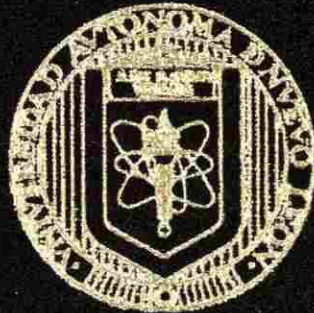


UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POST-GRADO



PROPUESTA DE MATERIAL DE ESTUDIO PARA LAS
MATERIAS DE TEORIA DE CONTROL I Y II QUE IMPARTEN
EN LA EIME DE LA UA DE C.

TESIS

EN OPCION AL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS DE LA INGENIERIA ELECTRICA
CON ESPECIALIDAD EN ELECTRONICA

QUE PRESENTA

FRANCISCO LAZARO DE LUNA SANMIGUEL

MONTERREY, N. L.

DICIEMBRE DE 1996

PROPUESTA DE MATERIAL DE ESTUDIO PARA LAS
MATERIAS DE TEORIA DE CONTROL I Y II QUE IMPARTEN
EN LA EIME DE LA UA DE C.

TM

25853

.M2

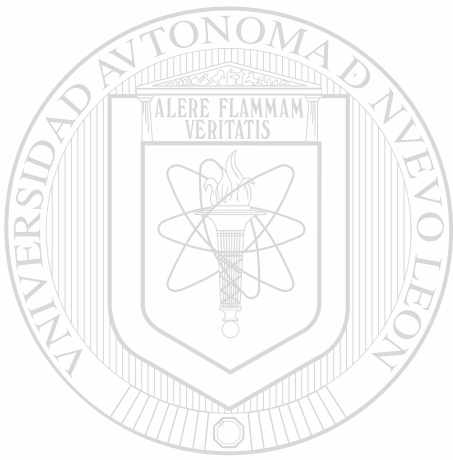
FIME

1996

L8



1020119015



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

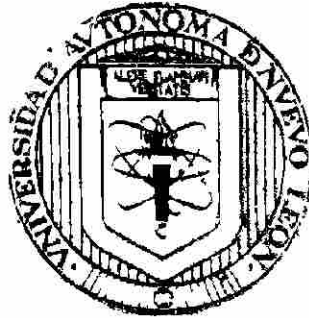


DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA

DIVISION DE ESTUDIOS DE POST-GRADO



**PROPUESTA DE MATERIAL DE ESTUDIO PARA LAS
MATERIAS DE TEORIA DE CONTROL I Y II QUE IMPARTEN
EN LA EIME DE LA UA DE C.**

TESIS

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
EN OPCION AL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS DE LA INGENIERIA ELECTRICA
CON ESPECIALIDAD EN ELECTRONICA

®

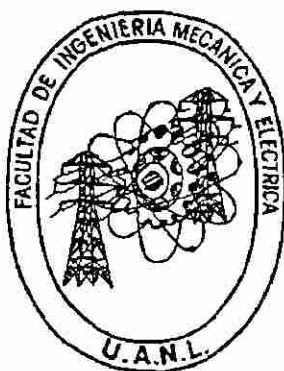
QUE PRESENTA

FRANCISCO LAZARO DE LUNA SANMIGUEL

MONTERREY, N. L.

DICIEMBRE DE 1996

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POST-GRADO



PROPUESTA DE MATERIAL DE ESTUDIO PARA LAS MATERIAS DE
TEORIA DE CONTROL I Y II, QUE SE IMPARTEN EN LA EIME DE LA UA DE C.

TESIS

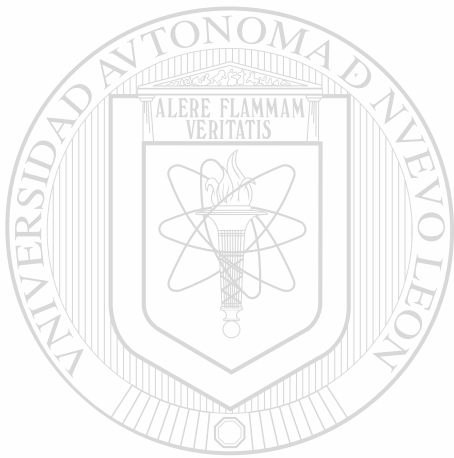
EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA INGENIERIA ELECTRICA
CON ESPECIALIDAD EN ELECTRONICA

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

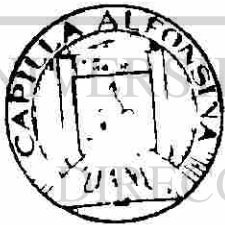
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

FRANCISCO LAZARO DE LUNA SANMIGUEL

MONTERREY N.L.
DICIEMBRE DE 1996



UANL



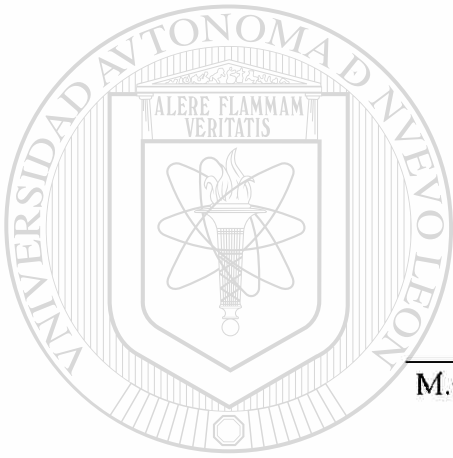
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

FONDO TESIS

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSTGRADO

Los miembros del comité de tesis recomendamos que la tesis **“Propuesta de material de estudio para las materias de teoría de control I y II, que se imparten en la EIME de U.A. de C.”**, realizada por el Ing. **Francisco Lázaro de Luna Sanmiguel** sea aceptada para su defensa como opción al grado de **Maestro en Ciencias de la Ingeniería Eléctrica con especialidad en Electrónica**.



El Comité de Tesis

M.C. Luis Manuel Camacho Velázquez
Asesor

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

M.C. César Elizondo González
Coasesor

M.C. Félix González Estrada
Coasesor

Vó.Bo.
M.C. Roberto Villarreal Garza
División de Estudios de Postgrado

San Nicolás de los Garza, N.L. a 16 de Diciembre de 1996

DEDICATORIAS Y AGRADECIMIENTOS

Primeramente debo agradecer a Dios por haberme prestado vida y salud para realizar este esfuerzo.

Dedico este trabajo a mi madre ausente que supo inculcár en mí, los más altos valores que me han servido de inspiración y guía, y a mi padre que con su trabajo diario ha sido un ejemplo.

Dedico también esta obra a mi esposa, que ha sido la compañera de mi vida, a mis hijos que me han dado su estímulo para seguir adelante y a los cuales les he quitado todas estas horas dedicadas a la elaboración de mi Tesis.

A mis maestros les guardo respeto y agradecimiento por su paciencia, su sabiduría, su dedicación y porque sin su apoyo no me hubiera sido posible llegar hasta aquí.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

PROLOGO

La Escuela de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de Monclova, dependiente de la Universidad Autónoma de Coahuila, ahora en proceso para convertirse en Facultad, ha sido pionera y cuna de varias escuelas de Educación Superior en Monclova.

Fundada en 1957, con la carrera de Ingeniero Mecánico Electricista, posteriormente se han ido creando otras carreras, algunas de las cuales ya trabajan como escuelas independientes de la Universidad de Coahuila en Monclova.

Actualmente se ofrecen en la EIME, además de la carrera de IME, las carreras de Ingeniero Electrónico Industrial (IEI) y de Ingeniero en Sistemas Computacionales (ISC).

Como es lógico, a lo largo de todos estos años los programas de estudio periodicamente se han ido modificando, adecuándolos a la realidad actual. Los Planes de Estudio actualmente incluyen dentro de sus materias tres cursos de Teoría de Control que se imparten en las carreras de IME e IEI.

El material de estudio que se presenta en esta Tesis ha sido preparado para utilizarse como libro de apoyo para los estudiantes que no tienen antecedentes y que por primera vez estudiarán lo que es la Teoría de Control, aunque también se puede utilizar como una referencia para estudiantes avanzados o ingenieros que ya se desempeñan en el desarrollo de su profesión.

Es mi mayor deseo que realmente este material sea de mucha utilidad para todos los estudiantes, pues trato de explicarme al máximo para su mejor aprovechamiento. Sin embargo considerando la posibilidad de errores en los que pueda incurrir involuntariamente, acepto la crítica constructiva como la mejor forma de superar este trabajo.

JUSTIFICACION

Despues de varios años de impartir una materia, realmente se aprende sobre el tema y se profundiza con mayor detalle. Aunque la cátedra impartida aparentemente es la misma año con año, si al maestro le gusta y le apasiona su trabajo, cada vez más va enriqueciendo su cátedra con opiniones de otros autores, con experiencias personales y con nuevos y mejores ejemplos de aplicación práctica en la vida real.

Esto es lo que en mi opinión hace la gran diferencia entre una clase amena e interesante y otra tediosa y sin motivación, y es también la diferencia entre un maestro sin experiencia y otro que ha vivido y conoce realmente las materias que imparte.

Generalmente ésta experiencia de muchos años en la práctica docente no se aprovecha plenamente y el maestro casi nunca deja nada escrito cuando abandona la cátedra universitaria, perdiéndose así todo ese gran potencial por completo.

Considero que como maestros universitarios tenemos una gran responsabilidad y la obligación de aportar más a nuestra clase de lo que nuestros alumnos pueden obtener de un libro de texto, pues si sólo nos concretamos a repetir lo que ya viene en un libro, fácilmente podremos ser substituidos por éste. En pocas palabras debemos de apoyar, orientar, enriquecer y dar lo mejor de nosotros mismos para que nuestros alumnos logren alcanzar la excelencia en sus objetivos de aprendizaje, éste es el verdadero reto de un maestro.

Este trabajo de escribir mis apuntes recopilados durante varios años, es una modesta aportación personal que deseo realizar para regresar aunque sea un poco de lo mucho que yo he recibido de la Escuela de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, especialmente de mis alumnos y mis compañeros maestros.

Creo que si se logran aunque sea en parte mis deseos, esto justifica más que plenamente las horas de trabajo que significó para mí la realización de ésta Tesis.

OBJETIVO

La elaboración de cualquier Tesis, ya sea a nivel de Licenciatura, Maestría o Doctorado, es un trabajo muy arduo, que consume muchas horas de estudio y preparación durante meses.

Cuando la Tesis desarrollada trata sobre un tema muy especializado o sobre alguna investigación o proceso poco conocido, generalmente ésta Tesis termina archivada en algún anaquel de biblioteca, sin ninguna aplicación real a tanto esfuerzo desarrollado en vano.

El principal objetivo de desarrollar ésta Tesis, es que no se pierda como uno más de los volúmenes en la biblioteca de la escuela, sino que los alumnos la aprovechen como un verdadero apoyo académico que les ayude a aclarar sus dudas sobre la materia.

Este trabajo es un resumen de varios años de práctica docente para poder ofrecer al alumno un material adecuado y así lograr una cátedra amena e interesante, que sea útil para una introducción efectiva al diseño de los Sistemas de Control.

Siempre había sido un anhelo personal el poder escribir un resumen bien organizado del material de estudio de las materias que he impartido durante varios años en la EIME, pero por una u otra razón no se había concretado éste proyecto.

Ahora que inicio éste trabajo de escribir mis notas recopiladas a través de varios años de práctica docente, considero que se lograrán simultáneamente varios objetivos, todos muy importantes. Por un lado la creación de un material de estudio propio, lo cual le dará una mayor presencia y nivel académico a nuestra institución. Por otro lado los alumnos tendrán a la mano la posibilidad de obtener en un solo volumen todo el material que tendrían que consultar en varios libros, con el consiguiente ahorro en costo y finalmente la obtención de mi grado de Maestro en Ciencias, lo cual culminará una etapa más de mi vida, de varios años de estudio y trabajos realizados.

SINTESIS

Cuando uno estudia un tema como la Teoría del Control o cualquier otra materia, generalmente se piensa que al existir muchos libros que hablan sobre el tema, cualquier persona con los antecedentes necesarios, debe entender lo que el autor del libro expresa en su obra. La realidad sin embargo es, que no siempre el autor logra explicarse de tal forma que los estudiantes entiendan perfectamente.

El hecho de que no se cumpla el objetivo del aprendizaje se puede deber a varias razones, por ejemplo a una explicación confusa, explicación incompleta, falta de comunicación directa con el autor y en el caso de traducciones, que se presenta muy a menudo, errores en la traducción o falta de conocimiento de la realidad que se vive en un país completamente diferente al del autor.

Por todo lo anterior, la presente Tesis, en síntesis es un intento por adecuar los principios fundamentales de la Teoría del Control a la realidad diaria que vivimos con nuestros estudiantes y esto solo se puede hacer cuando se conoce el entorno de la sociedad en la que nos desenvolvemos. Esta es la razón por la cual a pesar del desarrollo de los más modernos métodos de enseñanza-aprendizaje, el maestro de calidad ha sido, es y será un personaje insustituible e indispensable en todas las instituciones de enseñanza de cualquier nivel.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

INDICE GENERAL

I.- PAGINAS PRELIMINARES.

- I.1.- Contraportada (UANL)
- I.2.- Contraportada (FIME)
- I.3.- Carta del Comité de Tesis
- I.4.- Dedicatorias y Agradecimientos
- I.5.- Prologo
- I.6.- Justificación
- I.7.- Objetivo de la Tesis
- I.8.- Sintesis
- I.9.- Indice General

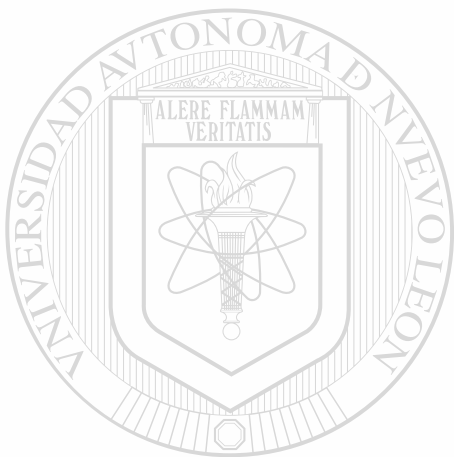
II.- CAPITULOS.

Pag.

II.1.- Introducción a los Sistemas de Control	
1-1.- Introducción.....	1
1-2.- Breve reseña historica del desarrollo de la Teoría del Control.....	2
1-3.- Terminología Especial para Sistemas de Control.....	3
1-4.- Sistemas de Control de Lazo Abierto y de Lazo Cerrado.....	5
1-5.- Ejemplos de Sistemas de Control.....	12
1-6.- Requerimientos Generales de un Sistema de Control..	18
II.2.- La Transformada de Laplace	
2-1.- Introducción y breve repaso de numeros, variables y funciones complejas.....	19
2-2.- La Transformada de Laplace.....	25
2-3.- La Transformada Inversa de Laplace.....	43
II.3.- Modelos Matematicos y Funciones de Transferencia	
3-1.- Modelos Matematicos.....	55
3-2.- Funciones de Transferencia.....	58
3-3.- Linealización de Modelos Matematicos Lineales...	67
II.4.- Diagramas de Bloques y Graficos de Flujo de Señal	
4-1.- Diagramas de Bloques.....	72
4-2.- Cálculo de Funciones de Transferencia de Sistemas Fisicos.....	89
4-3.- Gráficos de Flujo de Señal.....	101
II.5.- Acciones Básicas de Control	
5-1.- Introducción.....	114
5-2.- Clasificación de los Sistemas de Control Automatico	114
5-3.- Controles Electronicos Tipo P, P-D, P-I, y P-I-D...	123
II.6.- Respuesta Transitoria	
6-1.- Introducción.....	134
6-2.- Especificaciones en el Dominio del Tiempo.....	135
6-3.- Sistemas de Primer Orden.....	136

6-4.-	Sistemas de Segundo Orden.....	142
6-5.-	Respuesta a la señal escalón unitario de un sistema de segundo orden.....	146
6-6.-	Especificaciones de la Respuesta Transitoria.....	153
6-7.-	Análisis de la estabilidad en el Plano Complejo....	155
6-8.-	Criterio de Estabilidad de Routh.....	156
6-9.-	Análisis de la Estabilidad Relativa.....	160
6-10.-	Determinación del Rango de Ganancia K de un Sistema de Control, aplicando el Criterio de Routh.	161
II.7.-	Análisis del Error	
7-1.-	Concepto del Error.....	164
7-2.-	El Error Estacionario.....	164
7-3.-	Clasificación de los Sistemas de Control.....	166
7-4.-	Coefficientes de Error Estático.....	166
II.8.-	Método del Lugar de las Raíces	
8-1.-	Introducción.....	173
8-2.-	El Concepto del Lugar de las Raíces.....	173
8-3.-	Graficas para funciones de transferencia simples...	174
8-4.-	Reglas para graficar rápidamente.....	180
8-5.-	Ejemplos Ilustrativos.....	189
8-6.-	Aplicaciones de la Grafica del Lugar de las Raíces.	196
8-7.-	Como establecer la Ganancia K de un Sistema de Control.....	199
8-8.-	Cálculo de la Respuesta Transitoria de un Sistema..	201
8-9.-	Conclusiones.....	204
<hr/>		
II.9.-	Métodos de Respuesta a la Frecuencia	
9-1.-	Introducción.....	206
9-2.-	Justificación de la substitución de s por $j\omega$	207
9-3.-	Graficas en Coordenadas Polares.....	209
9-4.-	Graficas en Coordenadas Rectangulares.....	212
9-5.-	El punto de vista grafico.....	214
9-6.-	Determinación experimental de la Respuesta a la Frecuencia.....	215
9-7.-	Diagramas de Bode.....	217
9-8.-	Márgen de Ganancia y Márgen de Fase.....	237
9-9.-	Criterio de Nyquist.....	244
9-10.-	Graficas del Módulo en función del Angulo Lugar de Black.....	267
9-11.-	Lugares de Amplitud Constante "M" y Fase Constante "N" en el Plano Complejo.....	268
9-12.-	Cartas de Nichols.....	276
II.10.-	Conclusiones y Recomendaciones.....	287
II.11.-	Bibliografía.....	288

II.12.- Apéndices	
12-1.- Apéndice A. Tablas de la Transformada de Laplace...	289
12-2.- Apéndice B. Solución de Ecuaciones.....	293
12-3.- Apéndice C. Carta de Nichols.....	296
12-4.- Apéndice D. Tabla para la conversión de decibeles..	297
12-5.- Apéndice E. Tabla de $1 + j\omega$	298
12-6.- Apéndice F. Respuestas a los problemas propuestos..	299



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

CAPITULO 1

INTRODUCCION A LOS SISTEMAS DE CONTROL

1-1.- Introducción.

La Teoría del Control como ciencia es relativamente muy joven ya que a la fecha tiene menos de cien años de desarrollo, en comparación con otras ciencias como las matemáticas, la física y la medicina que tienen una antigüedad de más de mil años.

Los sistemas de control se empezaron a desarrollar a partir de principios de éste siglo, con el fin de liberar al hombre de tareas manuales de tipo repetitivo que eran muy tediosas.

En un principio los primeros sistemas de control fueron muy sencillos, pero conforme se fué investigando más, se encontraron otras aplicaciones más complejas.

En la actualidad es común el uso de sistemas de control para controlar automáticamente muchos parámetros, por ejemplo la presión, la temperatura, la viscosidad, la humedad, el voltaje, la velocidad, la frecuencia y muchos más.

Como una consecuencia lógica, al mejorar el control de los procesos industriales, se logró aumentar la calidad de los productos y el abaratamiento de los mismos, al poder aumentar el volumen de la producción. Muchos productos hoy son más baratos y de mejor calidad que antes, por ejemplo las calculadoras, los televisores, las computadoras etc, lo cual ha sido un gran incentivo para continuar la investigación con más intensidad en el campo de los sistemas de control.

Algunas personas piensan que el desarrollo de los sistemas de control ha sido el culpable de que muchos empleados estén perdiendo sus trabajos al ser substituidos por una máquina automática o un robot que puede pintar, soldar, colocar tornillos, etc. y en realidad esto es un hecho que ha contribuido al desempleo masivo, pues la industria moderna cada vez requiere menos personal. El lado positivo de todo esto es que el hombre tendrá que dedicarse a tareas más elevadas como el razonamiento, dejando las tareas repetitivas para las máquinas.

De acuerdo con todo lo anterior, a futuro la tendencia al uso de Sistemas de Control será cada vez mayor, tanto en cantidad como en complejidad, por lo que se requiere que los ingenieros tengan muy buenos fundamentos de lo que es la teoría del control.

1-2.- BREVE RESEÑA HISTORICA DEL DESARROLLO DE LA TEORIA DEL CONTROL.

Se considera que el primer sistema de control automático que se construyó fué el Regulador Centrifugo de James Watt, para el control de la velocidad de su maquina de vapor, construida en el siglo XVIII.

Sin embargo hasta la fecha no se ha encontrado ningún procedimiento matemático o diseño de ingeniería, que haya servido de base a James Watt para construir su regulador, por lo que se supone que la forma en la que se construyó este regulador fué totalmente empirica, sin ningún proyecto de ingeniería. A pesar de ello, este regulador es tan bueno que hoy, despues de 200 años de haber sido creado se sigue utilizando en el control de la velocidad de turbinas hidráulicas para la generación de energía eléctrica.

Los pioneros del desarrollo de la teoria del control como una ciencia son tres científicos, Minorsky, Hazen y Nyquist, que a principios de este siglo hicieron aportaciones muy valiosas para el estudio de los sistemas de control. Minorsky en 1922, basandose en ecuaciones diferenciales demostró como se podía determinar la estabilidad de controles automáticos para direccionamiento de barcos de gran tamaño. Nyquist en 1934 dió a conocer un procedimiento para determinar la estabilidad de sistemas de control de lazo cerrado. Hazen en 1934 introduce por primera vez el término servomecanismo en los sistemas de control.

En 1940 se empezaron a desarrollar los métodos de respuesta a la frecuencia y unos años más tarde, los países que entraron en acción a la II Guerra Mundial, destinaron muchos recursos a la investigación de los sistemas de control, lo que dió lugar a la creación de armas cada vez más mortíferas y más sofisticadas. Terminada la guerra, los descubrimientos de la teoría del control se fueron aplicando poco a poco con fines pacíficos.

En 1950 Evans desarrolla y da a conocer su famoso método de analisis y diseño de sistemas de control llamado "Método del Lugar de las Raíces". Este método junto con los métodos de respuesta a la frecuencia constituyen la parte más importante de la teoría clásica del control.

En virtud de que los sistemas de control se fueron complicando cada vez más, con múltiples entradas y salidas, la teoría del control clásica ha tenido que ser substituida por la teoría de control moderna basada en el dominio del tiempo con aplicación de variables de estado.

Actualmente la teoría de control moderna utiliza cada vez más las computadoras como parte integral del sistema de control, y lo más reciente en el desarrollo del control, son los sistemas de control óptimo, con adaptación y aprendizaje. Esto es, sistemas que trabajan en condiciones óptimas, con adaptación a diferentes condiciones de trabajo y con posibilidades de aprender, en una palabra sistemas con inteligencia muy semejante a la del hombre.

1-3.- TERMINOLOGIA ESPECIAL PARA SISTEMAS DE CONTROL.

Antes de iniciar el estudio de los sistemas de control, es necesario definir algunos términos que son ampliamente usados en esta materia. Algunos de éstos términos son conceptos utilizados en otras áreas de estudio, por lo que se hace la aclaración de que las definiciones serán dadas desde el punto de vista de la teoría del control. Es muy importante definir estos conceptos para evitar alguna confusión y que todos podamos hablar el mismo idioma o terminología del control.

PLANTA.- Desde el punto de vista del control, planta es cualquier objeto físico que se ha de controlar, por ejemplo un motor, un horno, una caldera, etc.

PROCESO.- Es un desarrollo natural o artificial, progresivamente continuo, que se caracteriza por una serie de cambios graduales que tienden de una forma u otra hacia un determinado resultado final. Los procesos pueden ser mecánicos, eléctricos, químicos, etc.

SISTEMA.- Es una combinación de varios componentes que actúan en forma conjunta para lograr un determinado objetivo. El concepto de sistema se puede decir que es más amplio que el de proceso ya que se puede aplicar no solo a fenómenos físicos, sino a fenómenos abstractos como la economía.

PERTURBACION.- Es una señal indeseable que tiende a afectar adversamente el valor de la salida de un sistema. La perturbación puede ser interna si se genera dentro del sistema o externa si se genera fuera del mismo. Un ejemplo de perturbación lo tenemos en un rayo o descarga atmosférica que se induce como una perturbación en una red eléctrica de distribución. El rayo es por supuesto una perturbación externa ya que la red eléctrica no genera ni tiene nada que ver con la producción de los rayos. En éste caso una perturbación interna en la red eléctrica sería cualquier falla en algún componente de la misma, por ejemplo en un transformador, una cuchilla, un aislante, etc.

RETROALIMENTACION.- En sistemas de control es un término usado muy a menudo y significa regresar parte de una señal de salida hasta la entrada con el propósito de comparar ambas señales.

SISTEMA DE CONTROL RETROALIMENTADO.- Es un sistema que trata de mantener una relación preestablecida entre la salida y la entrada, comparando ambas señales y utilizando la diferencia para establecer el control.

Para aclarar este concepto veamos el siguiente ejemplo, si queremos obtener una cierta velocidad como señal de salida de un motor, hay que aplicarle una señal de entrada que sería un voltaje. Para comprobar que la salida efectivamente se alcanzó, es necesario

retroalimentar o regresar parte de la señal de salida a la entrada para comparar y en base a ésta comparación se establecerá si hay o no error en la salida. Más adelante hablaremos mucho más de éste concepto y veremos más ejemplos de aplicación. Para terminar diremos que el cuerpo humano quizás sea el sistema de control retroalimentado más complejo que existe ya que tiene una gran cantidad de sistemas totalmente automáticos para controlar la temperatura, la presión de la sangre, la cantidad de azúcar en la sangre, pulsos del corazón, etc. Es tan importante la retroalimentación que algunos científicos aseguran que las personas dementes no son más que sistemas de control que no tienen retroalimentación y por lo tanto no se dan cuenta de sus actos. Quizás algún día se pueda conectar la retroalimentación a éstas personas y volverían a la normalidad.

SERVOMECANISMO. -Textualmente significa máquina controlada. También se puede definir como un sistema de control retroalimentado en el cual la salida puede ser una posición, velocidad o aceleración mecánica. Los servomecanismos desarrollan un papel muy importante en la industria moderna, por ejemplo en el funcionamiento totalmente automático de máquinas herramienta de control numérico.

SISTEMA DE REGULACION AUTOMATICA. -Es un sistema de control retroalimentado en el que la entrada y la salida son constantes o varían con el tiempo y en donde la función principal es mantener la salida en el nivel deseado apesar de las perturbaciones que se presenten.

SISTEMAS DE CONTROL DE PROCESOS. -Tienen una aplicación muy extensa en la industria moderna y son sistemas de regulación automática en donde la salida es una variable como la temperatura, la presión, el flujo, nivel de líquido o PH. La mayoría de los sistemas de control de procesos incluyen servomecanismos para llevar a cabo las diferentes funciones en forma totalmente automática.

DIRECCION GENERAL DE BIBLIOTECAS

1-4.- SISTEMAS DE CONTROL DE LAZO ABIERTO Y DE LAZO CERRADO.

Los sistemas de control pueden ser de lazo abierto o de lazo cerrado. Empezaremos dando la definición de cada uno de ellos y posteriormente se estudiarán las características y se verán ejemplos de ambos tipos de sistemas.

Sistemas de Control de Lazo Abierto.—Se puede definir como un sistema de control que no tiene retroalimentación y se representa por el siguiente diagrama de bloques.

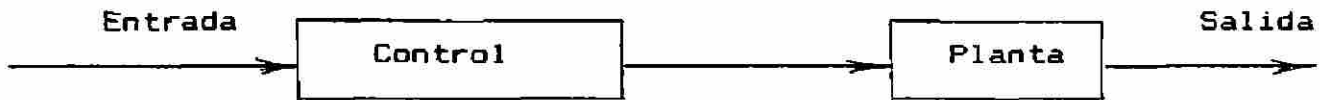


Fig. 1-1.- Sistema de Control de Lazo Abierto.

En éstos sistemas la salida no se mide ni se retroalimenta para compararla con la entrada. El sistema consta básicamente de dos partes una es el control, que es la inteligencia del sistema y la otra es la planta que es el objeto a controlar.

Es importante que los sistemas de lazo abierto estén muy bien calibrados ya que el sistema por sí solo no tiene capacidad para auto-corrigerse.

Se recomienda usar éstos sistemas solo cuando no hay perturbaciones ya que cualquier perturbación afectará seriamente y se reflejará como un error en la salida.

Prácticamente cualquier sistema que funcione en base a tiempos es un sistema de lazo abierto, por ejemplo una lavadora de ropa. En éste caso no se mide realmente la salida ni se utiliza para controlar, ya que terminado el tiempo un reloj cambia o suspende la operación que se está realizando.

Los fabricantes les llaman a éstas, lavadoras automáticas, pero desde el punto de vista de control, para ser automáticas deberían medir la señal de salida que es la limpieza de la ropa y en función del grado de limpieza prolongar o acortar el ciclo de lavado hasta obtener la limpieza deseada. Debido a que es difícil medir la limpieza de la ropa ya que no hay ni escala ni unidades establecidas, lo que se hace es que una persona revisa la limpieza de la ropa y dependiendo de su juicio muy subjetivo se toma la decisión de sacar la ropa o volver a dar otro ciclo de lavado. Por todo lo anterior las lavadoras llamadas automáticas, a lo más que pueden aspirar es a ser sistemas de control semiautomáticos.

Otro ejemplo de sistemas de control de lazo abierto son los semáforos para control de tráfico, cuyo ajuste se hace en base a tiempos. Antes de instalar un semáforo en un cruce se hace un estudio del tráfico por las diferentes calles que concurren. Dicho estudio es un conteo promedio del tráfico durante un tiempo que puede ser un mes aproximadamente. En base a los datos obtenidos en el conteo se ajustan los tiempos del verde, amarillo y rojo en cada caso.

Como es lógico pensar las condiciones del tráfico son muy variables, dependiendo del día y la hora de la semana, por lo que se necesitaría ajustar constantemente los tiempos del semáforo a las condiciones cambiantes del tráfico para que pudiera realmente ser un sistema de control automático de lazo cerrado.

Para ajustar los tiempos a las condiciones cambiantes del tráfico se requiere estar contando constantemente la cantidad de vehiculos y una computadora que esté tomando las decisiones para cambiar los tiempos cada determinado tiempo ya preestablecido. En la actualidad debido al alto costo que representa éste tipo de sistema, su uso solo se justifica en algunos cruces de grandes ciudades donde el tráfico es muy intenso.

Sistemas de Control de Lazo Cerrado.- Son sistemas de control que si tienen retroalimentación. La salida en éste caso si se mide y se regresa para comparar con la entrada y de ésta comparación se toma una acción de control. El error que es la diferencia de las señales de entrada y de salida es de fundamental importancia para tomar una acción de control que tienda a reducir dicho error para llegar finalmente al valor deseado en la salida.

Un sistema de control de lazo cerrado se puede representar por medio del siguiente diagrama de bloques.

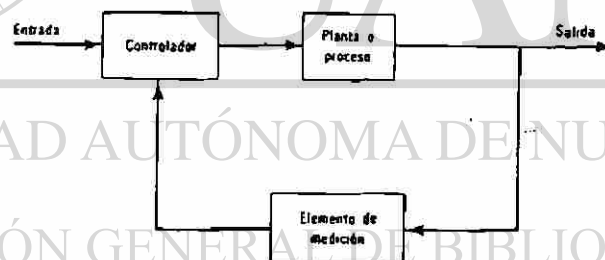


Fig. 1-2 Sistema de control de lazo cerrado

Además del controlador y la planta que tiene un sistema de lazo abierto, existe un elemento de medición en la retroalimentación. Este elemento de medición es precisamente el que mide la salida y la regresa en parte para comparar con la entrada.

El elemento de medición también es llamado transductor ya que casi siempre se requiere que éste cambie la señal de salida a otra señal de naturaleza distinta para que sea del mismo tipo de la señal de entrada y se pueda realizar la comparación de las dos señales.

Por ejemplo si la planta es un motor y la salida es una velocidad, el transductor o elemento de medición tiene que ser un generador tacometro que convierta la velocidad (señal de salida) a una señal de voltaje proporcional que es el tipo de señal de entrada.

En la práctica hay muchos transductores que convierten velocidad a voltaje, temperatura a voltaje, presión a voltaje, posición mecánica a voltaje etc, ya que la señal de entrada a los controladores generalmente es un voltaje.

Con el propósito de ilustrar un poco más el concepto de sistemas de control de lazo cerrado, veremos el sistema térmico que se ilustra en la figura 1-3. En el sistema ilustrado el objetivo es calentar agua hasta determinada temperatura y para ello se tiene un depósito de agua

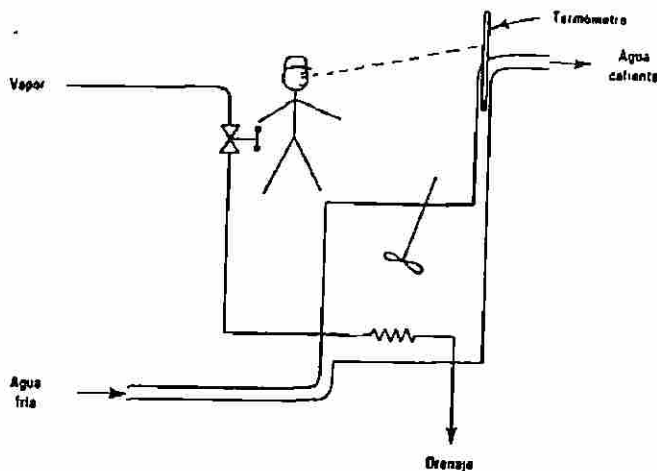


Fig 1-3 Control de retroalimentación manual de un sistema térmico

con un intercambiador de calor que funciona con vapor y un agitador para homogenizar la temperatura en el tanque. Además hay una válvula para controlar la entrada de vapor y un termómetro para medir la temperatura del agua en la salida.

La persona que se indica en la figura hace las veces de controlador humano y su trabajo consiste en estar viendo constantemente la temperatura del termómetro, si la temperatura del agua no se ha alcanzado, la válvula de vapor permanecerá abierta para seguir calentando el agua. Si la temperatura del agua en la salida se va aproximando a la temperatura deseada, el hombre tendrá que ir cerrando poco a poco la válvula para no pasar de la temperatura que se desea alcanzar. Al utilizarse el agua caliente, la temperatura en la salida bajará y el hombre tendrá que abrir de nuevo la válvula de vapor. Como se ve, el trabajo del hombre es un trabajo muy repetitivo y tedioso ya que tiene que estar viendo durante ocho horas (o su turno de trabajo) el termómetro y dependiendo de la temperatura abrir, cerrar o mantener la válvula de vapor.

En las condiciones que trabaja el sistema tiene una retroalimentación, pero ésta se hace por el hombre, por lo que el sistema no es automático sino de retroalimentación manual.

Es relativamente fácil substituir al hombre por un controlador automático como se puede ver en la fig. 1-4.

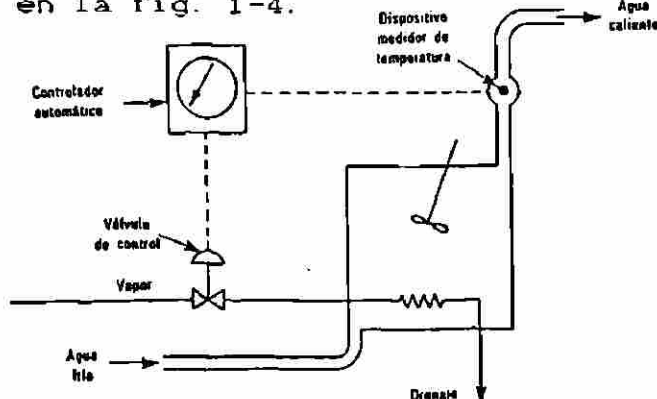


Fig. 1-4 Control con retroalimentación automática de un sistema térmico

Una vez modificado el sistema con el controlador automático, solo se requiere colocar la perilla del controlador en la temperatura deseada, lo cual será la entrada de referencia para el sistema.

El dispositivo medidor de la temperatura del agua (termopar) retroalimenta una señal de voltaje al controlador dependiendo de la temperatura del agua en la salida. De la comparación de éstas dos señales, la de retroalimentación y la de referencia surge una señal de error que se aplica a la válvula de control operada electricamente, para abrirla, cerrarla o mantenerla en su misma posición.

Como es lógico, el sistema automático presenta muchas ventajas en comparación con el de operación manual, el control automático es más eficiente, más barato, más preciso y sobre todo releva al hombre de realizar éste tipo de trabajos para que se dedique a labores mucho más complejas.

Los sistemas de control de lazo cerrado por sus ventajas son muy utilizados tanto en la industria como en el hogar, donde podemos mencionar algunas aplicaciones muy conocidas, por ejemplo los refrigeradores, los calentadores de agua automáticos (Boilers), los sistemas de alimentación de agua hidroneumáticos, sistemas de acondicionamiento de ambiente o clima artificial, etc.

Comparación entre Sistemas de Lazo Abierto y de Lazo Cerrado

No se puede decir que un sistema es definitivamente mejor que otro, ya que mucho depende de la aplicación. Los dos sistemas se aplican mucho en la práctica e incluso algunas veces se combinan en un mismo sistema de control el lazo abierto y el lazo cerrado.

Con el fin de comparar ambos sistemas analizaremos las características de uno y otro en el siguiente cuadro:

Sistemas de Lazo Cerrado	Sistemas de Lazo Abierto
1.- Se recomienda usarlos cuando el sistema estará sujeto a perturbaciones internas o externas.	1.- Se recomienda usarlos solo cuando no haya perturbación.
2.- Tienen capacidad para corregir errores o autocorregirse.	2.- No tienen capacidad para autocorregirse.
3.- Se pueden utilizar componentes no muy exactos y por lo tanto económicos.	3.- Se tienen que utilizar componentes muy exactos y por lo tanto caros.
4.- Es posible que se presenten problemas con la estabilidad por su tendencia a corregir los errores, lo cual puede provocar que el sistema oscile.	4.- No hay ningún problema con la estabilidad.
5.- Su diseño generalmente es más complicado.	5.- Su diseño es relativamente sencillo.

Además de los sistemas de control de lazo abierto y cerrado en la teoría del control se manejan otros conceptos de sistemas, como los sistemas de control directo e indirecto, sistemas de control adaptados y sistemas de control con aprendizaje.

Sistemas de Control Directo e Indirecto.— Para lograr mejores resultados en el control es necesario siempre tratar de medir y retroalimentar la variable deseada en forma directa, por ejemplo la temperatura, la presión, la velocidad, etc. Sin embargo en el control de procesos algunas veces se desea medir y controlar por ejemplo la calidad de un producto, lo cual puede ser un problema difícil ya que no es fácil encontrar un medidor de calidad, por lo que se deberán medir y controlar en este caso las variables más directamente relacionadas a la calidad del producto.

Sistemas de Control Adaptados.— Cuando un sistema de control tiene mucho tiempo trabajando, es posible que algunas componentes sufran deterioro o desgaste. Si el sistema tiene capacidad para adaptarse a las nuevas condiciones y trabajar satisfactoriamente, se dice que este es un sistema de control adaptado. Este tipo de sistemas lógicamente son de mucha calidad y gran confiabilidad ya que fácilmente se adaptan a las condiciones del sistema.

Sistemas de Control con Aprendizaje.— Muchos sistemas de control de lazo abierto se pueden convertir en sistemas de lazo cerrado colocando a un hombre que sirva de retroalimentación, sobre todo en casos en donde la variable de salida sea difícil de medir con algún aparato.

Al considerar a un hombre como parte del sistema de control, se complica el problema de escribir una ecuación que represente la operación que realiza el hombre. Uno de los factores que complica el problema es la capacidad que tiene el hombre para aprender, ya que al ir adquiriendo experiencia la persona se convierte en un mejor elemento del sistema de control. Este tipo de sistemas que tienen capacidad de aprender recibe el nombre de sistemas de control con aprendizaje.

Para terminar con éste tema diremos que los sistemas de control se pueden clasificar de la siguiente forma:

- a) Sistemas de Control Lineales y No Lineales.
- b) Sistemas de Control Invariante en el Tiempo y Variante en el Tiempo.
- c) Sistemas de Control de Tiempo Continuo y de Tiempo Discreto.
- d) Sistemas de Control de una Salida y de varias Salidas.
- e) Sistemas de Control con parametros concentrados y con parametros distribuidos.
- f) Sistemas de Control Determinísticos y Estocásticos.

a) **Sistemas de Control Lineales y No Lineales.**- Son sistemas lineales aquellos cuya operación se puede representar por medio de ecuaciones lineales. Desgraciadamente la mayoría de los sistemas de control que se tienen en la vida real son no lineales. Sin embargo aunque un sistema sea no lineal, frecuentemente se puede convertir a lineal cuando se opera en un cierto rango limitado. A éste procedimiento se le llama linealización de sistemas no lineales y más adelante se verá un procedimiento matemático para ello. Es muy importante tratar de linealizar un sistema ya que su estudio y análisis es más sencillo debido a que solo a los sistemas lineales se les puede aplicar el principio de la superposición y el de la proporcionalidad.

b) **Sistemas de Control Invariantes en el tiempo y Variantes en el tiempo.**- Son sistemas invariantes en el tiempo aquellos cuyas ecuaciones matemáticas o modelo matemático no cambia con el tiempo y variables son aquellos cuyo modelo si se modifica al cambiar el tiempo. En forma general se puede decir que en los sistemas variantes en el tiempo, la forma de la ecuación o sus coeficientes dependen de, o son función del tiempo, mientras que en los sistemas invariantes, las ecuaciones son independientes del tiempo.

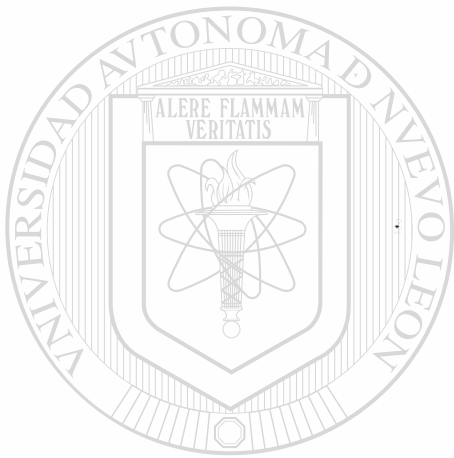
c) **Sistemas de Control de Tiempo Continuo y de Tiempo Discreto.**- En un sistema de control de tiempo continuo, todas las variables son función de un tiempo continuo, por ejemplo la medición de voltaje o corriente con un multímetro en forma analógica. En los sistemas de control de tiempo discreto, las variables son conocidas solo en instantes discretos de tiempo, por ejemplo cualquier medición digital o en forma de tren de pulsos.

d) **Sistemas de Control de una entrada y de múltiples entradas.**- Un sistema de control simple tiene una sola entrada y una sola salida. Cuando un sistema de control es más grande y complejo, puede tener gran cantidad de entradas y salidas, por ejemplo un sistema de control de procesos industriales, donde se requiere controlar temperaturas, presiones, velocidades, posiciones, etc.

e) **Sistemas de Control con parámetros concentrados y parámetros distribuidos.**- Los sistemas de control con parámetros concentrados son aquellos que se pueden representar por medio de ecuaciones diferenciales ordinarias, por ejemplo al plantear ecuaciones para un circuito eléctrico, en el que se consideran concentrados los parámetros resistivos, inductivos y capacitivos.

Los sistemas de control con parámetros distribuidos son más complicados y requieren para su representación de ecuaciones diferenciales parciales, por ejemplo al plantear ecuaciones para un circuito eléctrico en el que se considera que la resistencia, la inductancia y la capacitancia están distribuidas en todo el circuito.

f) **Sistemas de Control Determinísticos y Estocásticos.**- En los sistemas de control Determinísticos, siempre la respuesta a una entrada se puede determinar con seguridad, por lo que se puede decir que la respuesta es predecible y además repetible. Pero cuando la respuesta a una entrada no se puede predecir con toda seguridad, el sistema de control se dice que es Estocástico, por lo que su respuesta en éste caso solo es probable. Los sistemas Estocásticos también se les llama probabilísticos.



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

EJEMPLOS DE SISTEMAS DE CONTROL.

Se presentarán a continuación algunos ejemplos de sistemas de control utilizados ampliamente en la industria. El objetivo de ésta sección es que el estudiante que se inicia en el estudio de los sistemas de control, vea aunque sea en forma muy general y superficial algunas aplicaciones importantes de los sistemas de control de velocidad, presión, temperatura, posición, etc.

Sistema de Control de Presión y Temperatura.- Como es ya conocido, en las ollas de cocimiento a presión, debido a la presión interna, los alimentos requieren menor tiempo de cocimiento, con el consiguiente ahorro tanto en tiempo como en combustible.

Este mismo principio es aplicado a nivel industrial en hornos de recalentamiento y de fundición, incrementando la presión interna y reduciendo el tiempo de calentamiento y la cantidad de combustible. Si a nivel doméstico ésto representa un ahorro al consumir menos combustible, a nivel industrial el ahorro que se logra es mayor ya que los consumos de combustible son mucho mayores.

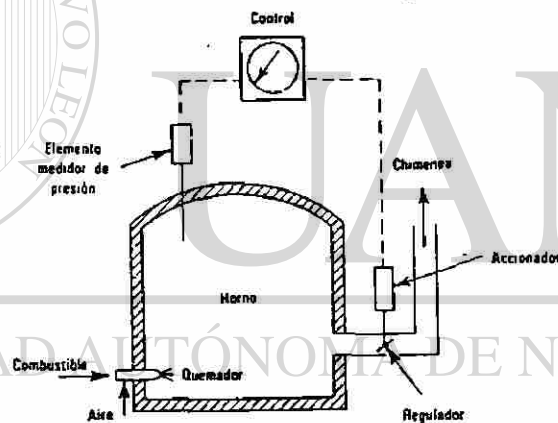


Fig. 5 Control de Presión en un Horno

En la figura se representa el diagrama esquemático de un horno de recalentamiento en donde se desea controlar la presión interna a cierto valor. El valor de la presión deseada se ajusta en el control por medio de una perilla, siendo ésta la señal de entrada de referencia para el sistema.

A medida que el horno se va calentando, los gases de combustión y el calentamiento van aumentando la presión interna paulatinamente. En estas condiciones la válvula reguladora permanece cerrada para incrementar la presión y el elemento medidor de presión envía la señal de retroalimentación al control para establecer un error, de la comparación de ésta señal y la de referencia.

A medida que la presión interna se va aproximando a la presión deseada, el error va tendiendo a cero y el control dará una orden al accionador para abrir un poco la válvula reguladora y evitar que la presión sobrepase el valor deseado.

Este control, por lo tanto se encarga de mantener la presión interna del horno a un valor constante o nominal de diseño.

De acuerdo con las leyes del gobierno mexicano y por seguridad para todos, estos equipos industriales que trabajan a presión, deberán contar con válvulas de alivio ajustadas a una presión un poco arriba de la presión normal de diseño. Se entiende que las válvulas de alivio solo deberán trabajar en caso de falla del sistema de control, por lo que se considera esto como una situación de emergencia para evitar la explosión del equipo y posibles accidentes al personal.

Así como se controla la presión, también se puede controlar en forma semejante la temperatura del horno. Algunos procesos industriales requieren del calentamiento gradual o sostenido de materiales, y esto se puede lograr con un control de temperatura.

Cuando la temperatura que se desea obtener es constante, el control es semejante al de presión ya analizado. Sin embargo cuando el proceso de calentamiento debe seguir cierta secuencia, el control es más complicado ya que se requiere programar los cambios de temperatura de acuerdo con la secuencia deseada.

Para controlar la temperatura a un valor deseado, se ajusta dicha temperatura como señal de referencia en el control y con un termopar se mide y se retroalimenta la señal de la temperatura real dentro del horno. De la comparación de estas dos señales, se tendrá una señal de error que será la base para controlar la temperatura, controlando en tal caso la cantidad de combustible que se alimenta al horno.

Sistema de Control de Velocidad.- La figura representa el diagrama esquemático del regulador de velocidad de James Watt.

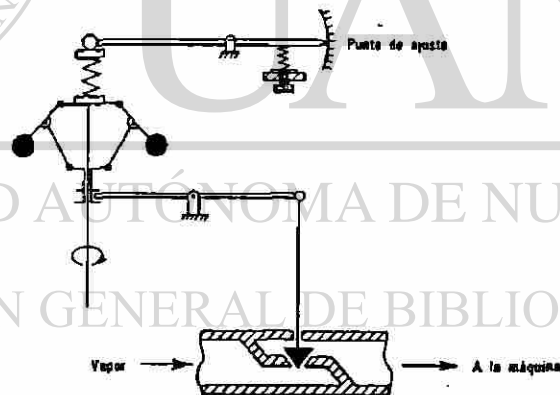


Fig. 1-6 Sistema de Control de Velocidad

El alma del sistema de control es un mecanismo de esferas que al girar por acción de la fuerza centrífuga se alejan o se acercan a su eje de giro.

La velocidad deseada se fija mediante un tornillo que está colocado en la parte superior del diagrama, lo que constituye el punto de ajuste o señal de referencia.

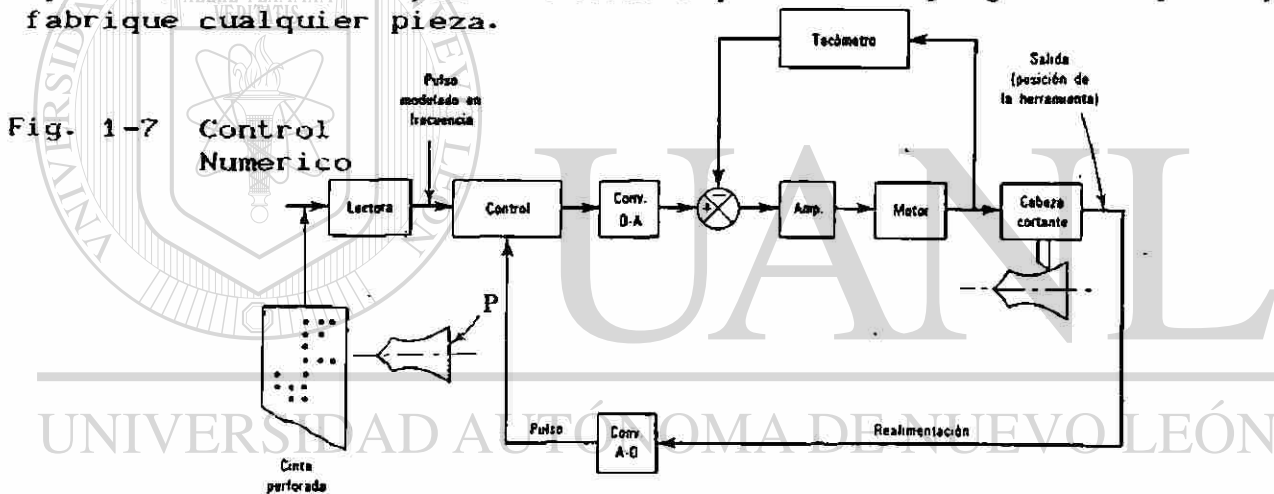
El mecanismo de esferas está acoplado mecánicamente al eje de la turbina de vapor para que su velocidad sea igual o proporcional a la velocidad que se desea controlar.

Cuando la velocidad de la máquina sobrepasa el valor deseado, las esferas se alejan del eje de giro debido a la fuerza centrífuga y éste movimiento finalmente provoca un estrangulamiento de la válvula de vapor, reduciéndose la velocidad.

Al contrario, cuando la velocidad de la máquina baja de su valor nominal, las esferas se acercan al eje y éste movimiento provoca la apertura de la válvula de vapor para aumentar la velocidad.

A pesar de que éste sistema tiene ya casi 200 años de haber sido inventado por James Watt, para controlar su famosa máquina de vapor, en la actualidad aun se sigue utilizando para controlar la velocidad de cualquier sistema de rotación, por ejemplo turbinas hidráulicas, de vapor, de gas etc.

Sistemas de Control Numérico. - Este tipo de control es ampliamente usado en la industria para controlar los movimientos y posiciones de gran cantidad de máquinas industriales. En este caso el sistema se aplica a un torno cuyos movimientos pueden ser programados para que se fabrique cualquier pieza.



En el diagrama indicado en la figura, la señal de entrada es un programa que se puede elaborar en una cinta perforada, una cinta magnetica o un diskette.

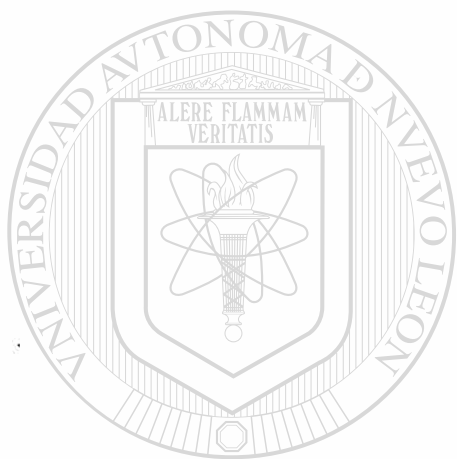
Dicho programa es elaborado por un operador que le señala por medio de claves, los movimientos que la máquina debe realizar para elaborar la pieza deseada. Esta información se lee y se graba en una lectora. La lectora electrónica va proporcionando información en forma de tren de pulsos al control, el cual tiene dos entradas.

En un principio cuando se inicia la operación del sistema, la posición de la herramienta es cero, señal que se retroalimenta al control, por lo que la única señal en el control es la de la lectora.

La salida del control se aplica a un convertidor Digital-Analógico que convierte el tren de pulsos en un voltaje continuo proporcional. Este voltaje se aplica al sumador y de ahí a un amplificador ya que en el control se manejan voltajes de señal pequeños. Una vez amplificado el voltaje se aplica a un motor que finalmente mueve la cabeza cortante a la posición requerida. Esta posición de la cabeza es constantemente retroalimentada através de un convertidor Analógico-Digital para comparar con la señal de entrada.

Se requiere el convertidor Analógico-Digital para poder comparar la señal de tren de pulsos de la entrada con una señal de la misma naturaleza (pulsos) en la retroalimentación.

Generalmente este tipo de sistemas es de respuesta muy rápida, por lo que en un segundo, el sistema puede retroalimentarse y corregir la posición de la cabeza cortante 60 veces o más.



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Sistemas de Control por Computadora.- En los últimos años se ha venido desarrollando la aplicación de computadoras para el control de procesos industriales. En seguida se analizará la aplicación de una computadora para controlar el proceso en un Alto Horno.

Monclova Coahuila es de las pocas ciudades no solo a nivel nacional sino a nivel mundial que cuenta con una empresa siderúrgica que tiene varios Altos Hornos (en México sólo existen Altos Hornos en Monclova Coah. y en Lázaro Cardenas Michoacan). Estos equipos son de proporciones gigantescas pues tienen una altura aproximada de 75 metros y procesan cantidades enormes de materias primas continuamente durante las 24 horas del día y los 365 días del año. Para darnos una idea de las cantidades de materias primas que se manejan por día citaremos las siguientes cifras: Un Alto Horno moderno (por ejemplo el Alto Horno No 5 de la Sid. No 2) tiene capacidad para producir aproximadamente 4000 toneladas diarias de arrabio o acero de primera fusión, y debido al proceso de fundición, debe ser mantenido funcionando permanentemente.

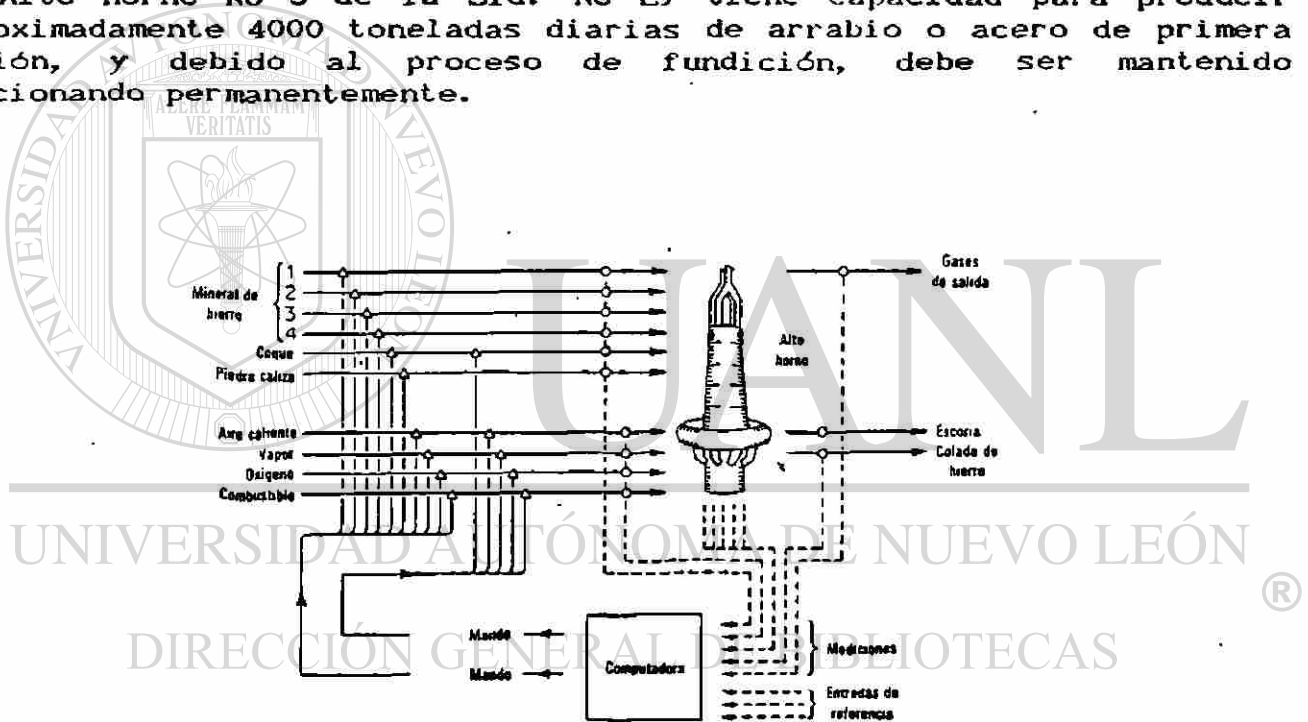


Fig 1-8 Control de un Alto Horno por Computadora

Para producir una tonelada de arrabio se necesita alimentar por la parte superior del Horno (tragante) aproximadamente 2 toneladas de mineral de hierro, 1 tonelada de coque (carbón coquizado) y 1/2 tonelada de fundente. Además se necesita alimentar por la Dona unas 4.5 toneladas de aire caliente. Este aire es calentado en estufas especiales de gran tamaño antes de introducirlo al Alto Horno.

El calor para el proceso se obtiene de la combustión del coque, de la cual se produce monóxido de carbono gaseoso. Este gas, junto con el coque reducen en el Alto Horno el mineral de hierro, mientras que la piedra caliza actúa como fundente formando la escoria con todas las impurezas del mineral. El hierro fundido o arrabio escurre a través del colchón de aire de las toberas y ocupa el fondo del horno llamado crisol, mientras que la escoria formada por las impurezas flota en la superficie del crisol. Periódicamente se vacía primero la escoria a través de un orificio llamado piquera de escoria, hacia un lugar llamado piletas de escoria, en donde se enfría la escoria con agua rociada para posteriormente tirarse en camiones en algún otro lugar alejado de la planta. Luego se vacía el arrabio por otro orificio llamado piquera de arrabio por medio de canales especiales hacia carros termo que conducen el arrabio al siguiente proceso que es el de aceración.

En virtud de la cantidad tan enorme de materias primas que se procesan continuamente y de que la presencia de impurezas como el carbono, manganeso, silicio, azufre, fósforo etc, depende de la composición del mineral, del coque y de la caliza utilizados, es bastante difícil que una sola persona pueda controlar la composición química del arrabio que se obtiene en cada colada del Alto Horno.

Además hay una gran cantidad de información que se maneja en la operación del Horno, por ejemplo las temperaturas en diferentes puntos del horno, la presión interna, los análisis químicos del arrabio y la escoria, análisis químicos del gas Alto Horno, las cantidades de materiales alimentados, las cantidades de aire, vapor, oxígeno etc.

Hasta hace algunos años, los Altos Hornos eran operados por una o varias personas que de acuerdo con su experiencia de varios años, daban órdenes para indicar la mejor forma de trabajar el Horno y poder llegar a obtener arrabio de cierta calidad. Actualmente con el control por computadora, se introduce periódicamente a la misma gran cantidad de información que se va obteniendo sobre la composición del arrabio, la escoria, los gases y las temperaturas y presión del horno. La computadora con toda esta información realiza complicados cálculos para determinar las cantidades óptimas a alimentar y los ajustes en temperaturas y presión, para lograr la calidad deseada en el arrabio.

Para este tipo de procesos en donde intervienen tantas variables, tanto de entrada como de salida, hay necesidad de establecer modelos matemáticos, partiendo para ello de las experiencias de personas conocedoras del proceso y que nos sirvan de base para la programación de la computadora. Desarrollar los modelos matemáticos puede ser un problema difícil porque no se conocen con precisión todos los factores que afectan el proceso y su dinámica. Además también es difícil la medición de todas las variables requeridas para el control por computadora, en cuyo caso es necesario que dichas variables sean estimadas aplicando métodos estadísticos.

1-6 Requerimientos Generales de un Sistema de Control.

Para que un sistema de control cualquiera pueda ser utilizado en la práctica tiene que cumplir básicamente con tres requerimientos:

- 1) Estabilidad Absoluta
- 2) Estabilidad Relativa
- 3) Exactitud

Estabilidad Absoluta. - Significa que el sistema tiene que ser capaz de obtener una respuesta estable, apesar de las perturbaciones que se presenten. En los siguientes capitulos se verá como determinar matematicamente la estabilidad o inestabilidad de un sistema.

Estabilidad Relativa. - No basta con tener estabilidad absoluta, en un sistema tambien es importante que la respuesta estable se obtenga lo más rapidamente posible. Algunas veces un sistema puede ser estable pero está muy cerca de perder la estabilidad, por lo que se debe calcular la estabilidad relativa, mediante la aplicación de criterios y métodos apropiados.

Exactitud. - Es muy importante que el sistema pueda reducir a cero o al mínimo valor posible los errores. Se estudiarán para ello algunos criterios de error.

Si un sistema cumple con estos requisitos se puede utilizar, de otra forma si no cumple habrá necesidad de modificar algo en el sistema para poder aplicarlo en la práctica.

No siempre se puede cumplir con todos los requisitos en un sistema, por ejemplo la estabilidad relativa razonable y la exactitud en regimen permanente tienden a ser incompatibles. Al mejorar un requerimiento, el otro tiende a empeorar, por lo que es necesario al proyectar un sistema de control establecer un compromiso entre los dos requerimientos.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

CAPITULO 2 LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

2-1.- Introducción

La gran mayoría de los sistemas de control se pueden representar matemáticamente por medio de una o varias ecuaciones diferenciales, por lo que es muy común el tener que resolver éstas ecuaciones para poder calcular la respuesta de un sistema de control. La Transformada de Laplace desarrollada por Pierre Simon Laplace (1749-1827), constituye un método muy poderoso para resolver todo tipo de ecuaciones diferenciales, por lo que es una herramienta o base matemática indispensable para estudiar sistemas de control y es la razón por la que se incluye este tema de las matemáticas en todos los cursos de Teoría de control para personas que se inician en ésta área de estudio. Sin tener esta base matemática, difícilmente se puede analizar un sistema de control desde el punto de vista teórico que se requiere en ingeniería.

La Transformada de Laplace es un método operacional que consiste en convertir las ecuaciones diferenciales que están en función del tiempo a otra función, llamada función compleja "s". La variable compleja "s", se denomina así porque como cualquier número complejo está formada por dos partes, la parte real y la parte imaginaria. Esta transformación se puede realizar en dos formas distintas, aplicando la llamada integral de Laplace, (lo cual constituye el método riguroso de las matemáticas), o aplicando las tablas de la Transformada de Laplace (que es un procedimiento más práctico el cual se utiliza más ampliamente para resolver problemas por este método).

Una vez transformada una ecuación diferencial, esta se convierte en una ecuación algebraica, es decir las derivadas desaparecen en el nuevo plano complejo de "s" y la ecuación es mucho más fácil de manejar y resolver.

El transformar una ecuación diferencial por Laplace es como si nuestro problema en función del tiempo o en el plano del tiempo (en el cual la solución es difícil), lo trasladamos al plano de la variable compleja "s", donde paradójicamente nuestro problema se puede resolver en una forma relativamente más sencilla.

El procedimiento de la transformación se utiliza en otras áreas de las matemáticas para hacer más sencillos algunos cálculos. Por ejemplo mediante la aplicación de los logaritmos (que es una transformación matemática) las operaciones de división se convierten en restas y la multiplicación en suma.

Una vez resuelto el problema en el plano complejo hay necesidad de regresar de nuevo al plano del tiempo, que es donde tenemos realmente el problema. El procedimiento utilizado se denomina la Transformada inversa o antitransformada de Laplace, lo cual se logra utilizando las tablas de la Transformada de Laplace en sentido inverso. Esto último es muy semejante al procedimiento inverso que se realiza con los logaritmos, llamado antilogaritmo.

La Transformada de Laplace nos proporciona muchas ventajas ya que nos permite predecir el comportamiento de un sistema de control, utilizando para ello técnicas gráficas o métodos de respuesta a la frecuencia que se verán en capítulos posteriores. Además la Transformada de Laplace nos resuelve completamente una ecuación diferencial, dándonos simultáneamente la respuesta transitoria y la respuesta en estado de régimen permanente de un sistema de control.

Breve repaso de números, variables y funciones complejas.- Antes de entrar de lleno a la Transformada de Laplace de una función del tiempo $f(t)$, es necesario refrescar un poco algunos conceptos de números, variables y funciones complejas.

Un número complejo se define matemáticamente como un número que tiene dos partes, la parte real y la parte imaginaria. Muchos estudiantes piensan que los números complejos son muy difíciles de manejar ya que asocian el nombre que se les dió (complejos) con la forma de operarlos. Sin embargo así como se les llamo complejos se les podía haber llamado números simples o números sencillos, por lo que es conveniente eliminar de una vez por todas el tabú que pueda crear el nombre de números complejos.

Los números complejos se pueden representar de tres formas diferentes:

- a) Forma Rectangular
- b) Forma Polar
- c) Forma Exponencial

En la forma rectangular el número complejo se expresa en dos partes, su parte real y su parte imaginaria. La parte real se expresa por un número real simple y la parte imaginaria se expresa por un número real precedido de la letra "j", donde la letra "j" equivale a $\sqrt{-1}$. Por ejemplo en el número complejo $(3 + j4)$, la parte real es 3 y la parte imaginaria es j4.

En la forma polar el número complejo se expresa por medio de una magnitud un ángulo, por ejemplo A/ϕ , en donde "A" es la magnitud y ϕ es el ángulo. Se puede transformar fácilmente de la forma rectangular a la polar o viceversa utilizando las siguientes formulas:

<p>Forma Rectangular</p> $\sigma + j\omega$	<p>Forma Polar</p> A/ϕ
$\sigma = A \cos\phi \quad \omega = A \sin\phi$	$A = \sqrt{(\sigma)^2 + (\omega)^2} \quad \phi = (\tan)^{-1} \omega/\sigma$

La forma exponencial de un número complejo se expresa por medio de una magnitud y una cantidad exponencial, por ejemplo $A e^{j\theta}$, donde A es la magnitud, igual que en la forma polar, "e" es la base de los logaritmos naturales y el ángulo θ es generalmente expresado en radianes. Para transformar de la forma exponencial a la rectangular se puede utilizar la formula de Euler que establece lo siguiente:

$$A e^{j\theta} = A (\cos\theta + j \sin\theta) = \sigma + j \omega$$

Las variables complejas al igual que los números complejos tienen una parte real y una parte imaginaria. La variable compleja se representa por la letra "s", la componente real con la letra "σ" y la componente imaginaria "jω", o sea $s = \sigma + j\omega$. Se puede representar una variable compleja s por un punto en el plano complejo s. En la figura 2-1 se representa el plano complejo y un punto $s_1 = \sigma_1 + j\omega_1$.

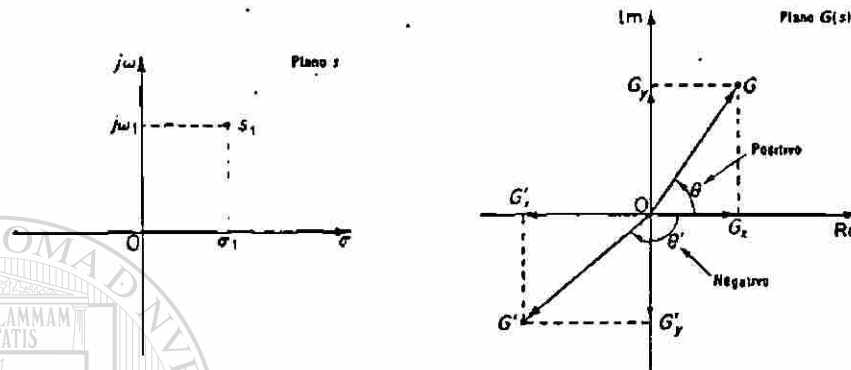


Fig. 2-1. Plano complejo con un punto representativo

Una función compleja, al igual que los números y las variables complejas, tienen una parte real y una parte imaginaria. La función compleja $G(s)$ tiene una parte real G_x y una parte imaginaria jG_y , o sea $G(s) = G_x + jG_y$. Las cantidades G_x y G_y son cantidades reales. Al igual que los números complejos, la magnitud de una función compleja queda determinada con las siguientes relaciones: la magnitud de una función compleja está dada por $\sqrt{G_x^2 + G_y^2}$ y el ángulo $\theta = \tan^{-1}(G_x/G_y)$.

El complejo conjugado de una función compleja $G(s) = G_x + jG_y$ se representa como $\underline{G}(s)$ y es igual a $G_x - jG_y$. De acuerdo con lo anterior una cantidad compleja y su conjugada tienen la misma parte real, pero la parte imaginaria cambiada de signo.

Derivada de una Función Compleja.- La derivada de una función compleja se obtiene por medio de límites como la derivada de cualquier función real. En seguida se representa matemáticamente la derivada de una función compleja $G(s)$:

$$\frac{d}{ds} G(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{G(s + \Delta s) - G(s)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta G}{\Delta s}$$

Una función compleja $G(s)$ se define como una función analítica cuando existe la función en el plano complejo y además existen sus derivadas. La derivada de una función compleja es independiente del camino que siga el Δs . Debido a que el $\Delta s = \Delta\sigma + j\Delta\omega$, el Δs puede tender a cero cuando el $\Delta\sigma$ tienda a cero o cuando el $j\Delta\omega$ también tienda a cero. La tendencia a cero sería entonces paralela al eje horizontal o vertical.

Si se deriva la función compleja $G(s)$ considerando que el $\Delta s = \Delta \sigma$ lo cual significa que el recorrido es paralelo al eje real y $j\Delta\omega$ es constante, aparecerán inmediatamente derivadas parciales como se representa en la siguiente ecuación :

$$\frac{d}{ds} G(s) = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta G_x}{\Delta \sigma} + j \frac{\Delta G_y}{\Delta \sigma} \right) = \frac{\partial G_x}{\partial \sigma} + j \frac{\partial G_y}{\partial \sigma}$$

Si se considera el $\Delta s = j \Delta\omega$, lo cual corresponde al recorrido paralelo al eje imaginario, siendo el $\Delta\sigma$ una constante, la derivada de la función compleja quedará como sigue :

$$\frac{d}{ds} G(s) = \lim_{j\Delta\omega \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta G_x}{j \Delta\omega} + j \frac{\Delta G_y}{j \Delta\omega} \right) = -j \frac{\partial G_x}{\partial \omega} + \frac{\partial G_y}{\partial \omega}$$

Igualando las dos derivadas, puesto que se trata de la derivada de la misma función compleja, el resultado sería la siguiente ecuación de derivadas parciales :

$$\frac{\partial G_x}{\partial \sigma} + j \frac{\partial G_y}{\partial \sigma} = \frac{\partial G_y}{\partial \omega} - j \frac{\partial G_x}{\partial \omega}$$

Si se satisfacen las siguientes dos condiciones :

$$\frac{\partial G_x}{\partial \sigma} = \frac{\partial G_y}{\partial \omega} \quad \text{y} \quad \frac{\partial G_y}{\partial \sigma} = - \frac{\partial G_x}{\partial \omega}$$

la derivada de la función compleja $dG(s)/ds$ queda determinada unívocamente. Estas dos condiciones en las matemáticas son conocidas como las condiciones de Cauchy-Riemann.

A manera de ejemplo y para aplicar las condiciones de Cauchy a una función compleja, se verá si la función propuesta cumple con estas condiciones.

$$G(s) = \frac{1}{s + 1}$$

Como primer paso para poder aplicar las condiciones de Cauchy, se debe de obtener los valores de G_x y G_y de la función compleja $G(s)$. El procedimiento que se utilizará será primero substituir $s = \sigma + j\omega$ y posteriormente multiplicar y dividir la función $G(s)$ por el conjugado complejo del denominador como se indica a continuación:

$$G(s + j\omega) = \frac{1}{s + 1} = \frac{1}{\sigma + j\omega + 1} = \frac{1}{(\sigma + j\omega + 1)(\sigma + 1 - j\omega)}$$

$$= \frac{\sigma + 1 - j\omega}{(\sigma + 1)^2 + \omega^2}$$

$$G_x = \frac{\sigma + 1}{(\sigma + 1)^2 + \omega^2} \quad G_y = \frac{-\omega}{(\sigma + 1)^2 + \omega^2}$$

$$\frac{\partial G_x}{\partial \sigma} = \frac{(\sigma + 1)^2 + \omega^2 - (\sigma + 1) \cdot 2(\sigma + 1)}{[(\sigma + 1)^2 + \omega^2]^2} = \frac{\omega^2 - (\sigma + 1)^2}{[(\sigma + 1)^2 + \omega^2]^2}$$

$$\frac{\partial G_y}{\partial \omega} = \frac{[(\sigma + 1)^2 + \omega^2](-1) + \omega(2\omega)}{[(\sigma + 1)^2 + \omega^2]^2} = \frac{\omega^2 - (\sigma + 1)^2}{[(\sigma + 1)^2 + \omega^2]^2}$$

Como se puede comprobar al analizar los resultados de las dos ecuaciones diferenciales anteriores, con excepción del valor de $s = -1$ la función compleja satisface la primera condición de Cauchy-Riemann, se deja como ejercicio para el estudiante la comprobación de la segunda condición de Cauchy.

Aplicando derivadas parciales, la derivada de la función compleja $G(s)$ se representa en la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{dG(s)}{ds} &= \frac{\partial G_x}{\partial \sigma} + j \frac{\partial G_y}{\partial \omega} = \frac{\omega^2 - (\sigma + 1)^2}{[(\sigma + 1)^2 + \omega^2]^2} + \frac{j 2\omega(\sigma + 1)}{[(\sigma + 1)^2 + \omega^2]^2} \\ &= \frac{-[(\sigma + 1)^2 - 2j\omega(\sigma + 1) + j^2\omega^2]}{[(\sigma + 1)^2 + \omega^2]^2} = \frac{-[(\sigma + 1) - j\omega]^2}{[(\sigma + 1)^2 + \omega^2]^2} \\ &= \frac{-[(\sigma + 1) - j\omega]^2}{[(\sigma + 1)^2 + j^2\omega^2]} = \frac{-[(\sigma + 1) - j\omega]^2}{\{[(\sigma + 1) + j\omega][(\sigma + 1) - j\omega]\}^2} \\ &= \frac{-1}{(\sigma + 1 + j\omega)^2} = \frac{-1}{(s + 1)^2} \end{aligned}$$

Por otro lado derivando la función compleja $G(s)$ como una función real, aplicando las fórmulas de las derivadas comunes tenemos lo siguiente:

$$\frac{d}{ds} \frac{1}{(s+1)} = \frac{0 - 1(1)}{(s+1)^2} = \frac{-1}{(s+1)^2}$$

Resultado que coincide exactamente con el valor de la derivada de la función $G(s)$ que se había obtenido anteriormente aplicando derivadas parciales.

Ya se ha definido lo que es una función analítica, en seguida se definirán lo que son los puntos ordinarios y puntos singulares en el plano complejo:

Puntos Ordinarios \Rightarrow Puntos del plano complejo en donde la función compleja $G(s)$ es analítica.

Puntos Singulares \Rightarrow Puntos del plano complejo en donde la función compleja $G(s)$ no es analítica.

La mayoría de las funciones complejas en la práctica se expresan como una fracción de la forma siguiente:

$$G(s) = \frac{k(s+z_1)(s+z_2)}{(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)}$$

donde la letra K es una constante que representa una ganancia, y los valores z_1, z_2, p_1, p_2 y p_3 son valores muy importantes llamados ceros y polos respectivamente de la función compleja.

Cuando $s = -z_1$, por ejemplo, la función compleja se hace igual a cero, lo cual ocurre también cuando $s = -z_2$. Por otro lado, cuando el valor de $s = -p_1$, por ejemplo, la función compleja tiende a un valor infinito. De acuerdo a lo anterior podemos definir lo que son polos y ceros.

Polos \Rightarrow Son puntos del plano complejo en donde la función compleja $G(s)$ tiende a infinito.

Ceros \Rightarrow Son puntos del plano complejo en donde la función compleja $G(s)$ se hace igual a cero.

En el ejemplo que se ha dado se tienen dos ceros y tres polos definidos. Normalmente casi todas las funciones complejas tienen más polos que ceros definidos. Teóricamente una función compleja debe tener igual número de ceros que de polos, ya que como se verá más adelante cuando se estudie el método del Lugar de las Raíces, las gráficas que representan una función compleja en el plano complejo se inician siempre en los polos y terminan en los ceros. Aplicando el principio de la filosofía que establece que todo lo que tiene un principio tiene también un final, deberá haber tantos polos como ceros en cualquier función compleja. Cuando una función compleja tiene más polos que ceros, se dice que los ceros faltantes existen pero no se representan porque no están definidos y por lo tanto se dice que están en el infinito.

2-2. - La Transformada de Laplace.

Pierre Simon, marqués de Laplace, famoso astrónomo y matemático francés, desarrolló la teoría matemática que hoy conocemos como la Transformada de Laplace en tiempos de Napoleón en Francia. Además de la Transformada, su obra maestra ha sido Mecánica Celeste. Por su gran capacidad matemática ha sido calificado como el Isaac Newton francés.

Matemáticamente la Transformada de Laplace se define por la siguiente ecuación integral :

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt [f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

donde las literales utilizadas en esta ecuación se definen como :

\mathcal{L} = Símbolo operacional que indica que la cantidad que le sigue ha de ser transformada por la integral de Laplace $\int_0^{\infty} e^{-st} dt$

$f(t)$ = Una función del tiempo t tal que $f(t) = 0$ para $t < 0$.

$F(s)$ = Transformada de Laplace de $f(t)$.

s = Variable compleja.

Si una función del tiempo $f(t)$ está multiplicada por una constante y aparece en forma general como $Af(t)$ donde A es la constante, la transformada de Laplace de $Af(t)$ se podrá calcular así :

$$\mathcal{L}[Af(t)] = A \mathcal{L}[f(t)]$$

Cuando una función del tiempo sea la suma algebraica de varias funciones del tiempo, $f_1(t), f_2(t), \dots$, la transformada de Laplace de esta suma de funciones se calculará de la siguiente forma :

$$\mathcal{L}[f_1(t) + f_2(t)] = \mathcal{L}[f_1(t)] + \mathcal{L}[f_2(t)]$$

En seguida se calculará la transformada de Laplace de varias funciones ampliamente utilizadas en los sistemas de control y se estudiarán algunos teoremas importantes de la transformada. Cuando ya se tenga cierto dominio en el manejo de la transformada, se aplicarán directamente las tablas de la transformada sin necesidad de integrar matemáticamente. Este último llamado el método de las tablas es el que más se utiliza en la práctica por ser el más sencillo y el más rápido.

Las funciones que se estudiarán en seguida con el objeto de conocer la función y además calcular su transformada de Laplace por el método de la integral de Laplace son la función escalon, la rampa, la senoide, el pulso, y el impulso.

Función Escalon. - La función escalón se puede definir matemáticamente en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} f(t) &= 0 && \text{para } t < 0 \\ f(t) &= A = \text{Constante} && \text{para } t > 0 \end{aligned}$$

En la figura 2-2 se representa graficamente la función escalón. Se puede observar que antes de cero la función es cero y después de cero la función es igual a una cantidad constante A. Exactamente en cero la función no está definida por lo que puede tener cualquier valor entre cero y A.

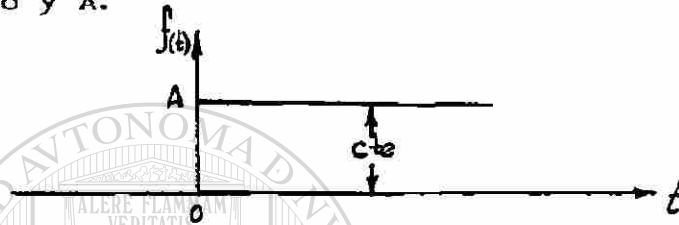


Fig. 2-2 Gráfica de una función escalón

En la práctica la función escalón se puede generar en forma muy aproximada a la función matemática, pero no exactamente igual. La diferencia estriba en que en la práctica una función no puede cambiar de cero a otro valor en un tiempo cero como ocurre con la función escalón teórica. Necesariamente tiene que transcurrir un tiempo por pequeño que este sea. Sin embargo debido a que generalmente el tiempo de cambio es muy pequeño se desprecia considerándolo igual a cero.

Un ejemplo práctico de la función escalón es la aplicación de un voltaje de corriente directa a cualquier circuito resistivo, pues en forma casi instantánea el voltaje y la corriente crecen de cero a otro valor ya sea positivo o negativo.

Una vez que ya se conoce la forma, algunas características y una aplicación práctica de la función escalón, en seguida se calculará su transformada de Laplace.

Si $f(t) = A$ entonces $\int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} A e^{-st} dt = \int_0^{\infty} A e^u \left[-\frac{du}{s} \right]$

donde $u = -st$
 $du = -s dt$

$$F(s) = -A/s \int e^u du = -A/s [e^{-st}]_0^{\infty}$$

$$dt = \frac{-du}{s}$$

$$F(s) = -A/s [1/\alpha - 1/1] = \underline{\underline{A/s}}$$

Función Exponencial. - La función exponencial se puede expresar matemáticamente en la siguiente forma :

$$\begin{aligned} f(t) &= 0 && \text{para } t < 0 \\ f(t) &= A e^{-\alpha t} && \text{para } t \geq 0 \end{aligned}$$

Si $f(t) = Ae^{-\alpha t}$ entonces $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} Ae^{-\alpha t} e^{-st} dt$

$$F(s) = A \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + s)t} dt = A \int_0^{\infty} e^u \left(\frac{du}{-(\alpha + s)} \right)$$

donde $u = -(\alpha + s)t$
 $du = -(\alpha + s) dt$

$$F(s) = -\frac{A}{\alpha + s} \int_0^{\infty} e^u du = -\frac{A}{\alpha + s} (e^u) \Big|_0^{\infty}$$

$$dt = \frac{du}{-(\alpha + s)}$$

$$F(s) = -\frac{A}{\alpha + s} (e^{-\alpha + st}) \Big|_0^{\infty}$$

$$F(s) = -\frac{A}{\alpha + s} [1/e^{\infty} - 1/e^0] = \frac{A}{\alpha + s}$$

La función exponencial que se ha transformado por Laplace, se puede obtener en la práctica con la descarga de un condensador. Es interesante observar que la ecuación exponencial original al ser transformada se convierte en una fracción algebraica relativamente simple. La forma fraccionaria y algebraica del resultado obtenido se irá repitiendo en las siguientes funciones. Con esto se empieza a ver que la transformación de Laplace convierte una función exponencial en una función algebraica más fácil de manejar.

En la figura 2-3 se representa una gráfica de la función exponencial que se ha analizado. Se puede ver que en $t = 0$ la función vale A , y conforme crece el tiempo, la función decrece tendiendo a cero. Si la función exponencial tuviera signo positivo, se iniciaría también con un valor A , y al crecer el tiempo la función crecería muy rápidamente sin límite, lo que resultaría ser una función completamente inestable.

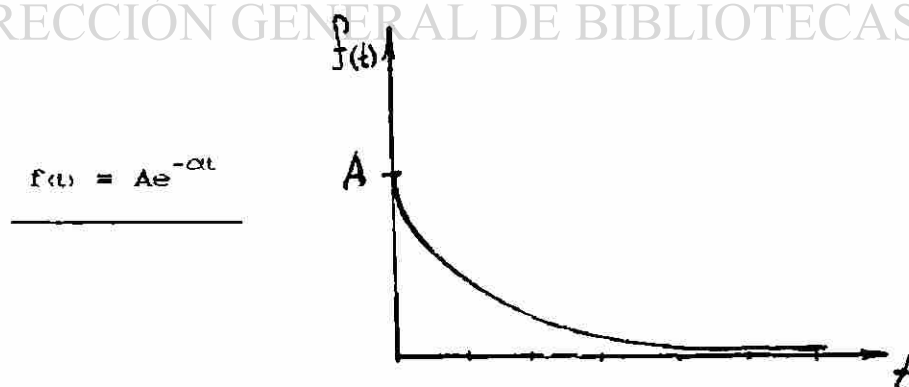


Fig. 2-3 Gráfica de una Función Exponencial

Función Rampa. -La función rampa matemáticamente se puede expresar en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} f(t) &= 0 && \text{para } t < 0 \\ f(t) &= At && \text{para } t \geq 0 \end{aligned}$$

En la figura 2-4 se representa la gráfica de una función rampa. Se puede ver que la gráfica inicia en cero cuando $t = 0$ y va aumentando gradualmente conforme crece el tiempo. La función rampa es un plano inclinado cuya inclinación depende del valor de A. Esta función es muy utilizada en los controles electrónicos de la velocidad de motores eléctricos industriales, a los cuales se les aplica el voltaje en forma de rampa para que el motor vaya aumentando su velocidad gradualmente y no sea sometido a grandes esfuerzos mecánicos y eléctricos.

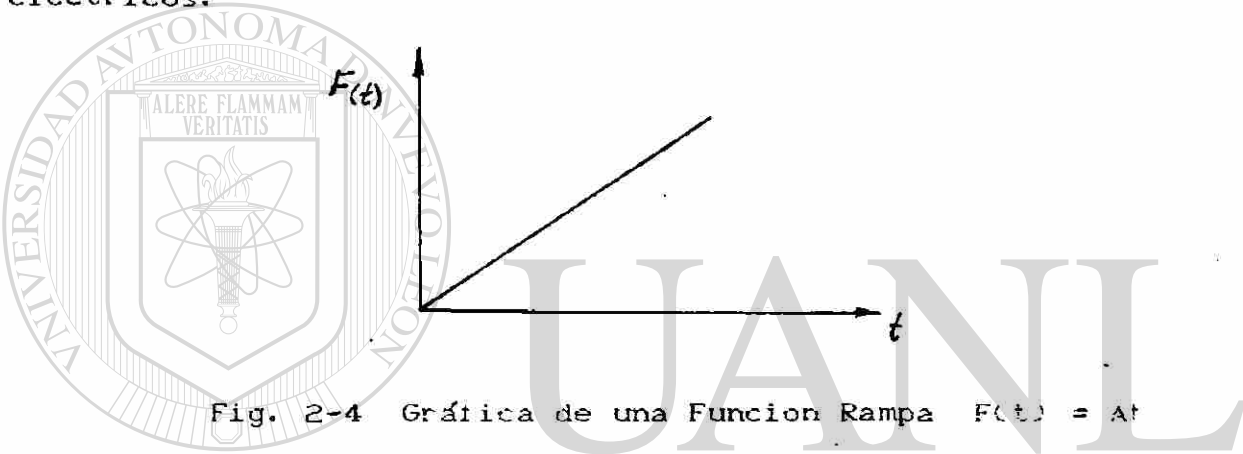


Fig. 2-4 Gráfica de una Función Rampa $F(t) = At$

A continuación se calculará la transformada de Laplace de la función rampa:

Si $f(t) = At$ entonces $[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} Ate^{-st} dt = A \int_0^{\infty} te^{-st} dt =$ ®

Utilizando integración por partes $F(s) = A \int u dv = A [uv - \int v du]$

donde $u = t$ $dv = e^{-st} dt$

$du = dt$ $v = \int e^{-st} dt$

Antes de substituir los valores de u y v en la integración por partes se resolverá la integral para encontrar el valor de v .

Si $u = -st$

$du = -s dt$ $v = \int e^{u1} [-\frac{d u1}{s}] = -1/s \int e^{u1} du1 = -1/s [e^{u1}] =$

$dt = -\frac{d u1}{s}$ $v = -1/s [e^{-st}]$

Substituyendo los valores de u y v en la integración por partes tenemos lo siguiente:

$$A \int u dv = A [uv - \int v du] = A [t(-\frac{1}{s}e^{-st}) - \int (-\frac{1}{s}e^{-st}) dt] =$$

$$= A [-\frac{t}{s}e^{-st} + \frac{1}{s} \int e^{-st} dt]$$

La integral de la ecuación anterior es idéntica al cálculo que se hizo para encontrar el valor de v, por lo que se substituirá dicho valor.

$$= A [-\frac{t}{s}e^{-st} + \frac{1}{s}(-\frac{1}{s}e^{-st})] = A [-\frac{t}{s}e^{-st} - \frac{1}{s^2}(e^{-st})]_0^{\infty}$$

$$= A [-0 - 0 - (0 - 1/s^2)] = A/s^2$$

$$\underline{F(s) = A/s^2}$$

Función Senoidal. - La función senoidal se define matemáticamente por la siguiente ecuación:

$$f(t) = 0 \quad \text{para } t < 0$$

$$f(t) = A \text{ Sen } \omega t \quad \text{para } t \geq 0$$

donde "A" es la magnitud o valor máximo de la función senoidal y " ω " es llamada velocidad angular siendo ambos términos cantidades constantes.

La función senoidal es ampliamente utilizada en la práctica en todos aquellos equipos que funcionan con corriente eléctrica alterna, además de gran cantidad de equipo electrónico de comunicaciones, cuya señal de transmisión es una senoide (Radio, TV, Radar, Microondas). Lo anterior justifica plenamente la importancia de la función senoidal en una gran cantidad de aplicaciones prácticas.

La fig. 2-5 representa la forma gráfica de una función senoidal, que como se puede apreciar es una función periódica cuyo ciclo se repite continuamente.

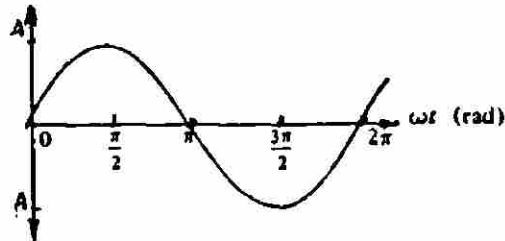


Fig. 2-5 Gráfica de una Función Senoidal $F(t) = A \text{ Sen } \omega t$

Para calcular la Transformada de la función senoidal se va a utilizar la forma exponencial del seno ya que esto nos permitirá aplicar la transformada de Laplace de la función exponencial que ya es conocida. En seguida se aplica la integral de Laplace.

$$\mathcal{L}[A \text{ Sen } \omega t] = A \int_0^{\infty} \text{Sen } \omega t (e^{-st}) dt$$

substituyendo el $\text{Sen } \omega t = \frac{1}{2j} [e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}]$ tenemos:

$$\begin{aligned} F(s) &= A \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \right] e^{-st} dt = \\ &= \frac{A}{2j} \int_0^{\infty} e^{(j\omega - s)t} dt - \frac{A}{2j} \int_0^{\infty} e^{-(j\omega + s)t} dt = \\ &= \frac{A}{2j} \int_0^{\infty} e^{-(s - j\omega)t} dt - \frac{A}{2j} \int_0^{\infty} e^{-(s + j\omega)t} dt = \end{aligned}$$

Aplicando la fórmula de la transformada de una función exponencial

$$\mathcal{L}[A e^{-\alpha t}] = A \int_0^{\infty} [e^{-(s+\alpha)t}] dt = \frac{A}{\alpha + s} \text{ tenemos:}$$

$$\mathcal{L}[A \text{ Sen } \omega t] = \frac{A}{2j} \left[\frac{1}{s - j\omega} \right] - \frac{A}{2j} \left[\frac{1}{s + j\omega} \right]$$

$$\mathcal{L}[A \text{ Sen } \omega t] = \frac{A}{2j} \left[\frac{(s + j\omega) - (s - j\omega)}{(s - j\omega)(s + j\omega)} \right] = \frac{2A j\omega}{2j(s^2 + \omega^2)}$$

$$\mathcal{L}[A \text{ Sen } \omega t] = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$$

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Teoremas de la Transformada de Laplace.

Después de haber calculado la transformada de Laplace de algunas funciones del tiempo muy utilizadas en los sistemas de control, es necesario estudiar varios teoremas relacionados con la transformada de Laplace que nos ayudarán a profundizar un poco más en la teoría de la transformada para tener mejores bases y posteriormente aplicar estos teoremas cuando veamos el método de las tablas de la transformada que como ya se dijo es más directo que el método de integración que se ha aplicado hasta ahora.

En seguida se estudiarán un par de teoremas llamados primera y segunda propiedad de la traslación.

Teorema de la Primera Propiedad de la Traslación.
 Este teorema establece que :

$$\text{Si } \mathcal{L}[f(t)] = F(s) \text{ entonces } \mathcal{L}[e^{-\alpha t} f(t)] = F(s - \alpha)$$

Para demostrar este teorema nos basaremos en la fórmula general de la transformada de Laplace, que se vio cuando se dió la definición de la transformada.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)] &= \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = F(s) \\ \mathcal{L}[e^{\alpha t} f(t)] &= \int_0^{\infty} e^{-st} e^{\alpha t} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-\alpha)t} f(t) dt = \\ \mathcal{L}[e^{\alpha t} f(t)] &= F(s - \alpha) \end{aligned}$$

que es lo que se quería demostrar.

El teorema de la primera propiedad de la traslación se puede aplicar en todos aquellos casos en donde se conozca la transformada de Laplace de una función del tiempo y ésta esté multiplicada por una cantidad exponencial.

Teorema de la Segunda Propiedad de la traslación.
 El teorema establece que :

$$\text{Si } \mathcal{L}[f(t)] = F(s) \text{ entonces } \mathcal{L}[f(t - \alpha)] = e^{-\alpha s} F(s)$$

Antes de demostrar el teorema es importante comprender la diferencia entre una $f(t)$ y una $f(t-\alpha)$. La función $f(t)$ es cualquier función del tiempo que inicia cuando $t = 0$, mientras que la $f(t-\alpha)$ es la misma función del tiempo, pero inicia en $t = \alpha$.

En la figura 2-6 se puede observar gráficamente la diferencia entre las dos funciones del tiempo, una de las cuales se encuentra trasladada fuera del origen. Si la función es $f(t+\alpha)$, ésta se inicia antes de cero, si la función es $f(t)$, empieza en cero y si es $f(t-\alpha)$, la función inicia después de cero.

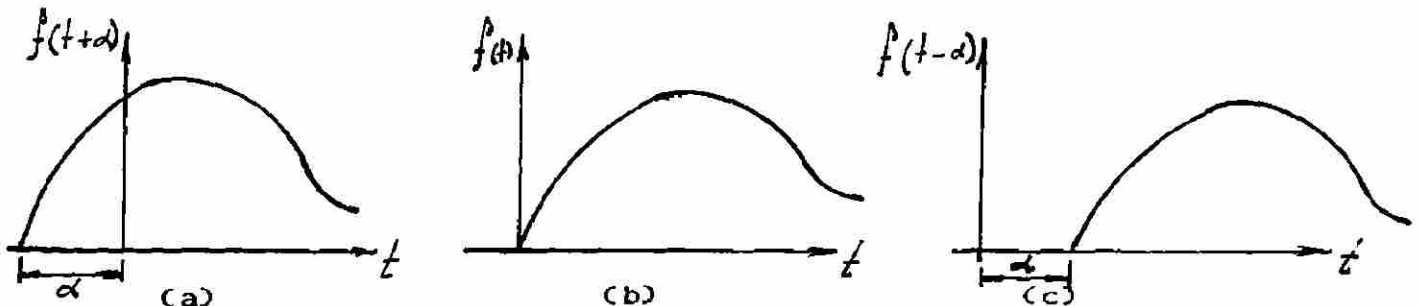


Fig 2-6 Funciones del tiempo que inician en diferentes tiempos.
 (a) $f(t+\alpha)$ (b) $f(t)$ (c) $f(t-\alpha)$

A continuación se demuestra el teorema de la segunda propiedad de la traslación de la transformada de Laplace.

Si $\mathcal{L}[f(u)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(u) dt = F(s)$ entonces

$$\mathcal{L}[f(t-\alpha)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t-\alpha) dt$$

para facilitar la integral se hará el siguiente cambio de variable

$$u = t - \alpha \quad \text{de donde} \quad t = u + \alpha \quad \text{y} \quad dt = du$$

substituyendo en la integral la nueva variable u , tenemos:

$$\mathcal{L}[f(t-\alpha)] = \int_0^{\infty} e^{-s(u+\alpha)} f(u) du = e^{-s\alpha} \int_0^{\infty} e^{-su} f(u) du = e^{-s\alpha} F(s)$$

que es lo que se quería demostrar.

Función Pulso .- La función pulso se puede definir matemáticamente en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} f(t) &= A = \text{constante} && \text{para } 0 < t < t_0 \\ f(t) &= 0 && \text{para } t_0 < t < \infty \end{aligned}$$

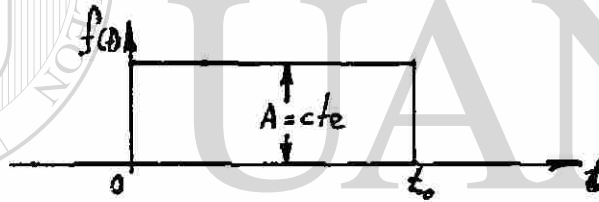


Fig. 2-7 Gráfica de la función pulso

En la figura 2-7 se representa una gráfica de la función pulso, la cual inicia en $t=0$ y termina en $t=t_0$.

La función pulso al igual que las funciones ya estudiadas tiene una aplicación enorme en todo tipo de circuitos digitales, por ejemplo en calculadoras electrónicas, computadoras digitales, relojes digitales y una gran cantidad de equipos electrónicos industriales.

Debido a su gran aplicación en la práctica, es importante conocer tanto la función como la transformada de Laplace de la misma.

Para facilitar el cálculo de la transformada de Laplace de la función pulso, ésta se representará como la suma gráfica de dos funciones escalón. En la fig. 2-8 se representan las dos funciones escalón de cuya suma gráfica resulta la función pulso.

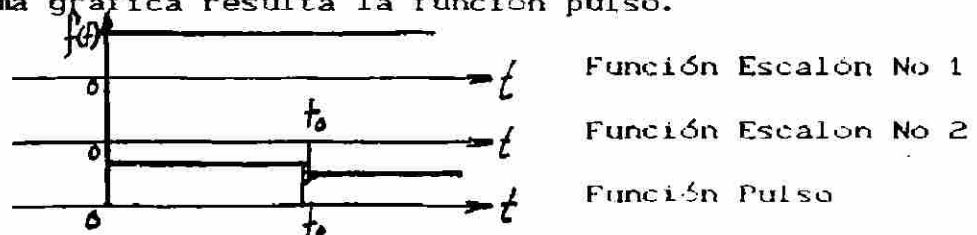


Fig. 2-8 Formación de una Función Pulso

De acuerdo con la gráfica 2-8, la función pulso se puede representar como la suma de las dos funciones escalón.

$$f(t) = f(\text{Pulso}) = f(\text{Escalón No 1}) + f(\text{Escalón No 2})$$

$$f(t) = f(\text{Pulso}) = A1(t) - A1(t-t_0)$$

La transformada de Laplace de $f(t)$ se obtiene como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)] &= \mathcal{L}[A1(t)] - \mathcal{L}[A1(t-t_0)] \\ &= \frac{A}{s} - \frac{A}{s} e^{-st_0} = \frac{A}{s} [1 - e^{-st_0}] \end{aligned}$$

Como se puede observar, para obtener la transformada de Laplace de la función pulso se necesitó aplicar el teorema de la segunda propiedad de la traslación.

Función Impulso. - La función impulso tiene semejanza con la función pulso. Se puede decir que el impulso es un caso límite de la función pulso, en donde la magnitud tiende a infinito y el tiempo de duración es muy pequeño, por lo que se dice que tiende a cero.

La Función impulso se puede definir matemáticamente en la siguiente forma:

$$f(t) = \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{A}{t_0} \quad \begin{array}{l} \text{para } 0 < t < t_0 \\ = 0 \quad \quad \quad \text{para } t < 0 < t < 0 \end{array}$$

La fig 2-9 representa una gráfica de la función impulso. En ella se puede ver que la magnitud del impulso es el límite de A/t_0 y la duración es t_0 . Como el tiempo tiende a cero, la magnitud tiende a infinito, pero el producto de la magnitud por el tiempo, que es el área bajo el impulso permanece siempre igual a A . Esta área igual a A es la que nos da en realidad la dimensión del impulso.

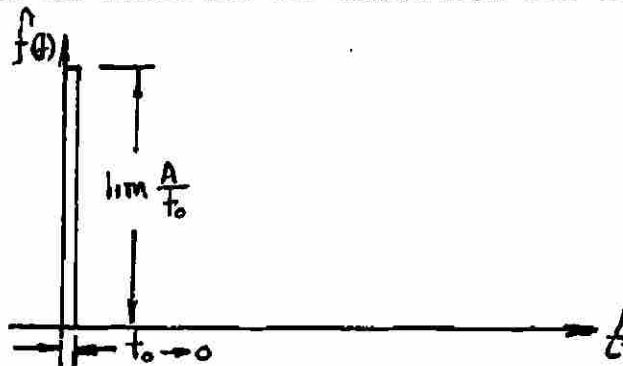


Fig. 2-9 Gráfica de la Función Impulso.

La función impulso se puede aplicar en la práctica para cualquier señal que aparezca y desaparezca en forma repentina, con una duración de tiempo mínima.

Se puede calcular la transformada de Laplace de la función impulso, basándonos en la transformada de Laplace de la función pulso que ya se conoce, aprovechando la semejanza entre las dos funciones.

Si la transformada de Laplace de la función pulso es:

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{A}{s} [1 - e^{-st_0}]$$

Entonces la transformada de Laplace de la función impulso es semejante, solamente habrá que cambiarla magnitud que en el caso del pulso es A y en impulso es el lim de A/t₀ cuando t₀ → 0.

Haciendo los cambios señalados, la transformada del impulso es:

$$\mathcal{L}[f(\text{impulso})] = \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{A}{t_0 s} [1 - e^{-st_0}]$$

La transformada de Laplace de la función impulso resulta ser un límite. Si substituímos el valor del tiempo tendiendo a cero, no llegamos a algún valor definido ya que todo se nos convierte a infinito. Con el propósito de obtener un valor definido para la transformada de Laplace del impulso, se aplicará la Regla de L'Hopital a fin de romper con la indeterminación. La Regla de L'Hopital consiste en derivar con respecto a t₀ y por separado el numerador y el denominador de la función límite. Una vez terminada la derivada, se substituye de nuevo el valor de t₀ tendiendo a cero y se comprueba si se llega a un valor o sigue la indeterminación. En nuestro caso la aplicación de la Regla de L'Hopital sería:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(\text{impulso})] &= \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dt_0} [A(1 - e^{-st_0})]}{\frac{d}{dt_0} (t_0 s)} \\ &= \frac{A s}{s} = A \end{aligned}$$

El resultado obtenido nos dice que la transformada de Laplace de una función impulso, es igual al área bajo el impulso.

La función impulso cuya área es igual a la unidad, recibe el nombre de función impulso unitario o función delta de Dirac y se representa como δ(t). Obviamente la transformada de Laplace de la función impulso unitario es igual a uno.

La función impulso que tiene una magnitud infinita y una duración cero no existe en la realidad y solamente existe en la teoría matemática. Sin embargo cualquier señal que tenga una duración muy corta y una magnitud elevada, se puede comparar en forma aproximada a la función impulso.

Teorema del Cambio de Escala de Tiempos.- A veces es necesario modificar la escala de tiempos de una función del tiempo para poder calcular la transformada de Laplace con mayor facilidad.

Supongamos que conocemos la transformada de Laplace de una $f(t)$ y que deseamos calcular la transformada de Laplace de una $f(t/\alpha)$. El siguiente procedimiento matemático nos indica como lograrlo:

$$\mathcal{L}[f(t/\alpha)] = \int_0^{\infty} f(t/\alpha) e^{-st} dt$$

para facilitar la integración se harán dos cambios de variable:

$$t_1 = t/\alpha \quad \text{y} \quad s = s_1/\alpha$$

$$t = t_1\alpha \quad \text{y} \quad dt = \alpha dt_1$$

haciendo las substituciones en función de las nuevas variables:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t/\alpha)] &= \int_0^{\infty} f(t/\alpha) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(t_1) e^{-(s_1/\alpha)(t_1\alpha)} d(t_1\alpha) \\ &= \alpha \int_0^{\infty} f(t_1) e^{-s_1 t_1} dt_1 = \alpha F(s_1) = \alpha F(\alpha s) \end{aligned}$$

Transformada de Laplace de las Derivadas.-En virtud de que la mayoría de los modelos matemáticos de sistemas de control físicos son expresados con ecuaciones diferenciales, es muy importante estudiar la transformada de Laplace de dichas ecuaciones. En seguida se calculará la transformada de Laplace de la primera y de la segunda derivada.

Transformada de Laplace de la primera derivada.- Si tenemos una función del tiempo tal que:

$$f(t) = x \quad \text{entonces} \quad f'(t) = dx/dt$$

$$\text{por lo tanto} \quad [dx/dt] = [f'(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt$$

utilizando integración por partes :

$$\begin{aligned} u &= e^{-st} & dv &= f'(t) dt = [dx/dt] dt = dx \\ du &= -s e^{-st} dt & v &= x = f(t) \end{aligned}$$

Substituyendo en la integración por partes :

$$\begin{aligned}
 [dx/dt] &= uv - \int vdu = e^{-st}f(t) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t)[-se^{-st}dt] \\
 &= e^{-\alpha}f(t) - e^{-0}f(0) + s \int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt \\
 &= -f(0) + sF(s) = sF(s) - f(0)
 \end{aligned}$$

Transformada de Laplace de la Segunda Derivada.- Para demostrar la fórmula de la transformada de Laplace de la segunda derivada, tomaremos como referencia la fórmula anterior de la transformada de Laplace de la primera derivada. Mediante un artificio matemático consistente en un cambio de función del tiempo se obtendrá la transformada de Laplace de la segunda derivada, apoyándonos en la primera derivada.

$$L\left[\frac{d^2}{dt^2} f(t)\right] = L\left[\frac{d}{dt} g(t)\right]$$

$$\text{Siendo } g(t) = \frac{d}{dt} f(t)$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 L\left[\frac{d^2}{dt^2} f(t)\right] &= s L\left[g(t)\right] - g(0) \\
 &= s L\left[\frac{d}{dt} f(t)\right] - f'(0)
 \end{aligned}$$

$$= s [sF(s) - f(0)] - f'(0)$$

$$= s^2 F(s) - s f(0) - f'(0)$$

La Transformada de Laplace de la tercera derivada y de orden superior, se pueden calcular siguiendo el mismo procedimiento. En las tablas de la Transformada de Laplace se indica una fórmula general para obtener la transformada de Laplace de la derivada de orden "n". Sin embargo se aclara que las derivadas más usuales en la práctica son la primera y la segunda que son las que se han calculado.

Tomando como referencia la transformada de Laplace de la primera derivada, se estudiarán dos teoremas más, llamados Teorema del Valor Final y Teorema del Valor Inicial. Estos teoremas se aplican cuando se desea calcular el valor de una función del tiempo cuando el tiempo es igual a cero o cuando el tiempo tiende a infinito.

Frecuentemente el valor de una función del tiempo se hace infinito o queda indeterminada cuando el tiempo es cero o tiende a infinito.

Algunas veces se puede romper ésta indeterminación aplicando alguno de los dos teoremas, ya que el cálculo de la función del tiempo se realiza en función de la variable compleja "s".

TEOREMA DEL VALOR FINAL. - Partiendo de la transformada de Laplace de la primera derivada, se demostrará a continuación este teorema.

$$\int_0^{\alpha} \left[\frac{d}{dt} f(t) \right] e^{-st} dt = sF(s) + f(\alpha)$$

Si calculamos el límite de la ecuación anterior cuando $s \rightarrow 0$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\alpha} \left[\frac{d}{dt} f(t) \right] e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow 0} [sF(s) + f(\alpha)]$$

debido a que el límite de $e^{-st} = 1$ cuando $s \rightarrow 0$, entonces

$$\int_0^{\alpha} \left[\frac{d}{dt} f(t) \right] dt = \int_0^{\alpha} d f(t) = f(t) \Big|_0^{\alpha} = f(\alpha) - f(0)$$

por lo tanto:

$$f(\alpha) - f(0) = \lim_{s \rightarrow 0} [sF(s) + f(\alpha)]$$

$$f(\alpha) = \lim_{t \rightarrow \alpha} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

TEOREMA DEL VALOR INICIAL. - Este teorema tiene mucha semejanza con el anterior e igualmente partiremos de la transformada de Laplace de la primera derivada para su demostración.

$$\int_0^{\alpha} \left[\frac{d}{dt} f(t) \right] e^{-st} dt = sF(s) - f(0)$$

Si ahora se calcula el límite de la ecuación cuando $s \rightarrow \alpha$, el término e^{-st} se hace igual a cero y con ello toda la integral se iguala a cero. Por lo tanto la ecuación quedará como sigue:

$$0 = \lim_{s \rightarrow \alpha} sF(s) - f(0) \quad \text{o lo que es lo mismo}$$

$$f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \alpha} sF(s)$$

TRANSFORMADA DE LAPLACE DE LAS INTEGRALES. -Como último teorema de la Transformada de Laplace, demostraremos la transformada de Laplace de las integrales, la cual se aplica cuando hay que transformar una ecuación integral o integrodiferencial.

Al igual que en los dos teoremas anteriores (del valor final y del valor inicial) la ecuación de referencia de la cual partiremos será la ecuación de la transformada de Laplace de la primera derivada.

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = ?$$

Si $g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$ entonces

$$g'(t) = \frac{d g(t)}{d t} = \frac{d}{d t} \int_0^t f(\tau) d\tau = f(t)$$

Aplicando la transformada de Laplace de la primera derivada.

$$\mathcal{L}[g'(t)] = s \mathcal{L}[g(t)] - g(0)$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = s \mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] - g(0)$$

$$F(s) = s \mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] - g(0)$$

Despejando la transformada de Laplace de la integral que es lo que nos interesa conocer, tenemos:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{g(0)}{s}$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(s)}{s} + \int_0^t \frac{f(\tau) d\tau}{s}$$

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

TABLAS DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE.-En las figuras 2-10 y 2-11 hay una lista de fórmulas de la transformada de Laplace. Las tablas que se presentan aquí son las más usuales en sistemas de control.

	$f(t)$	$F(s)$
1	impulso unitario $\delta(t)$	1
2	escalón unitario $1(t)$	$\frac{1}{s}$
3	t	$\frac{1}{s^2}$
4	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
5	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
6	$\text{sen } \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
7	$\text{cos } \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
8	$t^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
9	$t^n e^{-at} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
10	$\frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
11	$\frac{1}{b-a}(be^{-bt} - ae^{-at})$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$
12	$\frac{1}{ab} \left[1 + \frac{1}{a-b}(be^{-at} - ae^{-bt}) \right]$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$
13	$e^{-at} \text{sen } \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
14	$e^{-at} \text{cos } \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
15	$\frac{1}{a^2}(at - 1 + e^{-at})$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$
16	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen } \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t$	$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$
17	$\frac{-1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen } (\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t - \phi)$ $\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$	$\frac{s}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$
18	$1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen } (\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \phi)$ $\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$	$\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$

Fig. 2-10.- Tablas de la Transformada de Laplace.

1	$\mathcal{L}[Af(t)] = AF(s)$
2	$\mathcal{L}[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(s) \pm F_2(s)$
3	$\mathcal{L}_\pm \left[\frac{d}{dt} f(t) \right] = sF(s) - f(0_\pm)$
4	$\mathcal{L}_\pm \left[\frac{d^2}{dt^2} f(t) \right] = s^2 F(s) - sf(0_\pm) - f'(0_\pm)$
5	$\mathcal{L}_\pm \left[\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right] = s^n F(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f^{(k-1)}(0_\pm)$ donde $f^{(k-1)}(t) = \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} f(t)$
6	$\mathcal{L}_\pm \left[\int f(t) dt \right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{\left[\int f(t) dt \right]_{t=0_\pm}}{s}$
7	$\mathcal{L}_\pm \left[\iint f(t) dt dt \right] = \frac{F(s)}{s^2} + \frac{\left[\int f(t) dt \right]_{t=0_\pm}}{s^2} + \frac{\left[\iint f(t) dt dt \right]_{t=0_\pm}}{s}$
8	$\mathcal{L}_\pm \left[\int \dots \int f(t) (dt)^n \right] = \frac{F(s)}{s^n} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{s^{n-k+1}} \left[\int \dots \int f(t) (dt)^k \right]_{t=0_\pm}$
9	$\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(s+a)$
10	$\mathcal{L}[f(t-a) 1(t-a)] = e^{-as} F(s)$
11	$\mathcal{L}[t f(t)] = -\frac{dF(s)}{ds}$
12	$\mathcal{L}\left[\frac{1}{t} f(t)\right] = \int_s^\infty F(s) ds$
13	$\mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right] = a F(as)$

Fig. 2-11.- Tablas de la Transformada de Laplace.

EJERCICIOS DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE. - A continuación se resolverán algunos ejercicios de la transformada de Laplace y aplicaremos para ello algunas fórmulas de las tablas de la transformada y también varios teoremas. Cuando la fórmula de la tabla es igual que nuestro problema, el problema es muy sencillo y se trata sólo de substituir los valores del problema en la fórmula general. Pero cuando nuestro problema no aparece en las fórmulas, entonces se requiere aplicar algún teorema o artificio matemático para poder adecuar nuestro problema particular a las tablas que son de aplicación general.

Ejercicio 2-1. - Calcular la transformada de Laplace de la siguiente función del tiempo:

$$f(t) = 5 e^{-2t}$$

Solución : Aplicando la Fórmula de la transformada de Laplace de una función exponencial:

$$\mathcal{L}[A e^{-ct}] = \frac{A}{\alpha + s} \quad \mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \frac{5}{2 + s}$$

Ejercicio 2-2. - Calcular la transformada de Laplace de $f(t)=t^3$

Solución : Aplicando la Formula No 8 de la tabla:

$$\mathcal{L}[t^3] = \frac{3!}{s^{3+1}} = \frac{6}{s^4}$$

Ejercicio 2-3. - Calcular la transformada de Laplace de la siguiente función del tiempo.

$$f(t)=5t^3 e^{-2t}$$

Solución : Este ejercicio lo podemos resolver en dos formas, una es aplicandola primera propiedad de la traslación y la otra es aplicando directamente la formula No 9.

Aplicando la primera propiedad de la traslacion:

Si $\mathcal{L}[t^3] = \frac{6}{s^4}$ entonces :

$$\mathcal{L}[5t^3 e^{-2t}] = \frac{5 \times 6}{(s + 3)^4} = \frac{30}{(s + 3)^4}$$

obteniendo el resultado de la fórmula No 5.

$$\mathcal{L}[e^{-at}] = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt = \frac{e^{-a(s+t)}}{-s-a} \Big|_0^{\infty} = \frac{e^{-as}}{s+a}$$

Por lo tanto los resultados son idénticos con ambos métodos.

Ejercicio 2-4.- Calcular la transformada de Laplace de la siguiente función de tiempo:

$$f(t) = 8 \text{ Sen } 5t$$

Solución: Aplicando directamente la fórmula No 6 de las tablas:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[8 \text{ Sen } 5t] = \frac{8 \times 5}{s^2 + 5^2} = \frac{40}{s^2 + 25}$$

Ejercicio 2-5.- Calcular la transformada de Laplace de la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 5 \frac{dx}{dt} - 10x = 8 \text{ Sen } 6t$$

$$\text{Cond. iniciales } x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = 2$$

Solución: Aplicando las fórmulas de las tablas término a término iniciamos con la transformada de la segunda derivada.

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2 x}{dt^2}\right] = s^2 X(s) - s x(0) - \dot{x}(0) = s^2 X(s) - 3s - 2$$

$$\mathcal{L}\left[5 \frac{dx}{dt}\right] = 5[s X(s) - x(0)] = 5s X(s) - 15$$

$$\mathcal{L}[10x] = 10 X(s)$$

$$\mathcal{L}[8 \text{ Sen } 6t] = \frac{8 \times 6}{s^2 + 6^2} = \frac{48}{s^2 + 36}$$

Sumando todos los términos ya transformados.

$$s^2 X(s) - 3s - 2 + 5s X(s) - 15 + 10 X(s) = \frac{48}{s^2 + 36}$$

$$X(s) [s^2 + 5s + 10] = \frac{48}{s^2 + 36} + 3s + 17 = \frac{48 + 3s(s^2 + 36) + 17(s^2 + 36)}{s^2 + 36}$$

$$L^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + 36} \right] = \frac{1}{36} L^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + 6^2} \right]$$

$$f(t) = \frac{1}{36} (t \sin 6t)$$

1-11- LA TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE.

La transformada inversa de Laplace es el procedimiento matemático de pasar de una expresión compleja en función de 's' a una función del tiempo. La forma de representar matemáticamente la transformada inversa se indica en la siguiente ecuación:

$$L^{-1} [F(s)] = f(t)$$

El problema de la transformada inversa consiste en dar un valor de una $F(s)$ a una $f(t)$. Notase que siempre se utilizan mayúsculas para representar funciones complejas y minúsculas para las funciones del tiempo.

El procedimiento utilizado para obtener la transformada inversa se basará en la aplicación de las reglas de la transformada en su inversa al que se le da para obtener la transformada de las que quiere. Cuando la $F(s)$ que deseamos transformar ya directamente coincide con alguna fórmula de las tablas, el problema se resuelve sencillamente por la sustitución de la fórmula adecuada. Pero cuando nuestra $F(s)$ es un complejo $F(s)$ no coincide con ninguna fórmula, lo cual es el caso más común, entonces se requiere descomponer nuestra función compleja en dos o más funciones complejas cuya suma sea igual a la función compleja que queremos resolver.

Si la función compleja que tenemos es la suma de varias funciones complejas,

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) + \dots + F_n(s)$$

y si las funciones $F_1(s)$, $F_2(s)$ etc están en las tablas,

entonces:

$$L^{-1} [F(s)] = L^{-1} [F_1(s)] + L^{-1} [F_2(s)] + \dots + L^{-1} [F_n(s)]$$

$$= f_1(t) + f_2(t) + \dots + f_n(t)$$

donde $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ son las transformadas de Laplace inversas de $F_1(s), F_2(s), \dots, F_n(s)$, respectivamente.

En virtud de que la mayoría de las funciones complejas que se manejan en sistemas de control son de forma fraccionaria, entonces será necesario descomponer una fracción compleja grande en la suma de varias fracciones parciales más pequeñas y cuya transformada inversa si podemos encontrar en las tablas.

Las funciones complejas $F(s)$ de sistemas de control generalmente son de la forma

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

donde $B(s)$ y $A(s)$ son polinomios en s , y en donde el grado de $A(s)$ es mayor que el de $B(s)$. Si el grado de $B(s)$ es mayor que el de $A(s)$, se requiere realizar la división algebraica antes de desarrollar las fracciones parciales.

Antes de descomponer la fracción compleja en varias fracciones parciales se necesita conocer el tipo de raíces del polinomio $A(s)$ del denominador. Estas raíces sólo pueden ser de tres tipos:

- a) Raíces reales y distintas
- b) Raíces reales y múltiples
- c) Raíces complejas conjugadas

Dependiendo del tipo de raíces que se tengan es el método que se aplica para desarrollar en fracciones parciales.

Las funciones complejas $F(s)$ normalmente se expresan en la siguiente forma:

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)}$$

donde K es una constante e indica la ganancia del sistema, z_1, z_2, \dots, z_m son los ceros y p_1, p_2, \dots, p_n son los polos de la función compleja.

Desarrollo de Fracciones parciales cuando la función compleja $F(s)$ contiene únicamente polos reales y distintos.— Cuando se presenta éste tipo de función compleja, ésta se puede representar como la suma de varias fracciones parciales más simples, como sigue:

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{a_1}{s+p_1} + \frac{a_2}{s+p_2} + \dots + \frac{a_n}{s+p_n}$$

donde a_1, a_2, \dots, a_n son constantes que se pueden calcular, como sigue. Primeramente se calcula el valor de a_1 , multiplicando toda la función compleja por $(s+p_1)$ y se hace $s = -p_1$. Posteriormente se calcula a_2 en forma semejante, multiplicando $F(s)$ por $(s+p_2)$ y haciendo $s = -p_2$.

Multiplicando ambos lados por $(s-p_1)$, se llega a la siguiente expresión:

$$[F(s) (s + p_1)]_{s=p_1} = \left[\frac{a_1}{s-p_1} (s+p_1) + \frac{a_2}{s-p_2} (s+p_1) + \dots + \frac{a_n}{s-p_n} (s+p_1) \right]_{s=p_1}$$

Al substituir en la ecuación el valor de $s=p_1$, todos los términos a la derecha de la igualdad se hacen cero, con excepción del primero, el cual se hace igual a a_1 , que es el valor que se desea conocer. Por lo tanto:

$$a_1 = [F(s) (s + p_1)]_{s=p_1}$$

El mismo procedimiento se puede utilizar para calcular la constante a_2, \dots, a_n , por lo que en forma general:

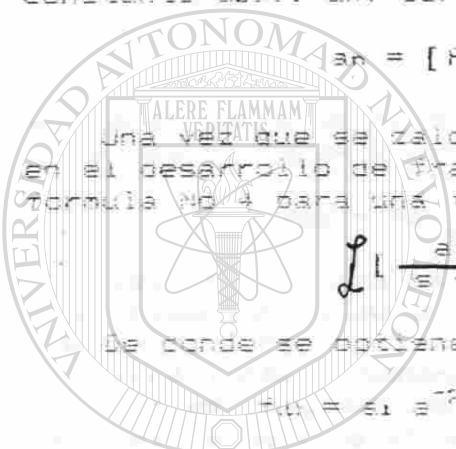
$$a_n = [F(s) (s + p_n)]_{s=p_n}$$

Una vez que se calculan los valores de a_1, a_2, \dots , se substituyen en el desarrollo de fracciones parciales y posteriormente se aplica la fórmula No. 4 para una función exponencial.

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{a_n}{(s + p_n)} \right] = a_n e^{-p_n t}$$

De donde se obtiene $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ como sigue:

$$f(t) = a_1 e^{-p_1 t} + a_2 e^{-p_2 t} + \dots + a_n e^{-p_n t}$$



UNANL

Ejercicio 2-6.- Calcular la transformada inversa de Laplace de $F(s) = \frac{s+4}{(s+2)(s+6)}$

Solución: Como la función compleja tiene dos polos reales y distintos, se puede descomponer en la suma de dos fracciones parciales

$$F(s) = \frac{a_1}{s+2} + \frac{a_2}{s+6}$$

Donde $a_1 = \left[\frac{s+4}{(s+2)(s+6)} (s+2) \right]_{s=-2} = \left[\frac{s+4}{s+6} \right]_{s=-2} = \frac{-2+4}{-2+6} = \frac{1}{2}$

$$a_2 = \left[\frac{s+4}{(s+2)(s+6)} (s+6) \right]_{s=-6} = \left[\frac{s+4}{s+2} \right]_{s=-6} = \frac{-6+4}{-6+2} = \frac{1}{2}$$

Substituyendo los valores de a_1 y a_2 tenemos

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{0.5}{s+2} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{0.5}{s+6} \right] = 0.5 e^{-2t} + 0.5 e^{-6t}$$

Desarrollando en fracciones parciales se obtiene: $F(s) = \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s + p_1} + \frac{a_3}{s + p_2} + \dots + \frac{a_n}{s + p_n}$ donde los polos p_1, \dots, p_n son polos reales y distintos, por lo que los valores de a_1 hasta a_n se calculan por el método anterior.

$$F(s) = \frac{a_1 s + a_2}{(s + p_1)(s + p_2)} + \frac{a_3}{s + p_3} + \dots + \frac{a_n}{s + p_n}$$

Los valores de a_1 y a_2 se pueden obtener multiplicando todos los términos de la ecuación de $F(s)$ por $(s + p_1)(s + p_2)$ y haciendo $s = p_1$.

$$[F(s)(s+p_1)(s+p_2)]_{s=p_1} = [(a_1 s + a_2) + \frac{a_3}{s+p_3}(s+p_1)(s+p_2) + \dots + \frac{a_n}{s+p_n}(s+p_1)(s+p_2)]_{s=p_1}$$

Al hacer $s = p_1$ se eliminan todos los términos a la derecha de la igualdad con excepción del término $(a_1 s + a_2)$, entonces:

$$(a_1 s + a_2)_{s=p_1} = [F(s)(s + p_1)(s + p_2)]_{s=p_1}$$

Debido a que p_1 es una cantidad compleja, la ecuación anterior es una ecuación compleja que tiene términos reales y términos imaginarios. Por lo tanto de la ecuación compleja se pueden obtener dos ecuaciones independientes, una con las partes reales y otra con las partes imaginarias. De estas dos ecuaciones se obtienen los valores de a_1 y a_2 , en el siguiente ejemplo se muestra el método de polos complejos.

Ejercicio 27. Calcular la transformada inversa de las funciones

$$F(s) = \frac{s + 1}{s(s^2 + s + 1)} \quad \text{DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS}$$

Solución: Como se puede ver la función compleja tiene tres polos, uno en el origen y los otros dos se determinarán aplicando la fórmula general de segundo grado:

$$s = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

$$s = -0.5 \pm j 0.866$$

Los dos valores de "s" nos indican que tenemos polos complejos conjugados, por lo que la $F(s)$ se desarrollaría de la siguiente forma:

$$F(s) = \frac{s + 1}{s(s^2 + s + 1)} = \frac{a}{s} + \frac{a_1 s + a_2}{s^2 + s + 1} \quad (2-1)$$

substituyendo los valores de las raíces complejas conjugadas, el trinomio $s^2 + s + 1$ queda factorizado en la siguiente forma:

$$s^2 + s + 1 = (s + 0.5 + j0.866)(s + 0.5 - j0.866)$$

por lo que la F(s) de la ecuación 2-1 queda como sigue:

$$F(s) = \frac{a}{s} + \frac{\alpha_1 s + \alpha_2}{(s + 0.5 + j0.866)(s + 0.5 - j0.866)} \quad (2-2)$$

Para calcular el valor de la constante "a" se multiplican todos los términos de la ecuación 2-1 por "s" y se hace $s = 0$.

$$\frac{s + 1}{s(s^2 + s + 1)}(s) = \frac{a}{s}(s) + \frac{\alpha_1 s + \alpha_2}{s^2 + s + 1}(s) \quad \text{haciendo } s=0$$

$$a = \left[\frac{s(s + 1)}{s(s^2 + s + 1)} \right]_{s=0} = 1$$

Para calcular el valor de las constantes α_1 y α_2 , se multiplican todos los términos de la ecuación 2-2 por $(s+0.5+j0.866)(s-0.5-j0.866)$ y se le da el valor $s = -0.5-j0.866$, con lo cual se llega a la siguiente ecuación:

$$\left[\frac{s + 1}{s} \right]_{s=-0.5-j0.866} = [\alpha_1 s + \alpha_2]_{s=-0.5-j0.866}$$

$$\frac{0.5 - j0.866}{-0.5 - j0.866} = \alpha_1[-0.5 - j0.866] + \alpha_2$$

simplificando la ecuación anterior llegamos a

$$0.5 - j0.866 = \alpha_1[0.25 + j0.866 - 0.75] + \alpha_2[-0.5 - j0.866]$$

de esta ecuación compleja podemos obtener dos ecuaciones independientes, una con las partes reales (P.R.) y otra con las partes imaginarias (P.I.).

$$\text{(partes reales)} \quad 0.5 = -0.5\alpha_1 - 0.5\alpha_2$$

$$\text{(partes imaginarias)} \quad -j0.866 = j0.866\alpha_1 - j0.866\alpha_2$$

las dos ecuaciones anteriores se pueden transformar para facilitar su manejo como se indica en seguida:

$$\text{(P.R.)} \quad \alpha_1 + \alpha_2 = -1$$

$$\text{(P.I.)} \quad \alpha_1 - \alpha_2 = -1$$

Resolviendo las tres ecuaciones de partes reales e imaginarias por cualquier método se obtienen los siguientes resultados:

$$a_1 = -1 \quad \text{y} \quad a_2 = 0$$

Substituyendo los valores de las tres constantes a_1 , a_2 y a en la ecuación 2-2 la función compleja $F(s)$ toma la siguiente forma:

$$F(s) = \frac{1}{s} + \frac{-s + 0}{(s + 0.5 + j0.866)(s + 0.5 - j0.866)}$$

$$F(s) = \frac{1}{s} + \frac{-s}{[(s + 0.5) + j0.866][(s + 0.5) - j0.866]}$$

El denominador de la fracción más grande de $F(s)$ si se observa es el producto de dos binomios conjugados que se puede convertir en una diferencia de cuadrados como se indica:

$$F(s) = \frac{1}{s} + \frac{-s}{[(s + 0.5)^2 - (j0.866)^2]}$$

Para poder aplicar nuestra problema a las tablas de la transformada de Laplace, vamos a restarle al numerador de la segunda fracción la cantidad de 0.5.

$$F(s) = \frac{1}{s} + \frac{-s + 0.5 - 0.5}{[(s + 0.5)^2 + (0.866)^2]}$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

$$F(s) = \frac{1}{s} + \frac{s + 0.5}{[(s + 0.5)^2 + (0.866)^2]} + \frac{0.5 \left[\frac{0.866}{0.866} \right]}{[(s + 0.5)^2 + (0.866)^2]} \quad \text{®}$$

Aplicando las fórmulas de las tablas de la transformada de Laplace a la ecuación anterior tenemos:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = 1 - e^{-0.5t} \cos 0.866t + 0.578 e^{-0.5t} \text{Sen } 0.866t$$

... transformada inversa de Laplace de una función racional, se puede hacer de la siguiente manera: ...

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{(s + p_1)^r} \quad \text{Propiedad 14. La transformada inversa de Laplace de } \frac{1}{(s + p_1)^r} \text{ es } \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} e^{-p_1 t}$$

El binomio $(s + p_1)^r$ nos indica que la función compleja tiene polos múltiples ubicados en el punto $s = -p_1$. Por consiguiente, en las fracciones parciales de la función compleja se indica enseguida:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{b_r}{(s + p_1)^r} + \frac{b_{r-1}}{(s + p_1)^{r-1}} + \dots + \frac{b_1}{(s + p_1)} \quad (2-3)$$

La constante b_r se puede calcular multiplicando todos los términos de la ecuación (2-3) por $(s + p_1)^r$ y haciendo $s = -p_1$, de donde:

$$b_r = \left\{ F(s)(s + p_1)^r \right\}_{s=-p_1}$$

Para calcular b_{r-1} se deriva con respecto a "s" la ecuación (2-3) multiplicada por $(s + p_1)^r$ y se hace de igual manera $s = -p_1$:

$$\left[\frac{d}{ds} \left[\frac{P(s)}{(s + p_1)^r} \right] \right]_{s=-p_1} = \frac{d}{ds} \left[\frac{P(s)}{(s + p_1)^r} \right]_{s=-p_1} = \frac{P'(s)(s + p_1)^r - P(s)r(s + p_1)^{r-1}}{(s + p_1)^{2r}} \Big|_{s=-p_1}$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$b_{r-1} = \left\{ \frac{d}{ds} [F(s)(s + p_1)^r] \right\}_{s=-p_1}$$

Las demás constantes b_{r-2} , b_{r-3} , hasta b_1 se obtienen calculando la segunda derivada, y la tercera derivada sucesivamente, siguiendo éste procedimiento se llega a obtener una fórmula general para cualquier constante b_{r-j} , hasta b_1 . Los valores de las constantes son:

$$b_{r-j} = \frac{1}{j!} \left\{ \frac{d^j}{ds^j} [F(s)(s + p_1)^r] \right\}_{s=-p_1}$$

$$b_1 = \frac{1}{(r-1)!} \left\{ \frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}} [F(s)(s + p_1)^r] \right\}_{s=-p_1}$$

Una vez obtenidas todas las constantes b_r, b_{r-1}, \dots, b_1 se substituyen en la ecuación 2-3 y se aplican las fórmulas adecuadas de las tablas de la transformada de Laplace para calcular la transformada inversa.

A continuación se resolverá un ejercicio de la transformada inversa de Laplace de una función compleja que tiene polos múltiples con el fin de aplicar el método descrito anteriormente.

Ejercicio 2-8.- Hallar la transformada de Laplace inversa de la siguiente función compleja $F(s)$:

$$F(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s + 1)^3}$$

Solución: Si observamos el denominador de $F(s)$ podemos inmediatamente darnos cuenta que la función compleja tiene tres polos en $s = -1$, por ser un binomio al cubo, y por lo tanto se trata de un caso de polos múltiples. De acuerdo con lo anterior la $F(s)$ desarrollada en varias fracciones parciales queda como sigue:

$$F(s) = \frac{b_3}{(s + 1)^3} + \frac{b_2}{(s + 1)^2} + \frac{b_1}{(s + 1)} \quad (2-4)$$

El primer paso es el cálculo de las constantes b_3, b_2 y b_1 , para lo cual se aplicarán las fórmulas que ya se tienen para b_r, b_{r-1} y b_1 respectivamente.

$$b_3 = b_r = [F(s)(s + 1)^3]_{s=-1} = (s^2 + 2s + 3)_{s=-1} = 2$$

$$b_2 = \left\{ \frac{d}{ds} [F(s)(s + 1)^3] \right\}_{s=-1} = \left\{ \frac{d}{ds} (s^2 + 2s + 3) \right\}_{s=-1} =$$

$$b_2 = (2s + 2)_{s=-1} = 0$$

$$b_1 = \frac{1}{(3 - 1)!} \left\{ \frac{d^2}{ds^2} [F(s)(s + 1)^3] \right\}_{s=-1}$$

$$= \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2}{ds^2} (s^2 + 2s + 3) \right]_{s=-1} = \frac{1}{2} (2) = 1$$

Substituyendo los valores de b_3, b_2 y b_1 en la ecuación 2-4 tenemos:

$$F(s) = \frac{2}{(s + 1)^3} + \frac{1}{(s + 1)} \quad \text{y la transformada inversa es:}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s + 1)^3}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s + 1)}\right] = (t^2 + 1)e^{-t}$$

La transformada de Laplace es una herramienta matemática que permite transformar ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas en el dominio de la frecuencia compleja. Esto facilita enormemente la resolución de problemas de ingeniería y física. En este documento, se presentará un ejemplo de cómo utilizar la transformada de Laplace para resolver una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden. El objetivo principal es demostrar el proceso de transformación, la resolución de la ecuación en el dominio de Laplace y la posterior transformación inversa para obtener la solución en el dominio del tiempo. Este método es especialmente útil para ecuaciones con condiciones iniciales y términos de excitación que pueden ser transformados fácilmente.

Consideremos la siguiente ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con condiciones iniciales dadas:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + 4x = 10, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$$

Solución: Aplicando las fórmulas de las tablas de la transformada de Laplace tenemos:

$$s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) + 5[sX(s) - x(0)] + 4X(s) = \frac{10}{s}$$

Substituyendo las condiciones iniciales de la ecuación diferencial:

$$s^2 X(s) - 0 - 0 + 5[sX(s) - 0] + 4X(s) = \frac{10}{s}$$

Es decir, para este caso se tiene el siguiente:

$$s^2 [s^2 + 5s + 4] = \frac{10}{s} \Rightarrow s^2 + 5s + 4 = \frac{10}{s^3}$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Para completar la solución hay que calcular la transformada inversa de Laplace. Como se puede ver la función $X(s)$ tiene tres polos uno en el origen y los otros dos hay que localizarlos aplicando la fórmula general de segundo grado.

$$s = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 4}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2} \quad s_1 = -1 \quad s_2 = -4$$

De tal manera que $s^2 + 5s + 4 = (s + 1)(s + 4)$

De acuerdo con las raíces calculadas s_1 y s_2 , los polos de $X(s)$ son reales y distintos. La $X(s)$ se factoriza en la siguiente forma:

$$X(s) = \frac{4s^2 + 23s + 10}{s(s + 1)(s + 4)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s + 1} + \frac{A_3}{s + 4}$$

... ..

$$a_1 = [x(0)]_{s=0} = \frac{4s^2 + 23s + 1}{s + 1 + (s + 4)} \Big|_{s=0} = \frac{1 - 0 + 1}{1 + 4} = \frac{2}{5}$$

$$a_2 = [x(s)(s+1)]_{s=-1} = \frac{4s^2 + 23s + 1}{s(s + 4)} \Big|_{s=-1} = \frac{4 - 23 + 1}{-1(-1+4)} = \frac{-18}{-3} = 6$$

$$a_3 = [x(s)(s+4)]_{s=-4} = \frac{4s^2 + 23s + 1}{s(s + 1)} \Big|_{s=-4} = \frac{64 - 92 + 1}{-4(-4+1)} = \frac{-27}{12} = -\frac{9}{4}$$

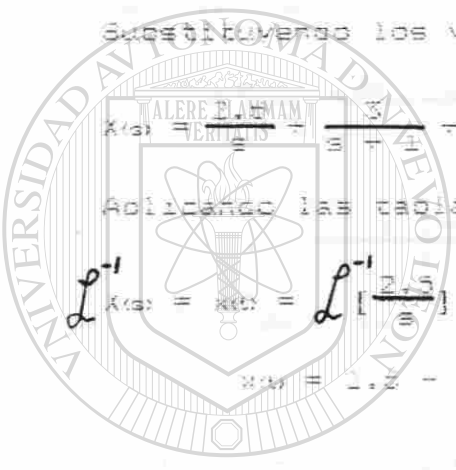
... ..
 Sustituyendo los valores de las constantes a_1 , a_2 y a_3 en $X(s)$:

$$X(s) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{s+1} + \frac{6}{s+4} - \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{s+4}$$

Aplicando las tablas para calcular la transformada inversa:

$$L^{-1} X(s) = x(t) = L^{-1} \left[\frac{2}{5(s+1)} \right] + L^{-1} \left[\frac{6}{s+4} \right] - L^{-1} \left[\frac{9}{4(s+4)} \right]$$

$$x(t) = \frac{2}{5} e^{-t} + 6e^{-4t} - \frac{9}{4} e^{-4t}$$



UANL

Ejercicio 2-11. - Resolva por el método de Laplace la ecuación diferencial con condiciones iniciales dadas de la transformada de Laplace.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 4 \frac{dx}{dt} + 5x = 10 \quad x(0) = 0 \quad x'(0) = 4$$

Solución: Transformando por Laplace tenemos:

$$s^2 X(s) - sx(0) - x'(0) + 4sX(s) - 4x(0) + 5X(s) = \frac{10}{s}$$

$$s^2 X(s) - 4s - 5 + 4sX(s) - 15 + 5X(s) = \frac{10}{s}$$

$$X(s)[s^2 + 4s + 5] = \frac{10}{s} + 4s + 19 = \frac{4s^2 + 19s + 10}{s}$$

El trinomio $(s^2 + 4s + 5)$ se factoriza aplicando la fórmula general de segundo grado:

$$s = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 5}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = -2 \pm j2$$

Se quiere saber como se comportan los valores de $x(t)$ en el tiempo. Para ello se debe saber que tenemos un caso de polo complejo conjugado. Para ello se trata de $s^2 + 4s + 10 = 0$ y se usa factorización de la siguiente manera:

$$s^2 + 4s + 10 = (s + 2 - j2)(s + 2 + j2)$$

$$X(s) = \frac{4s^2 + 19s + 10}{s(s^2 + 4s + 10)} = \frac{4s^2 + 19s + 10}{s(s + 2 - j2)(s + 2 + j2)}$$

El siguiente paso es desarrollar $X(s)$ en fracciones parciales como se indica a continuación:

$$X(s) = \frac{a}{s} + \frac{c_1s + c_2}{(s + 2 - j2)(s + 2 + j2)} \quad 2-5$$

En seguida se calculan los valores de las constantes a , c_1 y c_2

$$a = \left. \frac{4s^2 + 19s + 10}{(s^2 + 4s + 10)} \right|_{s=0} = \frac{0 + 0 + 10}{0 + 0 + 10} = 1.25$$

$$c_1 = \left. \frac{4s^2 + 19s + 10}{s + 2 + j2} \right|_{s=-2-j2}$$

$$c_2 = \left. \frac{4s^2 + 19s + 10}{s + 2 - j2} \right|_{s=-2+j2}$$

$$c_1(-j2) + c_2(j2) = 4(-2-j2)^2 + 19(-2-j2) + 10 = 4(-4 - j2 + 4) - 8 - j8 + 10 = -8 - j8 + 10 = 2 - j8$$

$$c_1(4 - j8 - 4) - 2c_2 + j2c_2 = 4(-4 - j2 + 4) - 8 - j8 + 10 = -8 - j8 + 10 = 2 - j8$$

$$-j8c_1 - 2c_2 + j2c_2 = -32j + 28j - 28$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

De la ecuación compleja anterior se plantean dos, una con las partes reales y otra con las partes imaginarias.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$\text{(partes reales)} \quad -2c_2 = -28$$

$$\text{(partes imaginarias)} \quad -8c_1 + 2c_2 = 6$$

$$\text{de donde } c_1 = 2.75 \quad \text{y} \quad c_2 = 14$$

Substituyendo los valores de las constantes en la ecuación 2-5

$$X(s) = \frac{1.25}{s} + \frac{2.75s + 14}{[(s+2) - j2][(s+2) + j2]}$$

$$X(s) = \frac{1.25}{s} + \frac{2.75(s+2)}{(s+2)^2 + 4} + \frac{(14 - 5.5j) \left[\frac{-j}{2} \right]}{(s+2)^2 + 4}$$

$$x(t) = 1.25 + 2.75 e^{-2t} \cos 2t + 4.25 e^{-2t} \text{Sen } 2t$$

PROBLEMAS

2-1.- Encontrar la transformada de Laplace para las siguientes funciones:

a) $f(t) = e^{-3t} \cos 4t$

b) $f(t) = e^{2t} \cos 3t$

c) $f(t) = [e^{at} \cos t]^2$

d) $f(t) = \int_0^t \frac{d^2 x}{dt^2} + 3 \frac{dx}{dt} + x = 10$

2-2.- Aplicar los teoremas de los valores iniciales y finales a las siguientes funciones complejas:

a) $F(s) = \frac{100}{s^2 + 4s + 4}$

b) $F(s) = \frac{100}{s^2 + 10s + 16}$

2-3.- Encontrar la transformada inversa de:

a) $F(s) = \frac{2s^2 + 1}{s^2 + 4s + 4}$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

c) $F(s) = \frac{6s + 3}{s(s + j8)(s - j8)}$

2-4.- Aplicando la transformada de Laplace, resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $\frac{d^2 x}{dt^2} + 3 \frac{dx}{dt} + 2x = 10$ $x(0) = 2$ $x'(0) = 4$

b) $\frac{d^2 z}{dt^2} + 2 \frac{dz}{dt} + z = 80 \sin 2t$ $z(0) = 1$ $z'(0) = 3$

CAPITULO III

MODELOS MATEMATICOS Y FUNCIONES DE TRANSFERENCIA

3-1.- MODELOS MATEMATICOS

La dinámica de un sistema de control cualquiera, sea éste de tipo eléctrico, electrónico, mecánico etc, se representa generalmente por medio de ecuaciones diferenciales. Para obtener estas ecuaciones diferenciales nos tenemos que basar en las leyes fundamentales ya conocidas, por ejemplo en la ley de Ohm o leyes de Kirchhoff para sistemas eléctricos o en las leyes de Newton para sistemas mecánicos.

La teoría del control es muy amplia y se puede aplicar a sistemas de todo tipo, por ejemplo sistemas hidráulicos, térmicos, biológicos, químicos, económicos etc. Logicamente y de acuerdo con el tipo de Carreras que se imparten en nuestra escuela, haremos hincapié en sistemas de control de tipo mecánico, eléctrico y electrónico.

A la ecuación o grupo de ecuaciones diferenciales que describen matemáticamente el comportamiento de un sistema de control físico, se le denomina "Modelo Matemático del Sistema".

Para poder analizar un sistema de control desde el punto de vista de ingeniería, es necesario primeramente elaborar su modelo matemático el cual nos representa en teoría al sistema real.

Obviamente el planteamiento del modelo matemático es un primer paso muy importante ya que todo el análisis posterior del sistema descansa sobre la base del modelo matemático seleccionado. De acuerdo con lo anterior es de suma importancia plantear un modelo matemático lo más apegado a la realidad, para que los resultados obtenidos del análisis también correspondan a la realidad esperada.

Por lo tanto la experiencia de una persona en determinado tipo de sistemas es muy valiosa para llegar a obtener un buen modelo matemático. Una vez obtenido el modelo matemático hay una diversidad muy grande de técnicas analíticas y computacionales para realizar un adecuado análisis al sistema de control.

Siempre cuando se desea plantear un modelo matemático de un sistema de control cualquiera, se enfrenta uno al siguiente dilema : que tan simple o complicado necesito el modelo, que tan exacto o que tanto error se puede tolerar en el sistema.

El modelo del sistema puede ser sencillo con una o dos ecuaciones o puede ser complicado con un gran número de ecuaciones. Cuando es simple su solución puede hacerse a mano, cuando se manejan muchas ecuaciones tal vez se requieran técnicas computacionales para resolver el problema matemático.

En general, al estudiar un sistema nuevo, encontraremos que es deseable primeramente construir un modelo sencillo, lo más simplificado posible, para poder tener una idea general de la solución. Después ya con cierta experiencia obtenida en el modelo simple se puede plantear un modelo matemático más complicado con lo cual se obtendrán resultados más completos y exactos.

Sistemas Lineales.- El concepto de sistema lineal es muy utilizado en el lenguaje de las matemáticas, pero que son los sistemas lineales. Los sistemas lineales se pueden definir como aquellos en los que las ecuaciones de su modelo matemático son lineales. Como la mayoría de los modelos matemáticos de sistemas de control se expresan con ecuaciones diferenciales, es muy importante definir que es una ecuación diferencial lineal.

Una ecuación diferencial es lineal si sus coeficientes son constantes, función de la variable independiente (t) o de la variable dependiente (x) a la primera potencia. Se aclara que en una ecuación diferencial siempre el tiempo es la variable independiente y la variable dependiente puede ser x, y, o z, generalmente.

Es importante que un sistema sea lineal porque solamente a los sistemas lineales se les pueden aplicar los siguientes dos principios:

- a) El principio de la Superposición y
- b) El principio de la Proporcionalidad.

El principio de la Superposición establece que cuando tengamos un sistema de control con varias señales de entrada (función excitación) actuando simultáneamente, podemos calcular la salida (función respuesta), trabajando con una entrada a la vez y sumando las salidas parciales obtenidas con cada entrada para calcular la salida total. Esto nos permite calcular la respuesta a diversas entradas, tratando una sola entrada a la vez y sumando los resultados parciales. En pocas palabras este principio nos permite analizar sistemas complicados con muchas entradas considerando una sola entrada a la vez, lo cual nos simplifica el problema.

El principio de la Proporcionalidad establece que en cualquier sistema de control lineal la señal de salida (función respuesta) es proporcional a la señal de entrada (función excitación). Lo anterior significa que si la entrada aumenta, la salida debe de aumentar en la misma proporción. Si la entrada disminuye, la salida lógicamente debe de disminuir en la misma proporción. La proporcionalidad cumplen un sistema de control lineal una relación de causa-efecto con las entradas y las salidas.

Sistemas lineales invariables en el tiempo y sistemas lineales variables en el tiempo.- Los sistemas dinámicos que son lineales y están constituidos por componentes concentrados e invariables en el tiempo, pueden ser representados por ecuaciones diferenciales lineales invariantes en el tiempo. Estos sistemas reciben el nombre de lineales invariantes en el tiempo (o lineales con coeficientes constantes). En seguida se representa una ecuación diferencial de un sistema lineal invariante en el tiempo.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 5 \frac{dx}{dt} + 10x = 8$$

Los sistemas representados por ecuaciones diferenciales, cuyos coeficientes son funciones del tiempo reciben el nombre de sistemas lineales variables en el tiempo. Esto quiere decir que la ecuación diferencial en este caso cambia con el tiempo constantemente. Se representa en seguida una ecuación diferencial variable en el tiempo.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 6t \frac{dx}{dt} + 4x = 12$$

Como se puede ver en la ecuación anterior, el segundo término cambia constantemente con el tiempo.

Sistemas No Lineales.- Los sistemas de control generalmente se representan matemáticamente por medio de ecuaciones lineales, pero la verdad es que en la vida real la mayor parte de los sistemas son no lineales. En algunos sistemas lineales también dicha linealidad es restringida a un determinado rango de operación.

La linealidad se puede perder en un sistema de control, por ejemplo por saturación, cuando el nivel de señal de entrada o salida es muy elevado. También se puede perder la linealidad por haber una franja o zona muerta y por último también se puede perder la linealidad por algunos componentes cuya operación sea proporcional a relaciones cuadráticas o de orden superior.

La solución de sistemas no lineales es más complicada que los sistemas lineales, por lo que se desea siempre trabajar con sistemas lineales. La mayoría de las veces aunque el sistema sea no lineal, es posible linealizarlo aunque sea en un rango restringido de operación. Un poco más adelante se verán algunos métodos matemáticos para linealizar modelos matemáticos no lineales.

A continuación en la fig. 3-1 se representan algunas curvas características de sistemas no lineales.

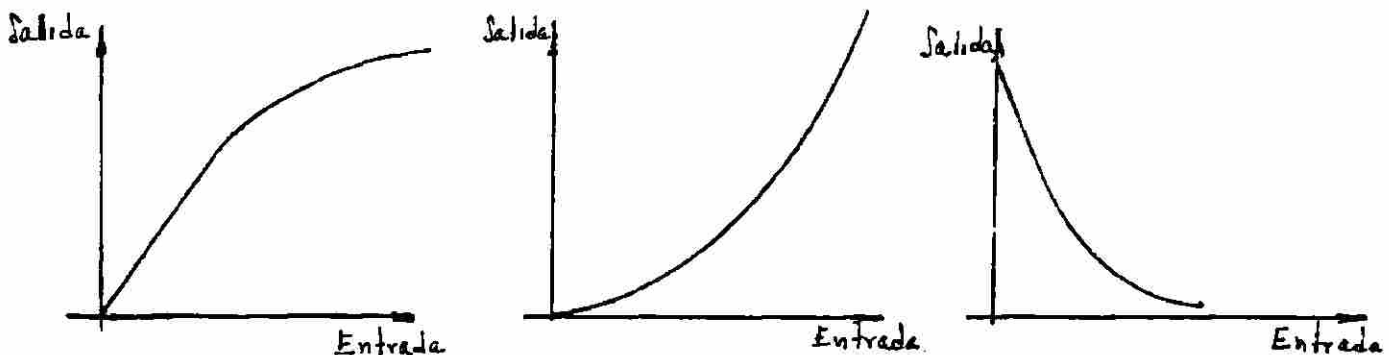


Fig. 3-1 Curvas características de Sistemas No Lineales

3-2.- FUNCIONES DE TRANSFERENCIA

La Función de Transferencia de un sistema de control lineal invariante en el tiempo se puede definir como la relación de la Transformada de Laplace de la salida (función respuesta) a la Transformada de Laplace de la entrada (función excitación), suponiendo que todas las condiciones iniciales son cero.

En seguida se calculará la Función de Transferencia de un sistema de control cuyo modelo matemático es la ecuación diferencial

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = b_0 x^{(m)} + b_1 x^{(m-1)} + \dots + b_{m-1} x' + b_m x$$

En la ecuación anterior se supone que "x" es la señal de entrada y "y" es la señal de salida del sistema de control. Para obtener la Función de Transferencia del sistema de control se calculará la transformada de Laplace con condiciones iniciales igual a cero de la ecuación diferencial y después se despeja la relación de la salida a la entrada. Transformando ambos miembros de la ecuación

$$\begin{aligned} a_0 s^n Y(s) + a_1 s^{(n-1)} Y(s) + \dots + a_{n-1} s Y(s) + a_n Y(s) &= \\ &= b_0 s^m X(s) + b_1 s^{(m-1)} X(s) + \dots + b_{m-1} s X(s) + b_m X(s) \\ Y(s) [a_0 s^n + a_1 s^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} s + a_n] &= \\ &= X(s) [b_0 s^m + b_1 s^{(m-1)} + \dots + b_{m-1} s + b_m] \end{aligned}$$

Función de Transferencia $\approx G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

Generalmente en una función de transferencia el orden del exponente "n" siempre es mayor que el exponente "m".

La Función de Transferencia de un sistema de control nos dá la relación de la señal de salida y de entrada, siendo el sistema lineal e invariante en el tiempo. Es importante hacer notar que aunque la Función de Transferencia relaciona la salida y la entrada de un sistema, ésta no depende ni de la entrada ni de la salida, ya que solo depende de los componentes internos del sistema de control.

Las unidades de la función de transferencia serán las que resulten de la relación de la salida a la entrada del sistema, sin embargo no nos dá ninguna información sobre la naturaleza física del sistema, por lo que sistemas de control de distinta naturaleza es posible que tengan la misma función de transferencia.

Cálculo de la Función de Transferencia.- Enseguida se calculará la Función de Transferencia de algunos sistemas de control mecánicos y eléctricos ampliamente utilizados en la práctica. El procedimiento general para obtener la Función de Transferencia consiste en desarrollar los siguientes pasos:

- 1.- Plantear el Modelo Matemático del Sistema que casi siempre es una o varias ecuaciones diferenciales.
- 2.- Calcular la Transformada de Laplace de la o las ecuaciones diferenciales que forman el Modelo Matemático, suponiendo condiciones iniciales igual a cero.
- 3.- Hallar la relación de la salida $Y(s)$ respecto a la entrada $X(s)$. Siendo ésta relación la Función de Transferencia.

Como se dijo anteriormente, para plantear el Modelo Matemático es muy importante tener conocimientos sobre el sistema en particular que se va a representar por medio de ecuaciones diferenciales. Por ejemplo si se va a estudiar circuitos eléctricos es necesario tener conocimiento de las principales leyes que gobiernan la operación de los circuitos (Ley de Ohm, Leyes de Kirchhoff, etc).

Sistema Mecánico de Traslación.- Se calculará la Función de Transferencia de un sistema mecánico muy conocido, llamado Sistema Masa-Resorte-Amortiguador por ser éstos tres elementos los componentes del sistema. Una de las principales y más conocida aplicación de este sistema mecánico es el Sistema de Suspensión de cualquier vehículo motorizado, llámese carro, camión, tren etc. Todos sabemos que los carros tienen una cierta cantidad de masa que se suspende por medio de resortes y/o muelles y amortiguadores de diferentes tipos.

El propósito de la suspensión de un coche es el proporcionar a sus ocupantes la máxima comodidad posible durante el viaje, amortiguando lo más que se pueda las irregularidades del camino o carretera.

Los amortiguadores son dispositivos que proveen mediante fricción viscosa el amortiguamiento. Consisten en un pistón y un cilindro relleno de aceite. Cualquier movimiento relativo entre el eje del pistón y el cilindro, encuentra resistencia producida por el aceite, debido a que éste debe fluir a través de pequeños orificios que tiene el pistón.

En la fig. 3-2 se representa un diagrama esquemático del sistema Masa-Resorte-Amortiguador.

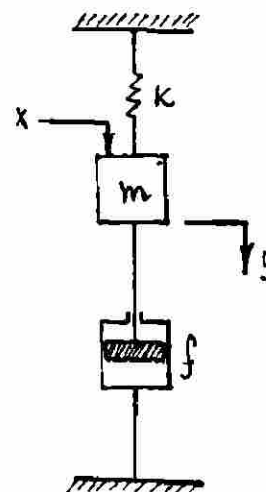


Fig. 3-2.- Sistema Mecánico Masa-Resorte-Amortiguador

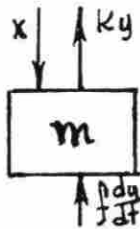


FIG. 170 Diagrama de cuerpo libre de la masa.

En la fig. 170, se puede ver que se tienen tres fuerzas actuando sobre la masa, una es la fuerza "x" que representa la señal de entrada o señal de excitación. Otra es la fuerza que ejerce el resorte "k" que es igual al producto de la constante del resorte "k" por el desplazamiento de la masa "y". La tercera fuerza es la que ejerce el amortiguador "f" que es igual al producto del coeficiente de fricción "f" por la velocidad del amortiguador por la velocidad de la masa.

La ecuación fundamental que se aplica en este sistema mecánico es la segunda ley de Newton que se representa matemáticamente como sigue:

$$\sum F = m \ddot{y}$$

$$x - ky - f \frac{dy}{dt} = m \frac{d^2 y}{dt^2}$$

Aplicando la segunda ley de Newton al sistema mecánico se derivaron las ecuaciones:

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + f \frac{dy}{dt} - ky = x$$

Transformando por Laplace la ecuación anterior :

$$m [s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)] + f [sY(s) - y(0)] + kY(s) = X(s)$$

Considerando condiciones iniciales igual a cero, la ecuación transformada se simplifica y puede escribirse como sigue:

$Y(s)[ms^2 + fs + k] = X(s)$ de donde se puede obtener la función de transferencia.

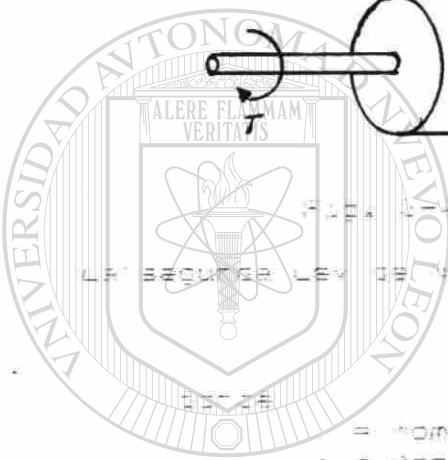
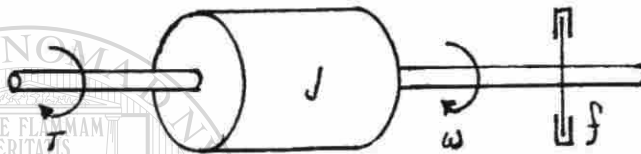
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{ms^2 + fs + k}$$

El momento de inercia de un cilindro sólido de radio r y longitud L respecto a un eje que pasa por su centro de masa y es perpendicular a su longitud es:

$$J = \frac{1}{2} m r^2$$

donde m es la masa del cilindro.

- 1. El momento de inercia de un cilindro sólido de radio r y longitud L respecto a un eje que pasa por su centro de masa y es perpendicular a su longitud es:
- 2. El momento de inercia de un cilindro sólido de radio r y longitud L respecto a un eje que pasa por su centro de masa y es perpendicular a su longitud es:
- 3. El momento de inercia de un cilindro sólido de radio r y longitud L respecto a un eje que pasa por su centro de masa y es perpendicular a su longitud es:
- 4. El momento de inercia de un cilindro sólido de radio r y longitud L respecto a un eje que pasa por su centro de masa y es perpendicular a su longitud es:



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Si transformamos la ecuación por Laplace, tenemos:

$$T(s) - f \Omega(s) = J s \Omega(s)$$

$$\Omega(s) [J s + f] = T(s)$$

Tomando el par mecánico $T(s)$ como señal de entrada y la velocidad $\Omega(s)$ como señal de salida, la función de transferencia será:

$$\frac{\Omega(s)}{T(s)} = \frac{1}{J s + f}$$

- $\Omega(s)$ = La transformada de Laplace de $[\omega(t)]$
- $T(s)$ = La transformada de Laplace de $[\tau(t)]$

El circuito eléctrico R-L-C, se considera como señal de entrada e_i y salida e_o .

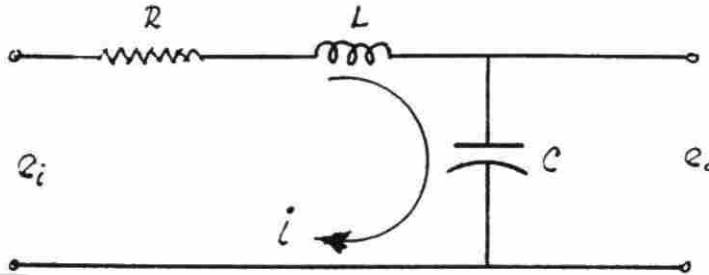


Fig. 3-5.- Circuito eléctrico R-L-C.

Aplicando las leyes de Kirchhoff al circuito se obtienen las siguientes ecuaciones para las señales de entrada y salida:

$$e_i = R \frac{di}{dt} + L \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{C} \int i dt \quad (3-3)$$

$$e_o = \frac{1}{C} \int i dt \quad (3-4)$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Considerando como ya se mencionó a $E_{in}(s)$ como señal de entrada y $E_{out}(s)$ como señal de salida, la función de transferencia del circuito será:

$$\frac{E_{out}(s)}{E_{in}(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} \quad (3-5)$$

Conociendo la función de transferencia cuyo valor depende de R-L-C y sabiendo el valor de la señal de entrada, se puede calcular fácilmente la salida o respuesta del circuito, ya sea en función de la frecuencia o del tiempo.

Se puede observar que el circuito en serie con impedancias locales es equivalente al anterior, ya que en ambos casos la impedancia de salida es la suma de las impedancias de los componentes en serie.

Si se observa el circuito en serie con impedancias locales, se puede ver que la impedancia de salida es la suma de las impedancias de los componentes en serie, lo que es idéntico al caso anterior.

Este tipo de circuitos se utilizan comúnmente en el análisis de sistemas de control y en el diseño de filtros pasivos.

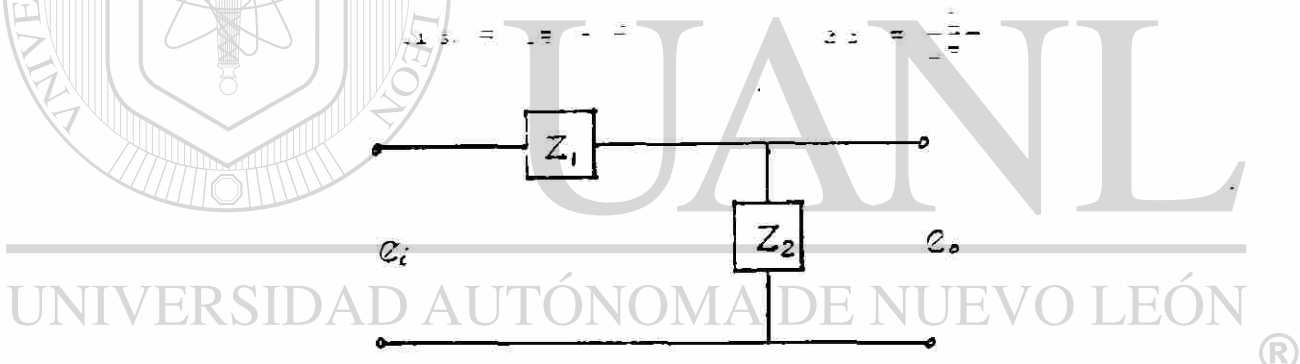


Fig. 1-5 Circuito eléctrico con impedancias locales

La función de transferencia del circuito de la fig. 1-5 es:

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)}$$

Especializando los valores de $Z_1(s)$ y $Z_2(s)$ en la ecuación anterior:

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{\frac{1}{Cs}}{Ls + R + \frac{1}{Cs}} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

Por supuesto la función de transferencia anterior es idéntica a la que ya se había obtenido anteriormente, en la ecuación 1-4.

Si se comparan las ecuaciones 3-5 y 3-7 se puede ver que son de forma idéntica, pues sólo las literales son diferentes. De la comparación anterior de las ecuaciones se puede obtener el siguiente cuadro de analogías fuerza-tensión, siendo estos parámetros los elementos activos de ambos sistemas mecánico y eléctrico.

Tabla 3-1 Cuadro de Analogías Fuerza-Tensión

Sistema mecánico	Sistema eléctrico
fuerza p (par T)	tensión e
masa m (momento de inercia J)	inductancia L
coeficiente de fricción viscosa f	resistencia R
constante de resorte k	recíproca de capacitancia $1/C$
desplazamiento x (ángulo θ)	carga q
velocidad x' (velocidad angular θ')	corriente i

Analogía fuerza-corriente.- Esta es otra analogía que también se puede utilizar entre sistemas eléctricos y mecánicos, tomando como elementos activos la fuerza en el sistema mecánico y la corriente en el circuito eléctrico.

Para demostrar ésta analogía nos basaremos en los sistemas mecánico y eléctrico representados en la fig. 3-8 a y b.

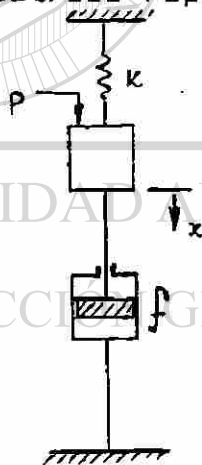


Fig. 3-8 a

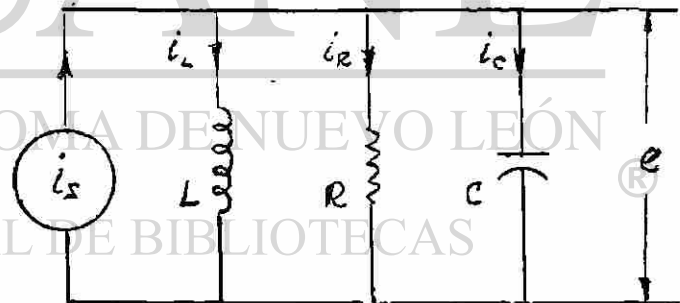


Fig. 3-8 b

Para el sistema mecánico masa-resorte-amortiguador, el modelo matemático que lo representa es la misma ecuación anterior 3-5.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + f \frac{dx}{dt} + kx = p \quad (3-8)$$

Para el circuito eléctrico en paralelo y aplicando la ley de corrientes de Kirchhoff tenemos:

$$iL + iR + iC = iS$$

$$\frac{1}{L} \int e dt + \frac{e}{R} + C \frac{de}{dt} = iS \quad (3-9)$$

Substituyendo $e = \frac{d\psi}{dt}$ en la ecuación anterior 3-9 tenemos:

$$\frac{1}{L} \int \frac{d\psi}{dt} dt + \frac{d\psi}{dt} \left(\frac{1}{R} \right) + C \frac{d^2\psi}{dt^2} = iS$$

Reordenando la ecuación se puede escribir en la siguiente forma:

$$C \frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{d\psi}{dt} + \frac{1}{L} \psi = iS \quad (3-10)$$

Comparando las ecuaciones 3-10 y 3-8 se puede ver que son ecuaciones de sistemas análogos. Esta analogía se denomina analogía fuerza-corriente. En la tabla 3-2 se representa el cuadro de analogías completo comparando elemento por elemento.

Tabla 3-2 Cuadro de Analogías fuerza-corriente

Sistema mecánico	Sistema eléctrico
fuerza p (par T)	corriente i
masa m (inercia J)	capacitancia C
coeficiente de fricción viscosa f	recíproca de resistencia 1/R
constante de resorte k	recíproca de inductancia 1/L
desplazamiento x (ángulo θ)	enlace de flujo magnético ψ
velocidad x' (vel. angular θ')	tensión e

Los sistemas análogos son importantes en la práctica ya que nos permiten simular un sistema analizando otro sistema de naturaleza distinta. Por ejemplo se puede simular un sistema mecánico mediante un circuito eléctrico análogo. Generalmente se prefiere estudiar circuitos eléctricos análogos porque tienen una serie de ventajas en comparación con otros sistemas como el mecánico. El circuito eléctrico es muy barato, fácil de construir, fácil para variar cualquier elemento (resistencia variable, condensador variable etc) y se dispone de gran cantidad de aparatos para medir fácilmente cualquier señal de voltaje, corriente, forma de onda en osciloscopio o dibujarla en un graficador. Se debe tener cuidado al aplicar analogías entre dos sistemas trabajando en una región de operación muy amplia, pues se debe recordar que las ecuaciones diferenciales son aproximaciones matemáticas a lo que sucede en la realidad.

3-3.- LINEALIZACION DE MODELOS MATEMATICOS NO LINEALES.

Como ya se dijo anteriormente siempre se desea trabajar con sistemas lineales. Sin embargo la mayoría de los sistemas reales son no lineales por lo que hay necesidad de linealizar un modelo aunque sea en un rango de operación pequeño. A continuación se verá un procedimiento matemático para linealizar un modelo no lineal.

La base de este procedimiento es el desarrollo de una función en una serie matemática denominada serie de Taylor. Si tenemos un sistema de control en el que la señal de entrada sea $x(t)$ y la salida $y(t)$. Si la relación entre ambas señales está dada por la siguiente ecuación:

$$y = f(x) \quad (3-11)$$

Siendo x y y las condiciones normales o nominales de operación, la ecuación 3-11 puede ser desarrollada en serie de Taylor alrededor de este punto en la siguiente forma:

$$y = f(x) = f(\bar{x}) + \frac{df}{dx} (x - \bar{x}) + \frac{1}{2!} \frac{d^2f}{d^2x} (x - \bar{x})^2 + \dots \quad (3-12)$$

las derivadas df/dx , d^2f/dx^2 se calculan en $x = \bar{x}$.

Considerando que en la ecuación 3-12 la diferencia entre x y \bar{x} es pequeña, dicha diferencia pequeña elevada al cuadrado sería mas pequeña, por lo que el término que tiene la segunda derivada y los siguientes se pueden despreciar sin incurrir en mucho error. La ecuación 3-12 se simplifica a la siguiente forma:

$$y = \bar{y} + K(x - \bar{x})$$

$$\text{o bien } y - \bar{y} = K(x - \bar{x}) \quad (3-13)$$

$$\text{donde } \bar{y} = f(\bar{x}) \quad K = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=\bar{x}}$$

La ecuación 3-13 es una ecuación lineal de una recta que se obtuvo de la ecuación 3-11 la cual es no lineal. La única limitación es que el valor de x no debe ser muy diferente de \bar{x} . Lo anterior significa que el rango de operación del sistema debe ser estrecho.

A continuación se estudiará un sistema de control no lineal cuya salida es "y" con dos entradas x_1 y x_2 . La relación entre la salida y las entradas es la siguiente relación no lineal :

$$y = f(x_1, x_2) \quad (3-14)$$

Con el fin de linealizar en forma aproximada el modelo no lineal, desarrollaremos en serie de Taylor la ecuación 3-14 alrededor del punto normal de operación x_1, x_2 .

La ecuación 3-11 se puede escribir en forma matricial como:

$$\begin{aligned}
 \ddot{x} + \ddot{y} &= \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right] + \left[\begin{matrix} -x \\ -y \end{matrix} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right] + \left[\begin{matrix} -x \\ -y \end{matrix} \right]
 \end{aligned}$$

La ecuación 3-12 puede escribirse en forma matricial en forma más compacta, al emplearse una notación en la que los términos de la matriz de coeficientes se representan por medio de los símbolos de los operadores diferenciales. El vector de los desplazamientos se representa por medio de un vector columna \mathbf{x} , la correspondencia de los valores de x y y se hace mediante una notación semejante al cuadrado de los valores de los desplazamientos entre dos, la correspondencia de los términos de la ecuación 3-12 se hace mediante una notación semejante al cuadrado de los valores de los desplazamientos entre dos, la correspondencia de los términos de la ecuación 3-12 se hace mediante una notación semejante al cuadrado de los valores de los desplazamientos entre dos.

De acuerdo con lo anterior, la ecuación 3-12 puede escribirse en forma de Taylor resultando:

$$\begin{aligned}
 \ddot{\mathbf{x}} + \ddot{\mathbf{y}} &= \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \mathbf{x} + \left[\begin{matrix} -x \\ -y \end{matrix} \right] \\
 \text{El operador: } & \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \mathbf{x} = \left[\begin{matrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{matrix} \right] \mathbf{x} \\
 & \left[\begin{matrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{matrix} \right] \mathbf{x} = \left[\begin{matrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{matrix} \right] \mathbf{x}
 \end{aligned}$$



La ecuación 3-13 como se puede ver es una ecuación matricial, siendo la ecuación de una matriz de coeficientes que se representa linealmente la función de los desplazamientos.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Servomotor hidráulico. En la Fig. 3-14 se representa un servomotor hidráulico, el cual es un equipo ampliamente utilizado en la industria como amplificador de potencia hidráulico, controlado por una válvula piloto. La válvula piloto controla la entrada y la salida del aceite al cilindro de potencia. La posición de la válvula piloto se puede controlar por medio de bobinas eléctricas en los lados de la válvula o en forma electrónica con un dispositivo especial llamado LVDT por sus iniciales en inglés (transformador diferencial de voltaje lineal). El movimiento de la válvula piloto generalmente es muy pequeño de unos cuantos milímetros.

A continuación se explica el funcionamiento del servomotor: cuando se desplaza la válvula piloto a la derecha, el aceite a presión entra al cilindro de potencia a la cámara P1, moviendo al cilindro de potencia la carga a la derecha y evacuando el aceite que se encuentre en la cámara P2. Si la válvula piloto se mueve a la izquierda, el aceite entra a la cámara P2 y sale el aceite que se encuentre en P1.

La ventaja del Servomotor Hidráulico consiste en que con una pequeña señal de control que se aplica eléctricamente o electrónicamente para mover la válvula piloto, el sistema puede mover una carga de gran tamaño. Las principales variables que entran en juego en el Servomotor son:

- Q = Cantidad de aceite al cilindro de potencia en Kg/seg.
- $\Delta P = P_2 - P_1 =$ Dif. de Presión sobre el pistón de potencia en Kg/cm²
- x = Desplazamiento de la válvula piloto en cm.

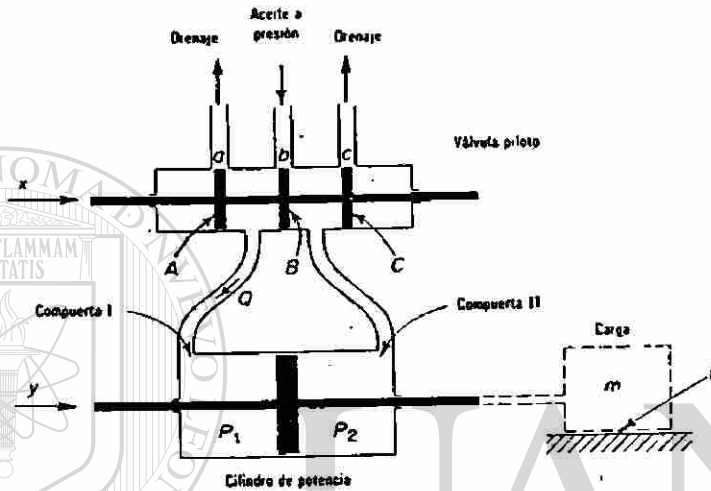


Fig. 3-9 Diagrama esquemático de un servomotor hidráulico.

En la fig. 3-9 se puede ver que la cantidad de aceite Q depende de x es función del desplazamiento "x" y de la dif. de presión ΔP . Se relacionan las tres variables con la siguiente ecuación no lineal:

$$Q = f(x, \Delta P)$$

Si se linealiza esta ecuación trabajando el sistema cerca del punto normal de operación $\bar{Q}, \bar{x}, \Delta \bar{P}$, la ecuación se convierte en :

$$Q - \bar{Q} = K_1(x - \bar{x}) - K_2(\Delta P - \Delta \bar{P}) \quad 3-16$$

donde

$$\bar{Q} = f(\bar{x}, \Delta \bar{P})$$

$$K_1 = \left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}, \Delta P=\Delta \bar{P}}$$

$$K_2 = - \left. \frac{\partial Q}{\partial \Delta P} \right|_{x=\bar{x}, \Delta P=\Delta \bar{P}}$$

Para este sistema en particular, la condición normal de operación es $\bar{x} = 0, \Delta \bar{P} = 0$ y $\bar{Q} = 0$. Por lo tanto substituyendo estas condiciones normales en la ecuación 3-16, se obtiene

$$Q = K_1 x - K_2 \Delta P \quad 3-17$$

... de la fuerza de resorte es $F = k_1 x + k_2 \Delta y$...
 ... de la fuerza de fricción es $F_f = f \dot{y}$...
 ... de la fuerza de potencia es $F_p = A p$...
 ... de la fuerza de carga es $F_c = m \ddot{y}$...

$$F_{pot} = A p$$

$$F_c = m \ddot{y}$$

... de la fuerza de resorte es $F = k_1 x + k_2 \Delta y$...

$$F = k_1 x + k_2 \Delta y$$

... de donde

$$\Delta y = \frac{A}{k_2} [k_1 x + f \dot{y}]$$

... de la fuerza de resorte es $F = k_1 x + k_2 \Delta y$...

$$F = k_1 x + k_2 \Delta y$$

... de la fuerza de resorte es $F = k_1 x + k_2 \Delta y$...

$$m \ddot{y} + f \dot{y} + \frac{A^2}{k_2} \ddot{y} = \frac{A k_1}{k_2} x$$

... de la fuerza de resorte es $F = k_1 x + k_2 \Delta y$...

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

En la ecuación 3-18, m es la masa que está moviendo el pistón hidráulico y f es el coeficiente de fricción viscosa de la carga.

Para obtener la función de transferencia del servomotor se calcula la transformada de Laplace de la ecuación 3-18.

$$m s^2 Y(s) + [f + \frac{A^2}{k_2} s] Y(s) = \frac{A k_1}{k_2} X(s)$$

Considerando el desplazamiento x como la señal de entrada y el desplazamiento "y" del pistón de potencia como salida, la función de transferencia para el servomotor hidráulico es:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{A k_1 / k_2}{m s^2 + [f + A^2 p / k_2] s} = \frac{A k_1 / k_2}{s [m s + f + A^2 p / k_2]}$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s \left[\frac{mK_2}{H^2} + \frac{Tf_2}{AK_1} + \frac{A_0}{K_1} \right]}$$

Dividimos de nuevo la fracción anterior entre la constante de denominador

$$\left[\frac{fK_2}{AK_1} + \frac{A_0}{K_1} \right] \text{ tenemos } k$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\frac{1}{\left[\frac{fK_2}{AK_1} + \frac{A_0}{K_1} \right]}}{s \left[\frac{mK_2}{AK_1} + \frac{fK_2}{AK_1} + \frac{A_0}{K_1} \right]} = \frac{k}{s \left[\tau s + 1 \right]}$$

donde : $k = \frac{1}{\frac{fK_2}{AK_1} + \frac{A_0}{K_1}}$ $\tau = \frac{mK_2}{fK_2 + A^2\rho}$

La constante k se le denomina ganancia del servomotor, τ es el tiempo de respuesta y la constante T es llamada constante de tiempo de servomotor. Generalmente es conveniente tener en un sistema el más alto valor de k y el más bajo valor de T ya que así se lograra una máxima ganancia y un tiempo de respuesta pequeño.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

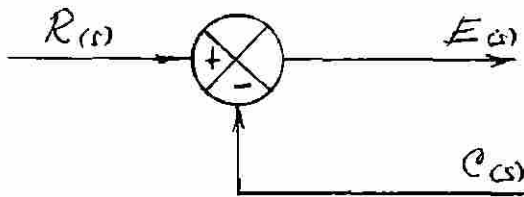


Fig. 4-2.- Detector de Error o Sumador.

Como se puede ver en la fig. 4-2, el Sumador tiene dos entradas y una salida. La salida viene siendo la suma algebraica de las entradas. Cada entrada tiene un signo que se representa en el sumador.

Normalmente las entradas se representan con las letras $R(s)$ y $C(s)$ y la salida con la letra $E(s)$. La entrada $R(s)$ es llamada entrada de referencia, la señal $C(s)$ es una señal de retroalimentación, que se compara con $R(s)$ y de dicha comparación se origina la señal de salida $E(s)$ llamada señal de error.

Las señales de entrada del Sumador o Detector tienen que ser de la misma naturaleza ya que de otra manera no se pueden sumar o comparar. Por ejemplo no podemos sumar una señal de voltaje con una señal de velocidad.

Diagrama de Bloques de un sistema de lazo cerrado.- En la fig. 4-3 se representa el diagrama de bloques de un sistema de control de lazo cerrado. A ésta representación también se le llama forma canónica de un sistema de lazo cerrado. Se le llama lazo cerrado porque la señal realmente forma un lazo al retroalimentarse de la salida a través de $H(s)$ hasta el sumador.

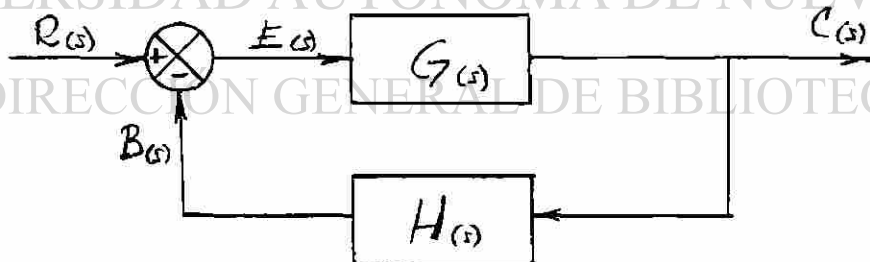


Fig. 4-3 Sistema de Lazo Cerrado.

Al bloque $G(s)$ se le llama Función de transferencia de lazo abierto y es igual a :

$$G(s) = \frac{C(s)}{E(s)}$$

Al bloque $H(s)$ se le llama Función de transferencia de la retroalimentación y es igual a :

$$H(s) = \frac{B(s)}{C(s)}$$

Al producto de $G(s)H(s)$ se le llama Función de Transferencia de Lazo Abierto y es igual a :

$$G(s)H(s) = \frac{B(s)}{E(s)}$$

A la relación de la salida $C(s)$ y la entrada $R(s)$ del diagrama de bloques se le llama Función de Transferencia de Lazo Cerrado y se calcula de la siguiente forma. Tomando como base la figura 4-3:

$$C(s) = G(s)E(s) \quad (4-1)$$

$$E(s) = R(s) - B(s) \quad (4-2)$$

Substituyendo $E(s)$ de la ecuación 4-2, en la ecuación 4-1, se obtiene:

$$C(s) = G(s)[R(s) - B(s)] \quad (4-3)$$

Partiendo de la Función de Transferencia de la Retroalimentación, podemos despejar $B(s) = H(s)C(s)$. Ahora substituyendo este valor de $B(s)$ en la ecuación 4-3, tenemos:

$$C(s) = G(s)[R(s) - H(s)C(s)] = G(s)R(s) - G(s)H(s)C(s)$$

o tambien

$$C(s) + G(s)H(s)C(s) = G(s)R(s)$$

$$C(s)[1 + G(s)H(s)] = G(s)R(s)$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (4-4)$$

La ecuación anterior (4-4) es la Función de Transferencia de Lazo Cerrado y es de suma importancia en cualquier sistema de control con retroalimentación. La Función de Transferencia de Lazo Cerrado relaciona la señal de salida y la entrada del sistema, pero no depende ni de la entrada, ni de la salida, sino que depende unicamente de las componentes internas del sistema de control que se analice.

De la ecuación 4-4 se puede despejar el valor de la señal de salida $C(s)$ como sigue:

$$C(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} R(s) \quad (4-5)$$

La ecuación 4-5 nos indica que la salida de un sistema de control de lazo cerrado depende de la entrada $R(s)$ y de las componentes internas del sistema de control. Este resultado es el más lógico que se podía esperar.

Sistemas de Lazo Cerrado Sometidos a una Perturbación.- Ya se dijo con anterioridad que cuando un sistema de lazo abierto se somete a una perturbación, ésta afecta adversamente el valor de la señal de salida, ya que la perturbación evita que se obtenga la salida deseada. Pero si la misma perturbación se presenta en un sistema de lazo cerrado, éste tiene la capacidad de minimizar el efecto de dicha perturbación y evitar que la salida sea afectada.

Esta capacidad de poder absorber los efectos de las perturbaciones de los sistemas de lazo cerrado es una de las grandes ventajas que se tiene al utilizar lazo cerrado en lugar de lazo abierto.

Para demostrar lo anterior se analizará un sistema de control de lazo cerrado sometido a una perturbación como se indica en el diagrama de bloques de la fig. 4-4.

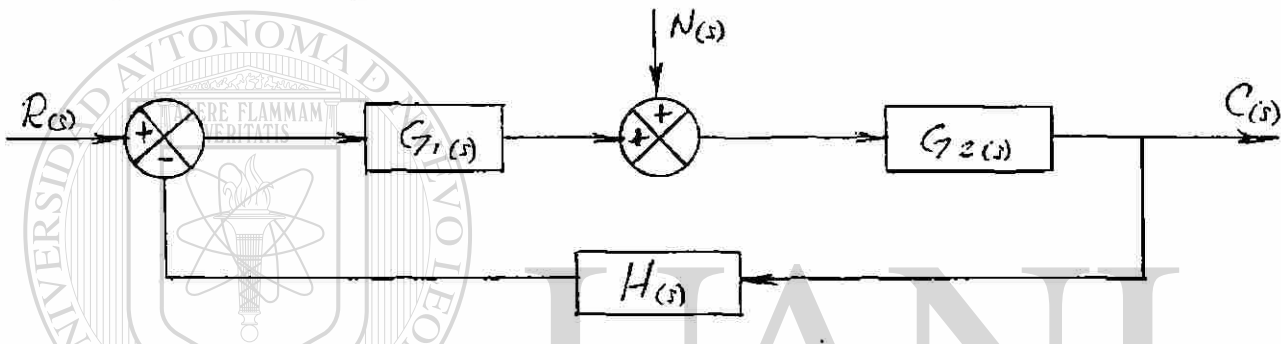


Fig. 4-4.- Sistema de Lazo Cerrado sometido a una perturbación.

Como se puede ver, el sistema de control tiene dos entradas, una es la entrada normal $R(s)$ o entrada de referencia y la otra es una señal de entrada indeseable $N(s)$ o perturbación. Para obtener la salida total $C(s)$, se analizará el sistema aplicando el principio de la superposición. Primeramente se considerará sólo la entrada $R(s)$ con lo cual se obtendrá una salida parcial que llamaremos $C_1(s)$. Después se aplicará sólo la entrada $N(s)$ lo cual producirá otra salida parcial que llamaremos $C_2(s)$. La suma de las dos salidas parciales $C_1(s)$ y $C_2(s)$ nos dará la salida total $C(s)$.

Aplicando solamente la entrada $R(s)$, el diagrama de bloques se indica en la siguiente figura 4-5.

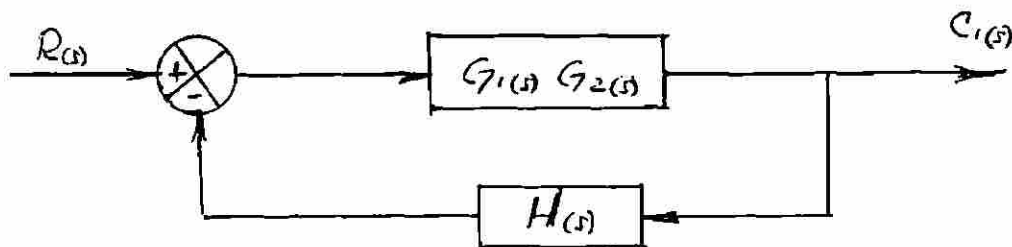


Fig. 4-5.- Diagrama de Bloques aplicando sólo la entrada $R(s)$

De la fig. 4-5 se puede calcular la función de transferencia $C_1(s)/R(s)$, aplicando para ello la fórmula de la ecuación 4-4.

$$\frac{C_1(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \quad (4-6)$$

Ahora considerando únicamente la entrada $N(s)$, el diagrama de bloques del sistema de lazo cerrado se tiene como sigue:

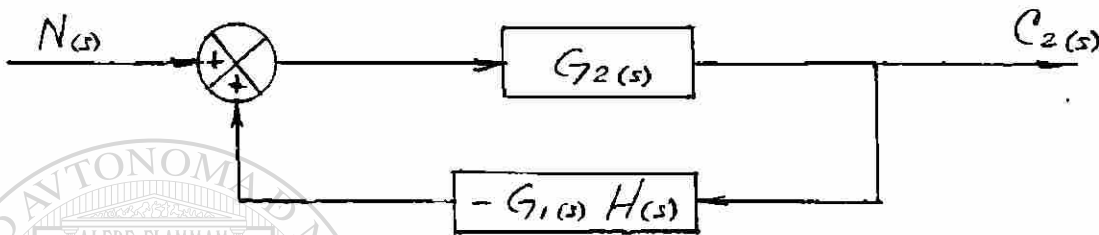


Fig. 4-6.- Diagrama de bloques aplicando sólo la entrada $N(s)$

De la fig 4-6 y aplicando de nuevo la ecuación 4-4, la función de transferencia de lazo cerrado que se obtiene es:

$$\frac{C_2(s)}{N(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \quad (4-7)$$

De las ecuaciones 4-6 y 4-7 se puede despejar $C_1(s)$ y $C_2(s)$, cuya suma nos dará la salida total $C(s)$.

$$C(s) = C_1(s) + C_2(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)R(s) + G_2(s)N(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \quad (4-8)$$

Con el propósito de minimizar el efecto de la perturbación $N(s)$ se hará que $|G_1(s)H(s)| \gg 1$ y $|G_1(s)G_2(s)H(s)| \gg 1$. Si se cumplen estas dos condiciones, la función de transferencia $C_2(s)/N(s)$, expresada en la ecuación 4-7 se hace muy pequeña, prácticamente despreciable.

Por otro lado al substituir las mismas dos condiciones en la ecuación 4-6, la misma no se elimina sino que nos queda en la siguiente forma:

$$\frac{C_1(s)}{R(s)} = \frac{1}{H(s)} \quad (4-9)$$

La conclusión importante de todo el análisis anterior es que es posible eliminar los efectos nocivos de la entrada de perturbación, ya que la salida parcial $C_2(s)$ se puede hacer despreciable, con lo que la salida prácticamente solo dependerá de la entrada de referencia $R(s)$.

Cuando no es posible eliminar una perturbación se puede eliminar casi por completo su efecto en la salida. Esta es una de las grandes ventajas que tienen los sistemas de control de lazo cerrado.

Procedimiento para trazar diagramas de bloques.- Para llegar a trazar el diagrama de bloques de un sistema de control el procedimiento consiste en plantear las ecuaciones diferenciales que representen matemáticamente el comportamiento de cada componente del sistema, luego se calcula la transformada de Laplace de cada ecuación suponiendo condiciones iniciales igual a cero y se representa cada ecuación ya transformada en forma de bloques. Finalmente se integran todos los diagramas parciales de cada ecuación en un sólo diagrama de bloques completo.

A continuación se trazará el diagrama de bloques de un circuito eléctrico sencillo RC como el que se representa en la fig. 4-7(a).

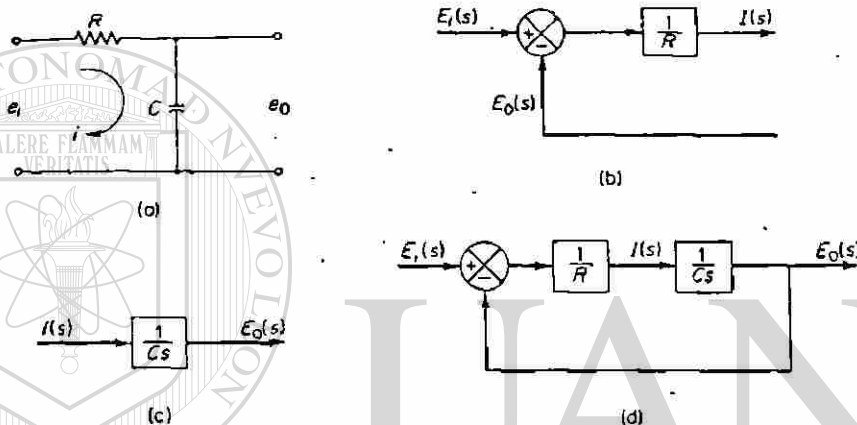


Fig. 4-7. (a) Circuito RC (b) Diagrama de bloques de la Ec. (4-12)
 (c) Diagrama de bloques de la Ec. (4-13)
 (d) Diagrama de bloques del circuito completo RC.

Las ecuaciones que representan al circuito eléctrico RC de la fig. 4-7, son:

$$i = \frac{1}{R} [e_i - e_o] \quad (4-10)$$

$$e_o = \frac{1}{C} \int i dt \quad (4-11)$$

Calculando la transformada de Laplace de las Ecs. (4-10) y (4-11) tenemos:

$$I(s) = \frac{1}{R} [E_i(s) - E_o(s)] \quad (4-12)$$

$$E_o(s) = \frac{1}{Cs} I(s) \quad (4-13)$$

Las ecuaciones 4-12 y 4-13 se representan en forma de diagramas de bloques en las figuras 4-7 (b) y (c). Finalmente en la fig. 4-7 (d) se representa el diagrama de bloques completo del circuito RC, el cual se obtiene integrando los dos diagramas parciales (b) y (c).

Reducción de diagramas de bloques.- Cuando un diagrama de bloques es grande y contiene varios lazos de retroalimentación, es posible simplificar el diagrama hasta obtener un diagrama más sencillo y que sea equivalente. La máxima simplificación se logra cuando se obtiene un sólo bloque equivalente a todo el diagrama.

Para poder simplificar un diagrama es necesario aplicar ciertas reglas del álgebra de diagramas de bloques. A continuación se estudiarán trece reglas del álgebra de bloques que nos permitirán lograr la simplificación de cualquier diagrama de bloques sin alterar el diagrama original.

La demostración de las reglas del álgebra de bloques es muy simple ya que se puede hacer un análisis de señales de entrada y de salida en cada diagrama original y equivalente. Si las señales de entrada y de salida coinciden en los dos diagramas, la equivalencia está demostrada lógicamente.

	Diagramas de bloques originales	Diagramas de bloques equivalentes
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		

Tabla 4-1. Reglas del álgebra de diagramas de bloques.

	Diagramas de bloques originales	Diagramas de bloques equivalentes
8		
9		
10		
11		
12		
13		

Tabla 4-1. Reglas del Algebra de Diagramas de Bloques (cont.)

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Aplicación de las Reglas del álgebra de Bloques.- En seguida se aplicarán las reglas del álgebra de bloques para simplificar algunos diagramas hasta su forma canónica o hasta un sólo bloque equivalente. Un diagrama con muchos bloques y lazos de retroalimentación casi siempre se puede simplificar en dos o más formas. La estrategia que se sigue en la simplificación de diagramas de bloques es:

- 1) Primeramente estudiar el diagrama original para ver el número de lazos de retroalimentación que contiene.
- 2.-En seguida se debe ver la ubicación de los diferentes lazos. Casi siempre los diferentes lazos no están anidados. Se llaman lazos anidados aquellos que están uno totalmente dentro del otro.
- 3.-El siguiente paso es realizar algunos cambios aplicando las reglas en el diagrama original con el fin de lograr que todos los lazos queden anidados. Quizás éste sea el paso más importante para lograr la simplificación
- 4.-Finalmente se inicia la simplificación del diagrama por los lazos más pequeños, o dicho de otra forma desde los lazos internos hasta los lazos externos que son generalmente los más grandes.
- 5.-Cuando el diagrama de bloques tiene dos o más entradas y dos o más salidas, la simplificación del diagrama se obtiene aplicando el método de la superposición. El procedimiento consiste en aplicar una entrada y una salida solamente, con lo cual se obtiene un resultado o una salida parcial. Se obtienen todas las diferentes salidas parciales, cuya sumatoria nos dá la salida total.
- 6.-Independientemente del camino que se siga para lograr la simplificación, al final el resultado de dicha simplificación obviamente debe ser exactamente el mismo.

Ejemplo 4-1.- Simplificar el diagrama de bloques de la fig. 4-8 hasta obtener un sólo bloque equivalente.

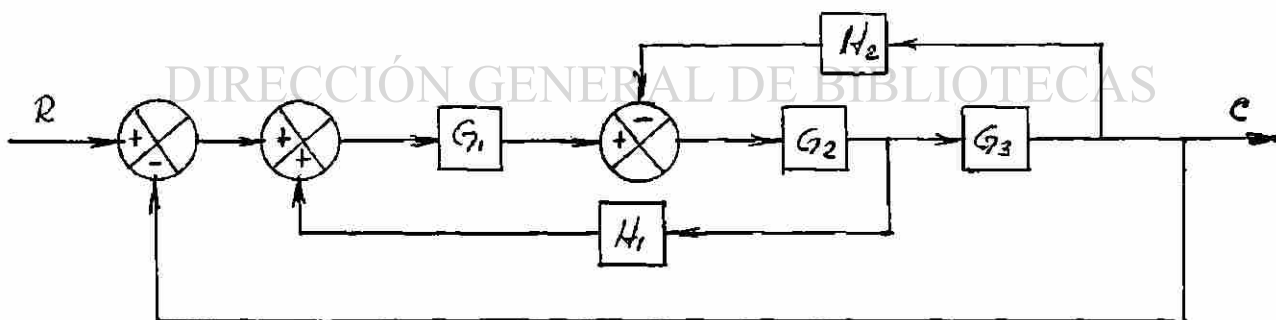


Fig. 4-8. Diagrama de bloques original

Como se puede ver en la fig. 4-8, el diagrama tiene tres lazos. El lazo más grande es de retroalimentación unitaria y contiene a los otros dos. Los lazos con retroalimentación H_1 y H_2 no están anidados y tienen una rama común que es G_2 y un sumador.

Para lograr anidar los lazos H_1 y H_2 se puede aplicar la regla #9 a la retroalimentación H_1 , brincando el bloque G_3 .

Después de aplicar la regla #9, se logra anidar los lazos en el diagrama. El lazo con H_2 en la retroalimentación es el más pequeño, luego el lazo con H_1 y finalmente el lazo con retroalimentación unitaria es el más grande.

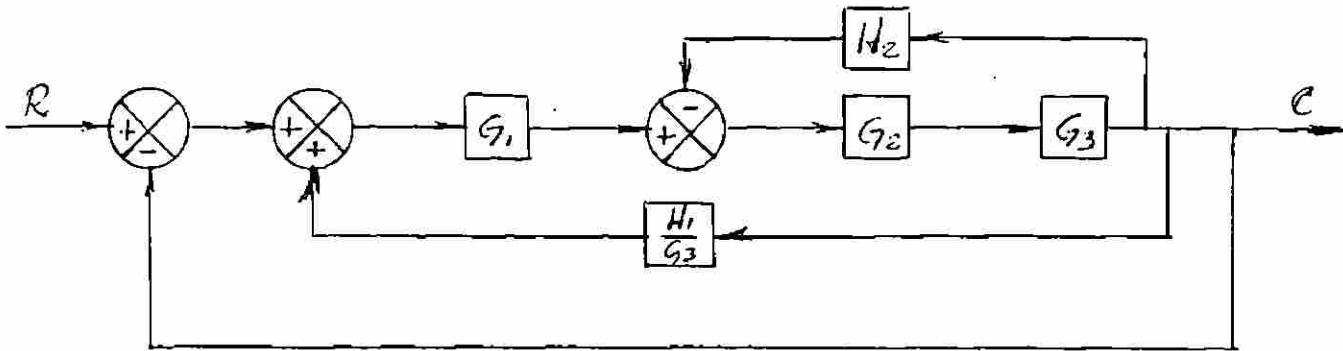


Fig. 4-8-(a). Diagrama de bloques después de aplicar la regla #9

Una vez que se logra anidar los lazos, el siguiente paso es iniciar la simplificación por el lazo más pequeño, en este caso con retroalimentación H_2 . La aplicación de las reglas #4 y #13 nos da el siguiente diagrama :

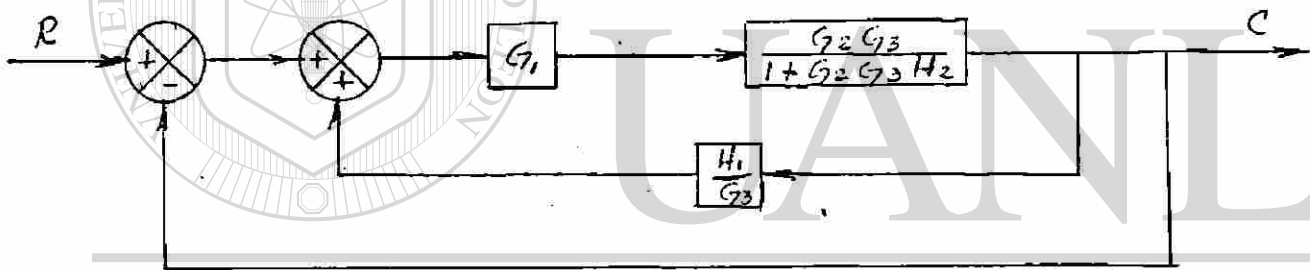


Fig. 4-8-(b). Diagrama de bloques después de aplicar la regla #4 y #13

En seguida se continúa aplicando al diagrama de la fig 4-8-(b) las reglas #4 y #13, para simplificar el lazo con retroalimentación H_1 de lo cual resulta el siguiente diagrama:

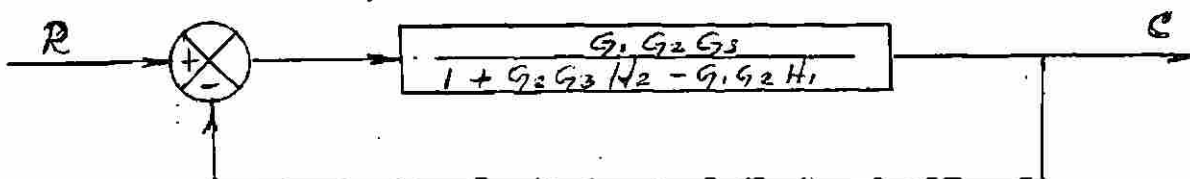


Fig. 4-8-(c). Reducción del diagrama de la fig. 4-8-(b).

Finalmente aplicando de nuevo la regla #13 al diagrama de la fig. 4-8-(c) logramos la simplificación máxima al obtener un sólo bloque equivalente a todo el diagrama original.

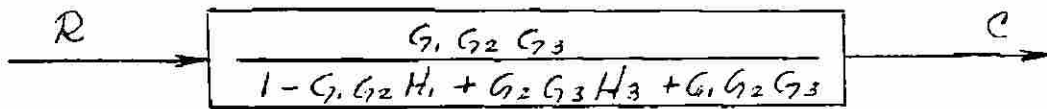


Fig. 4-8-(d). Bloque equivalente al diagrama original.

Ejemplo 4-2.-Reducir el diagrama de bloques de la fig. 4-9 hasta obtener la forma canónica del diagrama, conservando unicamente la retroalimentación H1.

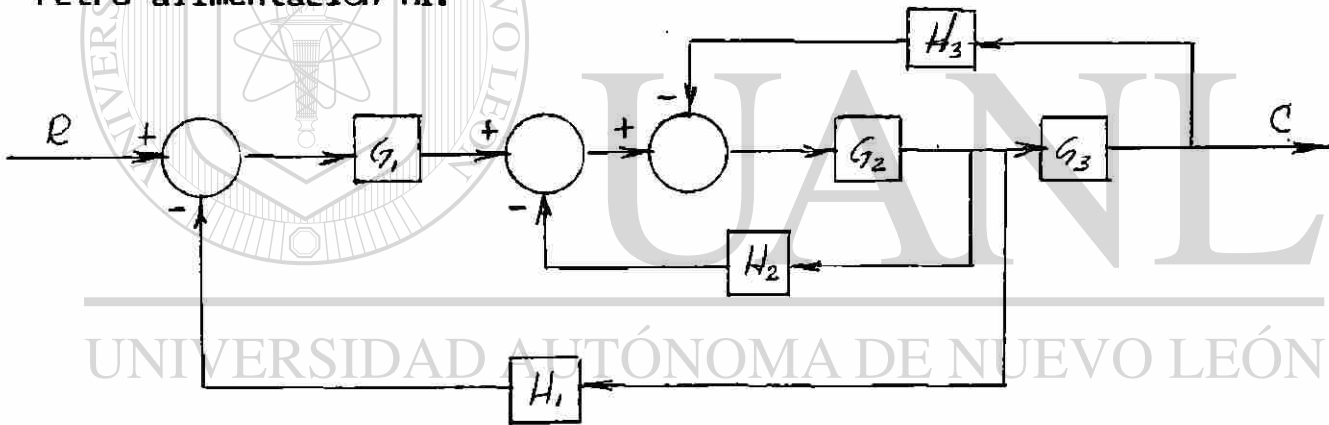
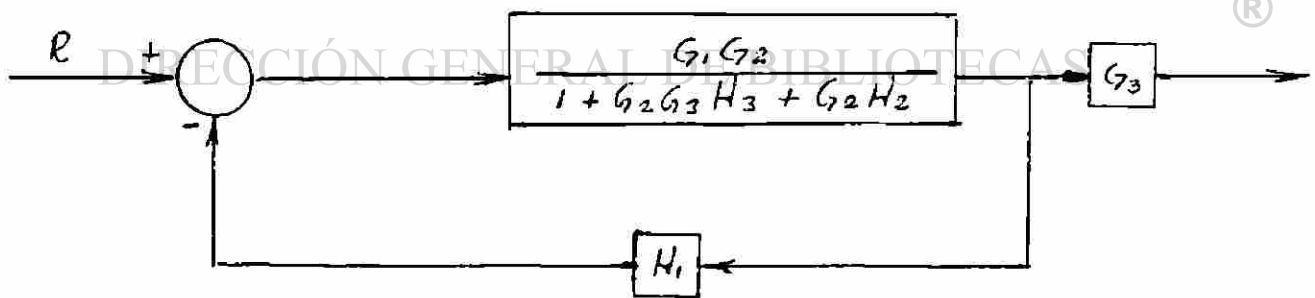
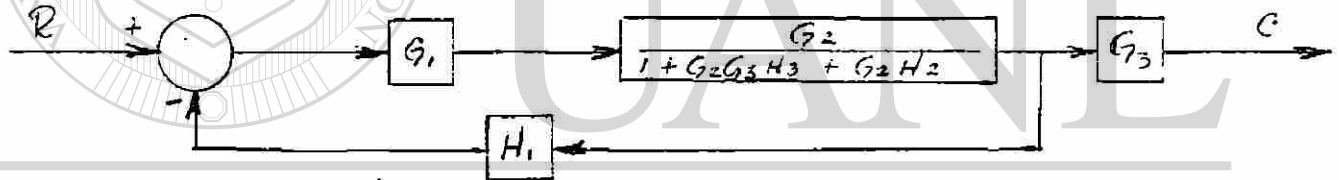
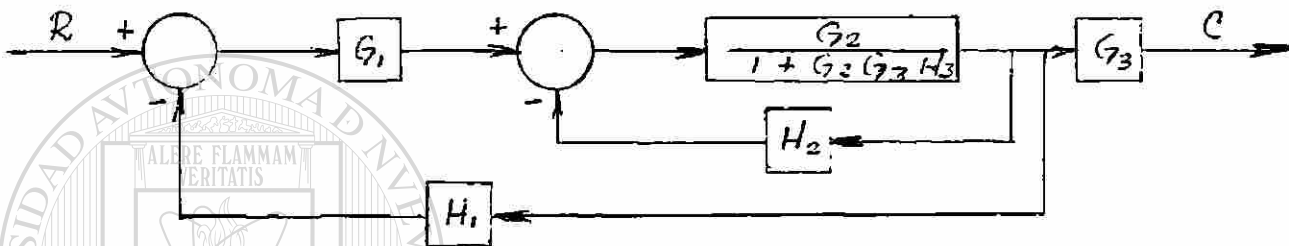
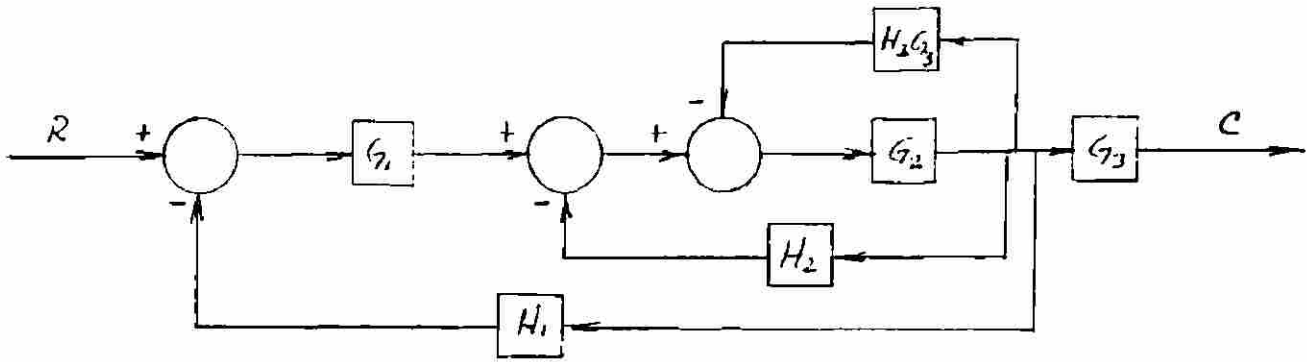


Fig. 4-9.- Diagrama de bloques original.

Como se vé el diagrama de la fig. 4-9 contiene tres lazos. Los lazos con H1 y H2 en la retroalimentación están anidados, pero el H3 no. Con el fin de anidar el lazo H3 dentro de H2 se puede aplicar la regla #8 para mover la retroalimentación de H3 de la derecha de G3 a la izquierda de G3. Realizando éste movimiento, los lazos quedarán anidados, siendo el más pequeño el lazo con H3 en la retroalimentación

Una vez que se logra tener los lazos anidados, como ya se dijo se inicia la simplificación del diagrama por el lazo más pequeño H3, luego se continúa con H2, conservando la retroalimentación H1 como se está solicitando en la forma canónica.

En las siguientes figuras se detallan los movimientos realizados para lograr la simplificación del diagrama.



Ejemplo 4-3.- Determinar la salida C para el sistema de control representado en la fig. 4-10.

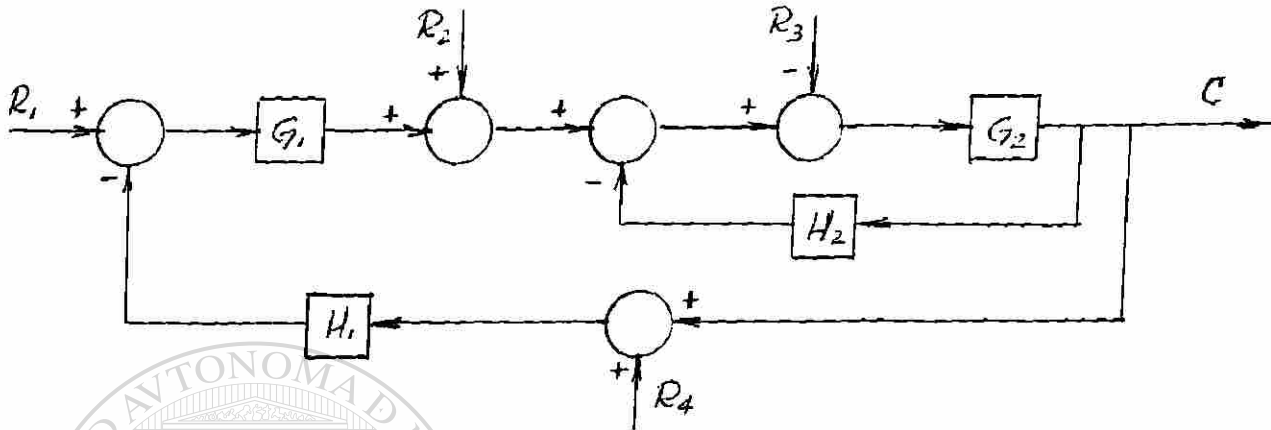
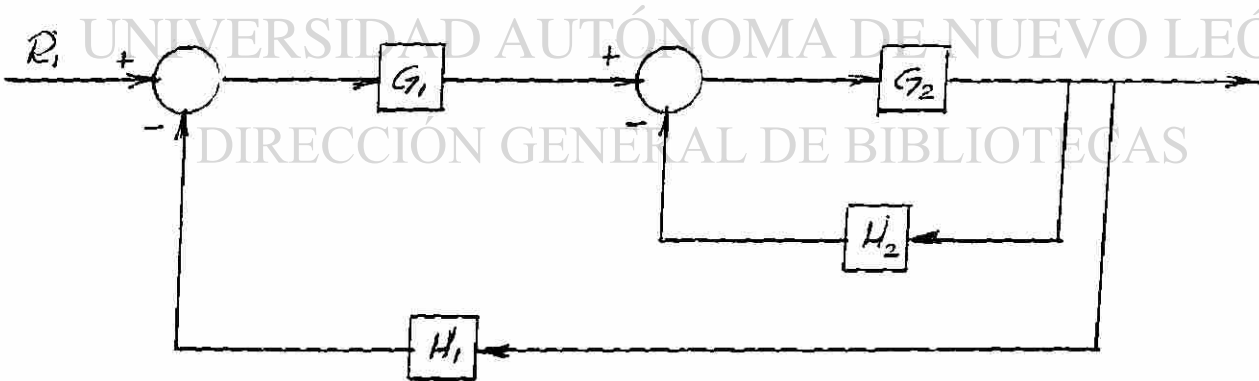
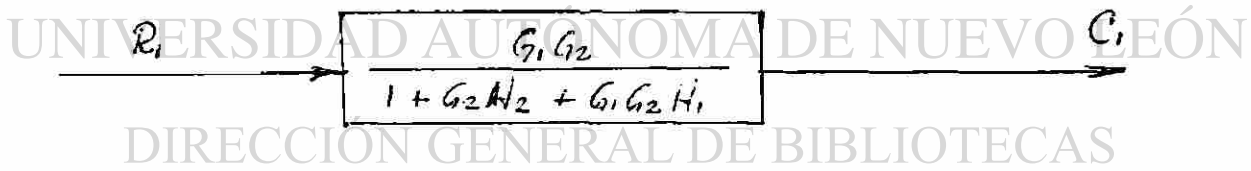
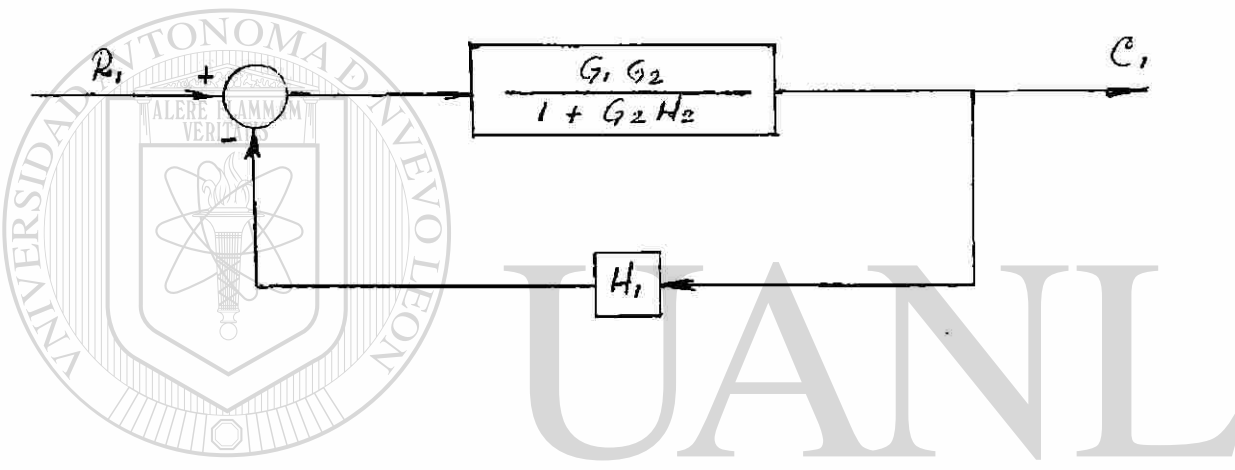
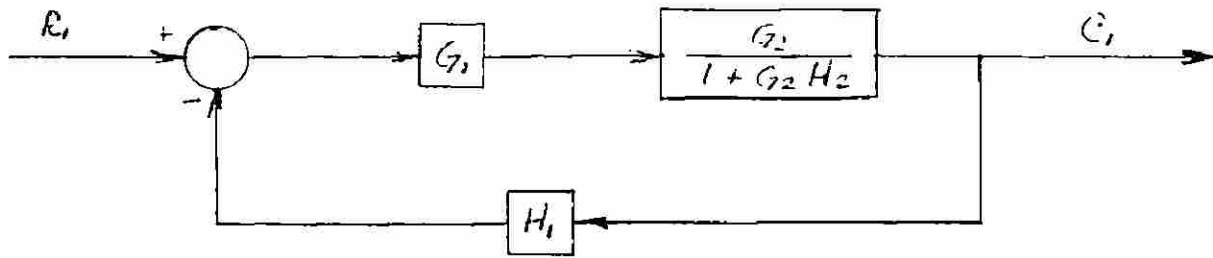


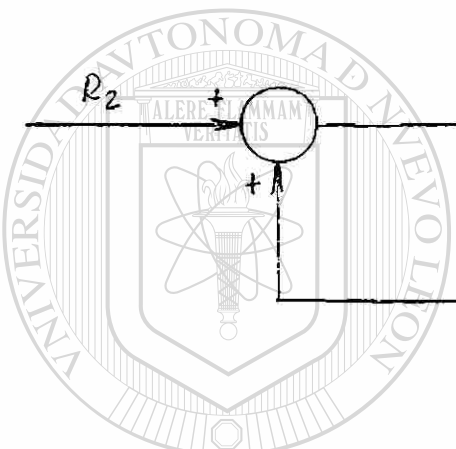
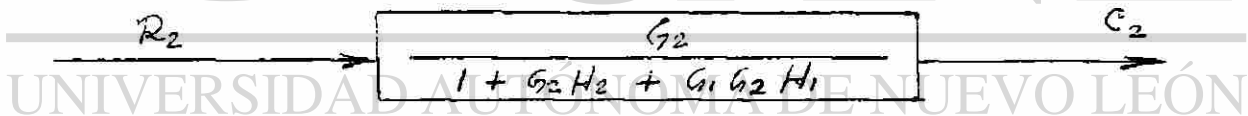
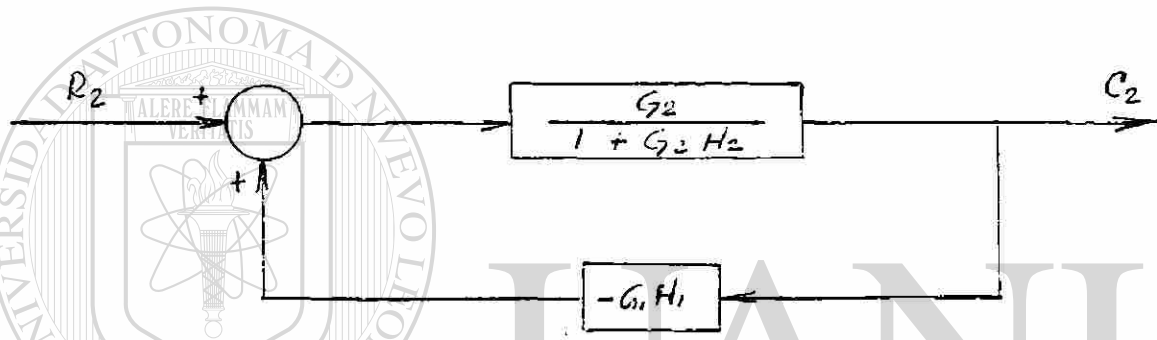
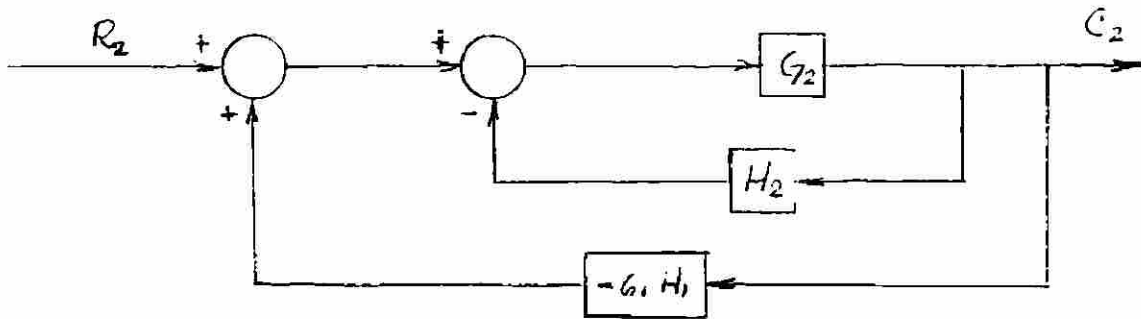
Fig. 4-10. Diagrama de Bloques Original.

Como se vé, el diagrama de bloques tiene cuatro entradas y una salida. El diagrama por lo tanto se simplificará aplicando el principio de la superposición. Primero se considerará unicamente la entrada R_1 , con lo cual se obtendrá una salida parcial C_1 , luego se aplicará la entrada R_2 , con lo cual se tendrá otra salida parcial C_2 . Continuando en la misma forma con las entradas R_3 y R_4 se obtendrán las salidas C_3 y C_4 . La salida total C será la sumatoria de las cuatro salidas parciales.

Aplicando unicamente la entrada R_1 al sistema de control:





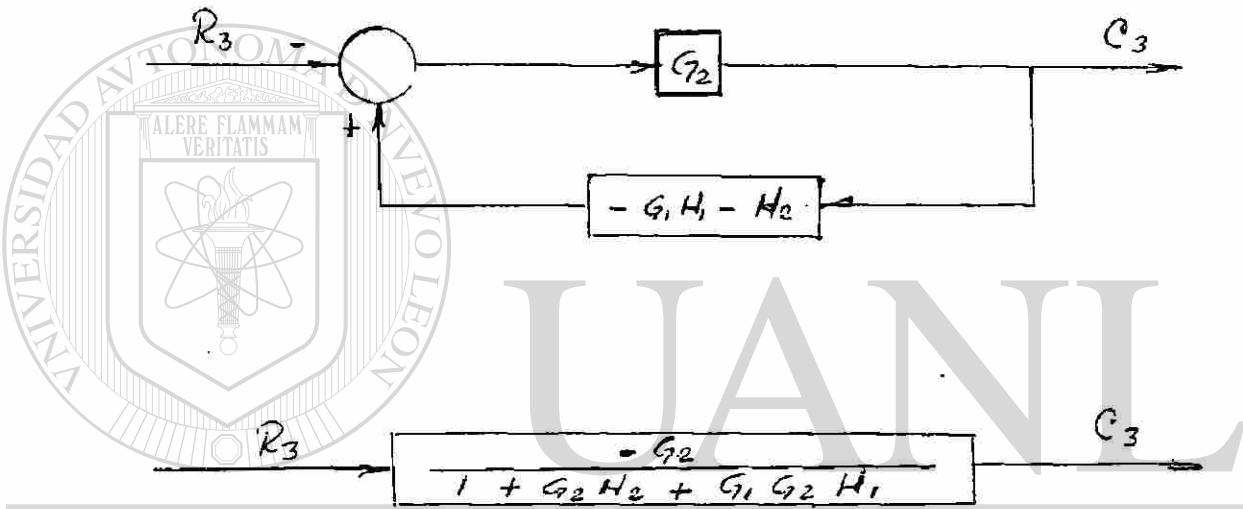
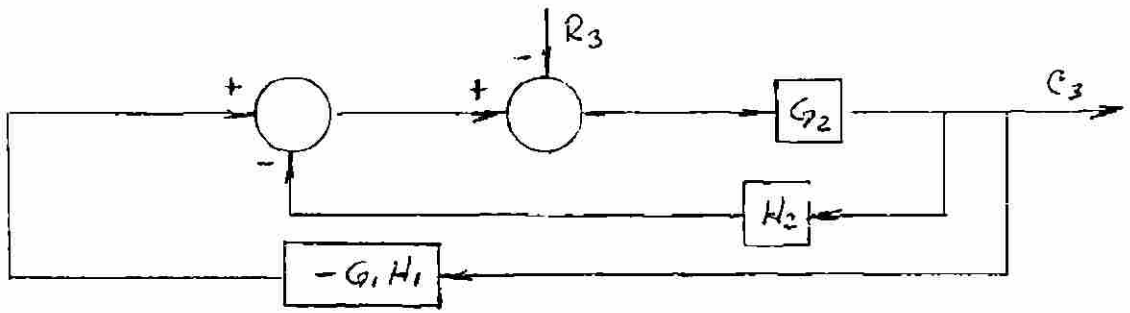


UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

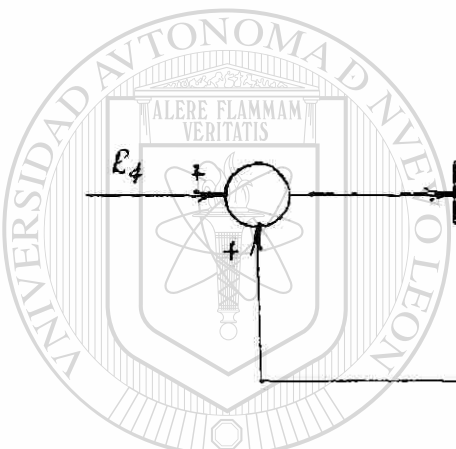
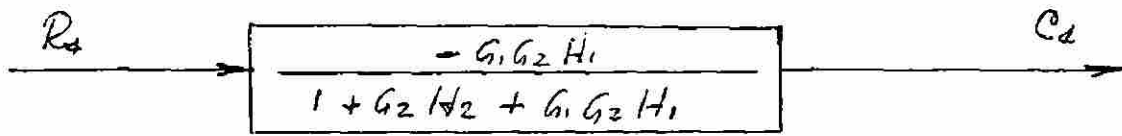
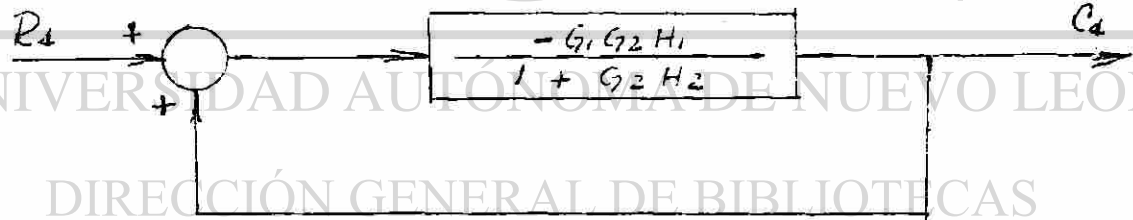
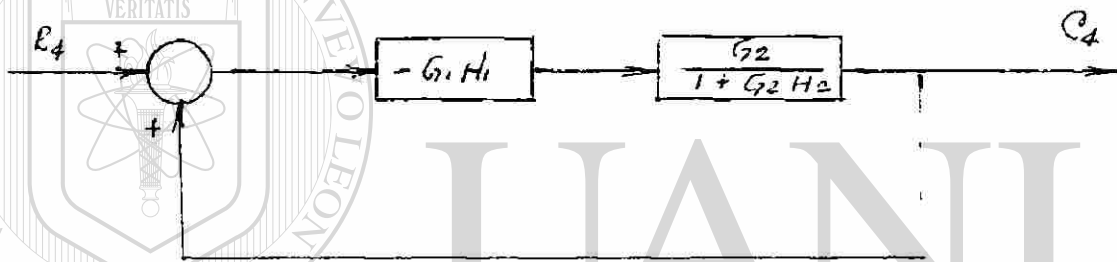
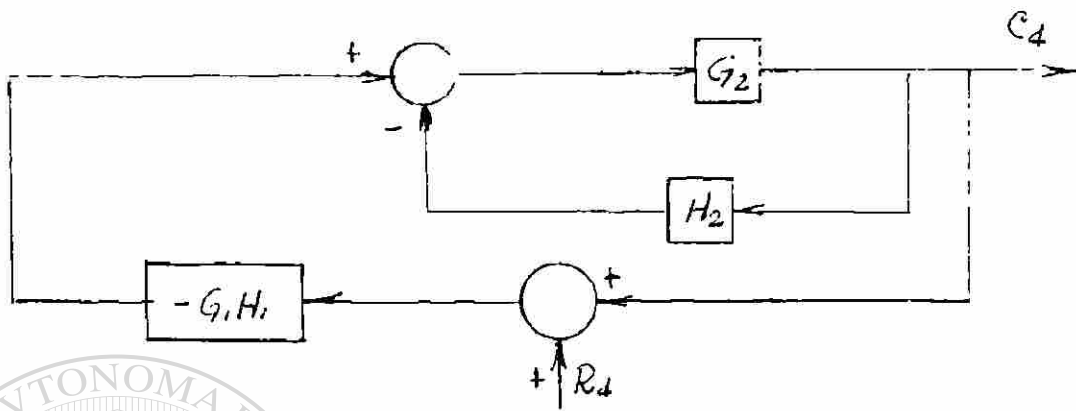
®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

De acuerdo con los cuatro resultados parciales que se tienen, la salida total del sistema será la sumatoria.

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$$

$$C = \frac{G_1 G_2 R_1 + G_2 R_2 - G_2 R_3 - G_1 G_2 H_1 R_4}{1 + G_2 H_2 + G_1 G_2 H_1}$$

4-2.- Cálculo de Funciones de Transferencia de Sistemas Físicos.

Los sistemas de control pueden estar formados por componentes de distintos tipos, tales como eléctricos, electrónicos, mecánicos, hidráulicos, neumáticos, térmicos. El ingeniero de control debe conocer las leyes fundamentales de éstos componentes para poder plantear las ecuaciones que representen matemáticamente la operación de los sistemas. Transformando éstas ecuaciones se obtienen las Funciones de Transferencia que relacionan la entrada y la salida.

Servomotores.- Se estudiarán a continuación tres tipos de servomotores eléctricos:

- a) Servomotor de dos fases de C.A.
- b) Servomotor de C.D. controlado por Inducido.
- c) Servomotor de C.D. controlado por Inductor.

Los servomotores se pueden definir como motores eléctricos con control de posición o velocidad básicamente. Antes de analizar cada servomotor, veremos un efecto muy importante que se presenta en los servomotores, llamado el efecto de carga en la dinámica de los servomotores.

Efecto de la carga en la dinámica de los Servomotores.- La mayoría de los servomotores eléctricos están acoplados a la carga a través de un tren de engranes, bandas o cadenas como se indica en la fig. 4-11.

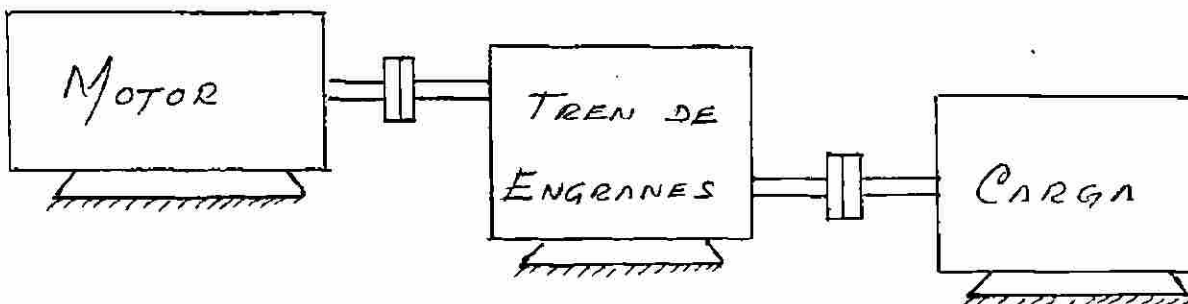


Fig. 4-11.- Servomotor acoplado a una carga.

Como se puede ver en la fig. 4-11, el motor tiene una velocidad, diferente a la velocidad de la carga, un motor con rotor diferente al rotor de la carga, lo cual nos indica que las condiciones dinámicas de motor y carga son muy diferentes. Hay dos características muy importantes en la dinámica del servomotor, el momento de inercia J y la fricción f . Por un lado el motor tiene un determinado momento de inercia J_m y una fricción f_m , por otro lado la carga tiene otro momento de inercia J_l y otra fricción f_l . El momento de inercia depende de la masa y del radio de giro del rotor y la fricción depende del tipo de rodamiento que se utilice.

Cuando se desea calcular el momento de inercia total del servomotor o la fricción total no se puede sumar directamente los dos momentos de inercia o los dos coeficientes de fricción porque las condiciones dinámicas de una y otra parte no son iguales. Para calcular el momento de inercia y el coeficiente de fricción equivalente de todo el servomotor completo referidos al lado del eje del motor se pueden utilizar las siguientes ecuaciones:

$$J_{eq} = J_m + n^2 J_L \quad n < 1 \quad (4-14)$$

$$f_{eq} = f_m + n^2 f_L \quad n < 1 \quad (4-15)$$

donde n es la relación de engranes entre el motor y la carga.

El efecto de la carga en los servomotores es semejante a otro efecto que se presenta en los circuitos eléctricos cuando hay un transformador. Si se tiene una impedancia Z en el lado del primario del transformador, la misma impedancia conectada en el secundario, pero vista desde el primario no mide Z ohms, sino $n^2 Z$. A esta impedancia $n^2 Z$ se le llama impedancia del secundario reflejada al lado del primario. La cantidad n en el transformador representa la relación de vueltas entre el primario y el secundario.

Servomotores de dos fases.- La fig. 4-12 representa el diagrama esquemático de un servomotor de dos fases. La parte eléctrica del servomotor está formada por dos devanados, uno de los devanados es llamado fase fija y se energiza con un voltaje senoidal cuya tensión y frecuencia es constante. La fase fija es necesaria pero no suficiente para mover el servomotor. Para mover el servomotor se requiere aplicar un voltaje a la otra fase llamada fase de control. Los voltajes de control y fase fija están defasados 90 grados eléctricos para lograr un mayor par mecánico en el servomotor.

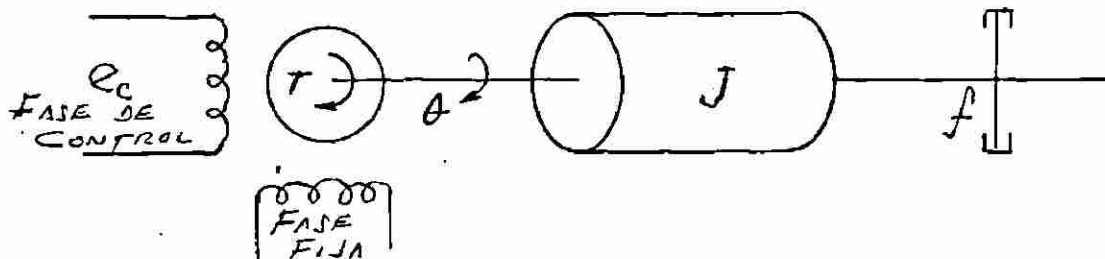


Fig. 4-12. Servomotor de dos fases

En la misma fig. 4-12 se representa el par mecánico T , el desplazamiento angular del rotor θ , el momento de inercia del rotor J y el coeficiente de fricción f .

Los devanados del estator se deben energizar por medio de una fuente de alimentación de dos fases. Si no se cuenta con una, se puede lograr el defasamiento por medio de un condensador, el cual producirá el defase de 90 grados.

Si se incrementa el voltaje de control E_c , el par generado T se aumenta, pero el par disminuye al incrementarse la velocidad. Esta relación se puede representar matemáticamente con la sig. ecuación:

$$T = K_c E_c - K_n \frac{d\theta}{dt} \quad (4-16)$$

donde:

T = Par Mecánico del Servomotor.

K_c = Constante de proporcionalidad del voltaje de control.

E_c = Voltaje de control.

K_n = Constante de proporcionalidad de la velocidad angular.

$d\theta/dt$ = Velocidad angular del Rotor.

Por otro lado el par mecánico generado debe ser capaz de vencer dos obstáculos para mover el servomotor, la inercia J y el rozamiento f , por lo que se puede plantear otra ecuación puramente mecánica como sigue:

$$T = J \frac{d^2\theta}{dt^2} + f \frac{d\theta}{dt} \quad (4-17)$$

Las ecuaciones 4-16 y 4-17 se pueden igualar y de dicha igualación surge la siguiente ecuación:

$$K_c E_c - K_n \frac{d\theta}{dt} = J \frac{d^2\theta}{dt^2} + f \frac{d\theta}{dt}$$

reacomodando la ecuación tenemos:

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + (f + K_n) \frac{d\theta}{dt} = K_c E_c$$

transformando por Laplace la ecuación anterior:

$$J s^2 \theta(s) + (f + K_n) s \theta(s) = K_c E_c(s)$$

tomando a E_c como señal de entrada y θ como señal de salida, la función de transferencia del servomotor será:

$$\frac{\theta(s)}{E_c(s)} = \frac{K_c}{J s^2 + (f + K_n) s} = \frac{\frac{K_c}{(f + K_n)}}{\frac{J s^2 + (f + K_n) s}{(f + K_n)}} = \frac{K_m}{s(T_m s + 1)}$$

donde

$K_m = K_c / (f + K_n)$ = Constante de ganancia del motor.

$T_m = J / (f + K_n)$ = Constante de tiempo del motor.

En la fig. 4-13 se representa el diagrama de bloques del servomotor de dos fases. Lo ideal es que el valor de la constante K_m sea lo más grande posible ya que con un pequeño voltaje de control E_c se obtendría un gran desplazamiento angular θ . Por lo contrario el valor de T_m conviene que sea el más pequeño posible ya que entre menor sea su valor, el sistema tendrá una respuesta más rápida. Los valores de estas constantes K_m y T_m generalmente son datos que el fabricante de estos equipos proporciona a los usuarios.

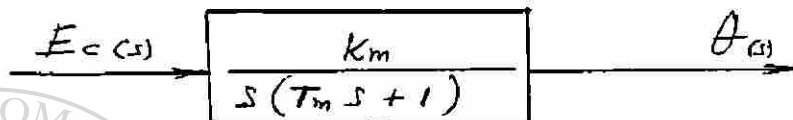


Fig. 4-13 Diagrama de bloques del Servomotor de dos fases.

Servomotor de corriente continua controlado por inducido.- Cuando se requiere desarrollar mayor potencia en un servomotor, se prefiere uno de corriente directa en lugar de uno de C.A. de dos fases. En la Fig. 4-14 se representa el diagrama esquemático de un motor de corriente directa controlado por inducido.

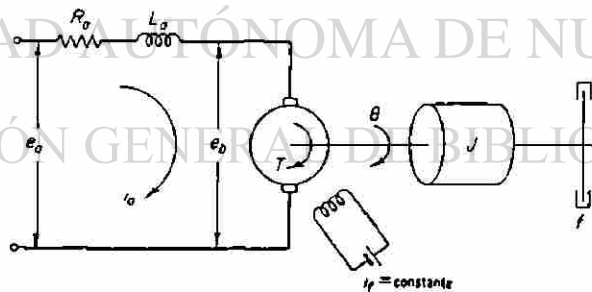


Fig. 4-14. Diagrama esquemático de un motor de CC controlado por el inducido.

En seguida se enumeran las partes principales de un motor de CC controlado por inducido:

- R_a = Resistencia del devanado del inducido en ohmios.
- L_a = Inductancia del devanado del inducido en henrios.
- i_a = Corriente del devanado del inducido en amperios.
- i_f = Corriente del devanado de campo en amperios.
- e_a = Voltaje aplicado al inducido en voltios.

- e_b = Fuerza contraelectromotriz en voltios.
- θ = Desplazamiento angular del eje del motor en radianes.
- T = Par desarrollado por el motor en Kg-m.
- J = Momento de inercia equivalente del motor y la carga con referencia al eje del motor en kg-m^2 .
- f = Coeficiente de fricción viscosa equivalente del motor y carga referido al eje del motor en Kg-m/rad/seg.

Quando se aplica un voltaje de entrada e_c al inducido, se origina una corriente de inducido i_a . Hay una caída de voltaje en R_a y L_a y el motor genera un voltaje llamado fuerza contraelectromotriz e_b . El voltaje e_b depende de la velocidad del motor y del campo magnético del inductor. Como la corriente i_f es constante, el campo es constante y la FCEM e_b básicamente depende de la velocidad del motor, por lo que matemáticamente la FCEM o voltaje e_b se puede expresar como sigue:

$$e_b = K_b \, d\theta/dt \quad (4-18)$$

El par desarrollado por el motor es proporcional a la corriente de campo i_f y a la corriente del inducido i_a , por lo tanto:

$$T = K_f i_f K_1 i_a$$

Donde K_1 es una constante de proporcionalidad. Debido a que i_f es una corriente constante, K_f y K_1 también son constantes, las tres constantes se pueden agrupar en una sola constante $k = K_f i_f K_1$.

$$T = K i_a \quad \text{donde } k \text{ es llamada constante de par motor.}$$

Sumando las caídas de voltaje del inducido en el diagrama de la fig 4-14 tenemos:

$$L_a \, di_a/dt + R_a i_a + e_b = e_c \quad (4-19)$$

Sustituyendo e_b de la ecuación 4-18 en la ecuación 4-19:

$$L_a \, di_a/dt + R_a i_a + K_b \, d\theta/dt = e_c \quad (4-20)$$

La corriente del inducido i_a genera el par mecánico T que debe vencer la inercia y el rozamiento. La ecuación del par mecánico T es:

$$T = J \, d^2\theta/dt^2 + f \, d\theta/dt = K i_a \quad (4-21)$$

Transformando por Laplace las ecuaciones 4-20 y 4-21 se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$L_a s I_a(s) + R_a I_a(s) + K_b s \theta(s) = E_c(s) \quad (4-22)$$

$$J s^2 \theta(s) + f s \theta(s) = K I_a(s) \quad (4-23)$$

Considerando a $E_c(s)$ como señal de entrada, $\theta(s)$ como señal de salida, y basándonos en las ecuaciones anteriores desde la Ec. 4-18 hasta la Ec. 4-23 se puede trazar el diagrama de bloques que se representa en la fig. 4-15.

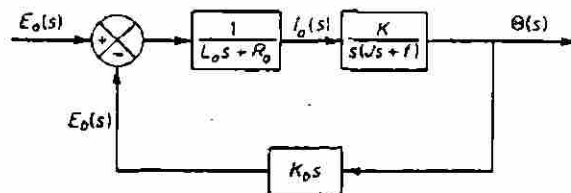


Fig. 4-15. Diagrama de bloques del Motor de CC controlado por el inducido

Para obtener la función de transferencia del motor de CC nos podemos basar en el diagrama de bloques de la fig. 4-15, o en las ecuaciones 4-22 y 4-23, de donde:

$$\frac{\theta(s)}{E_a(s)} = \frac{K}{(L_0s + R_a)s(Js + f) + KKbs} = \frac{K}{s(L_0s + R_a)(Js + f) + KKbs}$$

En la mayoría de los motores de CC controlados por inducido, la inductancia L_0 es muy pequeña con respecto a R_a , por lo que se puede despreciar sin incurrir en mucho error. Haciendo $L_0 = 0$ en la ecuación anterior tenemos:

$$\frac{\theta(s)}{E_a(s)} = \frac{K}{sR_a(Js + f) + KKbs} = \frac{K}{s[R_aJs + (R_af + KKb)]} \quad (4-24)$$

Dividiendo la ecuación 3-40 entre la constante $(R_af + KKb)$

$$\frac{\theta(s)}{E_a(s)} = \frac{\frac{K}{(R_af + KKb)}}{s \frac{[R_aJs + (R_af + KKb)]}{(R_af + KKb)}} = \frac{K_m}{s [T_m s + 1]} \quad (4-25)$$

En la ecuación anterior (4-25) los valores de las constantes K_m y T_m son:

$$K_m = K / (R_af + KKb) = \text{Constante de Ganancia del Motor.}$$

$$T_m = R_a J / (R_af + KKb) = \text{Constante de Tiempo del Motor.}$$

Si comparamos la ecuación 4-25 con la función de transferencia del servomotor de dos fases, se puede ver que son idénticas en su forma, aunque por supuesto las constantes K_m y T_m son diferentes en cada caso. Al igual que en el servomotor de dos fases, lo ideal es tener un valor lo mas grande posible para K_m y lo más pequeño posible para T_m .

Servomecanismo Posicional.- Como un ejemplo de aplicación del motor de CC controlado por inducido, se estudiará un sistema de control denominado servomecanismo posicional. Este servomecanismo se representa esquemáticamente en la fig. 4-16.

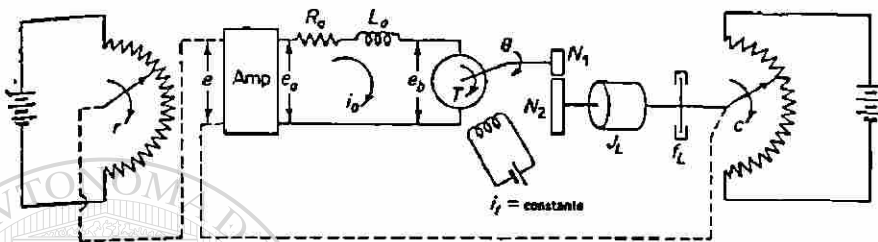


Fig. 4-16. Servomecanismo de Posición.

El sistema de control está formado por dos potenciómetros idénticos; uno de entrada y otro de salida, un amplificador, un motor de CC, un tren de engranes y la carga que se debe posicionar. La entrada del sistema es la posición angular del potenciómetro "r" y la salida es la posición angular del potenciómetro "c".

Cuando los dos potenciómetros de entrada y de salida están en la misma posición angular, el voltaje de error "e" es igual a cero y el sistema está en reposo. Para que se inicie el funcionamiento del sistema es necesario mover el potenciómetro de entrada "r" un cierto ángulo. Este movimiento se traduce como una diferencia de voltaje de error "e" que se aplica a un amplificador. Es necesario utilizar un amplificador para poder aumentar el nivel del voltaje "e" que normalmente es muy pequeño a un voltaje mayor que sea capaz de poder mover el motor de CC.

El voltaje amplificado e_a se aplica al motor de CC, el cual produce el par mecánico "T" que a través de un tren de engranes mueve la carga "L". La carga está acoplada mecánicamente al potenciómetro de salida "c", para que el potenciómetro siga los movimientos de la carga y finalmente el voltaje del potenciómetro de salida "c" se retroalimenta al amplificador para generar el voltaje de error "e".

Como ya se mencionó el movimiento del sistema se inicia al mover el potenciómetro "r" un cierto ángulo. Esto origina un voltaje de error que mueve la carga y el potenciómetro de salida siguiendo el movimiento del potenciómetro de entrada "r". A medida que el potenciómetro de salida "c" se vaya aproximando a la misma posición angular del potenciómetro de entrada "r", el voltaje de error "e" se va haciendo más pequeño, hasta que finalmente el error se hace cero y el sistema automáticamente se detiene.

Al potenciómetro de entrada "r" se le llama potenciómetro Maestro y al potenciómetro de salida "c" se le denomina potenciómetro Esclavo ya que prácticamente es un seguidor del potenciómetro de entrada.

A continuación se darán valores para las constantes del Servomecanismo Posicional y se definirán todas las variables que se representan en la fig. 4-16.

- r = desplazamiento angular del potenciómetro de entrada en radianes.
- c = desplazamiento angular del potenciómetro de salida en radianes.
- θ = desplazamiento angular del motor de CC.
- K_1 = ganancia del detector de error potenciométrico = $24/\pi$ volts/rad.
- K_p = ganancia del amplificador = 10 volts/volt.
- e_a = voltaje aplicado al inducido en voltios.
- e_b = fuerza contraelectromotriz generada por el motor en voltios.
- R_a = resistencia del devanado de inducido = 0.2 ohmios.
- L_a = inductancia del devanado de inducido = despreciable.
- i_a = corriente del devanado de inducido en amperios.
- K_b = cte. de fuerza contraelectromotriz = 5.5×10^{-2} volts-sec/rad.
- K = cte. del par motor = 6×10^{-5} Kg-m/amperio.
- J_m = momento de inercia del motor = 1×10^{-5} Kg-m-sec²
- f_m = coeficiente de fricción viscosa del motor = despreciable.
- J_L = momento de inercia de la carga = 4.4×10^{-3} Kg-m-sec²
- f_L = coeficiente de fricción viscosa de la carga = $4 \times 10^{-2} \frac{\text{Kg-m}}{\text{rad/seg}}$
- n = relación de engranaje $N_1/N_2 = 1/10$

En seguida se plantearán las ecuaciones que constituyen los modelos matemáticos de cada una de las partes del servomecanismo. Empezando por el detector de error potenciométrico:

$$E(s) = K_1[R(s) - C(s)] = 7.64[R(s) - C(s)] \quad (4-26)$$

Para el amplificador:

$$E_a(s) = K_p E(s) = 10 E(s) \quad (4-27)$$

Para el motor de CC controlado por inducido, la función de transferencia es:

$$\frac{\theta(s)}{E_a(s)} = \frac{K_m}{s(T_m s + 1)} \quad (4-28)$$

Se calculará primeramente el momento de inercia equivalente J y el coeficiente de fricción viscosa f , referidos al eje del motor, antes de calcular los valores de las constantes K_m y T_m .

$$J = J_m + n^2 J_L = 1 \times 10^{-5} + 4.4 \times 10^{-5} = 5.4 \times 10^{-5}$$

$$f = f_m + n^2 f_L = 0 + (1/10)^2 (4 \times 10^{-2}) = 4 \times 10^{-4}$$

$$K_m = \frac{K}{R_a f + K K_b} = \frac{6 \times 10^{-5}}{0.2(4 \times 10^{-4}) + (6 \times 10^{-5})(5.5 \times 10^{-2})} = 0.72$$

$$T_m = \frac{R_a J}{R_a f + K K_b} = \frac{0.2(5.4 \times 10^{-5})}{0.2(4 \times 10^{-4}) + (6 \times 10^{-5})(5.5 \times 10^{-2})} = 0.13$$

Substituyendo el valor de las constantes K_m y T_m en la función de transferencia (4-28), tenemos:

$$\frac{\theta(s)}{E_a(s)} = \frac{0.72}{s(0.13s + 1)} \quad (4-29)$$

Para el tren de engranes la señal de entrada es $\theta(s)$ y la salida es $C(s)$. Por lo que la función de transferencia es:

$$\frac{C(s)}{\theta(s)} = \frac{1}{10} \quad (4-30)$$

Utilizando la función de transferencia de cada una de las partes expresadas en las ecuaciones 4-26, hasta la 4-30, se puede trazar el siguiente diagrama de bloques:

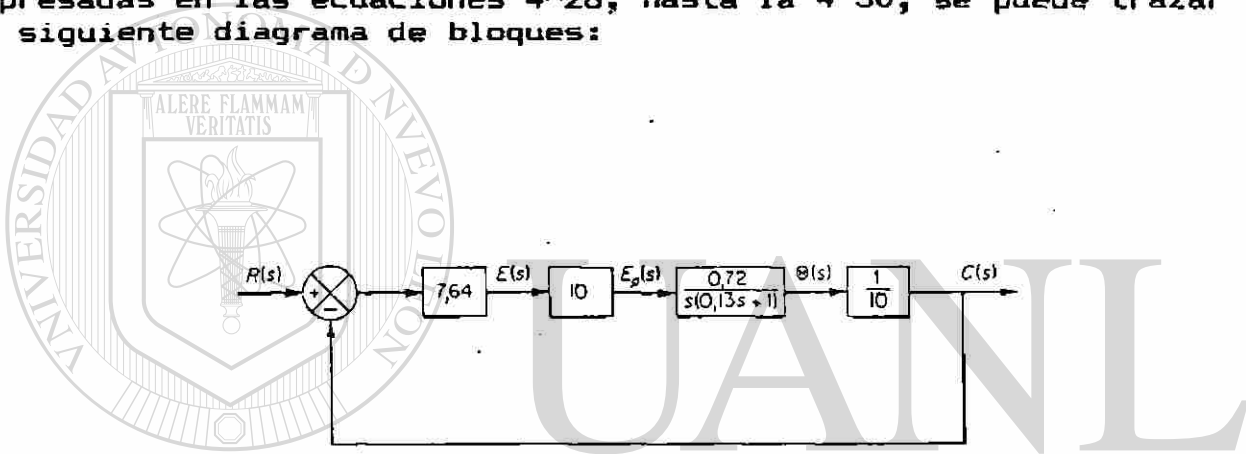


Fig. 4-17. Diagrama de bloques del sistema de la fig 4-16.

Finalmente aplicando álgebra de bloques se puede simplificar el diagrama de la fig. 4-17 hasta obtener el siguiente diagrama de bloques en su forma canónica.

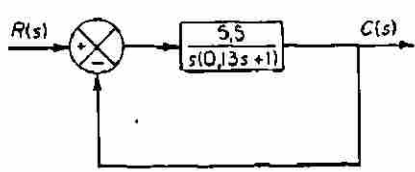


Fig. 4-18. Diagrama de bloques simplificado.

Servomotor de CC controlado por Campo.- En la fig. 4-19 se puede ver el diagrama esquemático de un motor de CC controlado por campo.

Ahora la señal de entrada es el voltaje e_f que se aplica al circuito de campo, lo cual origina una corriente de campo i_f . A la derecha se tiene el circuito de inducido o armadura en donde se aplica un voltaje e_a . Al aplicar el voltaje e_a constante, la corriente i_a aparentemente es constante, pero esto en la realidad es muy difícil de lograr porque la corriente i_a depende de la fuerza contraelectromotriz y ésta a su vez depende del campo que es variable y de la velocidad que también puede ser variable. Por lo anterior y para tratar de mantener lo más constante posible la corriente i_a se conecta una resistencia R_a en serie con la armadura, lo cual reduce el valor de la corriente i_a y con ello su nivel de variación.

El significado de cada una de las constantes y variables de la fig. 4-19 es:

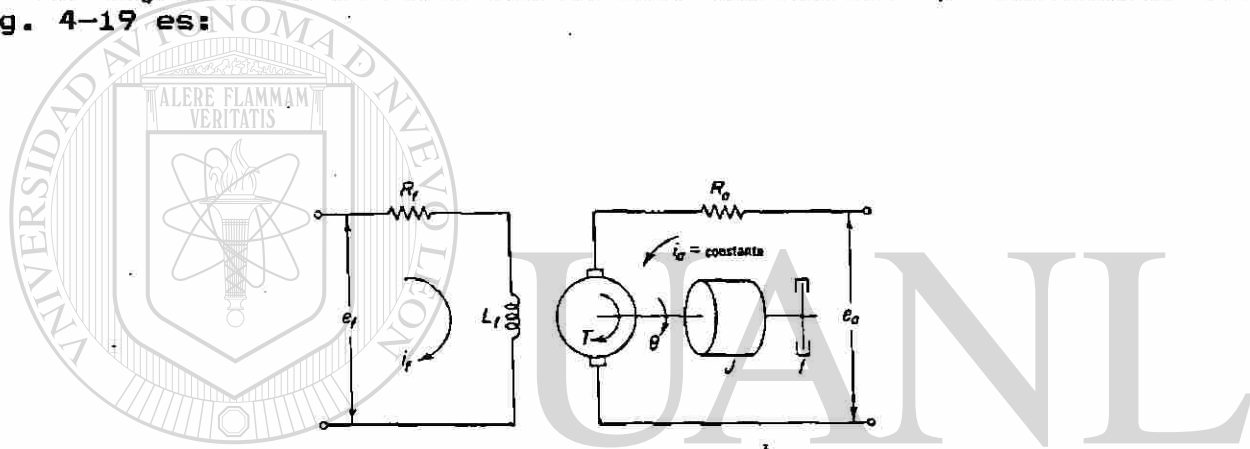


Fig. 4-19. Diagrama esquemático del motor de CC controlado por campo

- R_f = resistencia del devanado de campo en ohmios.
- L_f = inductancia del devanado de campo en henrios.
- i_f = corriente del devanado de campo en amperios.
- e_f = tensión del devanado de campo en voltios.
- R_a = suma de la resistencia de inducido y resistencia externa en ohm
- i_a = corriente del inducido en amperios.
- θ = desplazamiento angular del eje del motor en radianes.
- T = par desarrollado por el motor en Kg-m.
- J = momento de inercia equivalente del motor y la carga referido al eje del motor en Kg-m^2 .
- f = coeficiente de fricción viscosa equivalente del motor y la carga con referencia al eje del motor, en Kg-m/rad/seg .

La primera ecuación que se planteará para el motor será la suma de los voltajes en el circuito de campo.

$$L_f \frac{di_f}{dt} + R_f i_f = e_f \quad (4-31)$$

El par mecánico generado por el motor es directamente proporcional a la corriente de campo i_f y a la corriente del inducido i_a . Como la corriente de inducido es constante, entonces:

$$T = K_2 i_f \quad (4-32)$$

El par mecánico debe ser capaz de vencer el momento de inercia y el rozamiento, por lo que la ecuación de suma de pares será:

$$J \frac{d^2 \theta}{dt^2} + f \frac{d\theta}{dt} = T = K_2 i_f \quad (4-33)$$

Calculando la transformada de Laplace de las ecuaciones (4-31) y (4-33) tenemos:

$$(L_f s + R_f) I_f(s) = E_f(s) \quad (4-34)$$

$$(J s^2 + f s) \theta(s) = K_2 I_f(s) \quad (4-35)$$

Tomando como base las ecuaciones 4-34 y 4-35 y considerando como entrada el voltaje $E_f(s)$ y $\theta(s)$ como salida se puede construir el siguiente diagrama de bloques:

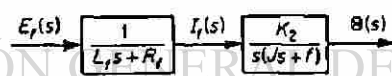


Fig. 4-20. Diagrama de bloques del motor de CC controlado por campo.

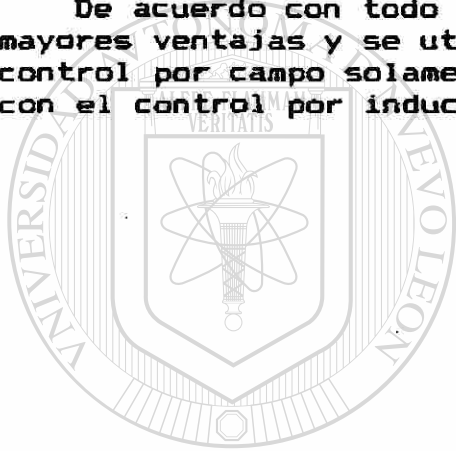
El diagrama de bloques de la fig. 4-20 se puede simplificar aplicando álgebra de bloques y al mismo tiempo calcular la función de transferencia del motor de CC.

$$\frac{\theta(s)}{E_f(s)} = \frac{K_2}{s(L_f s + R_f)(J s + f)} = \frac{K_m}{s(T_f s + 1)(T_m s + 1)}$$

donde $K_m = K_2 / (R_f f) =$ constante de ganancia del motor.
 $T_f = L_f / R_f =$ constante de tiempo del circuito de campo.
 $T_m = J / f =$ constante de tiempo del elemento inercia-fricción.

Comparación del funcionamiento de un motor de CC controlado por inducido con el motor de CC controlado por campo. La única ventaja del control por campo es que como el circuito de campo consume de un 5 a un 7% de la potencia del motor, el control de la velocidad se hace en un dispositivo de muy baja potencia. Pero el control por campo es más problemático por la dificultad que implica el tener que mantener la corriente de inducido i_a como una constante. Es mucho más fácil disponer de una fuente de voltaje constante para el control del motor por inducido, además las constantes de tiempo son menores en el control por inducido. Otra dificultad del control por campo es el hecho de que la función de transferencia es de tercer orden, mientras que la de control por inducido es de segundo orden. Esto último se debe a que no es posible desprestigiar en el control por campo la inductancia L_f .

De acuerdo con todo lo anterior el control por inducido tiene mayores ventajas y se utiliza por ello mucho más en la práctica. El control por campo solamente se utiliza algunos casos en combinación con el control por inducido.



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

4-3.- GRAFICOS DE FLUJO DE SEÑAL.

Como ya se vió con anterioridad, los diagramas de bloques es una forma de representación muy útil para sistemas de control. Los gráficos de flujo de señal son otra forma de representación de sistemas de control.

Cuando el diagrama de bloques es grande, el procedimiento de simplificación puede ser complicado. En éstos casos se puede aplicar el método de gráficos de flujo de señal con cierta ventaja ya que se cuenta con una fórmula que nos permite en un sólo cálculo simplificar el gráfico hasta obtener directamente la función de transferencia, que nos relaciona la entrada y la salida del sistema. La fórmula para lograr la simplificación en un gráfico de flujo de señal se denomina la fórmula de Mason y se verá un poco más adelante.

Desde luego que la simplificación anterior también se puede hacer en un diagrama de bloques, aplicando las reglas del álgebra de bloques con el único inconveniente de que la simplificación tendría que hacerse en varios pasos, lo cual representa un procedimiento más largo y tardado.

Basicamente un gráfico de flujo de señal contiene logicamente la misma información que un diagrama de bloques y se puede trazar apartir de ecuaciones algebraicas o de un diagrama de bloques.

Un gráfico de flujo de señal consiste en una red que contiene nodos que están interconectados por ramas que tienen una dirección y un sentido.

Para poder entender lo que es y como se representa un gráfico de flujo de señal hay que definir primeramente ciertos términos. En seguida se darán las definiciones que constituyen una terminología especial para gráficos de flujo de señal.

Nudo.— Es un punto que representa una variable o señal.

Transmitancia.— La transmitancia es una ganancia entre dos nodos.

Rama.— Es un segmento de línea con dirección y sentido que une dos nodos. La ganancia de una rama es una transmitancia.

Nudo de entrada o fuente.— Es un nudo que sólo tiene ramas que salen. Corresponde a una variable independiente. ®

Nudo de salida o sumidero.— Es un nudo que sólo tiene ramas que entran. Corresponde a una variable dependiente.

Nudo mixto.— Es un nudo que tiene tanto ramas que entran como ramas que salen.

Camino o trayecto.— Es un recorrido de ramas conectadas en el sentido de las flechas de las ramas. Si no cruza ningún nudo más de una vez, el camino o trayecto es abierto. Si el camino o trayecto finaliza en el mismo nudo del cual partió, y no cruza ningún otro nudo más de una vez, es un camino o trayecto cerrado.

Lazo.— Es un camino o trayecto cerrado.

Ganancia de lazo.— Es el producto de las transmitancias de las ramas de un lazo.

Lazos disjuntos.— Son lazos que no poseen ningún nudo común.

Trayecto Directo.— Es el trayecto de un nudo de entrada (fuente) a un nudo de salida (sumidero) que no cruza ningún nudo más de una vez.

Ganancia de Trayecto Directo.— Es el producto de las transmitancias de las ramas de un trayecto directo.

En la fig. 4-21 se representa un gráfico de flujo de señal en donde se pueden ver lo que son los nudos, las ramas y las transmitancias.

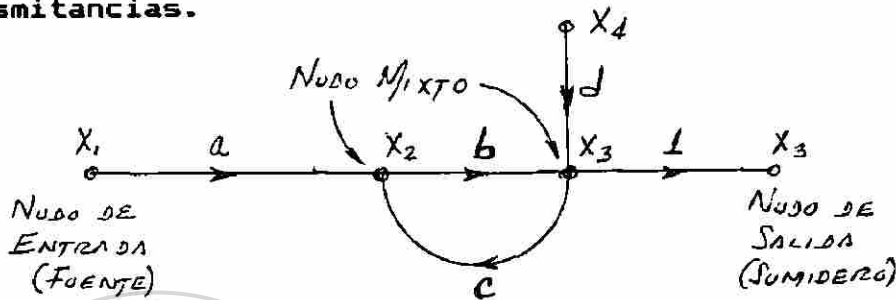


Fig. 4-21 Gráfico de Flujo de Señal.

Algebra de Graficos de Flujo de Señal.— Como ya se mencionó anteriormente los graficos de flujo de señal se pueden simplificar en un solo paso aplicando la fórmula de Mason que se verá mas adelante. Las reglas que se verán a continuación se utilizan para trazar el grafico, entender su operación o realizar pequeñas simplificaciones al mismo.

- 1.- El valor del nudo de salida con una sola rama de entrada es $x_2 = ax_1$, como se ve en la fig. 4-22-a.
- 2.- La transmitancia total de varias ramas conectadas en serie es igual al producto de todas las transmitancias de las ramas, como se indica en la fig. 4-22-b.
- 3.- La transmitancia total de varias ramas conectadas en paralelo se obtiene sumando las transmitancias de todas las ramas, como se ve en la fig. 4-22-c.
- 4.- La fig. 4-22-d nos indica como se puede eliminar un nudo mixto.
- 5.- La fig. 4-22-e nos indica como se puede eliminar un lazo de gráfico de flujo de señal. De la fig. 4-22-e se puede ver que

$$x_3 = bx_2 \quad x_2 = ax_1 + cx_3$$

Substituyendo x_2 en la ecuación de x_3 , tenemos:

$$x_3 = b [ax_1 + cx_3] = abx_1 + bcx_3$$

$$x_3 - bcx_3 = abx_1$$

$$x_3 [1 - bc] = abx_1$$

$$x_3 = \left[\frac{ab}{1 - bc} \right] x_1$$

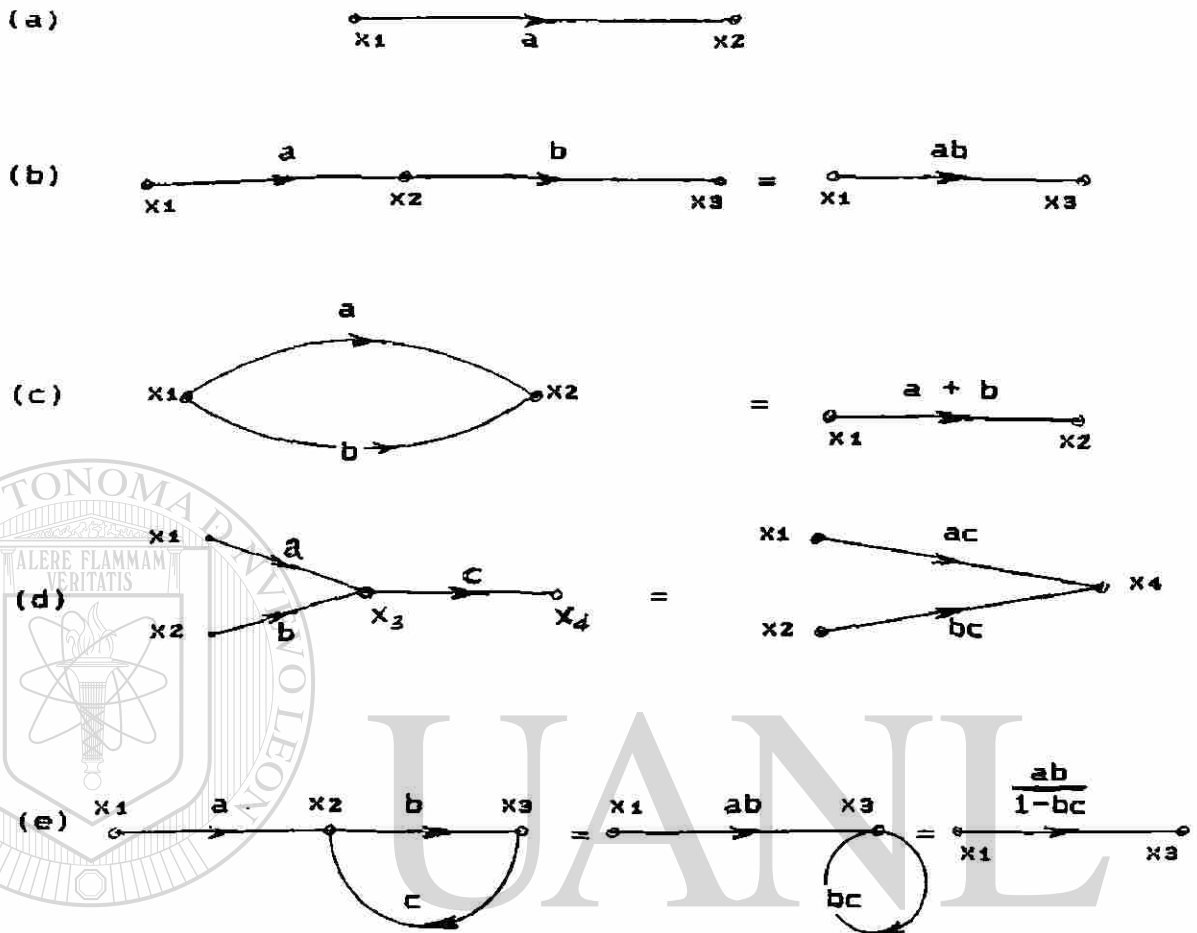


Fig 4-22.- Gráficos de Flujo de Señal y sus equivalencias.

Representación de un Gráfico de Flujo de Señal.- A continuación se representará el gráfico de un sistema de control cuyo modelo matemático está formado por las siguientes tres ecuaciones:

$$x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_1u_1 \quad (4-36)$$

$$x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2u_2 \quad (4-37)$$

$$x_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \quad (4-38)$$

Se considera que u_1 y u_2 son variables de entrada; x_1, x_2 y x_3 son variables de salida. Se trazará el gráfico de señal por partes, considerando primeramente la ecuación (4-36) y posteriormente las otras dos ecuaciones. En primer lugar se sitúan los tres puntos que constituyen los nudos x_1, x_2 y x_3 como se indica en la fig. 4-23. En seguida se van trazando las ramas de acuerdo con los diferentes términos de la ecuación (4-36).

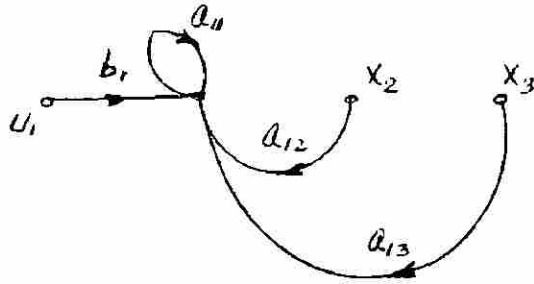


Fig 4-23.- Gráfico correspondiente a la ecuación (4-36)

Siguiendo el mismo procedimiento anterior se traza la gráfica de la ecuación (4-37) y (4-38). Se representan las gráficas en las figuras 4-24 y 4-25.

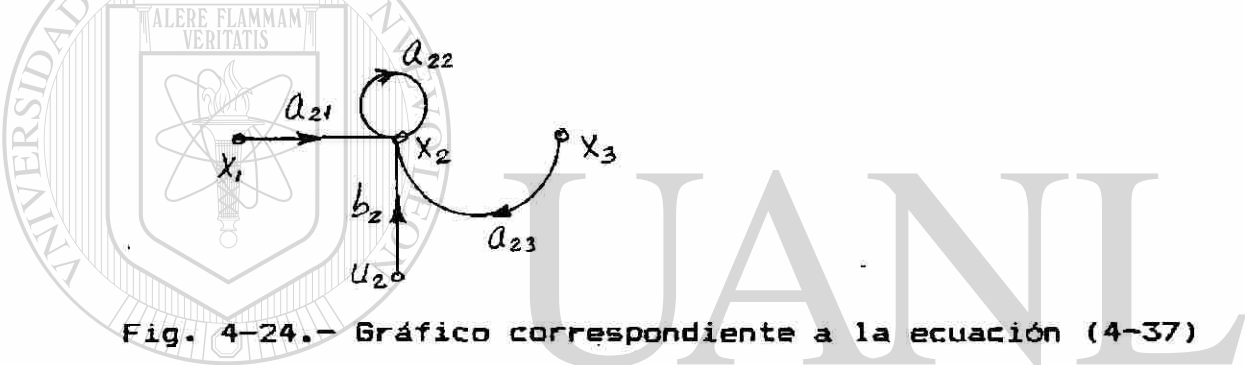


Fig. 4-24.- Gráfico correspondiente a la ecuación (4-37)

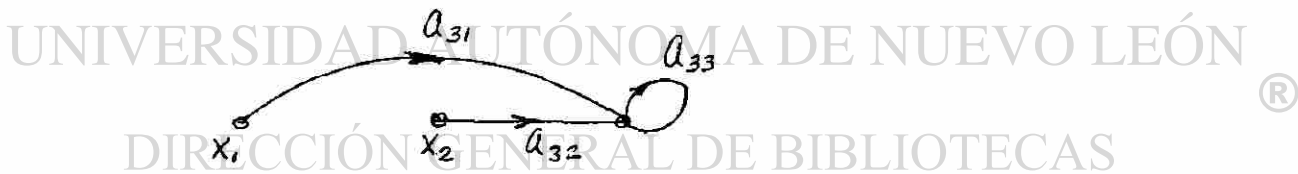


Fig. 4-25.- Gráfico correspondiente a la ecuación (4-38)

Una vez que se tienen los gráficos de cada una de las tres ecuaciones, se procede a trazar un grafico completo, compuesto por los los tres gráficos anteriores.

En la fig 4-26 se representa el gráfico completo del sistema de control.

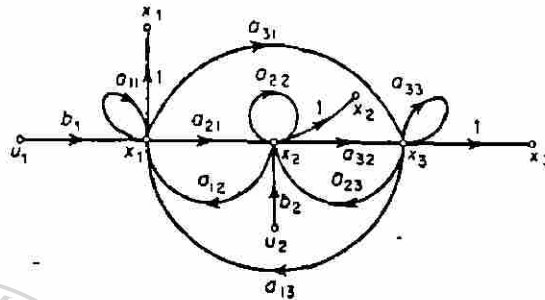


Fig. 4-26. - Gráfico completo del sistema de control.

Gráficos de flujo de señal para diagramas de bloques.- Aunque se puede trazar un gráfico de las ecuaciones de un sistema de control, también es posible trazar el gráfico desde un diagrama de bloques. Los diagramas de bloques tienen la misma información que un gráfico de flujo de señal, pero son diferentes en su representación. En seguida se verán algunos ejemplos de diagramas de bloques y sus gráficos equivalentes.

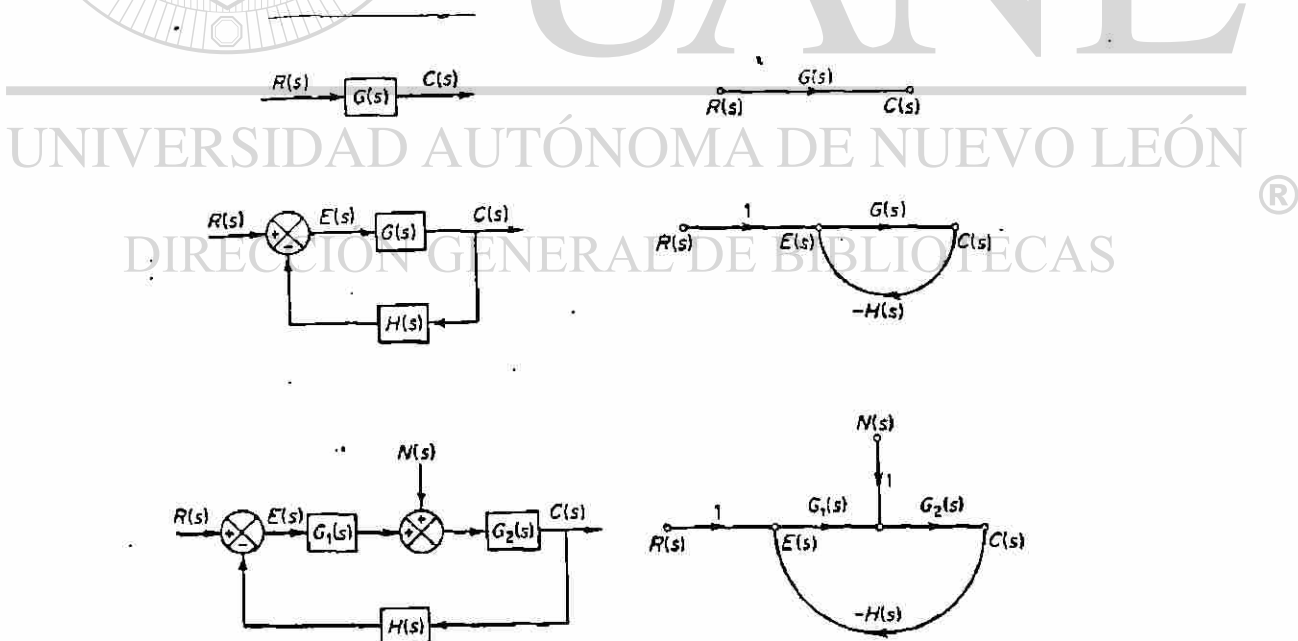
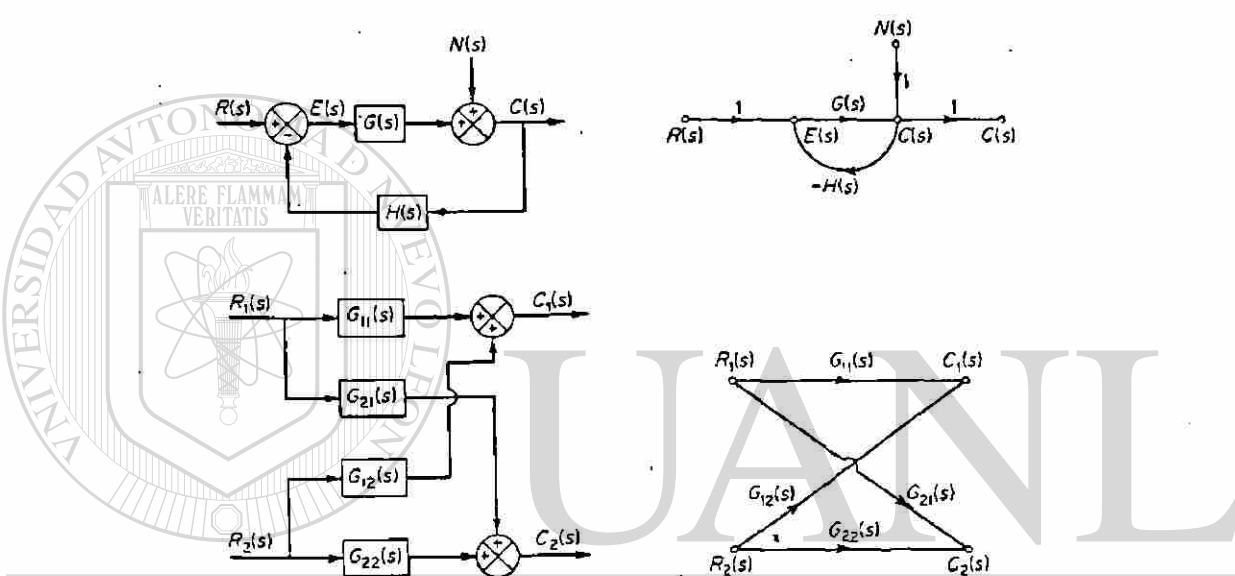


Fig. 4-27. - Diagramas de bloques y sus correspondientes gráficos de flujo de señal.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

Fig. 4-28.- Continuación de Diagramas de Bloques y Gráficos. [®]
 DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Fórmula de Mason.- Como ya se mencionó, una de las ventajas de los gráficos de flujo de señal es que se cuenta con una fórmula que nos permite simplificar un gráfico en un sólo paso para obtener la función de transferencia total, en lugar de ir simplificando paso a paso como en los diagramas de bloques.

La fórmula de la ganancia de Mason que hace posible esta simplificación rápida en forma directa, se puede representar por la siguiente ecuación:

$$P = \frac{1}{\Delta} \sum P_k \Delta_k$$

donde :

P_k = Ganancia del k-esimo trayecto directo.

Δ = Determinante del gráfico

= $1 -$ (suma de todas las ganancias de lazo distintas) + (suma de los productos de las ganancias de todas las combinaciones posibles de dos lazos no adjuntos) - (suma de los productos de ganancias de todas las combinaciones posibles de tres lazos no adjuntos) +

$$= 1 - \sum L_a + \sum L_b L_c - \sum L_d L_e L_f + \dots$$

$\sum L_a$ = Suma de todas las distintas ganancias de lazo.

$\sum L_b L_c$ = Suma de los productos de las ganancias de todas las posibles combinaciones de dos lazos no adjuntos.

$\sum L_d L_e L_f$ = Suma de los productos de las ganancias de todas las posibles combinaciones de tres lazos no adjuntos.

Δ_k = Cofactor del determinante del k-esimo trayecto directo del gráfico, con los lazos adjuntos del k-esimo trayecto directo eliminados.

Se resolverán dos ejemplos para aplicar la fórmula de Mason a los gráficos de señal.

Ejemplo 4-4.- El diagrama de bloques de la fig. 4-29 representa un sistema de control. Se desea convertir el diagrama de bloques a un gráfico de flujo de señal y posteriormente aplicar la fórmula de Mason para calcular la función de transferencia de lazo cerrado $C(s)/R(s)$.

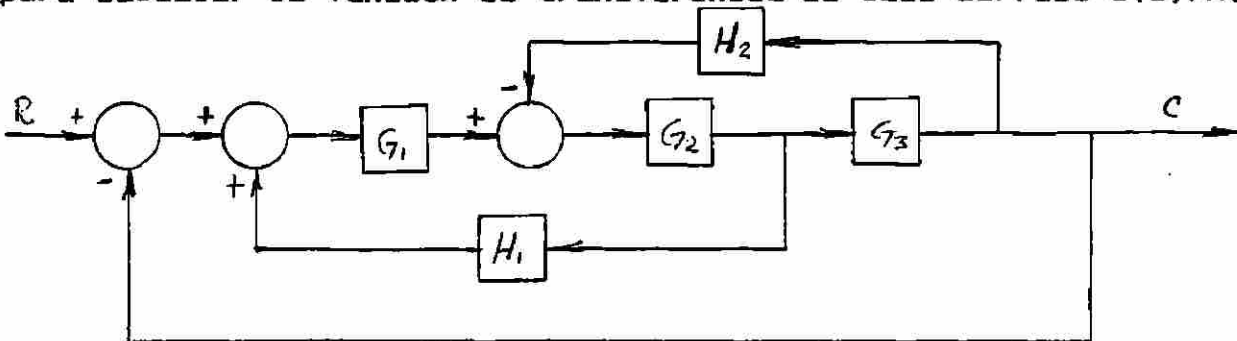


Fig. 4-29.- Diagrama de bloques del sistema de control

Tomando como base el diagrama de bloques de la fig 4-29 se obtiene el gráfico de flujo de señal equivalente de la fig. 4-30.

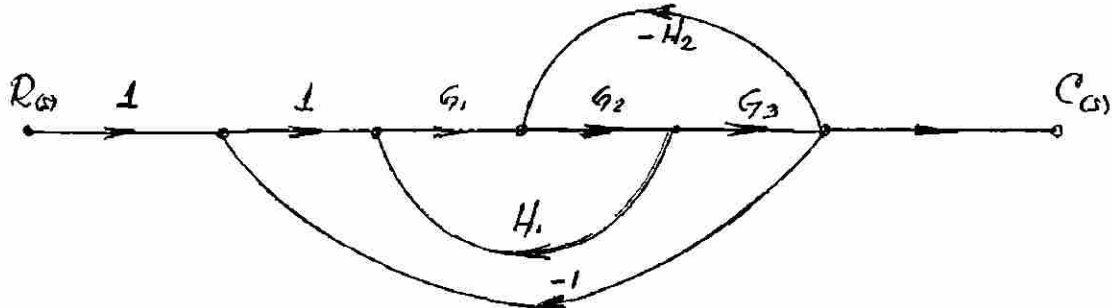


Fig. 4-30.- Gráfico de flujo de señal para la fig. 4-29.

Observando el gráfico de la fig. 4-30, se ve que solamente hay un trayecto directo desde la entrada $R(s)$ hasta la salida $C(s)$. La ganancia de este trayecto directo es:

$$P_1 = G_1G_2G_3$$

También en el gráfico podemos ver que hay tres lazos cuyas ganancias son:

$$L_1 = G_1G_2H_1$$

$$L_2 = -G_2G_3H_2$$

$$L_3 = -G_1G_2G_3$$

Los tres lazos tienen por lo menos una rama común por lo que en este caso no tenemos lazos disjuntos.

El siguiente paso es encontrar el determinante del gráfico Δ , para lo cual nos basamos en la fórmula general.

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3)$$

Substituyendo el valor de L_1 , L_2 y L_3 , tenemos que:

$$\Delta = 1 - G_1G_2H_1 + G_2G_3H_2 + G_1G_2G_3$$

Basandonos en la fórmula anterior del determinante podemos encontrar los cofactores. Debido a que el número de cofactores es igual al de trayectos directos, en este caso sólo habrá un cofactor cuyo valor se obtiene eliminando del determinante todos los lazos adjuntos al trayecto directo P_1 , (que son todos los tres lazos), por lo que:

$$\Delta_1 = 1$$

Una vez que ya se tienen los trayectos directos, el determinante y los cofactores, se substituyen los valores en la fórmula de Mason como se indica a continuación.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = P = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 - G_1 G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2 + G_1 G_2 G_3}$$

Este diagrama de bloques que luego se transformó en un gráfico de flujo de señal ya lo habíamos resuelto aplicando las reglas del álgebra de bloques paso a paso. El diagrama de bloques está en la pag. No 80, fig. 4-8 y la simplificación final se obtuvo en la fig. 4-8-d de la pag. 82. Como se puede comprobar los resultados obtenidos son lógicamente iguales, por el método de bloques o gráficos de flujo de señal.

Ejemplo 4-5.-Aplicando la fórmula de Mason se desea calcular la función de transferencia $C(s)/R(s)$ del gráfico de flujo de señal que se representa en la fig. 4-31.

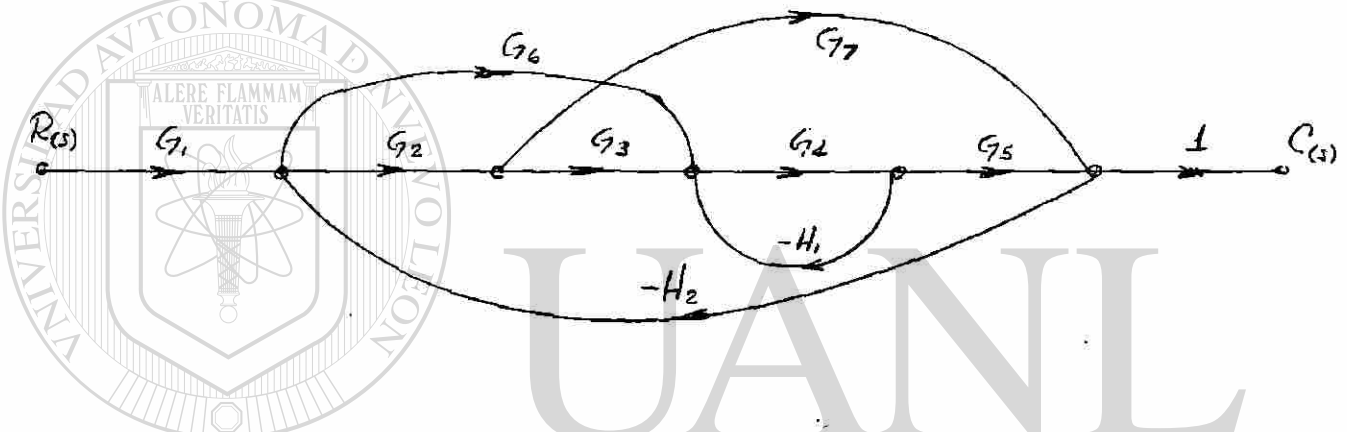


Fig. 4-31.- Gráfico de flujo de señal de un sistema de control.

Trayectos directos.- En este gráfico existen tres trayectos directos que son:

$$P_1 = G_1 G_2 G_3 G_4 G_5$$

$$P_2 = G_1 G_4 G_5 G_6$$

$$P_3 = G_1 G_2 G_7$$

Lazos de retroalimentación.- Analizando el gráfico se pueden ver cuatro lazos de retroalimentación cuyas ganancias son:

$$L_1 = -G_4 H_1$$

$$L_2 = -G_2 G_7 H_2$$

$$L_3 = G_4 G_5 G_6 H_2$$

$$L_4 = -G_2 G_3 G_4 G_5 H_2$$

Revisando todos los lazos se llega a la conclusión de que sólo los lazos L_1 y L_2 no tienen nada en común y por lo tanto son lazos no adjuntos o lazos disjuntos.

Determinante.- El determinante del gráfico de flujo de señal se obtiene aplicando la fórmula general.

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + L_1L_2 \quad (4-39)$$

Substituyendo el valor de los lazos en la ecuación anterior:

$$\Delta = 1 + G_4H_1 + G_2G_7H_2 + G_4G_5G_6H_2 + G_2G_3G_4G_5H_2 \quad (4-40)$$

Cofactores.- En este caso tendremos tres cofactores, uno para cada trayecto directo. El Cofactor Δ_1 se obtiene de la ecuación de Δ (4-39) eliminando del determinante los lazos adjuntos al trayecto directo P_1 , que son todos, L_1 , L_2 , L_3 y L_4 . Por lo tanto:

$$\Delta_1 = 1$$

En forma semejante se pueden calcular los cofactores Δ_2 y Δ_3 .

$$\Delta_2 = 1$$

$$\Delta_3 = 1 - L_1 = 1 + G_4H_1$$

Finalmente se aplican los valores de los trayectos directos, cofactores y determinante a la fórmula de Mason:

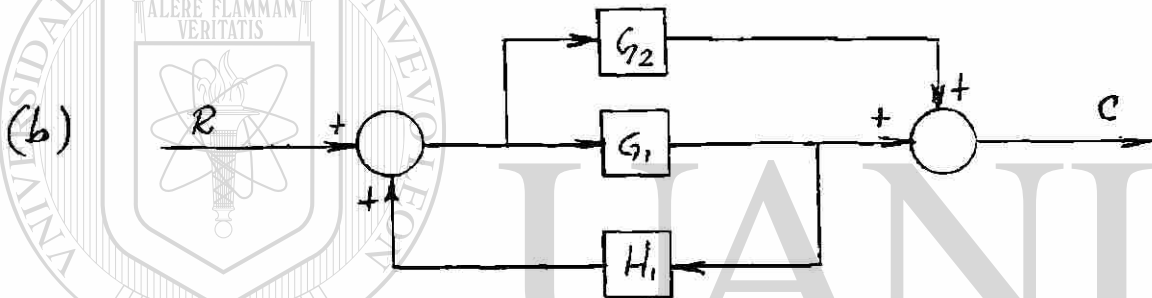
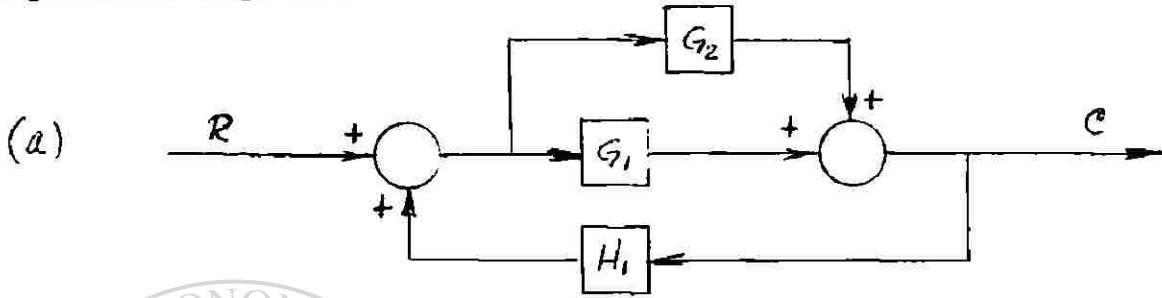
$$\frac{C(s)}{R(s)} = P = \frac{1}{\Delta} (P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2 + P_3\Delta_3)$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1G_2G_3G_4G_5 + G_1G_4G_5G_6 + G_1G_2G_7(1 + G_4H_1)}{1 + G_4H_1 + G_2G_7H_2 + G_4G_5G_6H_2 + G_2G_3G_4G_5H_2 + G_4H_1G_2G_7H_2}$$

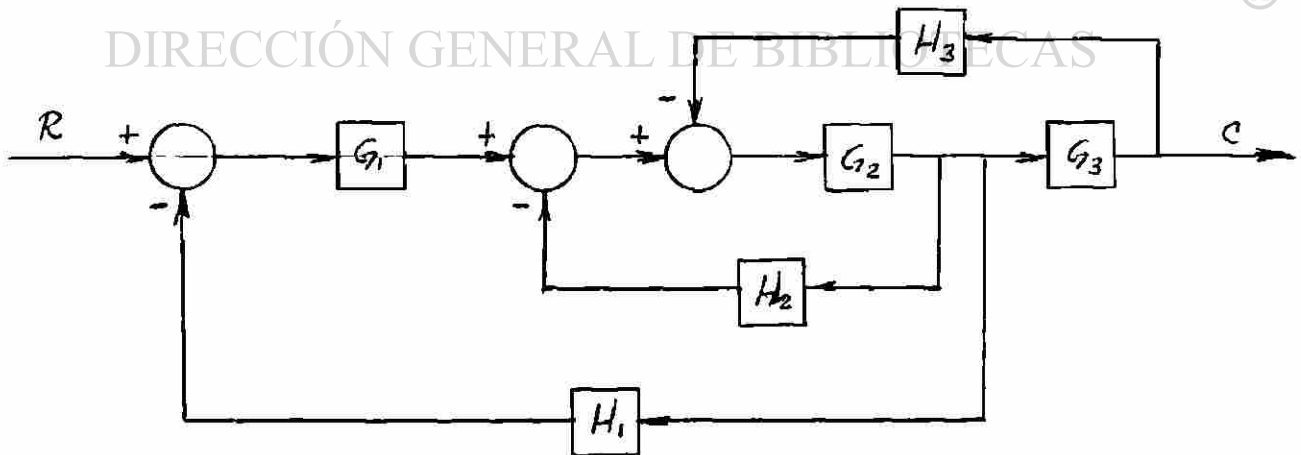
La fórmula de la ganancia de Mason es muy útil para reducir diagramas de sistemas grandes con muchas componentes de un sólo paso, sin necesidad de reducciones graduales paso a paso como en los diagramas de bloques. Lo importante al aplicar la fórmula de Mason es poder visualizar con toda claridad todos los trayectos directos y los lazos de retroalimentación sin que se nos escape ninguno, de esto depende que la simplificación sea correcta. Como es obvio, la experiencia en los gráficos se logrará resolviendo ejemplos para aplicar varias veces la fórmula de Mason. También podemos simplificar un diagrama de bloques por los dos métodos para comprobar el resultado que debe ser idéntico en los dos casos, esto último es una forma muy efectiva de comprobación de resultados.

PROBLEMAS PROPUESTOS

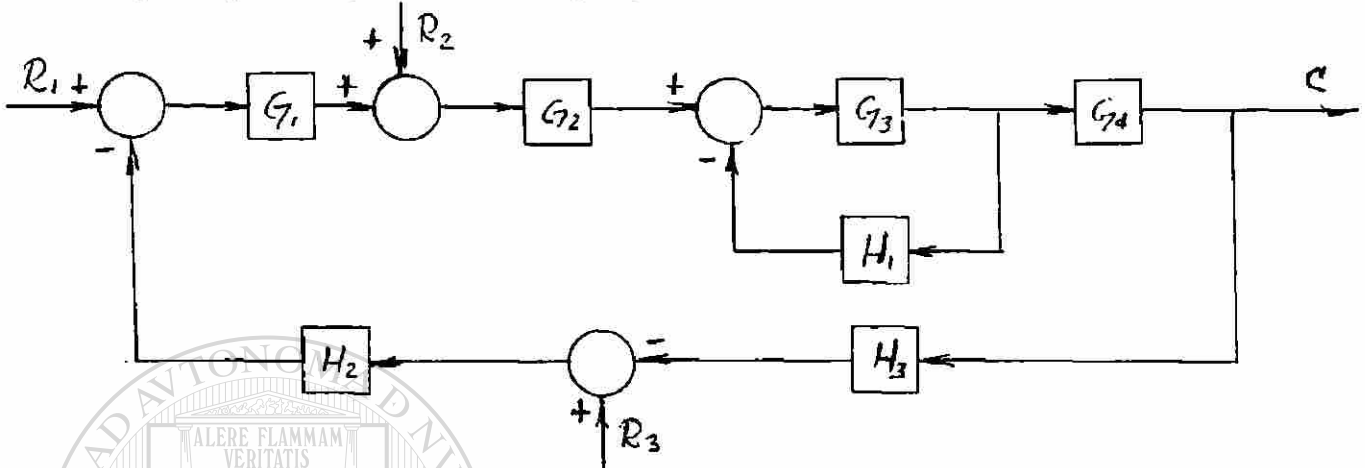
Problema 4-1.- Aplicando algebra de bloques o la Formula de Mason, determinar C/R en cada uno de los diagramas de bloques de las siguientes figuras:



Problema 4-2.- Reducir el diagrama de bloques de la figura a la forma canonica, conservando unicamente en la retroalimentación el bloque H_s .



Problema 4-3.- Determinar la salida total C del diagrama de bloques de la figura, aplicando el Algebra de bloques o Formula de Mason y el principio de la superposición.



Problema 4-4.- Calcular C/R_1 para el diagrama de bloques de la figura 4-32.

Problema 4-5.- Determinar C/R_2 para el diagrama de bloques de la figura 4-32.

Problema 4-6.- Calcular la salida total C del diagrama de bloques representado en la fig. 4-32.

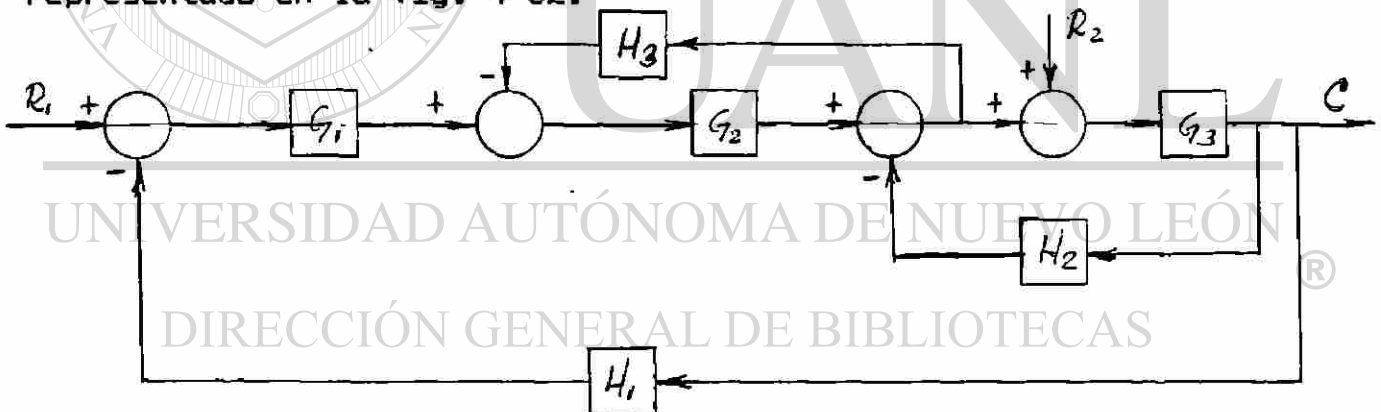
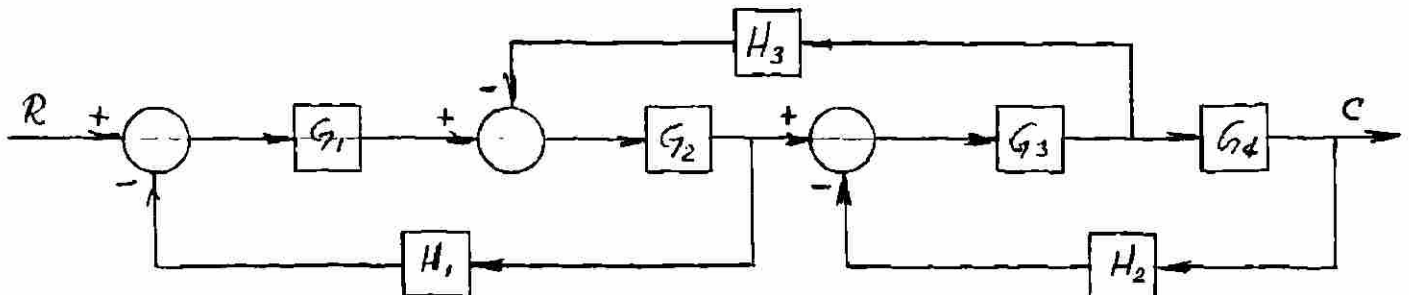
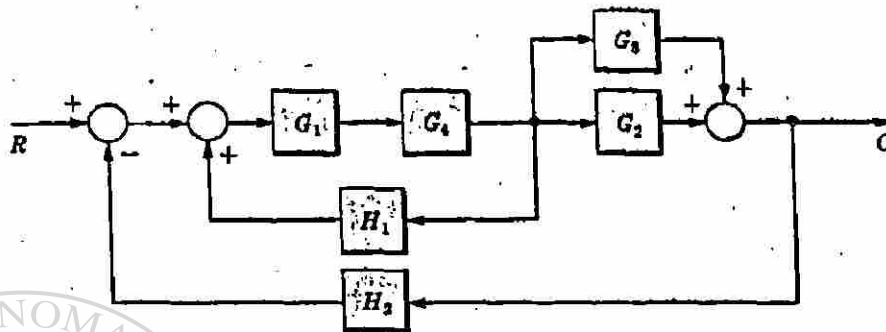


Fig. 4-32

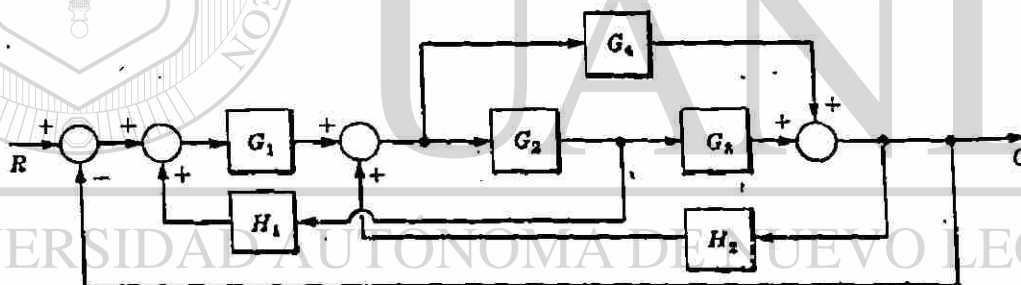
Problema 4-7.- Calcular C/R para el sistema de control representado en el siguiente diagrama de bloques:



Problema 4-8.-Aplicando la fórmula de Mason calcular C/R en el siguiente diagrama de bloques:



Problema 4-9.- Encontrar C/R para el diagrama de bloques de la figura, aplicando gráficos de flujo de señal.



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

CAPITULO V

ACCIONES BASICAS DE CONTROL

5-1.- Introducción.

Como ya se estableció desde el primer capítulo, todos los sistemas de control automático deben tener retroalimentación. La retroalimentación cumple varios objetivos muy importantes para el sistema de control. Primero se mide la salida real del sistema y se regresa esta medición como una señal, a través de la retroalimentación para compararla con el valor que deseamos tener en la salida. El valor deseado en la salida se indica en la señal de entrada de referencia del sistema. Luego se comparan ambos valores, la salida real y el valor deseado, de esta comparación surge una señal de error que nos indica la desviación entre la salida real y la deseada.

La señal de error le indica al sistema que no se ha alcanzado el nivel deseado en la salida, por lo que el sistema tiene que hacer algo para corregir el error y alcanzar realmente la salida que se desea. La forma en la que el sistema automático produce una señal de control para corregir el error se le llama "Acción de Control".

Existen seis acciones básicas de control que se estudiarán más adelante y que se utilizan extensamente en los sistemas de control automáticos industriales. Como veremos las primeras acciones son simples porque desarrollan una sola acción, pero las últimas tres son acciones combinadas que contienen dos o más acciones en el mismo controlador.

5-2.- Clasificación de los Sistemas de Control Automático.

Los sistemas de control se pueden clasificar en varias formas, por ejemplo de acuerdo con el tipo de fuente de energía y componentes que utilicen, pueden ser eléctricos, electrónicos, hidráulicos o neumáticos. Para seleccionar el tipo de control más adecuado para una aplicación específica se deberán tomar en cuenta diferentes aspectos como, la naturaleza de la planta y sus condiciones de funcionamiento, además de consideraciones de seguridad, costo, disponibilidad, confiabilidad, precisión, peso y tamaño.

De acuerdo con su acción de control, los controles automáticos industriales se pueden clasificar en:

- 1.- Acción de control de dos posiciones o de Si-No (On-Off).
- 2.- Acción de control Proporcional.
- 3.- Acción de control Integral.
- 4.- Acción de control Proporcional e Integral.
- 5.- Acción de control Proporcional y Derivativo.
- 6.- Acción de control Proporcional, Derivativo e Integral.

Elementos de un controlador automático industrial.- Todos los controladores automáticos industriales tienen por lo menos tres componentes básicos, un amplificador, un elemento de medición y un detector de error. En la fig. 5-1 se representa un diagrama de bloques con las tres partes de un controlador.

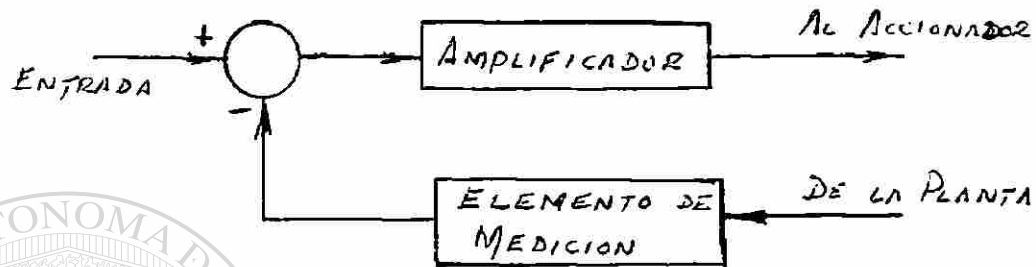


Fig. 5-1.- Componentes de un controlador automático industrial.

El Amplificador se requiere debido a que generalmente la señal de error que produce el detector de error tiene un nivel de potencia muy bajo que no es suficiente para mover algún dispositivo accionador como por ejemplo una válvula o un motor eléctrico. Por lo tanto la señal de error se introduce a un amplificador para que la señal de salida del mismo tenga la potencia necesaria para mover algún dispositivo que tienda a corregir el error del sistema.

El Elemento de Medición es un dispositivo que sirve para medir la señal de salida de la planta y además cambiar la señal por otra de naturaleza distinta que sea de igual tipo que la señal de entrada de referencia. El elemento de medición puede convertir por ejemplo una señal de la salida de presión a voltaje, de velocidad a voltaje, etc. Generalmente la señal de salida del elemento de medición es un voltaje ya que la señal de referencia también lo es. Se necesita cambiar la naturaleza de la señal que entra al elemento de medición para poder comparar dos señales del mismo tipo en el detector de error. Si se aplican señales de naturaleza distinta como entradas al detector de error, obviamente el detector no puede trabajar, ya que no podría comparar dos señales de naturaleza distinta.

El detector de error como ya se dijo compara las dos señales de entrada de la misma naturaleza y nos dá como salida una señal de error de la misma naturaleza de las señales de entrada. Si las entradas son señales de voltaje, la salida también será un voltaje.

Controles Autoactuantes.- Casi todos los controles automáticos industriales tienen sus componentes separadas en unidades independientes, lo cual significa que el amplificador está separado del elemento de medición y del detector de error. Sin embargo hay algunos controles muy sencillos que tienen todas sus componentes integradas en una sola unidad, este tipo de controles son denominados Controles Autoactuantes, y son muy utilizados en la práctica porque son muy simples y muy económicos.

En la fig. 5-2 se representa un control autoactuante que se utiliza para regular la presión en la salida a un valor constante. Las partes principales del control son;

- a) Un tornillo de regulación.
- b) Un resorte de presión.
- c) Una válvula de control.

En la entrada se aplica la presión de un fluido, que puede ser gas o líquido. Esta presión de entrada tiene un valor mayor que la presión de salida, que se desea controlar, como sucede en un tanque lleno de gas butano por ejemplo. La presión de entrada cuando es grande se aplica sobre el diafragma por la parte inferior, ejerciendo una fuerza hacia arriba. Esta fuerza hacia arriba es contrarrestada en parte por la fuerza que el resorte ejerce hacia abajo presionado por el tornillo de regulación. Cuando la presión de entrada es elevada, produce un movimiento del diafragma hacia arriba que estrangula un poco la válvula de control, disminuyendo con ello la cantidad de fluido en la salida y con ello también la presión.

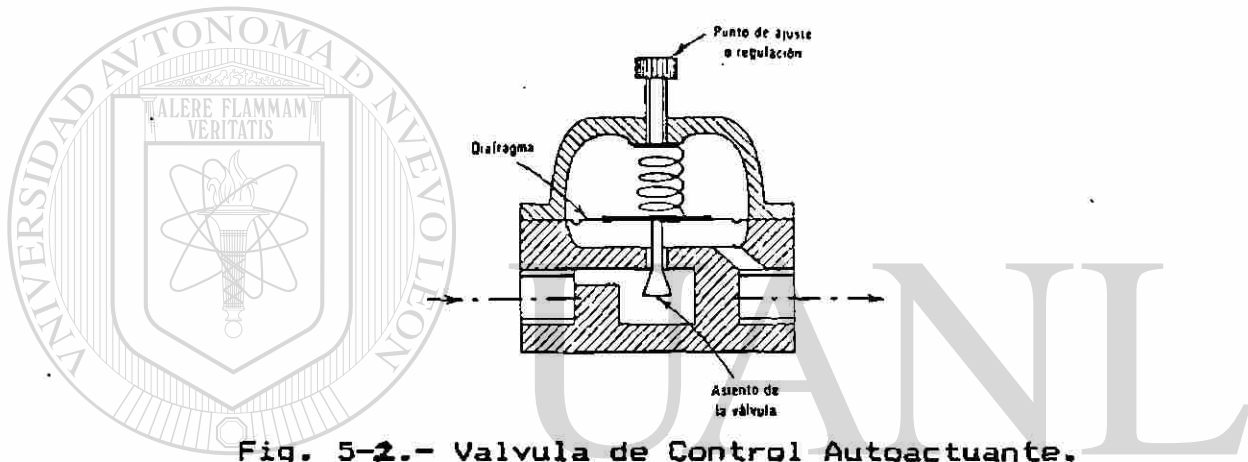


Fig. 5-2.- Válvula de Control Autoactuante.

A medida que la presión de entrada disminuye debido a que el tanque de gas se va vaciando, la fuerza ejercida sobre el diafragma va disminuyendo por lo que el resorte mueve el diafragma hacia abajo lo que produce la abertura de la válvula de control, dejando pasar más fluido para que la presión de salida se mantenga constante.

El ajuste del tornillo de regulación depende de la presión que se desee tener en la salida. Si queremos una presión elevada, el tornillo de regulación se debe ajustar para que aumente la fuerza sobre el resorte hacia abajo y éste a su vez presione el diafragma para abrir y mantener así la válvula de control, con lo cual se logra el aumento de la presión en la salida. Si se quiere reducir la presión en la salida, el movimiento del tornillo de regulación se hará en sentido contrario.

Generalmente estos reguladores de presión autoactuantes ya vienen ajustados de fábrica para obtener una determinada presión de salida constante. La parte más delicada del control es el diafragma que se puede romper por el movimiento que realiza al estar regulando la presión. También pueden presentarse fugas de gas en la unión de las dos partes del control, la superior y la inferior. Es recomendable cuando suceda una falla, comprar otro regulador y no tratar de repararlo ya que el costo del regulador es bajo y el riesgo de la fuga de gas puede ser muy alto.

Acciones básicas de Control.- A continuación se estudiarán las diferentes acciones de control y se verán algunas aplicaciones prácticas para las mismas. Es muy importante entender todas las acciones de control para después poder seleccionar la más adecuada a una determinada aplicación.

1.- Acción de Control de dos posiciones o de Si-No. En este tipo de control, la salida sólo tiene dos posiciones fijas que pueden ser por ejemplo abierto-cerrado, conectado-desconectado, prendido-apagado etc. Este control es muy sencillo y muy económico por lo que tiene una gran cantidad de aplicaciones, a nivel industrial y doméstico.

En la fig. 5-3-a se representa un diagrama de bloques del control de dos posiciones. Dependiendo del valor del error "e", la salida "m" puede tener dos valores, M_1 o M_2 . Matemáticamente la acción de control se puede representar en la siguiente forma:

$$m(t) = M_1 \quad \text{para } e(t) > 0$$

$$m(t) = M_2 \quad \text{para } e(t) < 0$$

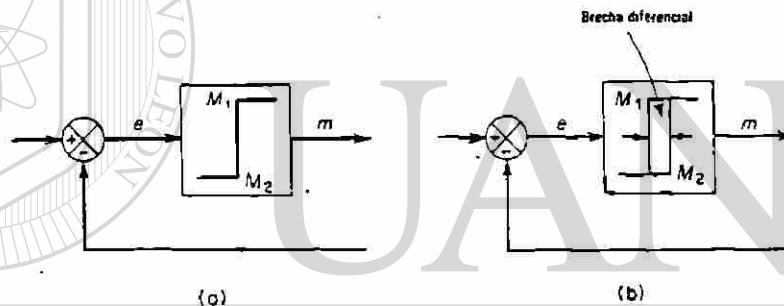


Fig. 5-3. (a) Diagrama de bloques de un control Si-No.
(b) Diagrama de bloques de un control Si-No con brecha diferencial.

Los controles Si-No generalmente son eléctricos, neumáticos o una combinación de ambos. La mayoría de los controles de dos posiciones tienen una brecha diferencial que protege al sistema de una acción excesivamente frecuente de energizar-desenergizar o abrir-cerrar. Para entender mejor lo que es la brecha diferencial, se analizará en seguida un sistema de control de nivel de líquido que se representa en la fig. 5-4.

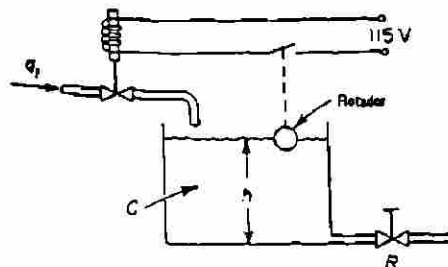


Fig. 5-4.- Sistema de Control de Nivel de Líquido Si-No.

En el sistema de control de la fig. 5-4 se desea mantener el nivel del líquido en el recipiente a una altura "h". En un principio que el tanque está vacío, el flotador está abajo y este cierra un interruptor eléctrico para energizar la bobina de la válvula de control de llenado con lo cual la válvula se abre y se empieza a llenar el recipiente.

Conforme se vaya llenando el tanque, el flotador sube y llega un momento en que abre el interruptor eléctrico, con lo cual la bobina de la válvula de llenado se desenergiza y la válvula se cierra para no derramar líquido fuera del tanque.

Al utilizarse el agua del recipiente, el nivel de líquido baja, el flotador cierra de nuevo el interruptor y la válvula de llenado se abre para alcanzar la altura "h" de nivel de líquido.

En éste caso la brecha diferencial se ajusta sobre la varilla vertical del flotador, y consiste en dos rondanas que se pueden ajustar con tuerca y tornillo a la varilla vertical a una distancia que puede ser de 15 o 20 cm. Supongamos que la altura "h" sea de dos metros, entonces las rondanas se ajustan de tal manera que una abra el interruptor cuando el nivel "h" alcance los 2 metros, y la otra para que cierre el interruptor a un nivel de 1.80 metros. Por lo tanto la brecha diferencial sería en este caso de 20 cm.

Si no hubiera brecha diferencial, el flotador abre el interruptor a los 2 metros, pero inmediatamente que baje el flotador cualquier distancia por mínima que sea, el interruptor cierra, el nivel vuelve a subir, el flotador abre de nuevo y esta secuencia se puede repetir muchas veces lo que resulta dañino para el sistema.

El ejemplo que se analizó es de un sistema de control de nivel de líquido, pero lógicamente la acción de control Si-No y su brecha diferencial se puede aplicar para controlar sistemas de presión, temperatura y otros más.

2.- Acción de Control Proporcional.- Para este tipo de control, la relación entre la salida del control $m(t)$ y la entrada que es la señal de error, se puede expresar matemáticamente con la siguiente ecuación:

$$m(t) = K_p e(t)$$

donde $m(t)$ es la salida del control, K_p es una constante de proporcionalidad y $e(t)$ es la señal de entrada o error. Transformando por Laplace la ecuación anterior obtenemos:

$$M(s) = K_p E(s) \text{ o la función de transferencia } M(s)/E(s) = K_p$$

En la fig. 5-5 se puede ver un diagrama de bloques de un control proporcional.

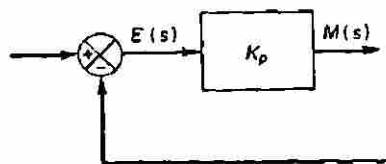


Fig. 5-5 Diagrama de bloques de un control proporcional.

Como se puede comprender basándonos en la función de transferencia del control proporcional, cualquier control de este tipo es esencialmente un amplificador en donde la salida es la entrada multiplicada por la ganancia que se representa por la constante K_p .

3.-Acción de Control Integral.- En el control Integral, la señal de salida es proporcional a la integral del error y se puede expresar por medio de la siguiente ecuación:

$$m(t) = K_i \int_0^t e(t) dt$$

donde $m(t)$ es la salida, K_i es una constante de proporcionalidad integral y $e(t)$ es la señal de error. La constante K_i al igual que la constante K_p son regulables. Transformando por Laplace la ecuación anterior obtenemos:

$$M(s) = \frac{K_i}{s} E(s) \quad \text{o lo que es igual} \quad \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{K_i}{s}$$

Es importante entender la diferencia entre un control integral y un proporcional. En el control integral, la salida es la integral del error durante un tiempo, lo que significa que el error aunque sea muy pequeño, se va acumulando con el tiempo y la salida $m(t)$ se incrementa considerablemente para tomar una acción de control y corregir al sistema. En un control proporcional, la salida es proporcional a la entrada, por lo tanto si el error es pequeño y constante, la salida también será pequeña y su valor permanece constante. Por lo anterior se recomienda aplicar la acción de control integral para sistemas con errores pequeños y cuya duración en tiempo es grande ya que si se aplica acción proporcional es posible que el control no detecte el error por pequeño o no alcance a tomar una acción para corregir.

En la fig. 5-6 se representa el diagrama de bloques de un control integral.

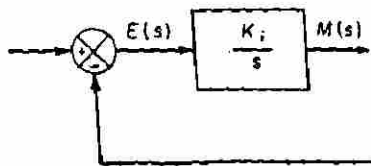


Fig. 5-6 Diagrama de bloques de un control Integral.

4.- Acción de Control Proporcional-Integral.- Es una acción de control combinada que mezcla en un sólo controlador las dos acciones. Matemáticamente esta acción de control se puede representar por medio de la siguiente ecuación:

$$m(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt$$

transformando por Laplace la ecuación anterior obtenemos:

$$M(s) = K_p E(s) + \frac{K_p}{T_i s} E(s)$$

considerando $E(s)$ como señal de entrada al controlador y $M(s)$ como salida, la función de transferencia del controlador P-I será:

$$\frac{M(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right)$$

En las ecuaciones anteriores, K_p se denomina constante de sensibilidad proporcional y T_i es una constante de tiempo integral. Como se verá más adelante en algunos ejemplos de controles electrónicos P-I, tanto la constante K_p como T_i se pueden ajustar o regular fácilmente.

En la figura 5-7 se representa el diagrama de bloques de un control proporcional-integral, además se representa la gráfica de la salida de dicho control cuando se le aplica como entrada una señal escalón unitario.

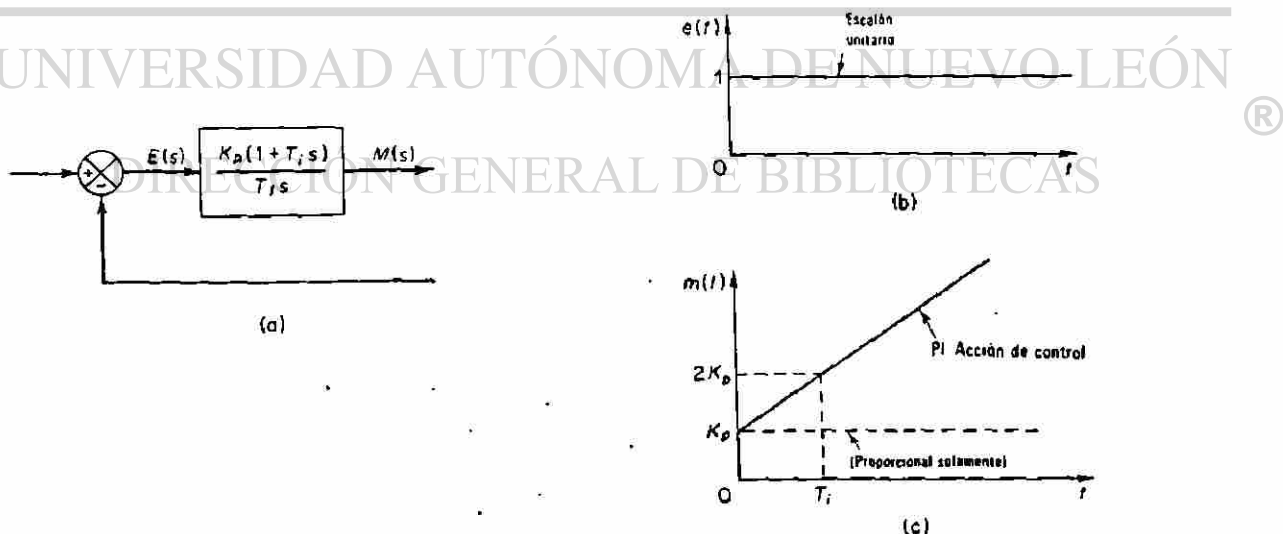


Fig. 5-7 a) Diagrama de bloques del control P-I
 b) Escalón unitario aplicado como entrada al control P-I
 c) Señal de salida del control P-I

5.- Acción de control Proporcional-Derivativa.-También es una acción de control combinada, la cual se recomienda para sistemas de control con errores grandes que sean constantes o errores cuya variación sea grande con respecto al tiempo. La acción de control P-D se puede representar matematicamente con la siguiente ecuación:

$$m(t) = K_p e(t) + K_p T_d \frac{de(t)}{dt}$$

transformando por Laplace la ecuación anterior obtenemos:

$$M(s) = K_p E(s) + K_p T_d s E(s)$$

considerando $M(s)$ como señal de salida del controlador y $E(s)$ como entrada, la función de transferencia del controlador P-D será:

$$\frac{M(s)}{E(s)} = K_p(1 + T_d s)$$

Al igual que en los controladores anteriores, la K_p es una constante de proporcionalidad y T_d una constante de tiempo derivativa. Ambas constantes son valores que se pueden regular facilmente.

En la fig. 5-8 se representa el diagrama de bloques de un control proporcional-derivativo. Además se representa la salida de dicho control cuando se aplica como entrada una señal rampa unitaria.

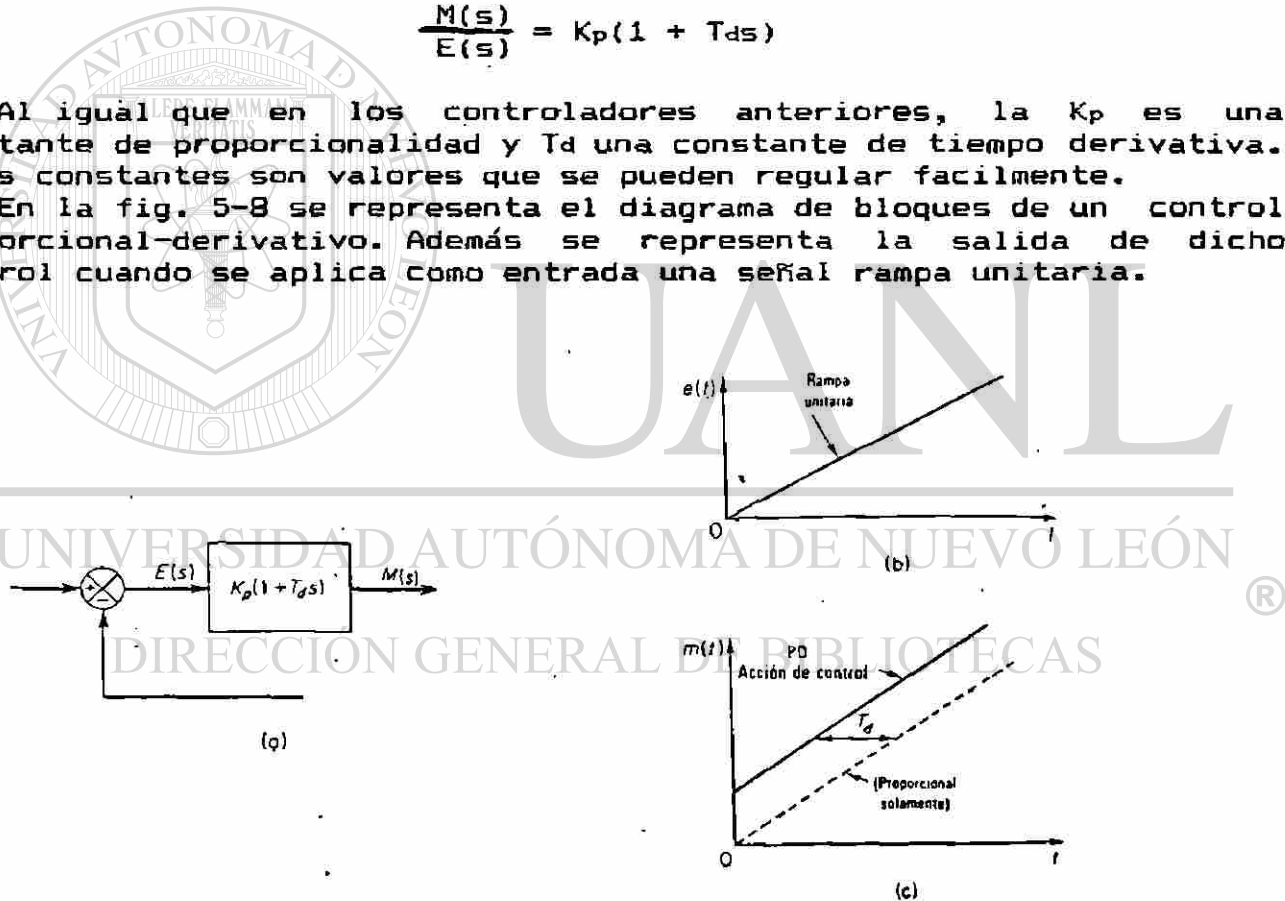


Fig. 5-8 a) Diagrama de bloques del control P-D
 b) Rampa unitaria aplicada como entrada al control P-D
 c) Señal de salida del control P-D

6.- Acción de Control Proporcional-Derivativa-Integral.- Es la acción de control más completa de todas y conjunta en un sólo equipo las ventajas de cada acción básica de control. Antes de ver la ecuación de este controlador es importante hacer notar que no se puede utilizar un control puramente derivativo en la práctica como el control integral o el proporcional. La razón de lo anterior es muy simple ya que el control derivativo simple no detecta errores cuyo valor sea constante debido a que la derivada de una constante es cero, por lo que no tomaría ninguna acción para corregir en éstos casos.

La ecuación que representa la operación de un control P-D-I es la siguiente:

$$m(t) = K_p e(t) + K_p T_d \frac{de(t)}{dt} + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt$$

transformando por Laplace la ecuación anterior tenemos:

$$M(s) = K_p E(s) + K_p T_d s E(s) + \frac{K_p}{T_i s} E(s)$$

donde K_p , T_d y T_i son constantes de proporcionalidad, de tiempo derivativo y de tiempo integral respectivamente y cuyo valor es ajustable.

Tomando como señal de entrada $E(s)$ y como salida $M(s)$, la función de transferencia del control P-D-I es:

$$\frac{M(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + T_d s + \frac{1}{T_i s} \right)$$

En la fig. 5-9 se representa el diagrama de bloques de un control P-D-I. Además se representa la salida del control P-D-I cuando se le aplica una entrada rampa unitaria.

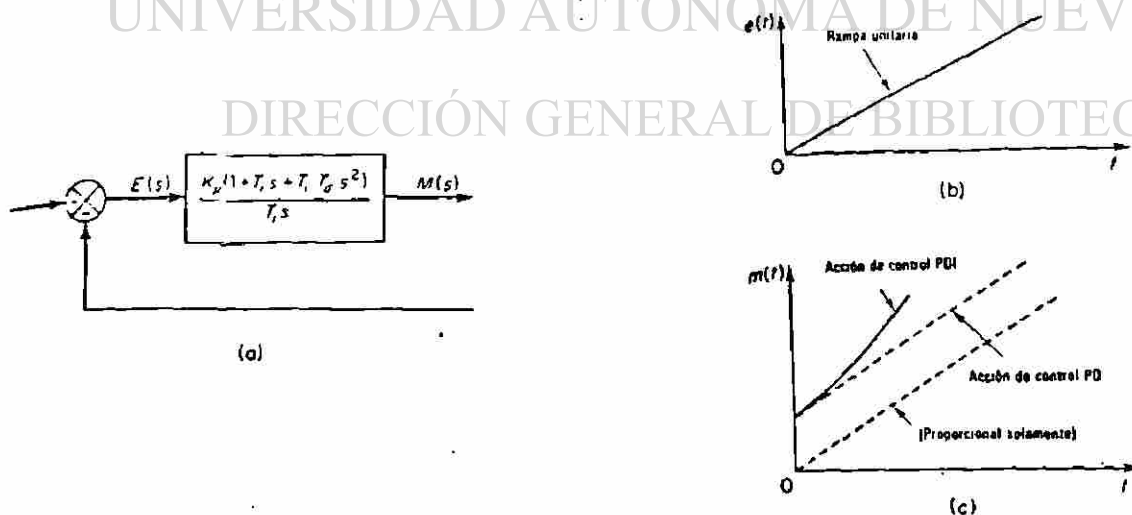


Fig. 5-9 a) Diagrama de bloques del control P-D-I
 b) Rampa unitaria aplicada como entrada al control P-D-I
 c) Señal de salida aplicada al control P-D-I

5-3.- Controles Electrónicos tipo P, P-D, P-I, y P-I-D.

A continuación se estudiará la forma de construir los diferentes tipos de controles utilizando componentes electrónicos como amplificadores, resistencias y condensadores.

Control Electrónico Proporcional.

En la fig. 5-10 se representa el diagrama de un control electrónico P. La letra K representa la ganancia de un amplificador electrónico. En la retroalimentación se conecta un potenciómetro con las resistencias R₁ y R₂. El voltaje e_i es la entrada, e_o es el voltaje de salida y e_f es voltaje de retroalimentación.

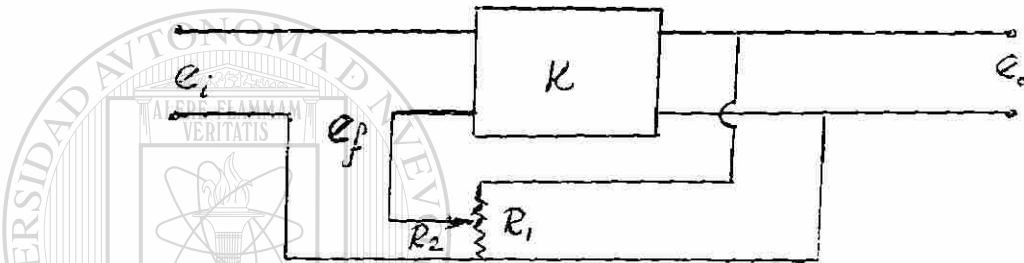


Fig. 5-10. Diagrama de dos líneas del control proporcional.

Basándonos en el diagrama de dos líneas anterior, podemos trazar el diagrama de bloques equivalente de la fig. 5-11.

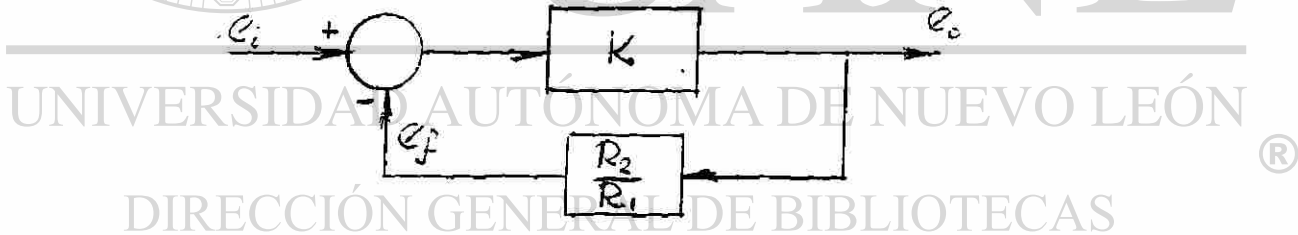


Fig. 5-11. Diagrama de bloques del control proporcional.

Aplicando las reglas del álgebra de bloques al diagrama de la fig. 5-11, podemos plantear las siguientes ecuaciones con el objeto de llegar a determinar la función de transferencia del control P.

$$e_o = K(e_i - e_f) \quad (5-1)$$

$$e_f = e_o \frac{R_2}{R_1} \quad (5-2)$$

substituyendo e_f de la ecuación 5-2 en la 5-1 tenemos:

$$e_o = K(e_i - e_o \frac{R_2}{R_1}) \quad (5-3)$$

transformando por Laplace la ecuación 5-3 obtenemos:

$$E_o(s) = K[E_i(s) - E_o(s) \frac{R_2}{R_1}]$$

$$E_o(s) + KE_o(s) \frac{R_2}{R_1} = KE_i(s)$$

$$E_o(s)[1 + K \frac{R_2}{R_1}] = KE_i(s)$$

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{K}{1 + K \frac{R_2}{R_1}}$$

Si el término $K \frac{R_2}{R_1}$ del denominador es mucho mayor que 1, se puede

eliminar el uno sin incurrir en mucho error, es decir matemáticamente si

$K \frac{R_2}{R_1} \gg 1$ entonces

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{K}{K \frac{R_2}{R_1}} = \frac{R_1}{R_2}$$

Si la relación de resistencias R_1/R_2 se hace igual a la constante K_p (constante de proporcionalidad), se ve claramente que el control desarrolla una acción proporcional.

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = K_p \quad \text{o bien} \quad E_o(s) = K_p E_i(s)$$

Como se puede ver, la ganancia K_p es fácilmente ajustable por el movimiento de un potenciómetro.

Control Electrónico de Acción Proporcional-Derivativa.

En la fig. 5-12 se representa el diagrama de un control electrónico PD. La letra K representa la ganancia de un amplificador electrónico. En el circuito de retroalimentación tenemos ahora un circuito RC. Los voltajes e_o , e_f y e_i son respectivamente voltajes de salida, retroalimentación y entrada.

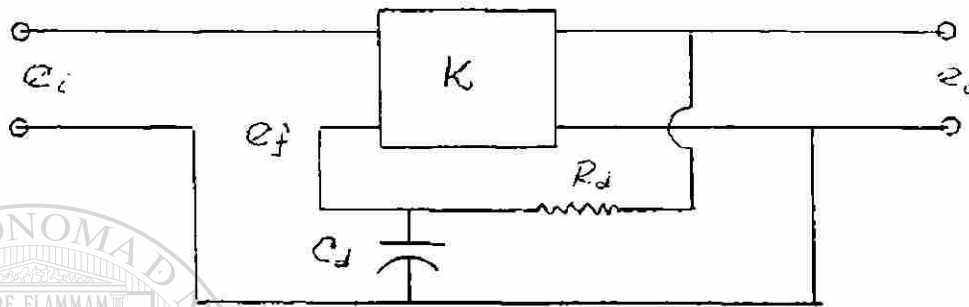


Fig. 5-12. Diagrama de dos líneas del control PD

Basándonos en el diagrama de dos líneas anterior, podemos trazar el diagrama de bloques equivalente de la fig. 5-13.

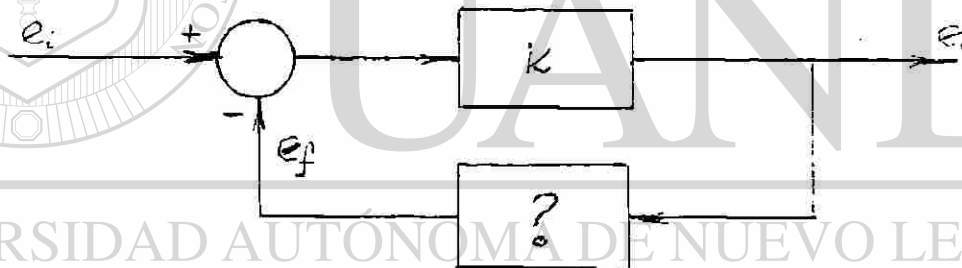


Fig. 5-13. Diagrama de bloques del control PD.

Antes de calcular la función de transferencia de todo el control, primero obtendremos la función de transferencia del circuito de retroalimentación RC. En la figura 5-14 se representa el circuito RC de la retroalimentación, del cual podemos plantear las siguientes ecuaciones:

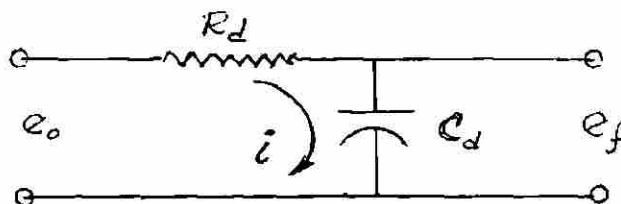


Fig. 5-14. Circuito RC de Retroalimentación.

$$e_o = iR_d + \frac{1}{C_d} \int i dt \quad (5-4)$$

$$e_f = \frac{1}{C_d} \int i dt \quad (5-5)$$

Transformando por Laplace las ecuaciones 5-4 y 5-5 tenemos:

$$E_o(s) = I(s)R_d + \frac{1}{C_d s} I(s) \quad (5-6)$$

$$E_f(s) = \frac{1}{C_d s} I(s) \quad (5-7)$$

De las ecuaciones anteriores se puede llegar a calcular la función de transferencia del circuito RC de retroalimentación.

$$\frac{E_f(s)}{E_o(s)} = \frac{\frac{1}{C_d s}}{R_d + \frac{1}{C_d s}} = \frac{1}{R_d C_d s + 1} \quad (5-8)$$

Por otro lado y basándonos en el diagrama de bloques de la fig. 5-13, podemos plantear la siguiente ecuación:

$$[E_i(s) - E_f(s)]K = E_o(s) \quad (5-9)$$

substituyendo el valor de $E_f(s)$ de la Ec. 5-8 en la ecuación anterior 5-9 tenemos:

$$[E_i(s) - \frac{E_o(s)}{R_d C_d s + 1}]K = E_o(s)$$

$$K E_i(s) - \frac{K E_o(s)}{R_d C_d s + 1} = E_o(s)$$

$$K E_i(s) = E_o(s) \left[\frac{K}{R_d C_d s + 1} + 1 \right]$$

de nuevo si $\frac{K}{R_d C_d s + 1}$ es mucho mayor que la unidad, el uno se puede despreciar sin incurrir en mucho error, con lo cual podemos llegar a la siguiente función de transferencia:

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{K}{\frac{K}{R_d C_d s + 1}} = R_d C_d s + 1 = T_d s + 1$$

en donde T_d es igual al producto $R_d C_d$ y se denomina constante de tiempo derivativa.

Control Electrónico de Acción Proporcional-Integral.

En la fig. 5-15 se representa el diagrama de un control electrónico PI al igual que en los otros controles, K representa la ganancia de un amplificador electrónico, e_i , e_f y e_o son voltajes de entrada, retroalimentación y salida respectivamente. R_i y C_i son los componentes del circuito de retroalimentación.

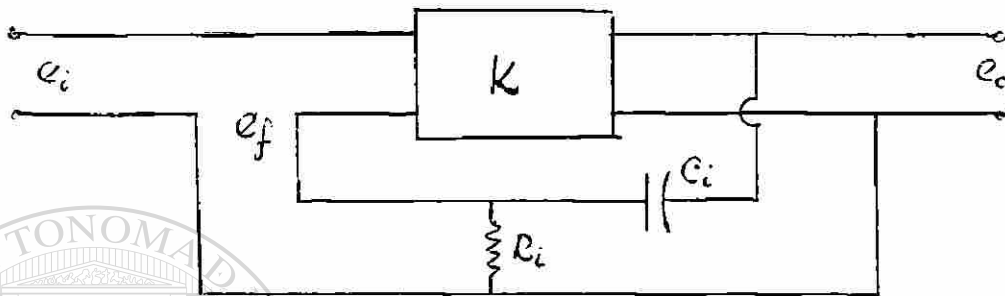


Fig. 5-15 Diagrama de dos líneas del control PI

Basándonos en el diagrama de dos líneas anterior, podemos llegar a trazar el diagrama de bloques equivalente de la fig. 5-16.

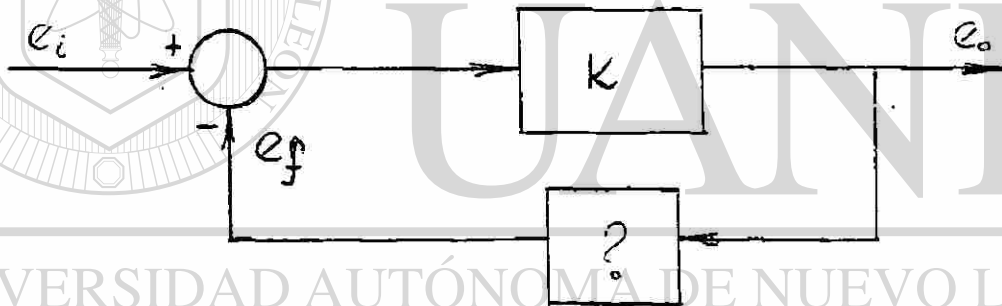


Fig. 5-16. Diagrama de bloques del control PI

Se calculará primero la función de transferencia del circuito de retroalimentación. En la fig. 5-17 se representa el diagrama del circuito RC de retroalimentación, a partir del cual plantearemos algunas ecuaciones.

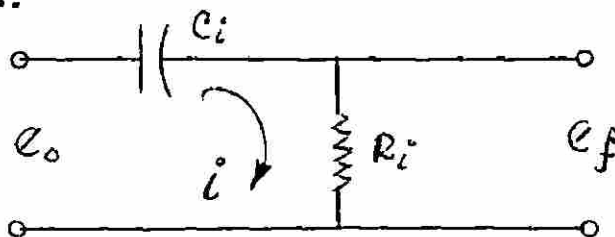


Fig. 5-17. Circuito RC de Retroalimentación

$$e_o = \frac{1}{C_i} \int i dt + iR_i \quad (5-10)$$

$$e_f = iR_i \quad (5-11)$$

Transformando por Laplace las ecuaciones (5-10) y (5-11) tenemos:

$$E_o(s) = \frac{1}{C_i s} I(s) + I(s)R_i \quad (5-12)$$

$$E_f(s) = I(s)R_i \quad (5-13)$$

$$\frac{E_f(s)}{E_o(s)} = \frac{I(s)R_i}{\frac{1}{C_i s} I(s) + I(s)R_i} = \frac{R_i}{\frac{1}{C_i s} + R_i} = \frac{R_i}{\frac{1 + R_i C_i s}{C_i s}}$$

$$\frac{E_f(s)}{E_o(s)} = \frac{R_i C_i s}{R_i C_i s + 1} \quad (5-14)$$

Por otro lado y basándonos en el diagrama de bloques de la fig. 5-16, podemos plantear la siguiente ecuación:

$$[E_i(s) - E_f(s)] K = E_o(s) \quad (5-15)$$

substituyendo $E_f(s)$ de la ecuación 5-14 en la 5-15 tenemos:

$$\left[E_i(s) - \frac{R_i C_i s E_o(s)}{R_i C_i s + 1} \right] K = E_o(s)$$

$$K E_i(s) - \frac{K R_i C_i s E_o(s)}{R_i C_i s + 1} = E_o(s)$$

$$E_o(s) + \frac{K R_i C_i s E_o(s)}{R_i C_i s + 1} = K E_i(s)$$

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{K}{1 + \frac{K R_i C_i s}{R_i C_i s + 1}}$$

si el término $K R_i C_i s / (R_i C_i s + 1)$ es mucho mayor que uno, la unidad del denominador se puede despreciar sin incurrir en mucho error y la función de transferencia se simplifica como sigue:

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{K}{\frac{K R_i C_i s}{R_i C_i s + 1}} = \frac{K R_i C_i s + K}{K R_i C_i s} = \frac{R_i C_i s + 1}{R_i C_i s} = 1 + \frac{1}{R_i C_i s}$$

finalmente si el producto de $R_i C_i$ lo hacemos igual a T_i (constante de tiempo de integración), la función de transferencia es:

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = 1 + \frac{1}{T_i s}$$

Control Electrónico de Acción Proporcional-Derivativo-Integral.

En la fig. 5-18 se representa el diagrama de dos líneas de un control electrónico PID. La K representa la ganancia de un amplificador, e_i , e_r y e_o son voltajes de entrada, de retroalimentación y de salida respectivamente. En el circuito de retroalimentación se puede ver muy claro las tres partes, proporcional (el potenciómetro), derivativa (R_d y C_d) e integral (R_i y C_i).

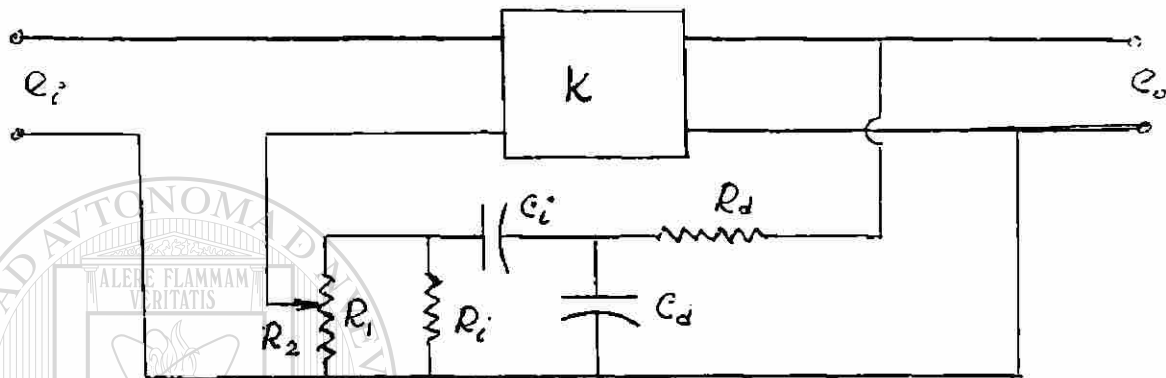


Fig. 5-18. Diagrama de dos líneas de un control PID

Del diagrama de dos líneas anterior se puede trazar el diagrama de bloques de la fig. 5-19. Antes de calcular la función de transferencia del control PID completo, se debe calcular la función de transferencia del circuito de retroalimentación.

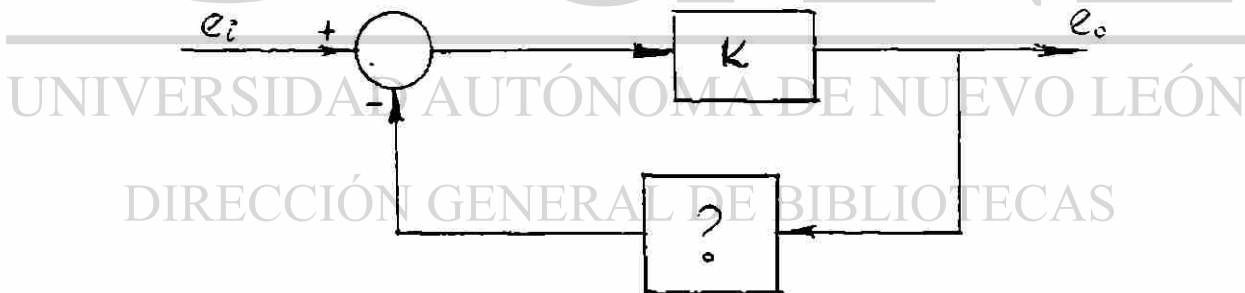


Fig. 5-19 Diagrama de Bloques del control PID.

En la fig. 5-20 se representa el circuito de retroalimentación del control PID.

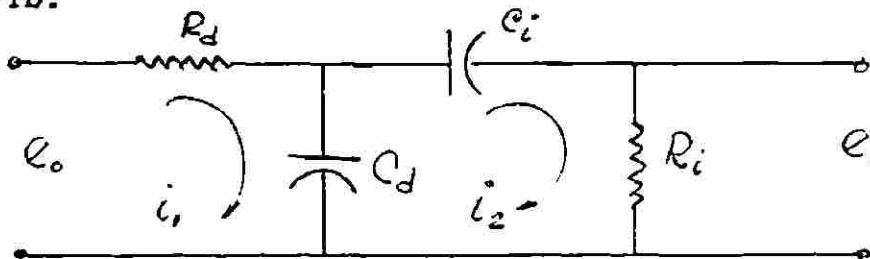


Fig. 5-20. Circuito de retroalimentación del control PID.

Con el objeto de no complicar demasiado el circuito de retroalimentación del control PID (fig. 5-20) no se incluye el potenciómetro con las resistencias R_1 y R_2 . Un poco mas adelante se tomará en cuenta dicho potenciómetro.

Del circuito de la fig. 5-20 se pueden plantear las siguientes ecuaciones:

$$R_d i_1 + \frac{1}{C_d} \int [i_1 - i_2] dt = e_o \quad (5-16)$$

$$\frac{1}{C_d} \int [i_2 - i_1] dt + \frac{1}{C_i} \int i_2 dt + i_2 R_i = 0 \quad (5-17)$$

$$i_2 R_i = e_i \quad (5-18)$$

Transformando por Laplace las tres ecuaciones anteriores tenemos:

$$R_d I_1(s) + \frac{1}{C_d s} [I_1(s) - I_2(s)] = E_o(s) \quad (5-19)$$

$$\frac{1}{C_d s} [I_2(s) - I_1(s)] + \frac{1}{C_i s} I_2(s) + I_2(s) R_i = 0 \quad (5-20)$$

$$I_2(s) R_i = E_i(s) \quad (5-21)$$

En seguida se desarrollará la ecuación 5-20 para despejar $I_1(s)$

$$\frac{1}{C_d s} I_2(s) - \frac{1}{C_d s} I_1(s) + \frac{1}{C_i s} I_2(s) + I_2(s) R_i = 0$$

$$- \frac{1}{C_d s} I_1(s) = - I_2(s) \left[\frac{1}{C_d s} + \frac{1}{C_i s} + R_i \right]$$

$$I_1(s) = I_2(s) C_d s \left[\frac{1}{C_d s} + \frac{1}{C_i s} + R_i \right]$$

$$I_1(s) = I_2(s) C_d s \left[\frac{C_i + C_d + R_i C_i C_d s}{C_i C_d s} \right]$$

$$I_1(s) = I_2(s) \left[\frac{C_i + C_d + R_i C_i C_d s}{C_i} \right]$$

Substituyendo $I_1(s)$ en la ecuación 5-19 tenemos:

$$R_d \left[\frac{I_2(s)}{C_i} (C_i + C_d + R_i C_i C_d s) \right] + \frac{1}{C_d s} \left[\frac{I_2(s)}{C_i} (C_i + C_d + R_i C_i C_d s) \right] - \frac{1}{C_d s} I_2(s) = E_o(s)$$

$$I_2(s) \left[\frac{R_d}{C_i} (C_i + C_d + R_i C_i C_d s) + \frac{1}{C_i C_d s} (C_i + C_d + R_i C_i C_d s) - \frac{1}{C_d s} \right] = E_o(s)$$

$$I_2(s) \left[\frac{R_d C_d s (C_i + C_d + R_i C_i C_d s) + (C_i + C_d + R_i C_i C_d s) - C_i}{C_i C_d s} \right] = E_o(s)$$

$$I_2(s) \left[\frac{R_d C_d C_i s + R_d C_d^2 s^2 + R_d R_i C_d^2 s^2 + C_i + C_d + R_i C_i C_d s - C_i}{C_i C_d s} \right] = E_o(s)$$

$$I_2(s) \left[\frac{R_d C_i s + R_d C_d s + R_d R_i C_i C_d s^2 + 1 + R_i C_i s}{C_i s} \right] = E_o(s)$$

$$I_2(s) \left[\frac{R_d R_i C_d C_i s^2 + (R_d C_i + R_d C_d + R_i C_i) s + 1}{C_i s} \right] = E_o(s)$$

$$I_2(s) = \frac{E_o(s) C_i s}{R_d R_i C_d C_i s^2 + (R_d C_i + R_d C_d + R_i C_i) s + 1}$$

Substituyendo $I_2(s)$ en la ecuación 5-21 tenemos:

$$\frac{E_o(s) C_i R_i}{R_d R_i C_d C_i s^2 + (R_d C_i + R_d C_d + R_i C_i) s + 1} = E_1(s) \quad (5-22)$$

De donde podemos obtener la función de transferencia $E_1(s)/E_o(s)$

$$\frac{E_1(s)}{E_o(s)} = \frac{R_i C_i s}{R_d R_i C_d C_i s^2 + (R_d C_i + R_d C_d + R_i C_i) s + 1} \quad (5-23)$$

Del diagrama de bloques del control PID, fig. 5-19, podemos plantear las siguientes ecuaciones:

$$[e_i - e_f] K = e_o \quad (5-24)$$

$$e_f = e_i \left[\frac{R_2}{R_1} \right] \quad (5-25)$$

Transformando por Laplace las dos ecuaciones anteriores:

$$[E_i(s) - E_f(s)] K = E_o(s) \quad (5-26)$$

$$E_f(s) = E_i(s) \left[\frac{R_2}{R_1} \right] \quad (5-27)$$

Substituyendo $E_f(s)$ de la ecuación 5-27 en la ecuación 5-26:

$$E_o(s) = \frac{R_2 R_i C_i s E_o(s)}{R_1 [R_d R_i C_d C_i s^2 + (R_d C_i + R_d C_d + R_i C_i) s + 1]} \quad (5-28)$$

Substituyendo $E_f(s)$ en la ecuación 5-26 tenemos:

$$K E_i(s) - \frac{K R_2 R_i C_i s E_o(s)}{R_1 [R_d R_i C_d C_i s^2 + (R_d C_i + R_d C_d + R_i C_i) s + 1]} = E_o(s)$$

$$K E_i(s) = E_o(s) \left\{ 1 + \frac{K R_2 R_i C_i s}{R_1 [R_d R_i C_d C_i s^2 + (R_d C_i + R_d C_d + R_i C_i) s + 1]} \right\}$$

$$K E_i(s) = E_o(s) \left\{ \frac{R_1 (R_d R_i C_d C_i s^2) + R_1 (R_d C_i + R_d C_d + R_i C_i) s + R_1 + K R_2 R_i C_i s}{R_1 R_d R_i C_d C_i s^2 + R_1 (R_d C_i + R_d C_d + R_i C_i) s + R_1} \right\}$$

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{KR_1 [R_d R_i C_d C_i s^2 + (R_d C_i + R_d C_d + R_i C_i) s + 1]}{KR_i C_i R_z s + R_1 [R_d R_i C_d C_i s^2 + (R_d C_i + R_d C_d + R_i C_i) s + 1]}$$

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{K}{\frac{KR_z R_i C_i s}{R_1 [R_d R_i C_d C_i s^2 + (R_d C_i + R_d C_d + R_i C_i) s + 1]} + 1}$$

Suponiendo que la fracción que está en el denominador es mucho mayor que uno, la unidad del denominador se puede despreciar sin incurrir en mucho error. Tomando en cuenta lo anterior y haciendo los cambios adecuados en la fracción, la función de transferencia se nos transforma de la siguiente forma:

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{R_1 [R_d R_i C_d C_i s^2 + (R_d C_i + R_d C_d + R_i C_i) s + 1]}{R_i C_i R_z s}$$

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{R_1}{R_z} \left[\frac{R_d R_i C_d C_i s^2 + (R_d C_i + R_d C_d + R_i C_i) s + 1}{R_i C_i s} \right]$$

Si $K_p = R_1/R_z$ y además desarrollando la fracción para luego simplificar, tenemos:

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = K_p \left[\frac{R_d R_i C_d C_i s^2}{R_i C_i s} + \frac{R_d C_i s}{R_i C_i s} + \frac{R_d C_d}{R_i C_i s} + \frac{R_i C_i s}{R_i C_i s} + \frac{1}{R_i C_i s} \right]$$

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = K_p \left[R_d C_d s + \frac{R_d}{R_i} + \frac{R_d C_d}{R_i C_i} + 1 + \frac{1}{R_i C_i s} \right]$$

Si $T_d = R_d C_d$ y $T_i = R_i C_i$ en la ecuación anterior:

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = K_p \left[T_d s + \left(\frac{R_d}{R_i} + \frac{T_d}{T_i} + 1 \right) + \frac{1}{T_i s} \right]$$

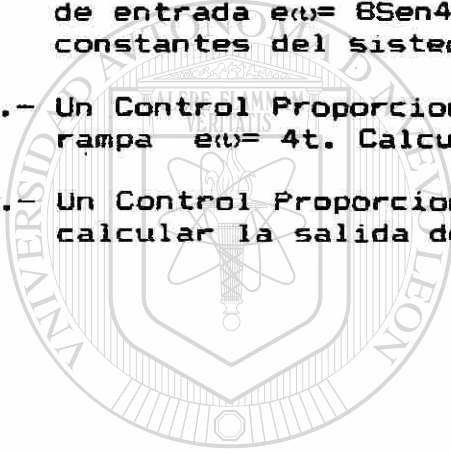
Haciendo $\alpha = \left(\frac{R_d}{R_i} + \frac{T_d}{T_i} + 1 \right)$ en la ecuación anterior:

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = K_p \left[T_d s + \alpha + \frac{1}{T_i s} \right] = K_p \alpha \left[\frac{T_d s}{\alpha} + 1 + \frac{1}{\alpha T_i s} \right]$$

Finalmente $\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = K_p \alpha \left[1 + \frac{T_d s}{\alpha} + \frac{1}{\alpha T_i s} \right]$ en donde se puede ver perfectamente la parte proporcional, derivativa e integral.

PROBLEMAS PROPUESTOS

- 1.- Un Control Proporcional-Integral tiene una señal de entrada senoidal $e(t) = 4\text{Sen } 8t$. Calcular la salida del controlador, si las constantes del mismo son $K_p=5$ y $T_i=2$.
- 2.- Un Control Proporcional-Derivativo-Integral tiene una señal de entrada $e(t) = te^{-3t}$. Calcular la salida del control si las constantes del sistema son $K_p=3$, $T_d=5$ y $T_i=2$.
- 3.- Un Control Proporcional-Derivativo-Integral (PDI) tiene una señal de entrada $e(t) = 8\text{Sen}4t$. Cual es la salida $m(t)$ del control si las constantes del sistema son $K_p=2$, $T_d=6$ y $T_i=10$.
- 4.- Un Control Proporcional-derivativo (PD) tiene una señal de entrada rampa $e(t) = 4t$. Calcular la salida del control si $K_p=5$ y $T_d=8$.
- 5.- Un Control Proporcional-Integral tiene una entrada $e(t) = 3 \text{Cos}5t$. calcular la salida del controlador si $K_p=8$ y $T_i=2$.



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

CAPITULO VI

RESPUESTA TRANSITORIA

6-1.- Introducción.

La respuesta transitoria de un sistema de control es la salida temporal que se obtiene como resultado de una señal de entrada aplicada. La respuesta transitoria o temporal de un sistema de control consiste en dos partes: la respuesta transitoria y la estacionaria.

La respuesta transitoria es la que se presenta desde que el sistema inicia su operación hasta que se logra alcanzar un estado final generalmente estable.

La respuesta estacionaria es la salida que se obtiene ya cuando el sistema de control tiene mucho tiempo operando, o sea cuando el tiempo tiende a infinito.

La respuesta temporal y estacionaria se presenta no sólo en los sistemas de control, sino en casi todos los sistemas, sean eléctricos, electrónicos, mecánicos, etc. Por ejemplo en un motor eléctrico hay una salida transitoria desde que se energiza hasta que alcanza su velocidad nominal, posteriormente se presenta una respuesta estacionaria cuando ya el motor se estabiliza en sus condiciones de funcionamiento normal. Otro ejemplo puede ser cualquier equipo electrónico que se energice, (TV, radio, etc) siempre presenta un periodo transitorio o de ajuste en donde la polarización de sus circuitos alcanzan sus valores nominales, despues de lo cual se obtiene la respuesta estacionaria. En algunos equipos el tiempo de la respuesta transitoria es muy pequeño pero éste siempre existe.

Para calcular la respuesta de un sistema se necesita conocer la función de transferencia y la señal de entrada al control. En la práctica algunas veces se conoce la señal de entrada y otras veces no. Cuando no se conoce la señal de entrada y con el fin de contar con un mismo patrón de comparación entre diferentes sistemas, se pueden aplicar algunas señales de entrada como prueba para determinar sus respuestas. A estas señales de entrada que se aplican como prueba, se les llama normalmente señales de prueba típicas.

Las señales típicas de entrada más comunmente utilizadas son las funciones escalón, funciones rampa, funciones aceleración, funciones impulso, función pulso y la función senoidal. Aplicando estas señales se pueden realizar análisis experimentales comparativos de diferentes sistemas de control con mucha facilidad, ya que todas estas señales se pueden generar muy facilmente en función del tiempo.

Para poder determinar cual o cuales señales de prueba se deben aplicar a un sistema de control, se deben conocer las condiciones reales de trabajo que tendrá el sistema. Si se espera trabajar con una entrada que aumente gradualmente con el tiempo, la rampa es una buena señal de prueba. Si la entrada es brusca y de muy poca duración, el impulso es la señal de entrada más adecuada. Si se aplica como prueba la señal típica más adecuada hay muchas posibilidades de que el control tenga un funcionamiento óptimo cuando se le aplique la entrada real de trabajo.

6-2.- Especificaciones en el Dominio del Tiempo.

El procedimiento general para analizar un sistema de control con retroalimentación se puede resumir en los cuatro puntos siguientes:

- 1.-Se determina el modelo matemático y la función de transferencia para cada uno de los componentes del sistema.
- 2.-Se selecciona una forma de representación del sistema, ya sea por medio de bloques o gráfica de flujo de señales.
- 3.-Se construye el diagrama de bloques o gráfica de señales para representar completamente todo el sistema de control.
- 4.-Se determinan las características del sistema.

Para determinar las características del sistema hay métodos en el dominio del tiempo y métodos en el dominio de la frecuencia. Cada uno de estos métodos tiene sus ventajas y sus desventajas ya que algunas características se pueden obtener más fácilmente por un método que por el otro. Por el momento se verá el análisis en el dominio del tiempo y posteriormente se estudiará en el capítulo nueve los métodos de respuesta a la frecuencia.

El objetivo básico en el diseño de un sistema de control es lograr que el mismo cumpla con ciertas características. Estas características son las especificaciones que describen el comportamiento del sistema en números. Las especificaciones más importantes en el dominio del tiempo son:

- a) La Estabilidad Absoluta
- b) La Estabilidad Relativa
- c) El Error Estacionario

La Estabilidad Absoluta es la característica más importante que debe tener un sistema de control. La Estabilidad Absoluta nos dice si un sistema es estable o inestable. Es tan importante que el sistema sea estable ya que de otra manera el sistema de control no se puede utilizar prácticamente. Un sistema de control lineal invariante en el tiempo, es estable si finalmente la salida retorna a su estado de equilibrio cuando el sistema es sometido a una perturbación. Un sistema de control lineal invariante en el tiempo es inestable si su salida continúa indefinidamente una oscilación, o si su salida no tiende a un valor definido cuando el sistema se somete a una perturbación. Más adelante se verán algunos métodos para determinar la estabilidad absoluta de un sistema de control.

Cuando un sistema de control es estable o tiene estabilidad absoluta, el siguiente paso importante es saber que tan cerca está el sistema de caer en la inestabilidad. Este es el concepto de la Estabilidad Relativa. La Estabilidad Relativa de un sistema de control se puede calcular aplicando el criterio de Routh que se verá en este capítulo un poco más adelante. Por otro lado también se puede conocer la Estabilidad Relativa de un sistema aplicando los conceptos de Margen de Ganancia y Margen de Fase que se estudiarán en el capítulo nueve, Métodos de Respuesta a la Frecuencia.

El Error Estacionario en un Sistema de Control se puede definir como la diferencia entre la salida real y la salida deseada cuando el tiempo tiende a infinito y el sistema se ha estabilizado. El Error en Estado Estacionario es un indicativo importante de la exactitud del sistema, logicamente es deseable tener un error estacionario lo más pequeño posible ya que ésto nos dará una mayor exactitud. Más adelante se estudiarán algunos métodos para calcular el Error Estacionario de los sistemas de control.

6-3.- Sistemas de Primer Orden.

En seguida se analizará la respuesta transitoria de un sistema de control de primer orden al cual se le aplicarán distintas señales de entrada. El sistema de primer orden será un circuito eléctrico R-C como se indica en la figura 6-1. En dicho circuito se considerará el voltaje e_i como señal de entrada y el voltaje e_o como señal de salida.

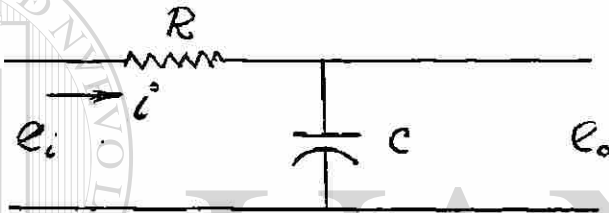


Fig. 6-1. Circuito Eléctrico R-C.

Para iniciar el análisis del circuito eléctrico, se plantearán algunas ecuaciones de voltajes, cuya transformada de Laplace nos llevará a la Función de Transferencia del circuito.

Sumando los voltajes en la malla de entrada tenemos:

$$e_i = Ri + \frac{1}{C} \int idt$$

El voltaje de salida e_o es el voltaje en el condensador

$$e_o = \frac{1}{C} \int idt$$

Transformando por Laplace las dos ecuaciones anteriores

$$E_i(s) = RI(s) + \frac{1}{Cs} I(s) \tag{6-1}$$

$$E_o(s) = \frac{1}{Cs} I(s) \tag{6-2}$$

Despejando $I(s)$ de la ecuación 6-1

$$I(s) = \frac{E_i(s)}{R + \frac{1}{Cs}}$$

Despejando $I(s)$ de la ecuación 6-2

$$I(s) = \frac{E_o(s)}{\frac{1}{Cs}}$$

Igualando las dos corrientes $I(s)$ ya despejadas tenemos:

$$\frac{E_i(s)}{R + \frac{1}{Cs}} = \frac{E_o(s)}{\frac{1}{Cs}}$$

$$\frac{E_i(s)}{\frac{RCs + 1}{Cs}} = \frac{E_o(s)}{\frac{1}{Cs}}$$

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{\frac{1}{Cs}}{\frac{RCs + 1}{Cs}} = \frac{1}{RCs + 1}$$

Haciendo el producto $RC = T = a$ la constante de tiempo del circuito RC, finalmente obtenemos la siguiente función de transferencia.

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{Ts + 1} = \frac{C(s)}{R(s)}$$

Donde $C(s)$ y $R(s)$ representan en forma más general la señal de salida y de entrada respectivamente.

En la figura 6-2 se representa la función de transferencia del sistema de primer orden en un diagrama de bloques.

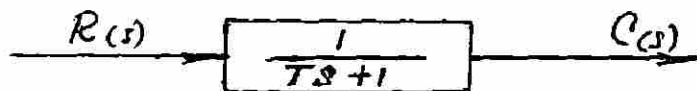


Fig. 6-2. Diagrama de Bloques de un Sistema de Primer Orden.

Una vez que ya tenemos la función de transferencia del sistema de primer orden, le aplicaremos tres señales de entrada, un escalón unitario, una rampa unitaria y un impulso unitario para calcular la respuesta transitoria en cada caso.

6-3-1.- Respuesta al Escalón Unitario de un Sistema de Primer Orden

Tomando como referencia la función de transferencia del sistema de primer orden formado por el circuito RC, la cual se obtuvo en la página anterior, tenemos:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts + 1}$$

Como la señal de entrada es un escalón unitario, entonces $r(t)=1$ y la transformada de Laplace del escalon unitario es $R(s) = 1/s$.

Substituyendo $R(s)$ en la función de transferencia y despejando la salida $C(s)$:

$$C(s) = \frac{1}{Ts + 1} [R(s)] = \frac{1}{Ts + 1} \left[\frac{1}{s} \right] = \frac{1}{s[Ts + 1]}$$

Con el fin de obtener la respuesta o salida del sistema en función del tiempo $c(t)$, en seguida se calculará la transformada inversa de Laplace de $C(s)$.

$$C(s) = \frac{a}{s} + \frac{b}{Ts+1}$$

$$a = \frac{1}{s(Ts+1)} \Big|_{s=0} = 1$$

$$b = \frac{1}{s(Ts+1)} (Ts+1) \Big|_{s=-\frac{1}{T}} = \frac{1}{-\frac{1}{T}} = -T$$

Substituyendo los valores de "a" y "b" en $C(s)$, tenemos:

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{T}{Ts+1}$$

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$C(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}$$

Dandole valores al tiempo t , podemos calcular la salida $C(t)$, por ejemplo si $t = 0, t = T, t = 2T, t = 3T$ etc.

Si $t=0$ $C(t) = 1 - e^{-0} = 1 - 1 = 0$

Si $t=T$ $C(t) = 1 - e^{-1} = 1 - 0.3678 = 0.6322$

Si $t=2T$ $C(t) = 1 - e^{-2} = 1 - 0.1353 = 0.8646$

Si $t=3T$ $C(t) = 1 - e^{-3} = 1 - 0.0497 = 0.9502$

Si $t=4T$ $C(t) = 1 - e^{-4} = 1 - 0.0183 = 0.9816$

En la figura 6-3 se puede ver la gráfica de la respuesta $C(t)$ en función del tiempo. La salida es cero en $t=0$ y va creciendo gradualmente conforme crece el tiempo hasta que después de un tiempo igual a cinco constantes de tiempo "T", la salida se estabiliza en $C(t) = 1$.

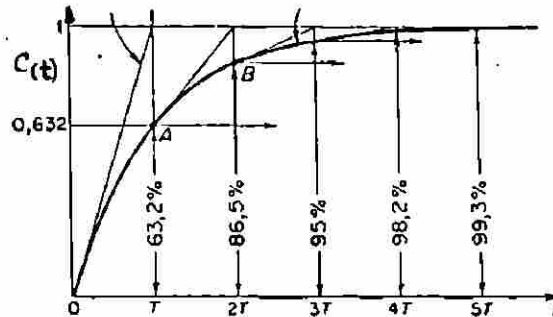


Fig. 6-3 Curva de respuesta al Escalón Unitario de un Sistema de Primer Orden.

6-3-2.- Respuesta a la Rampa Unitaria de un Sistema de Primer Orden.

Si la entrada es una Rampa Unitaria y debido a que la Transformada de Laplace de dicha señal es igual a $1/s^2$, la salida $C(s)$ es:

$$C(s) = \frac{1}{Ts+1} \left[\frac{1}{s^2} \right] = \frac{1}{s^2 [Ts+1]}$$

Descomponiendo la fracción total en fracciones parciales para poder calcular la transformada de Laplace inversa, tenemos:

$$C(s) = \frac{a}{s^2} + \frac{b}{s} + \frac{c}{Ts+1}$$

$$a = \frac{1}{s^2 [Ts+1]} \Big|_{s=0} s^2 = \frac{1}{1} = 1$$

$$b = \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{Ts+1} \right] \Big|_{s=0} = \frac{0 - 1(T)}{(Ts+1)^2} \Big|_{s=0} = -T$$

$$c = \frac{1}{s^2 (Ts+1)} (Ts+1) \Big|_{s=-\frac{1}{T}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{T}\right)^2} = T^2$$

Substituyendo los valores de a, b y c en $C(s)$ se tiene:

$$C(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T^2}{Ts+1}$$

Aplicando la Transformada Inversa de Laplace a $C(s)$ se obtiene $C(t)$

$$C(t) = t - T + Te^{-\frac{t}{T}}$$

Se calculará enseguida la señal de error en el sistema de primer orden cuando la entrada es una rampa unitaria. La señal de error es:

$$e(t) = r(t) - c(t)$$

$$e(t) = t - t + T - Te^{-\frac{t}{T}}$$

$$e(t) = T(1 - e^{-\frac{t}{T}})$$

La ecuación anterior nos indica que cuando el tiempo $t=0$, el error es igual a cero, pero conforme el tiempo aumenta y tiende a infinito, el error es igual a T , por lo tanto si $t \rightarrow \infty$ $e(\infty) = T$.

En la figura 6-4 se representa la respuesta a la rampa unitaria de un sistema de primer orden.

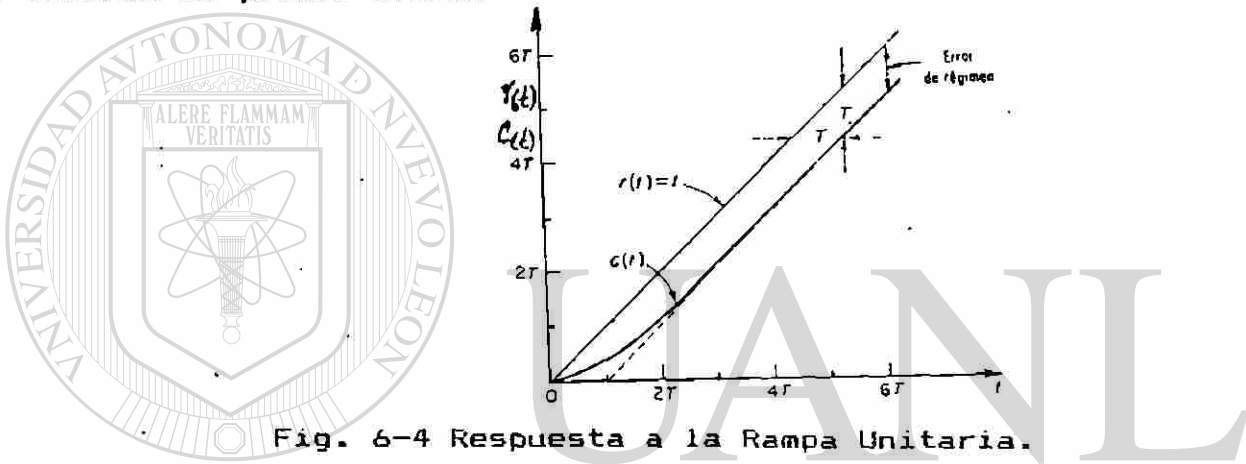


Fig. 6-4 Respuesta a la Rampa Unitaria.

6-3-3.- Respuesta al Impulso Unitario de un Sistema de Primer Orden.

Si se aplica un impulso unitario al sistema de primer orden de la figura 6-2, la respuesta se puede calcular en la siguiente forma:

La entrada es un impulso unitario, de tal forma que su transformada de Laplace es $R(s) = 1$, de donde

$$C(s) = \frac{1}{Ts + 1} R(s) = \frac{1}{Ts + 1}$$

Aplicando la Transformada inversa de Laplace a la ecuación anterior calculamos la respuesta del sistema en función del tiempo $c(t)$. Para obtener la transformada inversa primerose divide la fracción $C(s)$ entre T , como se indica:

$$C(s) = \frac{1/T}{Ts + 1} = \frac{1/T}{s + 1/T}$$

La transformada de Laplace inversa de $C(s)$ es:

$$c(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T}$$

En la figura 6-5 se puede ver la gráfica de la respuesta al impulso unitario de un sistema de primer orden.

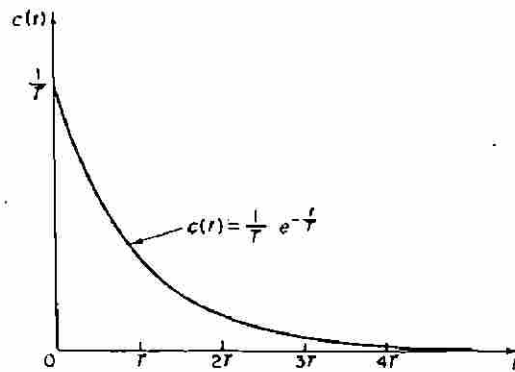


Fig. 6-5 Respuesta al Impulso Unitario

6-3-4.- Comparación de las Respuestas de un Sistema de Primer Orden al Escalón Unitario, la Rampa Unitaria y el Impulso Unitario.

Si se observan detenidamente las tres respuestas obtenidas se puede ver las siguientes relaciones. La respuesta a la Rampa Unitaria es:

$$c(t) = t - T + T e^{-\frac{t}{T}}$$

Al derivar la ecuación anterior se obtiene la respuesta al Escalón Unitario.

$$c(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}$$

La derivada de la ecuación anterior nos dá la respuesta al Impulso Unitario.

$$c(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}$$

La relación entre las tres respuestas se debe a que en forma general la derivada de la Rampa es el Escalón y la derivada del Escalón es el Impulso. Esta relación que existe entre las tres entradas se transfiere a las salidas debido a que el sistema que se está analizando es un sistema lineal invariante en el tiempo.

6-4.- Sistemas de Segundo Orden.

Como sistema de segundo orden se estudiará un Servomecanismo de posición en donde el objetivo principal es controlar la posición de una carga de acuerdo con una posición de referencia.

En la fig. 6-6 se representa el diagrama esquemático del Servomecanismo. Se pueden ver en dicho diagrama las cinco partes principales que componen al sistema: a)Dispositivo Medidor de Error, b)Amplificador c)Motor d)Tren de Engranajes y e)Carga.

El dispositivo medidor de error está formado por dos potenciómetros, uno llamado de referencia y en donde se ajusta la posición mecánica que se desea obtener moviendo una perilla y el otro potenciómetro que está acoplado mecánicamente a la carga. Al potenciómetro de referencia también se le puede llamar de entrada o Maestro y al otro potenciómetro se le llama de salida o esclavo, ya que sigue fielmente los movimientos del maestro.

Los dos potenciómetros producen voltajes llamados e_r y e_c que dependen de la posición mecánica de los mismos. Si el ángulo r es distinto al ángulo c , se produce un voltaje de error e , cuando los ángulos r y c son iguales, el voltaje de error e es igual a cero.

Para que el sistema inicie su funcionamiento es necesario que haya un cierto voltaje de error "e". Dicho voltaje se aplica como entrada a un amplificador cuya ganancia es K_1 . Se necesita un Amplificador Electrónico debido a que normalmente la señal de error "e" es muy pequeña y su voltaje no es suficiente para alimentar y mover un motor eléctrico.

Una vez amplificado el voltaje de error, el voltaje $K_1 e$ se aplica a un Motor Eléctrico de Corriente Directa, controlado por Inducido y éste a través de un Tren de Engranajes mueve finalmente la carga. Cuando la carga llegue a la posición deseada y ajustada previamente en el potenciómetro de entrada, la posición de los dos potenciómetros será idéntica, los voltajes e_r y e_c serán iguales y el sistema automáticamente se para.

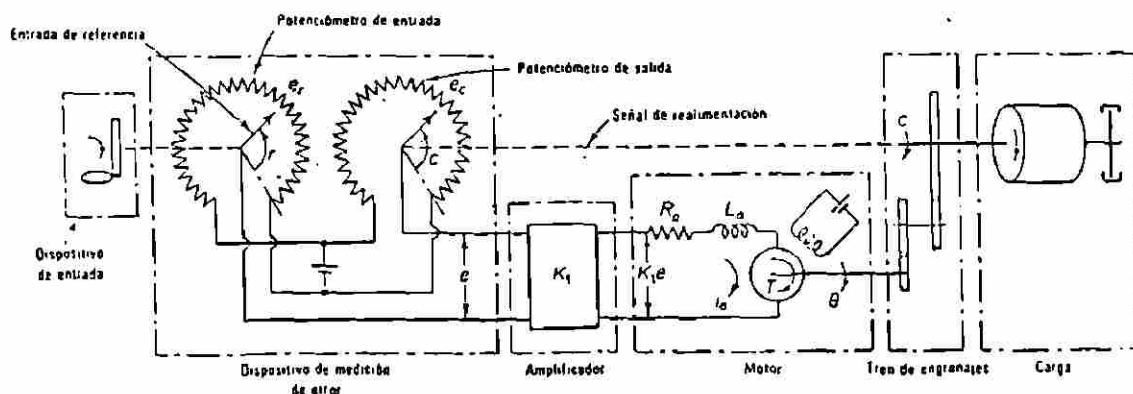


Fig. 6-6 Diagrama Esquemático de un Servomecanismo de Posición.

A continuación se plantearán algunas ecuaciones que representan matemáticamente la operación de cada uno de los componentes del sistema y cuya transformada de Laplace nos servirá de base para obtener la función de transferencia del Servomecanismo.

Si empezamos por el par de potenciómetros que forman el detector de error de posición angular, podemos ver que la diferencia de posiciones angulares multiplicada por una constante de proporcionalidad nos da como resultado el voltaje de error que se aplica al amplificador, matemáticamente se representa por la siguiente ecuación:

$$e(s) = K_0[r(s) - c(s)] \quad (6-3)$$

El voltaje de error $e(s)$ se aplica al amplificador electrónico y debido a que el amplificador tiene una ganancia K_1 , el voltaje de salida del amplificador es igual a $K_1e(s)$.

El voltaje $K_1e(s)$ se aplica a la armadura del motor de CD. Si se suman los voltajes de la armadura llegamos a la siguiente ecuación:

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + K_3 \frac{d\theta}{dt} = K_1 e \quad (6-4)$$

En la ecuación anterior (6-4) los dos primeros términos son los voltajes de la inductancia L_a y la resistencia R_a de la armadura. El tercer término es la Fuerza Contraelectromotriz generada por el motor que se maneja como carga porque su polaridad es contraria al voltaje de la fuente. La Fuerza Contraelectromotriz es proporcional a la velocidad $d\theta/dt$ y K_3 es una constante de proporcionalidad.

El motor eléctrico genera un par mecánico que depende del campo magnético y de la corriente de la armadura. Como el campo magnético es constante, el par mecánico dependerá sólo de la corriente de armadura.

$$T = K_2 i_a \quad (6-5)$$

donde T es el par mecánico, K_2 es una constante de proporcionalidad e i_a es la corriente de armadura.

El par mecánico que produce el motor tiene que vencer la inercia y la fricción tanto del tren de engranes como de la carga. La ecuación de pares es:

$$J_0 \frac{d^2\theta}{dt^2} + f_0 \frac{d\theta}{dt} = T = K_2 i_a \quad (6-6)$$

donde J_0 es la inercia del motor, carga y tren de engranes y f_0 es el coeficiente de fricción viscosa del motor, carga y tren de engranes con referencia al eje del motor.

El motor eléctrico está acoplado mecánicamente a un tren de engranes cuyo funcionamiento se puede representar matemáticamente en la ecuación (6-7).

$$c(s) = n \theta(s) \quad (6-7)$$

Para obtener la función de transferencia del Servomecanismo de posición se calculará a continuación la transformada de Laplace de las siguientes ecuaciones; 6-3, 6-4, 6-6 y 6-7.

Aplicando la Transformada de Laplace a las ecuaciones anteriores obtenemos las siguientes ecuaciones transformadas:

$$E(s) = K_0[R(s) - C(s)] \quad (6-8)$$

$$LsI_a(s) + R_aI_a(s) + K_3s\theta(s) = K_1E(s) \quad (6-9)$$

$$J_0s^2\theta(s) + f_0s\theta(s) = K_2I_a(s) \quad (6-10)$$

$$C(s) = n\theta(s) \quad (6-11)$$

Despejando $I_a(s)$ de la ecuación 6-10 tenemos:

$$I_a(s) = \frac{J_0s^2\theta(s) + f_0s\theta(s)}{K_2} = \frac{s\theta(s)[J_0s + f_0]}{K_2}$$

Substituyendo $I_a(s)$ en la ecuación 6-9 se obtiene la sig. ecuación

$$Ls\{s\theta(s)[J_0s + f_0]/K_2\} + R_a\{s\theta(s)[J_0s + f_0]/K_2\} + K_3s\theta(s) = K_1E(s)$$

Multiplicando todos los terminos de la ecuación anterior por K_2 para eliminar fracciones de la misma tenemos:

$$Ls^2\theta(s)[J_0s + f_0] + R_as\theta(s)[J_0s + f_0] + K_2K_3s\theta(s) = K_1K_2E(s)$$

Esta ecuación también se puede escribir en la siguiente forma:

$$[J_0s + f_0][Ls^2\theta(s) + R_as\theta(s)] + K_2K_3s\theta(s) = K_1K_2E(s)$$

$$\theta(s)s[Ls + R_a][J_0s + f_0] + K_2K_3s\theta(s) = K_1K_2E(s)$$

$$\theta(s)\{s[Ls + R_a][J_0s + f_0] + K_2K_3s\} = K_1K_2E(s)$$

$$\text{de donde } \frac{\theta(s)}{E(s)} = \frac{K_1K_2}{s(Ls + R_a)(J_0s + f_0) + K_2K_3s} \quad (6-12)$$

Tomando como base las ecuaciones 6-8, 6-11 y 6-12 se puede trazar el siguiente diagrama de bloques:

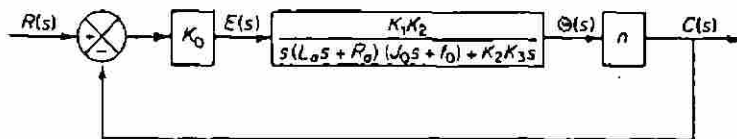


Fig. 6-7. Diagrama de Bloques del Servomecanismo de Posición

El diagrama de bloques de la figura 6-7 se puede simplificar uniendo en un solo bloque los tres bloques en serie que forman la función de transferencia directa $G(s)$, de tal forma que $G(s)$ es igual a:

$$G(s) = \frac{K_0 K_1 K_2 n}{s[(Ls + R_a)(J_0 s + f_0) + K_2 K_3]}$$

En virtud de que normalmente el valor de la inductancia del inducido L_a es pequeña, se puede despreciar su valor sin incurrir en mucho error, con lo cual se simplifica el valor de $G(s)$.

$$G(s) = \frac{K_0 K_1 K_2 n}{s[R_a(J_0 s + f_0) + K_2 K_3]}$$

$$G(s) = \frac{K_0 K_1 K_2 n}{R_a J_0 s^2 + R_a f_0 s + K_2 K_3} = \frac{K_0 K_1 K_2 n / R_a}{\frac{R_a J_0 s^2 + R_a f_0 s + K_2 K_3}{R_a}}$$

$$G(s) = \frac{K_0 K_1 K_2 n / R_a}{J_0 s^2 + (f_0 + \frac{K_2 K_3}{R_a}) s} = \frac{\frac{K_0 K_1 K_2 n}{R_a n^2}}{J_0 s^2 + (f_0 + \frac{K_2 K_3}{R_a}) s}$$

Finalmente la función de transferencia directa $G(s)$ nos da el siguiente resultado:

$$G(s) = \frac{K_0 K_1 K_2 / n R_a}{\frac{J_0}{n^2} s^2 + \frac{[f_0 + (K_2 K_3 / R_a)]}{n^2} s} = \frac{K}{J s^2 + F s}$$

donde $K = K_0 K_1 K_2 / n R_a$

$J = J_0 / n^2 =$ Momento de inercia referido al eje de salida

$F = [f_0 + (K_2 K_3 / R_a)] / n^2 =$ Coeficiente de fricción viscosa referido al eje de salida

En la fig. 6-8 se representa el diagrama de bloques simplificado del sistema de control de posición.

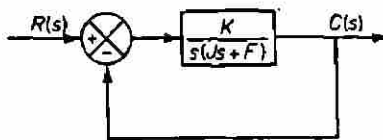


Fig. 6-8 Diagrama de Bloques Simplificado

6-5.- Respuesta a la señal escalón unitario de un sistema de segundo orden.

Tomando como referencia el diagrama de bloques simplificado de la figura 6-8, podemos obtener la función de transferencia del sistema.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K}{Js^2 + Fs}}{1 + \frac{K}{Js^2 + Fs}} = \frac{\frac{K}{Js^2 + Fs}}{\frac{Js^2 + Fs + K}{Js^2 + Fs}} = \frac{K}{Js^2 + Fs + K}$$

La función de transferencia anterior nos indica que el sistema de control es de segundo orden. Dividiendo la función de transferencia entre J, tanto el numerador como el denominador, tenemos:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K}{J}}{s^2 + \frac{F}{J}s + \frac{K}{J}}$$

Con el fin de factorizar el trinomio del denominador como el producto de dos binomios, aplicaremos la fórmula general de un sistema de segundo orden para calcular las raíces de la ecuación.

$$s = \frac{-F/J \pm \sqrt{\frac{F^2}{J^2} - 4\frac{K}{J}}}{2} = -\frac{F}{2J} \pm \sqrt{\left[\frac{F^2}{2J}\right] - \frac{K}{J}}$$

La función de transferencia del sistema de segundo orden se puede escribir en la siguiente forma:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K}{J}}{\left[s + \frac{F}{2J} + \sqrt{\left(\frac{F}{2J}\right)^2 - \frac{K}{J}}\right] \left[s + \frac{F}{2J} - \sqrt{\left(\frac{F}{2J}\right)^2 - \frac{K}{J}}\right]}$$

Analizando la ecuación anterior se puede ver que los polos del sistema son complejos si

$$\frac{K}{J} > \left[\frac{F}{2J}\right]^2 \quad \text{o bien} \quad F^2 < 4JK$$

mientras que los polos serán reales si

$$\frac{K}{J} \leq \left[\frac{F}{2J}\right]^2 \quad \text{o bien} \quad F^2 \geq 4JK$$

Se puede ver en la función de transferencia $C(s)/R(s)$ que los valores de K/J y $F/2J$ son muy importantes. Cuando se analiza la respuesta transitoria es conveniente para simplificar hacer las siguientes substituciones:

$$\frac{K}{J} = \omega_n^2 \quad \frac{F}{2J} = \zeta \omega_n = \sigma$$

donde ω_n = frecuencia natural no amortiguada

ζ = relación de amortiguamiento del sistema

σ = atenuación del sistema

Haciendo las substituciones anteriores en la función de transferencia $C(s)/R(s)$ tenemos:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{[s + \zeta\omega_n + \sqrt{(\zeta\omega_n)^2 - \omega_n^2}][s + \zeta\omega_n - \sqrt{(\zeta\omega_n)^2 - \omega_n^2}]}$$

Si se observan los términos que contiene el denominador de la fracción anterior, se puede ver que es el producto de dos binomios conjugados, lo cual se puede transformar en una diferencia de cuadrados.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n)^2 - (\sqrt{(\zeta\omega_n)^2 - \omega_n^2})^2}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2s\zeta\omega_n + \zeta^2\omega_n^2 - \zeta^2\omega_n^2 + \omega_n^2}$$

finalmente la función de transferencia se simplifica hasta la siguiente expresión:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2s\zeta\omega_n + \omega_n^2} \quad (6-13) \text{®}$$

En la siguiente figura se representa un diagrama de bloques del sistema de segundo orden, expresado en la función $C(s)/R(s)$.

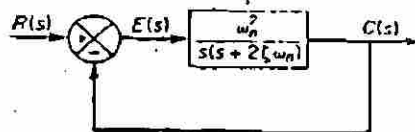


Fig. 6-9.- Sistema de Segundo Orden.

Ahora se puede expresar el comportamiento dinámico del sistema de segundo orden en función de los parámetros ζ y ω_n .

De la ecuación 6-13 se pueden obtener las raíces de la ecuación de segundo grado que constituyen los polos de la función de transferencia

$$s = \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{4\zeta^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2} \quad (6-14)$$

Dependiendo del valor de ζ , será el tipo de polos de lazo cerrado que se tenga en el sistema.

Si $0 < \zeta < 1$, los polos del sistema son complejos conjugados por el signo negativo de la raíz cuadrada ya que $4\zeta^2\omega_n^2 < 4\omega_n^2$. En estas condiciones se dice que el sistema es subamortiguado y la respuesta transitoria es oscilatoria. Además los polos complejos están ubicados a la izquierda del eje $J\omega$ en el plano complejo.

Si $\zeta = 1$, los polos del sistema son reales e iguales, al eliminarse los términos dentro de la raíz cuadrada. En estas condiciones el sistema se dice que trabaja críticamente amortiguado y la respuesta transitoria ya no oscila. Los polos reales e iguales están situados a la izquierda del eje $J\omega$ en el plano complejo.

Si $\zeta > 1$, los polos del sistema son reales y distintos. En tales condiciones el sistema se denomina sobreamortiguado y la respuesta transitoria no oscila. Los polos reales y distintos están situados a la izquierda del eje $J\omega$.

Por último si $\zeta = 0$, los polos del sistema serán complejos y estarán situados sobre el eje $J\omega$. En estas condiciones el sistema no tendrá amortiguamiento, y su salida transitoria será oscilatoria.

A continuación se calculará la respuesta transitoria del sistema de segundo orden de la fig 6-9 cuando se le aplica una entrada escalón unitario. De acuerdo con el análisis hecho en los párrafos anteriores, se considerarán tres casos distintos:

Sistema Subamortiguado	$0 < \zeta < 1$
Sistema Críticamente Amortiguado	$\zeta = 1$
Sistema Sobreamortiguado	$\zeta > 1$

6-5-1.- Sistema Subamortiguado ($0 < \zeta < 1$). La función de transferencia de este sistema se puede representar en la siguiente forma:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{[s + \zeta\omega_n + J\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}][s + \zeta\omega_n - J\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}]}$$

haciendo $\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$ en la ecuación anterior, donde ω_d se denomina frecuencia natural amortiguada del sistema, tenemos:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n + J\omega_d)(s + \zeta\omega_n - J\omega_d)} \quad (6-15)$$

El denominador de la ecuación 6-15 es el producto de dos binomios conjugados, lo cual podemos convertir a una diferencia de cuadrados.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n)^2 - (J\omega_d)^2} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2s\zeta\omega_n + \zeta^2\omega_n^2 + \omega_d^2}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2s\zeta\omega_n + \zeta^2\omega_n^2 + \omega_n^2 - \omega_n^2\zeta^2} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2s\zeta\omega_n^2 + \omega_n^2}$$

La señal de entrada al sistema es un escalón unitario, por lo que $R(s) = 1/s$. Sustituyendo el valor de $R(s)$ en la ecuación anterior:

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \quad (6-16)$$

La Transformada de Laplace de la ecuación 6-16 se puede obtener directamente de las tablas aplicando la fórmula # 18.

$$c(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \text{Sen}(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta})$$

La diferencia entre la entrada y la salida del sistema es la señal de error.

$$e(t) = r(t) - c(t) = 1 - 1 + \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \text{Sen}(\omega_n t + \phi)$$

$$e(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \text{Sen}(\omega_n t + \phi) \quad \text{donde } \phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}$$

La señal de error es una senoide amortiguada. A medida que el tiempo aumenta, el error va disminuyendo. Cuando el tiempo sea muy grande tendiendo a infinito, el error entre la entrada y la salida desaparece.

Cuando la relación de amortiguamiento $\zeta = 0$, la respuesta como ya se dijo se convierte en oscilatoria sin amortiguamiento. Substituyendo el valor de $\zeta = 0$ en la respuesta $c(t)$ se tiene:

$$c(t) = 1 - \text{Sen}(\omega_n t + 90^\circ) = 1 - \text{Cos } \omega_n t \quad (6-17)$$

En la ecuación 6-17 se puede ver que ω_n representa la frecuencia natural no amortiguada del sistema, o sea la frecuencia a la cual oscila el sistema cuando la relación de amortiguamiento $\zeta = 0$.

Si el sistema tiene cierto amortiguamiento, no se puede observar la frecuencia natural no amortiguada ω_n . En este caso aparece la frecuencia natural amortiguada ω_d que es igual a $\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$. La frecuencia ω_d siempre es menor que la frecuencia ω_n y la diferencia en valor depende lógicamente del valor de ζ .

Más adelante se graficará la respuesta transitoria $c(t)$ de este sistema de segundo orden subamortiguado, cuando se haya terminado de analizar los otros dos casos, el críticamente amortiguado y el sobre-amortiguado.

6-5-2.-Sistema Criticamente Amortiguado ($\zeta=1$). Tomando como punto de partida la ecuación 6-13, la función de transferencia del sistema es:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2s\zeta\omega_n + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2}$$

Como la entrada del sistema es un escalón unitario, $R(s)=1/s$ y la salida $C(s)$ será:

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2 s} \quad (6-18)$$

Se calculará en seguida la transformada inversa de Laplace de la ecuación 6-18.

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2 s} = \frac{a}{s} + \frac{bz}{(s + \omega_n)^2} + \frac{b_1}{(s + \omega_n)}$$

$$a = \frac{\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2} \Big|_{s=0} = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2} = 1$$

$$bz = \frac{\omega_n^2}{s} \Big|_{s=-\omega_n} = \frac{\omega_n^2}{-\omega_n} = -\omega_n$$

$$b_1 = \frac{d}{ds} \left[\frac{\omega_n^2}{s} \right] \Big|_{s=-\omega_n} = -\omega_n^2 s^{-2} \Big|_{s=-\omega_n} = -\frac{\omega_n^2}{\omega_n^2} = -1$$

Substituyendo los valores de a , bz y b_1 en la ecuación de $C(s)$

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{\omega_n}{(s + \omega_n)^2} - \frac{1}{s + \omega_n} \quad (6-19)$$

Aplicando las tablas para calcular la transformada inversa de Laplace a la ecuación 6-19, obtenemos $c(t)$:

$$c(t) = 1 - \omega_n t e^{-\omega_n t} - e^{-\omega_n t} = 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t) \quad (6-20)$$

Dando valores al tiempo en la ecuación 6-20, podemos calcular la grafica de la respuesta con amortiguamiento critico.

Si $t=0$ $c(t) = 1 - e^{-0}(1 + 0) = 0$

Si $t=1/\omega_n$ $c(t) = 1 - e^{-1}(1 + 1) = 1 - 0.367 = 0.633$

Si $t=2/\omega_n$ $c(t) = 1 - e^{-2}(1 + 2) = 1 - 0.406 = 0.59$

Si $t=3/\omega_n$ $c(t) = 1 - e^{-3}(1 + 3) = 1 - 0.199 = 0.801$

Si $t=4/\omega_n$ $c(t) = 1 - e^{-4}(1 + 4) = 1 - 0.091 = 0.909$

Los valores obtenidos para $c(t)$ nos indican que la respuesta transitoria se inicia en cero cuando $t=0$ y va aumentando gradualmente con el tiempo hasta que llega al valor de uno cuando el tiempo tiende a infinito, estabilizándose en dicho valor.

6-5-3.- Sistema Sobreamortiguado, ($\zeta > 1$). Como ya se dijo, en este caso los polos del sistema son reales y distintos. La función de transferencia de la ecuación 6-13 es:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

aplicando la ecuación general de segundo grado al denominador de la función de transferencia anterior obtenemos:

$$s = \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{4\zeta^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$s_1 = -\zeta\omega_n - \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$s_2 = -\zeta\omega_n + \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{(s-s_1)(s-s_2)} = \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n + \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1})(s + \zeta\omega_n - \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1})}$$

substituyendo $R(s) = 1/s$ en la ecuación anterior la salida $C(s)$ es:

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + \zeta\omega_n + \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1})(s + \zeta\omega_n - \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1})}$$

$$C(s) = \frac{a}{s} + \frac{b}{s + \zeta\omega_n + \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} + \frac{c}{s + \zeta\omega_n - \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} \quad \text{®}$$

$$a = \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n + \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1})(s + \zeta\omega_n - \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1})} \Big|_{s=0}$$

$$a = \frac{\omega_n^2}{(\zeta\omega_n + \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1})(\zeta\omega_n - \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1})} = \frac{\omega_n^2}{\zeta^2\omega_n^2 - \omega_n^2(\zeta^2 - 1)}$$

$$a = \frac{1}{\zeta^2 - \zeta^2 + 1} = 1$$

$$b = \frac{\omega_n^2}{s(s + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2-1})} \quad s = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2-1} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + s\zeta\omega_n - s\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}}$$

$$b = \frac{\omega_n^2}{\zeta^2\omega_n^2 + 2\zeta\omega_n^2\sqrt{\zeta^2-1} + \omega_n^2(\zeta^2-1) - \zeta^2\omega_n^2 - \zeta\omega_n^2\sqrt{\zeta^2-1} + \zeta\omega_n^2\sqrt{\zeta^2-1} + \omega_n^2\sqrt{\zeta^2-1}}$$

$$b = \frac{\omega_n^2}{2\omega_n^2(\zeta^2-1) + 2\zeta\omega_n^2\sqrt{\zeta^2-1}} = \frac{1}{2[\zeta^2-1 + \zeta\sqrt{\zeta^2-1}]}$$

$$c = \frac{\omega_n^2}{s(s + \zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2-1})} \quad s = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2-1} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + s\zeta\omega_n + s\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}}$$

$$c = \frac{\omega_n^2}{\zeta^2\omega_n^2 - 2\zeta\omega_n^2\sqrt{\zeta^2-1} + \omega_n^2(\zeta^2-1) - \zeta^2\omega_n^2 + \zeta\omega_n^2\sqrt{\zeta^2-1} - \zeta\omega_n^2\sqrt{\zeta^2-1} + \omega_n^2(\zeta^2-1)}$$

$$c = \frac{\omega_n^2}{2\omega_n^2(\zeta^2-1) - 2\zeta\omega_n^2\sqrt{\zeta^2-1}} = \frac{1}{2[\zeta^2-1 - \zeta\sqrt{\zeta^2-1}]}$$

Substituyendo el valor de las constantes a, b y c en la respuesta C(s) tenemos:

$$C(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{2(\zeta^2-1 + \zeta\sqrt{\zeta^2-1})} \frac{1}{s + \zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}} + \frac{1}{2(\zeta^2-1 - \zeta\sqrt{\zeta^2-1})} \frac{1}{s + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}}$$

Aplicando las tablas de la transformada de Laplace a la salida C(s) nos dará el siguiente resultado:

$$c(t) = 1 + \frac{1}{2(\zeta^2-1 + \zeta\sqrt{\zeta^2-1})} e^{(-\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2-1})t} + \dots + \frac{1}{2(\zeta^2-1 - \zeta\sqrt{\zeta^2-1})} e^{(-\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2-1})t}$$

haciendo que $s_1 = (\zeta + \sqrt{\zeta^2-1})\omega_n$ y $s_2 = (\zeta - \sqrt{\zeta^2-1})\omega_n$

$$c(t) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1} \left[\frac{s_1}{\omega_n} \right]} e^{-s_1 t} + \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1} \left[-\frac{s_2}{\omega_n} \right]} e^{-s_2 t}$$

$$c(t) = 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1}} \left[\frac{e^{-s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{-s_2 t}}{s_2} \right]$$

En la fig. 6-10 se puede observar una familia de gráficas de respuesta en función del tiempo para el sistema de control de segundo orden que se ha analizado. La grafica contiene curvas de la salida $c(t)$ en función de $\omega_n t$ y en donde la relación de amortiguamiento ζ se varia desde cero hasta $\zeta = 2$.

También en la fig. 6-10 se ve que si $\zeta=0$, el sistema es completamente oscilatorio y dicha oscilación no se amortigua. Si $0 < \zeta < 1$, caso subamortiguado, el sistema sigue siendo oscilatorio, pero la oscilación ya es amortiguada tendiendo con el tiempo hacia un valor estable. Cuando ζ es igual o mayor que uno el sistema ya no oscila, la respuesta aumenta gradualmente con el tiempo hasta alcanzar un valor estable. Entre más grande sea el valor de ζ en el caso sobreamortiguado, el sistema es más lento, esto quiere decir que se tardará más tiempo en alcanzar la estabilidad.

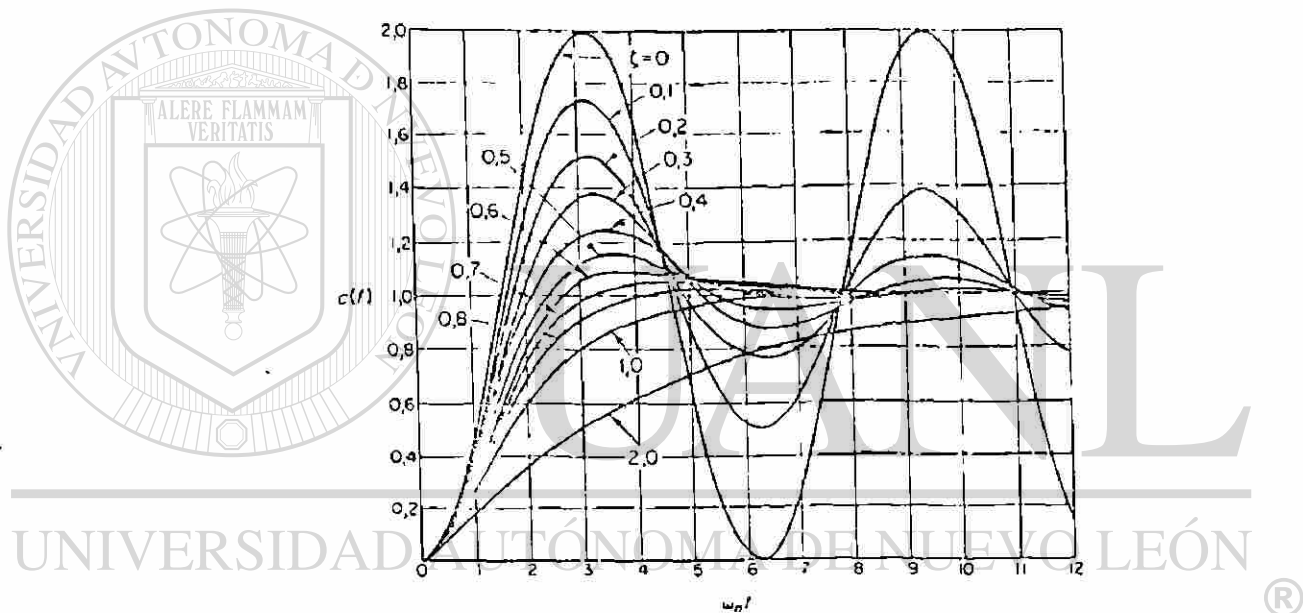


Fig. 6-10. Curvas de respuesta al escalón unitario para el sistema de control de la fig. 6-9.

6-6.- Especificaciones de la Respuesta Transitoria.

En la práctica se pueden especificar las características de un sistema de control en el dominio del tiempo. Estas características son especificadas en términos de la respuesta transitoria cuando se aplica como entrada al sistema una señal escalón unitario. La señal escalón se aplica mucho porque es fácil de generar y además conociendo la respuesta al escalón se puede calcular matemáticamente la respuesta a otras señales de entrada.

La respuesta transitoria de un sistema de control real casi siempre presenta oscilaciones amortiguadas antes de lograr la estabilidad. Al especificar las características de la respuesta transitoria de un sistema de control con entrada escalón unitario, es muy común utilizar las siguientes especificaciones:

- 1.- Tiempo de retardo, t_d
- 2.- Tiempo de crecimiento, t_r
- 3.- Tiempo de pico, t_p
- 4.- Sobreimpulso máximo, M_p
- 5.- Tiempo de establecimiento, t_s

En la figura 6-11 se pueden observar las anteriores especificaciones en una curva de respuesta al escalón unitario. A continuación se dará una definición de cada una de las especificaciones.

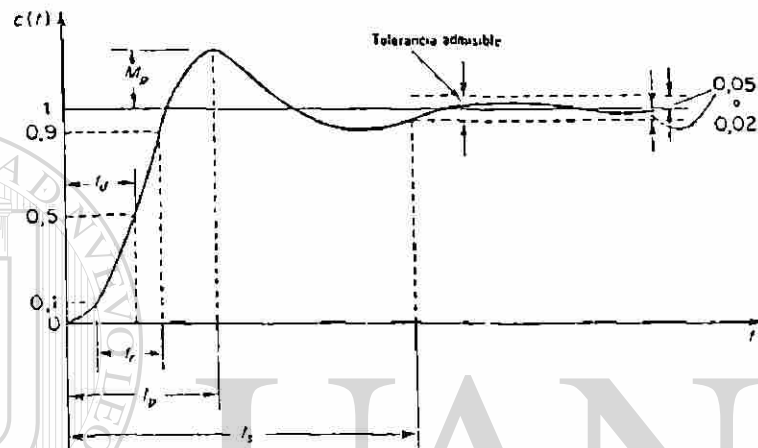


Fig. 6-11 Especificaciones de la Respuesta Transitoria

- 1.- Tiempo de retardo, t_d . Es el tiempo que tarda la respuesta en alcanzar por primera vez la mitad del valor final.
- 2.- Tiempo de crecimiento, t_r . Es el tiempo que requiere la respuesta para crecer de un 10 a un 90% de su valor final.
- 3.- Tiempo de pico, t_p . Es el tiempo requerido por la respuesta para alcanzar el primer pico del sobreimpulso.
- 4.- Máximo sobreimpulso (en porcentaje), M_p . Es el valor pico máximo de la curva de respuesta medido desde la unidad. Esta especificación nos indica la estabilidad relativa del sistema.
- 5.- Tiempo de establecimiento, t_s . Es el tiempo requerido por la respuesta para alcanzar y mantenerse dentro de determinado rango alrededor del valor final, generalmente de un 2 a un 5%.

6-7.- Análisis de la estabilidad en el plano complejo. Basándonos en todos los estudios que se han hecho de la respuesta de un sistema de control, podemos afirmar que dicha respuesta tendrá polos reales o complejos conjugados. Si los polos son reales de la forma

$$C(s) = \frac{1}{s + a} \quad (6-21)$$

la respuesta $c(t)$ será la transformada inversa de Laplace de $C(s)$

$$c(t) = e^{-at} \quad (6-22)$$

Por otro lado si los polos son complejos conjugados de la forma

$$C(s) = \frac{\omega}{(s+a+j\omega)(s+a-j\omega)} = \frac{\omega}{[(s+a)+j\omega][(s+a)-j\omega]} = \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$$

la respuesta $c(t)$ será:

$$c(t) = e^{-at} \text{Sen } \omega t \quad (6-23)$$

Tanto en la ecuación 6-22 como en la 6-23 se puede ver que si el tiempo aumenta, la salida tiende hacia un valor definido y estable.

Pero si los signos de los exponentes fueran positivos las dos ecuaciones de respuesta al aumentar el tiempo, la salida aumentaría sin ningún límite dando como resultado un sistema completamente inestable.

La conclusión importante de lo anterior es que los signos de los exponentes dependen de la ubicación de los polos en el plano complejo, si los polos están a la izquierda del eje $J\omega$, los signos de los exponentes son negativos y el sistema es estable. Pero si los polos están a la derecha del eje $J\omega$, los signos de los exponentes son positivos y el sistema es inestable.

Siendo la estabilidad de un sistema de control una característica muy importante, la ubicación de los polos en el plano complejo es definitiva para poder saber si un sistema es estable o inestable.

Cabe aclarar que el sólo hecho de que los polos de lazo cerrado estén ubicados a la izquierda del eje $J\omega$ no garantiza la estabilidad del sistema de control. Es necesario que los polos estén situados a la izquierda de la zona determinada en el plano complejo de la fig. 6-12. ya que cerca del eje $J\omega$ se pueden presentar oscilaciones excesivas que desaparecen al cambiar los polos hacia la izquierda del eje $J\omega$.

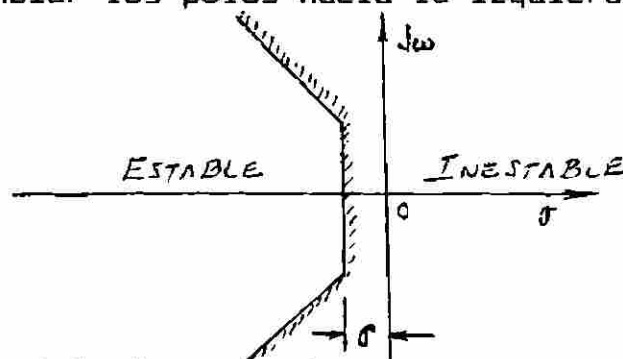


Fig. 6-12. Region del plano complejo donde se satisfacen las condiciones de estabilidad $\zeta > 0.4$ y $t_s < 4/\sigma$.

6-8.- Criterio de Estabilidad de Routh.

En cualquier sistema de control lineal la característica más importante del mismo es su estabilidad. Se requiere saber si el sistema es estable ya que de otra forma el sistema no se puede usar en la práctica porque su salida algo estabilizarse en un determinado valor podría oscilar indefinidamente o de plano variar sin ningún control. En la sección anterior 6-7 se llegó a la conclusión que un sistema es estable sólo si sus polos de lazo cerrado están ubicados en el semiplano izquierdo del plano complejo. La mayoría de los sistemas de control lineal tienen funciones de transferencia de lazo cerrado de la siguiente forma

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (6-24)$$

donde las "a" y las "b" son constantes y generalmente $m < n$. En la función anterior se requiere factorizar el denominador $A(s)$ para saber la ubicación de los polos de lazo cerrado. Cuando el polinomio $A(s)$ es de segundo orden la factorización es relativamente sencilla al aplicar la fórmula general de segundo grado, pero cuando el polinomio $A(s)$ es de tercer orden o mayor, el problema de factorización se complica bastante por lo que no es tan fácil ya ubicar los polos en el plano complejo.

El criterio de estabilidad de Routh es un procedimiento muy simple que nos permite saber cuantos polos de lazo cerrado están en el semiplano derecho del plano complejo sin tener que factorizar el polinomio $A(s)$. Es importante aclarar que el criterio de Routh sólo nos da el número de polos a la derecha del eje $j\omega$, pero no nos dice la ubicación de los polos. De todas maneras éste procedimiento nos permite saber si un sistema es estable o no lo es. Esta característica de un sistema de control se denomina estabilidad absoluta.

El procedimiento llamado criterio de estabilidad de Routh es el siguiente:

- 1.- Primero hay que escribir el polinomio $A(s)$ en forma ordenada como se representa en la ecuación (6-24). Es decir primero el término con mayor exponente de "s", enseguida el término con exponente de " s^{n-1} " y así sucesivamente hasta la constante a_n .
- 2.- Si cualquiera de los coeficientes es cero o negativo en la presencia de por lo menos un coeficiente positivo, hay una raíz o raíces que son imaginarias o que tienen partes reales positivas. Por lo tanto en este caso el sistema es inestable. Si solamente nos interesa la estabilidad absoluta, no hay necesidad de continuar con el procedimiento, pues ya sabemos que el sistema es inestable.

Por lo anterior es necesario que todos los coeficientes existan y sean positivos. Es muy importante hacer notar que la condición de que todos los coeficientes existan y sean positivos es necesaria, pero no es suficiente para asegurar que el sistema es estable.

3.- Si todos los coeficientes son positivos se deben agrupar los coeficientes en filas y columnas de acuerdo al siguiente esquema:

s^n	a_0	a_2	a_4	a_6	\dots
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7	\dots
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4	\dots
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	c_4	\dots
s^{n-4}	d_1	d_2	d_3	d_4	\dots
.	.	.			
.	.	.			
s^2	e_1	e_2			
s^1	f_1				
s^0	g_1				

Los coeficientes de los dos primeros renglones ya están determinados en el polinomio $A(s)$ y los coeficientes b_1, b_2, b_3, b_4 etc. se pueden calcular con las siguientes formulas:

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$$

$$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$$

$$b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}$$

Se calculan todas las "b" hasta que todas sean cero. Se continua el mismo esquema multiplicando en forma cruzada los coeficientes de las dos filas previas para evaluar las "c", "d", "e", etc.

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$$

$$c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}$$

.

$$d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1}$$

$$d_2 = \frac{c_1 b_3 - b_1 c_3}{c_1}$$

El proceso continua hasta haber completado la fila n-ésima. El esquema completo de los coeficientes tiene la forma triangular.

4.- El criterio de estabilidad de Routh establece que la cantidad de raíces de la ecuación 6-24 con partes reales positivas es igual al número de cambios de signo de los coeficientes de la primera columna del esquema. La condición necesaria y suficiente para que todas las raíces de la ecuación 6-24 queden en el semiplano izquierdo del plano complejo es que todos los coeficientes de la primera columna sean positivos.

Con el fin de aplicar el criterio de Routh y determinar la estabilidad absoluta de un sistema de control se resolverá a continuación el siguiente ejemplo:

Ejemplo 6-8-1.- Aplicando el criterio de Routh, determinar si el sistema de control determinado por la función de transferencia

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{s(s + 2)}{s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5}$$

es estable o inestable. Si el sistema es inestable determinar cuantas raíces hay a la derecha del eje $j\omega$.

s^4	1	3	5
s^3	2	4	0
s^2	1	5	
s^1	-6		
s^0	5		

Una vez terminado el esquema se analiza la primera columna de coeficientes y se puede ver que el número de cambios de signo es dos. Por lo tanto hay dos raíces con partes reales positivas, lo cual significa que el sistema es inestable.

Casos especiales del criterio de Routh.

1.- Si un término de la primera columna en cualquier fila es cero, pero los términos restantes no son cero, se reemplaza el término cero por un número positivo muy pequeño " ϵ " y se calcula el resto del conjunto. Por ejemplo si se tiene la siguiente ecuación característica

$$s^3 + 2s^2 + s + 2 = 0$$

el conjunto de coeficientes se indica en el siguiente esquema:

$$\begin{array}{c|cc}
 s^3 & 1 & 1 \\
 s^2 & 2 & 2 \\
 s^1 & 0 & \cong \varepsilon \\
 s^0 & 2 &
 \end{array}$$

Analizando la primera columna de coeficientes podemos ver que el coeficiente sobre el cero (ε) tiene el mismo signo que el que está debajo de él, esto nos indica que hay un par de raíces imaginarias en el eje $J\omega$ del plano complejo. En este caso en particular las raíces imaginarias son $s = \pm j$.

Por otro lado si el signo del coeficiente sobre el cero (ε) es contrario al que está debajo de él, indica que hay un cambio de signo, por lo que habrá raíces a la derecha del eje $J\omega$.

Si se tiene un sistema de control con la siguiente ecuación característica

$$s^3 - 3s + 2 = (s - 1)^2(s + 2) = 0$$

el esquema de los coeficientes es:

$$\begin{array}{c|ccc}
 s^3 & 1 & & -3 \\
 s^2 & 0 & 3 & 2 \\
 s^1 & -3 & 1 & 0 \\
 s^0 & 2 & &
 \end{array}$$

En la primera columna de coeficientes hay dos cambios de signo, lo cual nos indica que existen dos raíces positivas y que se comprueban al factorizar el polinomio como se indica, las dos raíces son iguales y están situadas en $s = 1$. En seguida se verá el segundo caso especial que se puede presentar en la aplicación del criterio de Routh.

2.-Si todos los coeficientes calculados en una fila son cero, se puede continuar la evaluación del resto del conjunto, formando un polinomio auxiliar con los coeficientes de la fila anterior y usando los coeficientes de la derivada de este polinomio auxiliar en la fila de coeficientes cero. Para ilustrar este segundo caso especial se verá el siguiente ejemplo con un sistema cuya ecuación característica es:

$$s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50 = 0$$

si se escriben los coeficientes de esta ecuación, se tiene:

$$\begin{array}{c|ccc}
 s^5 & 1 & 24 & -25 \\
 s^4 & 2 & 48 & -50 \\
 s^3 & 0 & 0 &
 \end{array}$$

Los términos de la fila de s^3 son todos igual a cero. Por lo tanto se forma un polinomio auxiliar con los coeficientes de la fila de s^4 . El polinomio auxiliar $P(s)$ será:

$$P(s) = 2s^4 + 48s^2 - 50$$

la derivada de este polinomio auxiliar con respecto a "s" es:

$$\frac{dP(s)}{ds} = 8s^3 + 96s$$

Se reemplazan los términos en la fila de s^3 por los coeficientes de la ecuación anterior, o sea el 8 y el 96. El esquema de coeficientes se convierte entonces en

s^5	1	24	-25
s^4	2	48	-50
s^3	8	96	
s^2	24	-50	
s^1	112.7	0	
s^0	-50		

Observando la primera columna de coeficientes se vé que hay un cambio de signo, lo cual significa que hay una raíz con parte real positiva. Se pueden calcular las raíces de la ecuación polinómica auxiliar

$$2s^4 + 48s^2 - 50 = 0$$

aplicando la fórmula general de segundo grado, lo cual nos dá los siguientes valores:

$$s^2 = 1 \qquad s^2 = -25$$

o bien $s = \pm 1 \qquad s = \pm j5$

la ecuación original se puede factorizar utilizando estas raíces como se indica enseguida:

$$(s + 1)(s - 1)(s + j5)(s - j5)(s + 2) = 0$$

en donde se puede ver claramente una raíz con parte real positiva.

6-9.- Análisis de la Estabilidad Relativa.

Como ya se vió en la sección anterior 6-8, el criterio de Routh nos da la estabilidad absoluta de un sistema de control, es decir nos indica si el sistema es o no estable. Muchas veces la estabilidad absoluta de un sistema no basta, sino que se requiere conocer su estabilidad relativa, lo cual significa saber que tan cerca está un sistema de perder su estabilidad.

Se puede calcular la estabilidad relativa de un sistema desplazando el eje $j\omega$ del plano complejo "s" a la izquierda y aplicando luego el criterio de estabilidad de Routh. Para lograr lo anterior se substituye

$$s = z - \sigma \quad \text{donde } \sigma \text{ es una cantidad constante.}$$

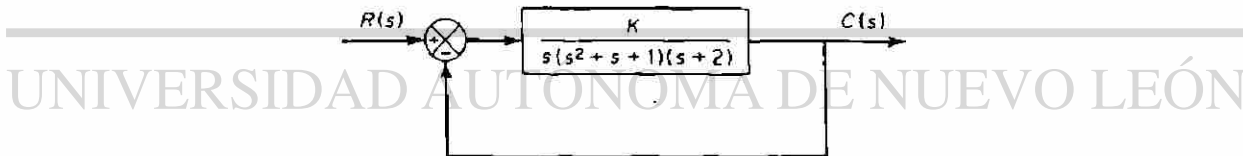
en la ecuación característica del sistema, con lo cual la ecuación se convierte en una función de la nueva variable "z".

Dándole valores a " σ " cada vez mayores, llega el momento en que el sistema originalmente estable se convierte virtualmente en un sistema inestable por el corrimiento que se está efectuando del eje $j\omega$ a la izquierda. La distancia de corrimiento del eje $j\omega$ nos dará una magnitud de la estabilidad relativa del sistema.

6-10.- Determinación del rango de ganancia K de un sistema de control aplicando el criterio de Routh.

Aunque el criterio de estabilidad de Routh tiene un alcance limitado ya que no nos proporciona una forma de mejorar la estabilidad relativa ni nos indica como lograr estabilizar un sistema inestable, si nos permite conocer el rango de ganancia K dentro del cual un sistema de control es estable.

Supongamos que se desea conocer el rango de ganancia K de estabilidad del sistema de control representado en la fig. 6-13.



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Fig. 6-13. Sistema de control

En primer lugar se determinará la función de transferencia del sistema de control representado en la fig. 6-13.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K}{s(s^2 + s + 1)(s + 2)}}{1 + \frac{K}{s(s^2 + s + 1)(s + 2)}} = \frac{K}{s(s^2 + s + 1)(s + 2) + K}$$

desarrollando la ecuación característica del sistema tenemos:

$$s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 2s + k = 0$$

El esquema del criterio de Routh para el sistema de control de la fig. 6-13 es :

s^4	1	3	K
s^3	3	2	0
s^2	$7/3$	K	
s^1	$2 - \frac{9}{7} K$		
s^0	K		

Para que el sistema sea estable todos los coeficientes de la primera columna deben ser positivos, por lo tanto el binomio $(2 - \frac{9}{7}K)$ debe ser mayor que cero, lo cual nos da la siguiente ecuación:

$$(2 - \frac{9}{7}K) > 0$$

de la cual podemos despejar el valor de K cuyo valor debe ser

$$\frac{14}{9} > K > 0$$

El resultado obtenido nos indica que para tener el sistema estable la ganancia debe ser menor que 14/9. Si el sistema tiene una ganancia $K = 14/9$, tendrá algunos polos en el eje $J\omega$ lo cual producirá una salida oscilatoria y dicha oscilación matemáticamente se mantendrá con amplitud constante, pero prácticamente la oscilación puede crecer gradualmente con el tiempo incrementándose la inestabilidad.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- Un sistema de control con retroalimentación unitaria y cuya función de transferencia directa es

$$G(s) = \frac{0.4s + 1}{s(s + 0.6)}$$

tiene una entrada escalón unitario. Calcular la respuesta del sistema en función del tiempo.

2.- Calcular la señal de salida en función del tiempo de un sistema de control cuya función de transferencia es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{20}{s^2 + 4s + 5}$$

si la señal de entrada del sistema es una rampa $r(t) = 4t$

3.- Determinar si el sistema de control representado por la siguiente función de transferencia es estable o inestable. Si es inestable determinar el número de polos a la derecha del eje $J\omega$.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{s^2 + 3s + 6}{2s^5 + s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 6s + 8}$$

4.- Cual es el rango de estabilidad de el sistema de control representado por la siguiente función de transferencia:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s(s^2 + 3s + 2)(s + 4) + K}$$

5.- Aplicando el criterio de Routh, determinar el rango de estabilidad del sistema de control representado por la siguiente función de transferencia:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s(s^2 + 4s + 1)(s + 3)(s + 6) + K}$$

6.- Determinar si el sistema de control representado por la siguiente función de transferencia es estable o inestable. Si es inestable determinar el número de polos a la derecha del eje $J\omega$ y si es estable calcular la estabilidad relativa del sistema, obteniendo el valor máximo de " σ " para el cual el sistema sigue siendo estable.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2s^2 + 20s + 4}{s^4 + 21s^3 + 158s^2 + 504s + 576}$$

CAPITULO VII

ANALISIS DEL ERROR

7-1.- Concepto del Error

Practicamente en cualquier sistema de control se pueden presentar errores que se deben a varios factores. Por ejemplo es posible tener errores por imperfecciones de los componentes del sistema, o por envejecimiento y deterioro del mismo. Además un sistema presenta error -- cuando su entrada se modifica y el error puede ser transitorio o un error estacionario.

El error por lo tanto es una característica muy importante de un sistema de control que se puede definir como la desviación entre la salida real y el valor deseado. El error es transitorio si se elimina con el tiempo o estacionario si no desaparece con el tiempo. El error entonces nos define tambien otra característica del sistema que es la exactitud. A mayor error menor exactitud y viceversa.

Como se verá más adelante, teóricamente el error de un sistema de control depende de su función de transferencia y del tipo de señal de entrada que se le aplique. Esto quiere decir que un mismo sistema puede no tener error con una entrada escalón, pero si presentar error con una entrada rampa.

7-2.- El Error Estacionario.

Como ya se comentó en la sección anterior, el error puede ser transitorio o estacionario. El error transitorio puede ser a veces un problema para el buen funcionamiento del sistema, pero la ventaja es que con el tiempo el error va disminuyendo hasta desaparecer. Por el contrario el error estacionario persiste durante todo el tiempo de operación del sistema lo cual puede provocar problemas con la exactitud y la estabilidad. Por lo anterior es muy importante poder calcular el error estacionario de un sistema de control.

A continuación se estudia el cálculo del error estacionario para un sistema de control de lazo cerrado. En la figura 7-1 se representa el diagrama de bloques de un sistema de control cualquiera de lazo cerrado.

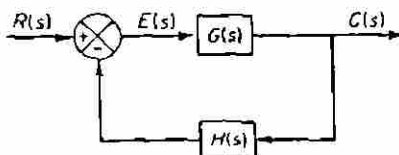


Fig. 7-1 Sistema de Control de Lazo Cerrado.

La función de transferencia de lazo cerrado del sistema de control de la fig. 7-1 es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (7-1)$$

Por otro lado la señal de error $E(s)$ a la salida del sumador es

$$E(s) = R(s) - C(s)H(s)$$

ecuación que también se puede escribir en la siguiente forma equivalente

$$E(s) = R(s) - \frac{R(s)C(s)H(s)}{R(s)} = R(s) \left[1 - \frac{C(s)H(s)}{R(s)} \right]$$

de donde

$$\frac{E(s)}{R(s)} = 1 - \frac{C(s)H(s)}{R(s)} = 1 - \frac{C(s)}{R(s)} H(s) \quad (7-2)$$

substituyendo el valor de $C(s)/R(s)$ de la ecuación 7-1 en la ecuación 7-2, tenemos:

$$\frac{E(s)}{R(s)} = 1 - \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} H(s)$$

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1 + G(s)H(s) - G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G(s)H(s)}$$

de donde finalmente se puede despejar el error del sistema $E(s)$

$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s)H(s)} R(s) \quad (7-3)$$

De la ecuación 7-3 se puede calcular el error estacionario e_{ss} en función del tiempo cuando el tiempo tiende a infinito.

$$e(t) = \mathcal{L}^{-1} E(s) \quad \text{y} \quad e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$$

Sin embargo este procedimiento para calcular e_{ss} es difícil que nos permita calcular un valor definido ya que normalmente al substituir el tiempo $t = \infty$, el error e_{ss} también se hace infinito o una indeterminación. Para romper la indeterminación y obtener un valor definido para el error e_{ss} , se puede aplicar el teorema del valor final que establece lo siguiente:

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (7-4)$$

En la ecuación anterior se comprueba que el error estacionario depende del tipo de señal de entrada $R(s)$ y de la función de transferencia de lazo abierto $G(s)H(s)$.

7-3.- Clasificación de los Sistemas de Control.

Desde el punto de vista del error, los sistemas de control se pueden clasificar de acuerdo con el número de polos que tenga en el origen la función de transferencia de lazo abierto $G(s)H(s)$.

La función de transferencia $G(s)H(s)$ de lazo abierto de un sistema de control cualquiera generalmente tiene la siguiente forma:

$$G(s)H(s) = \frac{K (T_0s + 1)(T_1s + 1)\dots(T_ms + 1)}{s^N (T_1s + 1)(T_2s + 1)\dots(T_ps + 1)}$$

En la función anterior $G(s)H(s)$, el término s^N del denominador es el que define la cantidad de polos en el origen. Si el exponente N es igual a cero, el sistema se clasifica como sistema tipo cero, si el exponente N es igual a uno, el sistema se denomina tipo uno y así sucesivamente.

Es muy importante que quede claro que la clasificación del tipo de sistema es muy diferente al orden del mismo. Más adelante se demostrará que al aumentar el número de tipo, se aumentará la exactitud del sistema, sin embargo aumentar el número del tipo también aumenta los problemas de la estabilidad. En sistemas de control que se utilizan en la práctica casi no se utilizan sistemas de control de tipo 3 o más elevado, porque el tener tantos polos en el origen ocasiona muchos problemas con la estabilidad.

7-4.- Coeficientes de Error Estático.

Los coeficientes de error estático se pueden definir como cifras de mérito en un sistema de control. Cuanto mayor sea el coeficiente de error estático, menor será el error estacionario.

Existen tres clases de coeficientes estaticos de error:

- 1.- Coeficiente estático de error de posición K_p
- 2.- Coeficiente estático de error de velocidad K_v y
- 3.- Coeficiente estático de error de aceleración K_a

La salida de un sistema de control puede ser una temperatura, una presión, una velocidad o cualquier otro parametro. En el análisis de los coeficientes de error estático, la forma física de la salida es irrelevante. Cuando se habla de error de posición no se está hablando de una posición mecánica, sino de la magnitud de una salida. Cuando se trata de error de velocidad, nos referimos a la variación de la magnitud de la salida ((velocidad)), etc.

7-4-1.- Coeficiente estático de error de posición K_p .

Basándonos en la ecuación 7-4 se calculará el error estacionario para un sistema con entrada escalón unitario.

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (7-5)$$

Si la entrada del sistema es un escalón unitario, la transformada de Laplace es $1/s$, por lo tanto $R(s) = 1/s$. Substituyendo $R(s)$ en la ecuación 7-5, el error estacionario e_{ss} será:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)H(s)} \frac{1}{s}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G(s)H(s)}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + G(0)H(0)} \quad (7-6)$$

El coeficiente de error estático de posición K_p se define por la siguiente ecuación:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s) = G(0)H(0)$$

Substituyendo K_p en la ecuación 7-6, el error estacionario estará expresado en la siguiente forma:

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p}$$

Para un sistema tipo 0

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots} = K$$

por lo tanto el error estacionario será:

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K}$$

Para un sistema tipo 1 o mayor

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots} = \alpha$$

y el error estacionario es:

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + \alpha} = 0$$

Del análisis anterior se puede ver que para un sistema tipo 0, hay un error estacionario cuyo valor se puede reducir al aumentar la ganancia. Para sistemas tipo 1 o mayor, el error estacionario no existe -- cuando la entrada es un escalón unitario. Es necesario hacer notar que en algunos sistemas tipo 0, el aumentar la ganancia K reduce el error e_{ss} , pero si la ganancia se incrementa demasiado se pueden tener problemas con la estabilidad.

7-4-2.- Coeficiente estático de error de velocidad K_v .

El coeficiente estático de velocidad K_v , se obtendrá también basándonos en la misma ecuación 7-4 para el error e_{ss} . Pero ahora la entrada no será un escalón unitario, sino una señal cuya magnitud se incrementa con el tiempo ((velocidad)), esta señal es una rampa unitaria, o sea una entrada con velocidad unitaria. Si la entrada es una rampa unitaria, la entrada $r(t) = t$ y la transformada de Laplace será $R(s) = 1/s^2$. Substituyendo el valor de $R(s)$ en la ecuación 7-4

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)H(s)} \frac{1}{s^2}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{sG(s)H(s)}$$

El coeficiente estático de error de velocidad se define como

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s)$$

por lo tanto el error estacionario en función del coeficiente estático de error de velocidad es:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v}$$

El término error de velocidad se usa aquí para expresar el error estacionario de un sistema ante una entrada rampa. Esto quiere decir que la entrada del sistema puede ser de cualquier naturaleza (voltaje corriente, presión etc) siempre y cuando dicha entrada tenga la forma de una rampa unitaria.

Para un sistema tipo 0

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sK(T_0s + 1)(T_b s + 1) \dots}{(T_1s + 1)(T_2s + 1) \dots} = 0$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{0} = \alpha$$

Para un sistema tipo 1

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sK(T_0s + 1)(T_b s + 1) \dots}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1) \dots} = K$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{K}$$

Para un sistema tipo 2 o mayor

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 (T_0 s + 1)(T_b s + 1) \dots}{s^2 (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots} = \alpha$$

$$e_{ss} = \frac{1}{k_v} = \frac{1}{\alpha} = 0$$

Se pueden obtener algunas conclusiones importantes del análisis anterior. El sistema tipo 0 no puede seguir una entrada rampa en estado estacionario ya que el error es infinito. El sistema tipo 1 si es capaz de poder seguir la entrada rampa con un error estacionario igual al inverso de la ganancia K. En la fig. 7-2 se puede ver la gráfica de la respuesta y la entrada rampa para un sistema tipo 1. Para el sistema tipo 2 o mayor la entrada rampa unitaria produce un error estacionario igual a cero.

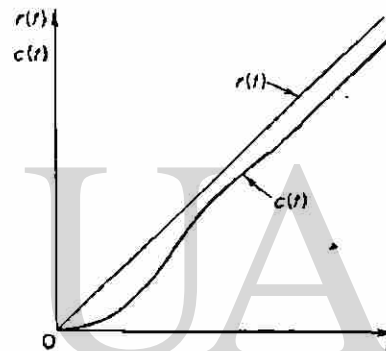
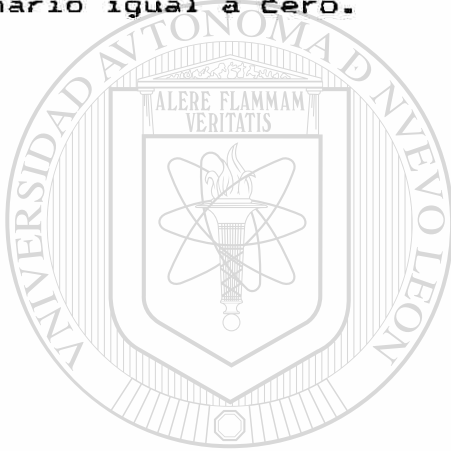


Fig. 7-2. Respuesta de un sistema tipo 1 a una entrada rampa.

7-4-3.- Coeficiente estático de error de Aceleración K_a .

Ahora la entrada del sistema será una aceleración unitaria que matemáticamente se puede representar como $r(t) = t^2/2$ y cuya transformada de Laplace es $R(s) = 1/s^3$.

Substituyendo el valor de la entrada $R(s)$ en la ecuación 7-4 se calcula el error estacionario e_{ss} .

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)H(s)} \frac{1}{s^3} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)H(s)}$$

El coeficiente estático de error de aceleración K_a se define por la ecuación

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)H(s)$$

Substituyendo el valor de K_a , el error estacionario con una entrada aceleración unitaria es

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a}$$

Para un sistema tipo 0

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 K (T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots} = 0$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a} = \frac{1}{0} = \infty$$

Para un sistema tipo 1

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 K (T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots}{s (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots} = 0$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a} = \frac{1}{0} = \infty$$

Para un sistema tipo 2

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 K (T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots}{s^2 (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots} = K$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a} = \frac{1}{K}$$

Para un sistema tipo 3 o superior

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 K (T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots}{s^3 (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots} = \infty$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Después del análisis anterior los resultados son los siguientes: Los sistemas de tipo 0 y tipo 1 son incapaces de seguir una entrada parabólica o de aceleración unitaria ya que el error estacionario es infinito. El sistema tipo 2 presenta un error estacionario inverso a la ganancia K . Los sistemas tipo 3 o mayores no tienen error estacionario a la entrada aceleración.

En la fig. 7-3 se representa la respuesta de un sistema tipo 2 a una entrada parabólica (aceleración unitaria).

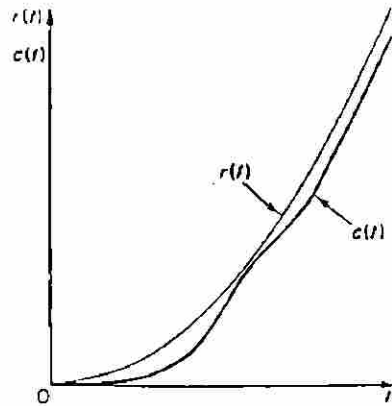


Fig. 7-3. Respuesta de un sistema tipo 2 a una entrada parabólica

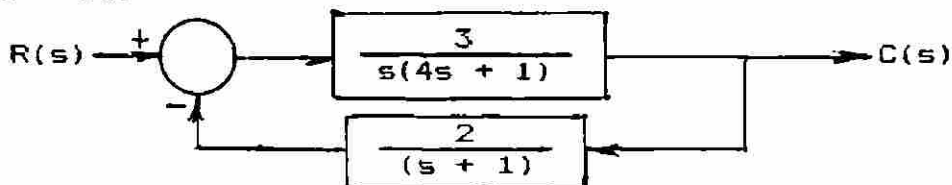
Los resultados ya obtenidos del error estacionario para diferentes tipos de sistemas y para diferentes señales de entrada se pueden representar en una tabla como se indica en la fig. 7-4.

Fig. 7-4. Tabla de errores estacionarios en función de la ganancia K

	Entrada Escalón $r(t) = 1$	Entrada Rampa $r(t) = t$	Entrada Acel. $r(t) = t^2/2$
Sistema Tipo 0	$\frac{1}{1+K}$	α	α
Sistema Tipo 1	0	$\frac{1}{K}$	α
Sistema Tipo 2	0	0	$\frac{1}{K}$
Sistema Tipo 3	0	0	0

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- Calcular el error estacionario del sistema de control que se representa en el diagrama de bloques de la fig. cuando la señal de entrada es $r(t) = 5t$.



2.- Calcular el error estacionario de un sistema de control de lazo cerrado en el cual

$$G(s) = \frac{8}{10s^2 + 7s + 1} \quad \text{y} \quad H(s) = \frac{1}{(s + 5)}$$

si la entrada del sistema es un escalón $r(t) = 3$

3.- Un sistema de control tiene una función de transferencia de lazo cerrado

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{4}{2s^2 + 6s + 10}$$

calcular el error estacionario cuando al sistema se le aplica una entrada impulso unitario.

4.- Se tienen dos sistemas de control con retroalimentación unitaria y cuyas funciones de transferencia son:

$$G_1(s) = \frac{10}{s(s + 1)} \quad G_2(s) = \frac{10}{s(2s + 1)}$$

Si la señal de entrada que se aplica a los dos sistemas es $r(t) = 5 + 2t$ determinar cual de los dos sistemas tiene el error estacionario mayor.

CAPITULO VIII

METODO DEL LUGAR DE LAS RAICES

8-1.- Introducción.

Como ya se estudió en el capítulo VI, las principales características de la respuesta transitoria de un sistema de control dependen de la posición de los polos de lazo cerrado. Por lo tanto es de vital importancia conocer la ubicación de los polos de lazo cerrado.

Los polos de lazo cerrado son las raíces de la ecuación característica. Para hallarlos hay que factorizar la ecuación característica. Cuando la ecuación característica es de primero o segundo orden, la factorización es relativamente sencilla, pero el problema se complica si la ecuación característica es de tercer orden o mayor. Aunque existen algunas técnicas de factorización para estos casos, el problema no es sencillo porque la mayoría de las veces la ecuación característica está en función de la ganancia K del sistema. Si la ganancia varía, la ecuación característica también varía y entonces los cálculos se tendrían que repetir.

W.R.Evans desarrolló en 1950 un procedimiento sencillo para hallar las raíces de la ecuación característica y lo utilizó extensamente en la ingeniería del control. Este procedimiento se denomina "Método del Lugar de las Raíces" y consiste en trazar en una gráfica todas las raíces de la ecuación característica de un sistema de control, variando la ganancia del mismo desde cero hasta infinito.

8-2.- El concepto del Lugar de las Raíces.

La base en la que se fundamenta toda la teoría del método del Lugar de las Raíces es simple y es muy importante que se entienda perfectamente antes de que el método sea aplicado para analizar sistemas de control.

Un sistema de control de lazo cerrado se puede representar en forma general por un diagrama de bloques como se indica en la fig. 8-1.

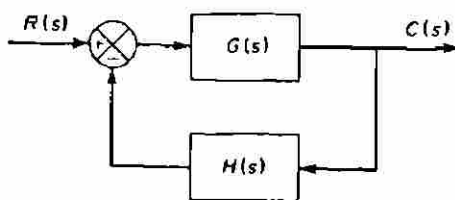


Fig. 8-1. Sistema de Control de Lazo Cerrado.

La función de transferencia de lazo cerrado es:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (8-1)$$

La ecuación característica de este sistema de lazo cerrado es el denominador de la fracción de la derecha de la ecuación 8-1, igualado a cero. Por lo tanto la ecuación característica es:

$$\begin{aligned} 1 + G(s)H(s) &= 0 \\ \text{o bien} \quad G(s)H(s) &= -1 \end{aligned} \quad (8-2)$$

La clave del método del Lugar de las Raíces está contenida en la ecuación 8-2, porque cualquier valor de "s" que satisfaga esta relación es una raíz de la ecuación característica.

La ecuación 8-2 es una función compleja y como tal se puede dividir en dos ecuaciones, una ecuación de ángulos y otra ecuación con los valores absolutos o magnitudes de ambos miembros.

La igualación de los ángulos nos dá como resultado la siguiente ecuación denominada Condición Angular.

$$\angle G(s)H(s) = \angle -1 = \pm 180^\circ(2k + 1) \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (8-3)$$

Mientras que la igualación de las magnitudes genera la otra ecuación denominada Condición de Amplitud o valor absoluto.

$$|G(s)H(s)| = |-1| = 1 \quad (8-4)$$

Los valores de "s" que cumplen las condiciones de ángulo y amplitud, son las raíces de la ecuación característica o los polos de lazo cerrado del sistema.

Como ya se mencionó con todos los puntos que cumplen con las condiciones de ángulo y amplitud se puede construir una gráfica en el plano complejo denominada Lugar Geométrico de las Raíces. El procedimiento para obtener la gráfica consiste, primero en buscar aplicando la condición angular las posibles raíces de la ecuación característica y posteriormente establecer una escala para los diferentes puntos a partir de la aplicación de la condición de amplitud. Una vez completa la gráfica del lugar geométrico de las raíces, la gráfica proporciona las raíces de la ecuación característica para cualquier valor de la ganancia K del sistema. Además se puede determinar la respuesta del sistema.

8-3.- Gráficas para funciones de transferencia simples.

El concepto que sirve de base al método del lugar geométrico de las raíces se ilustrará mejor obteniendo las gráficas para tres sistemas cuyas funciones de transferencia de lazo abierto son simples.

8-3-1.- Función de Transferencia con un Polo Único.

A continuación se construirá una gráfica del lugar geométrico de las raíces para la función de transferencia de lazo abierto

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s + 2} \quad (8-5)$$

Como se puede ver en la ecuación 8-5 se tiene una función compleja con un sólo polo ubicado en el plano complejo en $s = -2$. Empezaremos la gráfica trazando el polo único en el plano complejo indicando su ubicación con una cruz, como se representa en la fig. 8-2.

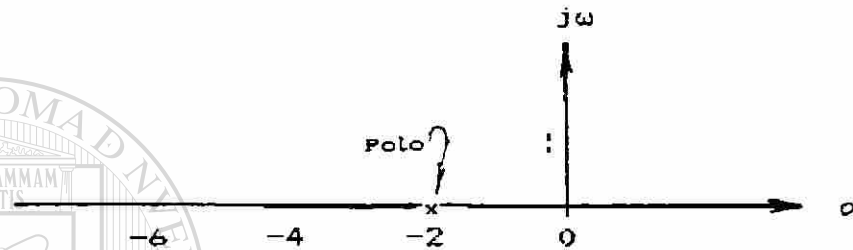


Fig. 8-2. Plano Complejo con un Polo en $s = -2$.

Después de trazar el polo en $s = -2$, el siguiente paso es buscar puntos en el plano "s" que satisfagan la condición angular de la ecuación 8-3. Para ello se empezarán a considerar varios puntos de prueba s_1, s_2, s_3 etc, cuyos ángulos con respecto al polo en $s = -2$ formen un ángulo de 180° . En la fig. 8-3 se pueden ver los puntos de prueba y los ángulos que éstos forman con respecto al polo.

El punto de prueba s_1 forma con el polo un ángulo de cero grados, el punto s_2 forma un ángulo θ , el punto s_3 forma un ángulo β , el punto s_4 forma un ángulo ϕ y finalmente el punto s_5 forma con respecto al polo un ángulo de 180° . La conclusión importante del análisis anterior es que los únicos puntos del plano complejo que cumplen con la condición angular son los puntos que están a la izquierda del polo $s = -2$, como se representa con línea más gruesa en la fig. 8-3.

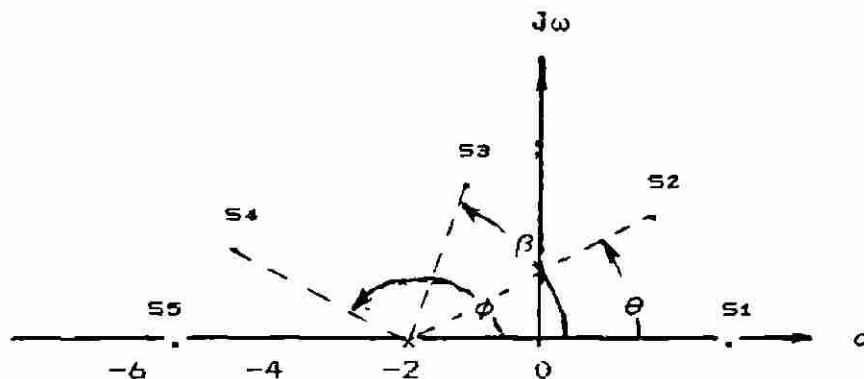


Fig. 8-3. Puntos de Prueba sobre el Plano Complejo.

El siguiente paso es establecer una escala para el lugar geométrico de las raíces, esto consiste en determinar valores de la ganancia K para varios puntos a lo largo del lugar geométrico. Esto se lleva a cabo cumpliendo con la condición de la magnitud de la ecuación 8-4 :

$$\frac{k}{s + 2} = 1 \quad \text{o bien} \quad K = s + 2$$

en la ecuación anterior dándole valores a "s" obtenemos los valores de la ganancia K.

si s = -2	K = -2 + 2 = 0
si s = -4	K = -4 + 2 = 2
si s = -6	K = -6 + 2 = 4
si s = -α	K = -α + 2 = α

La gráfica completa del lugar geométrico de las raíces se representa en la fig. 8-4.

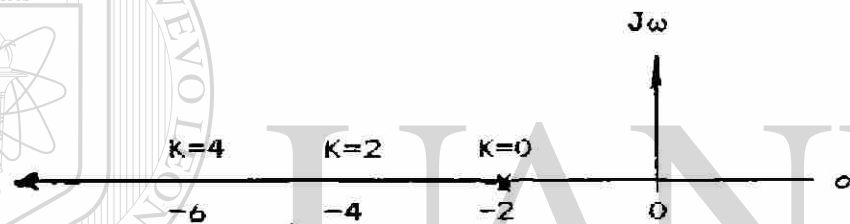


Fig. 8-4. Grafica para $G(s)H(s) = K/(s + 2)$

Con el fin de comprobar la validez de los resultados obtenidos en la gráfica de la figura 8-4 se calculará la ganancia del sistema de control de lazo cerrado cuando $s = -6$. La ecuación característica del sistema de control de lazo cerrado que estamos analizando es

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

$$1 + \frac{K}{s + 2} = 0$$

$$\frac{s + 2 + K}{s + 2} = 0 \quad \text{o bien}$$

$$s + 2 + K = 0 \quad (8-6)$$

Substituyendo $s = -6$ en la ecuación característica 8-6 se obtiene para la ganancia un valor $k = 4$. Lo anterior demuestra que el valor calculado en la gráfica y el de la ecuación característica coinciden, comprobando la validez de los resultados de la gráfica.

8-3-2.- Función de Transferencia con Dos Polos.

Se trazará la gráfica del lugar geométrico de las raíces para la siguiente función de transferencia de lazo abierto:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{(s + 1)(s + 3)} \quad (8-7)$$

Para iniciar la gráfica se trazan los polos en -1 y -3 como se muestra en la fig. 8-5. Basándonos en la condición angular se puede determinar rápidamente que el lugar geométrico puede estar sobre el eje real solamente entre los polos -1 y -3 . Para puntos de prueba a la derecha de -1 , la suma de los dos ángulos es de cero grados. Para los puntos de prueba a la izquierda de -3 , la suma de ángulos es de 360° . Sin embargo para los puntos comprendidos entre -1 y -3 , los ángulos son de 180° con respecto a -1 y de 0° con respecto a -3 , haciendo que el ángulo total (suma de los dos ángulos) sea igual a 180° .

En la fig. 8-5 se representa con línea gruesa el lugar geométrico a lo largo del eje real.

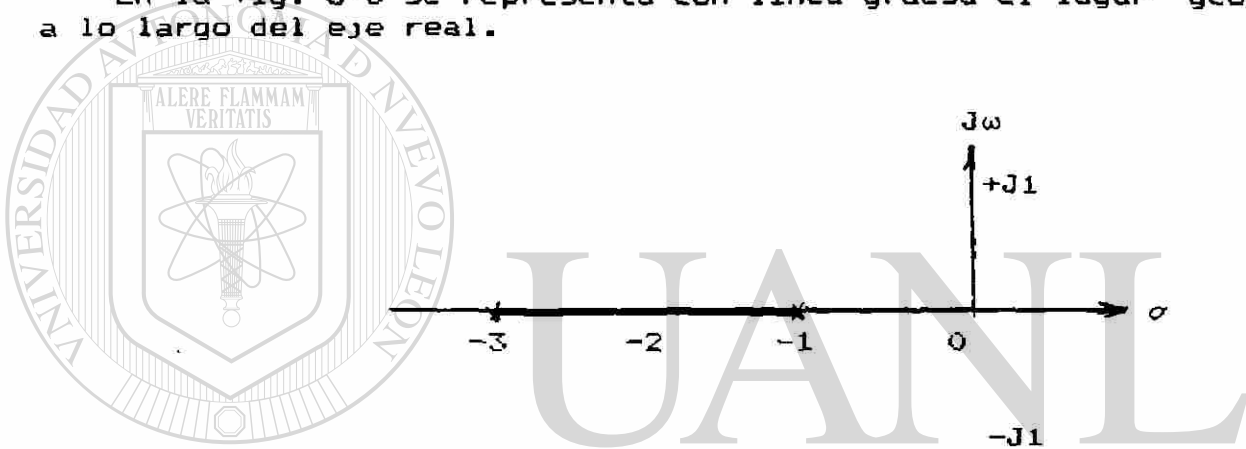


Fig. 8-5. Ubicación de Polos y Lugar Geométrico en el Eje Real

Ahora la pregunta es si existirá el lugar geométrico fuera del eje real. Se debe sospechar que sí porque la ecuación 8-7 da origen a una ecuación característica de segundo orden, la cual es posible que tenga raíces complejas. En la fig. 8-6 se toma como punto de prueba $s_1 = -2 + j1$. Trazando líneas del punto de prueba s_1 a cada uno de los polos, los ángulos formados son de 135° con respecto a -1 y de 45° con respecto a -3 . Por lo que el ángulo total es de 180° y cumple con la condición angular.

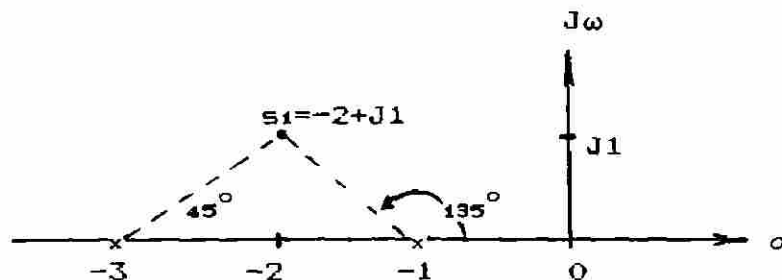


Fig. 8-6. Selección del punto de prueba $s_1 = -2 + j1$

De hecho todos los puntos del plano complejo para los cuales la parte real es igual a -2 cumplen con la condición angular. Por lo tanto la gráfica del lugar geométrico de las raíces es como se indica en la fig. 8-7.

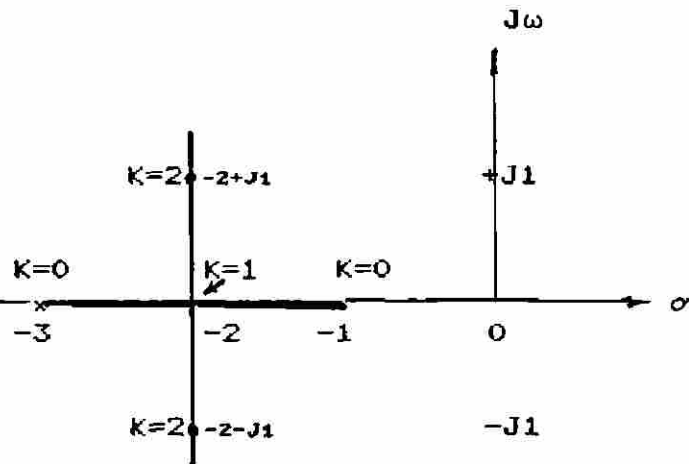


Fig. 8-7. Gráfica para $G(s)H(s) = K/(s + 1)(s + 3)$

Para establecer la escala de la gráfica se aplica la condición de magnitud igualando el valor absoluto de la función a uno como se indica.

$$\frac{K}{(s + 1)(s + 3)} = 1 \quad \text{o bien} \quad K = (s + 1)(s + 3)$$

si $s = -1$	$K = (-1 + 1)(-1 + 3) = 0$
si $s = -3$	$K = (-3 + 1)(-3 + 3) = 0$
si $s = -2$	$K = (-2 + 1)(-2 + 3) = 1$
si $s = -2 + j1$	$K = (-2 + j1 + 1)(-2 + j1 + 3) = (\sqrt{2})(\sqrt{2}) = 2$
si $s \rightarrow -2 \pm j\alpha$	$K = (-2 + j\alpha + 1)(-2 + j\alpha + 3)$ y $K \rightarrow \alpha$

Los valores anteriores de la ganancia K en diferentes puntos de s se incluyen en la gráfica de la fig. 8-7.

Al igual que en el ejemplo 8-3-1, en este caso se pueden comprobar los valores de la ganancia K obteniendo la ecuación característica del sistema.

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

$$1 + \frac{K}{(s + 1)(s + 3)} = 0$$

$$\frac{(s + 1)(s + 3) + K}{(s + 1)(s + 3)} = 0$$

por lo que la ecuación característica es $(s + 1)(s + 3) + K = 0$ o bien desarrollando el producto tenemos:

$$s^2 + 4s + (3 + K) = 0$$

con $K = 1$ $s^2 + 4s + 4 = 0$ y $s_1 = s_2 = -2$
con $K = 2$ $s^2 + 4s + 5 = 0$ y $s = -2 \pm j1$

por lo que se comprueba que la gráfica nos proporciona las raíces correctas.

8-3-3.- Función de Transferencia con un Polo y un Cero.

En seguida se trazará la gráfica del lugar geométrico de las raíces para un sistema de control que tiene la siguiente función de transferencia de ciclo abierto

$$G(s)H(s) = \frac{K(s + 5)}{s + 1} \quad (8-8)$$

Se inicia de nuevo la gráfica trazando el polo en $s = -1$ y el cero en $s = -5$. El polo se indica por una cruz y el cero por un pequeño círculo como se representa en la fig. 8-8.

Al aplicar la condición angular a la ecuación 8-8 se encuentra que ahora al ángulo del cero se le debe restar el ángulo del polo. Basándonos en lo anterior se llega a la conclusión de que sólo existe el lugar geométrico sobre el eje real entre -1 y -5 . El estudiante deberá comprobar lo anterior estableciendo puntos de prueba en otras posiciones del plano complejo.

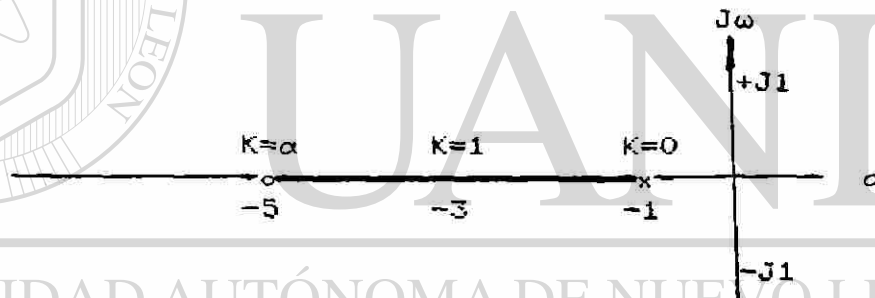


Fig. 8-8. Gráfica para $G(s)H(s) = K(s + 5)/(s + 1)$ ®

La relación que se utiliza para establecer la escala de la gráfica es

$$\frac{K(s + 5)}{s + 1} = 1 \quad \text{o bien} \quad K = \frac{s + 1}{s + 5}$$

$$\text{en } s = -1 \quad K = \frac{-1 + 1}{-1 + 5} = 0$$

$$\text{en } s = -3 \quad K = \frac{-3 + 1}{-3 + 5} = 1$$

$$\text{en } s = -5 \quad K = \frac{-5 + 1}{-5 + 5} = \alpha$$

Como una conclusión importante después de haber analizado los tres sistemas de control se puede afirmar que ninguno de los sistemas considerados puede ser inestable, ya que en ningún caso la gráfica del --

lugar geométrico de las raíces abandona el semiplano izquierdo del plano complejo. Por lo tanto no hay raíces de la ecuación característica con partes reales positivas.

Las gráficas de los lugares geométricos de las raíces pueden trazarse siguiendo el procedimiento ya ilustrado. Sin embargo para facilitar y hacer más rápido el trazo de la gráfica se pueden seguir ciertas reglas que simplifican notablemente el trabajo. En la siguiente sección se estudiarán estas reglas y posteriormente se aplicarán para graficar algunos lugares geométricos de las raíces de sistemas de control con funciones de transferencia más complicadas que las estudiadas hasta ahora.

8-4.- Reglas para Graficar rápidamente.

Los análisis realizados sobre el lugar de las raíces pueden hacer pensar al estudiante que la construcción de la gráfica se hace basándose en el método de prueba y error, hasta encontrar las posibles raíces de la ecuación característica. Aunque en general se requiere aplicar el método de prueba y error, el número de pruebas necesarias se puede reducir grandemente siguiendo las reglas que a continuación se estudian.

Regla No 1.- Una gráfica del lugar geométrico de las raíces tendrá tantos lugares geométricos como polos haya en la función $G(s)H(s)$.

Los lugares geométricos son las diferentes ramas que la gráfica tendrá dependiendo del número de polos.

Regla No 2.- Los lugares geométricos o ramas siempre principian en los polos de $G(s)H(s)$ con $K = 0$ y terminan en los ceros de $G(s)H(s)$ o en el infinito con $K = \infty$.

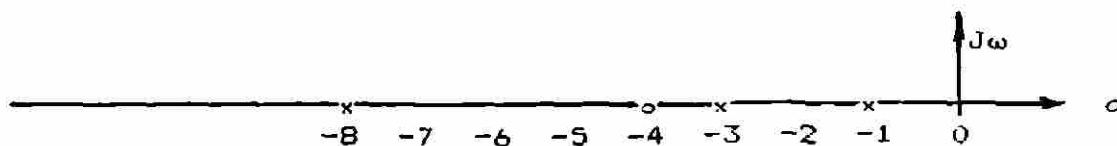
Es muy común que una función de "s" tenga más polos definidos que ceros. En tal caso algunas ramas pueden terminar en el infinito por no tener todos los ceros definidos.

Regla No 3.- El lugar geométrico de las raíces existe sobre el eje real solamente a la izquierda de un número impar de polos reales y/o de ceros.

La condición angular es la que limita la existencia de la gráfica a ciertas regiones del eje real. Para ilustrar lo anterior se estudiará la gráfica de la siguiente función compleja:

$$F(s) = \frac{K(s + 4)}{(s + 1)(s + 3)(s + 8)}$$

La función $F(s)$ contiene un cero en $s = -4$ y tres polos situados en $s = -1$, $s = -3$ y en $s = -8$ como se ve en la fig. 8-9.



Si se selecciona un punto de prueba a la derecha del polo $s = -1$, los ángulos que forma el punto de prueba con respecto a los polos y al cero son:

con respecto al polo $s = -1$	0°
con respecto al polo $s = -3$	0°
con respecto al cero $s = -4$	0°
con respecto al polo $s = -8$	0°

de tal forma que la suma de los ángulos de ceros menos ángulos de polos es igual a cero y no se cumple con la condición angular.

Si se selecciona el punto de prueba en el eje real entre los polos $s = -1$ y $s = -3$, los ángulos del punto de prueba serán:

con respecto al polo $s = -1$	180°
con respecto al polo $s = -3$	0°
con respecto al cero $s = -4$	0°
con respecto al polo $s = -8$	0°

por lo tanto todos los puntos entre -1 y -3 son parte de la gráfica del lugar de las raíces.

Seleccionando el punto de prueba en el eje real entre -3 y -4 , los ángulos que forma el punto son:

con respecto al polo $s = -1$	180°
con respecto al polo $s = -3$	180°
con respecto al cero $s = -4$	0°
con respecto al polo $s = -8$	0°

la sumatoria de ángulos de los ceros es cero y la de los polos es de 360° por lo que el tramo del eje real entre -3 y -4 no puede ser parte de la gráfica del lugar de las raíces.

Siguiendo el mismo procedimiento anterior se podrá encontrar que el tramo del eje real entre -4 y -8 es parte de la gráfica, pero a la izquierda de -8 no puede haber gráfica sobre el eje real, lo cual confirma el cumplimiento de la regla número 3.

Regla No 4.- La gráfica del lugar geométrico de las raíces siempre es simétrica con respecto al eje real.

Lo anterior se debe a que los polos complejos siempre se presentan en pares conjugados que tienen la misma parte real y la misma parte imaginaria pero con los dos signos, positivo y negativo.

Regla No 5.- Los ángulos que forman las asíntotas con el eje real se pueden calcular con la siguiente fórmula:

$$\alpha = \frac{n180^\circ}{2 - p} \quad \text{para } n = \pm 1, \pm 3, \dots \quad (8-9)$$

Las gráficas del lugar de las raíces que terminan en el infinito siempre lo hacen tendiendo asintóticamente con líneas rectas que forman un cierto ángulo con respecto al eje real. Es importante conocer estos ángulos de las asíntotas porque ello nos ayuda a definir con más precisión la apariencia general de la gráfica. Los ángulos de las asíntotas con el eje real se pueden obtener aplicando la condición angular.

Supongamos que se tiene un sistema de control con los polos y cero que se representan en la fig. 8-10. Para valores grandes de "s" o sea cuando $s \rightarrow \alpha$, las líneas inclinadas representan las asíntotas de la gráfica, son paralelas y forman un ángulo α con el eje real. La condición angular de la ecuación 8-3 se puede expresar en la siguiente forma:

$$\Sigma\theta_z - \Sigma\theta_p = n180^\circ \quad \text{para } n = \pm 1, \pm 3, \dots \quad (8-10)$$

donde $\Sigma\theta_z$ es la sumatoria de los ángulos de los ceros y $\Sigma\theta_p$ es la sumatoria de los ángulos de los polos. Por lo que aplicando la fórmula 8-10 al diagrama de la fig 8-10, tenemos:

$$Z\alpha - P\alpha = n180^\circ$$

donde Z es el número de ceros y P es el número de polos. Despejando α de la ecuación anterior se tiene finalmente que

$$\alpha = \frac{n180^\circ}{Z - P} \quad \text{para } n = \pm 1, \pm 3, \dots$$



Fig. 8-10. Ángulo de Asíntotas

Con el fin de aplicar la regla No 5, se calcularán enseguida los ángulos de las asíntotas para la función de transferencia con dos polos que se analizó en la sección 8-3-2 y cuyo valor es:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{(s+1)(s+3)}$$

aplicando la regla 5, (ecuación 8-9), el ángulo α para $n = \pm 1$ es:

$$\alpha = \frac{\pm 180^\circ}{0 - 2} = \pm 90^\circ$$

cuyo resultado concuerda con la gráfica dada en la figura 8-7. Se le pueden dar más valores a "n", por ejemplo $\pm 3, \pm 5$ etc, pero el ángulo α repetiría nuevamente su mismo valor porque solo hay una línea asíntota. Cuando haya más de una asíntota se requerirá por lo tanto darle varios valores a "n", hasta que el ángulo α se repita.

Regla No 6 .- El punto en el cual principian las asíntotas se le llama "centroide". El centroide está ubicado en el eje real en el punto

$$\sigma = \frac{\Sigma P - \Sigma Z}{P - Z} \quad (8-11)$$

donde ΣP = Sumatoria de todos los Polos
 ΣZ = Sumatoria de todos los Ceros
 P = Número de Polos
 Z = Número de Ceros

Además de conocer los ángulos que las asíntotas forman con el eje real, es necesario conocer el punto en el cual principian las --- asíntotas. A este punto se le llama "centroide" y es lógico pensar que el punto esté colocado en el eje real por la simetría que tienen todas las gráficas del lugar de las raíces. Para demostrar la ecuación 8-11 consideremos que se trata de encontrar el centroide de la siguiente función de transferencia de lazo abierto

$$G(s)H(s) = \frac{K N(s)}{D(s)} = \frac{K(s^i + a_{i-1}s^{i-1} + \dots + a_1s + a_0)}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}$$

en la cual n es mayor que i . Dividiendo el numerador y el denominador entre el numerador $N(s)$ obtenemos

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s^{n-i} + (b_{n-1} - a_{i-1})s^{n-i-1} + \dots + \text{residuo}}$$

ahora la función $G(s)H(s)$ ya no tiene ceros, solamente tiene polos más un residuo. Para valores grandes de s (bastante alejados a lo largo de las asíntotas), el valor del denominador se puede expresar en forma muy aproximada utilizando únicamente los dos primeros términos de $G(s)H(s)$, por lo que la función se puede expresar en la siguiente forma:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s^{n-i-1} [s + (b_{n-1} - a_{i-1})]} \quad \text{®}$$

la ecuación anterior tiene $n-i-1$ polos en el origen y un polo en $s = -(b_{n-1} - a_{i-1})$. El centroide estará situado a la distancia

$$\sigma = \frac{-(b_{n-1} - a_{i-1})}{n - i}$$

Basándonos en la solución de ecuaciones de orden " n " (Ver apéndice A) aplicaremos el principio que establece que la sumatoria de las raíces de una ecuación es igual al negativo del coeficiente del término cuyo grado es el inmediato inferior al grado más alto. Por lo tanto

$$\Sigma P = -b_{n-1} \quad \text{y} \quad -\Sigma Z = a_{i-1}$$

donde ΣP es la sumatoria de polos y ΣZ es la sumatoria de ceros de la función $G(s)H(s)$.

Por otro lado de la función general de lazo abierto $G(s)H(s)$ de la cual partimos para iniciar este análisis se puede ver que

$$n = P \quad e \quad 1 = Z$$

lo cual significa que "n", siendo el orden mayor del denominador nos indica el número de Polos e "i", siendo el orden mayor del numerador nos indica el número de Ceros de la función $G(s)H(s)$.

Substituyendo los valores de "n", "i", $-bn-1$, y $ai-1$ en la ecuación del centroide " σ " obtenemos finalmente la ecuación 8-11.

Se aplicará en seguida la ecuación 8-11 para calcular el centroide de la función de lazo abierto $G(s)H(s) = K/(s + 1)(s + 3)$.

La función $G(s)H(s)$ tiene dos polos, en $s = -1$ y en $s = -3$, por lo que $P = 2$ y $\Sigma P = -1 - 3 = -4$. Además la función no tiene ceros, por lo que $N = 0$ y $\Sigma Z = 0$. Substituyendo estos datos en la ecuación 8-11

$$\sigma = \frac{-4 - 0}{2 - 0} = -2$$

En la fig. 8-7 se puede ver la gráfica de la función $G(s)H(s)$ y su centroide en el punto $s = -2$. Cabe hacer la aclaración que en este caso la posición del centroide coincide con el punto en donde la gráfica abandona el eje real, pero en general esto no sucede con todas las funciones de lazo abierto.

Regla No 7.- Un punto de escape es un punto en el cual dos lugares geométricos abandonan el eje real. El punto de escape se determina seleccionando un punto de prueba un poco fuera del eje real y aplicando el criterio angular.

El punto de escape siempre se localiza entre dos polos adyacentes, cuando hay lugar geométrico de las raíces entre ellos. Esto se debe a que las gráficas del lugar de las raíces principian siempre en los polos, avanzan la una hacia la otra hasta que se encuentran en el punto de escape y ahí abandonan el eje real en forma simétrica.

Como ya se mencionó la ubicación del punto de escape está basada en la aplicación del criterio angular. Debido a que cada caso es un poco diferente, se ilustrará el método general con un ejemplo específico. Se calculará la posición del centroide de la función de lazo abierto

$$G(s)H(s) = \frac{K}{(s + 1)(s + 3)}$$

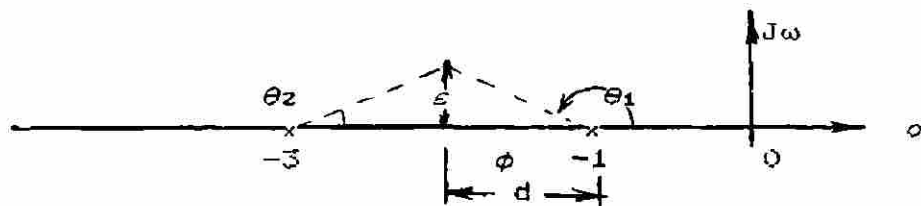


Fig. 8-11. Determinación del punto de escape.

Se empieza el análisis trazando los polos en el plano complejo como se indica en la fig. 8-11. El punto de escape debe estar entre -1 y -3. A una cierta distancia d a la izquierda de -1 se selecciona un punto de prueba que está un poco arriba del eje real a una distancia muy pequeña denominada ϵ . De la fig. 8-11 se pueden obtener las siguientes funciones:

$$\tan \phi = \frac{\epsilon}{d} \quad \text{y} \quad \tan \theta_2 = \frac{\epsilon}{2-d}$$

para ángulos pequeños (menos de 3°), la tangente de un ángulo se puede reemplazar por el ángulo mismo expresado en radianes. Por lo tanto,

$$\phi = \frac{\epsilon}{d} \quad \theta_1 = \pi - \frac{\epsilon}{d} \quad \text{y} \quad \theta_2 = \frac{\epsilon}{2-d}$$

Aplicando la ecuación 8-10 (Regla No 5) tenemos:

$$\Sigma \theta_z - \Sigma \theta_p = \pm \pi \text{ (radianes)}$$

$$0 - (\theta_1 + \theta_2) = \pm \pi$$

$$0 - \left[\pi - \frac{\epsilon}{d} + \frac{\epsilon}{2-d} \right] = \pm \pi$$

eliminando π de ambos lados de la ecuación tenemos:

$$\frac{\epsilon}{d} - \frac{\epsilon}{2-d} = 0 = \frac{1}{d} - \frac{1}{2-d}$$

$$\frac{(2-d) - d}{d(2-d)} = 0 = \frac{2-d-d}{2d-d^2}$$

de donde $2 - 2d = 0$ o bien $d = 1$

De tal manera que el punto de escape está en $s = -2$. En este punto la gráfica del lugar geométrico de las raíces abandona el eje real.

El mismo método se puede aplicar para casos más complicados en donde la función tenga mayor número de polos y de ceros.

Regla No 8.- El ángulo con el cual el lugar geométrico de las raíces abandona un polo complejo se llama "ángulo de partida". El ángulo de partida puede obtenerse aplicando el criterio angular. El procedimiento para obtener el ángulo de partida se ilustrará con un ejemplo. Supongamos que se trata de calcular el ángulo de partida de la siguiente función de transferencia de lazo abierto,

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1+j1)(s+1-j1)} \quad (8-12)$$

En la fig. 8-12 se grafican los tres polos de la ecuación anterior 8-12. Seleccionando un punto de prueba sobre el lugar geométrico muy cerca del polo complejo $-1 + j1$, los ángulos que forma el punto de prueba con respecto a todos los polos (en este caso no hay ceros) son de 135° con respecto al polo en el origen, de 90° con respecto al polo complejo $-1 - j1$ y de θ° con respecto al polo complejo $-1 + j1$.

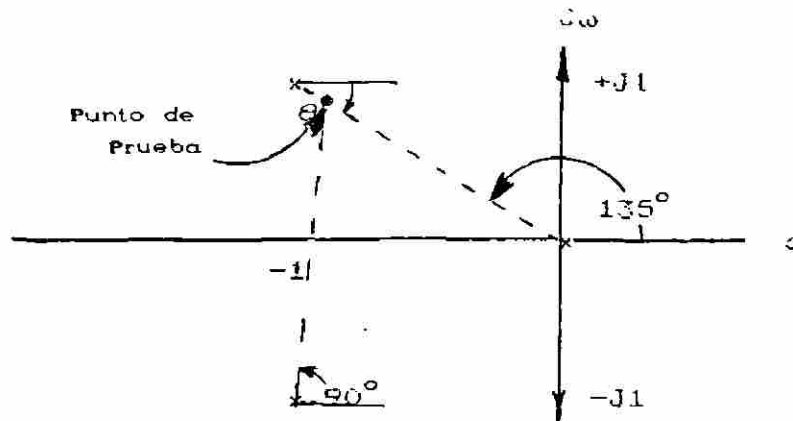


Fig. 8-12. Determinación del ángulo de partida.

Aplicando el criterio angular con los ángulos que se muestran en la fig. 8-12, tenemos:

$$\sum \theta_z - \sum \theta_p = 0 - (135 + 90 + \theta) = \pm 180^\circ$$

$$\text{de donde } \theta = -45^\circ$$

El estudiante podrá obtener el ángulo de partida desde el otro polo complejo $(-1-j1)$, aplicando el mismo procedimiento. El ángulo deberá ser de $+45^\circ$ por la simetría de la gráfica del lugar geométrico de las raíces.

Regla No 9.- Los puntos en los cuales la gráfica corta al eje imaginario y el valor de k en el cruce, se pueden obtener a partir de la ecuación característica del sistema, haciendo $s = j\omega$.

Para aplicar la regla No 9 consideremos la función de transferencia de ciclo abierto

$$G(s)H(s) = \frac{k}{s(s+3)(s+5)}$$

La ecuación característica del sistema es

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

$$1 + \frac{k}{s(s+3)(s+5)} = 0$$

$$\frac{s(s+3)(s+5) + k}{s(s+3)(s+5)} = 0$$

$$s(s+3)(s+5) + k = 0$$

$$(s^2 + 3s)(s+5) + k = 0$$

$$s^3 + 8s^2 + 15s + k = 0$$

su sustituyendo $s = j\omega$ en la ecuación característica tenemos:

$$J^3\omega^3 + 8J^2\omega^2 + 15J\omega + k = 0$$

pero $J^3 = -J$ y $J^2 = -1$ por lo que la ecuación se transforma en

$$-J\omega^3 - 8\omega^2 + 15J\omega + k = 0$$

ahora se planteará una ecuación para las partes reales y otra para las partes imaginarias de la ecuación compleja anterior.

Partes Reales	$-8\omega^2 + K = 0$	
Partes imaginarias	$-J\omega^3 + 15J\omega = 0$	o bien $-\omega^3 + 15\omega = 0$

De la ecuación de las partes imaginarias $\omega^3 = 15\omega$ $\omega = \sqrt{15}$

Substituyendo el valor de ω en la ecuación de las partes reales

$$K = 8\omega^2 = 8(15) = 120$$

Por lo tanto la gráfica del lugar geométrico de las raíces cruza el eje imaginario en $\omega = \pm \sqrt{15}$ y en estos puntos la ganancia $K = 120$. Así que para este sistema de control al tener una ganancia $K = 120$ se coloca al sistema de lazo cerrado en el umbral de la inestabilidad, por lo que cualquier aumento de la ganancia por arriba de 120 es inaceptable ya que de plano el sistema se convertiría en inestable.

Además de las reglas ya desarrolladas, una tabla de gráficas más comunes de los lugares geométricos de las raíces para varias funciones de transferencia de ciclo abierto es muy útil para tener aunque sea un bosquejo general de la gráfica para una $G(s)H(s)$ dada. En las figuras 8-13 y 8-14 se representan algunas gráficas.

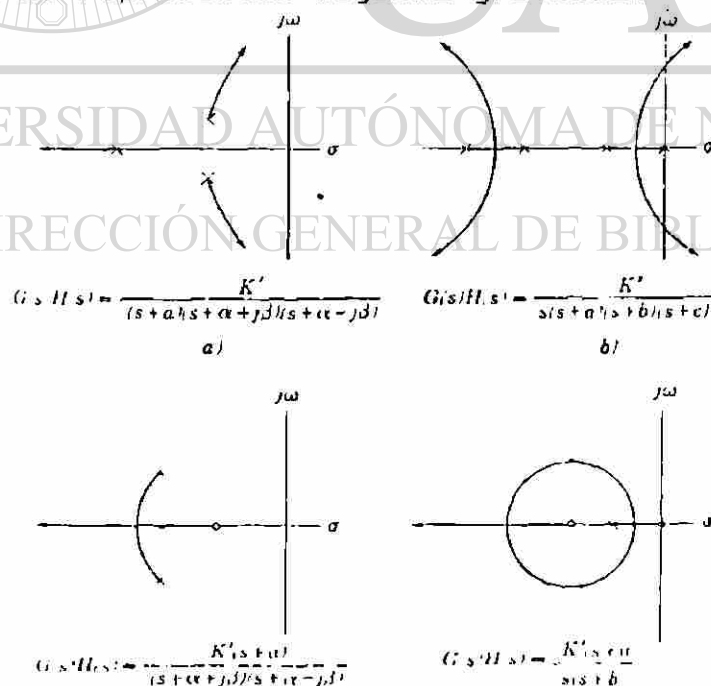


Fig. 8-13. Gráficas del Lugar Geométrico de las Raíces.

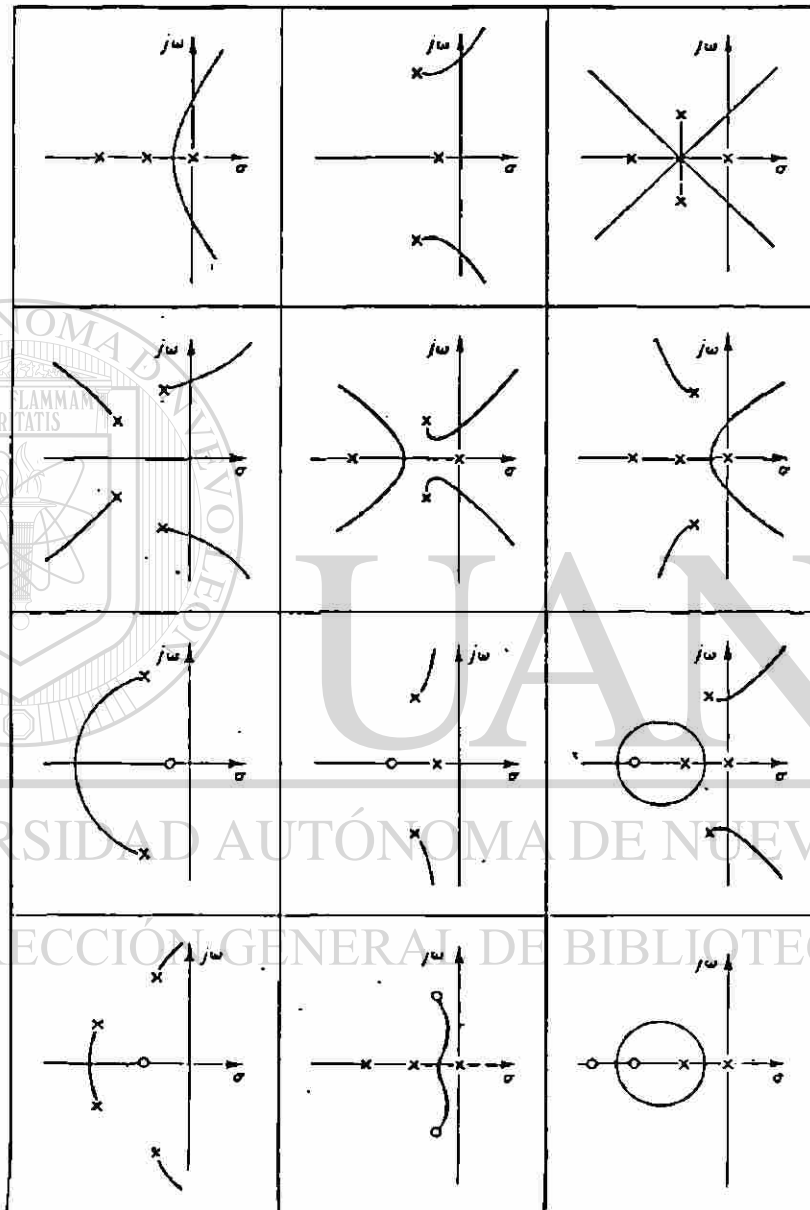


Fig. 8-14. Gráficas del Lugar Geométrico de las Raíces. (Cont.)

8-5.- Ejemplos Ilustrativos.

Ahora se estudiarán tres ejemplos para ilustrar el procedimiento completo de obtener las gráficas del lugar geométrico de las raíces.

Ejemplo 8-5-1.- Construir una gráfica del lugar geométrico de las raíces para la función de transferencia de ciclo abierto

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s^2 + 2s + 2)} = \frac{K}{s(s + 1 + j1)(s + 1 - j1)}$$

Establecer la escala para varios puntos de la gráfica y determinar para que valores de la ganancia K el sistema será inestable.

Solución: Aplicando las reglas ya presentadas podemos obtener la siguiente información: como hay tres polos habrá tres lugares geométricos o tres ramas que inician en 0, $-1 - j1$, $-1 + j1$ y las tres ramas terminarán en el infinito debido a que no hay ceros definidos.

Existe lugar geométrico a lo largo de todo el eje real negativo partiendo desde el polo ubicado en el origen.

Aplicando la ecuación 8-9 podemos calcular los ángulos de las asíntotas:

$$\alpha = \frac{n180^\circ}{Z - P}$$

Si $n = \pm 1$ $\alpha = \frac{\pm 180^\circ}{0 - 3} = \pm 60^\circ$

Si $n = \pm 3$ $\alpha = \frac{\pm 540^\circ}{0 - 3} = \pm 180^\circ$

Si $n = \pm 5$ $\alpha = \frac{\pm 900^\circ}{0 - 3} = \pm 300^\circ$

debido a que el ángulo de $\pm 300^\circ$ es igual al ángulo de $\pm 60^\circ$ ya no se necesita darle más valores a "n" pues los demás ángulos se repetirían.

Con la fórmula 8-11 podemos calcular la posición del centroide, que es el punto en donde inician las asíntotas.

$$\sigma = \frac{\sum P - \sum Z}{P - Z} = \frac{-2 - 0}{3 - 0} = -\frac{2}{3}$$

En este caso no hay puntos de escape porque el lugar geométrico nunca abandona el eje real, ya que sólo hay un polo real.

Los ángulos de partida se pueden obtener aplicando la regla No 8 y son -45° y $+45^\circ$.

Aplicando la regla No 9 se calcula la ganancia K en el cruce con el eje $j\omega$ y el valor de ω . La ecuación característica de lazo cerrado del sistema es

$$1 + G(s)H(s) = 0 = 1 + \frac{K}{s(s^2 + 2s + 2)}$$

$$\frac{s(s^2 + 2s + 2) + K}{s(s^2 + 2s + 2)} = 0$$

$$s(s^2 + 2s + 2) + K = 0$$

$$s^3 + 2s^2 + 2s + K = 0$$

haciendo $s = J\omega$ $J^3\omega^3 + 2J^2\omega^2 + 2J\omega + K = 0$

como $J^3 = -J$ y $J^2 = -1$ $-J\omega^3 - 2\omega^2 + 2J\omega + K = 0$

de la ecuación anterior planteamos dos ecuaciones, una con las partes reales y otra con las partes imaginarias.

Partes Reales $-2\omega^2 + K = 0$

Partes Imaginarias $-J\omega^3 + 2J\omega = 0$

de la ecuación de las partes imaginarias $\omega^3 = 2\omega$ $\omega^2 = 2$
 por lo que el valor de $\omega = \sqrt{2} = \pm 1.414$.

Substituyendo el valor de $\omega = \sqrt{2}$ en la ecuación de las partes reales se calcula el valor de la ganancia K.

$$K = 2\omega^2 = 2(2) = 4$$

En esta forma la gráfica cruza el eje $J\omega$ en los puntos $\pm J1.414$ y el valor de la ganancia es igual a cuatro.

Con toda la información anterior se puede trazar la fig.8-15 que es una gráfica preliminar del ejemplo 8-5-1. La gráfica completa se representa en la figura 8-16.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

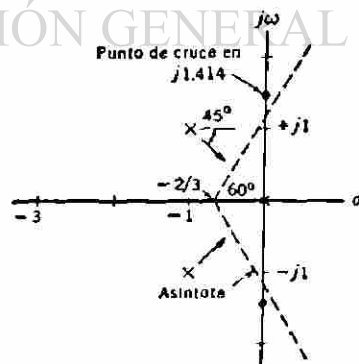


Fig. 8-15. Grafica preliminar para el ejemplo 8-5-1.

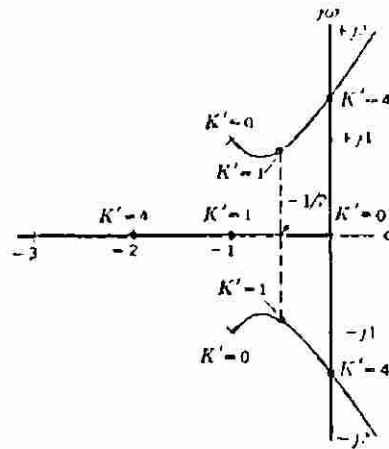


Fig. 8-16. Gráfica para $G(s)H(s) = \frac{K}{s(s^2 + 2s + 2)}$

Para trazar la gráfica completa se deben dar diferentes valores a la variable "s" en la ecuación característica, de donde se podrán calcular valores para ω y para K en forma semejante a como se calcularon los puntos de cruce con el eje imaginario $j\omega$.

Ejemplo 8-5-2.-Construir la gráfica del lugar geométrico de las raíces para la función de transferencia de ciclo abierto

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+8)}$$

y determinar los valores de K para los cuales el sistema será inestable.

Solución: Como hay tres polos en la función $G(s)H(s)$ habrá tres ramas en la gráfica. Las tres ramas inician en los polos 0, -1 y -8, y como no hay ceros definidos las tres ramas terminan en el infinito.

Existe el lugar geométrico sobre el eje real entre 0 y -1 y de -8 hasta menos infinito.

Los ángulos de las asíntotas son:

$$\text{Si } n = \pm 1 \quad \alpha = \frac{n180^\circ}{Z - P} = \frac{\pm 180^\circ}{0 - 3} = \pm 60^\circ$$

$$\text{Si } n = \pm 3 \quad \alpha = \frac{\pm 540^\circ}{0 - 3} = \pm 180^\circ$$

$$\text{Si } n = \pm 5 \quad \alpha = \frac{\pm 900^\circ}{0 - 3} = \pm 300^\circ$$

Debido a que el ángulo de $\pm 300^\circ$ es igual que el de $\pm 60^\circ$, el cálculo de los ángulos está ya completo.

Las asíntotas principian en el centroide que se puede calcular con la siguiente fórmula:

$$\sigma = \frac{\sum P - \sum Z}{P - Z} = \frac{-9 - 0}{3 - 0} = -3$$

Hay un punto de escape y se encuentra entre los polos 0 y -1. En la fig. 8-17 se representa un esquema en donde se selecciona un punto de prueba un poco fuera del eje real entre 0 y -1.

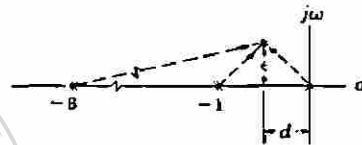


Fig. 8-17. Esquema para determinar el punto de escape.

Aplicando la condición angular al esquema de la fig. 8-17 tenemos:

$$\sum \theta_z - \sum \theta_p = \pm \pi$$

$$0 - \left[\pi - \frac{\epsilon}{d} + \frac{\epsilon}{1-d} + \frac{\epsilon}{8-d} \right] = \pm \pi$$

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{1-d} - \frac{1}{8-d} = 0$$

$$\frac{(1-d)(8-d) - d(8-d) - d(1-d)}{d(1-d)(8-d)} = 0$$

$$(1-d)(8-d) - d(8-d) - d(1-d) = 0$$

$$8 - 9d + d^2 - 8d + d^2 - d + d^2 = 0$$

$$3d^2 - 18d + 8 = 0$$

aplicando la fórmula general de segundo grado a la ecuación anterior

$$d = \frac{18 \pm \sqrt{324 - 96}}{6} = 3 \pm 2.516$$

lo cual nos da dos resultados $d_1 = 5.516$ y $d_2 = 0.484$

De los dos resultados anteriores se descarta d_1 ya que el punto de escape debe estar entre 0 y -1. Por lo tanto el punto de escape está a una distancia $d = 0.484$ del origen a la izquierda.

Como no hay polos complejos, no habrá en este caso ángulos de partida.

Para calcular los puntos de cruce con el eje $j\omega$ se obtiene la ecuación característica

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

$$1 + \frac{K}{s(s+1)(s+8)} = 0$$

$$\frac{s(s+1)(s+8) + K}{s(s+1)(s+8)} = 0$$

$$s(s+1)(s+8) + K = 0$$

$$(s^2 + s)(s+8) + K = 0$$

$$s^3 + 8s^2 + s^2 + 8s + K = 0$$

$$s^3 + 9s^2 + 8s + K = 0$$

haciendo $s = j\omega$

$$j^3\omega^3 + 9j^2\omega^2 + 8j\omega + K = 0$$

$$-j\omega^3 - 9\omega^2 + 8j\omega + K = 0$$

la ecuación compleja anterior se divide en dos ecuaciones, una con las partes reales y otra con las partes imaginarias.

$$\text{Partes Reales} \quad -9\omega^2 + K = 0$$

$$\text{Partes Imaginarias} \quad -j\omega^3 + 8j\omega = 0$$

en la ecuación de las partes imaginarias se puede eliminar "j" por lo que la ecuación quedaría en la siguiente forma:

$$-\omega^3 + 8\omega = 0 \quad \text{de donde}$$

$$\omega^2 = 8 \quad \text{y} \quad \omega = \pm 2.83$$

substituyendo el valor de ω en la ecuación de las partes reales

$$K = 9\omega^2 = 9(8) = 72$$

Por lo tanto la gráfica corta al eje $J\omega$ en $\pm J2.83$ y en estos dos puntos la ganancia es $K = 72$. La gráfica completa se representa en la fig. 8-18. El sistema será inestable cuando K sea mayor que 72.

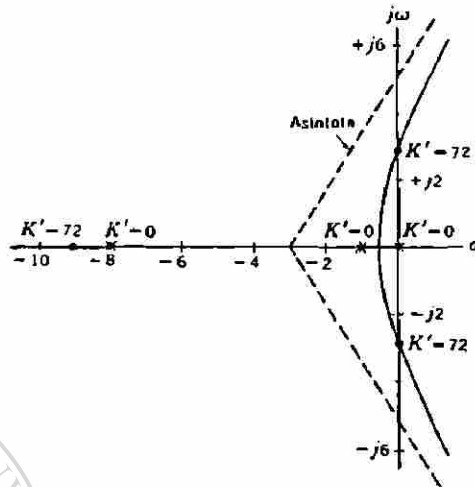


Fig. 8-18. Gráfica para $G(s)H(s) = k/s(s + 1)(s + 8)$

Ejemplo 8-5-3.-Construir la gráfica del lugar geométrico de las raíces para la función de transferencia de lazo abierto

$$G(s)H(s) = \frac{K(s + 2)}{s(s + 1)(s + 8)}$$

Como hay tres polos, habrá tres ramas en la gráfica. Las ramas inician en cada uno de los polos, 0, -1 y -8.

Hay un cero definido por lo que una rama terminará en el cero ubicado en -2 y las otras ramas terminarán en el infinito.

Existe gráfica del lugar geométrico de las raíces en el eje real entre 0 y -1 y entre -2 y -8.

Los ángulos de las asíntotas se pueden determinar aplicando la fórmula

$$\alpha = \frac{n180^\circ}{Z - P}$$

$$\text{Si } n = \pm 1 \quad \alpha = \frac{\pm 180^\circ}{1 - 3} = \pm 90^\circ$$

$$\text{Si } n = \pm 3 \quad \alpha = \frac{\pm 540^\circ}{1 - 3} = \pm 270^\circ \quad \text{que es igual a } \pm 90^\circ$$

Las asíntotas se obtienen aplicando la fórmula

$$\sigma = \frac{\sum P - \sum Z}{P - Z} = \frac{-9 - (-2)}{3 - 1} = \frac{-7}{2} = -3.5$$

El punto de escape se calcula con la ayuda del croquis de la figura 8-19. El punto de escape debe de estar entre los polos ubicados en 0 y -1.

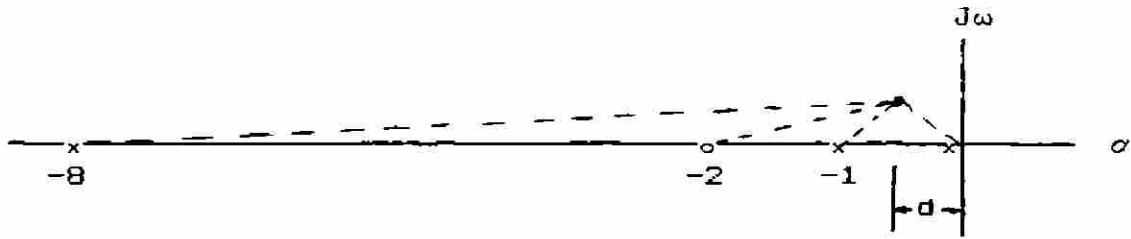


Fig. 8-19. Croquis para determinar el punto de escape

Aplicando el criterio angular a la fig. 8-19 tenemos:

$$\Sigma\theta_z - \Sigma\theta_p = \pm \pi$$

por lo tanto
$$\frac{1}{2-d} - \left[-\frac{1}{d} + \frac{1}{1-d} + \frac{1}{8-d} \right] = 0$$

$$\frac{1}{2-d} + \frac{1}{d} - \frac{1}{1-d} - \frac{1}{8-d} = 0$$

$$\frac{d(1-d)(8-d) + (2-d)(1-d)(8-d) - (2-d)(d)(8-d) - (2-d)(d)(1-d)}{(2-d)(d)(1-d)(8-d)} = 0$$

$$(d-d^2)(8-d) + (2-3d+d^2)(8-d) - (2d-d^2)(8-d) - (2d-d^2)(1-d) = 0$$

$$8d-9d^2+d^3 + 16-2d-24d+3d^2+8d^2-d^3 - (16d-2d^2-8d^2+d^3) - (2d-3d^2+d^3) = 0$$

$$-2d^3 + 15d^2 - 36d + 16 = 0$$

aplicando división sintética (ver apéndice A) o aplicando el método de prueba y error podemos obtener de la ecuación anterior un valor de la distancia $d = 0.57$.

Para calcular los puntos de cruce con el eje $J\omega$ de la gráfica nos basamos en la ecuación característica del sistema que es:

$$s^3 + 9s^2 + (8+K)s + 2K = 0$$

haciendo $s = J\omega$
$$J^3\omega^3 + 9J^2\omega^2 + (8+K)J\omega + 2K = 0$$

$$-J\omega^3 - 9\omega^2 + (8+K)J\omega + 2K = 0$$

Ecuación de Partes Reales
$$-9\omega^2 + 2K = 0$$

Ecuación de Partes Imaginarias
$$-\omega^3 + (8+K)\omega = 0$$

de la ecuación de las partes imaginarias
$$\omega^2 = (8+K)$$

substituyendo en la ecuación de partes reales
$$-9(8+K) + 2K = 0$$

por lo tanto
$$-72 - 9K + 2K = 0 \quad \text{o bien} \quad K = -\frac{72}{7}$$

El valor negativo de K no es un valor normal ya que la ganancia k siempre debe ser positiva, por lo que el resultado obtenido nos indica que no hay cruce de la gráfica con el eje $J\omega$.

La gráfica completa se representa en la fig. 8-20. Para obtener la misma se requiere dar valores a "s" en la ecuación característica para obtener los valores $\pm J\omega$ y los valores de la ganancia K .

Al observar la gráfica completa se puede asegurar que el sistema siempre será estable ya que la gráfica se desarrolla a la izquierda del eje $J\omega$.

Es importante hacer notar que el ejemplo 8-5-2 es igual al 8-5-3 con la única diferencia que se ha agregado en este último un cero en $s=-2$ para mejorar el comportamiento del sistema. Una comparación de las dos gráficas de las figuras 8-20 y 8-18 nos indica el beneficio obtenido; el efecto del cero ha sido alejar la gráfica del eje imaginario y lo más importante alejarlo de la inestabilidad.

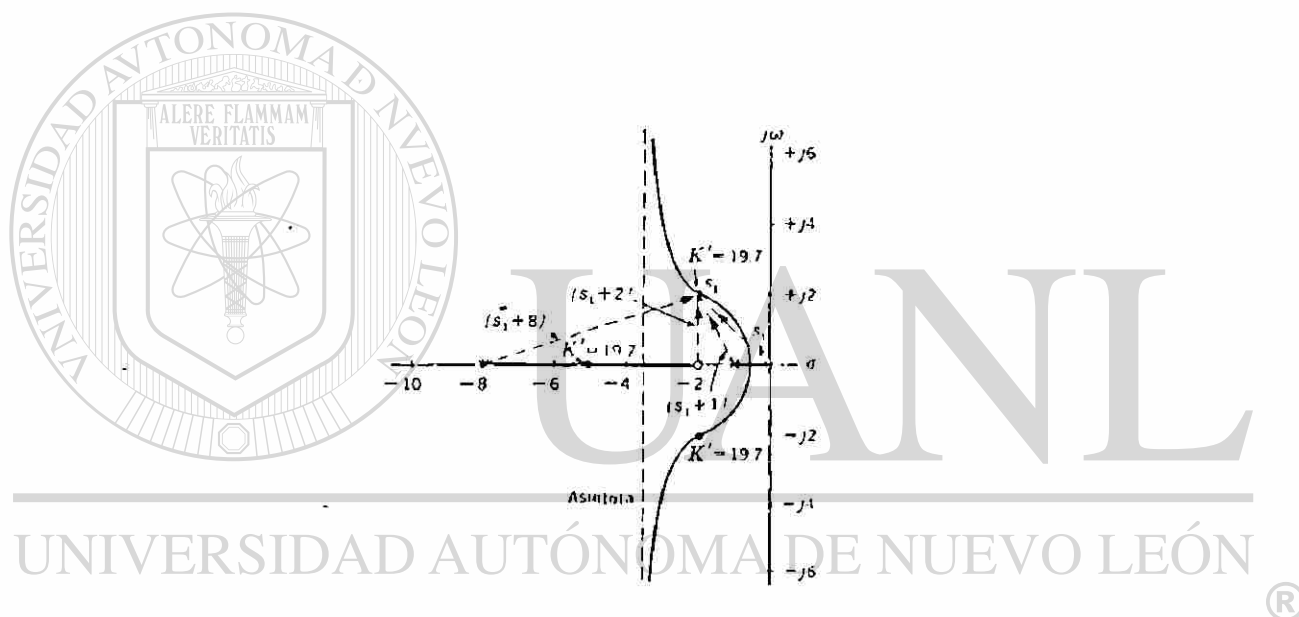


Fig. 8-20. Gráfica para $G(s)H(s) = K(s + 2)/s(s + 1)(s + 8)$

8-6.- Aplicaciones de la Gráfica del Lugar de las Raíces.

Hasta ahora hemos estudiado como se puede graficar el Lugar Geométrico de las Raíces en el plano complejo. Esta gráfica contiene mucha información importante que nos puede ayudar en el análisis y diseño de un sistema de control.

A continuación se verá la utilidad de la gráfica para establecer la ganancia del sistema a fin de obtener las características deseadas en la respuesta del sistema. Es posible también que se desee mantener las constantes de tiempo del sistema en valores pequeños para tener una respuesta rápida o bien mantener la relación de amortiguamiento arriba de cierto valor para que el sistema no dure oscilando mucho tiempo.

En forma general para un sistema de control de lazo cerrado, la función de transferencia se puede expresar en la siguiente forma:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s + r_1)(s + r_2)\dots(s + r_n)}$$

donde $D(s)$ representa la ecuación característica factorizada y $-r_1, -r_2, \dots, -r_n$ son las raíces de la ecuación característica y además polos de lazo cerrado del sistema que pueden ser reales o complejos conjugados. Por lo tanto,

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{N(s)}{(s + a)(s + b + jg)(s + b - jg)\dots} \quad (8-13)$$

desarrollando en fracciones parciales la función de transferencia anterior, para calcular la transformada inversa, la respuesta en función del tiempo tendrá la siguiente forma

$$c(t) = C_1 e^{-at} + C_2 e^{-bt} \text{Sen}(gt + \phi) + \dots$$

substituyendo en la ecuación anterior las siguientes constantes;

$$a = \frac{1}{\tau_1} \quad \text{donde } \tau_1 \text{ es una constante de tiempo}$$

$$b = \frac{1}{\tau_2} \quad \text{donde } \tau_2 \text{ es otra constante de tiempo}$$

$$g = \omega_d \quad \omega_d \text{ es la frecuencia natural amortiguada}$$

$$c(t) = C_1 e^{-t/\tau_1} + C_2 e^{-t/\tau_2} \text{Sen}(\omega_d t + \phi) + \dots$$

$$\text{haciendo } \frac{1}{\tau_2} = \zeta \omega_n \quad \text{donde } \zeta \text{ es la relación de amortiguamiento}$$

y ω_n es la frecuencia natural no amortiguada

$$\text{y } \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

la respuesta en función del tiempo la podemos escribir en la siguiente forma:

$$c(t) = C_1 e^{-t/\tau_1} + C_2 e^{-\zeta \omega_n t} \text{Sen}[\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \phi] + \dots$$

de tal manera que la ecuación 8-13 se puede expresar como sigue

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{N(s)}{(s + 1/\tau_1)(s + 1/\tau_2 + j\omega_d)(s + 1/\tau_2 - j\omega_d)\dots} \quad (8-14)$$

o bien como

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{N(s)}{[s + 1/\tau_1][s + \zeta \omega_n + j\omega_n(1 - \zeta^2)^{1/2}][s + \zeta \omega_n - j\omega_n(1 - \zeta^2)^{1/2}]} \quad (8-15)$$

Comparando las ecuaciones 8-14 y 8-15 con la ecuación 8-13 se puede ver que las letras "a" y "b" que son cantidades reales representan rectas paralelas al eje $j\omega$. Substituyendo "a" y "b" por $1/\tau$ y $\zeta\omega_n$ tambien estos últimos términos representan rectas paralelas al eje $j\omega$. De la misma forma se puede ver que "g" y ω_d representan cantidades imaginarias y por lo tanto rectas paralelas al eje real. En la fig. 8-21 se representan dos líneas paralelas a los ejes real e imaginario.

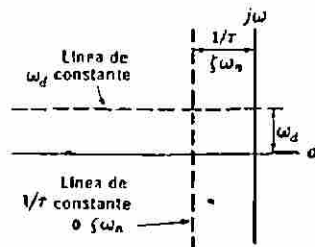


Fig. 8-21. Rectas paralelas a los ejes del plano complejo.

Si $\zeta\omega_n$ es una cantidad real y $\omega_d = \omega_n(1 - \zeta^2)^{1/2}$ es la parte imaginaria de un número complejo, la magnitud del número complejo se obtiene calculando la hipotenusa de un triángulo rectángulo, aplicando el teorema de Pitágoras.

$$\begin{aligned} \text{Hipotenusa} &= \sqrt{(\zeta\omega_n)^2 + [\omega_n(1 - \zeta^2)^{1/2}]^2} \\ &= \sqrt{\zeta^2\omega_n^2 + \omega_n^2 - \omega_n^2\zeta^2} = \sqrt{\omega_n^2} = \omega_n \end{aligned}$$

En la fig. 8-22 se representan las relaciones gráficas anteriores. Además si se calcula el Coseno del ángulo β tenemos:

$$\cos \beta = \frac{\zeta\omega_n}{\omega_n} = \zeta \quad (8-16)$$

La ecuación anterior 8-16 se puede usar para determinar rectas inclinadas con ζ constante. En la misma figura 8-22 se puede ver que los círculos con centro en el origen son círculos de ω_n constante.

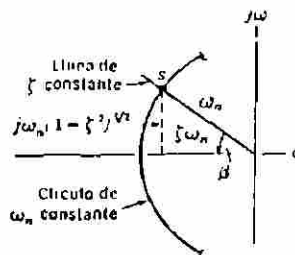


Fig. 8-22. Relaciones Gráficas sobre el Plano "s".

La aplicación de todas estas relaciones gráficas se ilustra en la fig. 8-23. Las raíces de la ecuación característica deben encontrarse dentro del area sombreada si las condiciones son

$$\begin{aligned} \tau &\leq 0.5 \text{ seg.} & (\sigma &= -1/0.5 = -2) \\ \omega_d &\leq 6 \text{ radianes/seg} \\ \zeta &\geq 0.71 & (\beta &= \text{Cos}^{-1}0.71 = 45^\circ) \end{aligned}$$

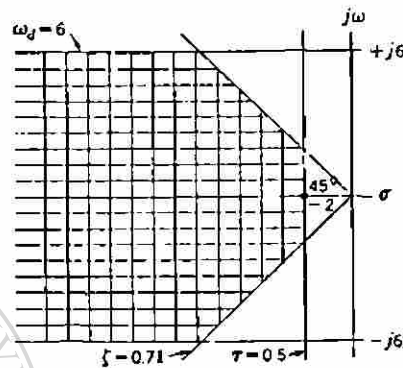


Fig. 8-23. Uso de las relaciones gráficas.

8-7.- Como establecer la Ganancia K de un Sistema de Control.

Los sistemas de control tienen que cumplir con ciertas especificaciones de diseño, por ejemplo una constante de tiempo máxima (para que el sistema no sea tan lento) o una relación mínima de amortiguamiento (para que el sistema no sea muy oscilatorio). Para cumplir con estas especificaciones, la ganancia K debe estar abajo de un valor máximo, ya que si se supera este valor, el sistema no cumplirá con las especificaciones señaladas.

El procedimiento para establecer el valor de la ganancia se ilustrará con el sistema de control representado en la fig. 8-24. Se calculará un valor para la ganancia K , de tal manera que la constante de tiempo máxima (τ) sea de 1 seg. y la relación de amortiguamiento (ζ) tenga un valor mínimo de 0.5.

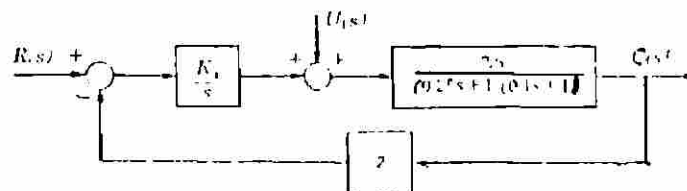


Fig. 8-24. Diagrama de Bloques del Sistema.

La función de transferencia de lazo abierto para el sistema de control de la fig. 8-24 es:

$$G(s)H(s) = \frac{200k_1}{s(0.25s + 1)(0.1s + 1)}$$

multiplicando por 4 y por 10 tanto el numerador como el denominador para eliminar términos fraccionarios, la función $G(s)H(s)$ no se altera y se transforma como sigue

$$G(s)H(s) = \frac{200k_1}{s(s + 4)(s + 10)} = \frac{k'}{s(s + 4)(s + 10)}$$

donde $k' = 200k_1$

En la fig. 8-25 se representa la gráfica del lugar geométrico de las raíces para la función $G(s)H(s)$ que se está analizando. Se puede ver que la gráfica es muy semejante a la que se obtuvo en el ejemplo 8-5-2. Sobre esta gráfica del lugar de las raíces se traza una recta paralela al eje $j\omega$ en -1 . La línea en -1 representa la recta $1/\tau = 1$, o bien $\tau = 1$.

Por otro lado basándonos en la ecuación 8-16, el $\cos\beta = \zeta = 0.5$, de donde $\beta = 60^\circ$. Se trazan también en la gráfica dos líneas punteadas con un ángulo $\beta = 60^\circ$, las cuales nos limitan el área a un valor mínimo de $\zeta = 0.5$.

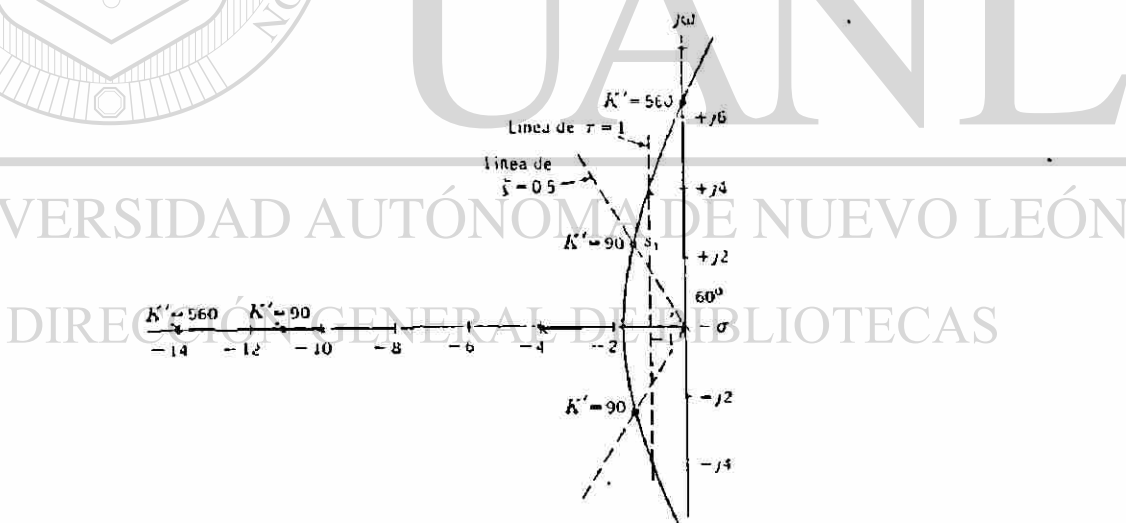


Fig. 8-25. Gráfica para $G(s)H(s) = k'/s(s + 4)(s + 10)$.

Se puede ver en la gráfica que la máxima ganancia permitida para el sistema está limitada por la condición impuesta a la relación de amortiguamiento $\zeta = 0.5$. El punto s_1 es el cruce del lugar de las raíces con la línea a un ángulo de 60° y representa el punto máximo de operación a fin de que el sistema pueda cumplir con las especificaciones establecidas.

En seguida se determinará el valor de la ganancia K' basándonos en la condición de magnitud. De la función de transferencia de lazo abierto $G(s)H(s)$ se puede obtener el valor de K'

$$K' = s(s + 4)(s + 10) = s_1(s_1 + 4)(s_1 + 10)$$

La magnitud de s_1 es la distancia del origen al punto s_1 y se debe obtener midiendo en la gráfica. Dibujando a escala la gráfica la distancia s_1 es de 2.85. La magnitud $(s_1 + 4)$ es la distancia del polo en -4 hasta el punto s_1 , de la gráfica se obtiene una magnitud de 3.55. De la misma forma en la gráfica se obtiene una magnitud de 8.90 para la distancia entre el polo en -10 y el punto s_1 . Substituyendo los tres valores en la ecuación anterior se puede calcular el valor de K'

$$K' = 2.85(3.55)(8.90) = 90$$

como $K' = 200K_i$, entonces $K_i = K'/200 = 90/200 = 0.45$.

Cuando $K_i = 0.45$ ($K' = 90$) las raíces de la ecuación se pueden obtener de la gráfica y son -11.1 y $(-1.45 \pm j2.47)$. También de la gráfica se puede ver que para la posición del punto s_1 , la constante de tiempo máxima es de $1/1.45 = 0.69$ seg. (1.45 es la distancia del punto s_1 sobre el eje real) y la frecuencia natural amortiguada ω_d es igual a 2.47 radianes/seg. (2.47 es la distancia de s_1 sobre el eje imaginario $j\omega$).

8-8.- Cálculo de la Respuesta Transitoria de un Sistema.

También la gráfica del lugar geométrico de las raíces se puede utilizar para determinar la respuesta transitoria de un sistema de control.

Para ilustrar el método se considerará el cálculo de la respuesta del sistema de control representado en la fig. 8-24. Como se determinó previamente el valor de $K_i = 0.45$ y se supondrá una perturbación $U(s)$ igual a un escalón unitario. En la fig. 8-26 se representa un diagrama de bloques considerando a la señal de perturbación $U(s)$ como señal única de entrada.

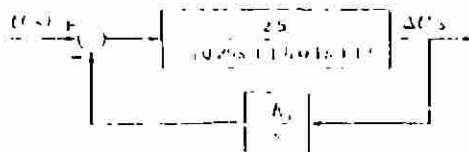


Fig. 8-26. Diagrama de Bloques con la señal de perturbación.

De la fig. 8-26, la función de transferencia directa $G(s)$ será

$$G(s) = \frac{2.5}{(0.25s + 1)(0.1s + 1)} = \frac{100}{(s + 4)(s + 10)}$$

mientras que $H(s) = \frac{2K_i}{s}$

$$G(s)H(s) = \frac{200 K_i}{s(s + 4)(s + 10)} = \frac{K'}{s(s + 4)(s + 10)}$$

por lo tanto el lugar geométrico de las raíces es el mismo de la fig. 8-25. Con $K_i = 0.45$ ($K' = 90$), la función de transferencia de lazo cerrado es:

$$\frac{\Delta C(s)}{U(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{\frac{100}{(s + 4)(s + 10)}}{1 + \frac{K'}{s(s + 4)(s + 10)}}$$

$$\frac{\Delta C(s)}{U(s)} = \frac{\frac{100}{(s + 4)(s + 10)}}{\frac{s(s + 4)(s + 10) + 90}{s(s + 4)(s + 10)}} = \frac{100s}{s(s + 4)(s + 10) + 90}$$

substituyendo en la función de transferencia anterior el valor de $U(s)$ igual a $1/s$ (transformada de Laplace del escalón unitario) y los valores ya conocidos de las raíces de la ecuación característica con $K' = 90$ de la fig 8-25.

$$\Delta C(s) = \frac{1}{s} \left[\frac{100s}{(s + 11.1)(s + 1.45 + j2.47)(s + 1.45 - j2.47)} \right]$$

$$\Delta C(s) = \frac{100}{(s + 11.1)(s + 1.45 + j2.47)(s + 1.45 - j2.47)}$$

desarrollando en fracciones parciales para calcular la transformada inversa tenemos:

$$\Delta C(s) = \frac{A}{(s + 11.1)} + \frac{B}{(s + 1.45 + j2.47)} + \frac{C}{(s + 1.45 - j2.47)}$$

$$\text{donde } A = \frac{100}{(s + 1.45 + j2.47)(s + 1.45 - j2.47)} \Bigg|_{s = -11.1}$$

$$B = \frac{100}{(s + 11.1)(s + 1.45 - j2.47)} \Bigg|_{s = -1.45 - j2.47}$$

$$C = \frac{100}{(s + 11.1)(s + 1.45 + j2.47)} \Bigg|_{s = -1.45 + j2.47}$$

Substituyendo los valores de "s" en A, B y C tenemos:

$$A = \frac{100}{(-11.1 + 1.45 + j2.47)(-11.1 + 1.45 - j2.47)}$$

$$A = \frac{100}{(-9.65 + j2.47)(-9.65 - j2.47)}$$

$$A = \frac{100}{(9.95 \angle 165.5^\circ)(9.95 \angle -165.5^\circ)} = 1.01 \quad (8-17)$$

$$B = \frac{100}{(-1.45 - j2.47 + 11.1)(-1.45 - j2.47 + 1.45 - j2.47)}$$

$$B = \frac{100}{(9.65 - j2.47)(-j4.94)}$$

$$B = \frac{100}{(9.95 \angle -14.5^\circ)(4.94 \angle -90^\circ)} = 2.03 \angle 104.5^\circ \quad (8-18)$$

$$C = \frac{100}{(-1.45 + j2.47 + 11.1)(-1.45 + j2.47 + 1.45 + j2.47)}$$

$$C = \frac{100}{(9.65 + j2.47)(j4.94)}$$

$$C = \frac{100}{(9.95 \angle 14.5^\circ)(4.94 \angle 90^\circ)} = 2.03 \angle -104.5^\circ \quad (8-19)$$

Los valores de A, B y C que han sido ya calculados en las ecuaciones anteriores (8-17), (8-18) y (8-19) también se pueden obtener en forma gráfica del lugar geométrico de las raíces como se ilustra en la fig. 8-27. Según se puede apreciar en la fig 8-27 las distancias entre los polos representan las cantidades vectoriales con las que se calcularon los valores de las constantes A, B y C.

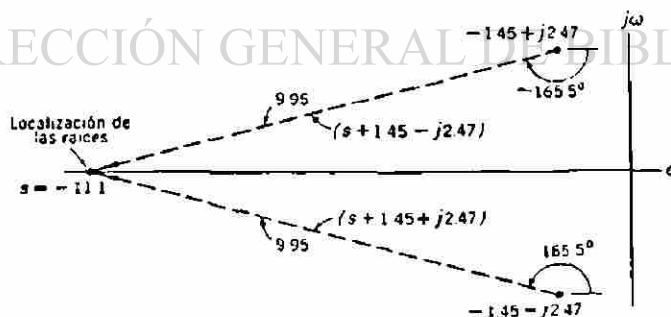


Fig. 8-27. Obtención Gráfica de las cantidades vectoriales.

Una vez que se conocen las constantes A, B y C se substituyen sus valores en la ecuación de $\Delta C(s)$ desarrollada en fracciones parciales de donde resulta la siguiente ecuación:

$$\Delta C(s) = \frac{1.01}{s + 11.1} + \frac{2.03 / 104.5^\circ}{s + 1.45 + j 2.47} + \frac{2.03 / -104.5^\circ}{s + 1.45 - j 2.47}$$

$$\Delta C(s) = \frac{1.01}{s + 11.1} + \frac{2.03 / 104.5^\circ (s + 1.45 - j 2.47) + 2.03 / -104.5^\circ (s + 1.45 + j 2.47)}{(s + 1.45 + j 2.47)(s + 1.45 - j 2.47)}$$

$$\Delta C(s) = \frac{1.01}{s + 11.1} + \frac{(-0.508 + j 1.96)(s + 1.45 - j 2.47) + (-0.508 - j 1.96)(s + 1.45 + j 2.47)}{(s + 1.45 + j 2.47)(s + 1.45 - j 2.47)}$$

$$\Delta C(s) = \frac{1.01}{s + 11.1} + \frac{-0.5s - 0.725 + j 1.23 + j 1.96s + j 2.84 - j^2 4.84}{[(s + 1.45) + j 2.47][(s + 1.45) - j 2.47]}$$

$$\Delta C(s) = \frac{1.01}{s + 11.1} + \frac{-s - 1.45 + 9.68}{(s + 1.45)^2 - j^2 (2.47)^2} = \frac{8.23 - s}{(s + 1.45)^2 + (2.47)^2}$$

$$\Delta C(s) = \frac{1.01}{s + 11.1} + \frac{-(s + 1.45)}{(s + 1.45)^2 + (2.47)^2} + \frac{(8.23 + 1.45) \left[\frac{2.47}{2.47} \right]}{(s + 1.45)^2 + (2.47)^2}$$

$$\Delta C(s) = \frac{1.01}{s + 11.1} - \frac{(s + 1.45)}{(s + 1.45)^2 + (2.47)^2} + 3.91 \frac{2.47}{(s + 1.45)^2 + (2.47)^2}$$

aplicando la transformada inversa de Laplace a la función compleja obtenemos:

$$\Delta C(t) = 1.01 e^{-11.1t} - e^{-1.45t} \cos 2.47t + 3.91 e^{-1.45t} \text{Sen } 2.47t$$

8-9. Conclusiones.

El método del lugar geométrico de las raíces para el análisis de los sistemas de control y su diseño es una herramienta muy útil como se ha demostrado en este capítulo. No solamente se puede establecer la ganancia de un sistema para las características deseadas de respuesta, sino que también se puede obtener información sobre la respuesta transitoria del mismo. Después de tener cierta experiencia con el método, el ingeniero de control puede predecir y evaluar rápidamente los efectos de posibles cambios en los parámetros del sistema, incluyendo la adición de otros elementos en el sistema, inspeccionando para ello las gráficas resultantes al variar las configuraciones de polos y ceros. Por lo anterior el método del lugar de las raíces es un instrumento de mucho valor para el ingeniero dedicado al estudio de los sistemas de control.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- Construir las gráficas del lugar geométrico de las raíces para las siguientes funciones de transferencia de lazo abierto, estableciendo la escala para varios puntos de la gráfica.

a) $G(s)H(s) = \frac{K}{s}$

d) $G(s)H(s) = \frac{K}{s^2 + 2s + 5}$

b) $G(s)H(s) = \frac{K}{s^2}$

e) $G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+4)}$

c) $G(s)H(s) = \frac{K(s+1)}{(s+5)}$

f) $G(s)H(s) = \frac{K(s+3)}{(s+1)(s+6)}$

2.- Utilizando las reglas desarrolladas para graficar el lugar de las raíces, trazar los lugares de las siguientes funciones de transferencia. Establecer la escala para varios puntos de las gráficas.

a) $G(s)H(s) = \frac{K}{s(s^2 + 4s + 8)}$

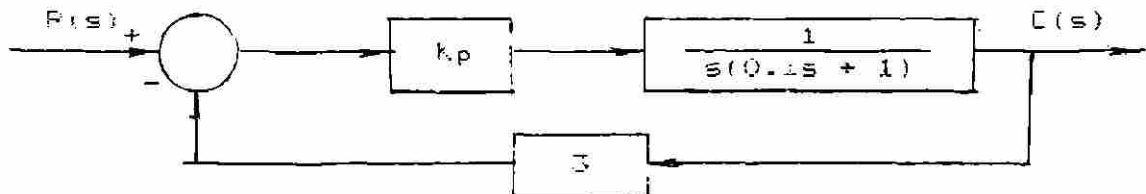
b) $G(s)H(s) = \frac{K}{s + 3}(s^2 + 2s + 2)$

c) $G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+3)(s+4)}$

d) $G(s)H(s) = \frac{K(s+1)}{s^2 + 4s + 8}$

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

3.- Para el sistema de control mostrado en la figura, determinar la ganancia k_p para tener una relación de amortiguamiento de 0.71.



CAPITULO IX

METODOS DE RESPUESTA A LA FRECUENCIA.

9-1.- Introducción.

En los primeros capítulos se presentaron los conceptos básicos y las herramientas matemáticas para analizar los sistemas de control retroalimentados. Luego se estudiaron los modelos matemáticos de algunos sistemas que sirvieron de base para encontrar sus funciones de transferencia. Se vió también que las funciones de transferencia se pueden representar en diagramas de bloques o gráficos de flujo de señal, lo cual nos ayuda a comprender mejor como están formados los sistemas con todas sus partes.

Posteriormente se estudiaron las acciones básicas de control en sus diferentes tipos, analizando lo que es la respuesta transitoria y el error que nos define la exactitud de un sistema de control.

En el capítulo VIII se ha presentado un método de análisis y diseño de sistemas de control denominado el Método del Lugar de las Raíces el cual predominantemente se utiliza en función del tiempo.

En este capítulo se presentan tres Métodos de Respuesta a la Frecuencia que conjuntamente con el Método del Lugar de las Raíces constituyen los cuatro métodos clásicos de análisis de los sistemas de control. Los tres métodos que se estudiarán en seguida son llamados:

- 1.- Diagramas de Bode
- 2.- Criterio de Nyquist
- 3.- Cartas de Nichols

Los métodos de Respuesta a la Frecuencia son totalmente diferentes al método del Lugar de las Raíces. El concepto de Respuesta a la Frecuencia significa obtener la respuesta en estado estable de un sistema de control al cual se le aplica como señal de entrada una señal senoidal de amplitud fija, pero una frecuencia que puede variar en cierto rango. El concepto de respuesta a la frecuencia se ilustra en la fig. 9-1, en donde se puede ver que a un sistema lineal se le aplica como entrada una señal senoidal $R_0 \text{Sen} \omega t$ y se obtiene una salida o respuesta $C_0 \text{Cos}(\omega t + \phi)$. La forma de las señales de entrada y salida se muestran en la fig. 9-1b.

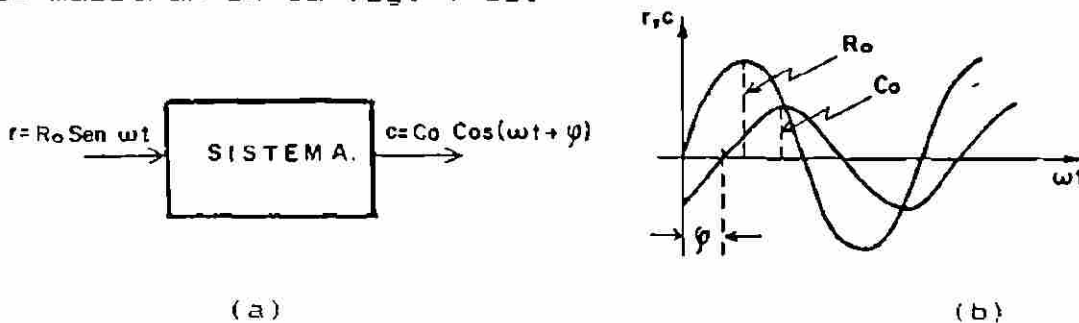


Fig. 9-1. Respuesta a la Frecuencia.

La respuesta a la frecuencia está caracterizada por dos cantidades la relación de amplitudes C_o/R_o de las señales de entrada y salida, y el defasamiento ϕ que existe entre las dos señales. Con los valores que se obtienen, para diferentes frecuencias, se pueden elaborar gráficas relativamente sencillas, cuya adecuada interpretación, nos permitirá no sólo conocer las características de un sistema, sino también modificar las mismas características cuando la respuesta que se obtiene no es la salida deseada.

La relación de las amplitudes C_o/R_o y el defasamiento ϕ , se pueden obtener en dos formas, calculados matemáticamente o medidos experimentalmente. En el primer caso, se substituye $s=j\omega$ en la función de transferencia y se calculan los valores de C_o/R_o y ϕ , para diferentes frecuencias, desde cero a infinito. Experimentalmente al sistema físico se le aplica una señal senoidal cuya frecuencia se va variando, midiendo para cada valor de frecuencia, la relación de amplitudes C_o/R_o y el defasamiento ϕ de las señales de entrada y de salida. El hecho de poder obtener experimentalmente los valores de C_o/R_o y ϕ es muy importante ya que algunas veces es difícil obtener el modelo matemático de un sistema en forma analítica.

El procedimiento para calcular analíticamente los datos de respuesta a la frecuencia es sencillo y se puede plantear en cuatro pasos como sigue:

Paso 1.- Se obtiene la función de transferencia para el sistema C_o/R_o , donde C_o y R_o son las transformadas de Laplace de las señales de salida y de entrada respectivamente.

Paso 2.- En la función de transferencia, se substituye $s=j\omega$. La justificación de esta substitución se verá un poco más adelante.

Paso 3.- Para varios valores de la frecuencia ω , se determina la relación de magnitudes C_o/R_o y el ángulo de defasamiento ϕ .

Paso 4.- Se grafican los resultados del paso 3 en coordenadas polares o rectangulares. Las gráficas obtenidas no solamente es una forma de representar los datos de la respuesta a la frecuencia, sino que también son la base para los métodos de análisis y diseño de los sistemas de control.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

9-2.- Justificación de la substitución de s por $j\omega$.

En el paso 2 de la sección anterior se dijo que se debe substituir $s=j\omega$ en la función de transferencia. Esta substitución será justificada. El procedimiento será partiendo de una función de transferencia general, obtener la respuesta en estado estable a una señal de entrada senoidal en función de la transformada de Laplace, y después substituir directamente $s=j\omega$. Si las respuestas son idénticas, la substitución será justificada ya que no altera la función de transferencia original.

En general la ecuación diferencial para un sistema de control lineal se puede expresar en la siguiente forma:

$$a_n \frac{d^n c}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} c}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dc}{dt} + a_0 c = b_m \frac{d^m r}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} r}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dr}{dt} + b_0 r$$

Transformando por Laplace la ecuación diferencial anterior,
 $a_n s^n C(s) + a_{n-1} s^{n-1} C(s) + \dots + a_1 s C(s) + a_0 C(s) =$

$$b_m s^m R(s) + b_{m-1} s^{m-1} R(s) + \dots + b_1 s R(s) + b_0 R(s)$$

sacando como factor común $C(s)$ y $R(s)$ se tiene:

$$C(s) [a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0] = R(s) [b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0]$$

de donde se puede obtener la función de transferencia $C(s)/R(s)$

$$F(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (9-1)$$

Siendo la entrada y la salida del sistema señales senoidales, se pueden representar en forma exponencial aplicando la fórmula de Euler como:

$$r = R_0 e^{j\omega t} \quad \text{y} \quad c = C_0 e^{j(\omega t + \phi)}$$

donde ϕ es el ángulo de defasamiento entre la señal de entrada y la salida. Substituyendo "r" y "c" en la ecuación diferencial general, se tiene:

$$\begin{aligned} & a_n \frac{d^n}{dt^n} [C_0 e^{j(\omega t + \phi)}] + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} [C_0 e^{j(\omega t + \phi)}] + \dots + a_1 \frac{d}{dt} [C_0 e^{j(\omega t + \phi)}] + a_0 C_0 e^{j(\omega t + \phi)} \\ & = b_m \frac{d^m}{dt^m} [R_0 e^{j\omega t}] + b_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} [R_0 e^{j\omega t}] + \dots + b_1 \frac{d}{dt} [R_0 e^{j\omega t}] + b_0 R_0 e^{j\omega t} \end{aligned}$$

derivando y sacando C_0 y R_0 como factor común se tiene

$$\begin{aligned} C_0 e^{j(\omega t + \phi)} [a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (j\omega) + a_0] \\ = R_0 e^{j\omega t} [b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_1 (j\omega) + b_0] \end{aligned}$$

de donde se puede obtener la función de transferencia

$$F(s) = \frac{C_0 e^{j(\omega t + \phi)}}{R_0 e^{j\omega t}} = \frac{C_0}{R_0} e^{j\phi} = \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_1 (j\omega) + b_0}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (j\omega) + a_0}$$

Comparando la ecuación anterior con la 9-1 se puede observar que el mismo resultado se obtiene substituyendo $s = j\omega$ en la ecuación 9-1, con lo cual queda plenamente justificada la substitución. Una vez que se substituye $s = j\omega$, la función de transferencia se denomina función de transferencia isócrona.

9-3.- Gráficas en Coordenadas Polares.

A continuación se estudiarán dos sistemas de control para los cuales la información de la respuesta a la frecuencia será presentada en coordenadas polares. Más adelante en la siguiente sección se trazarán las gráficas en coordenadas rectangulares.

En la fig. 9-2 se representa un sistema mecánico formado por un resorte y un amortiguador, donde K es la constante del resorte y "c" es el coeficiente de fricción viscosa del amortiguador. Se representa con "x" una fuerza que constituye la señal de entrada al sistema y con "y" un desplazamiento del punto entre el resorte y el amortiguador.

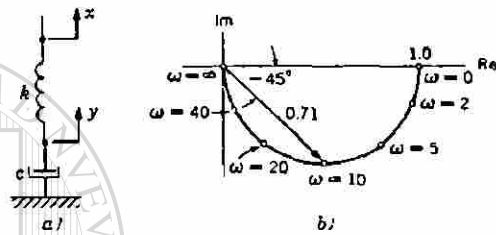


Fig. 9-2. Gráfica Polar para el sistema mostrado.

La ecuación diferencial que representa la operación del sistema es

$$K(x - y) = c \frac{dy}{dt}$$

transformando por Laplace la ecuación anterior tenemos:

$$KX(s) - KY(s) = CsY(s) \quad \text{de donde}$$

$$Y(s)[Cs + K] = KX(s)$$

o bien
$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{Cs + K} = \frac{K/K}{\frac{Cs + K}{K}} = \frac{1}{\tau s + 1}$$

donde τ es una constante de tiempo del sistema, $\tau=C/K$.
 Substituyendo $s = j\omega$ en la ecuación anterior y suponiendo que $\tau = 0.1$ seg.

$$\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega\tau} = \frac{1}{1 + j0.1\omega} \quad (9-2)$$

En seguida se darán diferentes valores a "omega" para variar la frecuencia del sistema (recuerde que $\omega = 2\pi f$) y obtener puntos para trazar la gráfica polar. Por ejemplo si le damos el valor a $\omega = 10$

$$\frac{Y}{X} = \frac{1}{1 + j1} = \frac{1}{1.41 \angle 45^\circ} = 0.71 \angle -45^\circ$$

El estudiante le puede dar otros valores a ω , con los cuales se obtendrá la tabla 9-1. Los datos de la tabla se grafican en el plano complejo en la fig. 9-2, utilizando ω como parámetro.

TABLA 9-1

Datos de Respuesta a la Frecuencia.

ω (Rad/Seg)	$M(\omega)$	$\phi(\omega)$ (grados)
0	1.00	0.0
2	0.98	- 11.3
5	0.89	- 26.6
10	0.71	- 45.0
20	0.45	- 63.4
40	0.24	- 76.0
∞	0.00	- 90.0

Como segundo ejemplo se considerará el sistema mecánico mostrado en la fig. 9-3, denominado sistema masa-resorte-amortiguador.

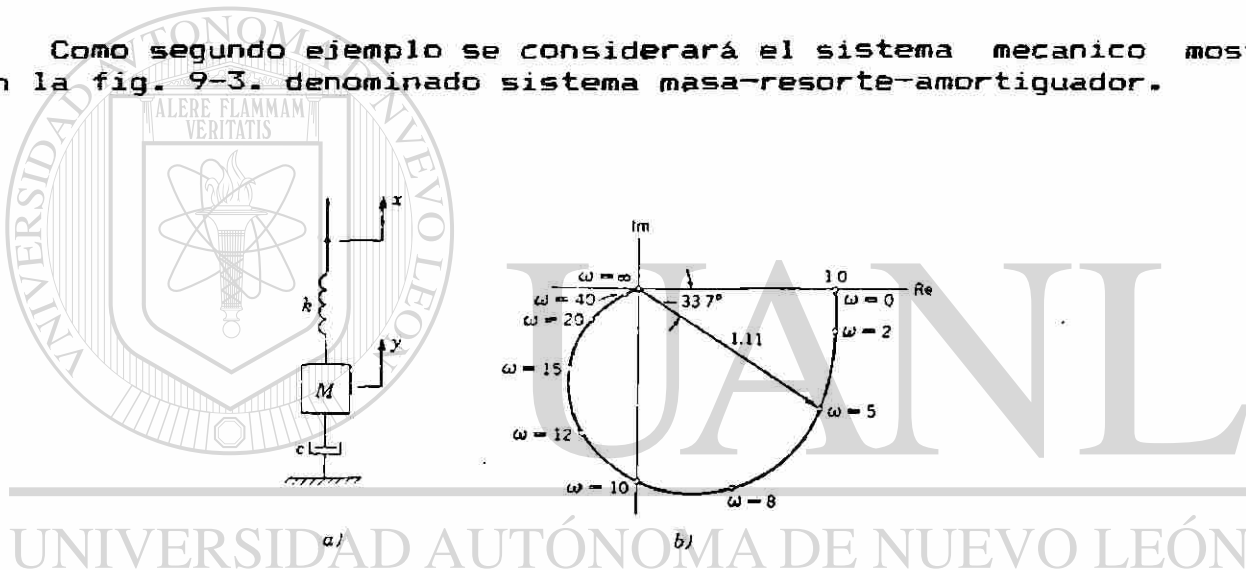


Fig. 9-3. Gráfica Polar para el sistema mostrado.

En la fig. 9-3, M es la masa, K es la constante del resorte y c es el coeficiente de fricción viscosa del amortiguador. La señal de entrada al sistema es una fuerza "x" y la salida es el desplazamiento de la masa "y". Basándonos en la segunda Ley de Newton y haciendo un diagrama de cuerpo libre de la masa, la ecuación de suma de fuerzas es

$$\Sigma F = Ma$$

$$K(x - y) - c \frac{dy}{dt} = M \frac{d^2 y}{dt^2}$$

o bien
$$M \frac{d^2 y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} + Ky = Kx$$

Transformando por Laplace la ecuación diferencial anterior, se tiene:

$$M s^2 Y(s) + c s Y(s) + K Y(s) = K X(s)$$

$$Y(s) [M s^2 + c s + K] = K X(s)$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{M s^2 + c s + K} = \frac{1}{\frac{M}{K} s^2 + \frac{c}{K} s + 1}$$

la función de transferencia anterior se puede expresar en la siguiente forma:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta s}{\omega_n} + 1} \quad (9-3)$$

donde ω_n = frecuencia natural no amortiguada del sistema

y ζ = relación de amortiguamiento

Suponiendo que $\omega = 10$ Radianes/Seg, $\zeta = 0.5$ y además substituyendo $s=j\omega$ en la ecuación 9-3, la función de transferencia se convierte en la siguiente ecuación:

$$\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{1}{0.01(j\omega)^2 + 0.1j\omega + 1} = \frac{1}{(1 - 0.01\omega^2) + j0.1\omega} \quad (9-4)$$

Ya teniendo la función de transferencia (9-4), el siguiente paso es darle valores diferentes a ω y obtener una tabla que nos indique la relación de magnitud y el ángulo de fase para los diferentes valores de ω . Para ilustrar el procedimiento se dará el valor de $\omega = 5$.

$$\frac{Y}{X} = \frac{1}{(1 - 0.25) + j0.5} = \frac{1}{0.9 \angle 33.7^\circ} = 1.11 \angle -33.7^\circ$$

El estudiante debe darle otros valores a ω con el fin de completar los valores que se representan en la tabla 9-2.

TABLA 9-2

Datos de Respuesta a la Frecuencia.

ω (Rad/Seg)	$M(\omega)$	$\phi(\omega)$ (grados)
0	1.00	0.00
2	1.02	- 11.8
5	1.11	- 33.7
8	1.14	- 65.8
10	1.00	- 90.0
12	0.78	- 110.1
15	0.51	- 129.8
20	0.28	- 146.3
40	0.06	- 165.1
70	0.02	- 171.7
∞	0.00	- 180.0

9-4.- Gráficas en Coordenadas Rectangulares.

La respuesta a la frecuencia también se puede graficar en coordenadas rectangulares. La relación de magnitud y el ángulo de fase se grafican en función de la frecuencia. La frecuencia se grafica sobre una escala logarítmica, con lo cual se logra un mayor rango de frecuencias en el análisis del sistema. La relación de magnitud se grafica en decibeles, lo cual es una representación logarítmica muy usada cuando se manejan dos niveles de señal. Si M es la relación de magnitud y " m " es la misma magnitud expresada en decibeles (db), se puede representar matemáticamente el valor de " m " en la siguiente forma:

$$m = 20 \log_{10} M. \quad (9-5)$$

por ejemplo: Si $M = 1$ $m = 20(0) = 0$ db
 Si $M = 10$ $m = 20(1) = 20$ db
 Si $M = 100$ $m = 20(2) = 40$ db
 Si $M = 0.1$ $m = 20(9.0 - 10) = -20$ db
 Si $M = 0.2$ $m = 20(9.301 - 10) = -13.98$ db

La escala de los ángulos de fase $\phi(\omega)$ es una escala lineal. Por lo tanto para graficar en coordenadas rectangulares se utiliza un papel especial semilogarítmico, con una escala lineal y la otra logarítmica. Los datos contenidos en las tablas 9-1 y 9-2 que se obtuvieron para los sistemas de las figuras 9-2 y 9-3 se grafican ahora en coordenadas rectangulares en las figuras 9-4 y 9-5.

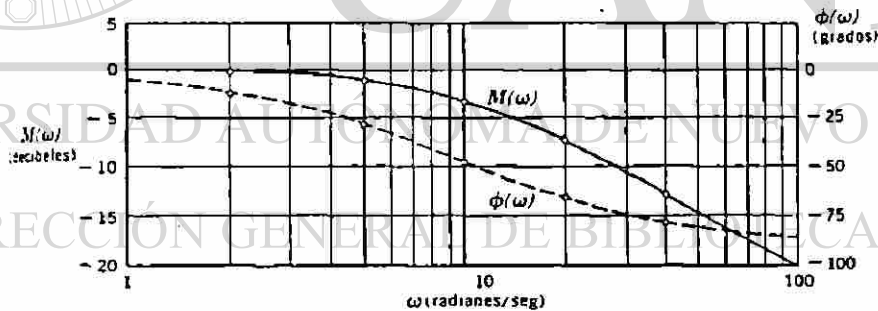


Fig. 9-4. Gráfica en coordenadas rectangulares para el sistema representado en la figura 9-2-a.

La única columna que cambia tanto de la Tabla 9-1 como de la Tabla 9-2 es la columna central que representa $M(\omega)$, la cual se substituye por los valores de " m " aplicando para ello la ecuación 9-5.

En la Fig. 9-6 se representan los esquemas de algunas funciones de transferencia comunes graficadas en coordenadas rectangulares.

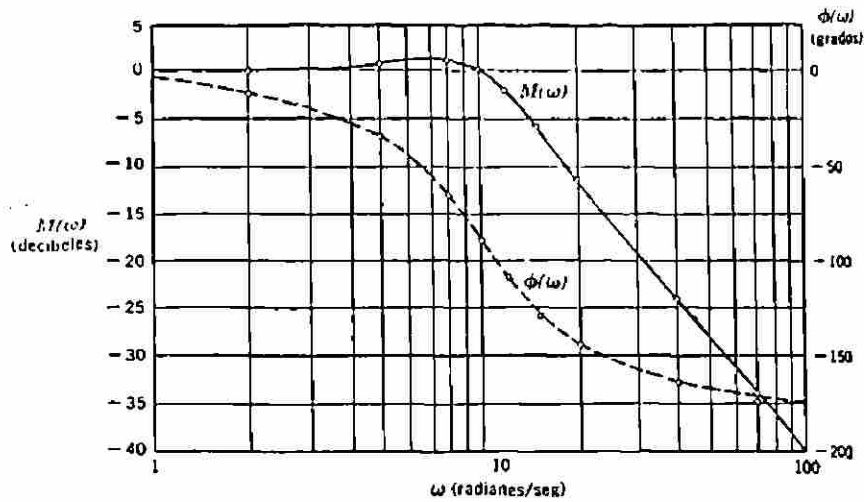


Fig. 9-5. Gráfica en coordenadas rectangulares para el sistema mostrado en la figura 9-3-a.

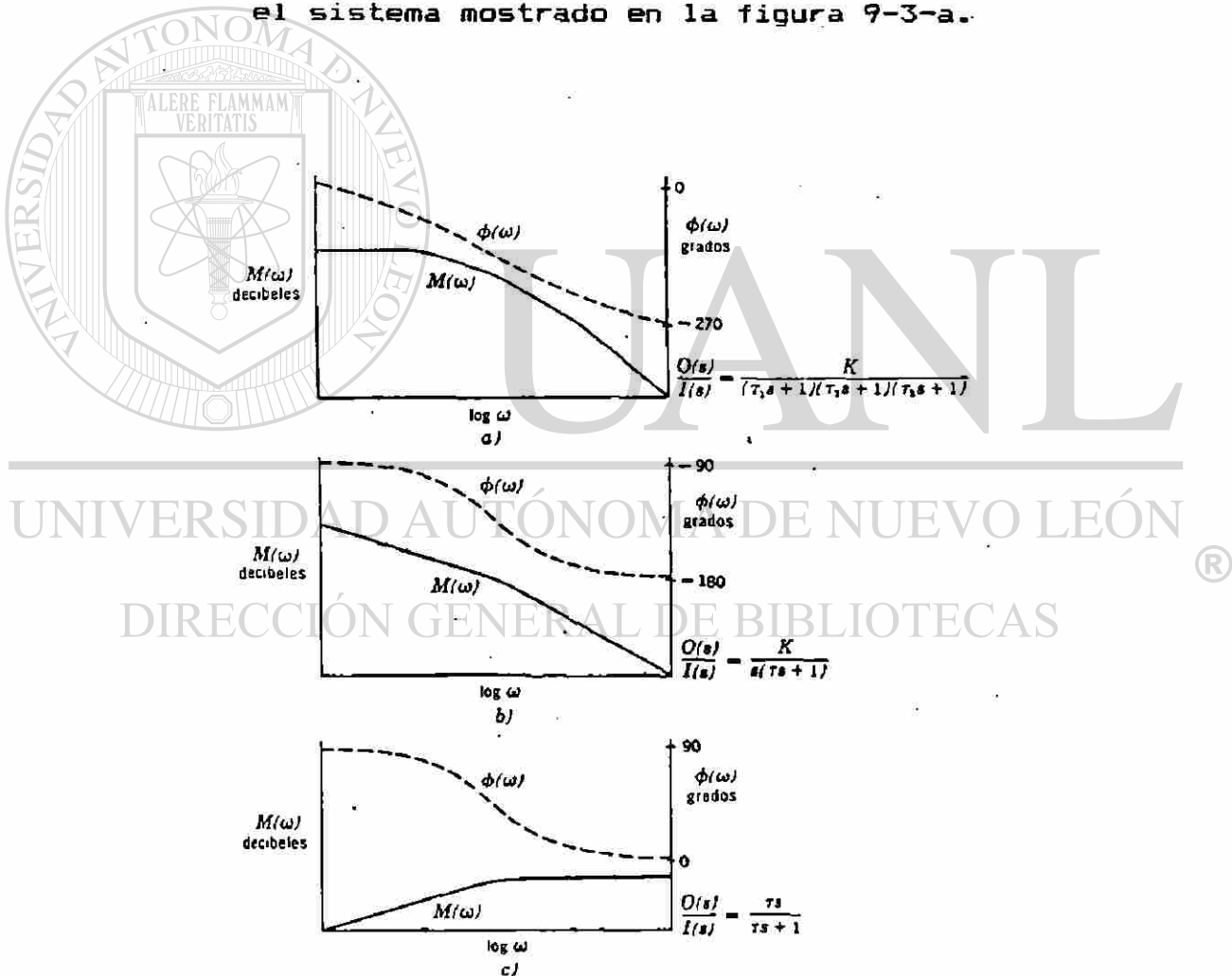


Fig. 9-6. Esquemas de gráficas rectangulares para algunas funciones de transferencia comunes.

9-5.- El punto de vista gráfico.

Con el proposito de comprender mejor lo que sucede con la respuesta a la frecuencia en un sistema de control, se estudiará a continuación un método gráfico que nos amplía nuestra visión al respecto. Este método también nos ayuda a introducirnos en el análisis gráfico que se utilizará ampliamente en las proximas secciones.

Supongamos que se tiene un sistema de control de primer orden cuya función de transferencia es :

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s + r} \tag{9-6}$$

Si se desea analizar su respuesta a la frecuencia por el método gráfico, lo primero que se hace es trazar en un plano complejo el único polo que tiene en $s = -r$, como se indica en la fig. 9-7-a. En seguida se substituye $s = j\omega$ con lo que la ecuación 9-6 se convierte en:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{j\omega + r} \tag{9-7}$$

Si se le dan valores a "ω" se podrán obtener diferentes valores para C(s)/R(s). Por ejemplo en la figura 9-7-b se le ha dado el valor de $\omega = \omega_1$, con lo que se tienen en la gráfica dos vectores, el vector $-r$ y el vector $j\omega_1$. Realizando la sustracción gráfica de estos dos vectores, la diferencia es:

$$j\omega_1 - (-r) = j\omega_1 + r = r + j\omega_1$$

En la figura 9-7-b se puede ver que:

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} \Big|_{\omega=\omega_1} = \frac{K}{j\omega_1 + r} = \frac{K}{r + j\omega_1} = \frac{K}{A_1 \angle \theta_1} = \frac{K}{A_1} \angle -\theta_1$$

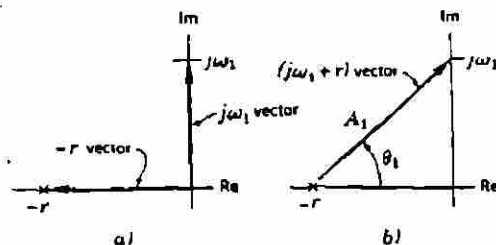


Fig. 9-7 El punto de vista gráfico.

Relaciones de magnitud y ángulos de fase para otros valores de la frecuencia "ω" se pueden obtener de manera semejante trazando vectores que van de -r a otros valores de jω.

Después de darle valores diferentes a " ω ", se puede llegar a las siguientes conclusiones; con $\omega = 0$, la razón de magnitud es igual a 1 y el ángulo de fase es 0° . Cuando $\omega \rightarrow \infty$, la razón de magnitud es cero y el ángulo de fase es de 90° .

A continuación se analiza por el método semigráfico otra función de transferencia un poco mas complicada.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K(s + r_1)}{(s + r_2)(s + r_3)} \quad (9-8)$$

La función de transferencia anterior tiene un cero en $s = -r_1$ y dos polos en $s = -r_2$ y en $s = -r_3$. En la figura 9-8 se representa el cero con un pequeño círculo y los dos polos se consideran complejos y también se representan en la misma figura. Se trazan vectores desde el cero y cada uno de los polos al punto $s = j\omega_1$. Las magnitudes y los ángulos de cada vector también se indican en la figura. Aplicando cada vector a la ecuación 9-8, la función de transferencia se convierte a la siguiente forma:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{KA_1 \angle \theta_1}{(A_2 \angle \theta_2)(A_3 \angle \theta_3)} = \frac{KA_1}{A_2 A_3} \angle \theta_1 - \theta_2 - \theta_3$$

En la fig. 9-8 se puede ver que al ir variando el valor de " ω ", se van modificando los valores de los ángulos y de las magnitudes de cada vector, lo cual produce una variación lógica en la respuesta a la frecuencia del sistema de control.

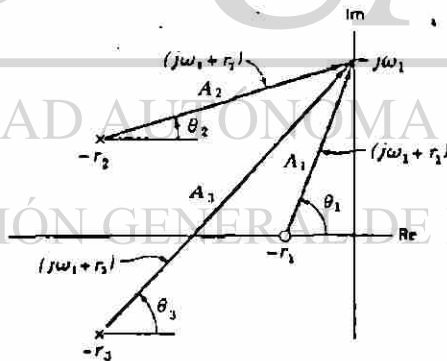
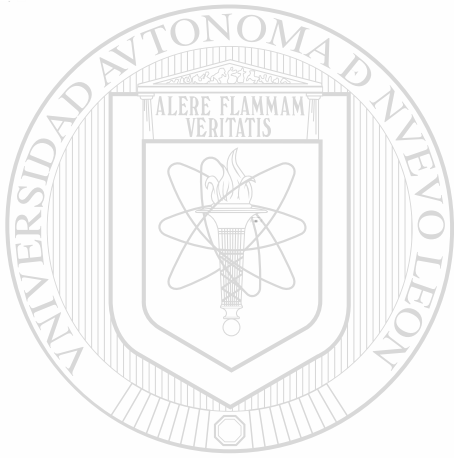


Fig. 9-8. El método gráfico con dos polos y un cero.

9-6.- Determinación experimental de la respuesta a la frecuencia.

Cuando no se conoce la función de transferencia del sistema de control, la respuesta a la frecuencia se puede obtener en forma experimental y a partir de la respuesta se puede obtener la función de transferencia. Desde luego los datos experimentales también se pueden usar para comprobar una función de transferencia que se haya obtenido en forma analítica.

La única limitación del método experimental consiste en que el sistema real debe de aceptar la aplicación de una señal de entrada senoidal y la salida o respuesta se debe observar también como otra señal senoidal , para poder establecer la comparación entre magnitudes y ángulos de defasamiento. Desafortunadamente en muchos casos esto no es sencillo, sobre todo cuando el sistema de control es de naturaleza mecánica. Por lo anterior el método experimental se facilita para sistemas eléctricos o electrónicos, en los cuales la aplicación de la señal de entrada se obtiene de un generador de señales senoidales y las curvas de entrada y salida se pueden trazar en un graficador electrónico o se pueden grabar en la pantalla de un osciloscopio de doble canal.



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

9-7 Diagramas de Bode.

Las gráficas de Bode se trazan en papel semilogarítmico. Una gráfica es de relación de magnitud contra frecuencia y la otra es de ángulo de defasamiento contra frecuencia, ambas gráficas en coordenadas rectangulares. Para trazar la frecuencia se utiliza una escala logarítmica y para el ángulo y la relación de magnitud las escalas son lineales. La relación de magnitudes se expresa en decibeles, aplicando como ya se vió anteriormente la fórmula 9-5.

Para trazar los diagramas de Bode de una función de transferencia que tiene basicamente términos constantes, polos y ceros, el procedimiento que se utiliza es el siguiente: se traza un diagrama independiente para cada constante, para cada polo y para cada cero. Una vez que se tienen las gráficas individuales, las cuales se obtienen con relativa sencillez, se obtiene la gráfica total, aprovechando el hecho de que los productos de magnitudes en decibeles o logaritmos se convierten en sumas y las divisiones en restas. De la misma forma se realizan las sumas y restas de ángulos de polos y de ceros de la función de transferencia. Lo anterior se puede expresar matematicamente por la siguiente ecuación

$$\text{Si } F(s) = F_1(s)F_2(s)F_3(s)\dots\dots$$

entonces

$$F(\text{en dB}) = F_1(\text{en dB}) + F_2(\text{en dB}) + F_3(\text{en dB}) + \dots\dots$$

Por lo tanto para obtener el diagrama de Bode de una función de transferencia cualquiera $C(s)/R(s)$, sólo es necesario graficar en forma individual las amplitudes y corrimientos de fase de los diferentes tipos de términos que se pueden presentar en una función compleja y que son los siguientes:

- 1.- Cantidades Constantes.
- 2.- Polos y Ceros en el origen del plano complejo.
- 3.- Polos y Ceros en el eje real.
- 4.- Pares de Polos y Ceros complejos conjugados.

La curva en decibeles completa es entonces la suma de las curvas individuales y la curva definitiva de ángulo de defasamiento es la suma de las curvas individuales de corrimiento de fase.

9-7-1.-Gráficas de Cantidades Constantes.

Cuando una función de transferencia tiene una cantidad constante, la cual puede bien ser una ganancia K , tendrá una amplitud constante en decibeles igual a

$$20 \log_{10} K$$

y un ángulo de 0° . Si la constante es negativa $-K$, tendrá una amplitud en decibeles igual a

$$20 \log_{10} |K|$$

y un ángulo de 180° .

Por ejemplo si se desea trazar los diagramas de Bode de la función

$$F = 100$$

la amplitud en decibeles será $m = 20 \log_{10}(100) = 20 [2] = 40 \text{ dB}$
 y el ángulo de defasamiento es $\phi = 0^\circ$. En la fig. 9-9 se representan
 las dos gráficas en función de la frecuencia.

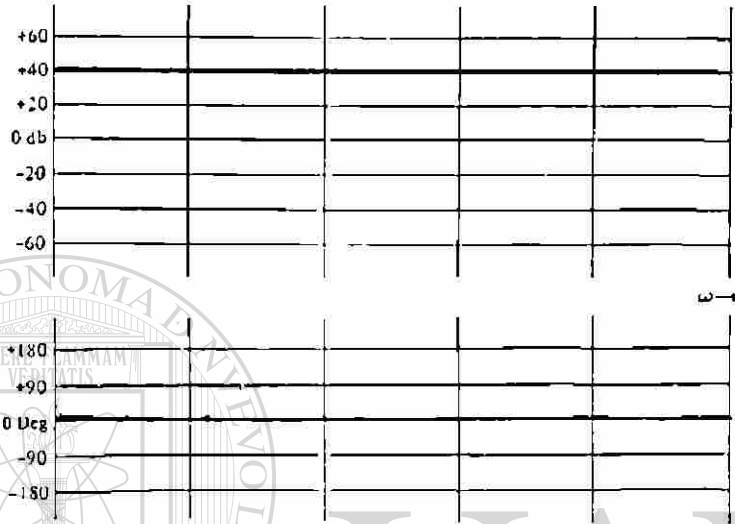


Fig. 9-9. Curva de respuesta a la frecuencia para $F = 100$

Si se trata de graficar los diagramas de Bode para la función

$$F = -\frac{1}{10}$$

la magnitud en decibeles será $m = 20 \log_{10}\left[-\frac{1}{10}\right] = -20 \text{ dB}$
 y el ángulo de defasamiento es $\phi = 180^\circ$ o bien -180° . En la fig. 9-10
 se representan las dos gráficas de Bode.



Fig. 9-10. Respuesta a la frecuencia para $F = -1/10$

9-7-2.- Gráficas de Polos y Ceros en el origen.

Se analizará en primer lugar la función de transferencia más simple que se puede tener de este tipo

$$F(s) = s \quad \text{substituyendo } s = j\omega \quad F(j\omega) = j\omega$$

La magnitud para esta función compleja en decibeles será:

$$m = 20 \log_{10}[F(s)] = 20 \log_{10}[\omega] \text{ dB}$$

y el ángulo de defasamiento $\phi(\omega) = F(s=j\omega) = 90^\circ$

Para trazar la gráfica de magnitud se darán valores a la frecuencia ω . Solo se requiere dar dos o tres valores para obtener la gráfica por ejemplo:

si $\omega = 1$	$m = 20 \log_{10}[1] = 0 \text{ dB}$
si $\omega = 10$	$m = 20 \log_{10}[10] = 20 \text{ dB}$
si $\omega = 100$	$m = 20 \log_{10}[100] = 40 \text{ dB}$

En la fig. 9-11 se representan las gráficas para $F(s) = s$, y se puede observar que la pendiente de la gráfica de magnitud es de +20 dB por década.

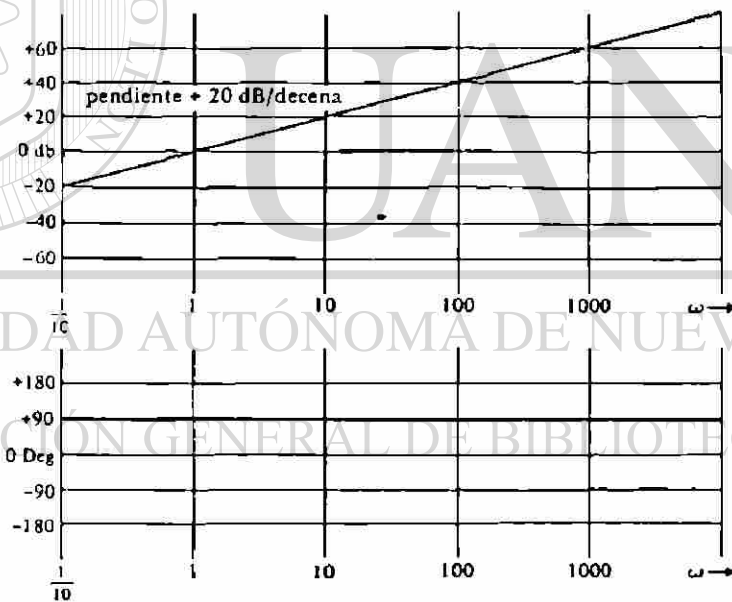


Fig. 9-11. Gráficas de respuesta a la frecuencia para $F(s) = s$

Las gráficas para $F(s) = s^2$ se pueden obtener como el doble de las gráficas $F(s) = s$, debido a que $s^2 = (s)(s)$ y en logaritmos los productos se convierten en sumas. El mismo procedimiento es válido para cualquier potencia de "s".

En la fig. 9-12 se representan las gráficas para $F(s) = s^2$. Se puede ver que la gráfica de magnitud tiene una pendiente de 40 dB por década (el doble de la gráfica anterior) y el ángulo es de 180° que también es el doble del ángulo de la gráfica 9-11.

9-7-2.- Gráficas de Polos y Ceros en el origen.

Se analizará en primer lugar la función de transferencia más simple que se puede tener de este tipo

$$F(s) = s \quad \text{substituyendo } s = j\omega \quad F(j\omega) = j\omega$$

La magnitud para esta función compleja en decibeles será:

$$m = 20 \log_{10}[F(s)] = 20 \log_{10}[\omega] \text{ dB}$$

y el ángulo de defasamiento $\phi(\omega) = F(s=j\omega) = 90^\circ$

Para trazar la gráfica de magnitud se darán valores a la frecuencia ω . Solo se requiere dar dos o tres valores para obtener la gráfica por ejemplo:

si $\omega = 1$	$m = 20 \log_{10}[1] = 0 \text{ dB}$
si $\omega = 10$	$m = 20 \log_{10}[10] = 20 \text{ dB}$
si $\omega = 100$	$m = 20 \log_{10}[100] = 40 \text{ dB}$

En la fig. 9-11 se representan las gráficas para $F(s) = s$, y se puede observar que la pendiente de la gráfica de magnitud es de +20 dB por década.

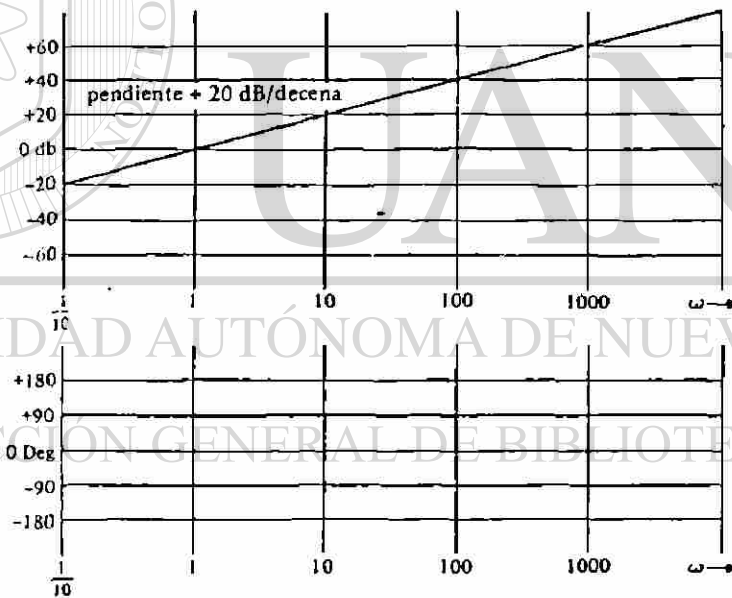


Fig. 9-11. Gráficas de respuesta a la frecuencia para $F(s) = s$

Las gráficas para $F(s) = s^2$ se pueden obtener como el doble de las gráficas $F(s) = s$, debido a que $s^2 = (s)(s)$ y en logaritmos los productos se convierten en sumas. El mismo procedimiento es válido para cualquier potencia de "s".

En la fig. 9-12 se representan las gráficas para $F(s) = s^2$. Se puede ver que la gráfica de magnitud tiene una pendiente de 40 dB por década (el doble de la gráfica anterior) y el ángulo es de 180° que también es el doble del ángulo de la grafica 9-11.

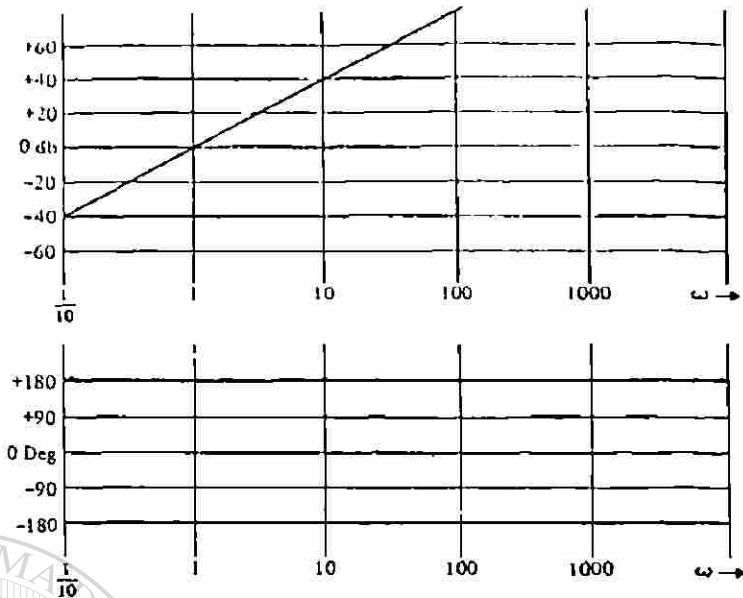


Fig. 9-12. Gráficas de respuesta a la frecuencia para $F(s) = s^2$

Las gráficas de respuesta a la frecuencia para la función compleja

$$F(s) = \frac{1}{s} = s^{-1}$$

se pueden obtener como las gráficas negativas de $F(s) = s$, tanto la magnitud en decibeles como el ángulo de defasamiento. En la fig. 9-13 se representan las dos gráficas para $F(s) = 1/s$.

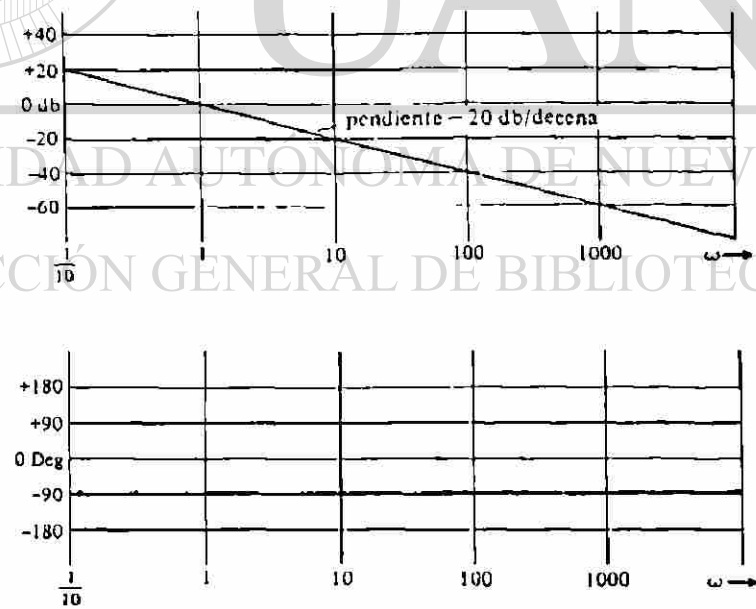


Fig. 9-13. Gráficas de respuesta a la frecuencia para $F(s) = 1/s$.

En la fig. 9-13 se ve que la pendiente de la gráfica de magnitud es de - 20 dB/ decada y el ángulo es de - 90°, cuyos valores son los negativos de la fig. 9-11.

9-7-3.-Gráficas de polos y ceros en el eje real.

Como primer ejemplo de este tipo de función se analizará la siguiente función:

$$F(s) = \frac{s + a}{a}$$

la función anterior se puede expresar en la siguiente forma:

$$F(s) = \frac{s}{a} + 1 = 1 + \frac{s}{a}$$

substituyendo $s = j\omega$ se convierte en $F(j\omega) = 1 + j \frac{\omega}{a}$

Para obtener las gráficas de magnitud y ángulo se hará el análisis de la función primeramente cuando $\omega \ll a$. (a es una cantidad constante)

Si el valor de ω es mucho menor que "a", (por lo menos diez veces menor) la cantidad imaginaria de la función compleja se puede despreciar por lo que

$$F(j\omega) = 1$$

La magnitud $m = 20 \log_{10}[F(j\omega)] = 20 \log_{10}[1] = 0 \text{ dB}$

El ángulo $\phi = \angle F(j\omega) = \angle 1 = 0^\circ$

Si ahora el valor de $\omega \gg a$ (por lo menos diez veces mayor ω que a) la cantidad real de la función compleja (o sea el 1) se puede despreciar sin incurrir en mucho error, por lo que

$$F(j\omega) = j \frac{\omega}{a}$$

La magnitud $m = 20 \log_{10}[F(j\omega)] = 20 \log_{10} \frac{\omega}{a} = 20[\log \omega - \log a]$

El ángulo $\phi = \angle F(j\omega) = \angle j\omega/a = 90^\circ$

Cuando $\omega = a$

La magnitud $m = 20 \log [F(j\omega)] = 20 \log [1 + j1] = 20 \log \sqrt{2}$
 $m = 20[0.1505] = 3.01 \text{ dB}$

El ángulo $\phi = \angle F(j\omega) = \angle 1 + j1 = 45^\circ$

Tanto las curvas reales como las aproximadas se presentan en la fig. 9-14. La curva de magnitud en decibeles se puede aproximar bastante a una recta a lo largo de 0 dB hasta $\omega = a$, punto llamado vertice de frecuencia o rodilla de la gráfica. Luego una recta inclinada hacia arriba cuando ω es mayor que "a" con una pendiente de +20 dB/decada de ω . Al utilizar la gráfica aproximada, el error máximo que se comete estará en el vértice de frecuencia ($\omega = a$), donde el valor real de la magnitud es de 3.01 decibeles.

En la práctica casi siempre se usa la gráfica aproximada, pero si se desea mayor exactitud, la gráfica se puede modificar ligeramente de tal modo que la magnitud en la rodilla sea de 3 decibeles.

La gráfica de ángulo de defasamiento es aproximada, con un error máximo de 6° (aproximadamente). El error máximo se presenta entre los valores de $a/10$ y a , lo mismo entre a y $10a$, como se indica en las graficas de la figura 9-14.

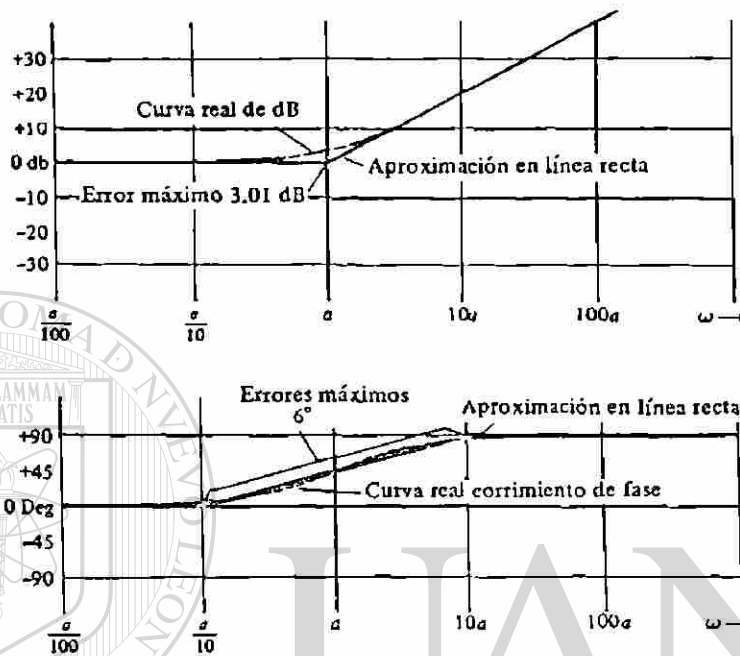


Fig. 9-14. Respuesta a la frecuencia para $F(s) = (s+a)/a$, a positiva

Si se quiere obtener la respuesta a la frecuencia para la función compleja

$$F(s) = \frac{a}{s+a} = \frac{1}{s/a+1}$$

las gráficas serán las curvas negativas de $(s+a)/a$ debido a que las dos funciones de transferencia son inversas entre si.

En la fig. 9-15 se representan las gráficas de Bode para la función compleja

$$F(s) = \frac{s+10}{10}$$

En la fig. 9-16 se representan los diagramas de Bode para la función compleja

$$F(s) = \frac{10}{s+10}$$

En las figuras 9-17 y 9-18 se representan los diagramas de Bode de las siguientes funciones complejas

$$F(s) = \frac{s-10}{-10} \quad \text{y} \quad F(s) = \frac{-10}{s-10}$$

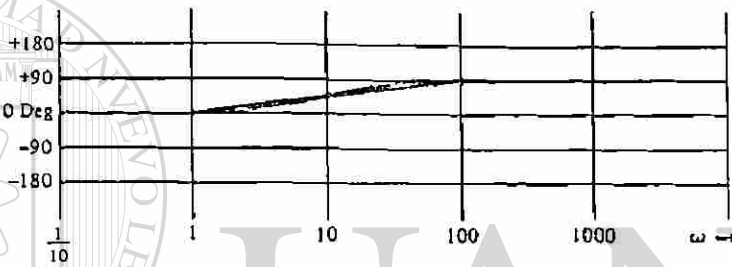
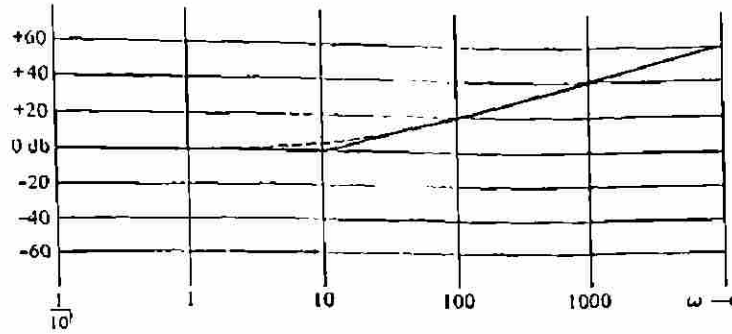


Fig. 9-15. Respuesta a la frecuencia para $F(s) = (s + 10)/10$

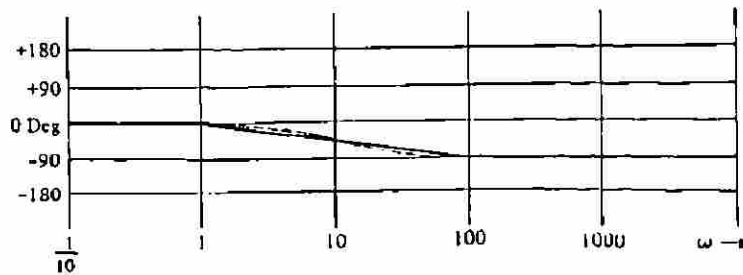
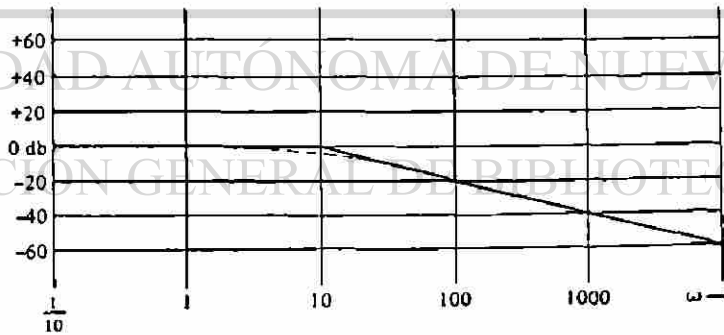


Fig. 9-16. Respuesta a la frecuencia para $F(s) = 10/(s + 10)$

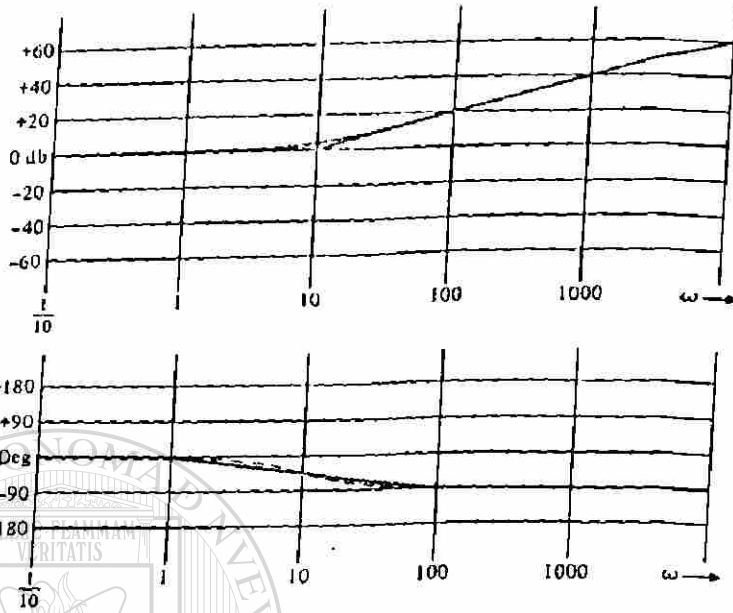


Fig. 9-17. Respuesta a la frecuencia para $F(s) = (s - 10)/(-10)$

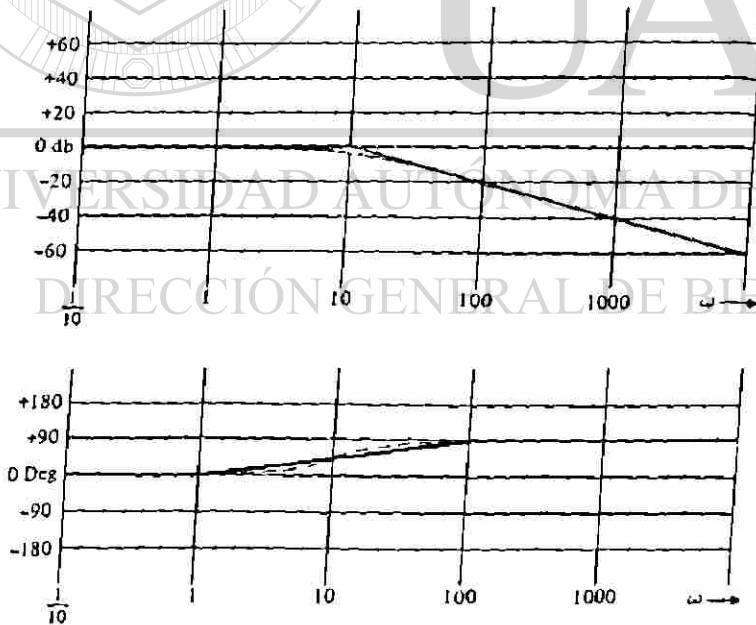


Fig. 9-18. Respuesta a la frecuencia para $F(s) = (-10)/(s - 10)$

9-7-4.- Gráficas de Bode Compuestas.

Si se trata de graficar los diagramas de Bode para la siguiente función compleja

$$F(s) = \frac{s}{s + 10}$$

primeramente se trata de descomponer la $F(s)$ en factores para los cuales la respuesta sea ya conocida y por lo tanto se pueda trazar facilmente. Por ejemplo la $F(s)$ se puede representar en la siguiente forma:

$$F(s) = \left[\frac{1}{10} \right] (s) \left[\frac{10}{s + 10} \right]$$

las curvas para cada uno de los términos individuales se representan en la fig. 9-19. La suma de todas las curvas individuales nos proporciona las curvas generales de toda la función de transferencia completa, como se indica en la fig. 9-20.

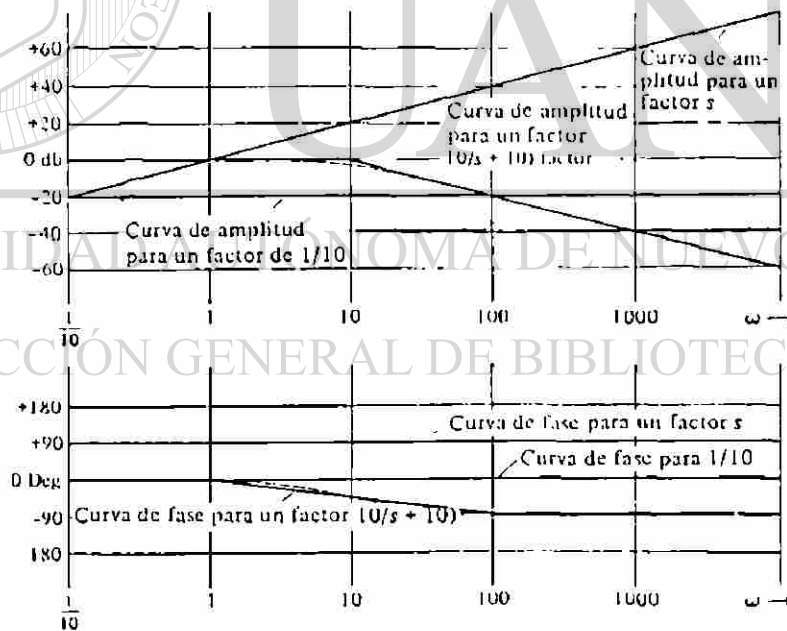


Fig. 9-19. Respuesta a la frecuencia de los terminos individuales

de la función compleja $F(s) = \left[\frac{1}{10} \right] (s) \left[\frac{10}{s + 10} \right]$

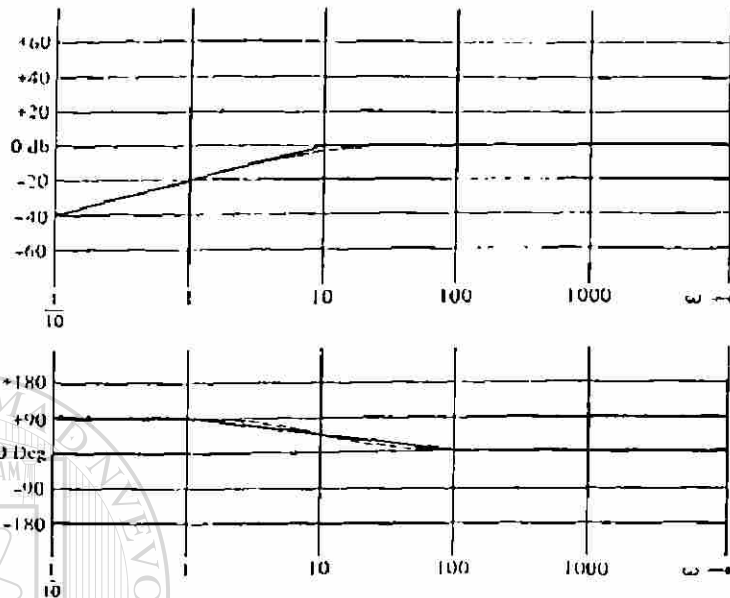


Fig. 9-20. Respuesta general de frecuencia para $F(s) = \frac{1}{s + 10}$

9-7-5.- Gráficas para pares de Polos y Ceros Complejos Conjugados.

Como primer ejemplo de este tipo de funciones se estudiarán las graficas de la respuesta a la frecuencia de la siguiente función compleja:

$$F(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Para valores muy pequeños de ω comparados con el valor de ω_n , al substituir $s = j\omega$ en la función $F(s)$, los términos que contienen la variable "s" se pueden despreciar, por lo que la magnitud de $F(s)$ será

$$F(s=j\omega) = \frac{\omega_n^2}{0 + 0 + \omega_n^2} = 1$$

por lo que la magnitud en decibeles es de cero y el angulo de defasamiento es de cero grados.

Para valores muy grandes de ω comparados con el valor de ω_n , al substituir $s = j\omega$ en la función $F(s)$, tenemos:

$$F(s=j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{-\omega^2 + 0 + 0} = -\frac{\omega_n^2}{\omega^2}$$

que corresponde a una recta de pendiente igual a -40 dB/década y un corrimiento de fase de 180° .

Cuando $\omega = \omega_n$, al substituir $s = j\omega$ la $F(s)$ se convierte en:

$$F(s=j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega_n)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega_n) + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{-\omega_n^2 + 2\zeta j\omega_n^2 + \omega_n^2} = \frac{1}{j2\zeta}$$

para la función anterior, la magnitud en decibeles tiene un valor de

$$m = 20 \log_{10} \frac{1}{2\zeta}$$

y el ángulo de defasamiento es igual a -90° .

En la fig. 9-21 se representa la respuesta a la frecuencia en magnitud y en ángulo de defasamiento para diferentes valores de la relación de amortiguamiento ζ . Se hace notar que para valores de $\zeta \geq 1$ los polos son reales, no complejos, por lo que se pueden aplicar en este caso los métodos ya estudiados para polos ubicados en el eje real.

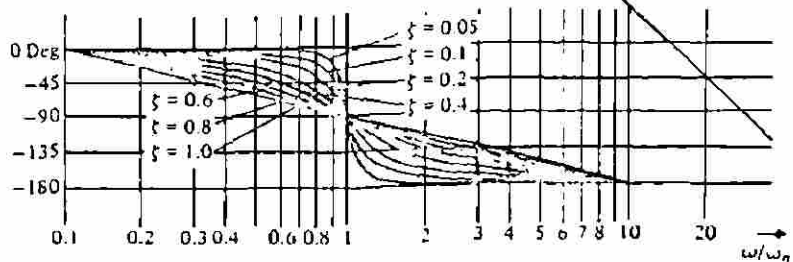
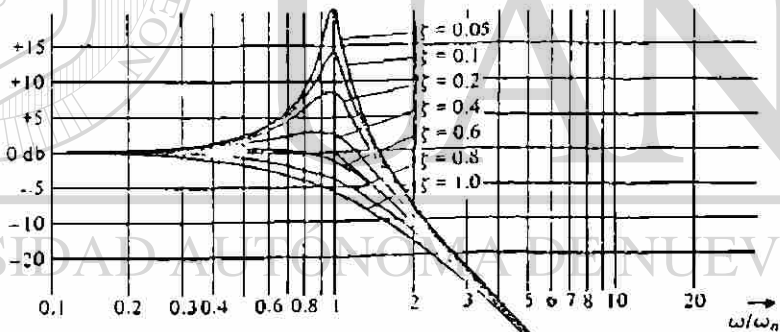


Fig. 9-21. Respuesta a la frecuencia para $F(s)$ con polos complejos conjugados.

Se analizarán en seguida las gráficas de Bode de la siguiente función de transferencia compleja:

$$F(s) = \frac{1\ 000}{s^2 + 20s + 40\ 000} \quad (9-9)$$

Con el propósito de facilitar la construcción de las gráficas, la función $F(s)$ se puede descomponer en factores de la siguiente forma:

$$F(s) = \left[\frac{1}{40} \right] \left[\frac{40\ 000}{s^2 + 20s + 40\ 000} \right] \quad (9-10)$$

El primer término $1/40$ tiene una amplitud de -32 dB y un ángulo de 0° . El segundo término si lo comparamos con el caso general ya analizado en la sección anterior,

$$\omega_n = \sqrt{40\ 000} = 200$$

ademas $2\zeta\omega_n = 40\zeta = 20$ de donde $\zeta = \frac{1}{20}$

Con estos datos las gráficas se pueden trazar basándose en las curvas representadas en la fig. 9-21. Las gráficas completas se pueden ver en la fig. 9-22.

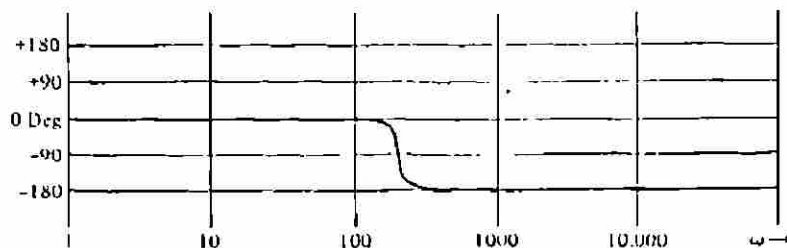
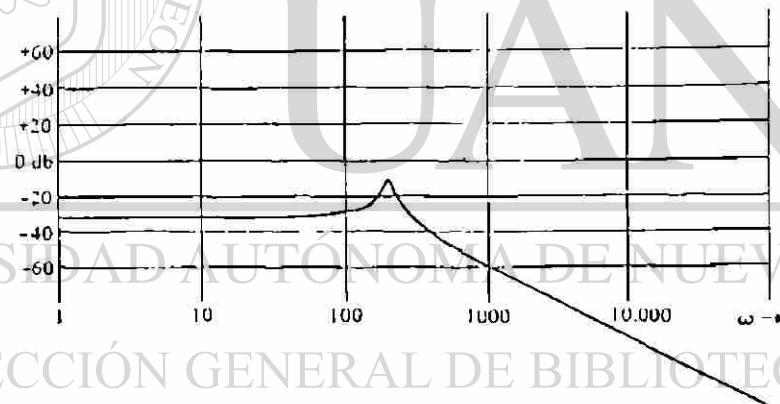


Fig. 9-22. Gráficas de respuesta a la frecuencia para $F(s) = 1000/(s^2 + 20s + 40000)$

9-7-6.- Aproximación de Desviaciones.

Cuando se trata de trazar los diagramas de Bode de una función que tiene pares de raíces complejas conjugadas, primero se trazan los diagramas aproximados mediante líneas rectas y posteriormente se corrigen las aproximaciones. La fig. 9-23 muestra las magnitudes de corrección necesarias para las aproximaciones de la respuesta en frecuencia de raíces complejas conjugadas.

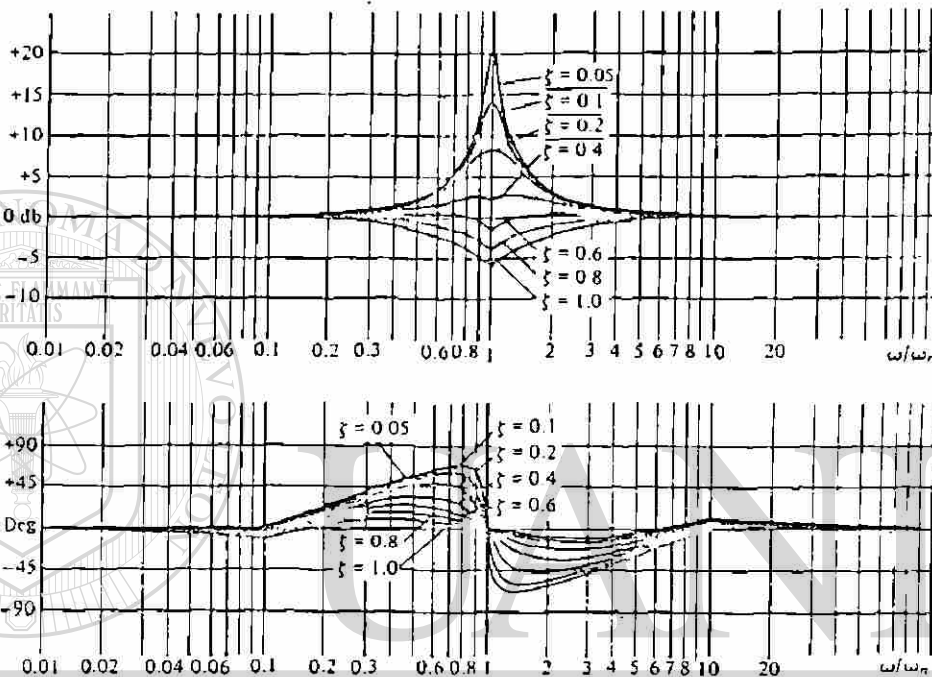


Fig. 9-23. Curvas de corrección de gráficas de respuesta en frecuencia de raíces complejas conjugadas.

Como un ejemplo de aplicación se trazarán las gráficas de Bode de la siguiente función compleja:

$$F(s) = \frac{1000}{s^2 + 2s + 100} = (10) \left[\frac{100}{s^2 + 2s + 100} \right]$$

Para el primer término constante igual a 10, la magnitud es de 20 decibeles, y el ángulo de defasamiento es de 0°.

Para el segundo término que contiene polos complejos,

$$\omega_n = \sqrt{100} = 10 \quad 2\zeta\omega_n = 20\zeta = 2 \quad \zeta = 1/10$$

Con los datos anteriores se pueden trazar las aproximaciones por líneas rectas, como se indica en la fig. 9-24. Se aproximan primero los pares de raíces complejas conjugadas, como si fueran críticamente

amortiguadas, de la forma

$$\frac{100}{s^2 + 20s + 100} = \left[\frac{10}{s + 10} \right]^2$$

La aproximación de la gráfica de magnitud será de 0 dB (+ 20 dB por el factor constante de 10) para el vértice de frecuencia $\omega = 10$, de allí en adelante la gráfica es una recta con una pendiente de -40 dB/década. La aproximación angular es de 0° hasta $\omega = 1$, después la gráfica baja a -90° en $\omega = 10$ y sigue bajando hasta -180° en $\omega = 100$. De allí en adelante, la gráfica angular se mantiene en 180° .

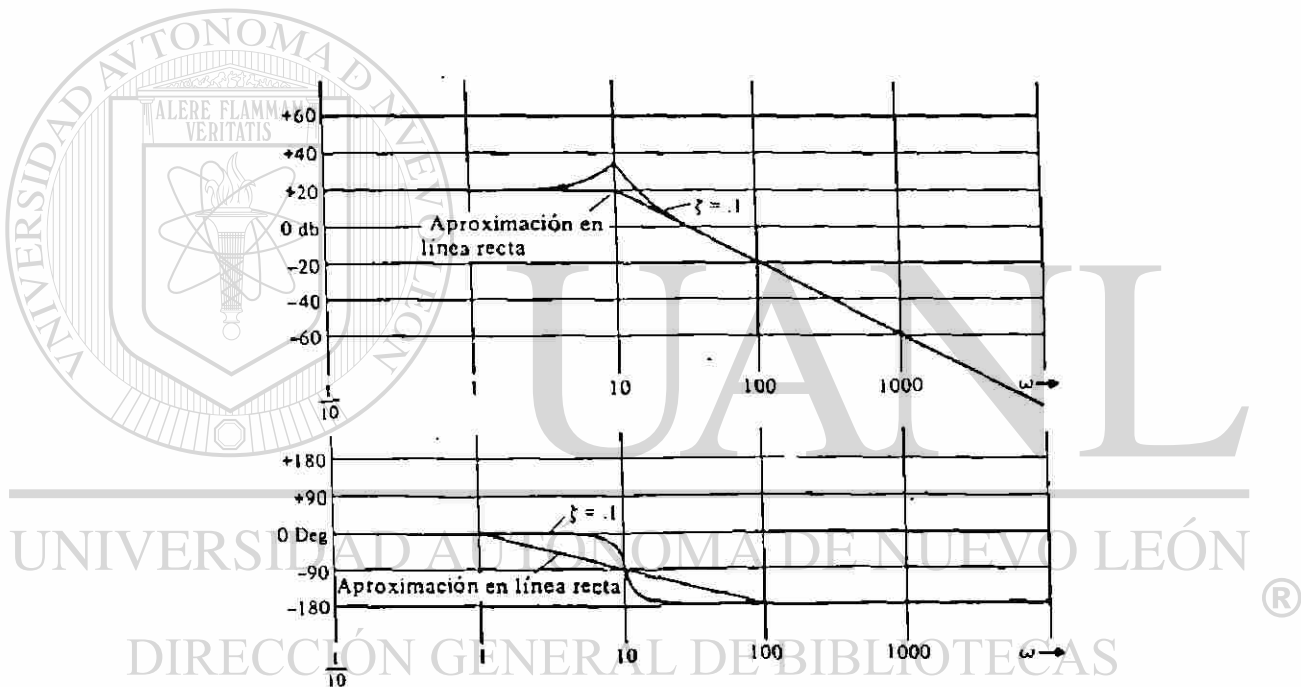


Fig. 9-24. Gráficas de respuesta a la frecuencia para $F(s) = 1000/(s^2 + 2s + 100)$

Las correcciones de la fig. 9-23, para $\zeta = 1/10$ se aplican luego a las curvas aproximadas para proporcionar el resultado final de la fig. 9-24.

Como ejemplos ilustrativos se representan algunas graficas para funciones complejas en las figuras 9-25, 9-26, 9-27 y 9-28.

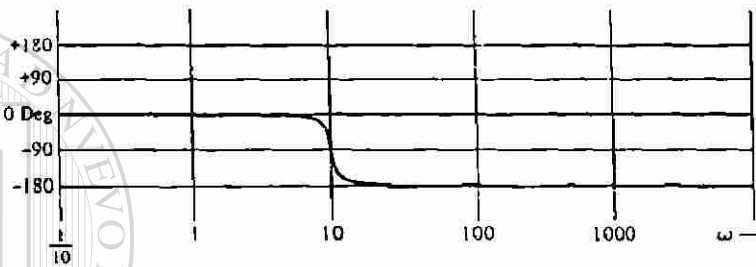
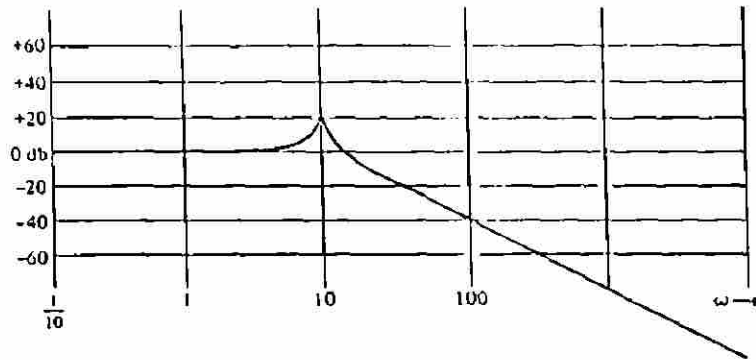


Fig. 9-25. Diagramas de Bode para $F(s) = 100/(s^2 + s + 100)$

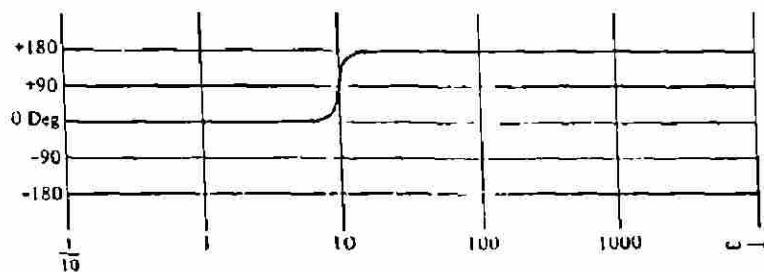
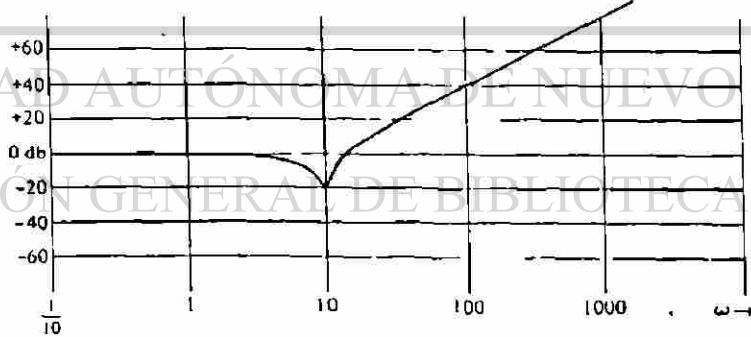


Fig. 9-26. Diagramas de Bode para $F(s) = (s^2 + s + 100)/100$

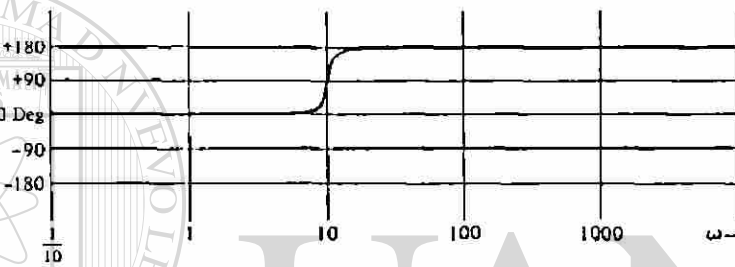
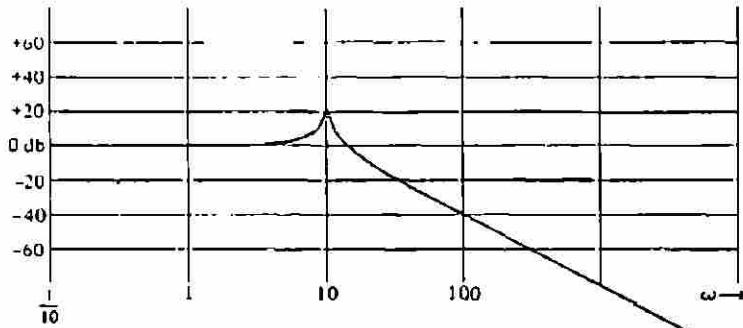


Fig. 9-27. Diagramas de Bode para $F(s) = 100/(s^2 - s + 100)$

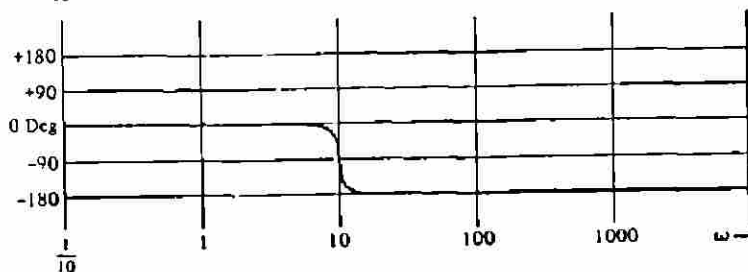
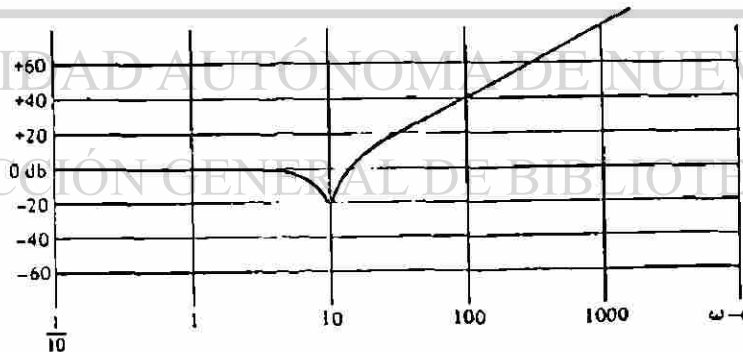


Fig. 9-28. Diagramas de Bode para $F(s) = (s^2 - s + 100)/100$

Otro ejemplo de diagramas de Bode se considerará con la siguiente función de transferencia compleja:

$$F(s) = \frac{s^2 + s + 8}{s^2}$$

la cual se puede descomponer en los siguientes factores:

$$F(s) = (8) \left[\frac{s^2 + s + 8}{8} \right] \left[\frac{1}{s} \right]^2$$

La función de transferencia tiene ceros complejos conjugados cuyas curvas son las negativas de las curvas ya trazadas para polos complejos.

$$\begin{aligned} \omega_n &= \sqrt{8} = 2.83 \\ 2\zeta\omega_n &= 5.66\zeta = 1 \\ \zeta &= 0.177 \end{aligned}$$

con estos datos se pueden trazar las curvas del diagrama de Bode que se representan en las figuras 9-29 y 9-30.

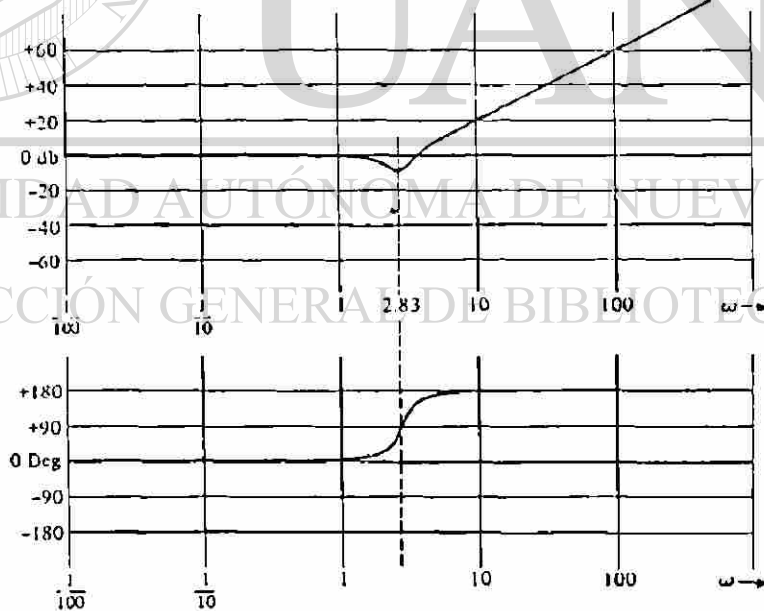


Fig. 9-29. Curvas aproximadas de respuesta a la frecuencia para la $F(s) = (s^2 + s + 8)/8$.

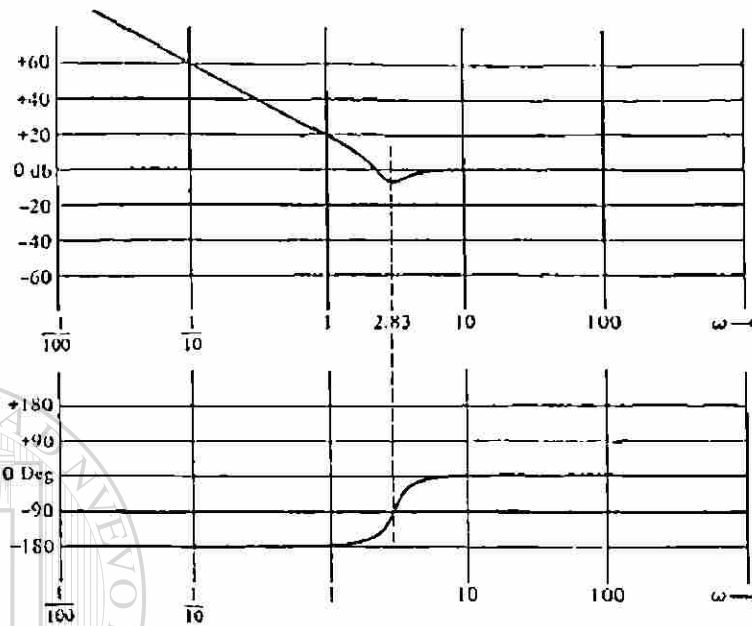


Fig. 9-30. Curvas aproximadas de respuesta a la frecuencia para la $F(s) = (s^2 + s + 8)/s^2$.

9-7-7.- Análisis de datos experimentales.

Como ya se dijo con anterioridad, los métodos de respuesta a la frecuencia se pueden aplicar en forma experimental para obtener las funciones de transferencia de sistemas de control. Este procedimiento es muy importante sobre todo en casos en donde las expresiones matemáticas de las funciones de transferencia son difíciles de obtener en forma puramente teórica.

Como un ejemplo consideremos que al aplicar el método experimental a un sistema de control, se han obtenido los siguientes resultados de ganancia en decibels y corrimiento de fase como se indican en la tabla 9-3. Los datos de la tabla se utilizan para trazar los diagramas de Bode del sistema que se representan en la fig. 9-31.

Una vez que se tienen las gráficas, se pueden trazar una serie de líneas rectas asintóticas tanto para la magnitud como para el ángulo de defasamiento. Midiendo las pendientes de las rectas y los vértices en las frecuencias correspondientes, es posible obtener una función de transferencia. Para la fig. 9-31, la función de transferencia aproximada es:

$$F(s) = 16 \left[\frac{15}{s + 15} \right] \left[\frac{150}{s + 150} \right] = \frac{16}{(0.05s + 1)(0.007 + 1)}$$

Tabla 9-3. Datos experimentales de frecuencias

f	ω	Ganancia (dB)	Corrimiento de fase (grados)
60	377	-7.75	-155
50	314	-4.3	-150
40	251	-0.2	-145
35	219	0.75	-140
25	157	5.16	-135
20	126	7.97	-120
16	100	10.5	-110
10	63	15.0	-100
7	44	16.9	-85
2.5	16	20.4	-45
1.3	8	21.6	-30
0.22	1.38	24.0	-5
0.16	1.0	24.1	0

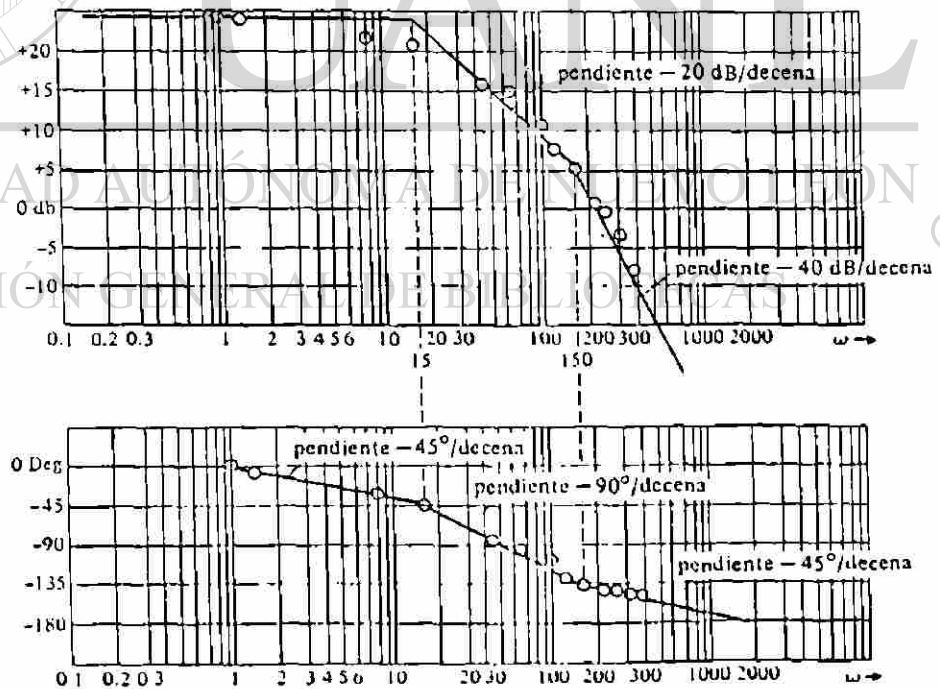


Fig. 9-31. Incorporación de datos experimentales para el análisis de la respuesta a la frecuencia.

9-7-8.- Problemas Propuestos.

9-1.- Dibujar las curvas de respuesta a la frecuencia (magnitud y ángulo de defasamiento) de las siguientes funciones de transferencia complejas:

(a) $F(s) = -3s$

(b) $F(s) = \frac{1}{s + 1000}$

(c) $F(s) = \frac{1}{(s + 10)^3}$

(d) $F(s) = \frac{1000s}{(s + 4)(s + 10)}$

(e) $F(s) = \frac{s - 10}{s + 10}$

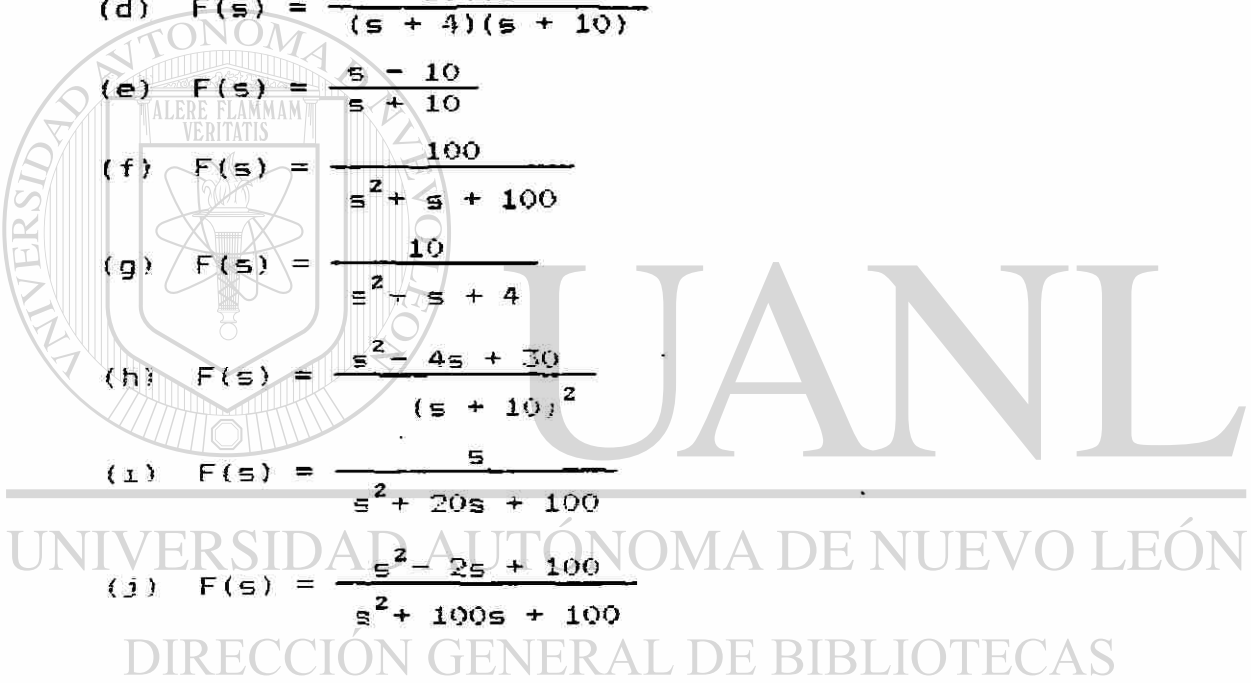
(f) $F(s) = \frac{100}{s^2 + s + 100}$

(g) $F(s) = \frac{10}{s^2 + s + 4}$

(h) $F(s) = \frac{s^2 - 4s + 30}{(s + 10)^2}$

(i) $F(s) = \frac{5}{s^2 + 20s + 100}$

(j) $F(s) = \frac{s^2 - 2s + 100}{s^2 + 100s + 100}$



9-8.- Margen de Ganancia y Margen de Fase.

9-8-1.- Análisis de la Estabilidad Relativa de un Sistema de Control.

Se ha mencionado ya que la utilidad práctica de un sistema de control depende del grado de estabilidad que éste tenga. No basta por lo tanto saber que un sistema es estable, debemos además saber el grado o medida de su estabilidad, en otras palabras se trata de conocer que tan cerca o que tan lejos está un sistema de perder su estabilidad. Esto último es lo que se denomina Estabilidad Relativa y su magnitud se puede determinar aplicando los métodos de respuesta a la frecuencia.

Cualquier sistema de control de lazo cerrado se puede representar en su forma canónica como se muestra en la fig. 9-32. y cuya función de transferencia es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

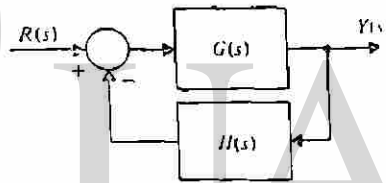
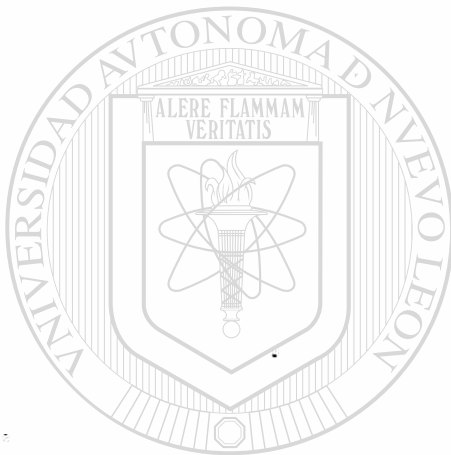


Fig. 9-32. Sistema de Control Retroalimentado.

supongamos que en dicho sistema de control, el valor de la función

$$G(s) = \frac{100}{(s+1)^3} \quad \text{y el valor de } H(s) = 1 \quad \text{®}$$

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

como se indica en la fig. 9-33.

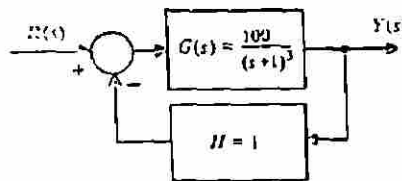


Fig. 9-33. Ejemplo de un sistema retroalimentado.

Para determinar si el sistema en general es estable, se modificará el diagrama de bloques de la fig. 9-33 como se indica en la fig. 9-34. Se ha agregado un bloque en la trayectoria de la retroalimentación con una ganancia igual a K. La función de transferencia del sistema de control representado en la fig. 9-34 es:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + KG(s)H(s)} \quad (9-11)$$

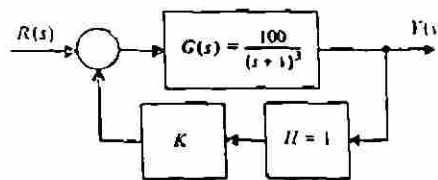


Fig. 9-34. Sistema de control retroalimentado.

Substituyendo los valores de G(s) y de H(s) en la ecuación 9-11 tenemos:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{100}{(s+1)^3}}{1 + \left[\frac{100}{(s+1)^3} \right] K} = \frac{100}{(s+1)^3 + 100K} \quad (9-12)$$

A continuación se hará un análisis de la estabilidad en la ecuación 9-12 cuando la ganancia varía de cero a uno.

Si la ganancia $K = 0$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{100}{(s+1)^3}$$

facilmente se puede observar que la función de transferencia es estable ya que tiene tres polos en $s = -1$ (en el semiplano izquierdo del plano complejo).

Si la ganancia $K = \frac{1}{1000}$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{100}{(s+1)^3 + 100\left[\frac{1}{1000}\right]} = \frac{100}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1.1}$$

aplicando el criterio de Routh a la ecuación característica anterior se tiene:

$$s^3 + 3s^2 + 3s + 1.1 = 0$$

s^3	1	3
s^2	3	1.1
s^1	2.63	
s^0	1.1	

De acuerdo con el criterio de Routh, el sistema es Estable.

Si la ganancia es $K = \frac{1}{100}$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{100}{(s+1)^3 + 100\left[-\frac{1}{100}\right]} = \frac{100}{s^3 + 3s^2 + 3s + 2}$$

Aplicando el criterio de Routh a la ecuación característica

$$s^3 + 3s^2 + 3s + 2 = 0$$

s^3	1	3
s^2	3	2
s^1	2.33	
s^0	2	

Por lo tanto el sistema sigue siendo Estable.

Si la ganancia es $K = \frac{1}{10}$ la ecuación característica es:

$$s^3 + 3s^2 + 3s + 11 = 0$$

Aplicando el Criterio de Routh a la ecuación anterior

s^3	1	3
s^2	3	11
s^1	-0.66	
s^0	11	

De acuerdo con el criterio de Routh, el sistema con $K = 1/10$ es ya un sistema inestable, por los cambios de signo en la primera columna.

El análisis anterior nos indica que hay un valor de la ganancia K , entre cero y uno que es el valor límite máximo que puede tener antes de caer en la inestabilidad el sistema. A continuación se determinará el valor límite máximo de la ganancia K , aplicando de nuevo el Criterio de Routh.

Si la ganancia del sistema de control es K , su ecuación característica es:

$$1 + \frac{100K}{(s + 1)^3} = 0$$

$$(s + 1)^3 + 100K = 0$$

$$s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + 100K = 0$$

$$s^3 + 3s^2 + 3s + (1 + 100K) = 0$$

s^3	1	3
s^2	3	(1 + 100K)
s^1	$\frac{8-100K}{3}$	
s^0	1+100K	

La estabilidad se puede obtener igualando la fracción de la primera columna a cero.

$$\frac{8 - 100K}{3} = 0$$

$$8 - 100K = 0$$

$$K = 0.08$$

El resultado anterior quiere decir que valores mayores de $K = 0.08$ producen inestabilidad, como ya se había encontrado con $K = 1/10$.

En la fig. 9-35 se representan los diagramas de Bode del mismo sistema de control de la ecuación 9-12, para valores de K igual a $1/1000, 1/100, 1/10$ y 1 . Como se puede observar el diagrama de ángulo de defasamiento no cambia con el valor de K , pero los diagramas de la magnitud son de igual forma, pero la gráfica se va moviendo hacia arriba cuando K va aumentando.

En la gráfica del ángulo de defasamiento hay un valor de frecuencia importante que ocurre cuando el ángulo es igual a $\pm 180^\circ$ y que según la gráfica corresponde a una frecuencia $\omega = 3.17$. Si se traza una línea vertical en esta frecuencia, corta a las gráficas de magnitud en $+20$ dB con $K = 1$, 0 dB con $K = 1/10$, -20 dB con $K = 1/100$ y -40 dB con $K = 1/1000$. Los valores anteriores son muy importantes ya que son la base para determinar el margen de ganancia de un sistema de control. Se puede decir que con $K = 1/1000$ tenemos un margen de 40 dB antes de caer en la inestabilidad, con $K = 1/100$ el margen se reduce a 20 dB, en $K = 1/10$ estamos en el límite de la inestabilidad y con $K = 1$ de plano el sistema es inestable. En conclusión al irse moviendo la gráfica de magnitud hacia arriba se va perdiendo poco a poco la estabilidad del sistema.

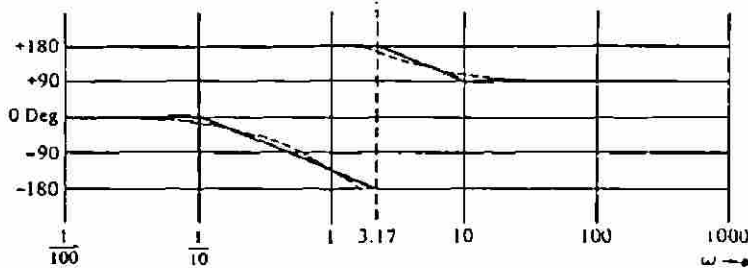
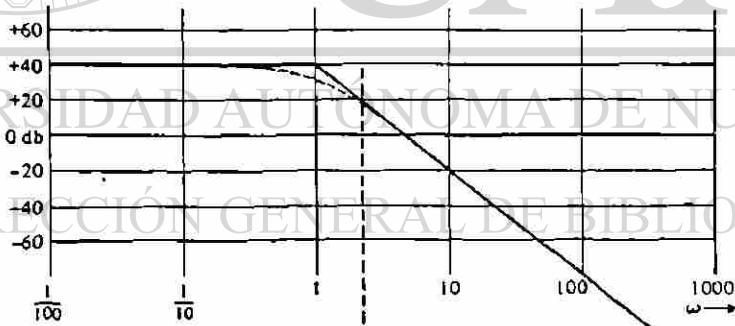
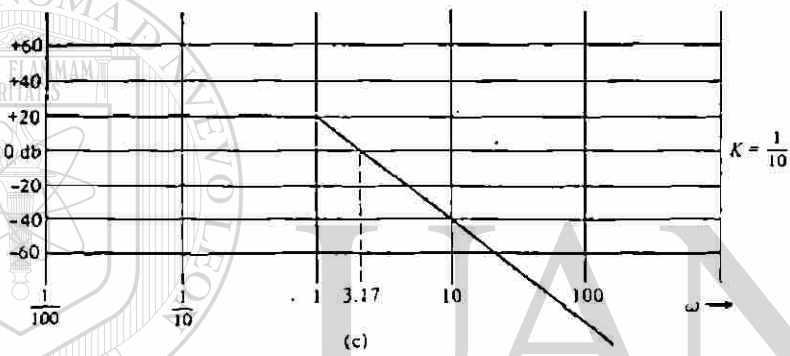
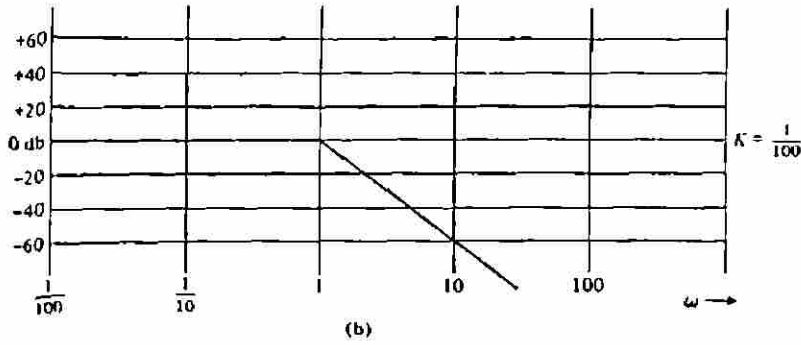
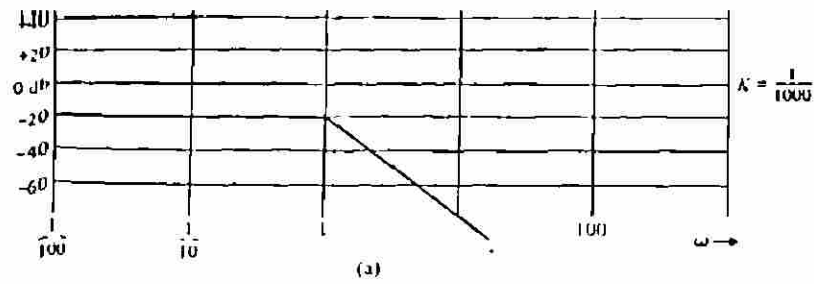


Fig. 9-35. Diagramas de Bode de la ecuación 9-12, para diferentes valores de la constante K .

9-8-2.- Margén de Ganancia.

Como ya se mencionó, el margen de Ganancia y el Margén de Fase son dos indicadores importantes para determinar la estabilidad relativa de un sistema de control. Estos dos márgenes se pueden obtener fácilmente a partir de los diagramas de Bode.

El Margen de Ganancia se mide en decibeles y se identifica en los diagramas de Bode como la cantidad de magnitud abajo de 0 dB, en donde el ángulo de defasamiento es de -180° . A la frecuencia que corta la gráfica de Bode angular el valor de -180° se le llama frecuencia de cruce de fase o frecuencia de transición fásica.

En la fig. 9-36 se representan los diagramas de Bode de un sistema de control con un Margen de Ganancia de 8 dB que se presenta cuando la frecuencia es $\omega_\pi = 4$ rad/seg. El Margén de Ganancia en este caso nos indica que el sistema es estable y puede aumentar su ganancia hasta 8 dB antes de caer en la inestabilidad. Si la gráfica de magnitud está arriba de cero decibeles a la frecuencia de cruce de fase, el sistema es inestable. Por lo tanto si la gráfica de magnitud está más abajo su Margen de ganancia crece al igual que su estabilidad relativa.

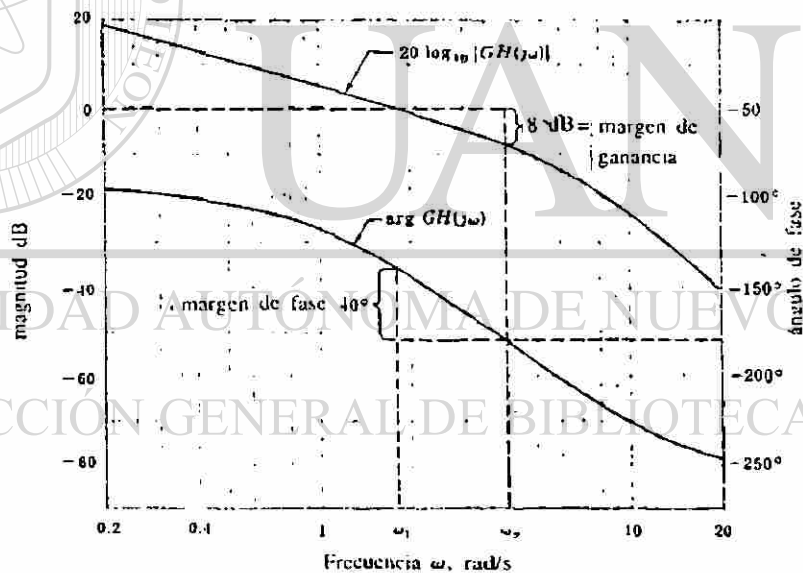


Fig. 9-36. Diagramas de Bode de un sistema de control.

El Margen de Ganancia se puede expresar matemáticamente como el recíproco de $G(j\omega)H(j\omega)$ cuando el ángulo de fase es de -180° . Denominando ω_π a la frecuencia de cruce de fase, el margen de ganancia en decibeles se expresa por la siguiente ecuación:

$$\text{Margen de Ganancia en dB} = 20 \text{ Log } \frac{1}{|G(j\omega_\pi)H(j\omega_\pi)|}$$

Cuando el valor de $G(j\omega)H(j\omega)$ es menor que uno, el margen de ganancia es positivo y se interpreta como la ganancia mínima adicional que hará inestable al sistema. En caso contrario cuando $G(j\omega)H(j\omega)$ es mayor que uno, el margen de ganancia es negativo y se interpreta como la ganancia mínima que debe reducirse para llevar al sistema a la estabilidad. En la Fig. 9-36 el margen de ganancia es positivo.

9-8-3.- Margen de Fase.

El Margen de Fase también se puede obtener directamente de los diagramas de Bode y es la diferencia de ángulos entre -180° y el ángulo que se forma a la frecuencia correspondiente a 0 dB en la gráfica de magnitud, como se indica en la fig. 9-36. En este caso el Margen de Fase es positivo y es igual a 40° , lo que nos indica un sistema de control estable. Si el Margen de Fase fuera negativo, lo cual se presentaría si la gráfica de ángulo estuviera más abajo, nos indicaría un sistema inestable.

Para determinar la estabilidad de los sistemas es conveniente establecer tanto el Margen de Fase, como el Margen de Ganancia, los cuales deben ser positivos en sistemas estables. Para asegurar una buena estabilidad relativa, lo cual se traducirá en un comportamiento satisfactorio del sistema de control, los valores del Margen de Fase deben estar comprendidos entre los 30° y los 60° , mientras que el valor del Margen de Ganancia debe ser mínimo de 6 decibeles.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

9-9.- Criterio de Nyquist.

Este es otro método de análisis que se puede usar para predecir la estabilidad de sistemas de control. En secciones anteriores ya se estudiaron los diagramas de Bode que son gráficas en coordenadas rectangulares. Los diagramas en los que se basa el análisis de sistemas por medio del criterio de Nyquist como se verá más adelante son gráficas en coordenadas polares. Esto por lo tanto es otra forma de ver gráficamente la respuesta a la frecuencia de un sistema de control.

La predicción de la estabilidad de los sistemas de control mediante la aplicación del criterio de Nyquist es ampliamente utilizado en la práctica. El uso de la gráfica en coordenadas polares elimina la necesidad de encontrar las raíces de la ecuación característica del sistema y elimina la necesidad de calcular la transformada inversa de Laplace como se hace en el análisis de la respuesta transitoria. De tal manera que la gráfica en coordenadas polares es una técnica que nos ahorra trabajo en el análisis del comportamiento dinámico de los sistemas de control.

La gráfica en coordenadas polares o diagrama de Nyquist es bastante simple de usar para casi todos los sistemas de control. Sin embargo para poder entender el método es necesario primero estudiar algunos principios matemáticos que son la base de este análisis.

9-9-1.- La Ecuación Característica y la Estabilidad.

Cualquier sistema de control de lazo cerrado puede representarse en su forma canónica por medio de un diagrama de bloques como se indica en la fig. 9-37. La función de transferencia de lazo cerrado es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

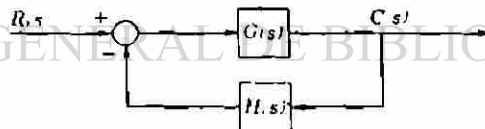


Fig. 9-37. Sistema de Control en su forma Canónica.

La Función de transferencia de lazo abierto es $G(s)H(s)$ y la suma de $1 + G(s)H(s)$ igualada a cero se denomina ecuación característica del sistema. La ecuación característica se puede representar en la siguiente forma:

$$1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{D(s) + N(s)}{D(s)} = 0 \quad (9-13)$$

$$\text{o bien } D(s) + N(s) = 0 \quad (9-14)$$

La ecuación 9-13 se puede modificar representando $1 + G(s)H(s)$ como el cociente de dos polinomios factorizados.

$$1 + G(s)H(s) = \frac{(s + r_1)(s + r_2)\dots}{(s + r_a)(s + r_b)(s + r_c)\dots} \quad (9-15)$$

donde $(s + r_1)$ y $(s + r_2)$ son los factores del numerador $D(s) + N(s)$ y $(s + r_a)$, $(s + r_b)$ y $(s + r_c)$ son los factores del denominador $D(s)$.

La ecuación característica del sistema se puede representar en forma general como

$$(s + r_1)(s + r_2)\dots(s + r_n) = 0 \quad (9-16)$$

los valores de $s = -r_1, -r_2, \dots, -r_n$ son las raíces de la ecuación característica. Cuando "s" toma cualquier valor que sea una raíz de la ecuación característica, la función de transferencia $C(s)/R(s)$ se hace infinito. Por otro lado las raíces de la ecuación característica también se pueden llamar como los ceros de $1 + G(s)H(s)$. Además se puede decir que los ceros de $D(s)$, es decir, $-r_a, -r_b$ y $-r_c$ de la ecuación (9-15) son los polos de $1 + G(s)H(s)$, es decir los valores de "s" para los cuales $1 + G(s)H(s)$ se hace infinito.

Para que el sistema de control representado en la fig. 9-37 tenga estabilidad, todas las raíces de la ecuación característica deben ser números reales negativos o números complejos con componentes reales negativas. Las raíces de la ecuación característica [o los ceros de $1 + G(s)H(s)$] se pueden graficar en el plano complejo como se indica en la fig. 9-38. El eje imaginario divide al plano complejo en dos partes (la mitad derecha y la mitad izquierda del plano). Las raíces de la ecuación característica que se encuentran en la mitad de la derecha conducen al sistema a la inestabilidad (por ejemplo $+2 \pm j1$) y las raíces que se encuentran en la mitad izquierda del plano conducen a un sistema estable (por ejemplo $-3 \pm j2$).

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

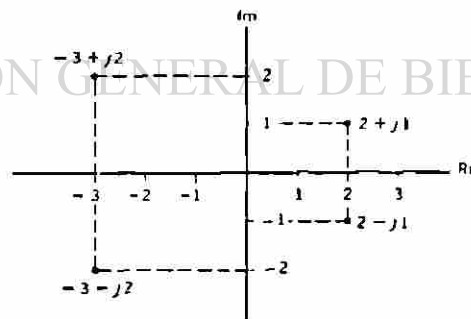


Fig. 9-38. Estabilidad en el plano complejo.

De acuerdo con el análisis anterior, el procedimiento para investigar la estabilidad de un sistema es buscar ceros de $1 + G(s)H(s)$ o raíces de la ecuación característica en la mitad derecha del plano. Si no hay raíces en la mitad derecha del plano, el sistema es estable.

Logicamente es impráctico y casi imposible investigar cada punto en la mitad derecha del plano s , por lo que se hace necesario idear un método más breve. El procedimiento para examinar la mitad derecha del plano s y la explicación de este procedimiento en la gráfica de coordenadas polares es lo que se estudia en el siguiente tema.

9-9-2.- Mapeo de Contornos.

Si se tiene la función de transferencia de un sistema de control, expresada por la siguiente ecuación:

$$F(s) = \frac{(s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)} \quad (n > m)$$

en donde $-z_1, -z_2, \dots -z_m$ son los ceros y $-p_1, -p_2, \dots -p_n$ son los polos de la función compleja. En los polos, la función $F(s)$ no es analítica, es decir, la función no existe ni existen sus derivadas, por lo que a estos puntos se les llama puntos singulares o singularidades de la función.

Si se traza un contorno arbitrario en el plano " s ", como se indica en la fig. 9-39, de tal forma que no pase por ninguna singularidad de la función y se evalúa a ésta en cada uno de los puntos del contorno, la gráfica de $F(s)$ será también una trayectoria cerrada, cuyas características están determinadas por el lugar que ocupan los ceros y los polos en el plano complejo.

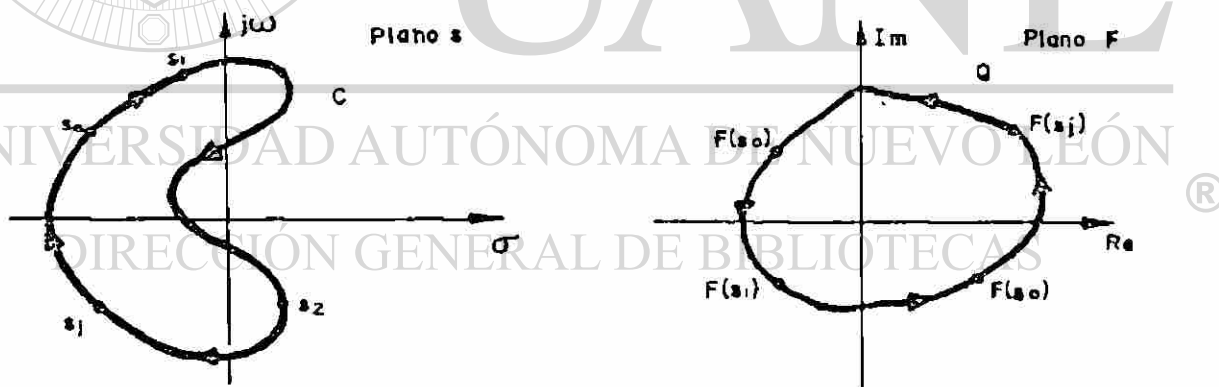


Fig. 9-39. Contorno arbitrario en el plano " s " y en plano $F(s)$.

En la fig. 9-40 se representa la ubicación de los polos y los ceros de una función compleja. Para cada valor de s , por ejemplo s_0 , la función $F(s)$ se puede representar por un punto, cuya localización en el plano $F(s)$ está dada por:

$$F(s_0) = |F(s_0)| \angle F(s_0)$$

en donde:

$$F(s_0) = \frac{\sum_1^m |s_0 + z_i|}{\sum_1^n |s_0 + p_j|}$$

$$\angle F(s_0) = \sum_1^m \angle (s_0 + z_i) - \sum_1^n \angle (s_0 + p_j)$$

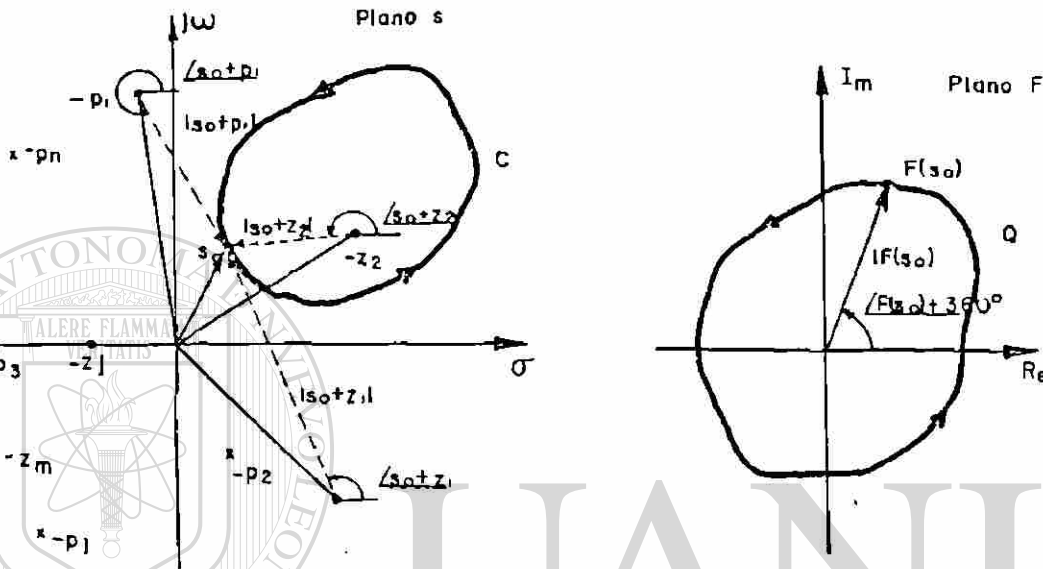


Fig. 9-40. Contorno en el Plano s y en el Plano $F(s)$ para una función compleja.

Como se puede observar en la figura, cada factor contribuye con su magnitud y su ángulo de fase al valor de la función.

En el plano "s", los factores están representados por vectores diferenciales, que van de los ceros y los polos al punto en el cual se va a evaluar la función, por ejemplo, los términos $s_0 + z_1$, $s_0 + z_2$ y $s_0 + p_1$ se representan en la fig. 9-40.

Si se valúa a $F(s)$ en el contorno C , recorriéndolo en la dirección indicada, después de una revolución completa, los vectores que van desde los polos y los ceros que no se encuentran rodeados por el contorno, mantienen constante su contribución en ángulo al lugar de la función. Pero el vector que se origina en el cero $-z_2$, por estar dentro del contorno, incrementa su ángulo en 360° . Por esta razón la gráfica rodea al origen del plano $F(s)$, en la misma dirección que el contorno C en s , sobre el cual se ha valuado la función. Si en lugar de haberse rodeado un cero, se tuviera un polo, es evidente que el vector originado en éste, contribuiría también con 360° , pero negativos, a la gráfica de la función, lo cual significa que el lugar $F(s)$ rodea al origen, pero en sentido contrario a la dirección del contorno C . Si un polo y un cero fueran rodeados por el contorno, las contribuciones de ángulo en ambos se anulan y el lugar de $F(s)$ no encircularía el origen.

El número de encirculamientos alrededor del origen en el plano F está determinado por la diferencia del número de ceros (Z) y el número de polos (P) que son rodeados por el contorno en "s". Esto se puede representar mediante la siguiente ecuación:

$$N = Z - P$$

Si N es positiva, el origen del plano F(s) será rodeado en la misma dirección que el contorno en el plano "s", y si la diferencia N es negativa, el rodeo del origen en F será en sentido contrario, esto, independientemente del sentido que se haya dado al contorno en "s", ya sea el mismo sentido de giro de las manecillas del reloj o contrario. Cuando el rodeo en el plano F es en el mismo sentido que el del contorno en "s", se dice que el origen y la región rodeada por el lugar de F(s) está incluida y si el rodeo es en sentido contrario, está excluida.

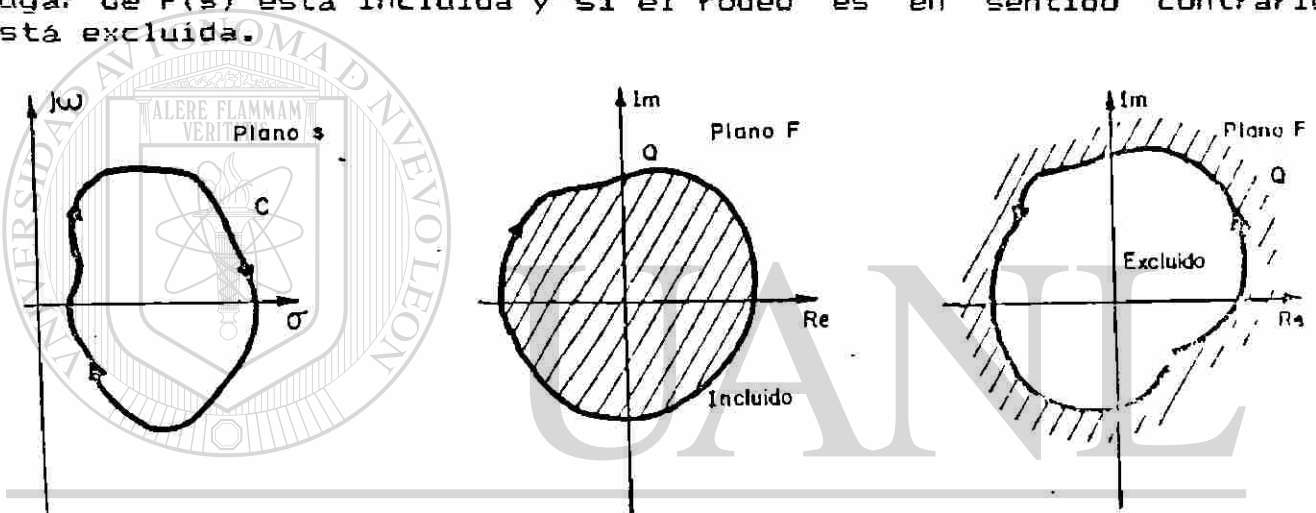


Fig. 9-41. Ejemplo de Plano "s" y Plano F, Incluido y Excluido.

9-9-3.- Procedimiento de Nyquist.

Una vez que ya se ha comprendido lo que es el Mapeo de Contornos, estudiado en la sección anterior (9-9-2), ya se tienen las bases necesarias para entender el procedimiento del Criterio de Nyquist.

Como ya se sabe cualquier sistema de control de lazo cerrado se puede representar con un diagrama de bloques como se indica en la fig. 9-42.

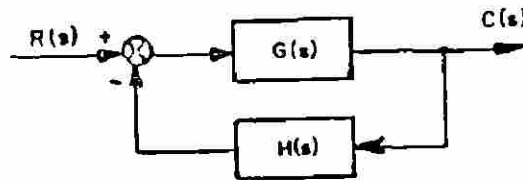


Fig. 9-42. Sistema de Control de Lazo Cerrado.

La Función de Transferencia del sistema representado en la fig. 9-42 está dada por:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Como ya se sabe también, el sistema es estable cuando las raíces de la ecuación característica están localizadas en el semiplano izquierdo del plano complejo, pudiendo ser reales o complejas, pero siempre negativas. El término $1 + G(s)H(s)$ que se representará como $F(s)$ se conoce como Ecuación Característica del sistema y se puede expresar matemáticamente en la siguiente forma:

$$F(s) = 1 + G(s)H(s) = \frac{(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)} \quad (9-15)$$

En donde $-z_1, -z_2, \dots, -z_m, -p_1, -p_2, \dots, -p_n$ son respectivamente los ceros y los polos de la ecuación característica o $F(s)$.

Igualando a cero $F(s)$ se pueden calcular las raíces de la ecuación característica.

$$F(s) = 1 + G(s)H(s) = (s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)$$

De donde resulta que los ceros de $F(s)$ son las raíces de la ecuación característica, que también vienen siendo los polos de la función de transferencia de lazo cerrado $C(s)/R(s)$.

El producto $G(s)H(s)$ se denomina función de transferencia de lazo abierto, si se despeja de la ecuación 9-15, tenemos:

$$G(s)H(s) = F(s) - 1 = \frac{(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m) - (s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)}$$

Como se puede observar al comparar esta última ecuación con la 9-15, los polos de la función de transferencia de lazo abierto $G(s)H(s)$ son también los polos de la ecuación característica $F(s) = 1 + G(s)H(s)$. Estos conceptos son muy importantes para poder comprender mejor el criterio de estabilidad cuyo análisis se verá a continuación.

Suponiendo que se traza un contorno en el plano "s" como se muestra en la fig. 9-43, el cual rodea completamente la región real positiva del plano complejo. A este contorno que no debe pasar por ninguna singularidad (polo) de $F(s)$, se le denomina trayectoria de Nyquist.

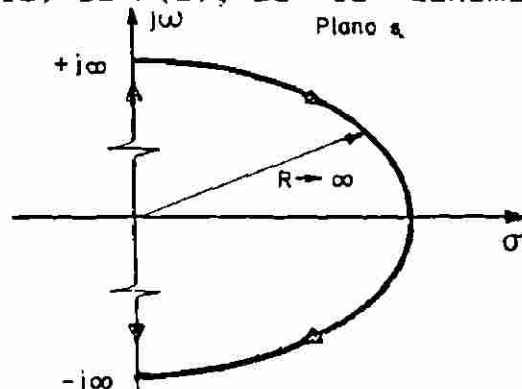


Fig. 9-43. Trayectoria de Nyquist.

Si se valúa a $F(s)$ a lo largo del contorno, el lugar de la función rodeará el origen del plano F , tantas veces como la diferencia de ceros y polos que se hallen en el semiplano derecho del plano complejo, esto es:

$$N = Z - P$$

Si $N > 0$, el origen del plano F será rodeado N veces en el mismo sentido, que el camino de Nyquist en el plano " s ", siendo por lo tanto el sistema inestable. Para asegurar la estabilidad de un sistema, no debe haber ni un sólo cero de $F(s)$ en el semiplano derecho del plano complejo.

Si $N < 0$, el origen del plano F será rodeado N veces, pero ahora en sentido contrario al del camino de Nyquist. Como N nos indica la diferencia de polos y ceros, para que un sistema sea estable, el número de rodeos N debe ser igual que el número de polos, esto es $Z=0$.

Si $N = 0$, el origen del plano F no será rodeado por el lugar de $F(s)$. En este caso para que el sistema sea estable, tanto Z como P deben ser iguales a cero.

Debido a que la función de transferencia de lazo abierto $G(s)H(s)$ es más fácil de trazar que la $F(s)$ y siendo sus lugares geométricos idénticos, salvo una traslación del eje $J\omega$, el criterio de estabilidad de Nyquist se define generalmente con respecto a la gráfica $G(s)H(s)$. Como $G(s)H(s) = F(s) - 1$, el origen del plano F corresponde al punto $(-1, J0)$ del plano $G(s)H(s)$, de tal manera que los rodeos en el plano GH no se referirán a su origen, sino al punto ya mencionado $(-1, J0)$.

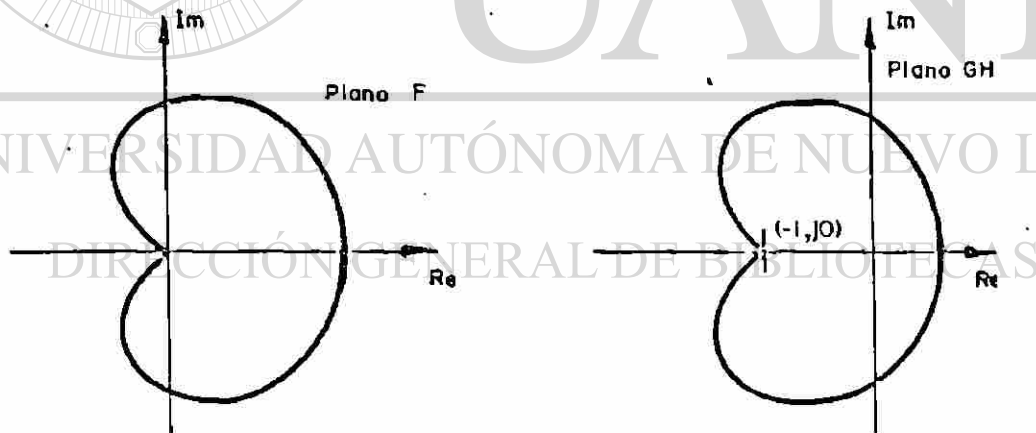


Fig. 9-44. Comparación del Plano F y el Plano GH

Siendo los polos de $G(s)H(s)$ iguales a los de $F(s)$, la trayectoria de Nyquist trazada en el plano $F(s)$ para la ecuación característica, se puede aplicar a la función de transferencia de lazo abierto GH . En la mayoría de los sistemas físicos reales, sus funciones de transferencia de lazo abierto son estables, es decir no tienen polos en el semiplano derecho del plano complejo, de tal forma que $P = 0$.

Por lo tanto el número de rodeos del punto $(-1, j0)$ por el lugar de $G(s)H(s)$, estará determinado por el número de ceros que se encuentren en la región, esto es $N = Z$. Así, un sistema será estable si el punto $(-1, j0)$ no es rodeado por el lugar de $G(s)H(s)$. Como los rodeos del punto $(-1, j0)$ debidos a los ceros, si es que los hay, serían en la misma dirección del camino de Nyquist, esto es incluyendo la región y el punto mencionado, se acostumbra decir que cuando el sistema es estable, el punto $(-1, j0)$ no está incluido. En la fig. 9-45 se muestran las gráficas de ciertos lugares $G(s)H(s)$, con las que se puede determinar la estabilidad del sistema de lazo cerrado.

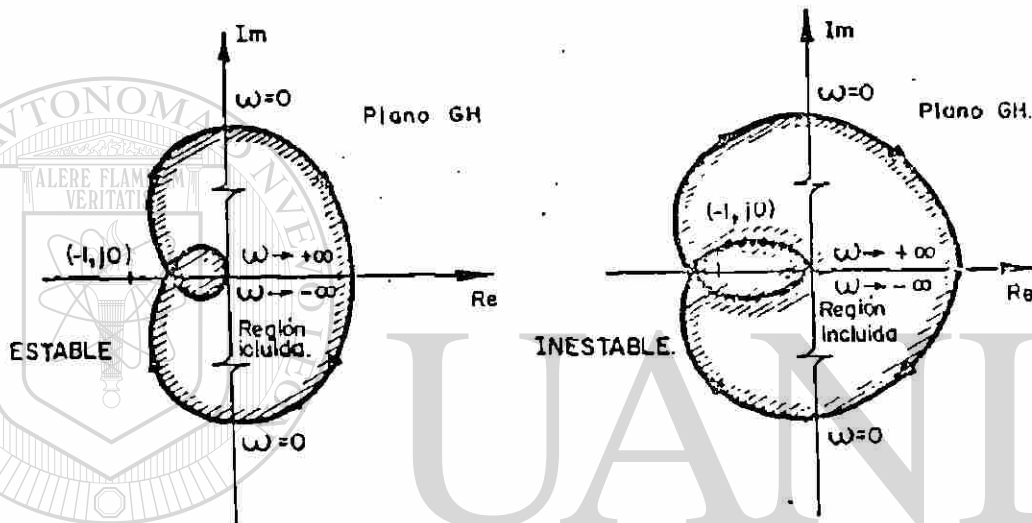


Fig. 9-45. Diagramas de Nyquist de dos sistemas de lazo cerrado.

Para el sistema estable mostrado a la izquierda en la fig. 9-45, el punto $(-1, j0)$, no está rodeado ni incluido por el lugar de $G(s)H(s)$. En cambio, para el otro sistema mostrado a la derecha en la misma figura, el punto $(-1, j0)$ es rodeado e incluido dos veces por el lugar de $G(s)H(s)$, de tal manera que si $P=0$, se tienen dos ceros (raíces de la ecuación característica) en el semiplano derecho del plano complejo, de donde se origina su condición de inestabilidad.

9-9-4.- Criterio de Nyquist Simplificado.

Cuando la función de transferencia de lazo abierto tiene sus polos situados a la izquierda del eje $j\omega$ del plano complejo, esto es $P = 0$, lo cual ocurre en la mayoría de los casos, no es necesario evaluar toda la trayectoria de Nyquist para determinar la estabilidad; basta simplemente con trazar el lugar de $G(s)H(s)$ para el tramo que va desde el origen del plano "s", hasta $s \rightarrow +j\omega$, esto es, de $\omega = 0$ a $\omega \rightarrow \infty$.

A este procedimiento se le llama Criterio de Nyquist Simplificado y su aplicación da lugar al desarrollo de gráficas como las que se muestran en la fig. 9-46.

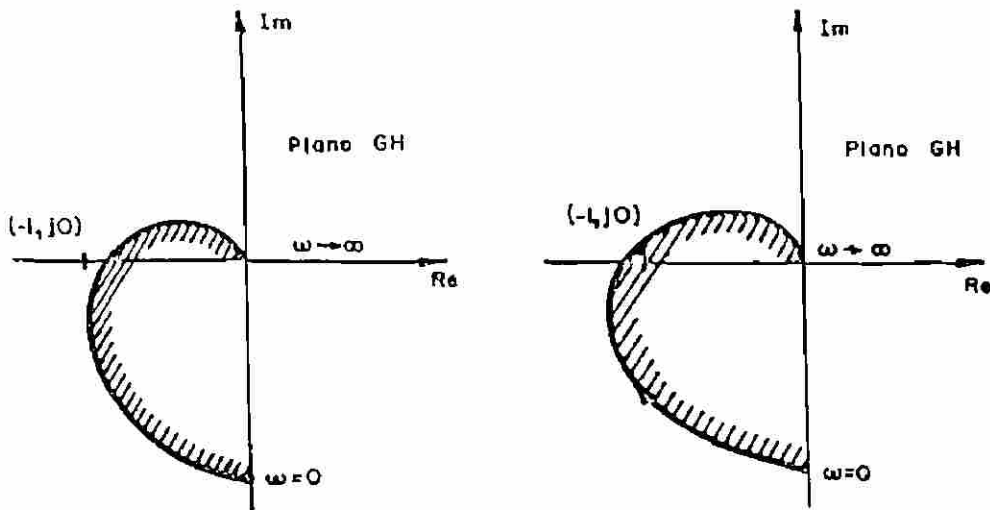


Fig. 9-46. Gráficas del Criterio de Nyquist Simplificado.

La fig 9-46 de la izquierda representa un sistema estable ya que la trayectoria de Nyquist no incluye el punto crítico $(-1, j0)$, por el contrario, la fig 9-46 de la derecha representa un sistema inestable cuya trayectoria incluye el punto $(-1, j0)$.

Cuando la Trayectoria de Nyquist cruza exactamente el punto $(-1, j0)$, esto significa que el sistema tiene ceros de $F(s)$ que son los polos de lazo cerrado en el eje $j\omega$, lo cual dará origen a una respuesta oscilatoria para cualquier señal a que se someta el sistema. Estos sistemas se denominan marginalmente estables ya que están al borde de la inestabilidad, por lo que prácticamente se pueden considerar como sistemas inestables. En la fig. 9-47 se representa un sistema marginalmente estable.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

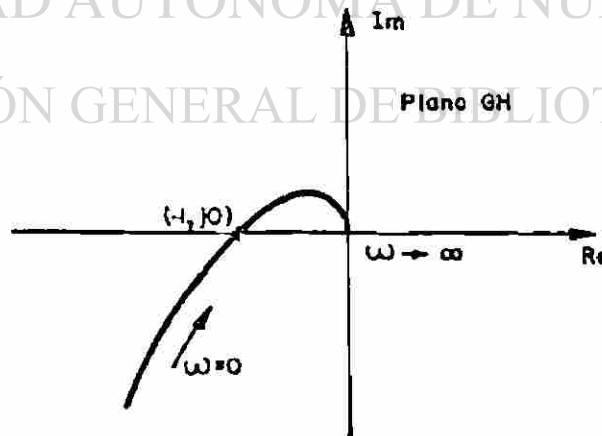


Fig. 9-47. Sistema de Control Marginalmente Estable.

9-9-5.- Aplicación del Criterio de Nyquist.

A continuación se estudiarán algunos ejemplos que servirán para ilustrar la aplicación del Criterio de Estabilidad de Nyquist.

Ejemplo No1.-Se desea determinar la estabilidad del sistema retroalimentado cuya función de transferencia de lazo abierto es:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)}$$

siendo K y T cantidades reales positivas.

En primer lugar se puede ver que los polos de $G(s)H(s)$, que son los mismos de $F(s)$ están ubicados en el semiplano izquierdo del plano complejo, por lo que si hay encirculamientos del punto $(-1, j0)$ será debido a la ubicación de los ceros de $F(s)$.

En la fig. 9-48 se representa la ubicación de los polos de la función, así como el contorno de Nyquist, que para no pasar por el polo que se encuentra en el origen, efectúa un pequeño semicírculo.

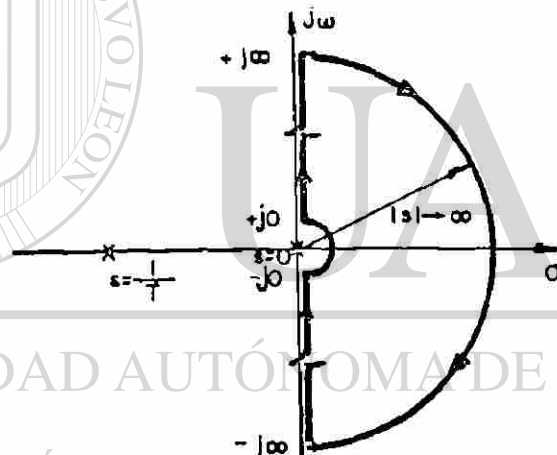


Fig. 9-48. Ubicación de Polos y Contorno de Nyquist.

Como $P = 0$, para determinar la estabilidad del sistema, bastaría con evaluar a la función en el tramo del camino de Nyquist, que va desde $\omega = 0$ hasta $\omega \rightarrow +\infty$, sin embargo, para ilustrar la aplicación completa, el análisis se hará en toda la extensión del contorno.

Ya sea que se considere toda la trayectoria o solamente una parte, sería deseable tomar un gran número de valores de "s", para tener una gráfica más exacta de la función, sin embargo, el trazado asintótico muchas veces es más que suficiente.

Si se valua la función primeramente a lo largo del eje imaginario, desde el origen hasta $s \rightarrow +j\infty$ o $\omega \rightarrow \infty$, se tiene:

$$G(s)H(s) \Big|_{\omega = 0^+} = \alpha \angle -90^\circ$$

$$G(s)H(s) \Big|_{\omega \rightarrow \alpha^+} = 0 \angle -180^\circ$$

El lugar de $G(s)H(s)$ para el tramo que va desde el origen hasta $s \rightarrow -j\alpha$ o $\omega \rightarrow -\alpha$, es simétrico al lugar anterior. En la figura 9-49 se puede ver el trazo de los dos tramos ya mencionados.

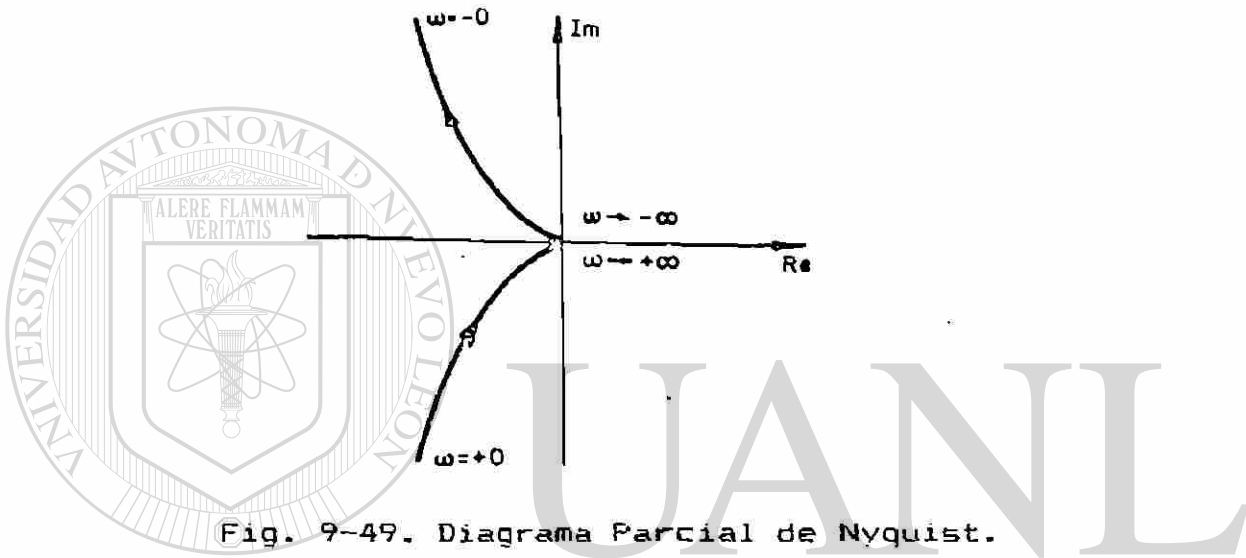


Fig. 9-49. Diagrama Parcial de Nyquist.

Para evaluar a la función en el pequeño rodeo al-rededor del origen, los puntos que forman la trayectoria se representan por medio de un vector giratorio.

$$s = \rho e^{j\theta}$$

La magnitud de ρ se considera muy pequeña ($\rho \rightarrow 0$) y su ángulo de fase varía desde -90° hasta $+90^\circ$, de tal manera que el vector se desplaza un ángulo de 180° en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Substituyendo el valor de "s" en $G(s)H(s)$ tenemos:

$$G(s)H(s) \Big|_{s=\rho e^{j\theta}} = \frac{K}{\rho e^{j\theta} (T\rho e^{j\theta} + 1)} = \frac{K}{T\rho^2 e^{2j\theta} + \rho e^{j\theta}}$$

si el valor de ρ tiende a cero (como se consideró), la expresión anterior se puede simplificar en la siguiente forma:

$$G(s)H(s) \Big|_{s=\rho e^{j\theta}} = \frac{K}{\rho e^{j\theta}} = \alpha e^{-j\theta}$$

La función $G(s)H(s)$ por lo tanto es un semicírculo, cuya magnitud tiende a infinito (∞) y su ángulo de fase va de $+90^\circ$ a -90° . En la fig 9-50 se muestra el tramo del camino de Nyquist y su lugar geométrico en el plano de la función $GH(s)$.

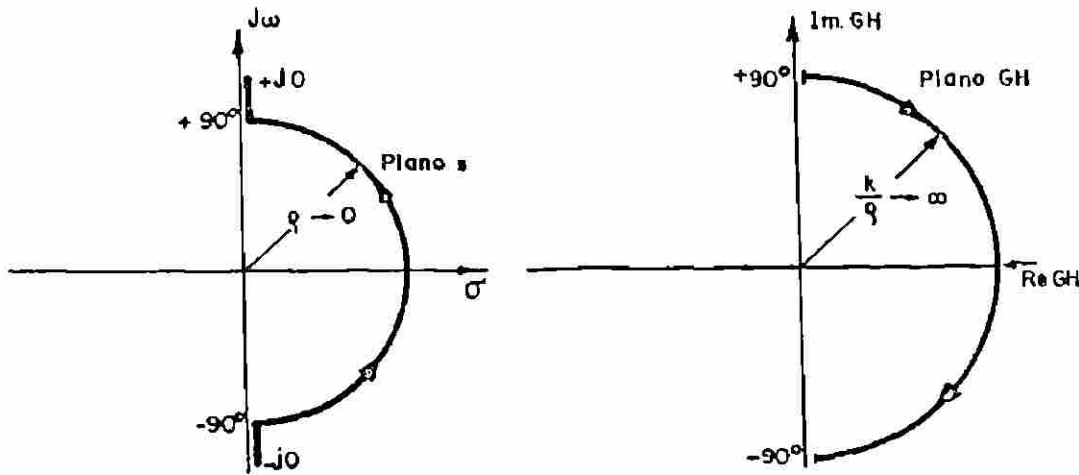


Fig. 9-50. Diagrama Parcial de Nyquist.

El último tramo del camino de Nyquist en el que falta evaluar a $G(s)H(s)$, es el lugar de "s" en el que el radio tiende a infinito (∞) y se mueve de $+j\omega$ a $-j\omega$. De manera semejante al caso anterior, los puntos que forman este tramo se representan por un vector giratorio:

$$s = \rho e^{j\theta}$$

Como la magnitud de ρ tiende a infinito y el ángulo θ varía de $+90^\circ$ a -90° , el valor de la función $G(s)H(s)$ será:

$$G(s)H(s) \Big|_{s=\rho e^{j\theta}} = \frac{K}{T\rho^2 e^{j2\theta} + \rho e^{j\theta}} = \frac{K}{T\rho^2 e^{j2\theta}} = 0 e^{-2j\theta}$$

En la figura 9-51 se puede observar el tramo del camino de Nyquist y el lugar de la función GH , el cual está dado por un vector, cuyo módulo tiende a cero en tanto gira 360° en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

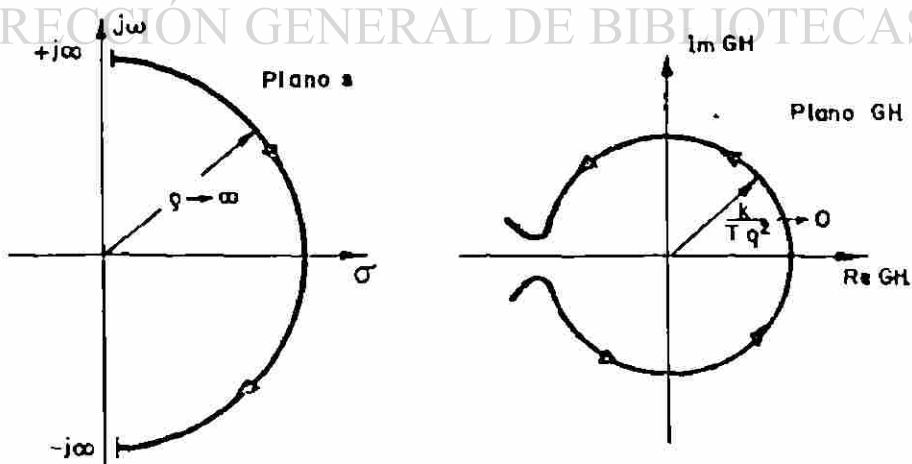


Fig. 9-51. Diagrama de Nyquist Parcial.

En la fig. 9-52 se muestra el lugar de Nyquist completo. Como se puede observar, el lugar de $G(s)H(s)$ no rodea, ni incluye al punto crítico $(-1, j0)$ por lo que se puede concluir que el sistema de control de lazo cerrado es estable.

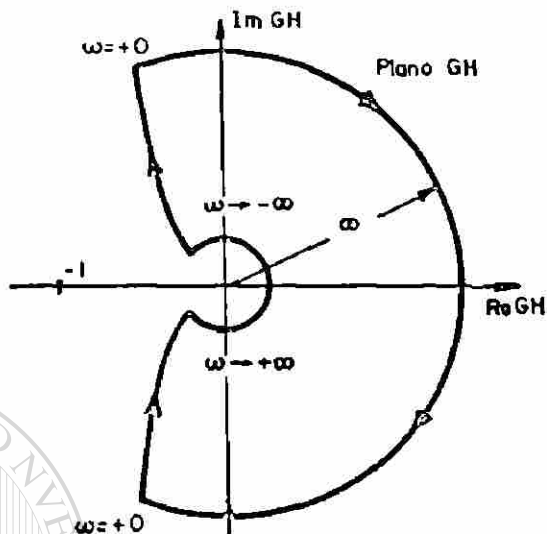


Fig. 9-52. Diagrama de Nyquist Completo.

Ejemplo No 2.-Se desea determinar la estabilidad del siguiente sistema aplicando el criterio de Nyquist.

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

en donde $K, T_1 > T_2$ son valores reales positivos. En la fig. 9-53 se puede ver la ubicación de los polos de la función, así como el camino de Nyquist sobre el cual se evaluará.

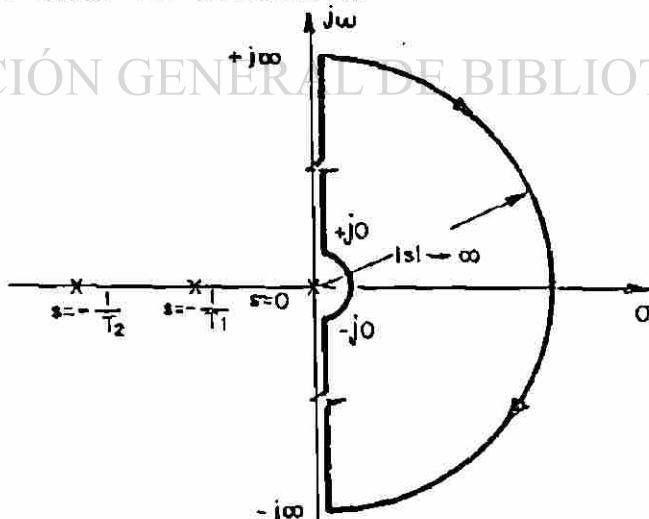


Fig. 9-53. Trayectoria de Nyquist.

Igual que en el ejemplo anterior, la función de transferencia no tiene polos, por lo que $F = 0$, por lo que para determinar la estabilidad del sistema, bastaría con aplicar el Criterio de Nyquist simplificado, esto es evaluar $G(s)H(s)$ solo en el tramo que va desde $\omega = +0$ a $\omega \rightarrow \infty$, sin embargo, se hará el trazo completo para ilustrar el criterio. El valor de $G(s)H(s)$ para el tramo que va de $\omega = +0$ a $\omega \rightarrow \infty$ está dado por:

$$G(s)H(s) \Big|_{\omega = +0} = \alpha \angle -90^\circ$$

$$G(s)H(s) \Big|_{\omega \rightarrow +\infty} = 0 \angle -270^\circ$$

La gráfica de $G(s)H(s)$ que corresponde a estos valores y su lugar simétrico, que resulta de evaluar la función desde $\omega \rightarrow \infty$ hasta $\omega = -0$ se muestra en la figura 9-54.

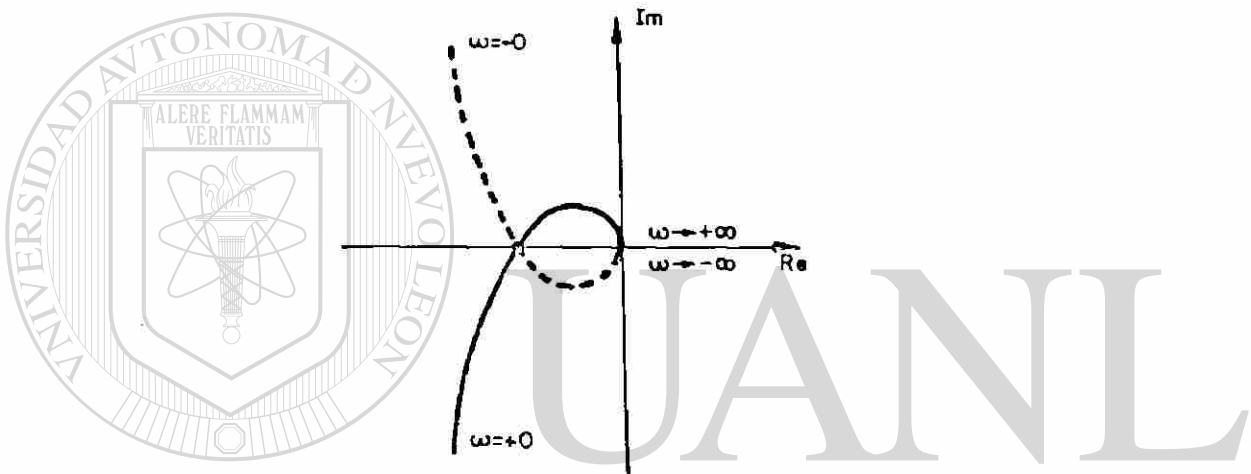


Fig. 9-54. Diagrama de Nyquist Parcial.

Para el tramo que va desde $-j0$ a $+j0$ se considera el vector giratorio

$$s = \rho e^{j\theta}$$

En donde ρ tiene un valor muy pequeño ($\rho \rightarrow 0$) y θ se desplaza 180° , desde -90° a $+90^\circ$. Substituyendo el valor de "s" en $G(s)H(s)$ tenemos:

$$G(s)H(s)_{s=\rho e^{j\theta}} = \frac{k}{\rho e^{j\theta} (T_1 \rho e^{j\theta} + 1) (T_2 \rho e^{j\theta} + 1)}$$

$$G(s)H(s) = \frac{k}{\rho e^{j\theta} [T_1 T_2 \rho^2 e^{2j\theta} + (T_1 + T_2) \rho e^{j\theta} + 1]}$$

cuando $\rho \rightarrow 0$ la expresión anterior se puede simplificar como sigue:

$$G(s)H(s) \Big|_{s = \rho e^{j\theta}} \approx \frac{1}{\rho e^{j\theta}} = \alpha e^{-j\theta}$$

El tramo del camino de Nyquist y su lugar correspondiente se pueden observar en la fig. 9-55. Notese en el hecho de que mientras el lugar en el plano "s" se mueve en sentido contrario a las manecillas del reloj, el lugar de $G(s)H(s)$ se mueve en el mismo sentido de las manecillas del reloj.

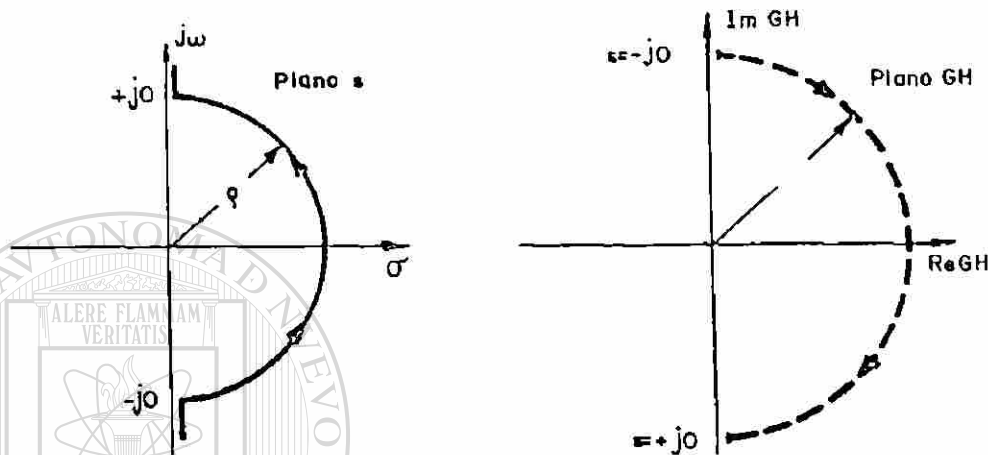


Fig. 9-55. Camino de Nyquist Parcial.

Para el último tramo del camino de Nyquist, en donde "s" va de $+j\omega$ a $-j\omega$, se considera el vector giratorio

$$s = \rho e^{j\theta}$$

en donde ρ tiende a infinito y el ángulo de fase va de $+90^\circ$ a -90° . De tal manera que:

$$G(s)H(s) \Big|_{s = \rho e^{j\theta}} = \frac{K}{\rho e^{j\theta} (T_1 \rho e^{j\theta} + 1)(T_2 \rho e^{j\theta} + 1)} \quad \text{®}$$

como ρ tiende a infinito, entonces:

$$G(s)H(s) \Big|_{s = \rho e^{j\theta}} \approx \frac{K}{T_1 T_2 \rho^3 e^{3j\theta}} = 0 e^{-3j\theta}$$

En la fig. 9-56 se muestra el lugar de la función, el cual está dado por un vector con magnitud tendiente a cero, en tanto gira 540° en sentido contrario a las manecillas del reloj.

En la fig. 9-57 se representa el diagrama completo de $G(s)H(s)$. El sistema de control puede ser estable o inestable, dependiendo del valor del módulo de la función, cuando corta el eje real negativo. Es evidente que esto depende de los valores que tengan los parámetros del sistema K , T_1 y T_2 . Por lo general T_1 y T_2 son magnitudes constantes.

por lo que la estabilidad del sistema está determinada por el valor de la ganancia k .

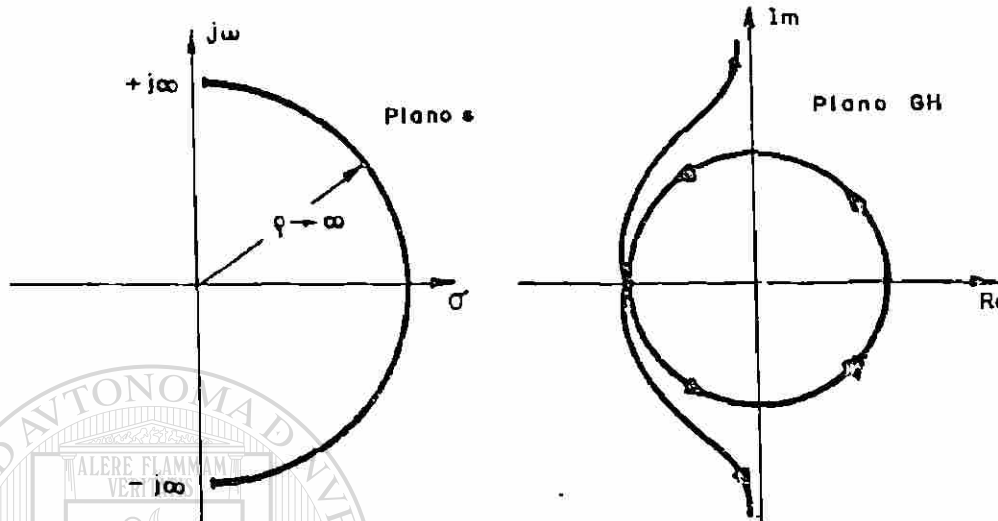


Fig. 9-56. Diagrama Parcial de Nyquist.

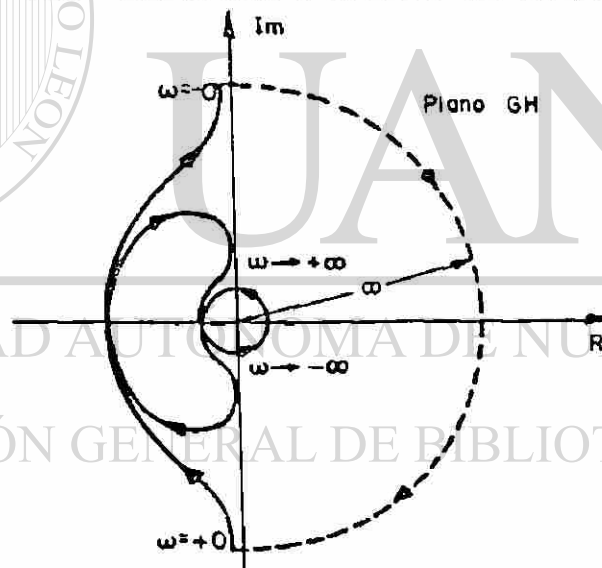


Fig. 9-57. Diagrama Completo de Nyquist.

Por ejemplo supondremos que $T_1 = 1$ y $T_2 = 0.5$, en tanto que $K = 5$, substituyendo éstos valores, la función $G(s)H(s)$ será:

$$G(s)H(s) = \frac{5}{s(s+1)(0.5s+1)}$$

Como el lugar de $G(s)H(s)$ corta al eje real cuando es evaluado sobre el eje imaginario del plano "s", se substituye la variable $s = j\omega$

$$\begin{aligned}
 G(j\omega)H(j\omega) &= \frac{5}{j\omega(j\omega + 1)(0.5j\omega + 1)} = \frac{5}{-1.5\omega^2 + j\omega(1 - 0.5\omega^2)} \\
 &= \frac{5}{-1.5\omega^2 + j\omega(1 - 0.5\omega^2)} \cdot \frac{-1.5\omega^2 - j\omega(1 - 0.5\omega^2)}{-1.5\omega^2 - j\omega(1 - 0.5\omega^2)} \\
 &= \frac{7.5}{2.25\omega^2 + (1 - 0.5\omega^2)^2} - j \frac{5(1 - 0.5\omega^2)}{2.25\omega^3 + \omega(1 - 0.5\omega^2)^2}
 \end{aligned}$$

Cuando la gráfica de la función corta al eje real, el valor de la parte imaginaria es cero, de tal manera que:

$$\frac{5(1 - 0.5\omega^2)}{2.25\omega^3 + \omega(1 - 0.5\omega^2)^2} = 0$$

de donde $5 - 2.5\omega^2 = 0$ $\omega^2 = 2$ y $\omega = \pm \sqrt{2}$

Este valor de frecuencia es al cual ocurre el corte del eje real. Substituyendo $\omega = \sqrt{2}$ en la ecuación de la función, se obtiene la intersección

$$G(j\sqrt{2})H(j\sqrt{2}) = \frac{7.5}{2.25 \times 2 + (1 - 0.5 \times 2)^2} = 1.66$$

Aplicando el criterio de Nyquist simplificado, se puede ver en la figura 9-58 que la gráfica $G(s)H(s)$ incluye el punto crítico $(-1, j0)$ por lo que el sistema de control, para éste valor de ganancia, ($K=5$) es inestable.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

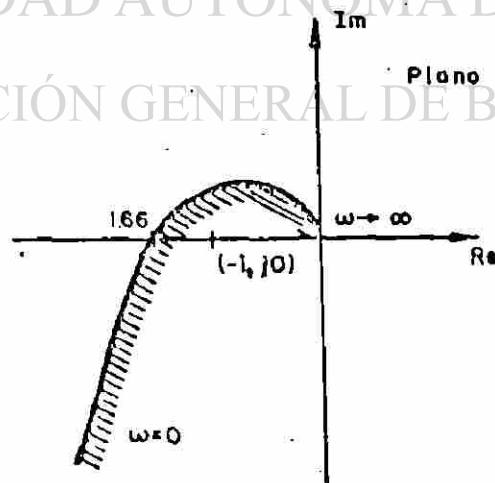


Fig. 9-58. Diagrama de Nyquist Simplificado.

Continuando con el mismo ejemplo, se hará el análisis del sistema cuando $k = 2$. Con éste valor de la ganancia

$$G(s)H(s) = \frac{2}{s(s + 1)(0.5s + 1)}$$

Substituyendo $s = j\omega$, tenemos:

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{2}{j\omega(j\omega + 1)(0.5j\omega + 1)}$$

$$G(j\omega)H(j\omega) = -\frac{3}{2.25\omega^2 + (1 - 0.5\omega^2)^2} -j \frac{2(1 - 0.5\omega^2)}{2.25\omega^3 + \omega(1 - 0.5\omega^2)^2}$$

Haciendo la parte imaginaria igual a cero. (debido al corte del eje real) se encuentra que la frecuencia a la cual la función corta el eje real, tiene el mismo valor que en el caso anterior, es decir $\omega = \sqrt{2}$. De esta manera, la intersección con el eje real viene dada por:

$$G(j\sqrt{2})H(j\sqrt{2}) = \frac{3}{2.25 \times 2 + (1 - 0.5 \times 2)^2} = 0.66$$

En la fig. 9-59 se representa la gráfica de la función, en donde se puede observar que el punto crítico no es incluido por esta, por lo tanto el sistema es estable.

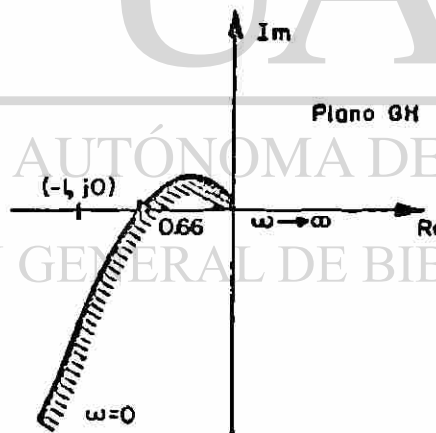


Fig. 9-59. Diagrama de Nyquist Simplificado.

Del análisis anterior se desprende que, entre menor sea el valor de la ganancia, el sistema es más estable. El valor crítico de K , esto es el máximo valor que puede tomar sin hacer inestable al sistema se puede obtener aplicando el criterio de Routh.

La ecuación característica del sistema es:

$$0.5s^3 + 1.5s^2 + s + k = 0$$

El arreglo de Routh es el siguiente:

s^3	0.5	1
s^2	1.5	k
s^1	$\frac{1.5 - 0.5k}{1.5}$	
s^0	k	

El rango de estabilidad se obtiene del término fraccionario igualado a cero:

$$\frac{1.5 - 0.5k}{1.5} = 0 \quad \text{de donde} \quad k = 3$$

El resultado anterior significa que el sistema será estable si la ganancia toma valores menores de 3. Si $k = 3$, el sistema será marginalmente estable (límite máximo de estabilidad). Por último para valores de k mayores de 3, el sistema es inestable.

9-9-6.- Estabilidad Relativa.

Se ha mencionado que no basta que un sistema tenga estabilidad absoluta, también es muy importante su estabilidad relativa. La Estabilidad Relativa nos indica que tan cerca o que tan lejos está un sistema de control de perder la estabilidad, y ésta se puede determinar aplicando el Criterio de Nyquist.

En la fig. 9-60 se muestran las gráficas de la respuesta de un sistema para diferentes valores de ganancia. Obsérvese que si la ganancia es elevada, el lugar de las raíces se aproxima peligrosamente al punto crítico $(-1, j0)$, y cuando la ganancia disminuye el lugar se aleja del punto. Evidentemente cuando la ganancia es elevada, la estabilidad del sistema será menor.

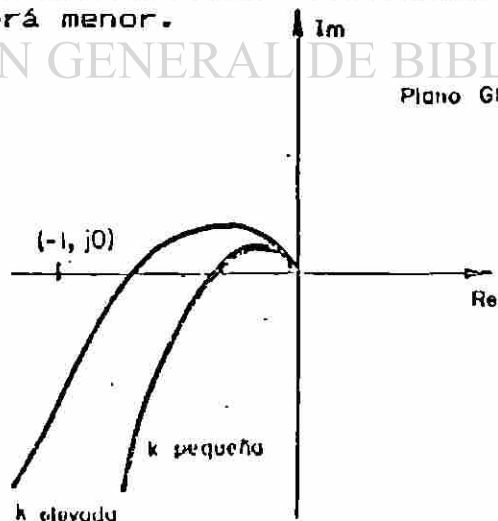


Fig. 9-60. Diagramas de Nyquist con diferentes ganancias.

En general, cuanto más se acerque la grafica de $G(s)H(s)$ al punto critico, el sistema tendrá una respuesta más oscilatoria. Por lo tanto se puede utilizar la distancia entre el lugar de la funcion y el punto $(-1, j0)$ como una medida de la estabilidad relativa del sistema. Esta distancia se expresa mediante dos términos denominados margen de fase y margen de ganancia.

Margen de Ganancia.

El margen de ganancia se define como el recíproco de $G(j\omega)H(j\omega)$ cuando el ángulo de fase es de -180° . Si se representa con ω_f la frecuencia a la cual ocurre el corte del eje real negativo, el margen de ganancia se puede representar como sigue:

$$M.G. = \frac{1}{G(j\omega_f)H(j\omega_f)}$$

El Margen de Ganancia expresado en decibeles es:

$$M.G. \text{ en dB} = 20 \log \frac{1}{G(j\omega_f)H(j\omega_f)}$$

Cuando $|G(j\omega_f)H(j\omega_f)|$ es menor que 1, el margen de ganancia es positivo y su valor se puede interpretar como la ganancia mínima adicional, que hará al sistema inestable. En caso contrario cuando el valor $G(j\omega_f)H(j\omega_f)$ es mayor que uno, el margen de ganancia es negativo y su valor se interpreta como la ganancia mínima que debe reducirse para llevar al sistema al margen de la estabilidad. En la fig. 9-61 se puede ver el margen de ganancia. Es importante observar que para un sistema estable, corresponde un margen de ganancia positivo.

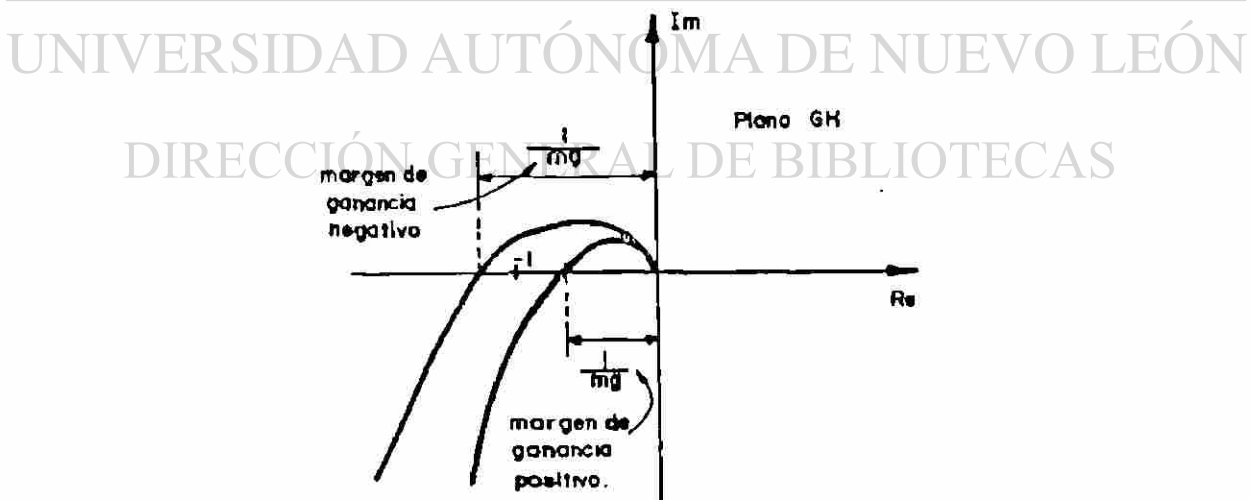


Fig. 9-61. Margen de Ganancia

Margen de Fase.

El margen de fase se define como el ángulo que hay entre el eje real negativo y el lugar de la función cuando su módulo es unitario. La frecuencia a la cual ocurre la definiremos por ω_g .

El margen de fase se representará por la letra griega γ , siendo $\gamma = 180^\circ + \phi$, en donde ϕ es negativo. En la fig. 9-62 se puede observar el margen de fase tanto para un sistema estable como para uno inestable. Para un sistema estable corresponde un margen de fase positivo ($\gamma > 0$) y para un sistema inestable un margen de fase negativo, o sea ($\gamma < 0$).

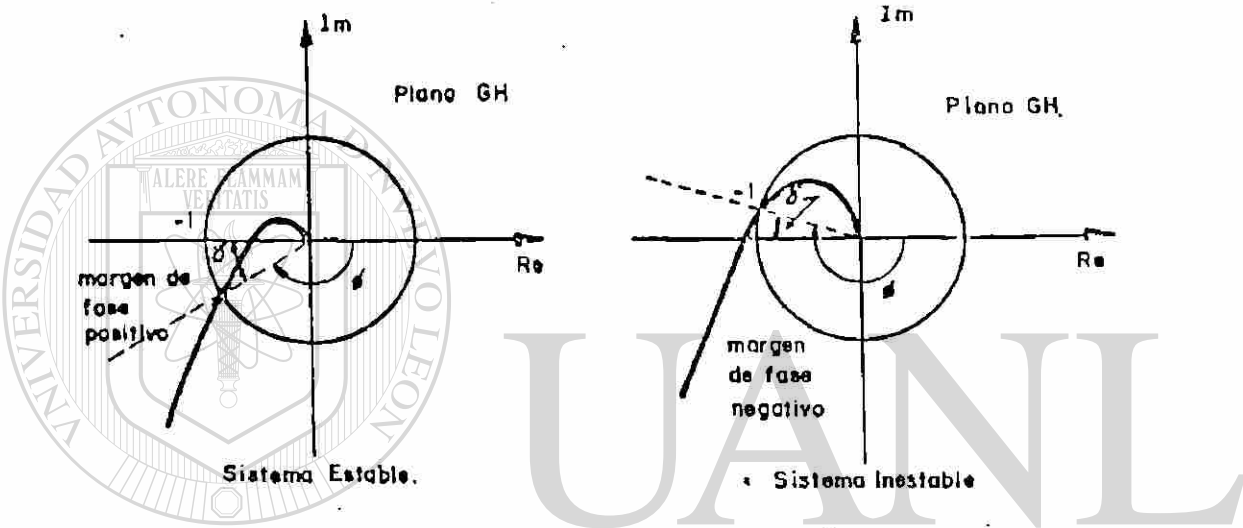


Fig. 9-62. Margen de Fase.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

En la fig. 9-63 se representan diferentes gráficas de Nyquist. Las áreas en el plano GH circundadas por la gráfica se han sombreado.

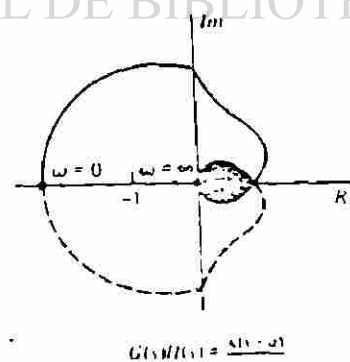
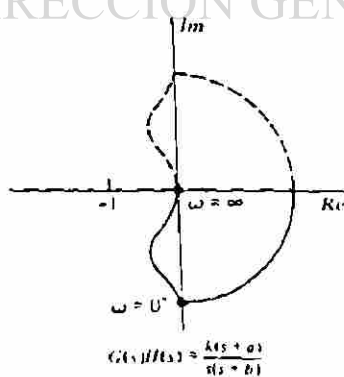
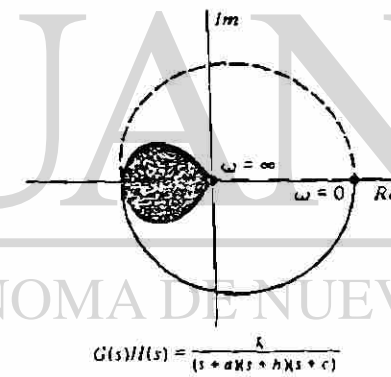
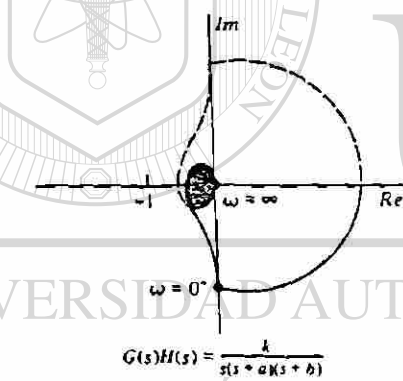
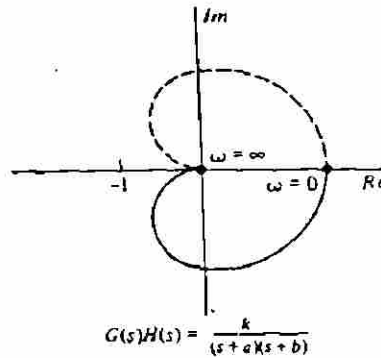
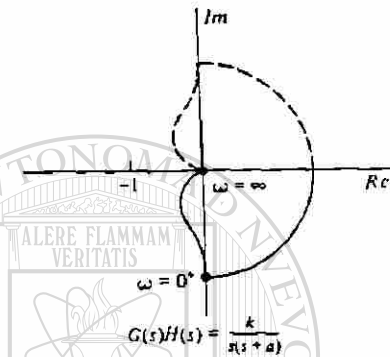
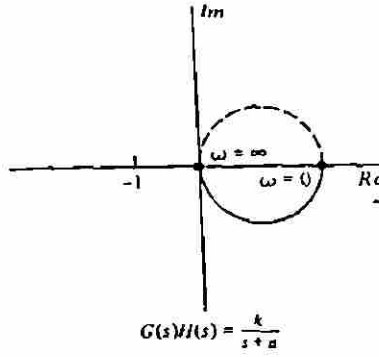
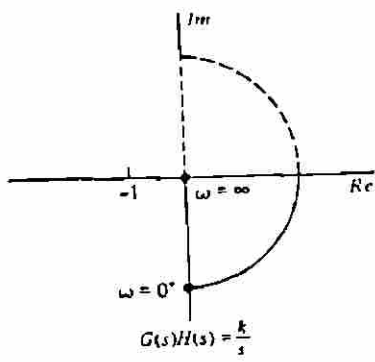


Fig. 9-63. Gráficas de Nyquist

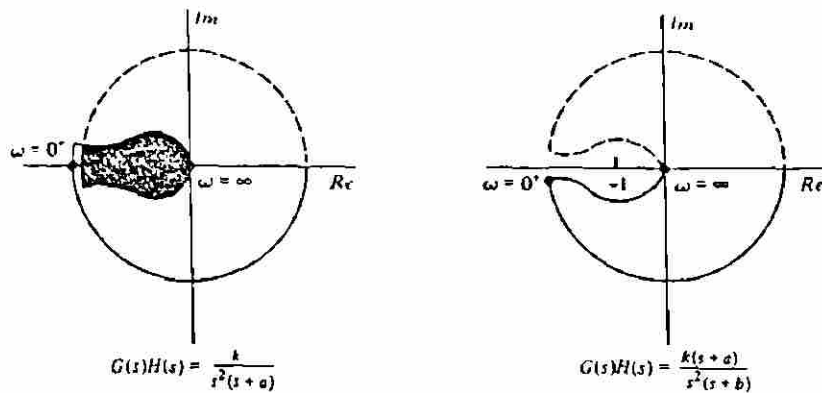


Fig. 9-64.- Gráficas de Nyquist (continuación)

9-9-8.- Ejercicios.

1.- Dibujar las gráficas de Nyquist de los sistemas de control con las siguientes funciones de transferencia. Una vez trazada la gráfica determinar si el sistema es estable o inestable.

a) $G(s)H(s) = \frac{s}{s+4}$ Resp. estable

b) $G(s)H(s) = \frac{10}{(s+2)(s+6)}$ Resp. estable

c) $G(s)H(s) = \frac{1}{s(s^2+4)}$ Resp. inestable

d) $G(s)H(s) = \frac{s^2}{s^2+2s+10}$ Resp. estable

e) $G(s)H(s) = \frac{2}{s^2(s+3)}$ Resp. inestable

2.- Para los siguientes sistemas de control retroalimentados, trazar las gráficas de Nyquist y determinar si los sistemas son estables o inestables. Resp. a)estable b)inestable c)estable.

9-10.-Gráficas del Módulo en función del Angulo. Lugar de BLACK.

Para trazar estas gráficas se utilizan coordenadas rectangulares, con las ordenadas en decibeles y las abscisas en grados. Esta gráfica de la magnitud de una función de transferencia en función del ángulo de fase, con la frecuencia como parámetro se conoce como "Lugar de Black". teniendo la ventaja de contener en un solo trazado la información sobre la Magnitud o Moduloy la Fase o Angulo, en contraste con el Lugar de Bode que está formado por dos curvas.

En la fig.9-65 se representan las gráficas de algunos términos, cuyo lugar se traza generalmente a partir del Lugar de Bode, trasladando los datos de las curvas de Módulo y de Fase al Plano de Black.

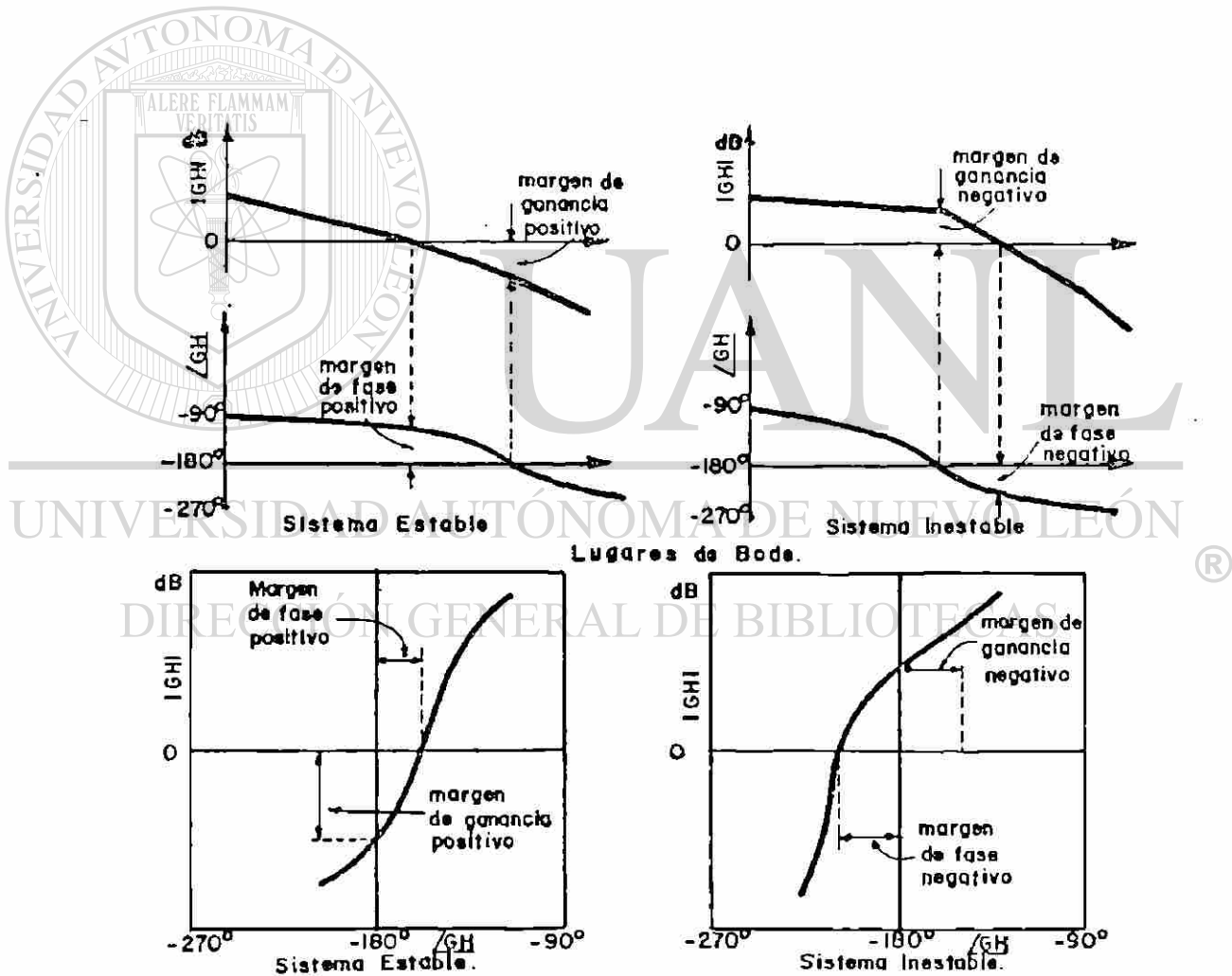


Fig. 9-65. Lugar de BLACK

9-11.- Lugares de Amplitud Constante "M" y Fase Constante "N" en el Plano Complejo.

A la Magnitud o amplitud de una función de transferencia se le representa con la letra "M". Especialmente tiene una gran importancia el valor máximo de la magnitud M_r y la frecuencia a la cual se presenta dicho valor máximo ω_r . La importancia radica en el hecho de que el valor máximo M_r guarda una estrecha relación con el coeficiente de amortiguamiento, cuyo valor es indicativo de la estabilidad del sistema. Por otro lado, la frecuencia de resonancia ω_r es una medida de la rapidez de la respuesta de un sistema de control.

Cuando se está manejando una función de transferencia de orden elevado, el trazado de dicha función de transferencia en lazo cerrado es bastante laborioso, por lo que la obtención de los valores de M_r y ω_r presentan en estos casos cierta dificultad. Para determinar estos valores a partir de la función de transferencia de lazo abierto se han desarrollado algunos métodos. A continuación se analizarán estos métodos.

9-11-1.- Lugar de Amplitud Constante "M".

Un sistema de control con retroalimentación unitaria y cuya función de transferencia de lazo abierto es $G(j\omega)$, se puede representar por medio de coordenadas rectangulares en el plano complejo como:

$$G(j\omega) = x + jy$$

La función de transferencia de lazo cerrado se puede escribir como:

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)} = \frac{x + jy}{1 + x + jy}$$

Cuyo módulo se puede representar por M, en donde:

$$M = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{(1+x)^2 + y^2}} \quad \text{o bien} \quad M^2 = \frac{x^2 + y^2}{(1+x)^2 + y^2}$$

Agrupando los términos "x", "y" y "M", se puede demostrar que se cumple con la siguiente ecuación:

$$\left[x + \frac{M^2}{M^2-1} \right]^2 + y^2 = \frac{M^2}{(M^2-1)^2} \quad (9-15)$$

En seguida se demostrará la ecuación 9-15. Si al estudiante no le interesa esta demostración, puede brincar esta parte y continuar el análisis posterior. Para realizar la demostración, primero se desarrollará la parte izquierda de la igualdad y posteriormente la parte derecha, si las dos partes desarrolladas son iguales, la ecuación se cumplirá.

Substituyendo el valor de M^2 en la parte izquierda de la ecuación 9-15 tendremos:

$$\left[x + \frac{M^2}{M^2-1} \right]^2 + v^2 = \left[x + \frac{\frac{x^2+v^2}{(1+x)^2+v^2}}{\frac{x^2+v^2}{(1+x)^2+v^2} - 1} \right]^2 + v^2 =$$

$$\left[x + \frac{\frac{x^2+v^2}{(1+x)^2+v^2}}{\frac{x^2+v^2 - (1+x)^2 - v^2}{(1+x)^2+v^2}} \right]^2 + v^2 = \left[x + \frac{x^2+v^2}{x^2 - (1+2x+x^2)} \right]^2 + v^2 =$$

$$= \left[x + \frac{x^2+v^2}{x^2-1-2x-x^2} \right]^2 + v^2 = \left[x + \frac{x^2+v^2}{-1-2x} \right]^2 + v^2 =$$

$$= \left[\frac{x(-1-2x) + x^2+v^2}{(-1-2x)} \right]^2 + v^2 = \left[\frac{-x-2x^2+x^2+v^2}{(-1-2x)} \right]^2 + v^2 =$$

$$= \left[\frac{-x-x^2+v^2}{(-1-2x)} \right]^2 + v^2 = \left[\frac{x^2+2x^3+x^4-2xv^2-2x^2v^2+v^4}{(-1-2x)^2} \right] + v^2 =$$

$$= \frac{x^2+2x^3+x^4-2xv^2-2x^2v^2+v^4+v^2(1+4x+4x^2)}{(-1-2x)^2} =$$

$$= \frac{x^2+2x^3+x^4-2xv^2-2x^2v^2+v^4+v^2+4xv^2+4x^2v^2}{(-1-2x)^2} =$$

$$= \frac{x^2+2x^3+x^4+2xv^2+2x^2v^2+v^4+v^2}{(-1-2x)^2} \quad (9-16)$$

Desarrollando la parte derecha de la ecuación 9-15, tenemos:

$$\frac{M^2}{(M^2-1)^2} = \frac{\frac{x^2+v^2}{(1+x)^2+v^2}}{\left[\frac{x^2+v^2}{(1+x)^2+v^2} - 1 \right]^2} = \frac{\frac{x^2+v^2}{(1+x)^2+v^2}}{\left[\frac{x^2+v^2 - (1+x)^2 - v^2}{(1+x)^2+v^2} \right]^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{x^2 + v^2}{(1+x)^2 + v^2}}{\left[\frac{x^2 + v^2 - 1 - 2x - x^2 - v^2}{(1+x)^2 + v^2} \right]^2} = \frac{\frac{x^2 + v^2}{(1+x)^2 + v^2}}{\frac{(-1 - 2x)^2}{[(1+x)^2 + v^2]^2}} = \frac{(x^2 + v^2)[(1+x)^2 + v^2]}{(-1 - 2x)^2} = \\
&= \frac{(x^2 + v^2)[1 + 2x + x^2 + v^2]}{(-1 - 2x)^2} = \frac{x^2 + 2x^3 + x^4 + x^2v^2 + v^2 + 2xv^2 + x^2y^2 + v^4}{(-1 - 2x)^2} = \\
&= \frac{x^2 + 2x^3 + x^4 + 2xv^2 + 2x^2v^2 + v^4 + v^2}{(-1 - 2x)^2} \quad (9-17)
\end{aligned}$$

Comparando las dos expresiones 9-16 y 9-17 se concluye que son exactamente iguales, con lo cual se demuestra el cumplimiento de la ecuación 9-15.

Continuando el análisis de la ecuación 9-15, se puede ver que con excepción del valor de $M = 1$, dicha ecuación representa la ecuación algebraica de una circunferencia cuyo centro está ubicado en las coordenadas:

$$x = -\frac{M^2}{M^2 - 1} \quad v = 0$$

y con un radio igual a:

$$r = \frac{M}{(M^2 - 1)}$$

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

En la fig. 9-66 se representa una familia de curvas para diferentes valores de "M", los cuales están tabulados en la tabla 9-3. Cuando el valor del módulo es igual a 1, se tiene una recta paralela al eje "v", que pasa por el punto $x=1/2$. Cuando "M" es mayor que 1, los centros de las circunferencias se localizan a la izquierda del punto $(-1, j0)$, por el contrario, para valores de "M" menores que 1, los centros se localizan a la derecha. Observese que cuando "M" tiende a infinito, el centro del círculo tiende hacia el punto crítico $(-1, j0)$ y su radio tiende a cero. Esto significa que el coeficiente de amortiguamiento del sistema de control se va reduciendo (tendiendo a cero) y por lo tanto también se va perdiendo su grado de estabilidad.

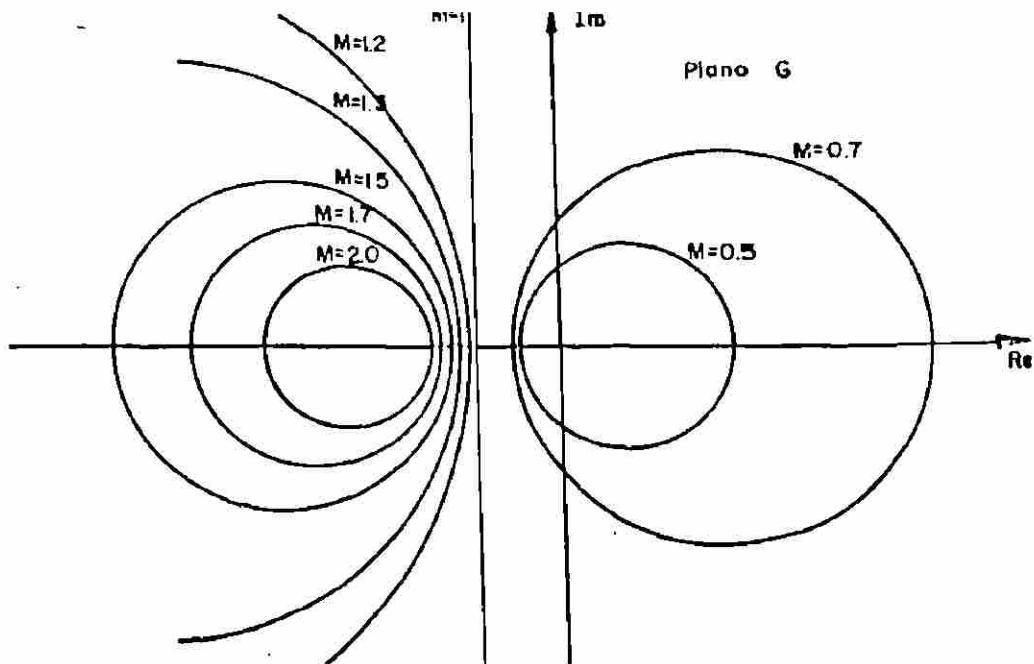


Fig. 9-66.- Familia de Curvas para "M" constante.

Tabla 9-3.

M	Centro $x = -[M^2/(M^2-1)]$	Radio $r = 1/M/ M^2-1 $
0.5	0.333	0.67
0.7	0.960	1.37
1.0	∞	∞
1.1	-5.76	5.24
1.2	-3.27	2.73
1.3	-2.45	1.88
1.4	-2.04	1.46
1.5	-1.8	1.20
1.6	-1.64	1.03
1.7	-1.53	0.90
1.8	-1.45	0.80
1.9	-1.38	0.729
2.0	-1.33	0.67
2.5	-1.19	0.48
3.0	-1.13	0.38
3.5	-1.10	0.34
4.0	-1.07	0.27
5.0	-1.04	0.21

9-11-2.- Lugar de ángulo de Fase Constante "N".

Las gráficas de ángulo de fase constante de una función de transferencia de lazo cerrado se puede obtener de manera semejante a las gráficas de modulo o amplitud. Partiremos para ello igualmente de la función de transferencia de lazo cerrado de un sistema de control con retroalimentación unitaria:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

substituyendo $s = j\omega$, justificación que ya se vió anteriormente cuando se trabaja en función de la frecuencia, la función de transferencia es:

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)}$$

si representamos $G(j\omega)$ en coordenadas rectangulares como $G(j\omega) = x + jy$ y denominamos con la letra ϕ al ángulo de fase de la función de transferencia, matemáticamente el ángulo ϕ se puede representar como sigue:

$$\phi = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)} = \frac{x + jy}{1 + x + jy}$$

El ángulo ϕ también lo podemos representar como la diferencia de dos ángulos, el ángulo del numerador $(x + jy)$ y el ángulo del denominador $(1 + x + jy)$ como se indica en la siguiente ecuación:

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{y}{1+x}\right)$$

Si calculamos la tangente de ϕ de la ecuación anterior, obtendríamos:

$$\tan \phi = \tan \left[\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{y}{1+x}\right) \right]$$

Definiendo $N = \tan \phi$ y aplicando la siguiente identidad trigonométrica a la ecuación anterior:

$$\tan (A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

donde $\tan A = \tan \left[\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \right] = \frac{y}{x}$

y $\tan B = \tan \left[\tan^{-1}\left(\frac{y}{1+x}\right) \right] = \frac{y}{1+x}$

obtenemos el valor de N en función de "x" y "y" como se representa:

$$N = \frac{\frac{y}{x} - \frac{y}{1+x}}{1 + \frac{y}{x} \left(\frac{y}{1+x} \right)}$$

$$N = \frac{\frac{y(1+x) - yx}{x(1+x)}}{\frac{x(1+x) + y^2}{x(1+x)}} = \frac{y}{x + x^2 + y^2} \quad (9-18)$$

La ecuación 9-18 de la página anterior se puede representar en la siguiente forma equivalente:

$$x^2 + x + y^2 = \frac{y}{N} \quad \text{o bien} \quad x^2 + x + y^2 - \frac{y}{N} = 0$$

si agregamos el término $(1/4 + 1/4N^2)$ a ambos miembros de la ecuación anterior tenemos:

$$x^2 + x + y^2 - \frac{y}{N} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4N^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4N^2}$$

reacomodando los términos de la ecuación anterior en la siguiente forma:

$$\left[x^2 + x + \frac{1}{4} \right] + \left[y^2 - \frac{y}{N} + \frac{1}{4N^2} \right] = \frac{1}{4} \left[1 + \frac{1}{N^2} \right]$$

podemos llegar finalmente a la siguiente ecuación equivalente:

$$\left[x + \frac{1}{2} \right]^2 + \left[y - \frac{1}{2N} \right]^2 = \frac{1}{4} \left[\frac{N^2 + 1}{N^2} \right] \quad (9-19)$$

La ecuación 9-19 representa una circunferencia con centro en

$$x = -\frac{1}{2} \quad y = \frac{1}{2N} \quad \text{y con un radio igual a} \quad \frac{1}{2} \left[\frac{N^2 + 1}{N^2} \right]^{1/2}.$$

Por ejemplo, si en la ecuación 9-19 el ángulo ϕ es igual a 30° , el valor de $N = \tan \phi = \tan 30^\circ = 0.577$ y se puede calcular que para un ángulo $\phi = 30^\circ$, el centro de la circunferencia es:

$$x = -0.5, \quad y = \frac{1}{2(0.577)} = 0.866$$

$$\text{y el radio es} \quad r = \frac{1}{2} \left[\frac{(0.577)^2 + 1}{(0.577)^2} \right]^{1/2} = \frac{1}{2} \left[\frac{0.3329 + 1}{0.3329} \right] = 1$$

Como la ecuación 9-19 se satisface cuando $x = y = 0$ y cuando $x = -1$ y $y = 0$, independientemente del valor de N , cada circunferencia pasa por el origen y por el punto $-1 + j0$. Se pueden trazar fácilmente los lugares del ángulo ϕ constante, una vez calculado el valor de N .

En la fig. 9-67 se representa una familia de curvas de ángulo de fase constante para diferentes valores del ángulo ϕ . Además en la tabla 9-4 se dan los valores de N , centro y radio para los valores del ángulo ϕ .

Es importante hacer notar que el lugar de N constante para un valor dado de ϕ , en realidad no es toda la circunferencia, sino solamente un arco. En otras palabras, los arcos de $\phi = 30^\circ$ y $\phi = 150^\circ$ son partes de la misma circunferencia. Esto se debe a que la tangente de un ángulo se mantiene igual si se añade $\pm 180^\circ$ o múltiplos de ese ángulo.

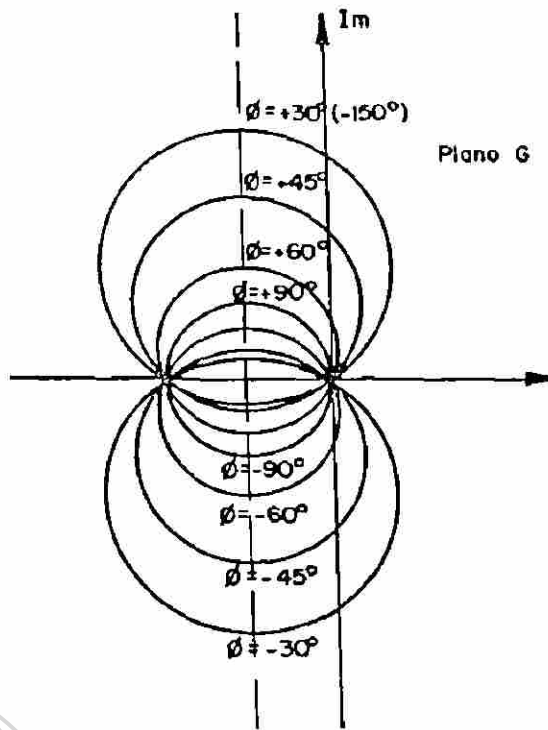


Fig. 9-67. Familia de Curvas de Angulo de Fase Constante.

Tabla 9-4

$\phi \pm 180^\circ$ m	N	Centro $y = 1/2 N$	Radio $r = (1/2 N)\sqrt{N^2 - 1}$
-90	$-\infty$	0.0	0.500
-75	-3.732	-0.134	0.518
-60	-1.73	-0.289	0.577
-45	-1.00	-0.500	0.707
-30	-0.577	-0.866	1.000
-15	-0.268	-1.866	1.931
0	0.0	∞	∞
30	0.577	0.866	1.000
45	1.00	0.500	0.707
60	1.73	0.289	0.577
90	∞	0.0	0.500

El uso de los círculos M y N nos permite hallar la respuesta en frecuencia de un sistema de control de lazo cerrado a partir de la respuesta en frecuencia de lazo abierto $G(j\omega)$ sin tener que calcular la magnitud y el ángulo de fase de la función de transferencia de lazo cerrado para cada frecuencia. Las intersecciones de los lugares de $G(j\omega)$ con los círculos M y N nos dan los valores de M y N en los puntos de frecuencia sobre el lugar de $G(j\omega)$.

En la fig. 9-68 (a) se representa el lugar de $G(j\omega)$ sobrepuesto a una familia de círculos M. En la fig. 9-68 (b) se puede ver el mismo lugar $G(j\omega)$ sobrepuesto a una familia de círculos N. De estos dos diagramas se puede obtener las curvas de respuesta en frecuencia de lazo cerrado para el sistema, las cuales se representaría en la fig. 9-68 (c).

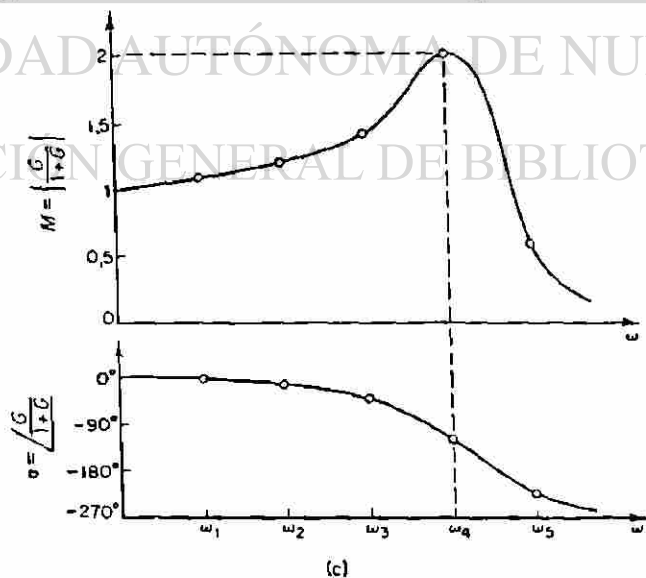
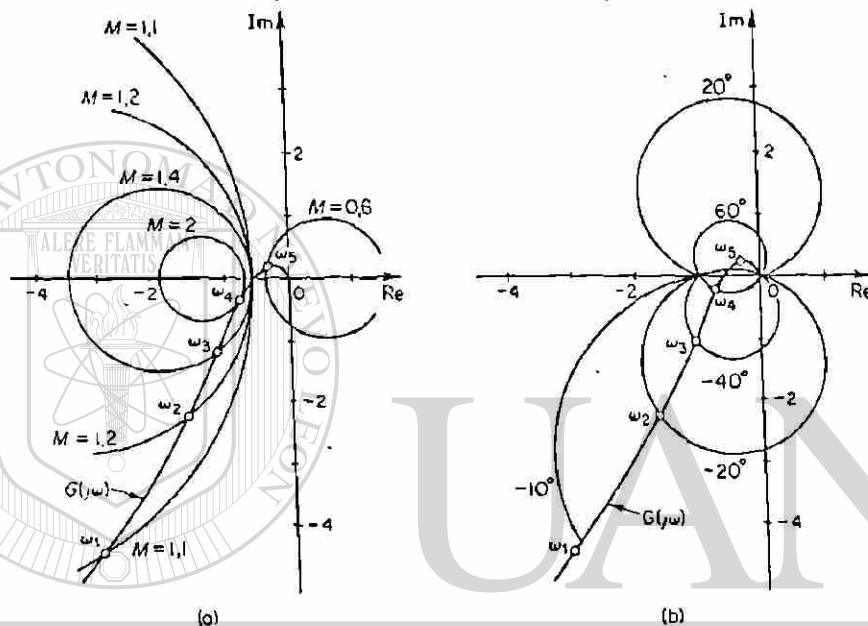


Fig. 9-68 (a) Gráfica de $G(j\omega)$ sobrepuesta a una familia de círculos M
 (b) Gráfica de $G(j\omega)$ sobrepuesta a una familia de círculos N
 (c) Curvas de respuesta en frecuencia de lazo cerrado

En la fig. 9-68(a) se puede ver que el círculo de $M = 1.1$ corta al lugar $G(j\omega)$ en un punto cuya frecuencia es $\omega = \omega_1$. Esto significa que a esta frecuencia la magnitud de la función de transferencia de lazo cerrado es 1.1. También en la misma figura se puede ver que el círculo $M = 2$ es tangente al lugar $G(j\omega)$ en $\omega = \omega_4$, éste es un sólo punto de cruce del lugar $G(j\omega)$ y se le denomina valor pico de resonancia M_r y a la frecuencia de resonancia se le representa con ω_r . En este ejemplo $M_r = 2$ y $\omega_r = \omega_4$. Como conclusión importante hay que hacer notar que el valor pico de resonancia es siempre el valor de M que corresponde al círculo M de menor radio que sea tangente al diagrama de $G(j\omega)$.

9-10.- Cartas de Nichols.

Una de las desventajas de operar con coordenadas polares para la curva de $G(j\omega)$, consiste en que dicha curva no retiene su forma original cuando se introduce una modificación simple, por ejemplo la variación de la ganancia de lazo del sistema. En los problemas de diseño, casi siempre es necesario no sólo modificar la ganancia de lazo, sino también se requiere agregar al sistema original una serie de controladores de retroalimentación, lo que ocasiona la necesidad de reconstruir por completo la curva $G(j\omega)$ resultante. Para propósitos de diseño por lo anterior resulta mucho más conveniente trabajar con el diagrama de Bode o sea en el dominio de la magnitud en decibeles contra el ángulo de fase. Como se recordará en el diagrama de Bode, la curva de magnitudes se desplaza hacia arriba y hacia abajo sin distorsiones, como consecuencia de modificaciones de la ganancia de lazo, además los diagramas de Bode pueden modificarse con mucha facilidad para tomar en cuenta las alteraciones de $G(j\omega)$ cuando se agregan polos y ceros.

Los lugares geométricos de M y N constantes en coordenadas polares se pueden transformar sin mucha dificultad a otra gráfica equivalente cuyas coordenadas son de magnitud en decibeles contra el ángulo de fase. La fig. 9-69 ilustra el procedimiento usado. Seleccionando un punto en un círculo de M constante en el plano $G(j\omega)$, el punto correspondiente en el plano de magnitudes con respecto al ángulo de fase, se puede determinar trazando un vector directamente desde el origen del plano $G(j\omega)$, hasta el punto considerado en el círculo de M constante. La longitud del vector en decibeles y el ángulo de fase en grados nos dan la ubicación del punto correspondiente en el plano de magnitud respecto al ángulo de fase.

En la fig 9-69 se ilustra el proceso de localización de tres puntos arbitrarios correspondientes a los lugares geométricos de M constante en el plano magnitud con respecto al ángulo. El punto crítico $(-1, j0)$ en el plano $G(j\omega)$ corresponde al punto con cero decibeles y -180° en el plano de magnitudes con respecto a la fase.

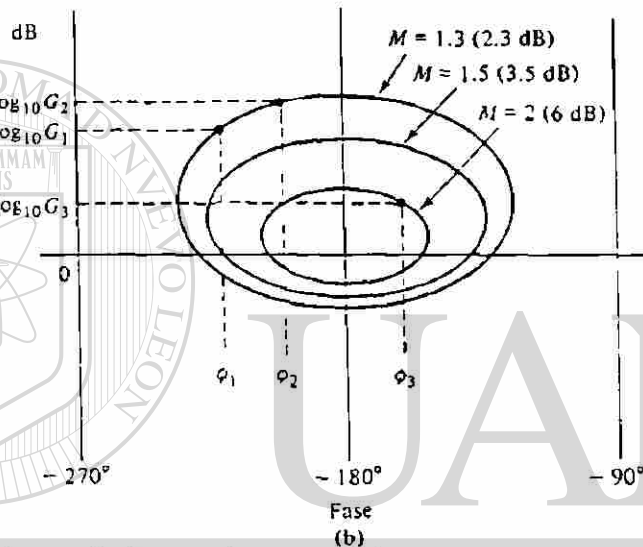
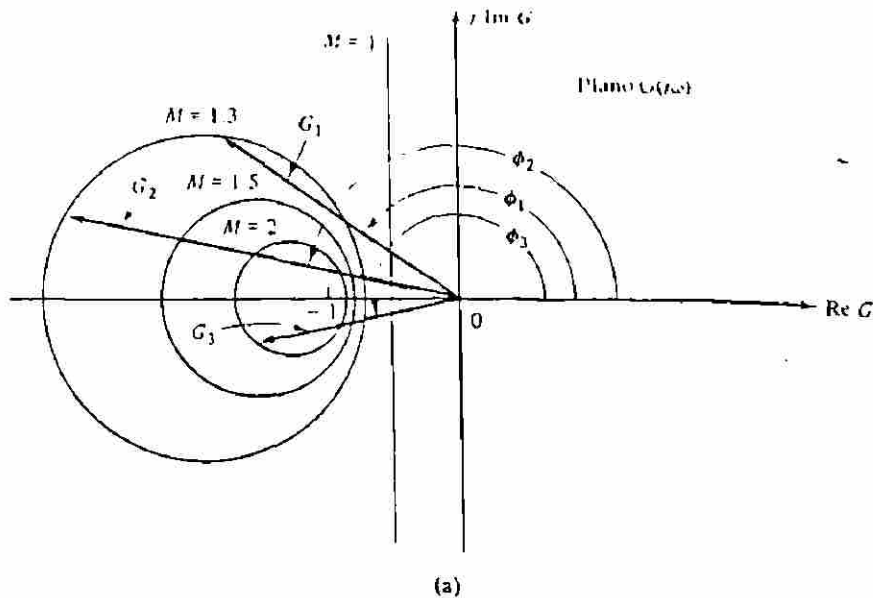


Fig. 9-69. (a) Círculos de M constante en el plano $G(j\omega)$.
 (b) Gráfica de Nichols en coordenadas de magnitud en decibeles contra fase (ángulo).

Usando este mismo procedimiento también es posible transformar los lugares geométricos de N constante al plano de magnitudes en decibeles con respecto al ángulo de fase. Nichols fué el primero en trazar estos lugares geométricos de M y N constantes en coordenadas de magnitud y fase y estas gráficas reciben el nombre de "Cartas de Nichols".

En la fig. 9-70 se representan los lugares geométricos de M constante, para ángulos de fase desde -180° hasta 0° .

En la fig. 9-71 se representa la Carta de Nichols para ángulos de fase entre 0° y -240° . Es importante hacer notar que el punto crítico $(-1, j0)$, corresponde en el diagrama de Nichols al punto $(0\text{dB}, -180^\circ)$. Las Cartas de Nichols contienen curvas de magnitud de lazo cerrado y ángulo de fase constantes. El diseñador puede determinar gráficamente el margen de fase, el margen de ganancia, la magnitud del pico de resonancia, la frecuencia del pico de resonancia y el ancho de banda del sistema de lazo cerrado, a partir del diagrama de lazo abierto del lugar $G(j\omega)$.

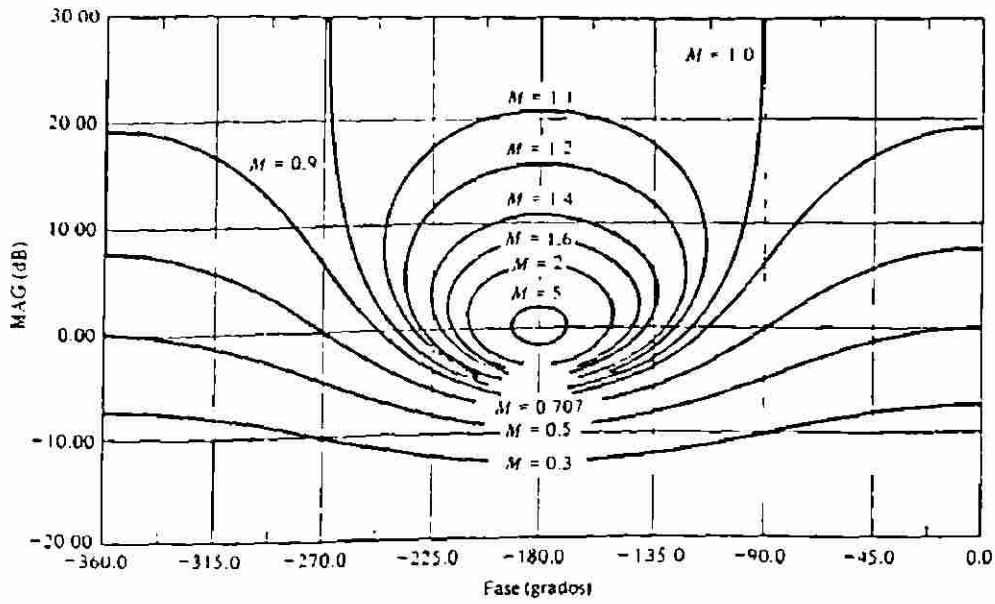


Fig. 9-70.- Lugares Geométricos de M constante, para ángulos de fase desde -180° hasta 0° .

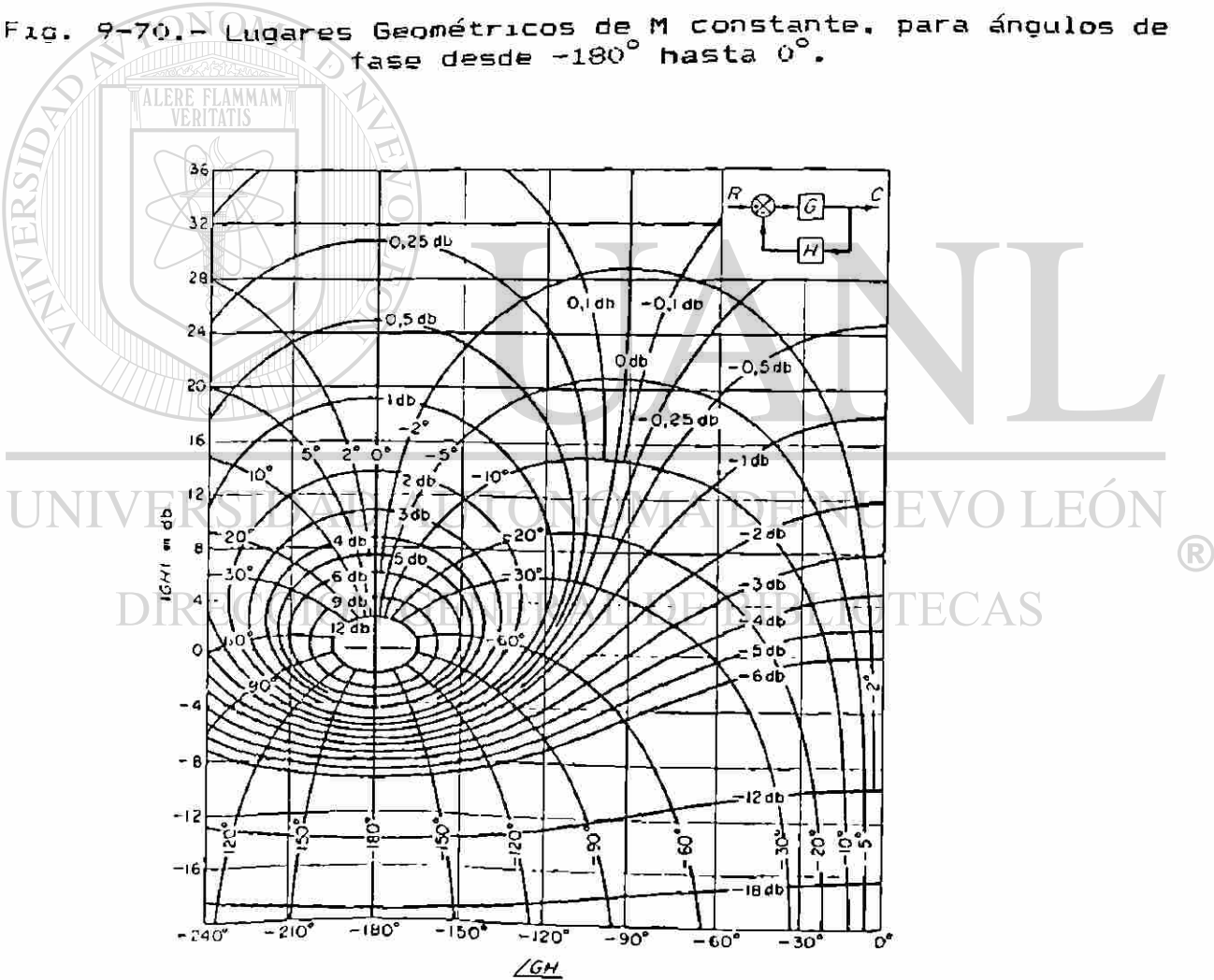


Fig. 9-71.- Carta de Nichols.

El Diagrama de Nichols es simétrico con respecto al eje de -180° . Los lugares de M y N se repiten cada 360° , y hay simetría cada intervalo de 180° . Los lugares de M están centrados alrededor del punto crítico (0dB, -180°). La Carta de Nichols o Diagrama de Nichols es muy útil para determinar la respuesta en frecuencia de lazo cerrado a partir de la respuesta en frecuencia de lazo abierto. Si la curva de respuesta en frecuencia de lazo abierto se sobrepone al diagrama de Nichols, las intersecciones de la curva de respuesta en frecuencia de lazo abierto $G(j\omega)$ con los lugares de M y N nos darán los valores de la magnitud de M y del ángulo de fase de la respuesta de lazo cerrado en cada punto de frecuencia.

Como ejemplo de aplicación se considerará un sistema de control con retroalimentación unitaria con la siguiente función de transferencia de lazo abierto:

$$G(j\omega) = \frac{K}{s(s+1)(0.5s+1)} \quad K = 1$$

Para hallar la respuesta en frecuencia de lazo cerrado utilizando el diagrama de Nichols, se traza el diagrama de $G(j\omega)$ en coordenadas de magnitud y ángulo de fase. En la fig. 9-72 (a) se muestra el diagrama de $G(j\omega)$ sobrepuesto a un diagrama de Nichols. Las curvas de la respuesta en frecuencia de lazo cerrado se pueden construir leyendo las magnitudes y los ángulos de fase en varios puntos de frecuencia. Estas magnitudes y ángulos se representan en la fig. 9-72 (b) en forma de Diagramas de Bode. Como el contorno de magnitud más grande tocado por el lugar $G(j\omega)$ es 5 dB, la magnitud del pico de resonancia M_r es igual a 5 decibeles. La frecuencia del pico de resonancia correspondiente es de 0.8 rad/seg.

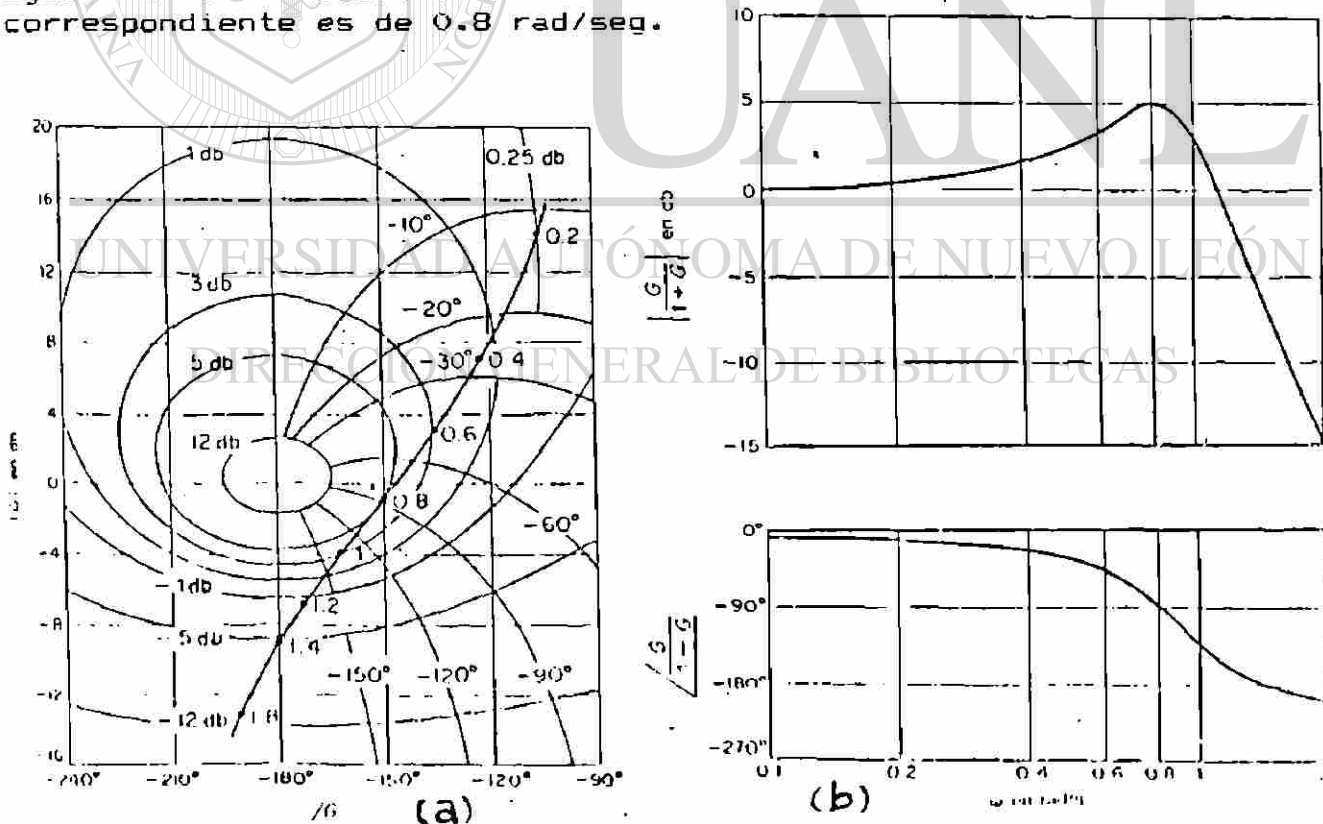


Fig. 9-72. (a) Gráfica de $G(j\omega)$ sobrepuesta a un diagrama de Nichols. (b) Gráfica de la respuesta en frecuencia de lazo cerrado.

El punto de cruce de fase es el punto en el que el diagrama de $G(j\omega)$ corta al eje de -180° . en este caso $\omega = 1.4$ rad/seg. y el punto de cruce de ganancia es el punto donde el lugar intersecta al eje de 0 decibels. en este caso $\omega = 0.76$ rad/seg. El margen de fase es la distancia horizontal medida en grados entre el punto de cruce de ganancia y el punto crítico (0 dB, -180°). El margen de ganancia es la distancia en decibels entre el punto de cruce de fase y el punto crítico.

El ancho de banda del sistema de lazo cerrado se puede hallar facilmente a partir de la gráfica de $G(j\omega)$ en el diagrama de Nichols. La frecuencia en la intersección del lugar de $G(j\omega)$ y el lugar de $M = -3$ dB nos dá el ancho de banda.

Si se varia la ganancia de lazo abierto K , la forma del lugar de $G(j\omega)$ en el diagrama del logaritmo de la magnitud en función de la fase, permanece inalterada, pero se desplaza hacia arriba (para K creciente) o hacia abajo (para K decreciente) a lo largo del eje vertical. Por lo tanto el lugar $G(j\omega)$ corta a los lugares de M y N en forma diferente, dando lugar a una curva de respuesta en frecuencia diferente. Para un valor pequeño de la ganancia K , el lugar $G(j\omega)$ no ha de ser tangente a ninguno de los lugares M , lo cual significa que no hay resonancia en la respuesta en frecuencia de lazo cerrado.

9-10-1.- Respuesta en frecuencia para sistemas de control con retroalimentación no unitaria.

Todo el análisis de la sección precedente se ha limitado a sistemas de control de lazo cerrado con retroalimentación unitaria. Los lugares de M y N constante y el diagrama de Nichols se pueden aplicar a un sistema de control con retroalimentación no unitaria, para lo cual se requiere hacer una pequeña modificación.

Si el sistema de lazo cerrado tiene una función de retroalimentación $H(s)$ no unitaria, la función de transferencia de lazo cerrado se puede escribir como:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

donde $G(s)$ es la función de transferencia directa y $H(s)$ es la función de transferencia de retroalimentación. La función $C(j\omega)/R(j\omega)$ se puede escribir en la siguiente forma:

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{1}{H(j\omega)} \frac{G(j\omega)H(j\omega)}{1 + G(j\omega)H(j\omega)}$$

haciendo $G_1(j\omega) = G(j\omega)H(j\omega)$, la función de transferencia se puede representar como:

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{1}{H(j\omega)} \frac{G_1(j\omega)}{1 + G_1(j\omega)}$$

El valor de $G_1(j\omega)$ se puede obtener facilmente trazando el diagrama de $G_1(j\omega)$ en el diagrama de Nichols y leyendo los valores de M y N en diferentes puntos de frecuencias.

La respuesta en frecuencia de lazo cerrado $C(j\omega)/R(j\omega)$ se puede obtener multiplicando $G_1(j\omega)/[1 + G_1(j\omega)]$ por $1/H(j\omega)$. Esta multiplicación se puede realizar con mucha facilidad si se trazan los diagramas de Bode de $G_1(j\omega)/[1 + G_1(j\omega)]$ y $H(j\omega)$ y luego se resta gráficamente la magnitud de $H(j\omega)$ de la de $G_1(j\omega)/[1 + G_1(j\omega)]$ y también se resta del mismo modo el ángulo de fase de $H(j\omega)$ del de $G_1(j\omega)/[1 + G_1(j\omega)]$. Las curvas del logaritmo de la magnitud y el ángulo de fase resultantes nos darán la respuesta en frecuencia de lazo cerrado $C(j\omega)/R(j\omega)$.

9-10-2.- Ajustes de la Ganancia.

En casi todos los sistemas de control ya se ha puesto de manifiesto la gran influencia que tiene el valor de la ganancia (K) en la estabilidad de los sistemas. Un valor elevado de K, puede ocasionar que la respuesta tenga oscilaciones con valores máximos excesivos. Por lo anterior, uno de los primeros pasos en el diseño de un sistema es tratar de ajustar K a ciertos valores que garanticen un funcionamiento adecuado. Este ajuste de la ganancia, se puede basar en un valor máximo especificado de la relación de amplitud M_r , para lo cual, los lugares de M constante proporcionan una técnica conveniente.

En la fig. 9-73 se ha trazado un círculo M constante, con centro en el punto $-M^2/(M^2 - 1)$ y con un radio $M/(M^2 - 1)$. La línea tangente al círculo OP, que se ha trazado desde el origen tiene un ángulo ψ , cuyo valor se puede calcular como sigue:

$$\text{Sen } \psi = \frac{\frac{M}{M^2 - 1}}{\frac{M^2}{M^2 - 1}} = \frac{1}{M}$$

de donde $\psi = \text{Sen}^{-1} \frac{1}{M}$

Se probará geoméricamente que la línea trazada desde el punto P, perpendicular al eje real negativo, corta este eje en el punto $-1+j0$.

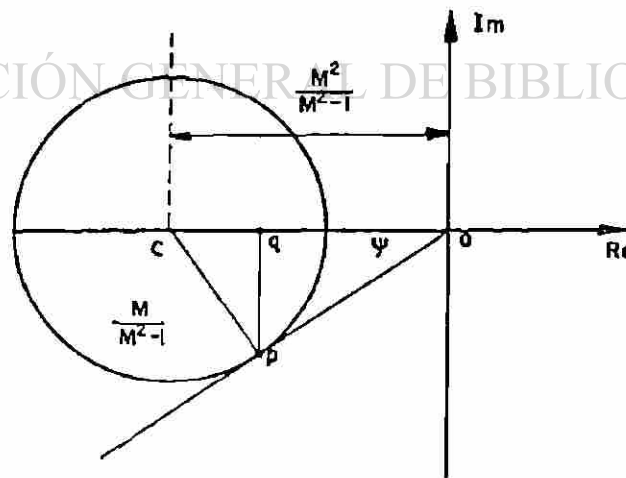


Fig. 9-73. Círculo de M constante

Tomando como base la fig. 9-73, la distancia OP se puede calcular aplicando el teorema de pitágoras al triángulo OPC, siendo OP un lado:

$$OP = \sqrt{OC^2 - CP^2} = \sqrt{\left[\frac{M^2}{M^2-1}\right]^2 - \left[\frac{M}{M^2-1}\right]^2} = \sqrt{\frac{M^4}{(M^2-1)^2} - \frac{M^2}{(M^2-1)^2}}$$

$$OP = \sqrt{\frac{M^4 - M^2}{(M^2-1)^2}} = \sqrt{\frac{M^2(M^2-1)}{(M^2-1)^2}} = \sqrt{\frac{M^2}{M^2-1}} = \frac{M}{\sqrt{M^2-1}}$$

por otro lado $\text{Sen } \psi = \frac{1}{M} = \frac{qP}{OP}$ de donde $qP = \frac{1}{M} OP$

substituyendo el valor de OP se encuentra que la distancia qP es:

$$qP = \frac{1}{M} \frac{M}{\sqrt{M^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{M^2-1}}$$

la distancia Oq es un lado del triángulo OPq, de donde Oq es igual a:

$$Oq = \sqrt{OP^2 - qP^2} = \sqrt{\frac{M^2}{M^2-1} - \frac{1}{M^2-1}} = \sqrt{\frac{M^2-1}{M^2-1}} = \sqrt{1} = 1$$

con lo cual se demuestra que el punto q tiene coordenadas (-1, j0).

Supongamos que se tiene un sistema de control, cuya función de transferencia en lazo abierto es:

$$G(j\omega) = \frac{K^* (1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)}{(j\omega)^n (1+j\omega T_a)(1+j\omega T_b)}$$

en donde K^* es la ganancia del sistema.

Tomando como referencia la fig. 9-74, a continuación se resume en seis pasos el procedimiento de ajuste de K^* , para tener un valor deseado de M_r .

- 1.- Se grafica la función de transferencia de lazo abierto normalizada $G_1(j\omega) = G(j\omega)/K^*$.
- 2.- Se traza desde el origen una línea recta que forme un ángulo $\psi = \text{Sen}^{-1}(1/M)$ con el eje real negativo.
- 3.- Determine graficamente un círculo que tenga su centro en el eje real negativo y que sea tangente tanto a la gráfica $G_1(j\omega)$ como a la recta OP trazada desde el origen.
- 4.- Desde el punto de tangencia con la recta OP, se traza una línea perpendicular al eje real. Para que el círculo trazado correspondiera al M_r deseado, el punto "q", en donde la línea corta al eje debería ser el punto (-1, j0).

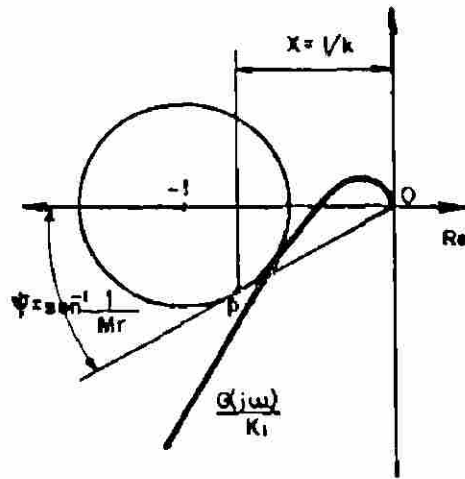


Fig. 9-74. Procedimiento de ajuste de K'

- 5.- La condición anterior se cumple, si la función se afecta por un valor de ganancia K que sea precisamente el inverso del valor del punto, en donde originalmente se tiene el corte del eje real.
- 6.- Por último, se ajusta la ganancia original K' , multiplicandola por un factor $A = K/K'$. El valor de "A" es la cantidad de la ganancia que se debe aumentar o disminuir, para cumplir con la condición del valor máximo de M_r que se ha establecido.

Con el propósito de aplicar el procedimiento anterior, se resolverán a continuación dos ejemplos de ajuste de la ganancia.

Ejemplo 1.-Se tiene un sistema de control cuya función de transferencia de lazo abierto es:

$$G(j\omega) = \frac{1.05}{j\omega(j\omega + 1)}$$

de tal manera que la ganancia $K' = 1.05$

Determinar el valor de K , para que el valor de $M_r = 1.26$

En la fig. 9-75 se puede observar la gráfica polar de la función de transferencia normalizada de lazo abierto $G_1(j\omega) = G(j\omega)/K'$. Si el valor de $M_r = 1.26$, el ángulo ψ trazado por una recta desde el origen es

$$\psi = \text{Sen}^{-1} \frac{1}{1.26} = 52.52^\circ$$

Con la recta a 52.52° y la gráfica polar se puede trazar el círculo M con centro en el eje real negativo que sea tangente a la gráfica polar y a la recta OP . Desde el punto P se traza una línea perpendicular al eje real negativo, que corta en este caso el eje real en el punto 0.88 de tal manera que el valor de la ganancia viene dado por:

$$K = \frac{1}{0.88} = 1.13$$

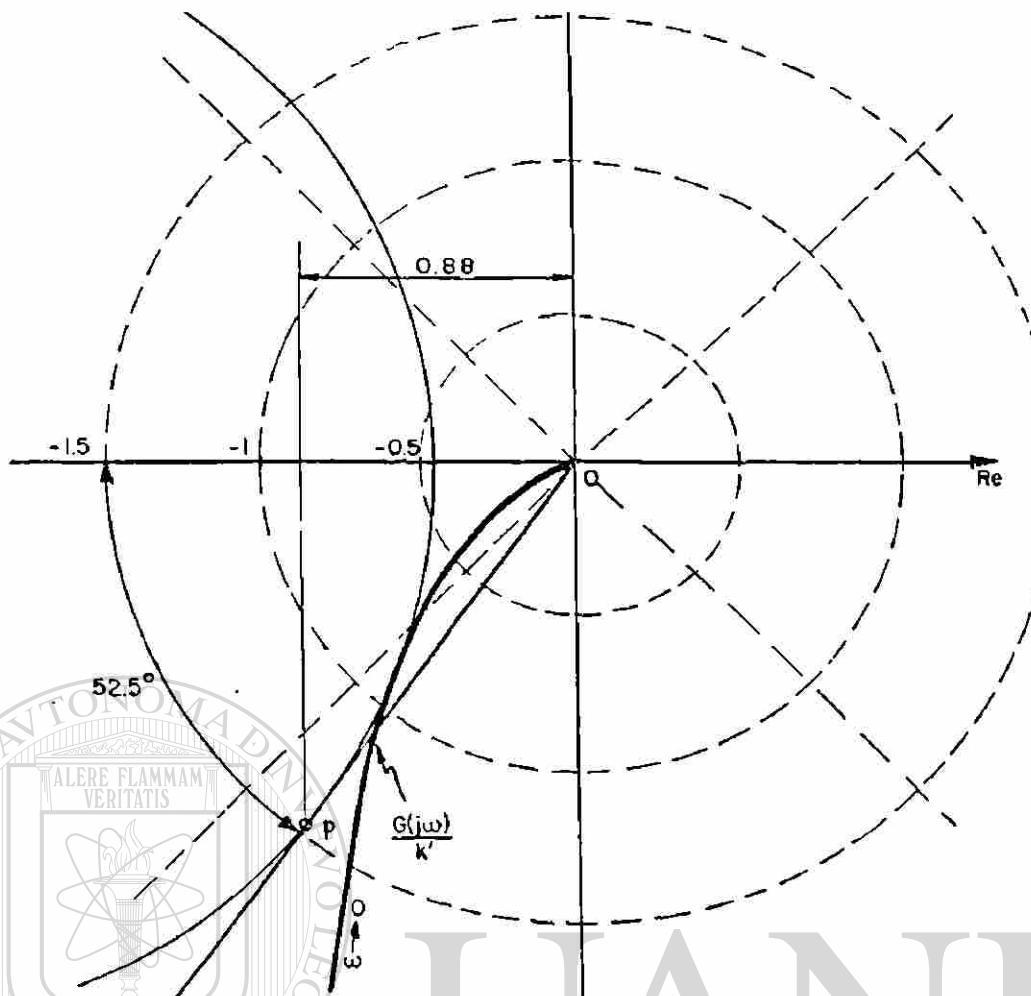


Fig. 9-75.- Gráfica del ejemplo 1.

Por lo tanto la ganancia original $K'=1.05$ debe multiplicarse por el factor

$$A = \frac{1.13}{1.05} = 1.07$$

para que el sistema satisfaga la condición planteada.

Ejemplo 2.- Si se tiene un sistema de control con retroalimentación unitaria y cuya función de transferencia de lazo abierto es

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1 + j\omega)}$$

determinar el valor de la ganancia K de modo que $M_r = 1.4$.

En primer lugar se debe de trazar el diagrama polar para la función

$$\frac{G(j\omega)}{K} = \frac{1}{j\omega(1 + j\omega)}$$

En la fig. 9-76 se hacen los trazos para la gráfica polar. El valor del ángulo ψ se puede calcular con la fórmula:

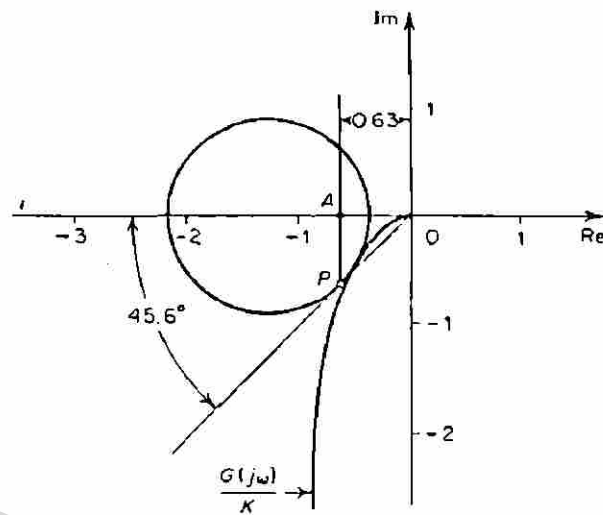


Fig. 9-76. Determinación de la ganancia K utilizando un círculo M.

$$\psi = \text{Sen}^{-1} \frac{1}{M_r} \approx \text{Sen}^{-1} \frac{1}{1.4} = 45.6^\circ$$

El siguiente paso es trazar la línea DP que forma un ángulo $\psi = 45.6^\circ$ con el eje real negativo. Se traza luego el círculo tangente tanto al diagrama $G(j\omega)/K$, como a la línea DP. Se determina el punto P, donde el círculo es tangente a la línea de 45.6° . La línea perpendicular --- trazada desde el punto P corta al eje real negativo en $(-0.63, 0)$. Por lo tanto la ganancia K del sistema se determina como sigue:

$$K = \frac{1}{0.63} \approx 1.58$$

El ejemplo anterior también se puede resolver fácilmente utilizando un diagrama de Nichols. En seguida se explica el procedimiento.

La fig. 9-77 muestra el lugar de $M_r = 1.4$ y el lugar $G(j\omega)/K$. El modificar la ganancia no tiene efecto en el ángulo de fase, pero si desplaza verticalmente la curva hacia arriba para valores de K mayores que 1 y hacia abajo para valores de K menores que 1. En la fig 9-77 se debe elevar en 4 decibeles el diagrama de $G(j\omega)/K$ para que sea tangente al lugar M_r deseado y que todo el diagrama $G(j\omega)/K$ quede fuera de la gráfica de $M_r = 1.4$. La cantidad de variación vertical del lugar $G(j\omega)/K$ es la que nos determina la ganancia necesaria para obtener el valor deseado de M_r . La ecuación logarítmica se expresa en la siguiente forma:

$$20 \log K = 4$$

$$\text{de donde } K \approx 1.58$$

cuyo resultado es exactamente igual al que ya se había obtenido antes.

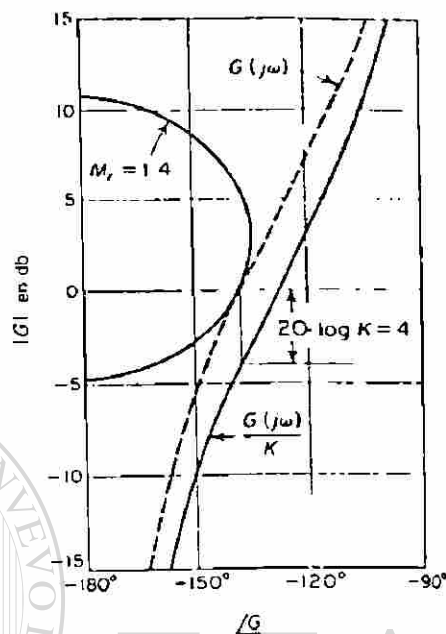
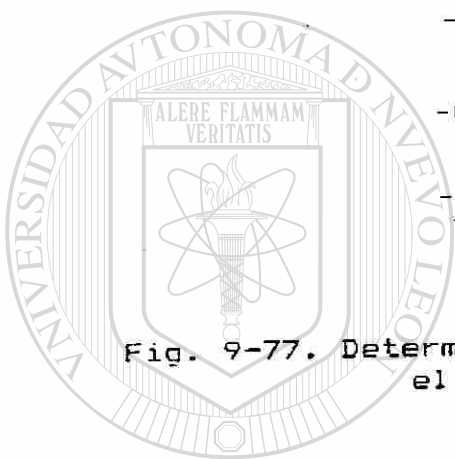


Fig. 9-77. Determinación de la ganancia K utilizando el diagrama de Nichols.



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

CAPITULO X

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

A lo largo de todo este trabajo desarrollado durante cerca de 15 meses, he tratado de ser lo más explícito posible en cada uno de los temas tratados. En muchos casos se han hecho las demostraciones de fórmulas y teoremas que en casi todos los libros sólo son enunciados. La idea ha sido facilitar al máximo la comprensión para el estudiante común sobre los principios fundamentales de la Teoría del Control.

La presente Tesis, considero que cumple plenamente con su objetivo de orientar a los estudiantes en el estudio de los sistemas de control, aunque como toda obra está sujeta a críticas constructivas que con mucho gusto yo aceptaré de parte de mis compañeros maestros o alumnos ya que será una forma de perfeccionar aun más este material de estudio.

En todos los capítulos desarrollados he tratado de ir directamente a lo más importante de los temas, eliminando todo aquello que sea irrelevante, lo que comúnmente conocemos como la paja de un libro.

Les recomiendo a todos los estudiantes que lean este trabajo como algo que seguramente les ayudará a entender la Teoría del control, pero esta obra de ninguna manera es limitativa; por lo que los exhorto a leer además otros libros que yo personalmente les recomiendo como libros de texto y de consulta en cada uno de los cursos que imparto. Siempre es recomendable tener a la mano diferentes opiniones de varios autores sobre la materia, lo cual da como resultado un enriquecimiento de nuestros conocimientos. De hecho en la bibliografía que se menciona a continuación se tiene la información sobre libros recomendados. Todos estos libros los he ido adquiriendo poco a poco a lo largo de varios años, constituyen una pequeña biblioteca especializada y definitivamente son la base que me ha servido para impartir la cátedra sobre la Teoría del Control.

CAPITULO XI

BIBLIOGRAFIA

- 1.- Ingeniería de Control Moderna
Katsuhiko Ogata
Prentice Hall Internacional
- 2.- Automatic Control Engineering
Francis H. Raven
Mc. Graw-Hill
- 3.- Introducción al Control e Instrumentación
J. M. Clement
Editorial Alhambra
- 4.- Sistemas Automáticos de Control
Benjamin C. Kuo
Editorial CECSA
- 5.- Retroalimentación y Sistemas de Control
Distefano III, Stubberud, Williams
Mc. Graw-Hill Serie Schaum
- 6.- Controles Automáticos
Howard I. Harrison, John G. Bollinger
Editorial Trillas
- 7.- Transformadas de Laplace
Murray R. Spiegel
Mc. Graw-Hill Serie Schaum
- 8.- Sistemas de Control
Hostetter, Savant, Stefani
Editorial Interamericana
- 9.- Fundamentos de Servosistemas Lineales
Horacio Buitrón Sanchez
Editorial LIMUSA
- 10.- Servomecanismos
L. J. Bulliet
Fondo Educativo Interamericano
- 11.- Control Automático de Procesos
Carlos A. Smith y Armando B. Corripio
Editorial Noriega LIMUSA

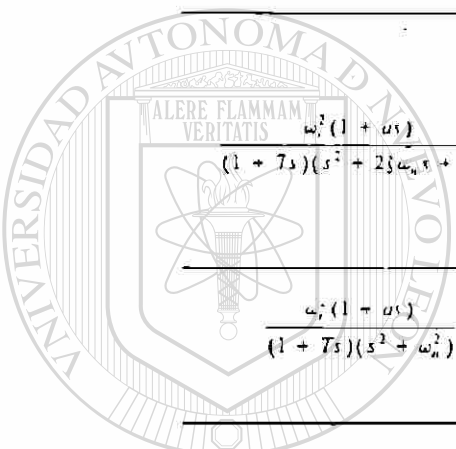
APENDICE A

Tabla de Transformadas de Laplace

Transformada de Laplace $F(s)$	Funcion de tiempo $f(t)$
$\frac{1}{s}$	$u(t)$ (funcion escalon unitario)
$\frac{1}{s^2}$	t
$\frac{n!}{s^{n+1}}$	t^n ($n =$ entero positivo)
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}
$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a}$
$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t)$
$\frac{1}{(1+sT)^n}$	$\frac{1}{T^n (n-1)!} t^{n-1} e^{-t/T}$
$\frac{\omega_n^2}{(1+T_1)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$	$\frac{T\omega_n^2 e^{-t/T}}{1 - 2\zeta T\omega_n + T^2\omega_n^2} + \frac{\omega_n e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t - \phi)}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1 - 2\zeta T\omega_n + T^2\omega_n^2)}}$ donde $\phi = \tan^{-1} \frac{T\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}{1 - T\zeta\omega_n}$
$\frac{\omega_n}{s^2 + \omega_n^2}$	$\text{sen} \omega_n t$

APENDICE A (Cont.)

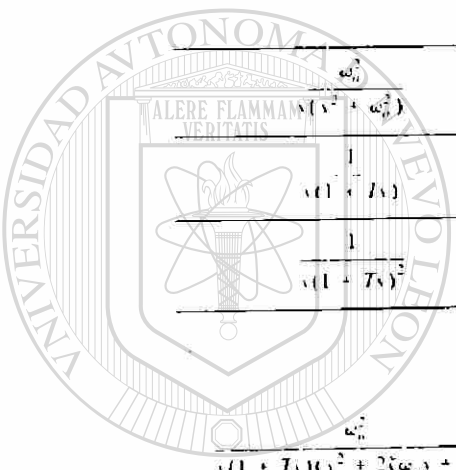
Transformada de Laplace $F(s)$	Función de tiempo $f(t)$
$\frac{\omega_n^2(1+as)}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$	$\omega_n \sqrt{\frac{1-2a\zeta\omega_n+a^2\omega_n^2}{1-\zeta^2}} e^{-a\omega_n t} \text{sen}(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \phi)$ donde $\phi = \tan^{-1} \frac{a\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}{1-a\zeta\omega_n}$
$\frac{\omega_n^2(1+as)}{s^2+\omega_n^2}$	$\omega_n \sqrt{1+a^2\omega_n^2} \text{sen}(\omega_n t + \phi)$ donde $\phi = \tan^{-1} a\omega_n$
$\frac{\omega_n^2(1+as)}{(1+Ts)(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sqrt{\frac{1-2a\zeta\omega_n+a^2\omega_n^2}{1-2T\zeta\omega_n+T^2\omega_n^2}} e^{-a\omega_n t}$ $\times \text{sen}(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \phi) + \frac{(1-a)\omega_n^2}{1-2T\zeta\omega_n+T^2\omega_n^2} e^{-t/T}$ donde $\phi = \tan^{-1} \frac{a\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}{1-a\zeta\omega_n} - \tan^{-1} \frac{T\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}{1-T\zeta\omega_n}$
$\frac{\omega_n(1+a)}{(1+Ts)(s^2+\omega_n^2)}$	$\frac{\omega_n(1-a)}{1+T^2\omega_n^2} e^{-t/T} + \frac{\omega_n \sqrt{1+a^2\omega_n^2}}{\sqrt{1+T^2\omega_n^2}} \text{sen}(\omega_n t + \phi)$ donde $\phi = \tan^{-1} a\omega_n - \tan^{-1} \omega_n T$
$\frac{\omega_n^2(1+as)}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$	$1 + \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sqrt{\frac{1-2a\zeta\omega_n+a^2\omega_n^2}{1-2\zeta\omega_n+a^2\omega_n^2}} e^{-a\omega_n t}$ $\times \text{sen}(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \phi)$ donde $\phi = \tan^{-1} \frac{a\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}{1-a\zeta\omega_n} - \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$
$\frac{\omega_n^2(1+as)}{s(1+Ts)(s^2+\omega_n^2)}$	$1 + \frac{T\omega_n^2(a-T)}{1+T^2\omega_n^2} e^{-t/T} - \sqrt{\frac{1+a^2\omega_n^2}{1+T^2\omega_n^2}} \cos(\omega_n t + \phi)$ donde $\phi = \tan^{-1} a\omega_n - \tan^{-1} \omega_n T$
$\frac{\omega_n^2(1+as)}{s(1+Ts)(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$	$1 + \sqrt{\frac{1-2\zeta a\omega_n+a^2\omega_n^2}{(1-\zeta^2)(1-2T\zeta\omega_n+T^2\omega_n^2)}} e^{-a\omega_n t}$ $\times \text{sen}(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \phi) + \frac{\omega_n^2(1-a-T)}{1-2T\zeta\omega_n+T^2\omega_n^2} e^{-t/T}$ $\phi = \tan^{-1} \frac{a\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}{1-a\zeta\omega_n} - \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$ $\tan^{-1} \frac{T\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}{1-T\zeta\omega_n} - \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

APENDICE A (Cont.)

Transformada de Laplace $F(s)$	Funcion de tiempo $f(t)$
$\frac{\omega_n}{(1+Ts)(s^2+\omega_n^2)}$	$\frac{T\omega_n}{1+T^2\omega_n^2} e^{-t/T} + \frac{1}{\sqrt{1+T^2\omega_n^2}} \text{sen}(\omega_n t - \phi)$ donde $\phi = \tan^{-1} \omega_n T$
$\frac{\omega_n^2}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$	$1 + \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t - \phi)$ donde $\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$
$\frac{\omega_n^2}{s^2(s^2+\omega_n^2)}$	$1 - \cos \omega_n t$
$\frac{1}{s(1+Ts)}$	$1 - e^{-t/T}$
$\frac{1}{s(1+Ts)^2}$	$1 - \frac{t+T}{T} e^{-t/T}$
$\frac{\omega_n^2}{s(1+Ts)(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$	$1 - \frac{T^2\omega_n^2}{1-2T\zeta\omega_n+T^2\omega_n^2} e^{-t/T}$ $+ \frac{e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t - \phi)}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-2T\zeta\omega_n+T^2\omega_n^2)}}$ donde $\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{-\zeta} + \tan^{-1} \frac{T\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}{1-T\zeta\omega_n}$
$\frac{\omega_n^2}{s^2(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$	$t - \frac{2\zeta}{\omega_n} + \frac{1}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t - \phi)$ donde $\phi = 2 \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{-\zeta}$
$\frac{\omega_n^2}{s^2(1+Ts)(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$	$t - T - \frac{2\zeta}{\omega_n} + \frac{T^2\omega_n^2}{1-2\zeta\omega_n T+T^2\omega_n^2} e^{-t/T}$ $+ \frac{e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t - \phi)}{\omega_n \sqrt{(1-\zeta^2)(1-2\zeta\omega_n T+T^2\omega_n^2)}}$ donde $\phi = 2 \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{-\zeta} + \tan^{-1} \frac{T\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}{1-T\omega_n \zeta}$
$\frac{1}{s^2(1+Ts)^2}$	$t - 2T + (t+2T)e^{-t/T}$



UNANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



APENDICE A (Cont.)

Transformada de Laplace $F(s)$	Funcion de tiempo $f(t)$
$\frac{1 + as}{s^2(1 + Ts)}$	$t + (a - T)(1 - e^{-t/T})$
$\frac{s\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$	$\frac{\omega_n^2}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \phi)$ donde $\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{-\zeta}$
$\frac{s}{s^2 + \omega_n^2}$	$\cos \omega_n t$
$\frac{s}{(s^2 + \omega_n^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega_n} t \operatorname{sen} \omega_n t$
$\frac{s}{(s^2 + \omega_{n1}^2)(s^2 + \omega_{n2}^2)}$	$\frac{1}{\omega_{n2}^2 - \omega_{n1}^2} (\cos \omega_{n1} t - \cos \omega_{n2} t)$
$\frac{s}{(1 + Ts)(s^2 + \omega_n^2)}$	$\frac{-1}{(1 + T^2\omega_n^2)} e^{-t/T} + \frac{1}{\sqrt{1 + T^2\omega_n^2}} \cos(\omega_n t - \phi)$ donde $\phi = \tan^{-1} \omega_n T$
$\frac{1 + as + bs^2}{s^2(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}$	$t + (a - T_1 - T_2) + \frac{b - aT_1 + T_1^2}{T_1 - T_2} e^{-t/T_1}$ $- \frac{b - aT_2 + T_2^2}{T_1 - T_2} e^{-t/T_2}$
$\frac{\omega_n^2(1 + as + bs^2)}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$	$1 + \sqrt{\frac{(1 - a\zeta\omega_n - b\omega_n^2 + 2b\zeta^2\omega_n^2)^2 + \omega_n^2(1 - \zeta^2)(a - 2b\zeta\omega_n)^2}{1 - \zeta^2}}$ $\times e^{-\zeta\omega_n t} \operatorname{sen}(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \phi)$ donde $\phi = \tan^{-1} \frac{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} (a - 2b\zeta\omega_n)}{b\omega_n(2\zeta^2 - 1) + 1 - a\zeta\omega_n} - \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{-\zeta}$
$\frac{s^2}{(s^2 + \omega_n^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega_n} (\operatorname{sen} \omega_n t + \omega_n t \cos \omega_n t)$

Apéndice B

Solución de ecuaciones

En la Teoría del control muy frecuentemente es necesario calcular las raíces de una ecuación o factorizar un polinomio. A continuación se estudiarán algunos procedimientos para la solución de ecuaciones. Consideremos la ecuación general

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0 \quad (B-1)$$

en la cual los coeficientes $a_n, a_{n-1},$ etc son números reales. El coeficiente de p^n se puede hacer unitario por división:

$$p^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} p^{n-1} + \dots + \frac{a_1}{a_n} p + \frac{a_0}{a_n} = 0$$

que también se puede representar en la siguiente forma:

$$p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0 = 0 \quad (B-2)$$

Se pueden hacer varias observaciones en la ecuación B-2:

- 1.- El número de raíces es igual al grado "n" de la ecuación.
- 2.- Las raíces pueden ser reales o complejas. Sin embargo las raíces complejas ocurren en pares. Esto significa que si n es impar, debe haber por lo menos una raíz real.
- 3.- Existen varios métodos para encontrar las raíces. Si la ecuación es de primero o segundo orden, la solución es relativamente muy sencilla, pero si la ecuación es de tercer orden o mayor, el problema se complica.
- 4.- Existe un método muy utilizado para resolver sistemas de tercer orden o mayor, aplicando la división sintética. A continuación se ilustrará el método por medio de un ejemplo.

Se desea calcular las raíces de la siguiente ecuación:

$$f(p) = p^3 + 5p^2 + 11p + 15 = 0$$

El primer paso es suponer una raíz real, por ejemplo, -1 (por sencillez se escoge un entero). Después se escriben los coeficientes de la ecuación. Los pasos son los siguientes: multiplicar el primer coeficiente por -1, se suma el resultado al segundo coeficiente, multiplicar la suma por -1 y sumarsela al tercer coeficiente y así sucesivamente.

1	+5	+11	+15	-1
	-1	-4	-7	
1	+4	+7	+8	

El valor de $f(-1)$ es 8; por lo tanto -1 no es una raíz de la ecuación. En seguida se prueba con otro valor, por ejemplo -4 .

$$\begin{array}{r|rrrr}
 1 & +5 & +11 & +15 & \\
 & -4 & -4 & -28 & \\
 \hline
 1 & +1 & +7 & -13 &
 \end{array}$$

Por lo tanto $f(-4) = -13$; lo que nos dice que el 4 no solamente no es raíz, sino que el cambio de signo [recordar que $f(-1) = +8$] indica la presencia de una raíz entre -1 y -4 . Probaremos ahora con -3 .

$$\begin{array}{r|rrrr}
 1 & +5 & +11 & +15 & \\
 & -3 & -6 & -15 & \\
 \hline
 1 & +2 & +5 & 0 &
 \end{array}$$

El valor de $f(-3)$ es cero y por lo tanto -3 es una raíz. Una vez que se encuentra una raíz por medio de la división sintética, la solución completa se obtiene fácilmente. La división de $f(p)$ por el factor $(p+3)$ nos da $p^2 + 2p + 5$, aplicando la fórmula general de segundo grado obtenemos los siguientes valores $p = -1 \pm j2$. Por lo que se concluye que las tres raíces son $r_1 = -3$, $r_2 = -1 + j2$ y $r_3 = -1 - j2$.

Existe otro método para resolver ecuaciones en las cuales "n" es par y mayor que 2 y se conoce como el Método de Lin. El método consiste en realizar repetidas divisiones entre factores cuadráticos supuestos hasta que el residuo es suficientemente pequeño. En esta forma un polinomio puede factorizarse en factores cuadráticos, de los cuales fácilmente se pueden obtener las raíces de la ecuación. El Método de Lin se ilustra a continuación con un ejemplo. Supongamos que se desea obtener las raíces de la siguiente ecuación:

$$f(p) = p^4 + 6p^3 + 18p^2 + 30p + 25 = 0$$

Primeramente se divide el polinomio completo entre un factor cuadrático supuesto en un intento por expresar $f(p)$ como el producto de dos factores cuadráticos. Se utilizan los últimos tres términos de $f(p)$ para obtener el primer divisor de prueba.

$$18p^2 + 30p + 25 = p^2 + \frac{30}{18}p + \frac{25}{18} = p^2 + 1.7p + 1.4$$

La división nos da el siguiente resultado:

$$\begin{array}{r}
 p^2 + 1.7p + 1.4 \quad \left| \begin{array}{l} p^2 + 4.3p + 9.3 \\ \hline p^4 + 6.0p^3 + 18.0p^2 + 30.0p + 25.0 \\ p^4 + 1.7p^3 + 1.4p^2 \\ \hline 4.3p^3 + 16.6p^2 + 30.0p \\ 4.3p^3 + 7.3p^2 + 6.0p \\ \hline 9.3p^2 + 24.0p + 25.0 \\ 9.3p^2 + 15.8p + 13.0 \\ \hline 8.2p + 12.0 \end{array} \right.
 \end{array}$$

El residuo es algo grande y por lo tanto se obtiene un segundo divisor de prueba a partir de la expresión encerrada en paréntesis en el paso anterior. Este es

$$p^2 + \frac{24.0}{9.3} p + \frac{25.0}{9.3} = p^2 + 2.6p + 2.7$$

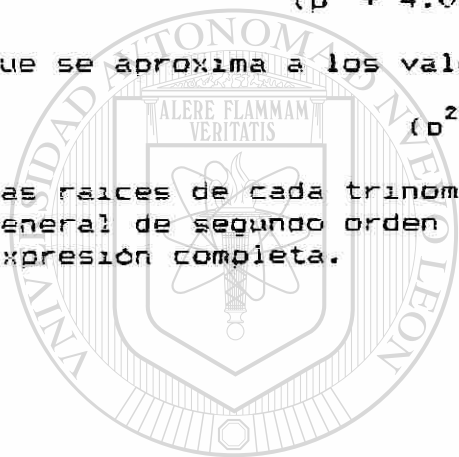
La división con este factor supuesto produce un residuo $3.9p+7.4$, que es más pequeño que el residuo anterior. El proceso puede continuarse usando un tercer divisor de prueba que se determina de la misma manera. El residuo es entonces $2.8 + 5.2$. Después de ocho tanteos, el residuo es $-0.12p-0.10$, que ya es bastante pequeño. De acuerdo con el procedimiento anterior, los factores resultantes son:

$$(p^2 + 4.01p + 4.98)(p^2 + 1.99p + 5.04)$$

que se aproxima a los valores reales de los factores

$$(p^2 + 4p + 5)(p^2 + 2p + 5)$$

las raíces de cada trinomio se pueden obtener aplicando la fórmula general de segundo orden con lo que se termina de factorizar toda la expresión completa.



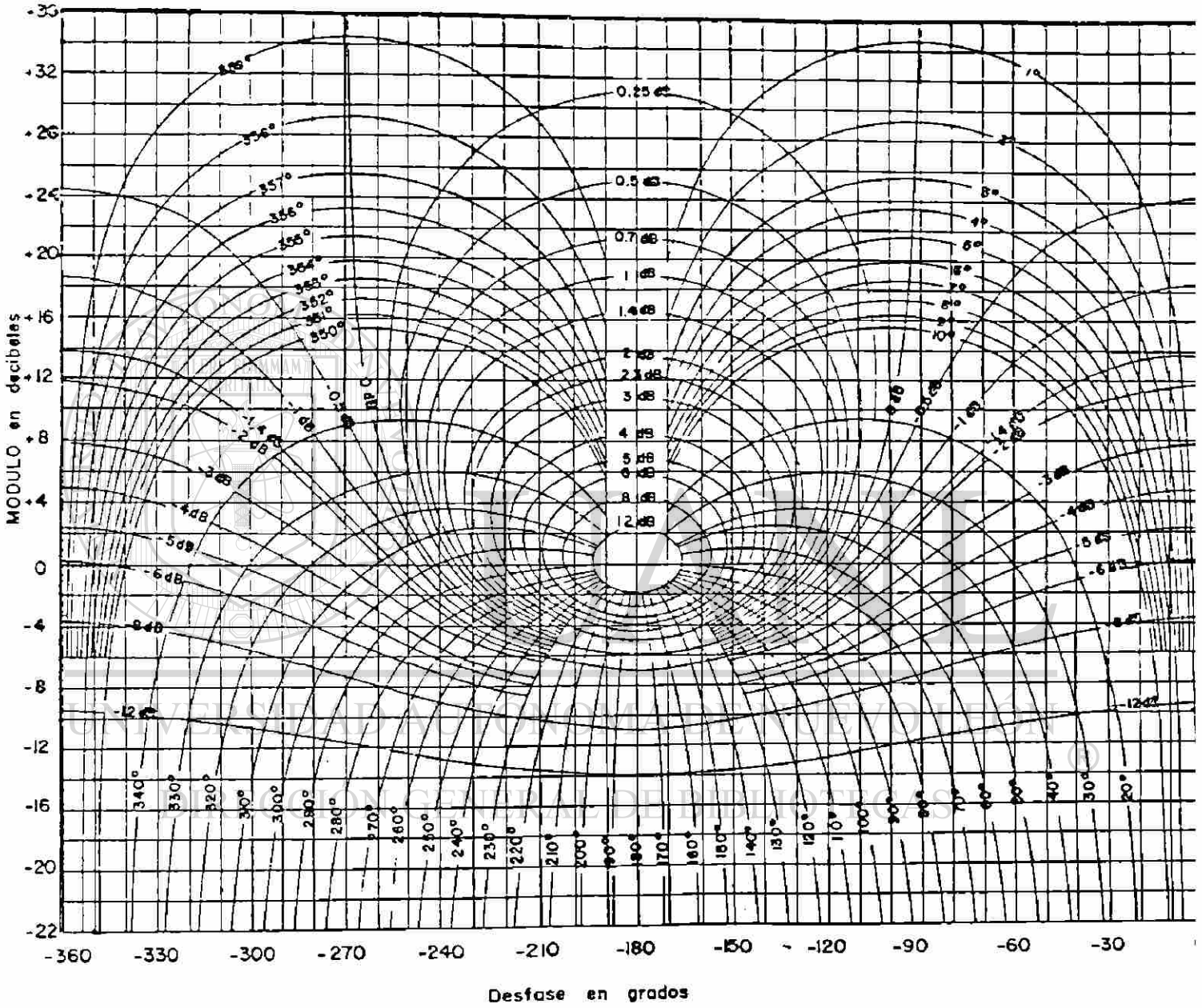
UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

APENDICE C



Carta de Nichols

APENDICE D

TABLA PARA LA CONVERSIÓN DE DECIBELES ($m = 20 \log_{10} M$)

M	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	$m =$	-40.00	-33.98	-30.46	-27.96	-26.02	-24.44	-23.10	-21.94	-20.92
0.1	-20.00	-19.17	-18.42	-17.72	-17.08	-16.48	-15.92	-15.39	-14.89	-14.42
0.2	-13.98	-13.56	-13.15	-12.77	-12.40	-12.04	-11.70	-11.37	-11.06	-10.75
0.3	-10.46	-10.17	-9.90	-9.63	-9.37	-9.12	-8.87	-8.64	-8.40	-8.18
0.4	-7.96	-7.74	-7.54	-7.33	-7.13	-6.94	-6.74	-6.56	-6.38	-6.20
0.5	-6.02	-5.85	-5.68	-5.51	-5.35	-5.19	-5.04	-4.88	-4.73	-4.58
0.6	-4.44	-4.29	-4.15	-4.01	-3.88	-3.74	-3.61	-3.48	-3.35	-3.22
0.7	-3.10	-2.97	-2.85	-2.73	-2.62	-2.50	-2.38	-2.27	-2.16	-2.05
0.8	-1.94	-1.83	-1.72	-1.62	-1.51	-1.41	-1.31	-1.21	-1.11	-1.01
0.9	-0.92	-0.82	-0.72	-0.63	-0.54	-0.45	-0.35	-0.26	-0.18	-0.09
1.0	0.00	0.09	0.17	0.26	0.34	0.42	0.51	0.59	0.67	0.75
1.1	0.83	0.91	0.98	1.06	1.14	1.21	1.29	1.36	1.44	1.51
1.2	1.58	1.66	1.73	1.80	1.87	1.94	2.01	2.08	2.14	2.21
1.3	2.28	2.35	2.41	2.48	2.54	2.61	2.67	2.73	2.80	2.86
1.4	2.92	2.98	3.05	3.11	3.17	3.23	3.29	3.35	3.41	3.46
1.5	3.52	3.58	3.64	3.69	3.75	3.81	3.86	3.92	3.97	4.03
1.6	4.08	4.14	4.19	4.24	4.30	4.35	4.40	4.45	4.51	4.56
1.7	4.61	4.66	4.71	4.76	4.81	4.86	4.91	4.96	5.01	5.06
1.8	5.11	5.15	5.20	5.25	5.30	5.34	5.39	5.44	5.48	5.53
1.9	5.58	5.62	5.67	5.71	5.76	5.80	5.85	5.89	5.93	5.98
2.	6.02	6.44	6.85	7.23	7.60	7.96	8.30	8.63	8.94	9.25
3.	9.54	9.83	10.10	10.37	10.63	10.88	11.13	11.36	11.60	11.82
4.	12.04	12.26	12.46	12.67	12.87	13.06	13.26	13.44	13.62	13.80
5.	13.98	14.15	14.32	14.49	14.65	14.81	14.96	15.12	15.27	15.42
6.	15.56	15.71	15.85	15.99	16.12	16.26	16.39	16.52	16.65	16.78
7.	16.90	17.03	17.15	17.27	17.38	17.50	17.62	17.73	17.84	17.95
8.	18.06	18.17	18.28	18.38	18.49	18.59	18.69	18.79	18.89	18.99
9.	19.08	19.18	19.28	19.37	19.46	19.55	19.65	19.74	19.82	19.91
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Apéndice E

TABLA DE $1 + j\omega\tau = A \angle \theta^\circ$

$\omega\tau$	A	θ°	$\omega\tau$	A	θ°	$\omega\tau$	A	θ°
0.05	1.00	2.9	2.30	2.51	66.5	6.1	6.18	80.7
0.10	1.00	5.7	2.35	2.55	66.9	6.2	6.28	80.8
0.15	1.01	8.5	2.40	2.60	67.4	6.3	6.38	81.0
0.20	1.02	11.3	2.45	2.65	67.8	6.4	6.48	81.1
0.25	1.03	14.0	2.50	2.69	68.2	6.5	6.58	81.3
0.30	1.04	16.7	2.55	2.74	68.6	6.6	6.68	81.4
0.35	1.06	19.3	2.60	2.79	69.0	6.7	6.77	81.5
0.40	1.08	21.8	2.65	2.83	69.3	6.8	6.87	81.6
0.45	1.10	24.2	2.70	2.88	69.7	6.9	6.97	81.8
0.50	1.12	26.6	2.75	2.93	70.0	7.0	7.07	81.9
0.55	1.14	28.8	2.80	2.97	70.3	7.1	7.17	82.0
0.60	1.17	31.0	2.85	3.02	70.7	7.2	7.27	82.1
0.65	1.19	33.0	2.90	3.07	71.0	7.3	7.37	82.2
0.70	1.22	35.0	2.95	3.11	71.3	7.4	7.47	82.3
0.75	1.25	36.9	3.00	3.16	71.6	7.5	7.57	82.4
0.80	1.28	38.7	3.1	3.26	72.1	7.6	7.67	82.5
0.85	1.31	40.4	3.2	3.35	72.6	7.7	7.76	82.6
0.90	1.35	42.0	3.3	3.45	73.1	7.8	7.86	82.7
0.95	1.38	43.5	3.4	3.54	73.6	7.9	7.96	82.8
1.00	1.41	45.0	3.5	3.64	74.1	8.0	8.06	82.9
1.05	1.45	46.4	3.6	3.74	74.5	8.1	8.16	83.0
1.10	1.49	47.7	3.7	3.83	74.9	8.2	8.26	83.0
1.15	1.52	49.0	3.8	3.93	75.3	8.3	8.36	83.1
1.20	1.56	50.2	3.9	4.03	75.6	8.4	8.46	83.2
1.25	1.60	51.3	4.0	4.12	76.0	8.5	8.56	83.3
1.30	1.64	52.4	4.1	4.22	76.3	8.6	8.66	83.4
1.35	1.68	53.5	4.2	4.32	76.6	8.7	8.76	83.4
1.40	1.72	54.5	4.3	4.41	76.9	8.8	8.86	83.5
1.45	1.76	55.4	4.4	4.51	77.2	8.9	8.96	83.6
1.50	1.80	56.3	4.5	4.61	77.5	9.0	9.06	83.7
1.55	1.84	57.2	4.6	4.71	77.7	9.1	9.15	83.7
1.60	1.89	58.0	4.7	4.81	78.0	9.2	9.25	83.8
1.65	1.93	58.8	4.8	4.90	78.2	9.3	9.35	83.9
1.70	1.97	59.5	4.9	5.00	78.5	9.4	9.45	83.9
1.75	2.02	60.3	5.0	5.10	78.7	9.5	9.55	84.0
1.80	2.06	60.9	5.1	5.20	78.9	9.6	9.65	84.1
1.85	2.10	61.6	5.2	5.30	79.1	9.7	9.75	84.1
1.90	2.15	62.2	5.3	5.39	79.3	9.8	9.85	84.2
1.95	2.19	62.9	5.4	5.49	79.5	9.9	9.95	84.2
2.00	2.24	63.4	5.5	5.59	79.7	10.0	10.05	84.3
2.05	2.28	64.0	5.6	5.69	79.9	12.0	12.04	85.2
2.10	2.33	64.5	5.7	5.79	80.0	14.0	14.04	85.9
2.15	2.37	65.1	5.8	5.89	80.2	16.0	16.03	86.4
2.20	2.42	65.6	5.9	5.98	80.4	18.0	18.03	86.8
2.25	2.46	66.0	6.0	6.08	80.5	20.0	20.02	87.1

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

CAPITULO II PAGINA 54

1-1.- a) $F(s) = \frac{32}{s^2 + 16}$

b) $F(s) = \frac{s + 3}{s^2 + 6s + 109}$

c) $F(s) = \frac{20 - 4s}{s^2 - 4s + 20}$

d) $F(s) = \frac{s^2 - 2s + 4}{s^2 + 4}$

e) $F(s) = \lambda(s) [5s^2 - 20s + 1] + \frac{-20s^3 - 90s^2 - 3}{s^2}$

2-1.- a) $f(\omega) = 0$ $f(\omega) = 3$

b) $f(\omega) = 0$ $f(\omega) = 2$

c) $f(\omega) = 0$ $f(\omega) = 0$

d) $f(\omega) = 0$ $f(\omega) = 5$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

2-3.- a) $f(t) = e^{-t} - 3e^{-10t} + 1.89e^{-t} \text{Sen } 2.64t$

b) $f(t) = 1.56t - 1.17(t) + 3.125t^2 e^{-4t} + 3.125te^{-4t} + 1.17e^{-4t}$

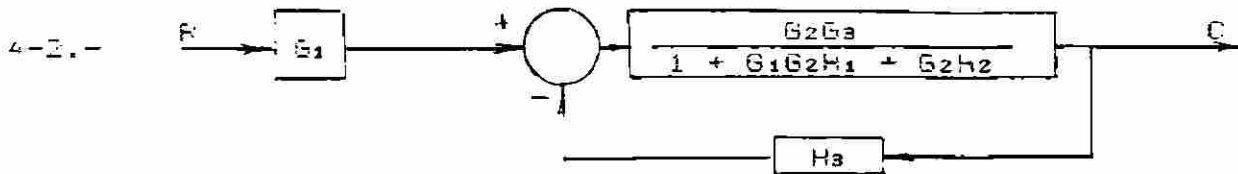
c) $f(t) = 0.046 - 0.046 \text{Cos}8t + 0.75 \text{Sen}8t$

2-4.- a) $x(t) = 5(t) - 6e^{-t} + 3e^{-2t}$

b) $z(t) = -4.8 \text{Cos}2t - 1.8 \text{Sen } 2t + 36te^{-t} + 13.8e^{-t}$

4-1.- a) $\frac{C}{R} = \frac{G_1 + G_2}{1 - G_1H_1 - G_2H_1}$

b) $\frac{C}{R} = \frac{G_1 + G_2}{1 - G_1H_1}$



4-3.- $C = \frac{G_1G_2G_3G_4R_1 + G_2G_3G_4R_2 - G_1G_2G_3G_4H_2R_3}{1 + G_3H_1 - G_1G_2G_3G_4H_2H_3}$

4-4.- $\frac{C}{R_1} = \frac{G_1G_2G_3}{1 - G_3H_2 + G_2H_3 + G_1G_2G_3H_1}$

4-5.- $\frac{C}{R_2} = \frac{G_3[1 - G_2H_3]}{1 - G_3H_2 - G_2H_3 + G_1G_2G_3H_1}$

4-6.- $C = \frac{G_1G_2G_3R_1 + G_3[1 + G_2H_3]R_2}{1 - G_3H_2 + G_2H_3 + G_1G_2G_3H_1}$

4-7.- $\frac{C}{R} = \frac{G_1G_2G_3G_4}{[1 + G_1G_2H_1][1 + G_3G_4H_2] + G_2G_3H_3}$

4-8.- $\frac{C}{R} = \frac{G_1G_4[G_2 + G_3]}{1 - G_1G_4H_1 + G_1G_2G_4H_2 + G_1G_3G_4H_2}$

4-9.- $\frac{C}{R} = \frac{G_1G_2G_3 + G_1G_4}{1 + G_1G_2G_3 - G_1G_2H_1 - G_2G_3H_2 - G_4H_2 + G_1G_4}$

CAPITULO V PAGINA 133

- 1.- $m(t) = 20 \text{ Sen } 8t - 1.25 \text{ Cos } 8t + 1.25(t)$
- 2.- $m(t) = -42.5 te^{-3t} + 14.83 e^{-3t} + 0.186(t)$
- 3.- $m(t) = 0.4(t) + 16 \text{ Sen } 4t + 383 \text{ Cos } 4t$
- 4.- $m(t) = 30 t + 160(t)$
- 5.- $m(t) = 24 \text{ Cos } 5t + 2.4 \text{ Sen } 5t$

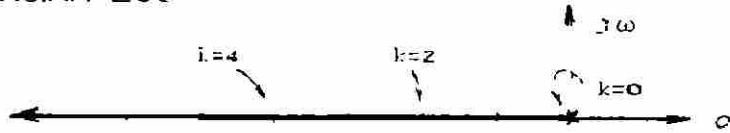
CAPITULO VI PAGINA 163

- 1.- $x(t) = e^{-0.5t} \text{ Cos } 0.866t - 0.115 e^{-0.5t} \text{ Sen } 0.866t$
- 2.- $x(t) = 4t - 3.34 + 1.2 e^{-2t} \text{ Cos } t + 2.4 e^{-2t} \text{ Sen } t$
- 3.- El sistema es estable por dos polos a la derecha del eje jw
- 4.- La ganancia K debe ser mayor que cero y menor de 1.0
- 5.- El Rango de Estabilidad es desde $K = -27$, hasta $K = -34.409$ lo cual significa que el sistema siempre es Estable para cualquier valor de t. positivo.
- 6.- El sistema es Estable. La Estabilidad Relativa se mantiene hasta que sigma es igual a -3.

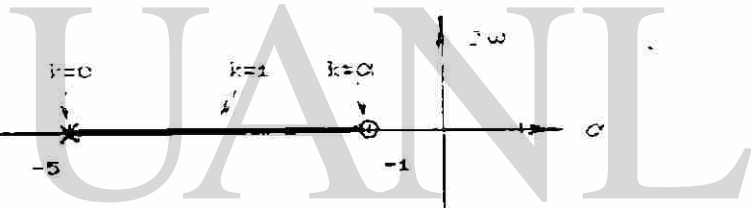
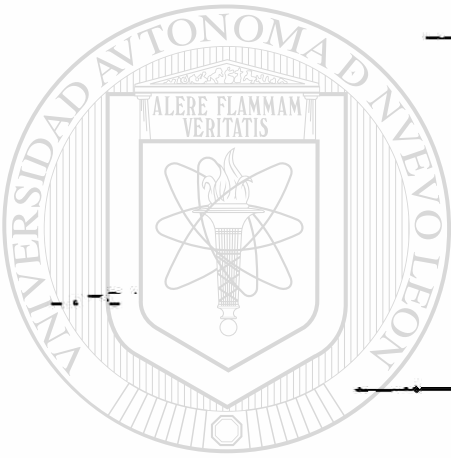
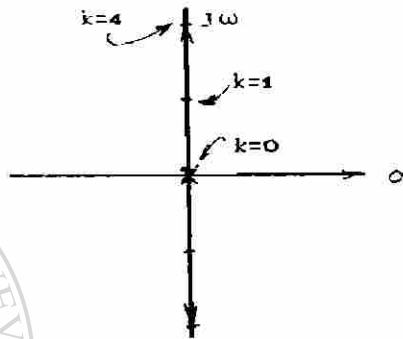
CAPITULO VII PAGINA 172

- 1.- $e_{ss} = 0.833$
- 2.- $e_{ss} = 1.15$
- 3.- $e_{ss} = 0$
- 4.- e_{2ss} es mayor que e_{1ss}

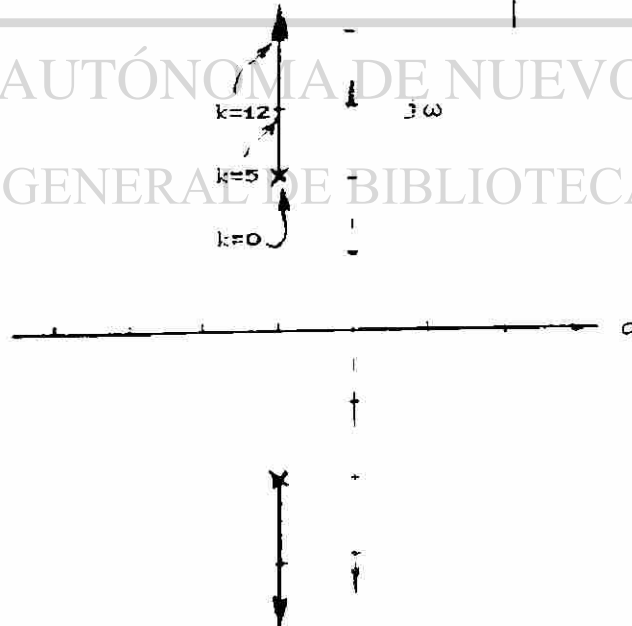
1.-a)



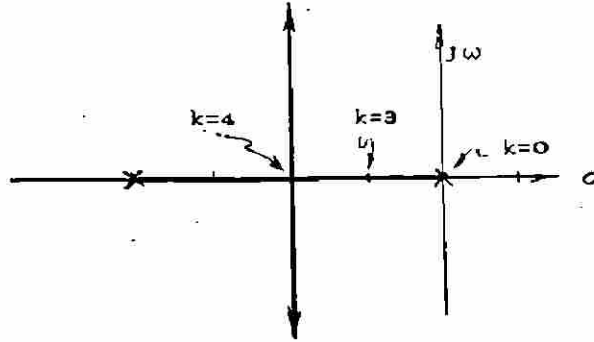
1.-b)



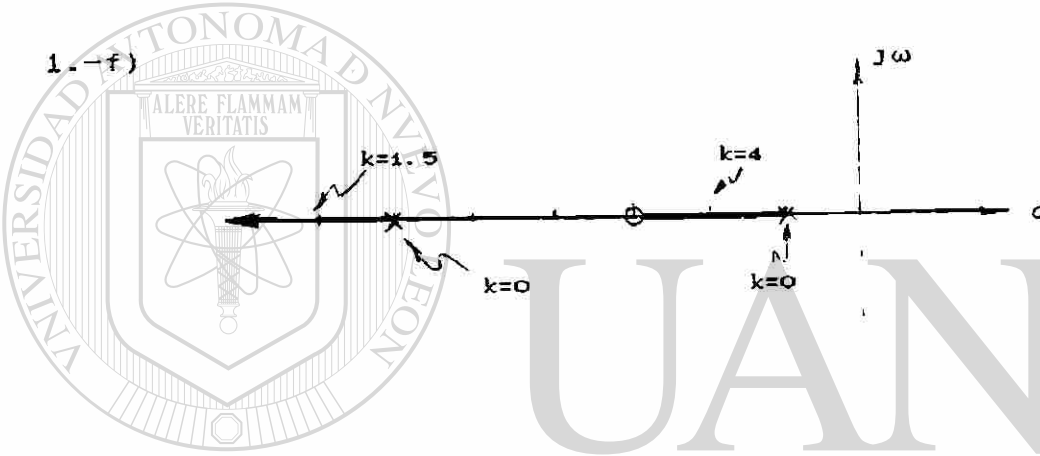
1.-d)



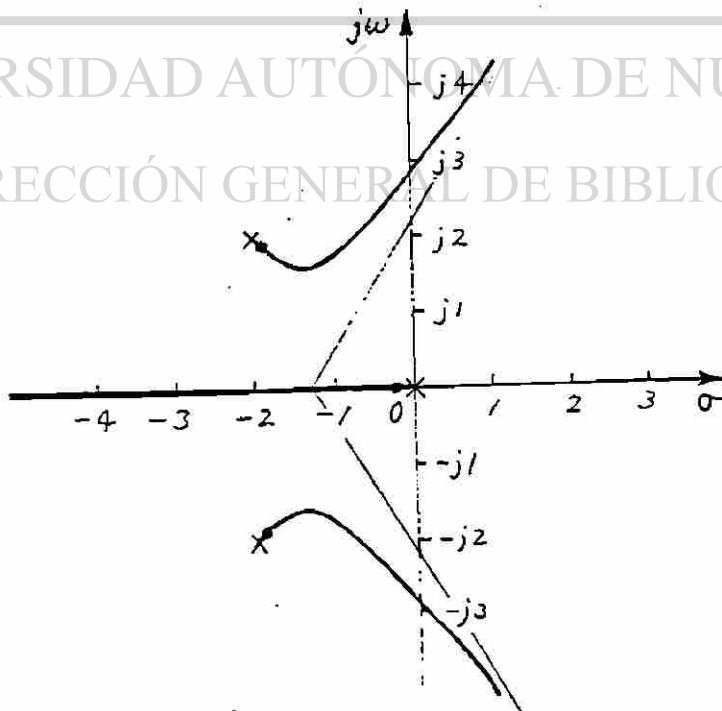
1.-e)



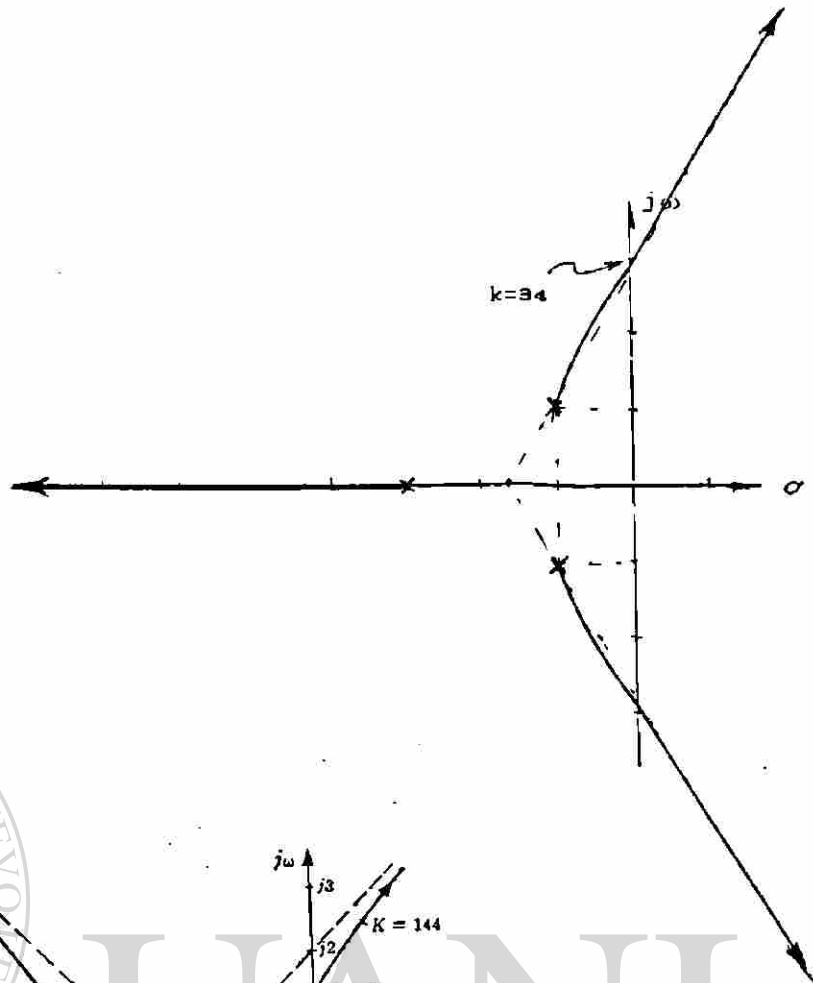
1.-f)



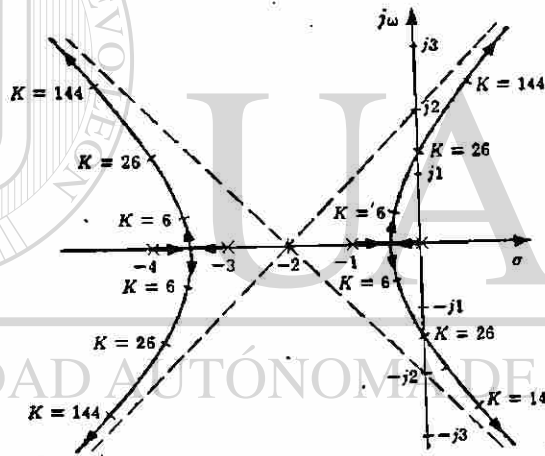
2.-a)



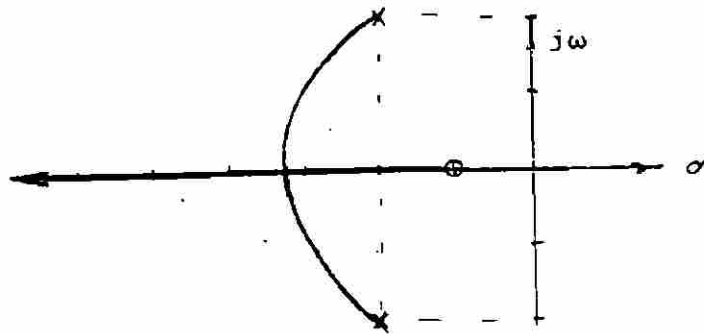
2.-b)



2.-c)



2.-d)



3.- $K_p = 1.52$

