right| \quad (4.21)$$

Estas conducen a:

$$|u - u_h|_0 \leq c_1 h^2, \quad |u - u_h|_1 \leq c_2 h \quad (4.22)$$

Donde las constantes c_1 y c_2 dependen únicamente de la longitud L del dominio.

Ejemplo 4.1

Consideramos aquí, un ejemplo computacional para verificar el error estimado en (4.22). Considere la ecuación diferencial:

$$-\frac{d^2 u}{dx^2} = 2 \quad \text{for } 0 < x < 1 \quad (4.23)$$

Con:

$$u(0) = u(1) = 0$$

la solución exacta es:

$$u(x) = x(1 - x) \quad (4.24)$$

Mientras las soluciones de elemento finito son para $N = 2$

$$u_h = \begin{cases} h^2(x/h) & \text{para } 0 \leq x \leq h \\ h^2(2-x/h) & \text{para } h \leq x \leq 2h \end{cases}$$

para $N = 3$

$$u_h = \begin{cases} 2h^2(x/h) & \text{para } 0 \leq x \leq h \\ 2h^2(2-x/h) + 2h^2(x/h-1) & \text{para } h \leq x \leq 2h \\ 2h^2(3-x/h) & \text{para } 2h \leq x \leq 3h \end{cases} \quad (4.25)$$

y para $N = 4$

$$u_h = \begin{cases} 3h^2(x/h) & \text{for } 0 \leq x \leq h \\ 3h^2(2-x/h) + 4h^2(x/h-1) & \text{for } h \leq x \leq 2h \\ 4h^2(3-x/h) + 3h^2(x/h-2) & \text{for } 2h \leq x \leq 3h \\ 3h^2(4-x/h) & \text{for } 3h \leq x \leq 4h \end{cases}$$

TABLA 4.1

El error L_2 y el error en la norma energía de la solución a (4.23) (Ejemplo 4.1)

h	$\log_{10} h$	$ e _0$	$\log_{10} e _0$	$ e _1$	$\log_{10} e _1$
1	-0.301	0.04564	-1.341	0.2887	-0.5396
$\frac{1}{2}$	-0.477	0.02028	-1.693	0.1925	-0.7157
$\frac{1}{3}$	-0.601	0.01141	-1.943	0.1443	-0.8406

Para el caso del elemento ($h = 0.5$) los errores están dados por:

$$\begin{aligned}
 \|u - u_h\|_0^2 &= \int_0^h (x - x^2 - hx)^2 dx + \int_h^{2h} (x - x^2 - 2h^2 + xh)^2 dx \\
 &= 0.002083 \\
 \left\| \frac{du}{dx} - \frac{du_h}{dx} \right\|_0^2 &= \int_0^h (1 - 2x - h)^2 dx + \int_h^{2h} (1 - 2x + h)^2 dx \\
 &= 0.08333
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

Cálculos similares pueden ser llevados a cabo para $N = 3$ y $N = 4$. La tabla 4.1 da los errores para $N = 2, 3$ y 4 .

Las gráficas de $\log e|_0$ y $\log e|_1$ contra $\log h$ demuestran (ver Fig. 4.1) que:

$$\log e|_0 = 2 \log h + \log c_1, \quad \log e|_1 = \log h + \log c_2 \tag{4.27}$$

En otras palabras, la razón de convergencia de la solución del elemento finito es 2 en la norma L_2 y 1 en la norma energía, verificando los estimados en (4.22).

Mucha de la discusión aquí presentada, se puede aplicar a elementos curvados y a elemento en dos dimensiones.

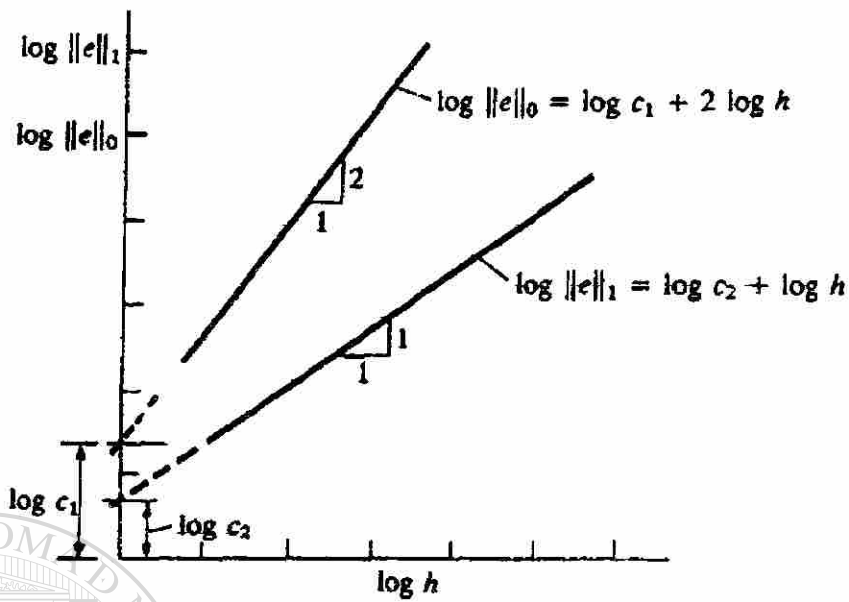


Fig. 4.2:

Gráficas de las normas energía y L_2 de errores contra el tamaño de la malla. La gráfica log-log da las razones de convergencia en las normas respectivas. Las razones de convergencia están dadas por las pendientes de las líneas. (las gráficas mostradas son para elemento lineales)

Cuando los elementos con lados no rectos, están involucrados, el error estimado también depende de la transformación Jacobiana. Debido a la naturaleza introductoria del estudio presente, estos tópicos no se discuten aquí.

Como se notó, en el caso de ecuaciones de segundo y cuarto orden con una simple incógnita y coeficientes constantes, el error entre la solución exacta y la solución de elemento finito en los nodos es cero. Esto no es accidental, podemos probar, que cuando los coeficientes a y b son constantes, las soluciones del elemento finito de las ecuaciones.

$$-\frac{d}{dx} \left(a \frac{du}{dx} \right) = f(x) \quad (4.28)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(b \frac{d^2u}{dx^2} \right) = f(x) \quad (4.29)$$

Coincide con las soluciones exactas en los nodos La prueba es presentada abajo para la ecuación de segundo orden.

Considere la ecuación:

$$-a \frac{d^2 u}{dx^2} = f \quad \text{para } 0 < x < L \quad (4.30)$$

$$\text{con } u(0) = 0, \quad u(L) = 0 \quad (4.31)$$

La solución de elemento finito global esta dada por ($U_1 = U_N = 0$)

$$u_h = \sum_{I=2}^{N-1} U_I \Phi_I \quad (4.32)$$

donde Φ_I son las funciones interpolación lineal global mostrada en la Fig. 3.3(b).

De la definición del problema variacional, tenemos:

$$\int_0^L \left(\frac{d\Phi_I}{dx} \frac{du_h}{dx} - \Phi_I \hat{f} \right) dx = 0 \quad \text{por hecho } I = 2, \dots, N-1 \quad (4.33)$$

Donde $\hat{f} = f_0$. La solución exacta también satisface esta evaluación. Sustrayendo la ecuación. Sustrayendo la ecuación de elemento finito (4.33) de la solución, exacta obtenemos :

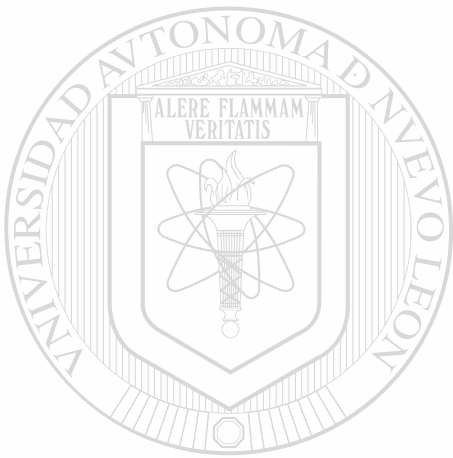
$$\int_0^L \left(\frac{du}{dx} - \frac{du_h}{dx} \right) \frac{d\Phi_I}{dx} dx = 0 \quad (I = 1, 2, \dots, N-1)$$

Ya que tenemos $\Phi_I = 0$ para $x \geq (I+1)h$ y $x \leq (I-1)h$, $d\Phi_I/dx = 1/h$ por $(I-1)h \leq x \leq Ih$ y $d\Phi_I/dx = -1/h$ por $Ih \leq x \leq (I+1)h - 1$ para $Ih \leq x \leq (I+1)h$, se sigue que:

ó

$$\frac{1}{h}(-\epsilon_{I-1} + 2\epsilon_I - \epsilon_{I+1}) = 0 \quad (I = 2, 3, \dots, N-1) \quad (4.35)$$

Donde $\epsilon_I = \epsilon(Ih)$ (esto es el valor ϵ en $x = Ih$). Ya que $\epsilon_0 = \epsilon_N = 0$ (debido a que u y u_h ambas satisfacen condiciones de frontera iniciales). Se sigue de las ecuaciones homogéneas de arriba que la solución es trivial; $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \dots = \epsilon_{N-1} = 0$. Esto implica que la solución del elemento finito coincide con la solución exacta en los nodos.



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

CAPITULO 5

SOLUCION A PROBLEMAS DE TRANSFERENCIA DE CALOR EN UNA DIMENSION APLICANDO EL METODO DEL ELEMENTO FINITO CON AUXILIO DE UN PROGRAMA DE COMPUTADORA

Problema 1: Considere un cilindro sólido largo de radio R_0 en el cual la energía se genera a razón constante q_0 ($W m^{-3}$). La superficie de frontera en $r = R_0$ se mantiene a temperatura constante T_0 . Deseamos calcular la distribución de temperatura $T(r)$ y el flujo de calor $Q(r) = -K dT/dr$ (o calor $Q = -AK dT/dr$).

La ecuación que gobierna para este problema está dada por:

$$-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (2\pi K r dT/dr) = 2\pi K q_0 \quad \text{con } q = q_0$$

Las condiciones frontera son:

$$T(R_0) = T_0, \quad (2\pi K r dT/dr)_{r=0} = 0$$

Las condiciones frontera de flujo cero en $r = 0$ es un resultado de la simetría radial en $r = 0$. Si el cilindro fuera hueco con radio interno R_1 , entonces la condición de frontera en $r = R_1$ puede ser temperatura especificada, flujo de calor especificado, o condición de frontera convección, dependiendo de la situación.

El modelo del elemento finito de la ecuación que gobierna esta dado en: $[K^e] \{u^e\} = \{f^e\} + \{Q^e\}$; para una altura unitaria del cilindro y $a = Kr$.

$$K_y = 2\pi \int_{r_A}^{r_B} a \frac{d\psi_i^e}{dr} \frac{d\psi_j^e}{dr} dr, \quad f_i^e = 2\pi \int_{r_A}^{r_B} \psi_i^e q_r dr$$

donde:

$$K_y = 2\pi \int_{r_A}^{r_B} Kr \frac{d\psi_i^e}{dr} \frac{d\psi_j^e}{dr} dr, \quad f_i^e = 2\pi \int_{r_A}^{r_B} \psi_i^e q_0 r dr$$

$$Q_1^e = -2\pi k \left(r \frac{dT}{dr} \right) \Big|_{r_A}, \quad Q_2^e = 2\pi k \left(r \frac{dT}{dr} \right) \Big|_{r_B}$$

y (r_A, r_B) son coordenadas del elemento $\Omega^e = (r_A, r_B)$. Para la selección de las funciones interpolación lineales ψ_i^e

$$\psi_1^e = (r_B - r)/h_e, \quad \psi_2^e = (r - r_A)/h_e$$

Las ecuaciones elemento para un elemento típico lineal son

$$\frac{2\pi k}{h_e} \frac{r_{e+1} + r_e}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1^e \\ T_2^e \end{Bmatrix} = 2\pi q_0 \frac{h_e}{6} \begin{Bmatrix} 2r_e + r_{e+1} \\ r_e + 2r_{e+1} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1^e \\ Q_2^e \end{Bmatrix}$$

Las ecuaciones elemento para elementos individuales son obtenidas de estas dando la longitud del elemento h_e y las coordenadas global de los nodos del elemento, $r_e = r_A$ y $r_{e+1} = r_B$.

Para la malla de un elemento lineal, tenemos $r_1 = 0$, $r_2 = h_e = R_0, \mu$

$$\pi k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \frac{\pi q_0 R_0}{3} \begin{Bmatrix} R_0 \\ 2R_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1^1 \\ Q_2^1 \end{Bmatrix}$$

Las condiciones frontera en este problema, implica $U_2 = T_0$ y $Q_1^1 = 0$. De aquí la temperatura en el nodo 1 (global) es

$$U_1 = q_0 R_0^2 / 3k + T_0$$

y el calor en $r = R_0$ es

$$Q_2^1 = \pi k (U_2 - U_1) - \frac{2}{3} \pi q_0 R_0^2 = -\pi q_0 R_0^2$$

El signo negativo indica que el calor es removido del cuerpo (debido a que $dT/dr < 0$). La solución de un elemento en función de la coordenada radial r es

$$T^1(r) = U_1 \psi_1^1(r) + U_2 \psi_2^1(r) = \frac{q_0 R_0^2}{3k} \left(1 - \frac{r}{R_0} \right) + T_0$$

El flujo de calor es

$$q(r) = -k \frac{dT^1}{dr} = \frac{1}{3} q_0 R_0$$

La solución exacta del problema puede obtenerse integrando

$$-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(2\pi k r \frac{dT}{dr} \right) = 2\pi q$$

y evaluando las constantes de integración con la ayuda de las condiciones frontera del problema.

$$T(r) = \frac{q_0 R_0^2}{4k} \left[1 - \left(\frac{r}{R_0} \right)^2 \right] + T_0$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

$$q(r) = \frac{1}{2} q_0 r \text{ (W m}^{-2}\text{)}, \quad Q(R_0) = - \left(2\pi k r \frac{dT}{dr} \right)_{R_0} = \pi q_0 R_0^2$$

Para una malla de dos elementos lineales, tomamos $h_1 = h_2 = \frac{1}{2} R_0$, $r_1 = 0$, $r_2 = h_1 = \frac{1}{2} R_0$, y $r_3 = h_1 + h_2 = R_0$. El ensamble de los dos elementos da

$$\pi k \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1+3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \frac{\pi q_0 R_0}{6} \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} R_0 \\ R_0 + 2R_0 \\ \frac{1}{2} R_0 + 2R_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1^1 \\ Q_2^1 + Q_1^2 \\ Q_2^2 \end{Bmatrix}$$

Imponiendo las condiciones frontera $U_3 = T_0$ y $Q_1^1 = 0$, las ecuaciones condensadas son

$$\pi k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \frac{\pi q_0 R_0^2}{12} \begin{Bmatrix} 1 \\ 6 \end{Bmatrix} + \pi k \begin{Bmatrix} 0 \\ 3T_0 \end{Bmatrix}$$

Su solución es:

$$U_1 = \frac{5}{18} \frac{q_0 R_0^2}{k} + T_0, \quad U_2 = \frac{7}{36} \frac{q_0 R_0^2}{k} + T_0$$

Del equilibrio, Q_2^2 se calcula como

$$Q_2^2 = -\frac{5}{12} \pi q_0 R_0^2 + 3\pi k (U_3 - U_2) = -\pi q_0 R_0^2$$

La solución del elemento finito llega a ser:

$$T_{fem}(r) = \begin{cases} U_1 \psi_1^1 + U_2 \psi_2^1 = \left(\frac{5}{8} \frac{q_0 R_0^2}{k} + T_0 \right) \frac{R_0 - 2r}{R_0} + \left(\frac{7}{36} \frac{q_0 R_0^2}{k} + T_0 \right) \frac{2\pi}{R_0} \\ U_2 \psi_1^2 + U_3 \psi_2^2 = \left(\frac{7}{36} \frac{q_0 R_0^2}{k} + T_0 \right) \frac{2(R_0 - r)}{R_0} + T_0 \frac{2\pi - R_0}{R_0} \end{cases}$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

$$= \begin{cases} \frac{q_0 R_0^2}{18k} \left(r - \frac{3r}{R_0} \right) + T_0 & \text{para } 0 \leq r \leq \frac{1}{2} R_0 \\ \frac{7}{18} \frac{q_0 R_0^2}{k} \left(1 - \frac{r}{R_0} \right) + T_0 & \text{para } \frac{1}{2} R_0 \leq r \leq R_0 \end{cases}$$

Notar que el flujo de calor se predice aproximadamente para ambos modelos de uno y dos elementos. La temperatura en el centro del cilindro de acuerdo a la solución exacta es $T(0) = q_0 R_0^2 / 4k + T_0$, $q_0 R_0^2 / 3k + T_0$ y $q_0 R_0^2 / 18k + T_0$ de acuerdo a modelos de uno y dos elementos respectivamente. Las soluciones del elemento finito obtenidas usando malla de uno, dos, cuarto y ocho elementos comparada con la solución exacta se puede observar en la tabla 5.1. La convergencia de las soluciones de elemento finito a la solución exacta con un incremento en el número de elementos es clara.

Tabla 5.1

Comparación de las soluciones elemento finito y exacta para transferencia de calor en un cilindro radialmente simétrico. ($R_0 = 0.01m, q_0 = 2 \times 10^8 Wm^{-3}, k = 20Wm^{-1}C^{-1}, T_0 = 100^\circ C$)

Temperatura $u(r)$					
	Un	Dos	Cuatro	Ocho	
r/R_0	elemento	elementos	Elementos	elementos	Exacto
0.000	433.33	377.78	358.73	352.63	350.00
0.125	391.67	356.24	348.31	347.42	349.09
0.250	350.00	335.11	337.90	335.27	334.38
0.375	308.33	315.28	313.59	315.48	314.84
0.500	266.67	294.44	289.29	287.95	287.50
0.625	255.00	245.83	249.70	252.65	252.34
0.750	183.33	197.22	210.12	209.56	209.38
0.875	141.67	148.61	155.06	158.68	158.59
1.000	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00

Solución del problema 1 con auxilio de un programa de computadora FEM1DV3.

TRANSFERENCIA DE CALOR EN UN CILINDRO SOLIDO RADIALMENTE SIMETRICO. La ecuación que gobierna en el problema está dada por:

$$-\frac{d}{dr} \left(2\pi k r \frac{dT}{dr} \right) = 2\pi q_0 \quad \text{para } 0 < r < R_0$$

$$\left(2\pi k r \frac{dT}{dr} \right)_{r=0} = 0, T(R_0) = T_0$$

Con $k = 20Wm^{-1}C^{-1}, q_0 = 2 \times 10^8 Wm^{-3}, T_0 = 100^\circ C$, y $R_0 = 0.01m$ tenemos MODEL=1, NTYPE=0, ITEM=0 (para solución estado estable), y los datos son continuos (ICONT=1) en el dominio para una malla de dos elementos cuadráticos (IELEM=2, NEM=2).

El dato es

$$\begin{aligned} a = 2\pi k r \rightarrow a_0 = 0 \quad a_1 = 2\pi k \quad b = 0 \rightarrow b_0 = 0.0 \quad b_1 = 0.0 \\ c = 0 \rightarrow c_0 = 0.0 \quad c_1 = 0.0 \quad f = 2\pi q_0 \rightarrow f_0 = 0.0, f_1 = 2\pi q_0, f_2 = 0.0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos [Para valores $k = 20Wm^{-1}C^{-1}, q_0 = 2 \times 10^8 Wm^{-3}$

$$\begin{aligned} AX0=0.0 \quad AX1=125.6637 \quad BX0=0.0 \quad BX1=0.0 \quad CX0=0.0 \quad CX1=0.0 \\ FX0=0.0 \quad FX1=12.5664E8 \quad FX2=0.0 \end{aligned}$$

El arreglo $\{Dx\}$ y la información de frontera esta dada por

$$\{Dx\} = \{0.0, 0.0025, 0.0025, 0.0025, 0.0025\}$$

NSPV=1 ISPV(1,1)=5 ISPV(1,2)=1, USPV(1)=100

ARCHIVO DE DATOS DE ENTRADA PROBLEMA 1 (P4-1.DAT)

Problema 1: Transferencia de calor en cilindro solido radial simétrico

□

□

1 0 0 MODEL, NTYPE ITEM

□

2 2 IELEM, NEM

1 1 ICONT, NPRNT

0.0 0.005 0.005 DX(I)

0.0 125.6637 AX0, AX1

0.0 0.0 BX0, BX1

0.0 0.0 CX0, CX1

0.0 12.56637E8 0.0 FX0, FX1, FX2

1

5 1 100.0 NSPV

0

0 ISPV(I,J),VSPV(1)

0

0

0

Con los datos de archivo de entrada se procede a correr el programa obteniendo los siguientes resultados.

*** ECHO OF THE INPUT DATA STARTS ***

□

□

Problema 1: Transferencia de calor en cilindro solido radial simétrico

□

□

1 0 0 MODEL, NTYPE ITEM

2 2

1 1

0.0 0.005 0.005 DX(I)

0.0 125.6637 AX0, AX1

0.0 0.0 BX0, BX1

0.0 0.0 CX0, CX1

0.0 12.56637E8 0.0 FX0, FX1, FX2

1

5 1 100.0 NSPV

0

0

0

0

**** ECHO OF THE INPUT DATA ENDS ****

OUTPUT FROM PROGRAM FEM1DV2.1 BY J. N. REDDY

Problema 1: Transferencia de calor en cilindro solido radial simétrico

*** ANALYSIS OF MODEL 1, AND TYPE 0 PROBLEM ***
(see the code below)

MODEL=1,NTYPE=0: A problem described by MODEL EQ. 1
 MODEL=1,NTYPE=1: A circular DISK (PLANE STRESS)
 MODEL=1,NTYPE>1: A circular DISK (PLANE STRAIN)
 MODEL=2,NTYPE=0: A Timoshenko BEAM (RIE) problem
 MODEL=2,NTYPE=1: A Timoshenko PLATE (RIE) problem
 MODEL=2,NTYPE=2: A Timoshenko BEAM (CIE) problem
 MODEL=2,NTYPE>2: A Timoshenko PLATE (CIE) problem
 MODEL=3,NTYPE=0: A Euler-Bernoulli BEAM problem
 MODEL=3,NTYPE>0: A Euler-Bernoulli Circular plate
 MODEL=4,NTYPE=0: A plane TRUSS problem
 MODEL=4,NTYPE=1: A Euler-Bernoulli FRAME problem
 MODEL=4,NTYPE=2: A Timoshenko (CIE) FRAME problem

Element type (0, Hermite,>0, Lagrange)..= 2
 No. of deg. of freedom per node, NDF....= 1
 No. of elements in the mesh, NEM.....= 2
 No. of total DOF in the model, NEQ.....= 5
 No. of specified primary DOF, NSPV.....= 1
 No. of specified secondary DOF, NSSV....= 0
 No. of specified Newton B. C.: NNBC.....= 0

Boundary information on primary variables:

5 1 .10000E+03

Global coordinates of the nodes, {GLX}:

.00000E+00 .25000E-02 .50000E-02 .75000E-02 .10000E-01

Coefficients of the differential equation:

AX0 =	.0000E+00	AX1 =	.1257E+03		
BX0 =	.0000E+00	BX1 =	.0000E+00		
CX0 =	.0000E+00	CX1 =	.0000E+00		
FX0 =	.0000E+00	FX1 =	.1257E+10	FX2 =	.0000E+00

Element coefficient matrix, [ELK]:

.62832E+02	-.83776E+02	.20944E+02
-.83776E+02	.33510E+03	-.25133E+03
.20944E+02	-.25133E+03	.23038E+03

Element source vector, {ELF}:

-.22315E-13 .10472E+05 .52360E+04

SOLUTION (values of PVs) at the NODES:

.35000E+03 .33437E+03 .28750E+03 .20937E+03 .10000E+03

X	P. Variable	S. Variable
.00000E+00	.35000E+03	.00000E+00
.62500E-03	.34902E+03	-.24544E+03
.12500E-02	.34609E+03	-.98175E+03
.18750E-02	.34121E+03	-.22089E+04
.25000E-02	.33437E+03	-.39270E+04
.31250E-02	.32559E+03	-.61359E+04
.37500E-02	.31484E+03	-.88357E+04
.43750E-02	.30215E+03	-.12026E+05
.50000E-02	.28750E+03	-.15708E+05
.50000E-02	.28750E+03	-.15708E+05
.56250E-02	.27090E+03	-.19880E+05
.62500E-02	.25234E+03	-.24544E+05
.68750E-02	.23184E+03	-.29698E+05
.75000E-02	.20937E+03	-.35343E+05
.81250E-02	.18496E+03	-.41479E+05
.87500E-02	.15859E+03	-.48106E+05
.93750E-02	.13027E+03	-.55223E+05
.10000E-01	.10000E+03	-.62832E+05

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



PROBLEMA 2

Consideremos una loza de espesor L y conductividad térmica constante k ($Wm^{-1} °C^{-1}$). Suponga que la energía a una razón uniforme de q_0 (Wm^{-3}) se genera en la pared. Deseamos determinar la distribución de temperatura en la pared cuando las superficies de frontera de la pared están sujetas a la siguiente condición frontera:

$$\left(-k \frac{dT}{dx}\right)_{x=0} = g_0 \left(Wm^{-2}\right), \left[k \frac{dT}{dx} + \beta(T - T_\infty)\right]_{x=L} = 0$$

La ecuación diferencial que gobierna para este problema está dada por:

$$-\frac{d}{dx} \left(kA \frac{dT}{dx} \right) + \ell T = Aq + \ell T_\infty, \ell = P\beta$$

con $\ell = 0$

De aquí, el modelo de elemento finito en $[k^e \{T^e\} = \{f^e\} + \{Q^e\}]$ es posible. Podemos seleccionar el orden de aproximación (o tipo de elemento) para evaluar los coeficientes k_{ij}^e y f_i^e en

$$K_{ij}^e = \int_{x_A}^{x_B} \left(KA \frac{d\psi_i^e}{dx} \frac{d\psi_j^e}{dx} + P\beta \psi_i^e \psi_j^e \right) dx, \quad f_i^e = \int_{x_A}^{x_B} \psi_i^e (Aq + P\beta T_\infty) dx$$

para la selección de elementos lineales y el dato $\alpha = KA = \text{constante}$ y $q = Aq_0 = \text{constante}$,

$[K^e \{T^e\} = \{f^e\} + \{Q^e\}]$ toma la forma

$$\frac{KA}{h_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1^e \\ T_2^e \end{Bmatrix} = \frac{Aq_0 h_e}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1^e \\ Q_2^e \end{Bmatrix}$$

Para una malla uniforme de N elementos, esto es una malla de elementos del mismo tamaño,

$h_1 = h_2 = \dots = L/N = h$, las ecuaciones ensambladas son.

$$\frac{KA}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & \\ -1 & 1+1 & -1 & & & \\ & -1 & 1+1 & & & \\ & & & 1+1 & -1 & \\ & & & -1 & 1 & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_N \\ U_{N+1} \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{Aq_0h}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1+1 \\ 1+1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1+1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1^1 \\ Q_2^1 + Q_1^2 \\ Q_2^2 + Q_1^3 \\ \vdots \\ \vdots \\ Q_2^{N-1} + Q_1^N \\ Q_2^N \end{Bmatrix}$$

Donde U_l ($l=1, 2, \dots, N+1$) representa la temperatura en el nudo global l . La superficie en $x=0$ está sujeta a un flujo de calor uniforme g_0 (Wm^{-2}) (si está aislada, $g_0=0$), y el calor se disipa por convección a un fluido de temperatura T_∞ y la superficie frontera en $x=L$. Estas condiciones frontera implican que

$$Q_1^1 = \left(-kA \frac{dT}{dx} \right)_{x=0} = Ag_0$$

$$Q_2^N = \left(kA \frac{dT}{dx} \right)_{x=L} = -A\beta(T - T_\infty)_{x=L} = -A\beta(U_{N+1} - T_\infty)$$

donde A es el área de la sección transversal normal al flujo de calor y β es el coeficiente de transferencia de calor en las ecuaciones

$$Q_2^{e-1} + Q_1^e = 0 \quad \text{para } e = 2, 3, \dots, N$$

son válidas para este caso. Para una malla de un elemento ($N=1$, $h=L$), las ecuaciones de elemento finito son

$$\frac{kA}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \frac{Aq_0h}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Ag_0 \\ -A\beta U_2 + A\beta T_\infty \end{Bmatrix}$$

$$\frac{kA}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 + \beta h \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} Aq_0h + Ag_0h \\ \frac{1}{2} Ag_0h + A\beta T_\infty \end{Bmatrix}$$

su solución es

$$U_1 = -\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha} \right) \frac{q_0h^2}{2k} - \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \frac{g_0h}{k} + T_\infty$$

$$U_2 = -\left(\frac{1}{1-\alpha} \right) \frac{q_0h^2}{k} - \left(\frac{1}{1-\alpha} \right) \frac{g_0h}{k} + T_\infty$$

donde $\alpha = 1 + \beta h k$, la solución exacta es

$$T(x) = \frac{q_0 L^2}{2k} \left(1 + \frac{2k}{\beta L} - \frac{x^2}{L^2} \right) + \frac{g_0 L}{k} \left(1 + \frac{k}{\beta L} - \frac{x}{L} \right) + T_\infty$$

ARCHIVO DE DATOS DE ENTRADA PROBLEMA 2 (P4-2.DAT)

Problema 2: Conducción de calor en una loza.

□

□

1 0 1 MODEL, NTYPE, ITEM

□

1 2 IELEM, NEM

□

1 1 ICONT, NPRNT

0.0 0.5 0.5 DX(I)

1.0 0.0 AX0, AX1

0.0 0.0 BX0, BX1

0.0 0.0 CX0, CX1

0.0 0.0 0.0 FX0, FX1, FX2

1 NSPV

1 1 0.0 ISPV(I,J), VSPV(I)

0 NSSV

0 NNBC

1.0 0.0 CT0, CT1

0.05 0.5 0.0 DT, ALFA, BETA

1 20 2 INCOND, NTIME, INTVL

0.0 1.0 1.0 GU0(I)

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

®

Con los datos de archivo de entrada se procede a correr el programa obteniendo los siguientes resultados.

*** ECHO OF THE INPUT DATA STARTS ***

□

□

Problema 2: Conducción de calor en una loza.

1 0 1 MODEL, NTYPE, ITEM

1 2 IELEM, NEM

1 1 ICONT, NPRNT

0.0 0.5 0.5 DX(I)

1.0 0.0 AX0, AX1

0.0 0.0 BX0, BX1

0.0 0.0 CX0, CX1

0.0 0.0 0.0 FX0, FX1, FX2

1 NSPV

1 1 0.0 ISPV(I,J), VSPV(I)

0 NSSV

0 NNBC

```

1.0 0.0          CT0, CT1
0.05 0.5 0.0    DT, ALFA, BETA
1 20 2          INCOND, NTIME, INTVL
0.0 1.0 1.0     GU0(I)

```

**** ECHO OF THE INPUT DATA ENDS ****

OUTPUT FROM PROGRAM FEM1DV2.1 BY J. N. REDDY

Problema 2: Conducción de calor en una loza.

*** ANALYSIS OF MODEL 1, AND TYPE 0 PROBLEM ***
(see the code below)

MODEL=1,NTYPE=0: A problem described by MODEL EQ. 1
MODEL=1,NTYPE=1: A circular DISK (PLANE STRESS)
MODEL=1,NTYPE>1: A circular DISK (PLANE STRAIN)
MODEL=2,NTYPE=0: A Timoshenko BEAM (RIE) problem
MODEL=2,NTYPE=1: A Timoshenko PLATE (RIE) problem
MODEL=2,NTYPE=2: A Timoshenko BEAM (CIE) problem
MODEL=2,NTYPE>2: A Timoshenko PLATE (CIE) problem
MODEL=3,NTYPE=0: A Euler-Bernoulli BEAM problem
MODEL=3,NTYPE>0: A Euler-Bernoulli Circular plate
MODEL=4,NTYPE=0: A plane TRUSS problem
MODEL=4,NTYPE=1: A Euler-Bernoulli FRAME problem
MODEL=4,NTYPE=2: A Timoshenko (CIE) FRAME problem

Element type (0, Hermite,>0, Lagrange)..= 1
No. of deg. of freedom per node, NDF....= 1
No. of elements in the mesh, NEM.....= 2
No. of total DOF in the model, NEQ.....= 3
No. of specified primary DOF, NSPV.....= 1
No. of specified secondary DOF, NSSV....= 0
No. of specified Newton B. C.: NNBC.....= 0

TIME-DEPENDENT (TRANSIENT) ANALYSIS

Coefficient, CT0.....= .1000E+01
Coefficient, CT1.....= .0000E+00
Parameter, ALFA.....= .5000E+00
Parameter, GAMA.....= .0000E+00
Time increment, DT.....= .5000E-01
No. of time steps, NTIME.....= 20
Time-step interval to print soln., INTVL= 2

Initial conditions on the primary variables:

.00000E+00 .10000E+01 .10000E+01

Boundary information on primary variables:

1 1 .00000E+00

Global coordinates of the nodes, {GLX}:

.00000E+00 .50000E+00 .10000E+01

Coefficients of the differential equation:

AX0 = .1000E+01 AX1 = .0000E+00
 BX0 = .0000E+00 BX1 = .0000E+00
 CX0 = .0000E+00 CX1 = .0000E+00
 FX0 = .0000E+00 FX1 = .0000E+00 FX2 = .0000E+00

Element coefficient matrix, {ELK}:

.21667E+00 .33333E-01
 .33333E-01 .21667E+00

Element source vector, {ELF}:

.13333E+00 .11667E+00

TIME = .1000E+00 Time step number = 2

SOLUTION (values of PVs) at the NODES:

.00000E+00 .66008E+00 .92793E+00

X	P. Variable	S. Variable
---	-------------	-------------

.00000E+00	.00000E+00	.13202E+01
.62500E-01	.82510E-01	.13202E+01
.12500E+00	.16502E+00	.13202E+01
.18750E+00	.24753E+00	.13202E+01
.25000E+00	.33004E+00	.13202E+01
.31250E+00	.41255E+00	.13202E+01
.37500E+00	.49506E+00	.13202E+01
.43750E+00	.57757E+00	.13202E+01
.50000E+00	.66008E+00	.13202E+01
.50000E+00	.66008E+00	.53570E+00
.56250E+00	.69356E+00	.53570E+00
.62500E+00	.72704E+00	.53570E+00
.68750E+00	.76052E+00	.53570E+00
.75000E+00	.79400E+00	.53570E+00
.81250E+00	.82749E+00	.53570E+00
.87500E+00	.86097E+00	.53570E+00
.93750E+00	.89445E+00	.53570E+00
.10000E+01	.92793E+00	.53570E+00

TIME = .2000E+00 Time step number = 4

SOLUTION (values of PVs) at the NODES:

.00000E+00 .50745E+00 .71757E+00

X	P. Variable	S. Variable
.00000E+00	.00000E+00	.10149E+01
.62500E-01	.63431E-01	.10149E+01
.12500E+00	.12686E+00	.10149E+01
.18750E+00	.19029E+00	.10149E+01
.25000E+00	.25372E+00	.10149E+01
.31250E+00	.31716E+00	.10149E+01
.37500E+00	.38059E+00	.10149E+01
.43750E+00	.44402E+00	.10149E+01
.50000E+00	.50745E+00	.10149E+01
.50000E+00	.50745E+00	.42024E+00
.56250E+00	.53371E+00	.42024E+00
.62500E+00	.55998E+00	.42024E+00
.68750E+00	.58624E+00	.42024E+00
.75000E+00	.61251E+00	.42024E+00
.81250E+00	.63877E+00	.42024E+00
.87500E+00	.66504E+00	.42024E+00
.93750E+00	.69130E+00	.42024E+00
1.0000E+01	.71757E+00	.42024E+00

TIME = .3000E+00 Time step number = 6

SOLUTION (values of PVs) at the NODES:

.00000E+00 .39124E+00 .55329E+00

X	P. Variable	S. Variable
.00000E+00	.00000E+00	.78247E+00
.62500E-01	.48905E-01	.78247E+00
.12500E+00	.97809E-01	.78247E+00
.18750E+00	.14671E+00	.78247E+00
.25000E+00	.19562E+00	.78247E+00
.31250E+00	.24452E+00	.78247E+00
.37500E+00	.29343E+00	.78247E+00
.43750E+00	.34233E+00	.78247E+00
.50000E+00	.39124E+00	.78247E+00
.50000E+00	.39124E+00	.32411E+00
.56250E+00	.41149E+00	.32411E+00
.62500E+00	.43175E+00	.32411E+00
.68750E+00	.45201E+00	.32411E+00
.75000E+00	.47226E+00	.32411E+00
.81250E+00	.49252E+00	.32411E+00
.87500E+00	.51278E+00	.32411E+00

```
.93750E+00 .53303E+00 .32411E+00
.10000E+01 .55329E+00 .32411E+00
```

TIME = .4000E+00 Time step number = 8

SOLUTION (values of PVs) at the NODES:

```
.00000E+00 .30165E+00 .42660E+00
```

X	P. Variable	S. Variable
---	-------------	-------------

.00000E+00	.00000E+00	.60331E+00
.62500E-01	.37707E-01	.60331E+00
.12500E+00	.75414E-01	.60331E+00
.18750E+00	.11312E+00	.60331E+00
.25000E+00	.15083E+00	.60331E+00
.31250E+00	.18853E+00	.60331E+00
.37500E+00	.22624E+00	.60331E+00
.43750E+00	.26395E+00	.60331E+00
.50000E+00	.30165E+00	.60331E+00
.50000E+00	.30165E+00	.24990E+00
.56250E+00	.31727E+00	.24990E+00
.62500E+00	.33289E+00	.24990E+00
.68750E+00	.34851E+00	.24990E+00
.75000E+00	.36413E+00	.24990E+00
.81250E+00	.37975E+00	.24990E+00
.87500E+00	.39537E+00	.24990E+00
.93750E+00	.41098E+00	.24990E+00
.10000E+01	.42660E+00	.24990E+00

TIME = .5000E+00 Time step number = 10

SOLUTION (values of PVs) at the NODES:

```
.00000E+00 .23258E+00 .32892E+00
```

X	P. Variable	S. Variable
---	-------------	-------------

.00000E+00	.00000E+00	.46517E+00
.62500E-01	.29073E-01	.46517E+00
.12500E+00	.58146E-01	.46517E+00
.18750E+00	.87219E-01	.46517E+00
.25000E+00	.11629E+00	.46517E+00
.31250E+00	.14536E+00	.46517E+00
.37500E+00	.17444E+00	.46517E+00
.43750E+00	.20351E+00	.46517E+00
.50000E+00	.23258E+00	.46517E+00

.50000E+00	.23258E+00	.19268E+00
.56250E+00	.24463E+00	.19268E+00
.62500E+00	.25667E+00	.19268E+00
.68750E+00	.26871E+00	.19268E+00
.75000E+00	.28075E+00	.19268E+00
.81250E+00	.29280E+00	.19268E+00
.87500E+00	.30484E+00	.19268E+00
.93750E+00	.31688E+00	.19268E+00
.10000E+01	.32892E+00	.19268E+00

TIME = .6000E+00 Time step number = 12

SOLUTION (values of PVs) at the NODES:

.00000E+00	.17933E+00	.25361E+00
------------	------------	------------

X	P. Variable	S. Variable
---	-------------	-------------

.00000E+00	.00000E+00	.35866E+00
.62500E-01	.22416E-01	.35866E+00
.12500E+00	.44832E-01	.35866E+00
.18750E+00	.67248E-01	.35866E+00
.25000E+00	.89664E-01	.35866E+00
.31250E+00	.11208E+00	.35866E+00
.37500E+00	.13450E+00	.35866E+00
.43750E+00	.15691E+00	.35866E+00
.50000E+00	.17933E+00	.35866E+00
.50000E+00	.17933E+00	.14856E+00
.56250E+00	.18861E+00	.14856E+00
.62500E+00	.19790E+00	.14856E+00
.68750E+00	.20718E+00	.14856E+00
.75000E+00	.21647E+00	.14856E+00
.81250E+00	.22575E+00	.14856E+00
.87500E+00	.23504E+00	.14856E+00
.93750E+00	.24432E+00	.14856E+00
.10000E+01	.25361E+00	.14856E+00

TIME = .7000E+00 Time step number = 14

SOLUTION (values of PVs) at the NODES:

.00000E+00	.13827E+00	.19554E+00
------------	------------	------------

X	P. Variable	S. Variable
---	-------------	-------------

.00000E+00	.00000E+00	.27653E+00
.62500E-01	.17283E-01	.27653E+00

.12500E+00	.34567E-01	.27653E+00
.18750E+00	.51850E-01	.27653E+00
.25000E+00	.69133E-01	.27653E+00
.31250E+00	.86417E-01	.27653E+00
.37500E+00	.10370E+00	.27653E+00
.43750E+00	.12098E+00	.27653E+00
.50000E+00	.13827E+00	.27653E+00
.50000E+00	.13827E+00	.11454E+00
.56250E+00	.14543E+00	.11454E+00
.62500E+00	.15258E+00	.11454E+00
.68750E+00	.15974E+00	.11454E+00
.75000E+00	.16690E+00	.11454E+00
.81250E+00	.17406E+00	.11454E+00
.87500E+00	.18122E+00	.11454E+00
.93750E+00	.18838E+00	.11454E+00
.10000E+01	.19554E+00	.11454E+00

TIME = .8000E+00 Time step number = 16

SOLUTION (values of PVs) at the NODES:

.00000E+00	.10661E+00	.15077E+00
------------	------------	------------

X	P. Variable	S. Variable
---	-------------	-------------

.00000E+00	.00000E+00	.21322E+00
.62500E-01	.13326E-01	.21322E+00
.12500E+00	.26652E-01	.21322E+00
.18750E+00	.39978E-01	.21322E+00
.25000E+00	.53304E-01	.21322E+00
.31250E+00	.66630E-01	.21322E+00
.37500E+00	.79956E-01	.21322E+00
.43750E+00	.93282E-01	.21322E+00
.50000E+00	.10661E+00	.21322E+00
.50000E+00	.10661E+00	.88317E-01
.56250E+00	.11213E+00	.88317E-01
.62500E+00	.11765E+00	.88317E-01
.68750E+00	.12317E+00	.88317E-01
.75000E+00	.12869E+00	.88317E-01
.81250E+00	.13421E+00	.88317E-01
.87500E+00	.13973E+00	.88317E-01
.93750E+00	.14525E+00	.88317E-01
.10000E+01	.15077E+00	.88317E-01

TIME = .9000E+00 Time step number = 18

SOLUTION (values of PVs) at the NODES:

.00000E+00	.82197E-01	.11624E+00
------------	------------	------------

X	P. Variable	S. Variable
.00000E+00	.00000E+00	.16439E+00
.62500E-01	.10275E-01	.16439E+00
.12500E+00	.20549E-01	.16439E+00
.18750E+00	.30824E-01	.16439E+00
.25000E+00	.41099E-01	.16439E+00
.31250E+00	.51373E-01	.16439E+00
.37500E+00	.61648E-01	.16439E+00
.43750E+00	.71923E-01	.16439E+00
.50000E+00	.82197E-01	.16439E+00
.50000E+00	.82197E-01	.68094E-01
.56250E+00	.86453E-01	.68094E-01
.62500E+00	.90709E-01	.68094E-01
.68750E+00	.94965E-01	.68094E-01
.75000E+00	.99221E-01	.68094E-01
.81250E+00	.10348E+00	.68094E-01
.87500E+00	.10773E+00	.68094E-01
.93750E+00	.11199E+00	.68094E-01
.10000E+01	.11624E+00	.68094E-01

TIME = .1000E+01 Time step number = 20

SOLUTION (values of PVs) at the NODES:

.00000E+00 .63376E-01 .89628E-01

X P. Variable S. Variable

.00000E+00	.00000E+00	.12675E+00
.62500E-01	.79220E-02	.12675E+00
.12500E+00	.15844E-01	.12675E+00
.18750E+00	.23766E-01	.12675E+00
.25000E+00	.31688E-01	.12675E+00
.31250E+00	.39610E-01	.12675E+00
.37500E+00	.47532E-01	.12675E+00
.43750E+00	.55454E-01	.12675E+00
.50000E+00	.63376E-01	.12675E+00
.50000E+00	.63376E-01	.52503E-01
.56250E+00	.66658E-01	.52503E-01
.62500E+00	.69939E-01	.52503E-01
.68750E+00	.73221E-01	.52503E-01
.75000E+00	.76502E-01	.52503E-01
.81250E+00	.79783E-01	.52503E-01
.87500E+00	.83065E-01	.52503E-01
.93750E+00	.86346E-01	.52503E-01
.10000E+01	.89628E-01	.52503E-01

***** Number of time steps exceeded NTIME *****

CAPITULO 6

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En una simulación numérica de un proceso físico, empleamos un método numérico y una computadora para evaluar un modelo matemático del proceso. El método del elemento finito es una técnica numérica efectiva diseñada para evaluar procesos físicos complejos.

Para resolver un problema, como se ha visto, se debe representar el dominio del problema con un conjunto de subdominios (elementos finitos), formando el conjunto de ellos una malla .

El proceso físico sobre cada elemento finito se aproxima con funciones polinomiales y ecuaciones algebraicas que relacionan cantidades físicas en nodos del elemento que se analiza.

De aquí, se procede a ensamblar las ecuaciones usando la continuidad y / o el balance de las cantidades físicas.

Se debe buscar una solución aproximada u de la forma:

$$u \approx \sum_{j=1}^n u_j \psi_j + \sum_{j=1}^m c_j \phi_j$$

Donde u_j representa a los valores de u en los nodos del elemento, ψ_j son las funciones interpolación, c_j son los coeficientes sin nodo, y ϕ_j son las funciones aproximación asociadas.

Se requiere de un número suficiente de ecuaciones para obtener los coeficientes no determinados c_j y u_j .

Por esta razón es necesario un procedimiento como el de la integral pesada de la ecuación diferencial que rige.

Pueden ser más de un elemento finito u en un mismo problema, el tipo de modelo depende de las ecuaciones diferenciales y métodos usados para obtener los coeficientes no determinados sobre un elemento.

La integral pesada se requiere para generar las ecuaciones algebraicas para resolver los parámetros c_i en la solución aproximada. Esto equivale a minimizar el error en la aproximación de la ecuación diferencial en sentido de integral pesada.

Es necesario seguir el procedimiento de los tres pasos para obtener la forma débil de una ecuación diferencial y para obtener las ecuaciones algebraicas en función de los parámetros desconocidos de la solución aproximada, lo que se trató en el capítulo dos se considera como el corazón del método del elemento finito.

Los métodos variacionales presentados son un medio sencillo para encontrar soluciones aproximadas continuas en problemas físicos, las cuales son funciones continuas de posición en el dominio.

Encuentro una desventaja de los métodos variacionales con respecto a los métodos de diferencia finita tradicionales, la dificultad para seleccionar las funciones aproximación no existe un procedimiento único para construir las sobre todo cuando el dominio es geoméricamente complejo y / o las condiciones frontera son complicadas.

Los métodos variacionales proveen un medio potente para encontrar soluciones aproximadas para la construcción de las funciones aproximación que dependen de la ecuación diferencial a ser resuelta y no de las condiciones frontera del problema. Un problema difiere de otro solo en los datos y por ésta razón se puede usar un programa de propósito general.

Una vez construida la región, las funciones se pueden representar con formas geométricas simples, de modo que sea más sencilla la construcción de las funciones aproximación.

En el método del elemento finito, se debe discretizar un dominio mediante representaciones geométricas simples en cada elemento, para formular la ecuación que rige usando cualquier método variacional. Se generan las funciones aproximación sistemáticamente usando las condiciones de frontera esencial, se conectan los elementos

imponiendo la continuidad de las variables dependientes a través de los límites del inter elemento.

El modelo del elemento finito, se desarrolla siguiendo tres pasos:

1. Formulación débil de la ecuación diferencial en un elemento.
2. Interpolación de las variables primarias de la forma débil.
3. Formular el elemento finito sobre un elemento típico.

Las variables primarias deben ser continuas en el dominio, incluyendo los nodos de conexión de los elementos. Se identifican con la forma débil.

Las funciones de interpolación requieren continuidad e independencia lineal. Con el método del elemento finito, se sustituye la interpolación de la variable primaria en la forma débil de la ecuación diferencial.

Las variables secundarias se pueden calcular usando las ecuaciones algebraicas de la malla del elemento finito (ecuaciones condensadas) o por interpolación del elemento finito.

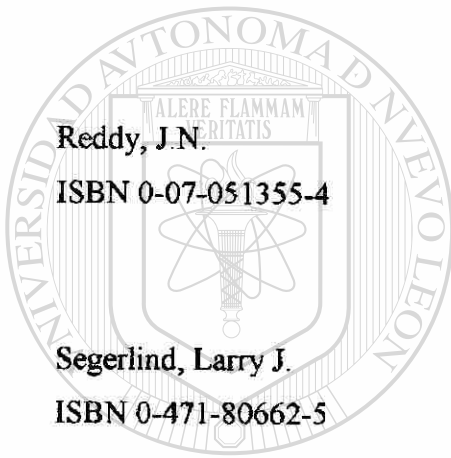
Las variables secundarias calculadas, usando elementos lineales **Lagrange** son elementos constantes, y son elementos lineales para elementos cuadráticos **Lagrange**.

Después de haber hecho un análisis detallado en cuanto a los tipos de errores de aproximación del elemento finito, de ecuaciones diferenciales y sus mediciones para ecuación diferencial de segundo orden simple, se llega a la conclusión de que las ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes son exactas en los nodos. Sin embargo, esto no se mantiene para ecuaciones diferenciales de segundo orden acopladas con coeficientes constantes.

Del capítulo 5 se deduce que, el uso de un programa de computadora como el descrito, es una herramienta computacional importante dada la simplicidad en su implementación para la solución de problemas de transferencia de calor en una dimensión y la rapidez con que se lleva a cabo el proceso de solución aproximada.

CAPITULO 7

BIBLIOGRAFIA



Reddy, J.N.

ISBN 0-07-051355-4

Segerlind, Larry J.

ISBN 0-471-80662-5

An Introduction to the Finite Element Method

Mc. Graw Hill

Second Edition 1993

Applied Finite Element Analysis

John Wiley and Sons. Inc.

Second Edition 1984

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



CAPITULO 8

LISTADO DE TABLAS

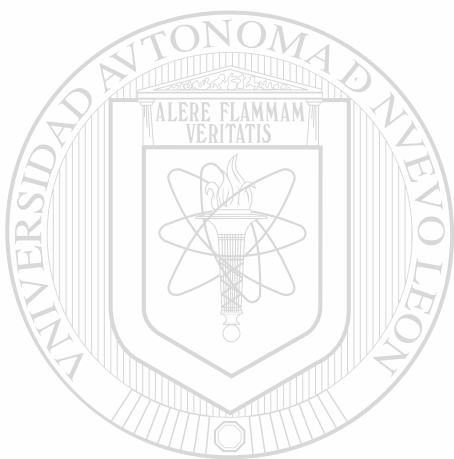
TABLA	CONTENIDO	PAGINA
2.1	Comparación de la solución Rayleigh – Ritz con la exacta $u(0) = u(1) = 0$	55
2.2	Comparación de la solución Rayleigh-Ritz con la exacta $u(0) = 0, \frac{du}{dx} \Big _{x=1} = 1$	56
3.1	Pasos involucrados en el análisis del elemento finito en un problema.	68
3.2	Ejemplos de ecuaciones de segundo orden en una dimensión.	72
4.1	El error L_2 y el error en la norma de energía.	131
5.1	Comparación de las soluciones elemento finito y exacta .	140
5.2	Archivo de datos de entrada para el problema 1 .	141
5.3	Archivo de datos de entrada para el problema 2 .	146

CAPITULO 9

LISTA DE FIGURAS

Figura	Nombre	Pagina
1.1	Aproximación de la circunferencia de un círculo mediante elementos línea.	5
1.2	Determinación aproximada del centroide de masa.	10
2.1	Frontera y dominio.	24
2.2	Comparación de las soluciones Rayleigh-Ritz y exacta $u(0) = u(1) = 0$	56
3.1	Discretización del elemento finito de un dominio en una dimensión.	71
3.2	Discretización del elemento, coordenadas local y global, elemento típico, variables primarias y secundarias en los nodos del elemento.	79
3.3	Funciones de interpolación global y local para los nodos del elemento.	84
3.4	Refinamiento de soluciones del elemento finito.	86
3.5	Elemento cuadrático Lagrange en una dimensión y sus funciones de interpolación.	88
3.6	Aproximación de un elemento con sección transversal variable linealmente mediante un elemento con sección transversal constante.	97
3.7	Ensamble de dos elementos lineales de Lagrange.	101

3.8	La geometría y malla del elemento finito de una estructura Barra.	105
4.1	Diversas medidas de error $E = \ u - u_h\ $ entre la solución exacta u y la solución del elemento finito u_h	126
4.2	Gráficas de las normas energía y L_2 de errores contra el tamaño de la malla.	133



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

CAPITULO 10

APENDICE

GLOSARIO DE TERMINOS USADOS EN EL METODO DEL ELEMENTO FINITO

Convergencia.- Exactitud conforme se incrementa el número de elementos en la malla.

Componente de rigidez.- Fuerza causada por un desplazamiento unitario aplicado.

Condición de frontera esencial (EBC).- Especificación de la variable primaria en la frontera.

Condición de frontera natural (NBC).- Especificación de las variables secundarias en la frontera.

Condiciones de frontera homogéneas.- Cuando los valores especificados son cero $u_0 = 0$ ó $Q_0 = 0$

Condiciones de frontera no homogéneas.- Cuando los valores especificados son diferentes de cero $u_0 \neq 0$, $Q_0 \neq 0$

Conectividad del elemento.- Número de nodos que limitan al elemento.

DEM.- Método del elemento discreto donde los elementos individuales pueden tener movimientos finitos.

Discretización.- El dominio del problema es dividido en regiones mas pequeñas. Es la preparación de un archivo de entrada que contenga:

(1).- Coordenadas de todos los puntos nodales.

- (2).- Tipos de elementos.
- (3).- Conectividad de elementos.
- (4).- Elementos constantes aplicables.
- (5).- Propiedades del material.

Dominio (Ω) .- Conjunto de puntos en el espacio, con la propiedad de que si P es un punto en el dominio, entonces todos los puntos cierran hacia P, perteneciendo al dominio.

Dominio convexo .- Cuando dos puntos cualesquiera del dominio se pueden unir con una línea tendida completamente dentro de él.

Ecuaciones consistentes .- Son las que no tienen solución.

Elemento finito .- Dominio en miniatura (subdominio), desde el cual se pueden obtener una serie de ecuaciones algebraicas para las incógnitas nodales.

Ensamble de matriz de rigidez global. Se refiere a la suma de las rigideces de los elementos individuales, cuando se calculan en el sistema de coordenadas global.

Exactitud de la solución .- Diferencia entre la solución exacta y la solución del elemento finito

Forma débil de una ecuación diferencial .- Es una exposición de integral pesada de una ecuación diferencial en la que la diferenciación se distribuye entre las variables dependientes y la función peso e incluye las condiciones frontera naturales del problema. Se conoce también como “ forma variacional”.

Frontera de un dominio (Γ) .- Serie de puntos tal que, en cualquier cercanía de esos puntos, hay puntos que pertenecen al dominio y puntos que no. Los puntos en la frontera no corresponden al dominio.

Funcional .- Expresión integral de la forma $I(u) = \int_a^b F(x, u, u') dx$

$$u = u(x), \quad u' = \frac{du}{dx}$$

Donde el integrando $F(x, u, u')$ es una función dada de los argumentos :

$$x, u, \quad y \quad \frac{du}{dx}$$

Funcional bilineal .- Funcional lineal en cada uno de sus argumentos u y v

Forma bilineal simétrica. - Cuando $B(u, v) = B(v, u)$

Grado de libertad (DOF). - Se refiere a las incógnitas a resolver para un problema, las cuales dependen de la manera de modelar el problema.

Integral pesada. - Procedimiento para dar lugar a un número necesario y suficiente de ecuaciones para los coeficientes no determinados, c_j y u_j

Malla del elemento finito. Conjunto de elementos finitos.

Malla uniforme. - Todos los elementos son de igual longitud.

Malla no uniforme. - Los elementos son de diferente longitud.

Matriz bandeda. - Todos los términos de la matriz están colocados alrededor de la diagonal principal.

Matriz de elasticidad $[D]$. - Es una propiedad del material del elemento.

Matriz de rigidez $[B]$. - Es una propiedad de la forma del elemento. En mecánica de materiales expresa ecuaciones esfuerzo- deformación. Es la matriz de las derivadas de las funciones interpolación, por lo cual recibe el nombre de matriz gradiente.

Matriz simétrica. - Implica que la matriz es cuadrada, significa que $K_{i,j} = K_{j,i}$

Método variacional de aproximación. - Método que sirve para obtener solución aproximada en la forma de una combinación lineal de funciones aproximación ϕ_j , conveniente y parámetros c_j no determinados.

$\sum_j c_j \phi_j$

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Nodos. - Puntos de conexión de unos elementos con otros.

RIE. - Elemento de integración reducida.

Símbolo variacional. - Operador δ en el cambio αv , donde α es una constante y v es una función : $\delta u = \alpha v$

Singularidad de $[K]$. - Significa que la ecuación $[K]\{u\} = \{f\}$ no se resuelve como tal ya que la matriz $[K]$ tiene un determinante cero.

Variable primaria PV. - Es la variable dependiente de un problema, expresada en la misma forma que la función peso que aparece en el término frontera

Variables secundarias SV. - Son los coeficientes de la función peso y sus derivadas en las expresiones frontera. Siempre tienen significado físico.

CAPITULO 11

AUTOBIOGRAFIA

Nombre: Adrián Salazar Vargas

Candidato a obtener el grado de: Maestro en Ciencias de la Ingeniería Mecánica
con especialidad en Térmica y Fluidos.

Tesis que presenta: “EL METODO DEL ELEMENTO FINITO APLICADO EN LA
SOLUCION DE PROBLEMAS DE TRANSFERENCIA DE
CALOR EN UNA DIMENSION”

Título Profesional: Ingeniero Mecánico Electricista

Fecha de nacimiento: 8 de Septiembre de 1950

Lugar de nacimiento: Tampico, Tamps.

Nombre de los Padres: Sr. José Guadalupe Salazar Torres⁽⁺⁾ y Sra. Ma. De la Paz
Vargas de Salazar

Grado obtenido en estudios Profesionales : Ingeniero Mecánico Electricista

Egresado de la Institución : Universidad Autónoma de Nuevo León

Dependencia: Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

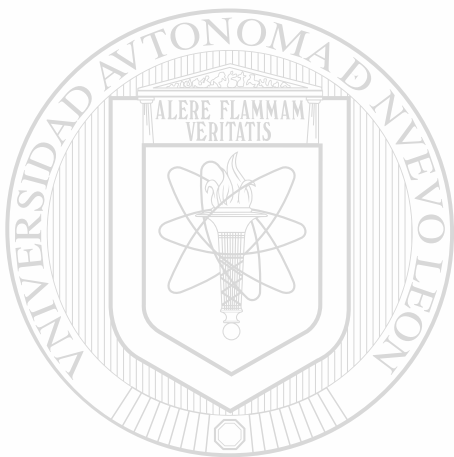
Fecha: 15 Diciembre de 1972

Actividades Profesionales: Maestro en la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de
la Universidad Autónoma de Nuevo León desde el 1 de
Octubre de 1971 a la fecha.

Areas: Coordinación de Ciencias y Coordinación de Ingeniería Térmica y Fluidos

Actividades Profesionales: Grupo LALA Monterrey S.A. de C.V. desde Julio 1985 a la fecha.

Areas: Gerencia de Logística y Distribución.
Gerencia de Operaciones.



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

