

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POST-GRADO



**AMBIENTE COMPUTACIONAL PARA SIMULACION,
ANALISIS Y DISEÑO DE SISTEMAS DE
CONTROL AUTOMATICO**

TESIS

**EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO EN
CIENCIAS DE LA INGENIERIA ELECTRICA
CON ESPECIALIDAD EN CONTROL**

**QUE PRESENTA EL
ING. MANUEL AMARANTE RODRIGUEZ**

CD. UNIVERSITARIA

OCTUBRE DE 1998

AMBIENTE COMPUTACIONAL PARA SIMULACION,
ANALISIS Y DISEÑO DE SISTEMAS DE
CONTROL AUTOMATICO



TM
Z5853
.M2
FIME
1998
A42



1020124351



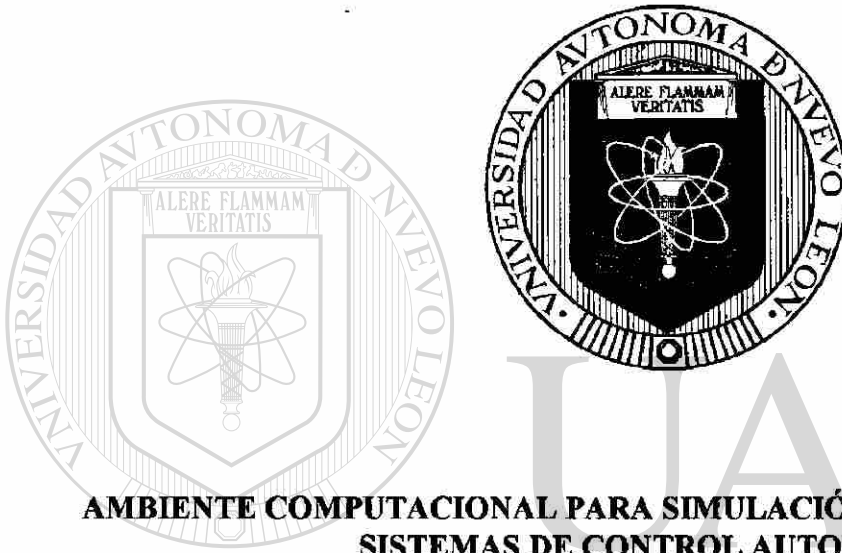
UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POST-GRADO



**AMBIENTE COMPUTACIONAL PARA SIMULACIÓN, ANÁLISIS Y DISEÑO DE
SISTEMAS DE CONTROL AUTOMÁTICO**

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

TESIS

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS
**EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA
ELÉCTRICA CON ESPECIALIDAD EN CONTROL**

QUE PRESENTA EL

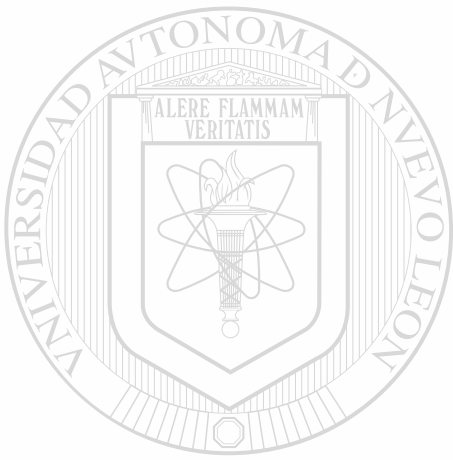
ING. MANUEL AMARANTE RODRÍGUEZ

CD. UNIVERSITARIA

OCTUBRE DE 1998

TM
Z5853
·M2
FINE
1998
A42

0129-79060



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

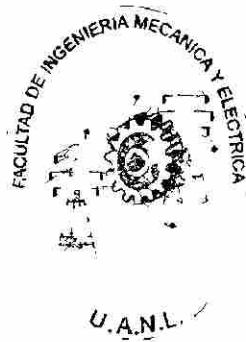


DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

FONDO
TESIS

®

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POST-GRADO



**AMBIENTE COMPUTACIONAL PARA SIMULACIÓN, ANÁLISIS Y DISEÑO DE
SISTEMAS DE CONTROL AUTOMÁTICO**

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
TESIS

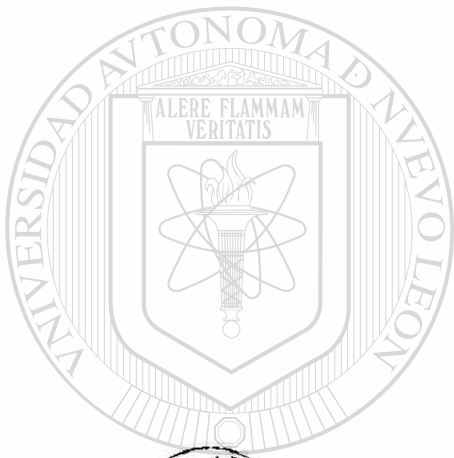
**EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA
ELÉCTRICA CON ESPECIALIDAD EN CONTROL**

QUE PRESENTA EL

ING. MANUEL AMARANTE RODRÍGUEZ

CD. UNIVERSITARIA

OCTUBRE DE 1998



UANL



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

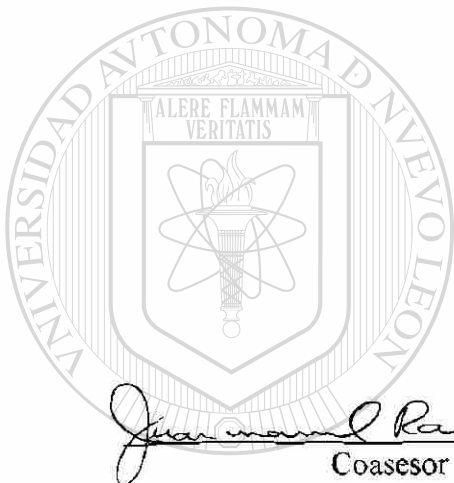
FONDO DE ESIS DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

®

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POST-GRADO

Los miembros del comité de tesis recomendamos que la tesis **Ambiente Computacional para la Simulación, Análisis y Diseño de Sistemas de Control Automático** realizada por el alumno **Ing. Manuel Amarante Rodríguez** sea aceptada para su defensa como opción al grado de **Maestro en Ciencias de la Ingeniería Eléctrica con Especialidad en Control**.

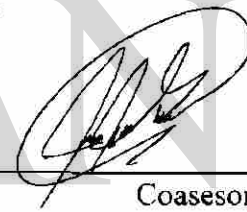
El Comité de Tesis



Asesor
Dr. Salvador Acha Daza



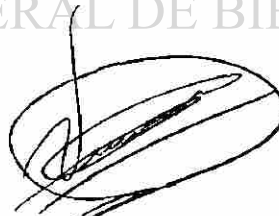
Coasesor
Dr. José Juan Manuel Ramírez Arredondo



Coasesor
M.C. Juan José Guerrero Garza

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



Vo.Bo.
M.C. Roberto Villarreal Garza
División de Estudios de Post-Grado

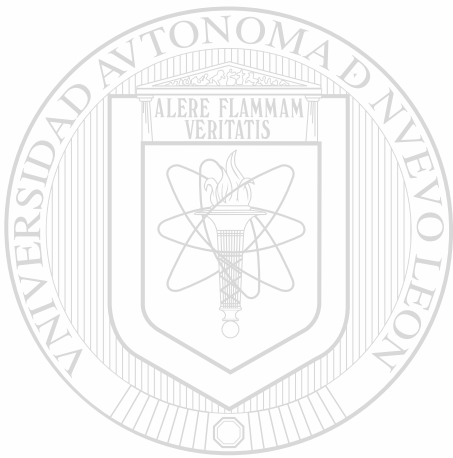
San Nicolas de los Garza, N.L. a 10 de octubre de 1998

DEDICATORIAS

A mi padre:

*Ing. Manuel Amarante Uribe (†)
Quien siempre tuvo la ilusión de
que yo obtuviera mi Título de Maestría*

"Padre aquí lo tienes"



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

A mi Madre:

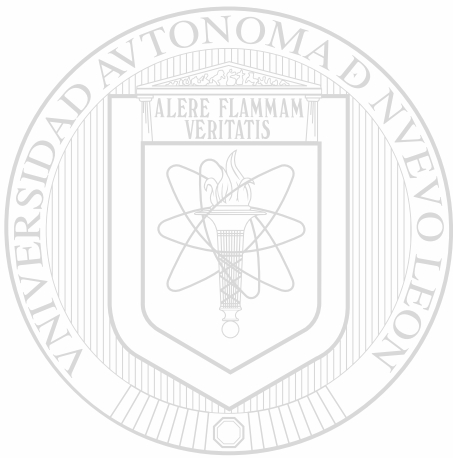
*Sra. Sara Lucía Rodríguez de Amarante
Quien por su tesón logró que yo terminara
esta Tesis*

"Madre aquí la tienes"

A mi Esposa:

***Sra. María Del Socorro Eugenia Bravo de Amarante
por el valioso apoyo que me brindó para salir adelante
con este proyecto***

"Muchas Gracias"



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

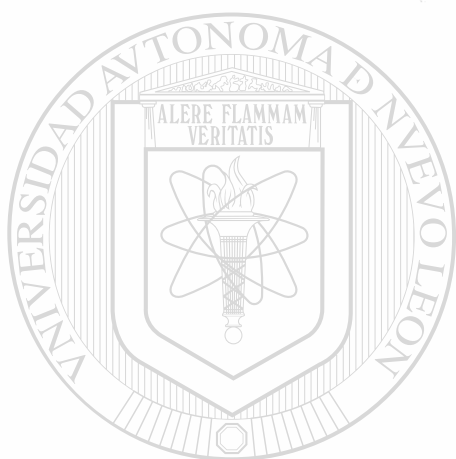
A mis tres Hijas:

***María Eugenia; María del Pilar y Kathia Lucía
por el tiempo que no les dediqué tratando de sacar
adelante este proyecto***

"Muchas Gracias"

RECONOCIMIENTOS

*A mi querido Amigo:
Ing. César Guerra Torres
por su valiosa colaboración*



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

*Al Ing. Guadalupe E. Cedillo Garza
por el apoyo que me brindó durante
la realización de mis estudios de
maestría*

RESUMEN

AMBIENTE COMPUTACIONAL PARA LA SIMULACIÓN, ANÁLISIS Y DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL AUTOMÁTICO

Publicación No. _____

Manuel Amarante Rodríguez, M. C. en Ing. Eléctrica

Universidad Autónoma de Nuevo León, 1998

Profesor Asesor: Dr. Salvador Acha Daza

Para que un país como México pueda entrar a formar parte de los principales países del mundo es necesario contar con las tecnologías más modernas, ya sea desarrollándolas o adquiriéndolas de donde mejor convenga, para esto es necesario que sus habitantes estén bien preparados tecnológicamente.

Una de las áreas del conocimiento más importante para un país altamente industrializado, como pretende ser México, es la automatización que le daría al país la posibilidad de ser más productivo y con un desarrollo sustentable implementando tecnologías altamente eficientes y ecológicamente factibles, para que al utilizarlas el país optimice el uso de sus recursos sin dañar su entorno natural.

Un país como México, que pretende volar a altos niveles, para procurar mayor bienestar para sus habitantes, necesita preparar mejor a sus ingenieros en el área de la automatización, lo cual se logra utilizando las tecnologías más modernas, tanto para la enseñanza de la materia como para el desarrollo profesional de la misma. Por este motivo en esta tesis se presenta, para los principiantes en el área del control automático, una metodología para utilizar a la

Computadora Digital como la principal herramienta en el análisis y el diseño de controles automáticos continuos lineales.

En esta tesis se reporta el diseño de un sistema de programas para computadora digital con el cual puede obtener **La Simulación en el Tiempo, El Análisis y El Diseño de Sistemas de Control Automático Continuo Lineal**. El sistema consta de tres partes principales: la primera cubre lo necesario para obtener La Simulación en el Tiempo de Sistemas de Control, la segunda se encarga de hacer El Análisis de Sistemas de Control Automático Analógico Lineal, y la tercera todo lo relacionado al Diseño de Controles Automáticos Analógicos Lineales.

La primera parte comprende la obtención de la respuesta en el tiempo de sistemas de control y se basa en un método desarrollando la forma de variables de espacio de estado, el cual resuelve la ecuación diferencial de orden n , la cual describe el comportamiento del sistema, descomponiéndola en n ecuaciones simultáneas de primer orden.

La segunda parte se encarga de analizar los sistemas de control automático continuo lineal maneja dos aspectos: el análisis en el dominio del tiempo y el análisis en el dominio de la frecuencia. El comportamiento de los sistemas de control automático depende de dos factores las variaciones de la ganancia y las variaciones de la entrada. El análisis en el dominio del tiempo estudia los cambios provocados en los transitorios (% de sobrepaso, T_r , T_p , T_a , T_s) y el error de estado estable por los cambios en la ganancia, lo cual se logra utilizando el Método del Lugar Geométrico de las Raíces. Los Métodos de Respuesta a la Frecuencia estudian los efectos que se producen en el comportamiento del sistema al variar la entrada, con la aplicación del Criterio de Nyquist en los Diagramas de Bode de lazo abierto se observan los cambios en la magnitud y el desfazamiento de la salida reflejándolos en el Margen de Ganancia y el Margen de Fase. El diagrama de Bode de lazo cerrado nos da información de los efectos que se producirán si entra en resonancia, pudiéndose obtener la frecuencia de resonancia ω_c .

la máxima amplitud de resonancia M_{max} , y un ancho de banda de frecuencias de variación de la entrada en las que el sistema funciona sin entrar en resonancia.

La tercera parte se encarga del diseño de los sistemas lineales de control automático continuo, comprende dos aspectos el diseño basado en el análisis en el dominio del tiempo y el diseño basado en el análisis en el dominio de la frecuencia. El diseño en el dominio del tiempo trata de que los transitorios y el error de estado estable cumplan con los requerimientos de la tecnología del proceso haciendo compensaciones en la rama directa, y en la retroalimentación. El diseño en el dominio de la frecuencia sólo trata de lograr un margen de fase aproximado a 45° , una frecuencia de resonancia predeterminada para no caer en ella y si se necesita trabajar en resonancia, un valor de la magnitud máxima de salida que no dañe al sistema lo cual se logra con la aplicación de compensadores en la rama directa.

Esta tesis, para abarcar los aspectos antes mencionados, contiene capítulos donde se desarrollan por partes los programas para computadora digital y finaliza con capítulos de síntesis, de análisis, de diseño y la unión de todos los programas desarrollados parcialmente para formar el sistema completo. Además, incluye Apéndices donde se explican los métodos numéricos utilizados, también se incluye un manual de operación y los discos de instalación del sistema completo.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

**UN INGENIERO QUE NO SEPA DE
INFORMÁTICA ESTA OBSOLETO**

PROLOGO

En los tiempos actuales, los cambios sociales y económicos que se están sucediendo en todo el mundo, obligan a los países, incluyendo a México, a ser competitivos y saber conservar y aprovechar de la mejor forma posible sus recursos naturales para sobrevivir de una manera decorosa en este ámbito.

Para que un país como México pueda formar parte de los principales países de este mundo es necesario contar con tecnologías modernas ya sea desarrollándolas o adquiriéndolas de donde mejor convenga, para esto es necesario que sus habitantes estén bien educados y preparados tecnológicamente.

Una de las áreas del conocimiento más importante para un país altamente industrializado, como pretende ser México, es la automatización. Estos conocimientos le darían al país la posibilidad de ser más productivo, con un desarrollo sustentable e implementando tecnologías altamente eficientes y ecológicamente factibles, para que al utilizarlas el país optimice sus recursos sin dañar su entorno natural.

Un país como México, que pretende volar a altos niveles, para procurar mayor bienestar para sus habitantes, necesita preparar mejor a sus ingenieros en las áreas de la automatización. Una mejor preparación se logra utilizando las tecnologías más modernas tanto para la enseñanza de la materia como para el desarrollo profesional de la misma. Por este motivo en esta tesis se presenta, una metodología para utilizar una **Computadora Digital** como la herramienta principal en el análisis y diseño de controles automáticos continuos y lineales.

En esta tesis se presenta un sistema de programas para computadora digital, que han sido elaborados por el autor a lo largo de su experiencia profesional, con los cuales se puede obtener **La Simulación en el Tiempo, El Análisis y El Diseño de Sistemas de Control Automático Continuo Lineal**. El sistema consta de tres partes principales, la primera cubre

lo necesario para obtener La Simulación en el Tiempo de Sistemas de Control, la segunda parte se encarga de hacer El Análisis de Sistemas de Control Automático Analógico Lineal, y la tercera parte comprende lo relacionado al Diseño de Controles Automáticos Analógicos Lineales.

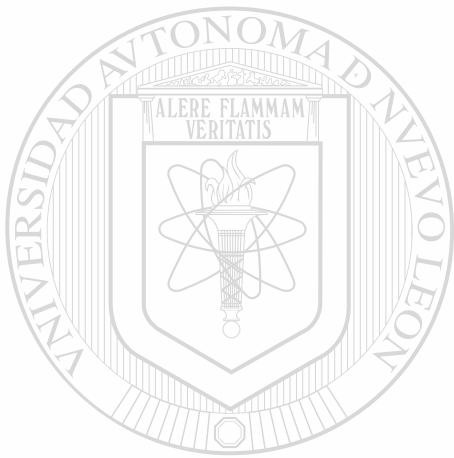
La primera parte trata sobre la obtención de la respuesta en el tiempo de sistemas de control y se basa en una formulación de espacio de estado que resuelve la ecuación diferencial de orden N , que describe el comportamiento del sistema, descomponiéndola en N ecuaciones de primer orden simultáneas.

La segunda parte se encarga de analizar los sistemas de control automático continuo lineal para manejar dos aspectos; el análisis en el dominio del tiempo y el análisis en el dominio de la frecuencia. El comportamiento de los sistemas de control automático depende de dos factores como son: las variaciones de la ganancia y las variaciones de la entrada. El análisis en el dominio del tiempo estudia los cambios provocados en los transitorios (% de sobrepaso, T_r , T_p , T_a , T_s) y el error de estado estable por los cambios en la ganancia, lo cual se logra con el uso del método de polos dominantes y con ayuda del Método del Lugar Geométrico de las Raíces. Los Métodos de Respuesta a la Frecuencia estudian los efectos que se producen en el comportamiento del sistema al variar la entrada, con la aplicación del Criterio de Nyquist. En los Diagramas de Bode de lazo abierto observamos los cambios en la magnitud y el desfazamiento de la salida reflejándolos en el Margen de Ganancia y el Margen de Fase. El Diagrama de Bode de lazo cerrado da información entre otra de los efectos que se producirían si se tiene en resonancia pudiéndose obtener la frecuencia de resonancia ω_c , la máxima amplitud de resonancia M_{max} , y un ancho de banda de frecuencias de variación de la entrada en las que funciona sin entrar en resonancia.

La tercera parte del trabajo trata del diseño de los sistemas de control automático continuo lineales, comprende dos aspectos el diseño basado en el análisis en el dominio del tiempo y el diseño basado en el análisis en el dominio de la frecuencia. El diseño en el dominio del tiempo trata de que los transitorios y el error de estado estable cumplan con los requerimientos del proceso haciendo compensaciones aplicadas en la rama directa, o en la rama de retroalimentación. El diseño en el dominio de la frecuencia sólo trata de lograr un margen de fase aproximado a 45° , una frecuencia de resonancia predeterminada para no caer

en ella y si se necesita trabajar en resonancia, un valor de la magnitud máxima de salida que no dañe al sistema, se logra con la aplicación de compensadores en la rama directa.

Esta tesis, para abarcar los aspectos antes mencionados, esta organizada en capítulos donde desarrollo programas para computadora digital y finaliza con capítulos de síntesis de análisis, diseño y la unión de todos los programas parciales para formar el sistema completo. Además incluyo apéndices donde se explican los métodos numéricos utilizados para elaborar los programas, también se incluye en la tesis un manual de operación y discos de instalación del sistema completo en computadoras tipo PC.



***UN INGENIERO QUE NO SEPA DE
INFORMÁTICA ESTA OBSOLETO.***

UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



INDICE

Dedicatorias	iii
Reconocimientos	v
Resumen	vi
Prólogo	ix
Indice	xii
Indice de Tablas	xvii
Indice de Figuras	xviii

CAPITULO 1.-INTRODUCCIÓN	1
1.1 Antecedentes Históricos.	1
1.2 Objetivo del trabajo de Tesis.	3
1.3 Alcances de esta Tesis.	3
1.4 Contenido de la Tesis.	6

CAPITULO 2.-SIMULACIÓN EN EL TIEMPO DE SISTEMAS DE CONTROL AUTOMÁTICO EN COMPUTADORA DIGITAL	9
2.1 Introducción.	9
2.2 Variables de Estado.	10
2.3 Función de Transferencia y Variables de Estado.	13
2.3.1 Ejemplos.	15
2.4 Diagrama de Variables de Estado.	20
2.5 La Matriz de Transición.	22
2.6 Aplicación del Espacio de Estado.	26
2.7 Algoritmo para simular en una Computadora Digital el comportamiento en el tiempo de un Sistema de Control Automático.	29
2.8 Programa de Computadora Digital para simular en el tiempo un sistema de control.	31

CAPITULO 3.-ANÁLISIS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO DE SISTEMAS DE CONTROL AUTOMÁTICO CONTINUO LINEAL	33
3.1 Introducción.	33
3.2 Estabilidad de un sistema Invariante en el tiempo.	34
3.2.1 Definición de estabilidad según la respuesta al impulso	35
3.2.2 Concepto de estabilidad en variables de estado	37
3.3 El método del Lugar Geométrico de las Raíces	40
3.3.1 Aspectos prácticos para el cálculo del Lugar de las Raíces	43

INDICE(Continuación)

3.4 El Lugar Geométrico de las Raíces y el Análisis en el Dominio del Tiempo	45
3.5 Algoritmos para el Lugar Geométrico de las Raíces y el Análisis en el Dominio del Tiempo,	50
3.6 Programa en computadora digital para analizar en el tiempo sistemas de control lineales	52

CAPITULO 4.-DISEÑO DE CONTROLES AUTOMATICOS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

4.1 Diseño en el Dominio del Tiempo	54
4.2 Compensación en la rama directa	55
4.3 Compensación en la rama de retroalimentación	64
4.4 Algoritmos para compensación en la rama directa usando computadora digital	70
4.5 Algoritmos para compensación en la rama de retroalimentación usando computadora digital	74
4.6 Programa de computadora digital para compensación en la rama directa	76
4.7 Programa de computadora digital para compensación en la rama de retroalimentación	77

CAPITULO 5.-ANÁLISIS DE SISTEMAS DE CONTROL LINEALES EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

5.1 Métodos de Respuesta a la Frecuencia	78
5.2 El Criterio de Nyquist	79
5.3 Márgenes de ganancia y de fase	90
5.4 Diagramas de Bode	93
5.4.1 Conceptos sobre los diagramas de Bode	94
5.4.2 Análisis de estabilidad según Bode	97
5.5 Carta de Nichols y Diagramas de Bode de Lazo Cerrado	102
5.6 Algoritmos en computadora digital para Análisis en el Dominio de la Frecuencia	108
5.6.1 Diagrama de Nyquist	109
5.6.2 Diagramas de Bode de lazo abierto	111
5.6.3 Diagramas de Bode de Lazo Cerrado	114
5.7 Programa de computadora digital para análisis en el dominio de la frecuencia	115

CAPITULO 6.-DISEÑO DE CONTROLES AUTOMÁTICOS EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

6.1 Introducción	117
------------------	-----

INDICE(Continuación)

6.2 Compensación en la Rama Directa con Redes de Adelanto, Atraso, o Atraso-Adelanto	118
6.2.1 Compensación con red de Adelanto	118
6.2.2 Compensación con red de Atraso	127
6.2.3 Compensación con red de Atraso-Adelanto	135
6.3 Algoritmos para Compensación en el Dominio de la Frecuencia con Computadora Digital	144
6.3.1 Diagrama de Bode de lazo cerrado	147
6.3.2 Compensación con red de Adelanto	149
6.3.3 Compensación con red de Atraso	150
6.3.4 Compensación con red de Atraso-Adelanto	151
6.4 Programa de computadora digital para diseño en el dominio de la frecuencia de controles automáticos lineales	151

CAPITULO 7.-SÍNTESIS DE LA SIMULACIÓN DIGITAL, EL ANÁLISIS, Y EL DISEÑO DE CONTROLES AUTOMÁTICOS LINEALES 153

7.1 Metodología para el Análisis de Sistemas de Control	153
7.2 Utilización del programa SADAC para el análisis de sistemas de control	154
7.3 Metodología para el diseño de sistemas de control	155
7.4 Utilización del programa SADAC para el diseño de sistemas de control	157
7.5 Resumen del programa SADAC para la Simulación, el Análisis y el Diseño de Sistemas Lineales de Control Automático	158

CAPITULO 8.-CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES 161

APÉNDICE A.- RESPUESTA EN EL TIEMPO DE SISTEMAS DE CONTROL AUTOMÁTICO CONTINUO LINEAL 165

A.1 Introducción	166
A.2 Señales de Entrada Tipo para el análisis del estado transitorio de los Servosistemas.	167
A.2.1 Entrada en escalón (función escalón)	168
A.2.2 Entrada en Rampa (función rampa)	169
A.2.3 Entrada en aceleración (función parabólica)	169
A.3 Comportamiento de los Servosistemas en el dominio del Tiempo	170
A.3.1 Respuesta en estado estable	170
A.3.2 Error en estado estable	170
A.3.3 Error ante entrada escalón	173
A.3.4 Error ante entrada rampa	174
A.3.5 Error a la aceleración	174
A.4 Tipo de sistema	175

INDICE(Continuación)

A 5 Respuesta Transitoria	176
A.6 Ecuación característica de los servosistemas.	177
A.6.1 Localización en el plano complejo de las raíces características	180
A.7 Respuesta transitoria para un sistema de segundo orden	184
A.8 Diagrama de transición de un sistema de segundo orden	192

APÉNDICE B.- CONTROLADORES COMERCIALES Y REDES

COMPENSADORAS	197
B.1 Introducción	198
B.2 Los Controladores	199
B.2.1 Análisis comparativo	201
B.3 Implementación Física	206
B.4 Redes Compensadoras	214
B.4.1 Red Compensadora de Adelanto	214
B.4.2 Red Compensadora de Atraso	215
b.4.3 Red Compensadora de Atraso-Adelanto	216

APÉNDICE C: MÉTODOS NUMERICOS PARA LA SOLUCION DE ECUACIONES ALGEBRAICAS NO LINEALES

	217
C.1 Introducción	218
C.2 Método de Bairstow	220
C.3 Resumen	227

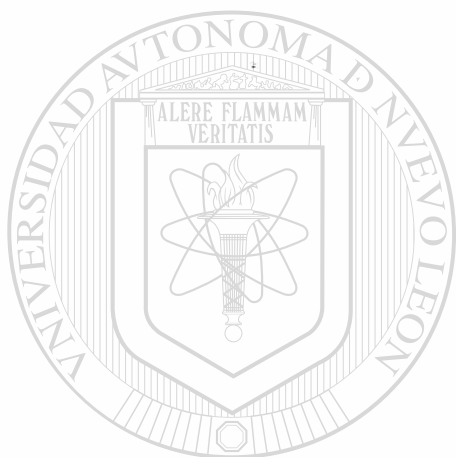
APÉNDICE D.- MANUAL DE OPERACIÓN DEL PAQUETE DE PROGRAMAS

SADAC (Simulation, Analysis & Design for Automatic Control)	228
D.1 Descripción General del Programa SADAC	229
D.2 Hardware Requerido	231
D.3 Forma de Operar del Paquete SADAC	232
D.3.1 Manejo de Gráficas	232
D.3.2 Escalamiento y Ventanas	236
D.3.3 Manejo de Archivos	236
D.3.4 Manejo de Entradas	238
D.3.5 Manejo de Salidas	246
D.3.6 Despliegue de datos en pantalla	252
D.3.7 Utilería de Formato	256
D.3.8 Desplegado de Gráficas en pantalla	257
D.3.9 Ventanas	260
D.3.10 Graficación Múltiple	261
D-4 Ejemplos para el uso del Programa SADAC	262
D.4.1 Respuesta en el Tiempo y Simulación	262
D.4.2 Análisis en el Dominio del Tiempo	267
D.4.3 Análisis en el Dominio de la Frecuencia	270

INDICE(Continuación)

D.4.4 Diseño en el Dominio del Tiempo, Compensación en la Rama Directa	275
D.4.5 Diseño en el Dominio del Tiempo, Compensación en la Rama de Retroalimentación	283
D.4.6 Diseño en el Dominio de la Frecuencia	289

REFERENCIAS	298
--------------------	------------



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



INDICE DE TABLAS

Tabla 4-1 Forma de Hc(s)	66
Tabla 5-1 Tabulación para el diagrama de Nyquist $GH(s) = \frac{24}{s(s+2)(s+6)}$	92
Tabla 5-2 Valores para el diagrama de Bode	101
Tabla 5-3 Valores para el diagrama de Bode de Lazo Cerrado	107
Tabla 6-1 Valores del sistema compensado para reducir el error	122
Tabla 6-2 Valores del sistema compensado con red de adelanto	125
Tabla 6-3 Valores del sistema compensado para reducir el error	131
Tabla 6-4 Valores del sistema compensado con Red de Atraso	133
Tabla 6-5 Valores del sistema compensado para reducir el error	138
Tabla 6-6 Valores del sistema compensado con Red de Atraso-Adelanto	141
Tabla 6-7 Tabla Comparativa de los Resultados, Compensación con redes de Adelanto, de Atraso, y de Atraso-Adelanto	143
Tabla A-1 Error de Estado Estable para los diferente Tipos de sistemas	175
Tabla A-2 Valores de la Envoltente para Múltiplos de la Constante de Tiempo	187
Tabla C-1 Resumen de los esquemas para encontrar raíces[23 pags. 1-23]	219

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

INDICE DE FIGURAS

Fig. 2-1	Diagrama de bloques para el problema de Control.	11
Fig. 2-2	Sistema Mecánico masa, resorte, y amortiguador.	18
Fig. 2-3	Diagrama de cuerpo libre del sistema mecánico.	18
Fig. 2-4	Diagrama de variables de estado para un sistema, dado $P(s)$	22
Fig. 2-5	Diagrama de flujo de señal para el diagrama de variables de estado.	22
Fig. 2-6	Diagrama de Variables de Estado y Diagrama de Flujo con condiciones iniciales.	25
Fig. 3.1	Concepto de estabilidad, representación en el espacio de estado.	38
Fig. 3.2	Regiones estable e inestable del plano s .	40
Fig. 3.3	Restricciones para que un punto del plano s forme parte del Lugar Geométrico de las Raíces.	43
Fig. 3.4	Procedimiento de Polos Dominantes del Lugar Geométrico de las Raíces.	49
Fig. 4.1	Compensación en la Rama Directa.	55
Fig. 4.2	Compensación en la Rama Directa, Lugar Geométrico de las Raíces.	57
Fig. 4.3	Compensación en la rama directa para el sistema (4.6).	60
Fig. 4.4	Diagrama de bloques del sistema compensado en la rama directa.	64
Fig. 4.5	Diagrama de Bloques, Compensación en la Retroalimentación.	65
Fig. 4.6	Compensación en la Retroalimentación usando Polos Dominantes.	68
Fig. 4.7	Compensación en la retroalimentación.	69
Fig. 4.8	Compensación en la Rama Directa, Método de Polos Dominantes y usando el Lugar Geométrico de las Raíces.	74
Fig. 4.9	Compensación en la Retroalimentación, Método de Polos Dominantes y el Lugar Geométrico de las Raíces.	76
Fig. 5.1	Respuesta a la Frecuencia	78
Fig. 5.2	Trayectoria en el Plano s .	80
Fig. 5.3	El Plano $1+G(s)H(s)$.	81
Fig. 5.4	El Plano $G(s)H(s)$.	82
Fig. 5.5	Inclusión de la mitad derecha del Plano s .	83
Fig. 5.6	Diagramas para analizar estabilidad.	84
Fig. 5.7	Figuras para el ejemplo.	87
Fig. 5.8	Márgenes de Ganancia y de Fase.	91
Fig. 5.9	Diagrama de Nyquist mostrando Margen de Fase y Margen de Ganancia.	93
Fig. 5.10	Interpretación de la estabilidad sobre los diagramas de a)Nyquist y b)Bode.	98
Fig. 5.11	Márgenes de Ganancia y de Fase en los diagramas de a)Nyquist y de b)Bode.	99

INDICE DE FIGURAS

(Continuación)

Fig. 5.12	Diagrama de Bode mostrando Margen de Fase, Margen de Ganancia y Frecuencia de Cruce.	102
Fig. 5.13	Forma Canónica de un Sistema de Control con retroalimentación unitaria.	104
Fig. 5.14	Carta de Nichols.	104
Fig. 5.15	Diagrama de Bode de Lazo Cerrado mostrando el ancho de banda, la frecuencia de resonancia, y la amplitud máxima.	108
Fig. 6.1	Compensación en la Rama Directa.	117
Fig. 6.2	Respuesta en frecuencia de la Red Compensadora de Adelanto (a) Magnitud en dB (b) Angulo de Fase en grados.	120
Fig. 6.3	Diagramas de Bode de Lazo Abierto, sistema compensado para reducir el error.	123
Fig. 6.4	Diagramas de Bode de Lazo Cerrado, sistema compensado para reducir el error.	123
Fig. 6.5	Diagrama de Bloques del sistema compensado con una Red de Adelanto.	125
Fig. 6.6	Diagrama de Bode de Lazo Abierto del sistema compensado con una Red de Adelanto.	126
Fig. 6.7	Diagrama de Bode de Lazo Cerrado del sistema compensado con una Red de Adelanto.	127
Fig. 6.8	Aportación de la Red Compensadora de Atraso, (a) Magnitud en db, (b) Angulo de Fase.	129
Fig. 6.9	Diagramas de Bode de Lazo Abierto, sistema compensado para reducir el error.	132
Fig. 6.10	Diagramas de Bode de Lazo Cerrado, sistema compensado para reducir el error.	132
Fig. 6.11	Diagrama de Bloques del sistema compensado.	133
Fig. 6.12	Diagrama de Bode de Lazo Abierto, sistema compensado con Red de Atraso.	134
Fig. 6.13	Diagrama de Bode de Lazo Cerrado, sistema compensado con Red de Atraso.	134
Fig. 6.14	Diagramas de Bode de Lazo Abierto, sistema compensado para reducir el error.	139
Fig. 6.15	Diagramas de Bode de Lazo Cerrado, sistema compensado para reducir el error.	139
Fig. 6.16	Diagrama de Bloques, sistema compensado con una Red de Atraso-Adelanto	140
Fig. 6.17	Diagrama de Bode de Lazo Abierto, sistema compensado con una Red de Atraso-Adelanto	141
Fig. 6-18	Diagrama de Bode de Lazo Cerrado, sistema compensado con una Red de Atrso-Adelanto	142

INDICE DE FIGURAS

(Continuación)

Fig. A.1	Señales de Prueba Elementales.	168
Fig. A.2	Sistema de Control con Retroalimentación no Unitaria.	171
Fig. A.3	Respuesta a Escalón Unitario con Especificaciones en el tiempo.	176
Fig. A.4	Comparación de Respuestas a varias localizaciones de raíces en el plano s .	181
Fig. A.5	Lugar de las raíces características, $\delta(0,\infty)$, ω_n se mantiene constante	183
Fig. A.6.	Respuesta Transitoria de un Servomecanismo de Segundo Orden con una Entrada en Escalón Unitario.	184
Fig. A.7	Respuesta a escalón unitario, se muestra que los máximos y mínimos tienen lugar a intervalos periódicos.	191
Fig. A.8	Porcentaje de Sobrepaso en función del amortiguamiento, respuesta a escalón de posición para sistema de Segundo Orden.	192
Fig. A-9	Gráfica de transición de un servosistema de segundo orden	193
Fig. B.1	Configuración tradicional de un Sistema de Control Automático.	199
Fig. B.2	Sistema de Segundo Orden Convencional.	201
Fig. B.3	Sistema de segundo orden con Controlador P.	203
Fig. B.4	Sistema de segundo orden con Controlador PD.	204
Fig. B.5	Sistema de segundo orden con Controlador PI.	205
Fig. B.6	Sistema de segundo orden con Controlador PID.	206
Fig. B.7	El Amplificador Operacional.	207
Fig. B.8	Curva de operación del Amplificador Operacional.	208
Fig. B.9	Conexión básica de un Amplificador Operacional.	208
Fig. B.10	El Amplificador Operacional conexión con varias entradas.	209
Fig. B.11	Diagrama de bloques del Controlador P.	210
Fig. B.12	Amplificador Operacional conectado como Controlador P.	210
Fig. B.13	Diagrama de bloques del Controlador PI.	211
Fig. B.14	Amplificador Operacional conectado como Controlador PI.	211
Fig. B.15	Diagrama de bloques del Controlador PD.	212
Fig. B.16	Amplificador Operacional conectado como Controlador PD.	212
Fig. B.17	Diagrama de bloques del Controlador PID.	213
Fig. B.18	Amplificador Operacional conectado como Controlador PID.	213
Fig. B.19	Red Compensadora de Adelanto.	214
Fig. B.20	Red Compensadora de Atraso.	215
Fig. B.21	Red Compensadora de Atraso-Adelanto.	216
Fig. D.1	Pantalla Principal.	233
Fig. D.2	Iconos de edición de Gráficas.	234
Fig. D.3	Graficación Múltiple.	234
Fig. D.4	Menú de Archivo con Sub-Menús y pantallas auxiliares.	237
Fig. D.5	Menú de Entrada con sus Sub-Menús.	238
Fig. D.6	Pantalla Auxiliar de Entrada de datos (Función de Transferencia).	239

INDICE DE FIGURAS

(Continuación)

Fig.D.7(a)	Pantalla de la opción Variables de Estado del Menú Entrada.	240
Fig.D.7(b)	Pantalla Auxiliar para cargar la Matriz Acompañante P.	241
Fig.D.7(c)	Pantalla auxiliar para cargar la Matriz B.	241
Fig.D.7(d)	Pantalla auxiliar para cargar el Vector de Entradas u(t).	242
Fig.D.7(e)	Pantalla auxiliar para cargar la Matriz L.	242
Fig.D.7(f)	Pantalla auxiliar para cargar el Vector de Condiciones Iniciales.	243
Fig.D.8	Pantalla auxiliar para Análisis en el Dominio del Tiempo, (Entrada de Datos).	243
Fig.D.9	Pantalla auxiliar para Análisis en el Dominio de la Frecuencia, (Entrada de Datos).	244
Fig.D.10	Pantalla auxiliar para Diseño en el Dominio del Tiempo, Compensación en la Rama Directa.	244
Fig.D.11	Entrada de Datos Diseño en el Dominio del Tiempo, Compensación en la Retroalimentación.	245
Fig.D.12	Entrada de Datos Diseño en el Dominio de la Frecuencia.	245
Fig.D.13	Menú de Salidas.	246
Fig.D.14	Pantalla auxiliar de Salidas, opción Análisis en el dominio del tiempo.	247
Fig.D.15	Pantalla auxiliar de Salidas, opción Análisis en el Dominio de la Frecuencia.	248
Fig.D.16	Pantalla auxiliar de Salidas, opción Análisis en el Dominio de la Frecuencia con Tabulación para Niquist, Bode (Lazo Abierto), Bode (Lazo Cerrado).	248
Fig.D.17	Pantalla auxiliar de salidas opción Diseño en el Dominio del Tiempo, Compensación en la Rama Directa del Menú Salidas.	250
Fig.D.18	Pantalla auxiliar del Menú Salida Diseño en el Dominio del Tiempo, Compensación en la Rama de Retroalimentación.	251
Fig.D.19	Resultados Diseño en el Dominio de la Frecuencia.	252
Fig.D.20	Menú Ver.	252
Fig.D.21	Pantalla auxiliar del Menú Ver, muestra la Función de Transferencia.	253
Fig.D.22	Pantalla auxiliar del Menú Ver, se muestran las Variables de Estado.	253
Fig.D.23	Pantalla auxiliar que muestra la Bitácora del programa SADAC.	255
Fig.D.24	Menú Formato.	256
Fig.D.25	Propiedades de la Gráfica, activada por el Menú Formato (Opción Pantalla).	256
Fig.D.26	Menú de Gráficas.	257
Fig.D.27	Gráfica de la Respuesta en el Tiempo de un Sistema en Lazo Cerrado con entrada Escalón Unitario.	258
Fig.D.28	Gráfica de la Respuesta en el Tiempo de un Sistema en Lazo Abierto con entrada Escalón Unitario.	258

INDICE DE FIGURAS

(Continuación)

Fig.D.29	Gráfica del Lugar Geométrico de $GH(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+5)}$	259
Fig.D.30	Gráfica de Nyquist de Función de Transferencia $GH(s) = \frac{24}{s(s+2)(s+6)}$	259
Fig.D.31	Gráfica de Bode de Lazo Abierto para $GH(s) = \frac{24}{s(s+2)(s+6)}$	260
Fig.D.32	Gráfica de Bode de Lazo Cerrado, para $GH(s) = \frac{24}{s(s+2)(s+6)}$	260
Fig.D.33	División en Ventanas de la Región de Trabajo.	261
Fig.D.33bis	Opción de Graficación múltiple	261
Fig.D.34	Menú para cargar la Función de Transferencia.	262
Fig.D.35	Menú para seleccionar el tipo de gráfica.	263
Fig.D.36	Gráfica de Respuesta en el Tiempo.	263
Fig.D.37	Sistema Mecánico Masa-Resorte-Amortiguador.	264
Fig.D.38	Menú de Entradas, Opción Variables de Estado.	266
Fig.D.39	Menú y Pantalla Auxiliar para seleccionar la salida a graficar.	267
Fig.D.40	Gráficas de las dos salidas seleccionadas.	267
Fig.D.41	Carga de Datos para Análisis en el Dominio del Tiempo.	268
Fig.D.42	Lugar Geométrico de las Raíces, Función de Transferencia del Ejemplo.	269
Fig.D.43	Resultados de Análisis en el Dominio del Tiempo, para el Ejemplo.	269
Fig.D.44	Gráfica de Respuesta en el Tiempo, sistema del Ejemplo.	270
Fig.D.45	Carga de la Función de Transferencia para el Ejemplo de Análisis en el Dominio de la Frecuencia.	271
Fig.D.46	Carga de Datos para Análisis en el Dominio de la Frecuencia.	271
Fig.D.47	Salida del Análisis en el Dominio de la Frecuencia.	272
Fig.D.48	Tabulación de Nyquist como Salida del Análisis en el Dominio de la Frecuencia.	272
Fig.D.49	Gráfica Polar de Nyquist, salida del Análisis en el Dominio de la Frecuencia.	273
Fig.D.50	Tabulación de Bode de Lazo Abierto, Análisis en el Dominio de la Frecuencia.	273
Fig.D.51	Diagramas de Bode de Lazo Abierto, salida del Análisis en el Dominio de la Frecuencia.	274
Fig.D.52	Tabulación de Bode de Lazo Cerrado, del Análisis en el Dominio de la Frecuencia.	274
Fig.D.53	Diagramas de Bode de Lazo Cerrado, del Análisis en el Dominio de la Frecuencia.	275
Fig.D.54	Diagrama de Bloques del Sistema de Control del Ejemplo.	276

INDICE DE FIGURAS

(Continuación)

Fig.D.55	Carga de la Función de Transferencia, Sistema de Control del Ejemplo.	278
Fig.D.56	Alimentación de Datos para Análisis en el Dominio del Tiempo.	279
Fig.D.57	Selección de Salida de Análisis en el Dominio del Tiempo.	279
Fig.D.58	Gráficas de Respuesta en el Tiempo y Lugar Geométrico de las Raíces para ejemplo.	280
Fig.D.59	Alimentación de datos para Diseño en el Dominio del Tiempo, Compensación en la Rama Directa.	281
Fig.D.60	Salida de Resultados y Nueva Función de Transferencia generada por el Diseño en el Dominio del tiempo con Compensación en la Rama Directa.	282
Fig.D.61	Respuesta en el Tiempo y Lugar Geométrico de las Raíces del sistema sin compensar y del sistema compensado.	283
Fig.D.62	Diagrama de Bloques del Sistema del Ejemplo.	284
Fig.D.63	Carga de Datos para Diseño en el Dominio del tiempo Compensación en la rama de Retroalimentación.	286
Fig.D.64	Salida de Resultados y nueva Función de Transferencia generada para el Diseño en el Dominio del Tiempo, Compensación en la Rama de Retroalimentación.	287
Fig.D.65	Respuesta en el Tiempo y Lugar Geométrico de las Raíces del Sistema de Control sin Compensar y Compensado.	288
Fig.D.66	Diagrama de Bloques del Sistema de Control del Ejemplo.	289
Fig.D.67	Alimentación de la Función de Transferencia compensada para el Error de Estado Estable del Sistema de Control.	291
Fig.D.68	Carga de los Datos para Análisis en el Dominio de la frecuencia.	292
Fig.D.69	Salida de Análisis en el Dominio de la Frecuencia del Sistema de Control.	292
Fig.D.70	Gráficas de Respuesta en el Tiempo, de Nyquist, Bode de Lazo Abierto, Bode de Lazo Cerrado para el Sistema de Control compensado para el error.	293
Fig.D.71	Tabulaciones de Nyquist, Bode de Lazo Abierto, Bode de Lazo Cerrado para el Sistema de Control compensado para el error.	293
Fig.D.72	Carga de Datos para Diseño en el Dominio de la Frecuencia.	296
Fig.D.73	Resultados y Nueva función de Transferencia generada para el Diseño en Dominio de la Frecuencia.	296
Fig.D.74	Gráficas de Respuesta en el Tiempo, Nyquist, Bode de Lazo Abierto y Bode de Lazo Cerrado del Sistema Compensado	297

CAPITULO 1

INTRODUCCION

Este trabajo de tesis está dirigido a los estudiantes y profesionales del área de la automatización y presenta una herramienta computacional que ayuda en el análisis y el diseño de sistemas de control automático, continuos y lineales.

Para lograr el objetivo de esta tesis se realizó un paquete de programas que tiene opciones para la simulación de sistemas de control continuos, tanto lineales como no-lineales, de una o varias entradas, de una o varias salidas. Maneja opciones para el análisis y el diseño, en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia.

Para la realización del paquete de programas digitales se utilizaron técnicas de programación modernas, como la programación por objetos y el concepto de componentes reutilizables. Con las propiedades anteriores se obtuvo un paquete de simulación digital que trabaja en computadoras PC-compatibles bajo el ambiente Windows® y puede utilizar todas las ventajas que este ambiente ofrece.

1.1 Antecedentes Históricos

El uso de herramientas que faciliten el trabajo ha sido desde tiempos muy remotos una de las preocupaciones principales, el área del control automático no es la excepción. Desde que apareció, a finales del siglo XVIII, el Regulador Centrífugo de Watt [13-3] comenzó la revolución industrial y con ello la preocupación de lograr controles que pudieran dar más cantidad y calidad a la producción de bienes y servicios, lo cual trajo consigo la necesidad de contar con técnicas de diseño cada vez más sofisticadas.

A mediados del siglo XIX se desarrolló un procedimiento matemático que puede descomponer una ecuación diferencial de orden N en un sistema de N ecuaciones diferenciales

de orden uno [1-26] lo cual facilitaba su solución. A principios del siglo XX se introdujeron los métodos de respuesta a la frecuencia, donde se aplica el Criterio de Nyquist para el análisis de la estabilidad de sistemas lineales con una sola entrada y una sola salida [7-9].

En la década de los treinta [19-5] salió a la luz pública la invención de una serie de equipos que revolucionarían el trabajo humano en todas las disciplinas siendo estos equipos las computadoras digitales. El uso científico, industrial y comercial de las computadoras se tuvo hasta mediados de la década de los cincuenta, con la aparición de las computadoras transistorizadas y el lenguaje de programación de alto nivel FORTRAN (Formula Translation).

A fines de la década de los cuarenta Evans [20-289] desarrolló otro método para análisis de estabilidad de sistemas de control lineal de una sola entrada una sola salida llamado Lugar Geométrico de las Raíces (Root Locus), que consiste en realizar una gráfica de cómo se localizan en el plano complejo las raíces de la ecuación característica, cuando la ganancia K varía desde 0 hasta ∞ .

A mediados de la década de los cincuenta con un uso más amplio de la computadora digital tomó vigencia el desarrollo de mediados del siglo XIX en el cual se descomponía una ecuación diferencial de orden N en un sistema de N ecuaciones de orden uno, lo cual representado en forma matricial llevó a la forma de Variables de Estado que es ideal para trabajarse en computadora digital.

Con la sucesión de los acontecimientos relatados fue a principios de la década de los setenta, cuando aparecieron personas y surgieron compañías que se preocuparon por realizar desarrollos que permitieran el uso de la computadora digital como una de las principales herramientas para análisis y diseño de controles automáticos. En esa época siendo un estudiante de maestría, se contaba para la solución de ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento de un sistema y que se podía utilizar para simular el comportamiento de controles automáticos era un conjunto de computadoras analógicas recientemente adquiridas por la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la U.A.N.L. y a mi cargo, al mismo

tiempo se dispuso en la U.A.N.L. de una computadora digital que se operaba introduciendo los programas y la información por medio de tarjetas perforadas.

Con los estudios efectuados durante la maestría, con la práctica en la industria y la operación de las computadoras analógicas quedó establecida la necesidad de desarrollos para el análisis y diseño de controles automáticos utilizando la computadora digital, y por lo cual se emprendió su desarrollo en 1973. El primer desarrollo fué un programa para la construcción del Lugar Geométrico de las Raíces utilizando el lenguaje FORTRAN, el cual graficaba utilizando formatos de impresión por medio de caracteres.

Al dedicar esfuerzo a la docencia a nivel de licenciatura y maestría, impartiendo cátedras relacionadas con el control automático, desde 1975, se fue enseñando a los alumnos los desarrollos realizados y se invitaba a que siguieran desarrollando otros conceptos. Con el tiempo se incluyeron desarrollos para métodos de respuesta a la frecuencia, se usaron mejores lenguajes, con computadoras de mayor capacidad de memoria y rapidez de cálculo, que incluían no sólo aspectos del análisis sino también del diseño, y así hasta la actualidad, donde con la participación de alumnos se llega al desarrollo computacional descrito en esta tesis.

1.2 Objetivos del trabajo de tesis

El objetivo principal de esta tesis es hacer accesible el uso de un sistema de programas desarrollados para la **Simulación, Análisis y Diseño de Controles Automáticos Continuos Lineales** a fin de facilitar el trabajo del profesionista de esta rama y servir a los estudiantes de las ramas del control automático para familiarizarse con las computadoras digitales y avanzar en la mejor comprensión de los conceptos de análisis y del diseño, facilitando las tareas que éstas actividades representan.

1.3 Alcances de la Tesis

En esta tesis se presentan una serie de programas, para computadora digital, con los cuales se puede *Simular, Analizar y Diseñar Controles Automáticos Continuo Lineal*. En los programas desarrollados se podrá simular la respuesta en el tiempo de sistemas continuos

lineales en base a la función de transferencia, una sola entrada y una sola salida, pudiendo tener como entradas un impulso unitario o un escalón unitario, y como salidas la gráfica de la respuesta en el tiempo, ya sea directamente o al tiempo en que se efectúan los cálculos. Los programas desarrollados dentro de esta tesis pueden, así mismo, simular el comportamiento en el tiempo de sistemas con varias entradas y varias salidas. Las entradas pueden ser de tipo impulso, un escalón, una rampa, un seno, un coseno con magnitud y frecuencia seleccionada por el usuario, también podrá leer como entrada un archivo preparado expresamente para servir como señal de entrada.

En la parte de Análisis realizará el análisis tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia, en el análisis en el dominio del tiempo se auxilia del método del Lugar Geométrico de las Raíces aplicando la técnica de Polos Dominantes para que en base a la razón de amortiguamiento, que estará entre 0 y 1, localice el punto de operación y de ahí la Ganancia del Sistema K y la Frecuencia Natural de Oscilación, con las cuales se calculará el % de Sobrepaso, el Tiempo de Respuesta T_r , el Tiempo de Subida T_p , el Tiempo de Alcance Máximo T_a , el Tiempo de Asentamiento T_s , y el % de Error de Estado Estable que se presentarán como salidas en una ventana auxiliar. También podrá presentar como salida la gráfica del Lugar Geométrico de las Raíces mostrando el punto de operación.

En la parte de Análisis en el Dominio de la Frecuencia se calculan el Margen de Ganancia, el Margen de Fase, y la Frecuencia de Cruce a partir tanto de los Diagramas de Bode de Lazo Abierto como los de Nyquist donde se aplica el Criterio de Nyquist para determinar estabilidad, también a partir de los diagramas de Bode de Lazo Cerrado calcula el Ancho de Banda, la Amplitud Máxima, y la Frecuencia de Resonancia, presentando todos estos resultados como salida en una pantalla auxiliar. Además, presenta como salidas las gráficas de Nyquist, de bode de Lazo Abierto, y de Bode de Lazo Cerrado. Todas las gráficas presentadas como salida de estos programas pueden ser escaladas y editadas para una mejor presentación, agregando letreros, cuadrícula o líneas rectas. También tiene dos tipos de cursores que pueden presentar las coordenadas de cualquier punto del área de graficación o

seguir exclusivamente la gráfica. Además, en la parte de simulación tiene la capacidad de graficación múltiple.

En esta tesis se desarrollan , también, programas para el Diseño de Controles Automáticos Continuos Lineales en los cuales se realiza la Compensación para transitorios aplicando controladores PID en la rama directa y compensadores del tipo derivativo en la retroalimentación y para Respuesta en la Frecuencia la compensación es solo en la rama directa y con Redes Compensadoras de Adelanto, de Atraso y de Atrso-Adelanto. Estos programas necesitan como entradas para Diseño en el Dominio del Tiempo la función de transferencia, los parámetros de diseño en el dominio del tiempo la Razón de Amortiguamiento o el % de Sobrepasso, los tiempos transitorios y el % de Error de Estado Estable requeridos, y presentará como resultados en una pantalla auxiliar para la compensación en la rama directa y en la retroalimentación los polos y ceros necesarios para la compensación, los transitorios requeridos y los transitorios resultantes después de la compensación. Además, genera una nueva función de transferencia que incluye la nueva ganancia y los polos y ceros de la compensación que podrá trabajarse para la Simulación o el Analisis y obtener todos los resultados y ventajas de ellos.

En la parte de diseño en el dominio de la frecuencia se necesita como entradas la función de transferencia, el Margen de Fase y la Frecuencia de Resonancia requeridas da sugerencias para la compensación con Red de Adelanto, de Atraso, o de Atrso-Adelanto y dá libertad al usuario de utilizar la que el juzgue conveniente. Como resultados presenta en una pantalla auxiliar los polos y ceros agregados para la compensación, el margen de fase y la frecuencia de resonancia requeridas y los nuevos Margenes de Fase y de Ganancia, la Frecuencia de Cruce, el Ancho de Banda, la Amplitud Máxima de Resonancia y la Frecuencia de Resonancia. Además, genera una nueva funcion de transferencia que incluye los polos y ceros y el cambio de ganancia requeridos en la compensación que podrá trabajarse para la Simulacion o el Analisis y obtener todos los resultados y ventajas de ellas.

Los programas desarrollados en esta tesis utilizan técnicas de programación donde se manejan la programación por eventos y el concepto de componentes reutilizables en un lenguaje de programación moderno el Visual Basic.

1.4 Contenido de la Tesis

Este trabajo reportado en forma de tesis consta de ocho capítulos y cuatro apéndices. En el primer capítulo se presenta la tesis y se establecen los objetivos y una justificación plena para el desarrollo del trabajo. En el segundo capítulo, se presentan las técnicas básicas para representar sistemas de control mediante variables de estado; con el fin de desarrollar los algoritmos necesarios para elaborar un programa para computadora digital que simule el comportamiento en el tiempo de sistemas de control automático continuos lineal, de una o de varias entradas, de una o de varias salidas.

En los capítulos tres y cinco se presentan las técnicas necesarias para el desarrollo de un programa de computadora digital que analiza el comportamiento en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia. En el capítulo tres se presentan las técnicas para análisis en el dominio del tiempo, utilizando el *Lugar Geométrico de las Raíces*. Se desarrollan técnicas para la obtención de los parámetros ω_n , K y δ para calcular el % de sobrepaso, los tiempos de respuesta T_r , subida T_p , alcance máximo T_a , y asentamiento T_s , y el por ciento de error de estado estable $\%E_{ss}$, así como los algoritmos necesarios para diseñar el programa de computadora digital que construye el Lugar Geométrico de las Raíces, el cual obtiene los parámetros y realiza todos los cálculos requeridos. En el capítulo cinco se estudian técnicas en el dominio de la frecuencia como: el criterio de Nyquist y los diagramas de Bode de donde se obtiene el margen de ganancia MG , el margen de fase MF , la frecuencia de cruce ω_c , la frecuencia de resonancia ω_r , el máximo de resonancia M_{max} , así como el ancho de banda de operación. En este capítulo se desarrollan los algoritmos necesarios para la elaboración de un programa que construye los diagramas y obtiene los parámetros.

En los capítulos cuatro y seis se estudian técnicas que permiten realizar un programa para computadora digital que diseña un sistema de control automático lineal y que cumple con los requerimientos, tanto en el dominio del tiempo, como del dominio de la frecuencia.

En el capítulo cuatro se estudian técnicas y algoritmos para elaborar un programa digital que compense en la rama directa, y en la rama de retroalimentación, con ayuda del lugar geométrico de las raíces.

En el capítulo seis se proponen los algoritmos necesarios para el diseño en el dominio de la frecuencia, aplicando en la rama directa esquemas compensadores de adelanto, atraso, y atraso-adelanto necesarias para obtener el margen de fase MF alrededor de los 45° , así como una frecuencia de resonancia ω_c , un máximo de resonancia M_{max} , y ancho de banda apropiados a los requerimientos de operación del sistema.

En el capítulo siete se hace una síntesis que presenta una metodología para lograr el análisis y el diseño completo para un sistema de control automático lineal. Se expone la forma en que se relacionan los diversos programas para formar un Paquete que simula, analiza y diseña los sistemas de control.

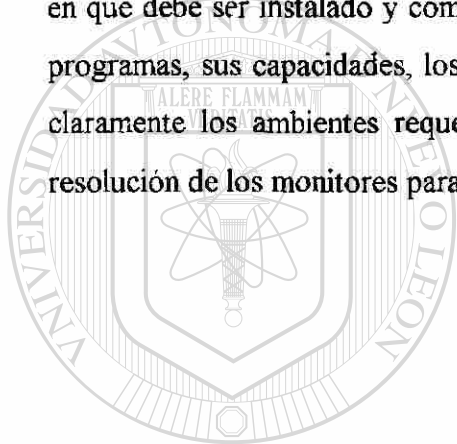
En el capítulo ocho se presentan las conclusiones obtenidas por la experiencia y la realización de esta tesis, se establecen recomendaciones y sugerencias para continuar con la materia que es el objeto de esta tesis.

Los apéndices presentan técnicas y procedimientos que son necesarios para comprender esta tesis de una manera mas completa, y se considera que es material auxiliar valioso. En el Apéndice A se presentan los desarrollos que dan sustento matemático a las fórmulas para el cálculo del % de sobrepaso, los tiempos T_I , T_P , T_a , T_s y el $\%e_{ss}$, así como la forma en que se utilizan.

En el Apéndice B se trata en forma básica la naturaleza de los modos de control, los controladores comerciales y las redes de compensación. Se hace una comparación matemática donde se resalta las relaciones, ventajas funcionales y aplicaciones.

En el Apéndice C se aborda el método de Lin-Bairstow para obtener las raíces de una ecuación de grado N . Se presenta el método, su fundamentación matemática y el desarrollo del algoritmo para formar el código de un programa de computadora digital que obtiene las N raíces de un polinomio de grado N . Además se presenta un estudio comparativo con otros métodos.

En el Apéndice D, “Manual de Instalación y Operación del Paquete de Programas para Simulación, Análisis, y Diseño de Sistemas de Control Automático Continuo Lineal”, se listan las características de los equipos de computo en que puede funcionar este paquete, la forma en que debe ser instalado y cómo debe ser operado. Se muestra también el contenido de los programas, sus capacidades, los datos requeridos y los resultados que arrojan. Se establece claramente los ambientes requeridos en la computadora, las impresoras que soporta y la resolución de los monitores para el ajuste de las gráficas.



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

CAPITULO 2

SIMULACION EN EL TIEMPO DE SISTEMAS DE CONTROL AUTOMATICO EN COMPUTADORA DIGITAL

Los modelos matemáticos y la simulación en el tiempo por computadora son indispensables en el análisis y diseño de los sistemas de control para procesos lineales complejos, así como en sistemas con procesos no lineales aunque no sean tan complicados. Con las técnicas de simulación en el tiempo se complementaran las herramientas de análisis y diseño propuestas en esta tesis.

2.1 Introducción

Una pregunta que surge en este punto es: ¿Cuándo se debe simular en el tiempo en computadora digital al diseñar un sistema de control?. En la toma de tal decisión influyen varios factores, primeramente se debe considerar qué tan crítico es el desempeño del sistema de control para la operación segura y confiable del proceso; por ejemplo, el sistema de control para un gran compresor centrifugo es lo suficientemente crítico como para obtener la simulación de su respuesta en el tiempo; en cambio, para un controlador sencillo, de nivel puede no ameritarse. La segunda consideración es la confiabilidad del diseño del sistema de control, lo cual generalmente depende de la experiencia y la familiaridad que se tenga con una aplicación particular; por ejemplo, un ingeniero con experiencia puede no requerir el simular en el tiempo el control de temperatura para un tanque de reacción con agitación continua; en cambio, el mismo proyecto de simulación en el tiempo puede ser bastante interesante e informativo para un estudiante de facultad en su primer curso de control. La tercera consideración es el tiempo y esfuerzo computacional que se requiere para obtener los resultados de la simulación en el tiempo, que puede tomar desde algunas horas, para un proceso relativamente simple, hasta varios meses/hombre, si se trata de un proceso complejo que se simula por primera vez. Entre otras consideraciones importantes se debe incluir la disponibilidad de recursos de computo, personal con experiencia en el modelado, la simulación y el análisis, así como el tener los datos suficientes del proceso para obtener la simulación.

Los tres pasos principales para obtener la respuesta en el tiempo por computadora son:

1. Desarrollo del Modelo Matemático del proceso, incluyendo su sistema de control
2. Solución de las ecuaciones del modelo
3. Análisis de resultados

En este trabajo de tesis se supone que están disponibles o se pueden deducir los modelos matemáticos de los sistemas a estudiar y que se conocen las técnicas para solucionar las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento dinámico del proceso y su control. Sin embargo, se hace uso del espacio de estado que permite resolver por computadora un sistema de N ecuaciones diferenciales simultáneas de primer orden, en lugar de una ecuación diferencial de orden N ; facilitando así la obtención numérica de la respuesta en el tiempo.

2.2 Variables de Estado

En el análisis de un sistema dinámico vía la formulación de Variables de Estado, el sistema se caracteriza por un conjunto de ecuaciones diferenciales o de diferencias de primer orden. De esta forma el análisis y el diseño pueden ser efectuados al resolver un conjunto de ecuaciones de primer orden, lo cual simplifica el problema y presenta ventajas al utilizar una computadora digital.

¿Qué se entiende por el estado de un sistema?, el estado de un sistema está definido como el conjunto mínimo de variables, x_1, x_2, \dots, x_n , especificadas para un tiempo $t = t_0$, y que acompañadas con las entradas, dadas por u_1, u_2, \dots, u_m , determinan el estado del sistema para cualquier tiempo futuro $t \geq t_0$. Físicamente, significa que el conjunto de variables de estado $x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)$ define el estado inicial del sistema basado en su historia pasada. Además, el conjunto de variables de estado x_1, x_2, \dots, x_n caracteriza el comportamiento futuro del sistema una vez que se han especificado las entradas, para un tiempo $t \geq t_0$, y conocidos sus estados iniciales. Se puede pensar en el estado de un sistema como el conjunto de variables que describe el comportamiento pasado, presente y futuro del sistema. Es necesario recalcar que las variables de estado no necesariamente corresponden a salidas del sistema y que pueden ser o no medibles, observables o controlables.

La formulación de espacio de estado tiene las siguientes ventajas:

1. La solución de un conjunto de ecuaciones diferenciales o de diferencias de primer orden es mucho más sencilla de calcular que para la ecuación diferencial o de diferencias equivalente de alto orden.
2. El concepto de espacio de estado generalmente simplifica la notación matemática, ya que permite la notación matricial.
3. El poder incluir fácilmente las condiciones iniciales de un sistema en el análisis de sistemas de control, lo cual se dificulta utilizando las técnicas convencionales.
4. La formulación de espacio de estado puede ser aplicada a la solución de sistemas no lineales, variantes en el tiempo, estocásticos o de datos muestreados.
5. La representación de espacio de estado ayuda por sí misma a la síntesis del sistema utilizando técnicas de control moderno.

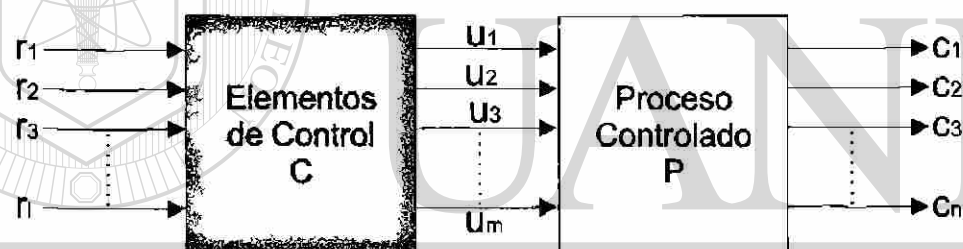


Fig. 2.1 Diagrama de bloques para el problema de Control.

Se hace uso de la Figura 2.1 para establecer la nomenclatura en la formulación de espacio de estado. Este sistema de lazo abierto se usa para introducir las características del problema de control. Brevemente, el problema puede tomar la forma de control óptimo si está ligado con la determinación de elementos del control **C** para que el proceso controlado **P** funcione óptimamente con respecto a un criterio **S** seleccionado, para las entradas anticipadas: r_1, r_2, \dots, r_l y sujeto a limitaciones en las entradas u_1, u_2, \dots, u_m . Inicialmente, se enfoca la atención sobre el proceso controlado.

Se supone que **u** y **c** son funciones del tiempo, y que $u_i(t)$ y $c_j(t)$ son usados para representar los valores de u_i y c_j en un tiempo dado t . Es conveniente representar las entradas u_1, u_2, \dots, u_m por medio de un *vector de entradas u*, donde:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

y las salidas c_1, c_2, \dots, c_n por un *vector de salidas* \mathbf{c} , donde:

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

La *entrada* al proceso \mathbf{P} se refiere al conjunto de todas las funciones posibles de entrada \mathbf{u} , que pueden ser aplicadas. El *espacio de valores de entrada* de \mathbf{P} se refiere al conjunto de todos los valores posibles que el vector \mathbf{u} puede tener en tiempo. El *estado inicial* de \mathbf{P} se refiere a las condiciones iniciales en el tiempo t_0 .

La salida del proceso \mathbf{P} , la cual es nombrada \mathbf{c} , es una función de la entrada \mathbf{u} y de las condiciones iniciales de \mathbf{P} . Por ejemplo, si se supone que la entrada \mathbf{u} es aplicada a \mathbf{P} desde t_0 hasta T (donde $T \geq t_0$), entonces el intervalo de observación para \mathbf{u} y \mathbf{c} sobre el intervalo (t_0, T) es llamado $\mathbf{u}(t_0, T)$ y $\mathbf{c}(t_0, T)$. Además, el estado inicial de \mathbf{P} es nombrado $\mathbf{p}(t_0)$, entonces el valor de $\mathbf{c}(t_0, T)$ depende de $\mathbf{u}(t_0, T)$ y $\mathbf{p}(t_0)$.

¿Cómo puede asociarse un vector de estado con el proceso controlado, y luego cómo encontrar las ecuaciones de estado para \mathbf{P} ? Primeramente, asociando \mathbf{P} a un vector $\mathbf{x}(t_0)$, se puede determinar un conjunto de ecuaciones que cumplan con \mathbf{x} , \mathbf{u} y \mathbf{c} . Si el conjunto de ecuaciones resultante tiene la propiedad de que \mathbf{x} y \mathbf{c} son determinadas únicamente por $\mathbf{x}(t_0)$ y $\mathbf{u}(t_0, T)$, entonces \mathbf{x} es un vector de estado de \mathbf{P} .

2.3 Función de Transferencia y Variables de Estado

Considere la ecuación para el sistema ilustrado en la Figura 2.1. Se supone en esta derivación que **P** es un sistema lineal invariante en el tiempo caracterizado por la siguiente ecuación diferencial:

$$A_n \frac{d^n c}{dt^n} + A_{n-1} \frac{d^{n-1} c}{dt^{n-1}} + \dots + A_0 c = u \quad (2.3)$$

donde todos los coeficientes son constantes y $A_n \neq 0$. Aquí $c^{(n)}$ se refiere a la n -ésima derivada de c con respecto al tiempo, $c^{(n-1)}$ es la $(n-1)$ -ésima derivada, etc, además se supone que el tiempo inicial t_0 es cero. Tomando la Transformada de Laplace de (2.3) se tiene:

$$\begin{aligned} (A_n s^n + A_{n-1} s^{n-1} + \dots + A_0) C(s) = U(s) + \\ + A_n c^{(n-1)}(0) + (A_n s + A_{n-1}) c^{(n-2)}(0) + \dots + (A_n s^{n-1} + \dots + A_1) c(0) \end{aligned} \quad (2.4)$$

donde $c^{(m)}(0)$ representa el valor inicial de $c^{(m)}$ en $t_0 = 0$. Reordenando (2.4) se obtiene la siguiente relación:

$$C(s) = \frac{U(s) + A_n c^{(n-1)}(0) + (A_n s + A_{n-1}) c^{(n-2)}(0) + \dots + (A_n s^{n-1} + \dots + A_1) c(0)}{E(s)} \quad (2.5)$$

donde

$$E(s) = A_n s^n + A_{n-1} s^{n-1} + \dots + A_0 \quad (2.6)$$

Esta ecuación establece que la Transformada de Laplace de la salida $C(s)$, y por lo tanto la salida en el dominio de tiempo $c(t)$ [para $t > 0$], está determinada por la entrada u_0 (para $t > 0$) y los valores de la salida c y todas sus derivadas hasta el orden $(n-1)$ en $t = 0$. El estado inicial $\mathbf{x}(0)$ puede estar representado por el siguiente vector:

$$\mathbf{x}(0) = (c(0), \dots, c^{(n-1)}(0)) \quad (2.7)$$

Además, el vector $\mathbf{x}(t)$ puede representarse como

$$\mathbf{x}(t) = (c(t), \dots, c^{(n-1)}(t)) \quad (2.8)$$

esto demuestra que (2.8) determina un posible vector de estado para P .

Una descripción matemática de las relaciones dinámicas entre entradas y salidas de un proceso controlado se puede derivar de (2.8). Esta ecuación puede ser reescrita mediante el siguiente conjunto de ecuaciones lineales:

$$x_1 = c, x_2 = \dot{c}, \dots, x_n = c^{(n-1)} \quad (2.9)$$

Además, (2.9) puede ser expresada por (2.10) y este conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden es representado en forma matricial por (2.11).

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = x_3, \dots, \dot{x}_n = c^{(n)} = \frac{1}{A_n}(u - A_0 x_1 - \dots - A_{n-1} x_n) \quad (2.10)$$

$$\dot{x} = Px + Bu \quad (2.11)$$

$$c = Lx \quad (2.12)$$

donde:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{A_0}{A_n} & -\frac{A_1}{A_n} & -\frac{A_2}{A_n} & \dots & -\frac{A_{n-1}}{A_n} \end{bmatrix} \quad (2.13) \textcircled{R}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{1}{A_n} \end{bmatrix}, \quad L = [1, 0, \dots, 0]$$

La representación dada por (2.11) se conoce como la forma canónica variable-fase y la matriz \mathbf{P} es llamada matriz acompañante. La solución de (2.11), $\mathbf{x}(t)$, está únicamente determinada por $\mathbf{x}(0)$ y $\mathbf{u}(0,T)$. Aquí se muestra que esta es una condición necesaria y suficiente para calificar $\mathbf{x}(t)$ como un vector de estado para \mathbf{P} . \mathbf{P} puede tener infinitas representaciones con vectores de estado muy diferentes. Con (2.11) y (2.12) se tiene las ecuaciones de estado y de salida para sistemas lineales invariantes en el tiempo. Las ecuaciones de estado y de salida de un sistema no lineal, variante en el tiempo, en general están dadas por la (2.14) y (2.15) y en estas ecuaciones, \mathbf{u} es un vector de m elementos, \mathbf{x} es un vector de n elementos, y \mathbf{c} es un vector de p elementos.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad (2.14)$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (2.15)$$

Una descripción en el tiempo de un proceso controlado se puede obtener resolviendo la ecuación diferencial (2.11) o la forma (2.14). La solución está representada como:

$$\mathbf{x}(t) = \phi_{\mu}(t, \mathbf{x}_0, t_0) \quad (2.16)$$

La ecuación anterior se interpreta como el valor de \mathbf{x} en un tiempo t , después de iniciar en un tiempo t_0 con valores de estado \mathbf{x}_0 , y gobernado el proceso por una entrada de control \mathbf{u} , definida para el intervalo $t_0 \leq t \leq T$.

2.3.1 Ejemplos

En esta sección se presentará un ejemplo de cómo convertir la dinámica de un sistema, en una de sus múltiples formas, a la forma de variables de estado.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_m), \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_m) \end{aligned} \quad (2.17)$$

o en la forma vectorial de espacio de estado:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (2.18)$$

La forma lineal invariante en el tiempo de (2.17) y (2.18) están representadas como sigue:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_{11}x_1 + \dots + A_{1n}x_n + B_{11}u_1 + \dots + B_{1m}u_m \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_n &= A_{n1}x_1 + \dots + A_{nn}x_n + B_{n1}u_1 + \dots + B_{nm}u_m \\ \text{y} \\ \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \end{aligned} \quad (2.20)$$

En (2.20), \mathbf{x} es una matriz columna (vector) cuyos elementos son x_1, \dots, x_n ; \mathbf{u} es una matriz columna cuyos componentes son u_1, \dots, u_m ; \mathbf{P} es una matriz $n \times n$ cuyos elementos son A_{ij} y \mathbf{B} es una matriz $n \times m$ cuyos elementos son B_{ij} .

Ejemplo 1.- Supongamos un sistema cuya función de transferencia está dada por:

$$P(s) = \frac{C(s)}{U(s)} = \frac{5}{s^3 + 8s^2 + 9s + 2} \quad (2.21)$$

donde la ecuación diferencial correspondiente está dada por:

$$\frac{d^3c}{dt^3} + 8\frac{d^2c}{dt^2} + 9\frac{dc}{dt} + 2c = 5u \quad (2.22)$$

Definiendo las variables de estado:

$$x_1 = c, \quad x_2 = \dot{c}, \quad x_3 = \ddot{c}, \quad (2.23)$$

ahora el sistema puede ser descrito por las siguientes tres ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\dot{x}_1 = x_2 = \dot{c}, \quad (2.24)$$

$$\dot{x}_2 = x_3 = \ddot{c}, \quad (2.25)$$

$$\dot{x}_3 = -2x_1 - 9x_2 - 8x_3 + 5u \quad (2.26)$$

por lo tanto, el sistema puede escribirse en forma vectorial de la siguiente manera:

$$\dot{x} = Px + Bu \quad (2.27)$$

$$e = Lx \quad (2.28)$$

donde

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -9 & -8 \end{bmatrix}, \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

$$u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2.- Si se tiene un sistema mecánico al que se le aplica una fuerza, como en la Figura 2.2. Al sistema se le aplica una fuerza $f(t)$ el cual consiste de una masa, un resorte, y un amortiguador, la cual a su vez se aplica a otro sistema masa, resorte, amortiguador. La masa M_2 se desplaza una distancia $y_2(t)$, y la masa M_1 se desplaza una distancia $y_1(t)$. Para aplicar las leyes de Newton al sistema, es conveniente separar el sistema mecánico en un conjunto de diagramas de cuerpo libre, como se ilustra en la Figura 2.3. Las ecuaciones de Newton para este sistema resultan ser las siguientes:

$$f(t) = M_2 \frac{d^2 y_2(t)}{dt^2} + B_2 \left[\frac{dy_2(t)}{dt} - \frac{dy_1(t)}{dt} \right] + K_2 [y_2(t) - y_1(t)] \quad (2.30)$$

$$0 = B_2 \left[\frac{dy_2(t)}{dt} - \frac{dy_1(t)}{dt} \right] + K_2 [y_2(t) - y_1(t)] - M_1 \frac{dy_1(t)}{dt} - B_1 \frac{dy_1(t)}{dt} - K_1 y_1(t) \quad (2.31)$$

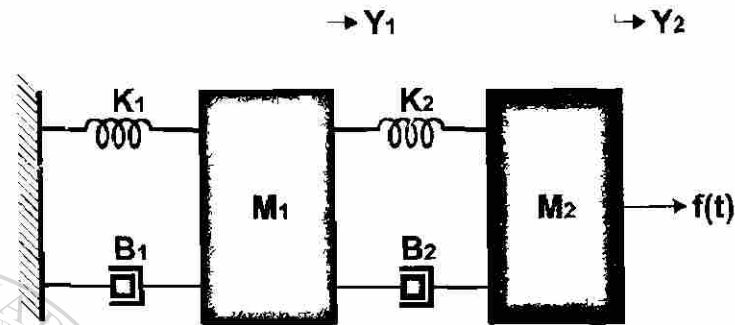


Fig. 2.2. Sistema Mecánico masa, resorte y amortiguador.

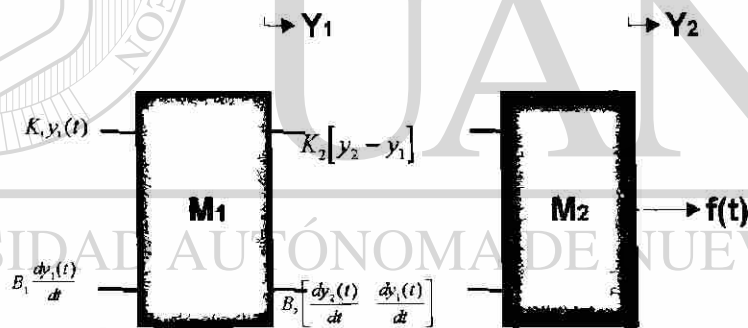


Fig. 2.3. Diagrama de cuerpo libre del sistema mecánico.

Estas dos ecuaciones diferenciales de segundo orden se pueden transformar en cuatro ecuaciones diferenciales de primer orden, definiendo:

$$x_1 = y_1(t) \quad (2.32)$$

$$x_2 = y_2(t) \quad (2.33)$$

$$x_3 = \frac{dy_1(t)}{dt} \quad (2.34)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{dy_2(t)}{dt} \quad (2.35)$$

de manera que las ecuaciones de estado están dadas por:

$$\dot{x}_1 = x_3 \quad (2.36)$$

$$\dot{x}_2 = x_4 \quad (2.37)$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{1}{M_1}(K_1 + K_2)x_1 + \frac{K_2}{M_1}x_2 - \frac{1}{M_1}(B_1 + B_2)x_3 + \frac{B_2}{M_1}x_4 \quad (2.38)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{K_2}{M_2}x_1 - \frac{K_2}{M_2}x_2 + \frac{B_2}{M_2}x_3 - \frac{B_2}{M_2}x_4 + \frac{f(t)}{M_2} \quad (2.39)$$

y en forma vectorial estas ecuaciones se convierten en:

$$\dot{x} = Px + Br \quad (2.40)$$

$$y = Lx \quad (2.41)$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

donde:

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{M_1}(K_1 + K_2) & \frac{K_2}{M_1} & -\frac{1}{M_1}(B_1 + B_2) & \frac{B_2}{M_1} \\ \frac{K_2}{M_2} & -\frac{K_2}{M_2} & \frac{B_2}{M_2} & -\frac{B_2}{M_2} \end{bmatrix}$$

(2.42)

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \hline M_2 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad r = f(t), \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

2.4 Diagrama de Variables de Estado

El diagrama de variables de estado provee una representación física que es útil en la comprensión del concepto de espacio de estado. Además, se pueden obtener por inspección del diagrama mismo, las ecuaciones diferenciales que relacionan las variables de estado. Un diagrama de variables de estado consta de integradores, dispositivos sumadores, y amplificadores. Las salidas de cada integrador proporcionan las variables de estado. Se observa que el diagrama de variables de estado es de la misma forma que el diagrama de simulación en una computadora analógica.

Ejemplo 3.- Para la determinación del diagrama de variables de estado, consideremos un sistema cuya función de transferencia está dada por (2.43) y si se divide numerador y denominador por s^3 , se obtiene (2.44).

$$P(s) = \frac{C(s)}{U(s)} = \frac{s^2 + 4s + 1}{s^3 + 9s^2 + 8s} \quad (2.43)$$

$$P(s) = \frac{C(s)}{U(s)} = \frac{s^{-1} + 4s^{-2} + s^{-3}}{1 + 9s^{-1} + 8s^{-2}} \quad (2.44)$$

y definiendo

$$E(s) = \frac{U(s)}{1 + 9s^{-1} + 8s^{-2}} \quad (2.45)$$

así que (2.44) puede ser escrita como:

$$C(s) = (s^{-1} + 4s^{-2} + s^{-3})E(s) \quad (2.46)$$

y de (2.46), además de la relación siguiente:

$$E(s) = U(s) - 9s^{-1}E(s) - 8s^{-2}E(s) \quad (2.47)$$

se puede obtener el diagrama de variables de estado, como se muestra en la Figura 2.4. Las variables de estado están definidas en el diagrama como x_1 , x_2 , y x_3 . También, se puede obtener por medio de la Figura 2.5 la ecuación diferencial que relaciona las variables de estado.

Del diagrama, las ecuaciones diferenciales para las variables de estado son:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (2.48)$$

$$\dot{x}_2 = x_3 \quad (2.49)$$

$$\dot{x}_3 = u - 8x_2 - 9x_3 \quad (2.50)$$

Por lo tanto, el sistema completo se puede describir en forma matricial por:

$$\dot{\mathbf{x}} = P\mathbf{x} + Bu \quad (2.51)$$

$$c = Lx \quad (2.52)$$

donde:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & -9 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2.53)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix}, \quad L = [1 \quad 4 \quad 1]$$

La salida $c(t)$ se puede obtener por la combinación lineal de las variables de estado como se muestra:

$$c(t) = x_1(t) + 4x_2(t) + x_3(t) \tag{2.54}$$

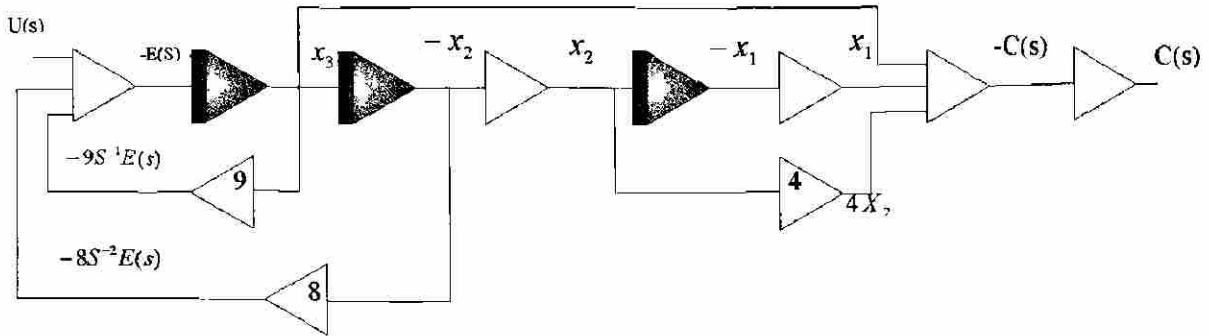


Fig. 2.4 Diagrama de variables de estado para un sistema, dado P(s).

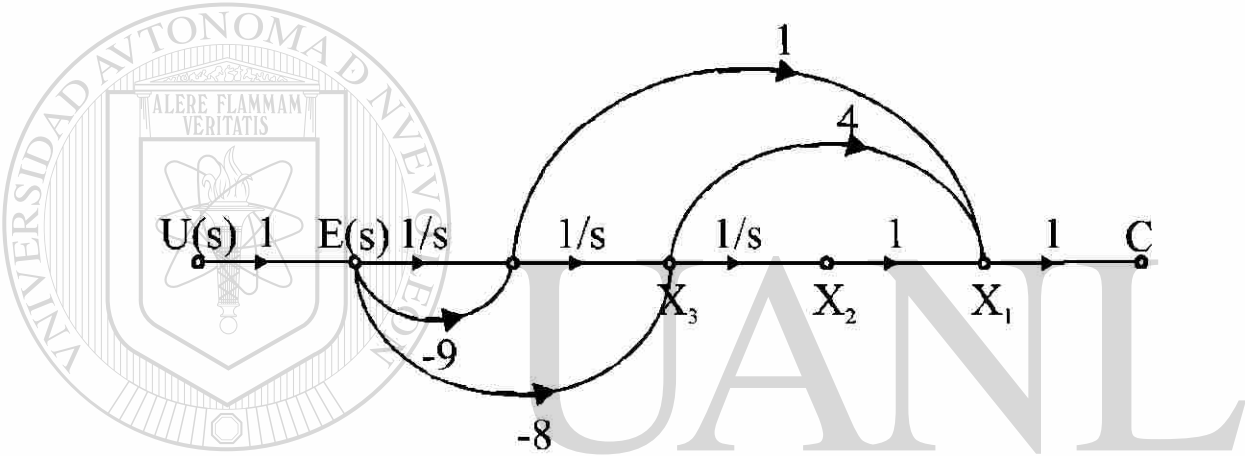


Fig. 2.5 Diagrama de flujo de señal para el diagrama de variables de estado.

2.5 La Matriz de Transición

Para definir la Matriz de Transición de un sistema, se puede considerar la Transformada de Laplace en la forma general de la ecuación de estado:

$$\dot{X} = PX + BU \tag{2.55}$$

la Transformada de Laplace de (2.55) se tiene como:

$$s X(s) - X(0^+) = P X(s) + BU(s) \tag{2.56}$$

donde X(S) es la Transformada de Laplace de X(t) y U(S) es la Transformada de Laplace de U(t). Resolviendo para X(S):

$$X(s) = [sI - P]^{-1} X(0^+) + [sI - P]^{-1} BU(s) \quad (2.57)$$

La Transformada Inversa de Laplace de (2.57) está dada por:

$$X(t) = \Phi(t)X(0^+) + \int_0^t (\Phi(t - \tau)BU(\tau)d\tau \quad (2.58)$$

donde

$$\Phi(t) = \ell^{-1} \left\{ [sI - P]^{-1} \right\} \quad (2.59)$$

y el segundo término en el lado derecho de (2.58) es la llamada Integral de Convolución. La ecuación (2.58) es conocida como la ecuación de transición de estado del sistema. Cuando la entrada $U(t) = 0$, (2.58) se reduce a:

$$X(t) = \Phi(t) X(0^+) \quad (2.60)$$

la matriz $\Phi(t)$ en (2.59) es la Matriz de Transición, ya que describe el paso del estado del sistema desde un tiempo $t_0 = 0$, al estado en cualquier tiempo t subsecuente. La Matriz de Transición tiene las siguientes propiedades:

$$\Phi(0) = I \quad (2.61)$$

$$\Phi(t_2 - t_0) = \Phi(t_2 - t_1) \Phi(t_1 - t_0) \quad (2.62)$$

$$\Phi(t + \tau) = \Phi(t) \Phi(\tau) \quad (2.63)$$

$$\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t) \quad (2.64)$$

A menudo es necesario un tiempo inicial diferente de cero, establecido en t_0 , y para esto (2.58) puede ser modificada permitiendo que $t = t_0$. Resolviendo para $X(t_0^+)$, se obtiene la siguiente expresión:

$$X(t_0^+) = \Phi^{-1}(t_0)X(t_0) - \Phi^{-1}(t_0) \int_0^{t_0} \Phi(t_0 - \tau)BU(\tau)d\tau \quad (2.65)$$

y usando (2.62), se reescribe como:

$$X(0^+) = \Phi(t_0)X(t_0) - \Phi(-t_0) \int_0^{t_0} \Phi(t_0 - \tau)BU(\tau)d\tau \quad (2.66)$$

substituyendo (2.66) en (2.68) se obtiene:

$$X(t) = \Phi(t)\Phi(-t_0)X(t_0) - \Phi(t)\Phi(-t_0) \int_0^{t_0} \Phi(t_0 - \tau)BU(\tau)d\tau + \int_0^t \Phi(t - \tau)BU(\tau)d\tau \quad (2.67)$$

usando (2.62), (2-67)se puede reducir a:

$$X(t) = \Phi(t-t_0)X(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t - \tau)BU(\tau)d\tau \quad (2.68)$$

que es la ecuación de transición de estado para el sistema, cuando $t \geq t_0$.

Ejemplo 4.-La Matriz de Transición se puede obtener de la definición, pero también puede deducirse del Diagrama de Variables de Estado. Como un ejemplo de esta técnica, considere un sistema definido por la siguiente ecuación diferencial:

$$\ddot{C} + 4\dot{C} + 3C(t) = R(t) \quad (2.69)$$

la función de transferencia del sistema anterior queda:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^2 + 4s + 3} \quad (2.70)$$

dividiendo numerador y denominador por s^2 , se obtiene:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{s^{-2}}{1 + 4s^{-1} + 3s^{-2}} \quad (2.71)$$

y definiendo:

$$E(s) = \frac{R(s)}{1 + 4s^{-1} + 3s^{-2}} \quad (2.72)$$

puede reescribirse como:

$$C(s) = s^{-2}E(s) \quad (2.73)$$

Sea un sistema descrito por la ecuación diferencial:

$$\ddot{C} + 2\dot{C} + C = \dot{R} + R \quad (2.82)$$

Se desea obtener la salida $C(t)$, teniendo como entrada a $R(t)$:

$$R(t) = \text{sen } t \quad (2.83)$$

y las condiciones iniciales son $X_1(0) = 1$ y $X_2(0) = 0$. La técnica empleada es la de determinar la matriz de transición con (2.59) y entonces evaluar (2.58) para obtener $X(t)$. La salida $C(t)$ se obtiene por medio de:

$$C(t) = L X \quad (2.84)$$

si las variables de estado están definidas por:

$$X_1 = C \quad X_2 = \dot{C} \quad (2.85)$$

y U por

$$U = \dot{R} + R \quad (2.86)$$

entonces, el sistema puede ser descrito por el siguiente par de ecuaciones diferenciales de primer orden.

$$\dot{X}_1 = X_2 \quad (2.87)$$

$$\dot{X}_2 = U - 2X_2 - X_1 \quad (2.88)$$

Por tanto, el sistema puede reescribirse como:

$$\dot{X} = PX + BU \quad (2.89)$$

donde:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \quad \dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} \quad (2.90)$$

La Matriz de Transición definida por (2.59), puede ser obtenida, resultando en:

$$[sI - P] = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s+2 \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

Por definición [1] pag. 53, se tiene que:

$$B^{-1} = \frac{\text{adj } B}{|B|} \quad (2.92)$$

por lo tanto:

$$[sI - P]^{-1} = \frac{\text{adj}[sI - P]}{|sI - P|} = \frac{\begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix}}{(s+2)^2} = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{(s+2)^2} & \frac{1}{(s+2)^2} \\ -\frac{1}{(s+2)^2} & \frac{s}{(s+2)^2} \end{bmatrix} \quad (2.93)$$

y la Matriz de Transición, definida por (2.59), es la Transformada Inversa de Laplace de (2.93).

$$\Phi(t) = \ell^{-1} [sI - P]^{-1} = \begin{bmatrix} e^{-t}(t+1) & te^{-t} \\ te^{-t} & e^{-t}(1-t) \end{bmatrix} \quad (2.94)$$

La solución completa para la salida puede ser obtenida de (2.58) y (2.84) como se muestra:

$$X(t) = \Phi(t)X(0^+) + \int_0^t \Phi(t-\tau)BU(\tau)d\tau \quad (2.95)$$

$$C(t) = LX(t) \quad (2.96)$$

substituyendo $\Phi(t)$ de (2.95) en (2.96) se la salida en términos de la Matriz de Transición:

$$C(t) = L\Phi(t)X(0^+) + \int_0^t L\Phi(t-\tau)BU(\tau)d\tau \quad (2.97)$$

donde $\Phi(t)$ está dada por (2.94). Por inspección se tiene para este sistema que:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad X(0^+) = \begin{bmatrix} X_1(0) \\ X_2(0) \end{bmatrix} \quad (2.98)$$

con una función de entrada $U(\tau)$ que se obtiene como discute a continuación.

$$U(\tau) = R(\tau) + \dot{R}(\tau) = \text{sen } \tau + \cos \tau \quad (2.99)$$

substituyendo estos valores en (2.97), se llega a la siguiente expresión:

$$C(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t}(t+1) & te^{-t} \\ -te^{-t} & e^{-t}(1-t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)}(t-\tau-1) & (t-\tau)e^{-(t-\tau)} \\ -(t-\tau)e^{-(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)}(1-t+\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (\text{sen } \tau + \cos \tau) d\tau \quad (2.100)$$

y simplificando:

$$C(t) = e^{-t}(t+1) + \int_0^t [(t-\tau)e^{-(t-\tau)}] [\text{sen } \tau + \cos \tau] d\tau \quad (2.101)$$

integrando, finalmente la salida está dada por:

$$C(t) = \frac{3}{2}e^{-t} + te^{-t} + \frac{1}{2}\text{sen } t - \frac{1}{2}\text{cos } t \quad (2.102)$$

2.7 Algoritmo para Simulación de respuesta en el tiempo de un Sistema de Control Automático.

La representación y el análisis en espacio de estado de la dinámica de un sistema de control se facilita con el uso de una computadora digital. La técnica involucra la división del eje del tiempo en incrementos lo suficientemente pequeños $t = 0, T, 2T, 3T, \dots$, donde T es el incremento de tiempo Δt . Este incremento debe ser pequeño para obtener la suficiente exactitud en los resultados, sin embargo, los errores de redondeo propios de la computadora pueden limitar qué tan pequeños pueden ser los incrementos.

Para ilustrar el procedimiento sean las siguientes ecuaciones:

$$\dot{x} = Px(t) + Bu(t) \quad (2.103)$$

$$c = Lx \quad (2.104)$$

y por la definición de derivada se tiene:

$$\dot{x}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \quad (2.105)$$

Utilizando esta definición se puede determinar el valor de $x(t)$ cuando t se subdivide en incrementos Δt , así aproximadamente:

$$\dot{x} = \frac{x(t + T) - x(t)}{T} \quad (2.106)$$

substituyendo (2.106) en (2.103), se obtiene:

$$\frac{x(t + T) - x(t)}{T} = Px(t) + Bu(t) \quad (2.107)$$

que puede ser resuelta para $x(t+T)$:

$$x(t + T) = TPx(t) + x(t) + T Bu(t) \quad (2.108)$$

y escrita como:

$$x(t + T) = (TP + I)x(t) + T Bu(t) \quad (2.109)$$

Para generalizar la expresión sea $t = mT$, donde $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ Entonces:

$$x[(m + 1)T] = (TP + I)x(mT) + T Bu(mT) \quad (2.110)$$

y como:

$$c[(m + 1)T] = Lx[(m + 1)T] \quad (2.112)$$

se tiene:

$$c[(m+1)T] = L[(TP + I)x(mT) + TBU(mT)] \quad (2.113)$$

Las ecuaciones (2.110) y (2.113) establecen que el vector de estado y el vector de salidas en el tiempo $(m+1)T$ está basado en los valores de x , y u en un tiempo mT . Esto resulta ser una relación recurrente donde la serie de cálculos son apropiados para realizarse en computadora digital.

2.8 Programa de Computadora Digital para simular en el tiempo un sistema de control.

En esta sección se detalla cómo se desarrolló un programa de computadora digital que obtiene la respuesta en el tiempo y la simulación en el tiempo de Sistemas de Control Automático Continuo Lineal. El programa se realizó en base a algoritmos desarrollados a partir de la formulación de variables de estado, y puede simular sistemas con una entrada y una salida partiendo de la función de transferencia. Para varias entradas y varias salidas se usa la expresión matricial de las ecuaciones de estado.

El programa tiene cuatro opciones:

1. Respuesta en el tiempo de sistemas con una entrada y con una salida.
2. Respuesta en el tiempo de sistemas con varias entradas y varias salidas.
3. Simulación de sistemas con una entrada y con una salida.
4. Simulación de sistemas con varias entradas y varias salidas

Para las cuatro opciones se utiliza el algoritmo de integración aproximado que fue presentado en la sección anterior.

$$X[(m+1)T] = [TP + I] X(mT) + TBU(mT) \quad (2.114)$$

$$C[(m+1)T] = L X[(m+1)T] \quad (2.115)$$

Se usan los valores de los elementos para las matrices P , B y L , los valores del período de muestreo T y el número de muestreos m , así como los valores de todas las entradas y las condiciones iniciales para cada variable de estado. Se obtiene para cada intervalo los valores de las variable de estado y las salida, las cuales se almacenan en un archivo que posteriormente se grafica. El programa necesita iterar para obtener los valores para cada muestreo.

Si la opción que se desea usar es la de respuesta en el tiempo, la gráfica se obtiene instantáneamente sin tomar en cuenta el tiempo real, en cambio si se desea realizar una simulación la gráfica deberá estar sincronizada con el reloj de la computadora para efectuar una graficación en tiempo real.

Cuando se desea obtener la respuesta en el tiempo o la simulación para sistemas con una sola entrada y una sola salida se necesita únicamente la función de transferencia, el período de muestreo T y el tiempo total para la gráfica; ya que de la función de transferencia se puede obtener las matrices P , B y L . Como se trata de funciones de transferencia las condiciones iniciales de las variables de estado serán cero y la entrada se supone un escalón unitario. El número de muestreos m se obtiene dividiendo el tiempo a graficar por el período de muestreo T , con estos datos se aplica el algoritmo de integración y se forma un archivo de respuesta en el tiempo. Posteriormente del archivo se podrá graficar los resultados deseados de acuerdo a la opción seleccionada.

La respuesta en el tiempo o la simulación de sistemas con varias entradas y varias salidas se puede obtener con los algoritmos presentados, pero los datos a alimentar que se requieren como datos son: las matrices P , B y L y los vectores de entradas $u(t)$ y las condiciones iniciales de las variables de estado, $x(0)$. Al igual que el caso anterior se necesita el período de muestreo y el tiempo total para integrar.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



CAPITULO 3

ANALISIS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO DE SISTEMAS DE CONTROL AUTOMATICO CONTINUO LINEAL

3.1 Introducción

La respuesta transitoria de un servosistema depende de la localización de las raíces de la ecuación característica en el plano complejo s . Básicamente, el diseño de servosistemas puede considerarse como un problema de disposición de las raíces de la ecuación característica, tal que el sistema correspondiente tenga un comportamiento acorde con especificaciones prescritas. Una de las especificaciones de funcionamiento más empleadas e importante es el requerimiento de que el sistema sea estable. Intuitivamente, el término *estabilidad* se usa para distinguir dos clases de sistemas: *aceptables e inaceptables*. Desde un punto de vista práctico un sistema estable puede ser útil, mientras que un sistema inestable generalmente se considera no útil, aunque existen excepciones a esta clasificación tan amplia.

En esencia, el análisis de sistemas de control se centra en el estudio de la estabilidad. Primero, se prueba el sistema para determinar *estabilidad absoluta*, o sea, averiguar si es estable o inestable. Si el sistema resulta ser estable, entonces es necesario averiguar en qué grado lo es, y ese grado es una medida de la *estabilidad relativa*. Los parámetros tales como el sobrepaso y el coeficiente de amortiguamiento descritos en el Apéndice A, en relación con la respuesta transitoria, proporcionas información sobre la estabilidad relativa del sistema lineal en el dominio del tiempo.

De los ejemplos del Apéndice A, la relación entre la respuesta transitoria y las raíces de la ecuación característica puede resumirse como sigue:

1. Cuando todas las raíces de la ecuación característica se encuentran en el semiplano izquierdo del plano complejo s , las respuestas del sistema a entradas, que anulan las condiciones iniciales, disminuirán a cero al tender el tiempo a infinito.
2. Si uno o más pares de raíces simples están situadas sobre el eje imaginario, pero sin ninguna raíz en la región real positiva del plano s , las respuestas serán oscilaciones senoidales no amortiguadas.
3. Si hay una o más raíces situadas en el semiplano derecho del plano complejo s , las respuestas aumentarán con el tiempo.

Generalmente, en la teoría de sistemas lineales las dos últimas categorías se definen como condiciones *inestables*.

3.2 Estabilidad de un Sistema Invariante en el tiempo

Se puede definir la estabilidad de un sistema invariante en el tiempo de varias maneras.

Estrictamente, en los sistemas lineales la estabilidad es independiente de las excitaciones de entrada. Sin embargo, una definición generalizada de estabilidad es la siguiente:

Se dice que un sistema es estable si su salida es acotada para cualquier entrada limitada.

En otras palabras, si $c(t)$ es la salida y $r(t)$ la entrada de un sistema lineal, entonces, si:

$$|r(t)| \leq N < \infty \text{ para } t \geq t_0 \quad (3.1)$$

$$|c(t)| \leq M < \infty \text{ para } t \geq t_0 \quad (3.2)$$

Existen, sin embargo, excepciones a la definición anterior. Un derivador da lugar a una respuesta al impulso para $t = t_0$ cuando está sujeto a una entrada en escalón unitario $u(t - t_0)$.

En este caso la entrada es finita pero la salida no lo es, puesto que se sabe que un impulso tiene amplitud infinita. También al aplicar $u(t - t_0)$ a un integrador, la salida es una función rampa unitaria, que para $(t - t_0)$ no es finita. Sin embargo, tanto el derivador como el integrador se consideran sistemas estables, puesto que ambos son sistemas útiles.

La definición de estabilidad dada anteriormente puede conducir a distintas interpretaciones del criterio de estabilidad de sistemas lineales invariantes en el tiempo. En seguida se estudian.

3.2.1 Definición de estabilidad según la Respuesta al Impulso

El concepto de estabilidad presentado en el último apartado lleva a una condición importante sobre la respuesta al impulso de un sistema estable.

Dado un sistema lineal con una entrada, $r(t)$, y una salida, $c(t)$, se tiene [1, pag. 368]:

$$c(t) = \int_0^{\infty} r(t - \tau)g(\tau)d\tau \quad (3.3)$$

donde $g(\tau)$ es la respuesta al impulso del sistema.

Tomando los valores absolutos en ambos miembros de (3-3), resulta en:

$$|c(t)| = \left| \int_0^{\infty} r(t - \tau)g(\tau)d\tau \right| \quad (3.4)$$

y como el valor absoluto de una integral no puede ser mayor que la integral del valor absoluto del integrando, así (3.4) puede escribirse como:

$$|c(t)| \leq \int_0^{\infty} |r(t - \tau)||g(\tau)|d\tau \quad (3.5)$$

Si $r(t)$ es una señal acotada, entonces de (3.1)

$$|c(t)| \leq \int_0^{\infty} N |g(\tau)| d\tau = N \int_0^{\infty} |g(\tau)| d\tau \quad (3.6)$$

por consiguiente, si $c(t)$ es una salida infinita:

$$N \int_0^{\infty} |g(\tau)| d\tau \leq M < \infty \quad (3.7)$$

$$\int_0^{\infty} |g(\tau)| d\tau \leq P < \infty \quad (3.8)$$

La interpretación física de (3.8) es que el área encerrada por la curva de valor absoluto de la respuesta al impulso $g(t)$, calculada desde $t = 0$ hasta que $t \rightarrow \infty$ debe de ser finita.

A continuación se examina la condición que ha de cumplir la respuesta al impulso para que exista estabilidad, ligada ésta, a las restricciones de las raíces de la ecuación característica.

Por definición, la función de transferencia $G(s)$ del sistema y la respuesta al impulso $g(t)$ están relacionadas por la integral de la Transformada de Laplace.

$$G(s) = \int_0^{\infty} g(t) e^{-st} dt \quad (3.9)$$

Tomando valores absolutos en ambos miembros de esta expresión, se tiene:

$$|G(s)| \leq \int_0^{\infty} |g(t)| e^{-\sigma t} dt \quad (3.10)$$

Las raíces de la ecuación característica son los polos de $G(s)$ y cuando s toma estos valores, $|G(s)| \rightarrow \infty$. Como $s = \sigma + j\omega$, entonces el valor absoluto de e^{-st} es $|e^{-\sigma t}|$, y

(3.10) se convierte en:

$$\infty \leq \int_0^{\infty} |g(t)| e^{-\sigma t} dt \quad (3.11)$$

Si una o más raíces de la ecuación característica están en la región real positiva y sobre el eje imaginario del plano s , $\sigma > 0$, y así $|e^{-\sigma t}| \leq N = 1$. Por lo tanto, (3.11) se escribe como:

$$\infty \leq \int_0^{\infty} N |g(t)| dt = \int_0^{\infty} |g(t)| dt \quad (3.12)$$

para $\text{Real}(s) = \sigma \geq 0$.

Como (3.12) contradice el criterio de estabilidad dado en (3.8), se deduce que para que un sistema sea estable, *todas las raíces de la ecuación característica deben estar situadas en el semiplano izquierdo del plano complejo s* . Otra manera de establecer el criterio de estabilidad es que *todas las raíces de la ecuación característica deben tener su parte real negativa*.

3.2.2 Concepto de Estabilidad en Variables de Estado

Se puede también analizar la condición de estabilidad para un sistema lineal invariante en el tiempo a partir de sus variables de estado. Como la estabilidad es independiente de la entrada, la condición de $x(t) = 0$, donde $x(t)$ es el vector de estado, puede considerarse como un *estado de equilibrio* del sistema. Puede someterse al sistema a una perturbación de amplitud finita en $t = t_0$, tal que el estado inicial esté dado por $x(t_0) \neq 0$. Si en condiciones iniciales nulas el sistema vuelve a su estado de equilibrio al $t \rightarrow \infty$, se dice que el sistema es estable, en caso contrario, es inestable. El valor del estado inicial de los sistemas lineales no tiene importancia mientras sea finito, no así para los sistemas no-lineales, ya que estados iniciales distintos pueden llevar a condiciones completamente diferentes.

De lo dicho, la condición de estabilidad usando variables de estado puede establecerse [1] pag. 331, así: *se dice que un sistema es estable, si para cualquier estado inicial finito, $x(t_0)$, existe un número positivo M [que depende de $x(t_0)$], tal que:*

$$(1) \quad \|x(t)\| < M \text{ para todo } t \geq t_0 \quad (3.13)$$

$$(2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0 \quad (3.14)$$

donde $\|x(t)\|$ representa la norma del vector de estado $x(t)$

$$\|x(t)\| = \left[\sum_{i=1}^n x_i^2(t) \right]^{1/2} \quad (3.15)$$

La condición definida en (3.13) implica que para cualquier $t > t_0$, la transición de estado representada por la norma del vector $x(t)$ debe ser finita. La ecuación (3.14) establece que el sistema debe alcanzar un punto de equilibrio al $t \rightarrow \infty$.

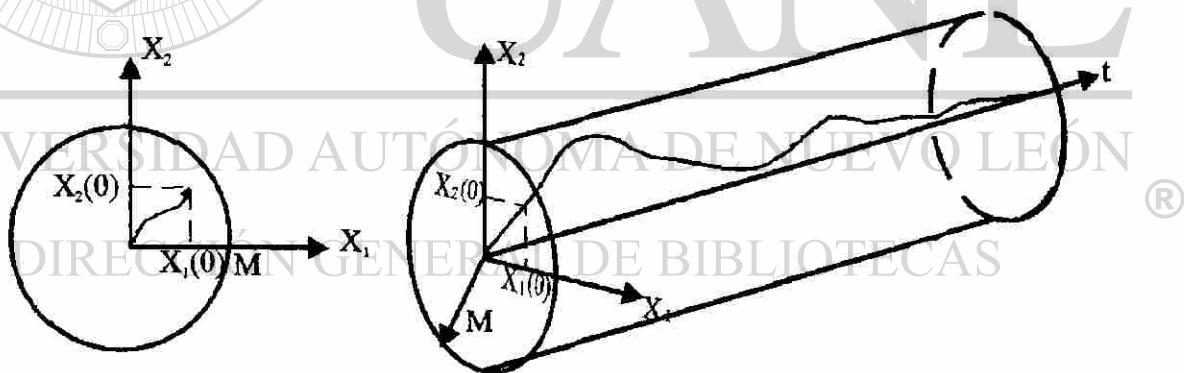


Fig. 3.1 Concepto de estabilidad, representación en el espacio de estado.

En la Figura 3.1 puede verse representado una interpretación del criterio de estabilidad para un caso de segundo orden, la trayectoria muestra la transición de $x(t)$ para $t > t_0$ desde un estado inicial finito $x(t_0)$. Como se aprecia en la Figura 3.1, $x(t_0)$ está representado por un punto que es el extremo del vector, obtenido sumando los vectores $x_1(t_0)$ y $x_2(t_0)$. El

cilindro de radio M señala el límite superior de los puntos de la trayectoria para cualquier $t > t_0$, y al tender t a infinito, el sistema alcanza su punto de equilibrio $x(t)=0$.

A continuación, se analiza cómo la definición de estabilidad dada anteriormente y aplicada a sistemas lineales, lleva a la misma conclusión sobre las condiciones que deben cumplir las raíces de la ecuación característica.

Con condiciones de entrada nulas la ecuación de transición del sistema [15-75] tiene la forma

$$x(t) = \Phi(t - t_0)x(t_0) \quad (t \geq t_0) \quad (3.16)$$

donde $\Phi(t - t_0)$ es la matriz de transición.

Tomando la norma en ambos lados de (3.16) se tiene:

$$\|x(t)\| = \|\Phi(t - t_0)x(t_0)\| \quad (3.17)$$

Una propiedad importante de la norma de un vector es:

$$\|x(t)\| \leq \|\Phi(t - t_0)\| \|x(t_0)\| \quad (3.18)$$

entonces, la condición definida en (3.13) requiere que $\|\Phi(t - t_0)\| \|x(t_0)\|$ sea finita. Por lo tanto, si $\|x(t_0)\|$ es finito, $\|\Phi(t - t_0)\|$, también debe ser finito para $t > t_0$. De igual manera, (3.14) lleva a la condición siguiente:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\Phi(t - t_0)\| = 0 \quad (3.19)$$

Con anterioridad la matriz de transición se escribió como:

$$\Phi(t) = e^{-At} \quad t \geq 0 \quad (3.20)$$

$$\Phi(t) = \ell^{-1} \frac{[\Delta_{ij}]'}{|sI - A|} \quad (3.21)$$

Como $|sI - A| = 0$ es la ecuación característica del sistema, (3.21) implica que la respuesta en el tiempo de $\Phi(t)$ depende de las raíces de la ecuación característica. Por lo tanto, de (3.19) se deduce la condición de que todas las raíces de la ecuación característica deben tener partes reales negativas.

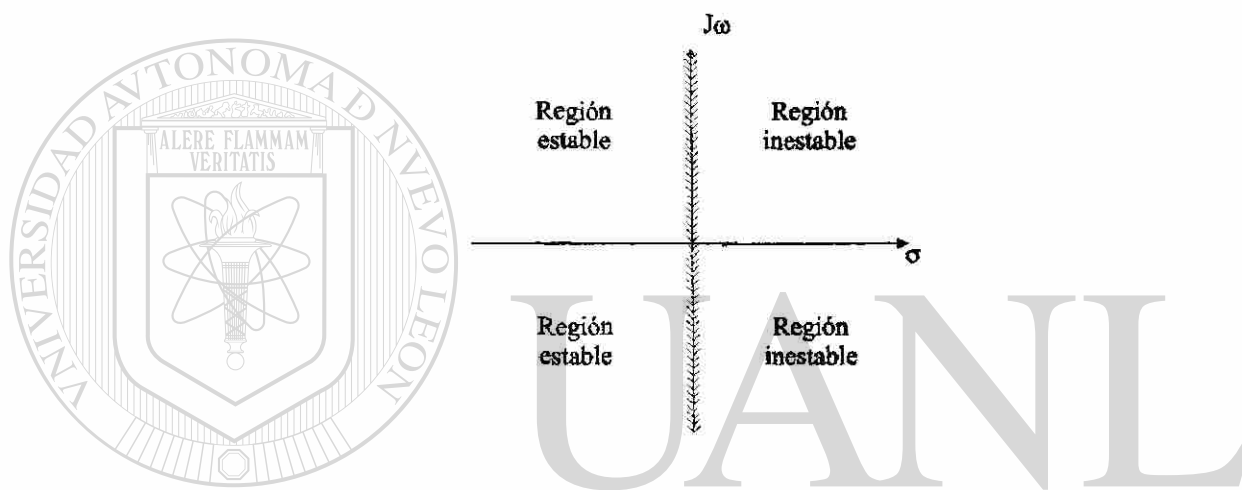


Fig. 3.2 Regiones estable e inestable del plano s.

Lo expuesto en los párrafos anteriores indica que se puede determinar la estabilidad de los sistemas lineales con base en la localización de las raíces de la ecuación característica en el plano s. La Figura 3.2 muestra las regiones de estabilidad e inestabilidad en el plano s. El eje imaginario, excepto el origen, está incluido en la región inestable. Se debe señalar que la estabilidad de sistemas no-lineales es un tema complejo y como la entrada y el estado inicial afectan la estabilidad de un sistema no-lineal, es necesario disponer de otras herramientas, más sofisticadas, para analizar la estabilidad.

3.3 El Método del Lugar Geométrico de las Raíces.

El Lugar Geométrico de las raíces es un método desarrollado por Evans en 1948 [20] pag. 289, para determinar la estabilidad relativa de sistemas de control lineal. Este método

está basado en la premisa de que el comportamiento transitorio de un sistema de control depende de la posición de las raíces de la ecuación característica en el plano s ; como se muestra en el Apéndice A. El Lugar Geométrico de las Raíces es una gráfica de cómo se desplazan, en el plano complejo, las raíces de la ecuación característica cuando la ganancia K varía desde 0 hasta ∞ . Para obtener las raíces de una ecuación de grado N , en función de parámetros variables como lo es la ganancia K , Evans desarrolló un método gráfico llamado “El Lugar Geométrico de las Raíces” o (Root Locus).

Para desarrollar el método, Evans se basó en la ecuación característica:

$$1 + GH(s) = 0 \quad (3.22)$$

la cual no se podía resolver por métodos numéricos por estar en función de la ganancia K , y la transformó de la manera siguiente:

$$GH(s) = -1 \quad (3.23)$$

donde, por ser una función de variable compleja se tiene:

$$|GH(s)| = 1 \quad (3.24)$$

$$\angle GH(s) = 180^\circ \quad (3.25)$$

y como $GH(s)$ tiene la forma:

$$GH(s) = \frac{K \prod_{j=1}^v (s + Z_j)}{\prod_{i=1}^n (s + P_i)} \quad (3.26)$$

aplicando (3.24) y (3.25) en (3.26) se tiene:

$$|GH(s)| = \frac{K \prod_{j=1}^v |s + Z_j|}{\prod_{i=1}^n |s + P_i|} = 1 \quad (3.27)$$

$$\angle GH(s) = \sum_{j=1}^v (s + Z_j) - \sum_{i=1}^n (s + P_i) = 180^\circ \quad (3.28)$$

reescribiendo las ecuaciones:

$$|GH(s)| = \frac{\prod_{j=1}^v |s + Z_j|}{\prod_{i=1}^n |s + P_i|} = \frac{1}{K} \quad (3.29)$$

$$\angle GH(s) = \sum_{j=1}^v (s + Z_j) - \sum_{i=1}^n (s + P_i) = 180^\circ \quad (3.30)$$

se tiene los requisitos que debe cumplir cualquier punto del plano s , para formar parte del Lugar Geométrico de las Raíces.

Para interpretar correctamente las restricciones, de las cuales la segunda es la principal, se toma como ejemplo la siguiente función de transferencia de lazo abierto:

$$GH(s) = \frac{K(s + Z_1)}{s(s + P_1)(s + P_2)(s + P_3)(s + P_4)} \quad (3.31)$$

la cual se representa con ángulos y distancias en la Figura 3.3. Se substituyen en las fórmulas las restricciones, como sigue:

$$\theta_4 - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_5 + \theta_6) = 180^\circ \quad (3.32)$$

si lo anterior se cumple, entonces:

$$K = \frac{A * B * C * E * F}{D} \quad (3.33)$$

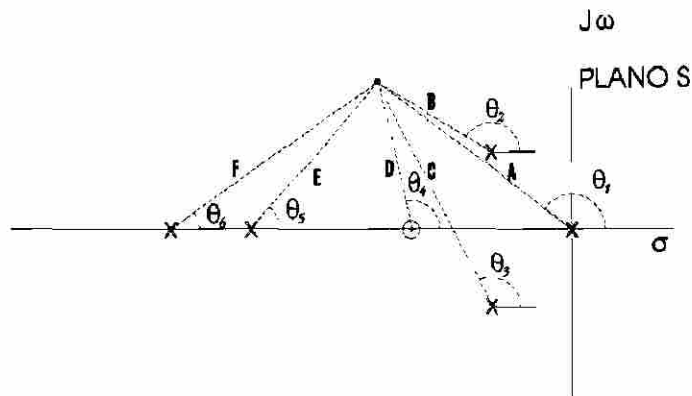


Fig. 3.3 Restricciones para que un punto del plano s forme parte del Lugar Geométrico de las Raíces.

3.3.1 Aspectos Prácticos para el cálculo del Lugar de las Raíces

Evans reconoció que el plano s era infinito y el probar cada punto del plano era imposible, por lo cual desarrolló una serie de ayudas para indicar por donde pasa aproximadamente el Lugar Geométrico de las Raíces y probar si puntos seleccionados cumplen con las restricciones. Estas ayudas se presentan con su respectivo razonamiento en las secciones siguientes:

Primera Ayuda: El lugar Geométrico de las Raíces principia en los polos y termina en los ceros de $GH(s)$, esto se muestra evaluando (3.29). Para $K = 0$, se tiene el valor con el cual principia el Lugar Geométrico se reconoce que es igual a valor infinito el cual toma la función, precisamente en los polos. Evaluando la ecuación, para cuando $K \rightarrow \infty$, se tiene el valor con el cual termina el Lugar Geométrico de las Raíces, y es el valor que toma la función el cual es igual a cero y es el que toma la función en los ceros.

Segunda Ayuda: El Lugar Geométrico de las Raíces es simétrico respecto al eje real, esto debido a que se está graficando raíces de ecuaciones que sólo pueden tomar valores reales diferentes, reales iguales o raíces complejas conjugadas; siendo éstas últimas pares de raíces que tienen el mismo valor real y valores imaginarios con signos diferentes.

Tercera Ayuda: Las asíntotas del Lugar Geométrico de las Raíces. El Lugar Geométrico principia en los polos y termina en los ceros de $GH(s)$, como se comentó en la primera ayuda. A igual número de polos que de ceros no se tiene problema, pero cuando se tiene más polos que ceros se dice que existen ceros implícitos en el infinito. Como el fin de las ramas está en los ceros, independientemente donde se encuentren; hay que localizar los ceros en el infinito para saber hacia donde tiende el lugar geométrico de las raíces.

Para localizar un punto en un plano s se necesita una distancia, un ángulo y un punto de referencia, para localizar los ceros implícitos se sabe que la distancia es infinita sólo hay que determinar el ángulo y el punto de referencia, esto determina las líneas o asíntotas hacia las cuales tiende el lugar geométrico de las raíces. La cantidad de asíntotas se determina restando al número de polos el número de ceros explícitos. El ángulo se obtiene aplicando la ayuda dos, por lo tanto, el ángulo entre asíntotas resulta de dividir 360° por el número de asíntotas. Para localizar las asíntotas en el plano s se distribuyen por partes iguales en ambos lados del eje real, respetando el ángulo entre asíntotas. Cuando el número de asíntotas es impar una de ellas se coloca sobre el eje real negativo. El punto de referencia se coloca sobre el eje real y por simetría se obtiene un centroide con la fórmula [15-253]:

$$\sigma_1 = \frac{\sum \text{valores de polos} - \sum \text{valores de ceros}}{P - Z} \quad (3.34)$$

Cuarta Ayuda: Regiones del eje real donde existe trazo del Lugar Geométrico de las Raíces. Existe trazo en las regiones donde a su derecha el número de polos o ceros es impar, ya que la suma de ángulos de los polos y ceros a cualquier punto de la región resulta 180° , el cual es un requerimiento para formar parte del lugar geométrico de las raíces. Cuando la suma de los ángulos de polos y ceros a cualquier punto a la derecha de una región del eje real donde la cantidad de polos y ceros es par da por suma 0° , no pertenece al Lugar Geométrico de las Raíces.

Quinta ayuda: Angulo de partida o de llegada a un polo o a un cero de $GH(s)$. Para encontrar el ángulo de partida o de llegada a un polo o a un cero de $GH(s)$ en el plano s se

supone un punto muy cercano al polo o cero, tan cercano que se confunda con él, y se aplica la regla de suma de ángulos, dejando como incógnita el ángulo del polo al punto cercano. De esta manera se obtiene el valor del ángulo buscado.

Sexta Ayuda: Puntos de quiebre del lugar geométrico de las raíces. Cuando existe trazo del lugar geométrico de las raíces en regiones del eje real entre dos polos, generalmente hay un punto de quiebre, en el cual el lugar geométrico de las raíces cambia bruscamente de dirección buscando los ceros hacia donde va a terminar. Para calcular los puntos de quiebre se parte de la ecuación característica, la cual está en función de la ganancia K , y se despeja K en función de s , para después obtener la derivada dK/ds . Algunas de las raíces de la derivada serán las coordenadas, en el plano s , de los puntos de quiebre.

Séptima ayuda: Los puntos de cruce del lugar geométrico de las raíces con el eje imaginario $j\omega$. El lugar geométrico de las raíces cruza al eje imaginario precisamente cuando la frecuencia es igual a la frecuencia natural ω_n , ya que a esta frecuencia el sistema oscila libremente y sin amortiguamiento. Esto sucede cuando el valor de K es tal que el lugar geométrico cruza al eje imaginario y representa la estabilidad crítica. La frecuencia natural de oscilación ω_n se obtiene aplicando el método Routh-Hurwitz [1, pag. 342].

Octava Ayuda: La ganancia de un punto que pertenezca al Lugar Geométrico de las Raíces se obtiene con el inverso de la fórmula dada por (3-29).

3.4 El Lugar Geométrico de las Raíces y el Análisis en el Dominio del Tiempo.

Para determinar el comportamiento en el tiempo de un sistema de control, utilizando el criterio de "polos dominantes", primero se construye el Lugar Geométrico de las raíces; siguiendo los pasos de la sección anterior y se obtiene gráficamente el punto de operación, para una δ dada y en el cual se medirán la frecuencia natural ω_n y la ganancia K . El procedimiento se muestra en la Figura 3.4, y se calcula: el % de sobrepaso, el tiempo de respuesta T_r , el tiempo de subida T_p , el tiempo de alcance máximo T_a , el tiempo de

asentamiento T_s , y el error de estado estable e_{ss} , que se obtienen con las fórmulas del Apéndice A. Este método es válido directamente para sistemas con dinámicas dominadas por dos o tres polos, para dinámicas con un mayor número de polos es necesario que dos de los polos sean dominantes con respecto a los restantes.

Ejemplo: Obtener las características de funcionamiento transitorio y el error de estado estable considerando que existen "Polos Dominantes" del Lugar Geométrico de las Raíces para la función de transferencia.

$$GH(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+5)} \quad (3.35)$$

Para la función dada se tienen 3 polos y como en cada polo principia una rama del Lugar Geométrico de las Raíces, se tendrán tres ramas. Cada rama debe terminar en un cero y no se cuenta con ningún cero explícito, entonces, las tres ramas deben terminar en ceros implícitos los cuales se localizan en el infinito, en direcciones de 60° , 180° , -60° a partir del punto de cruce de las asíntotas que se localiza en $-2+j0$, lo cual se calculó por medio de:

$$\sigma_1 = \frac{\sum \text{valores de polos} - \sum \text{valores de ceros}}{P - Z} = \frac{(-1-5) - 0}{3} = -2 \quad (3.36)$$

Las regiones del eje real del plano s en que existe trazo del Lugar Geométrico de las Raíces son las comprendidas entre 0 y -1 y entre -5 y $-\infty$. En esta última región se sigue la asíntota de 180° . En la región entre 0 y -1 existe un punto de quiebre en -0.48, que se calcula de la siguiente manera:

$$1 + GH(s) = 1 + \frac{K}{s(s+1)(s+5)} = 0$$

$$s(s+1)(s+5) + K = s^3 + 6s^2 + 5s + K = 0 \quad (3.37)$$

Se despeja el valor de la ganancia K :

$$K = -(s^3 + 6s^2 + 5s) \quad (3.38)$$

derivando la expresión e igualando a cero:

$$\frac{dK}{ds} = -(3s^2 + 12s + 5) = 0 \quad (3.39)$$

se obtienen las raíces de la derivada. Las raíces que se localizan dentro de las regiones donde existe trazo del Lugar Geométrico de las Raíces, serán puntos de quiebre. Para el caso particular del ejemplo se tiene:

$$\frac{dK}{ds} = -(3s^2 + 12s + 5) = 0 \quad (3.40)$$

$$s_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 * 3 * 5}}{2 * 3} = -2 \pm 1.52 \quad (3.41)$$

$$\therefore s_1 = -0.48 \quad s_2 = -3.52 \quad (3.42)$$

de las cuales s_1 da el valor de la coordenada del punto de quiebre que siempre toma un valor real.

Las coordenadas de los cruces con el eje imaginario se obtienen con la ayuda del Método de Routh-Hurwitz [1, pag. 342]. Así, se puede encontrar la frecuencia natural de oscilación ω_n , la cual se obtiene con estas $\pm j\omega_n$ coordenadas y se obtiene de la siguiente manera:

$$s^3 + 6s^2 + 5s + K = 0 \quad (3.43)$$

$$\begin{array}{c|ccc} s^3 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ s^2 & 6 & K & 0 & 0 \\ s^1 & \frac{30-K}{6} & 0 & 0 & 0 \\ s^0 & K & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad (3.44)$$

$$\frac{30-K}{6} > 0 \quad K > 0 \quad (3.45)$$

$$\therefore 0 < K < 30 \quad (3.46)$$

Tomando la ecuación auxiliar de segundo grado y substituyendo el valor crítico de K:

$$6s^2 + K = 6s^2 + 30 = 0 \quad (3.47)$$

$$s^2 = -\frac{30}{6} = -5 \quad (3.48)$$

$$s = \pm j\sqrt{5} = \pm j2.23 \quad (3.49)$$

Con los datos obtenidos se puede construir la Gráfica del Lugar Geométrico de las Raíces, como en la Figura 3.4 y a partir de ésta hacer un cálculo gráfico para obtener la frecuencia natural de oscilación ω_n y de la ganancia K correspondiente. Se efectúan los cálculos a partir de un amortiguamiento de $\delta = 0.45$, (3.29).

$$\beta = \cos^{-1} \delta = \cos^{-1} 0.45 = 63.2 = 1.1 \text{ rad} \quad (3.50)$$

Con el ángulo β se calcula K y ω_n , usando el Lugar Geométrico de las Raíces de la Figura 3.4, representado en

$$\omega_n = 0.89 \quad (3.51)$$

$$K = 4.19 \quad (3.52)$$

Con δ conocida, β calculada y la ω_n medida a partir del Lugar Geométrico, se calculan los siguientes índices:

$$\% \text{Sobrepaso} = 100 e^{\pi\delta \sqrt{1-\delta^2}} = 100 e^{-\frac{0.45\pi}{\sqrt{1-0.45^2}}} = 20.53\% \quad (3.53)$$

$$T_R = \frac{1}{\delta\omega_n} = \frac{1}{0.45 * 0.89} = 2.49 \quad (3.54)$$

$$T_P = \frac{\pi - \beta}{\omega_n \sqrt{1 - \delta^2}} = \frac{\pi - 1.1}{0.89 \sqrt{1 - 0.45^2}} = 2.56 \quad (3.55)$$

$$T_A = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \delta^2}} = \frac{\pi}{0.89 \sqrt{1 - 0.45^2}} = 3.95 \quad (3.56)$$

$$T_S = \frac{4}{\delta\omega_n} = \frac{4}{0.45 * 0.89} = 9.99 \quad (3.57)$$

como el sistema es tipo 1, entonces:

$$K_V = \lim_{s \rightarrow 0} s GH(s) = \frac{K}{5} = \frac{4.19}{5} = 0.838 \quad (3.58)$$

$$\% e_{ss} = \frac{100}{K_V} = \frac{100}{0.838} = 119.33\% \quad (3.59)$$

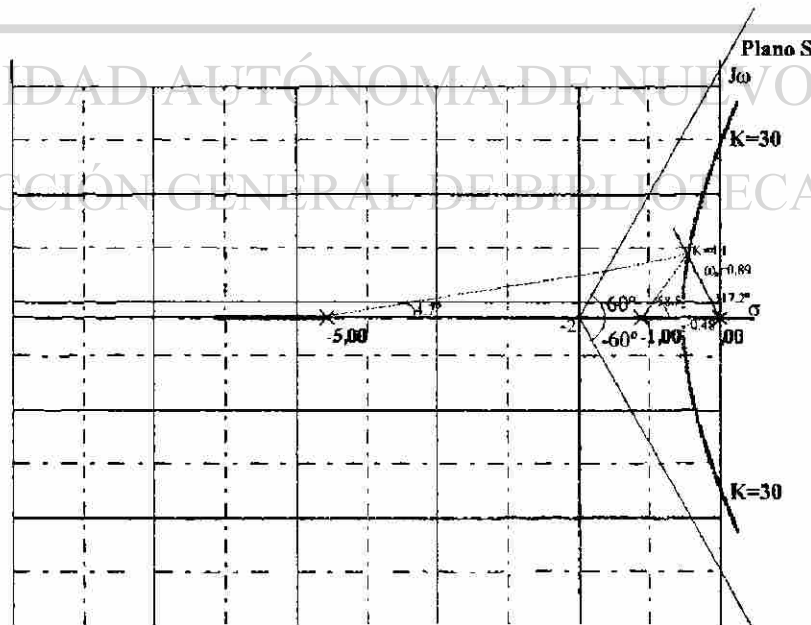


Fig. 3.4 Procedimiento de Polos Dominantes del Lugar Geométrico de las Raíces.

3.5 Algoritmos para el Lugar Geométrico de las Raíces y el Análisis en el Dominio del Tiempo.

Un procedimiento para efectuar el análisis de Sistemas Lineales consiste en primero construir el Lugar Geométrico de las Raíces. De ahí, obtener la frecuencia natural ω_n , y la ganancia K para el punto de operación determinado por la razón de amortiguamiento δ . Con los parámetros anteriores se puede obtener las características generales del funcionamiento transitorio, en el dominio del tiempo, y del error de estado estable e_{ss} .

Para construir el lugar Geométrico de las Raíces se usa su definición: como una gráfica que muestra la posición de las raíces de la ecuación característica, en el plano complejo s, cuando la ganancia K toma valores desde 0 y al $\rightarrow \infty$. Las raíces de la ecuación característica se obtienen para diferentes ganancias K y se forma un archivo de coordenadas para cada raíz; las cuales se calculan por el *Método de Lin Bairstow*, el cual se detalla en el Apéndice C.

Para determinar las coordenadas del punto de operación es necesario obtener, para las coordenadas complejas conjugadas, de todos los puntos del Lugar Geométrico de las raíces el ángulo β con (3-60).

$$\beta = \text{tg}^{-1} \frac{\text{parte imaginaria}}{\text{parte real}} \quad (3.60)$$

y compararlo con el ángulo β calculado por medio de:

$$\beta = \text{Cos}^{-1} \delta \quad (3.61)$$

Si la diferencia es grande quiere decir que el rango de valores de K que se utilizó no cubre el punto de operación. Si la diferencia es relativamente pequeña en ambos sentidos y sobrepasa la tolerancia, quiere decir que los incrementos de K son muy grandes. Una vez que se ha cumplido con las tolerancias se almacenan las coordenadas determinadas y la ganancia del punto más cercano, mismo que se considera como una aproximación al punto de

operación. Con las coordenadas se obtiene la frecuencia natural de operación ω_n , la cual se calcula por medio de (3.62)

$$\omega_n = \sqrt{(\text{Parte Real})^2 + (\text{Parte Imaginaria})^2} \quad (3.62)$$

Una vez obtenido el punto de operación, con δ , ω_n y K se calcula el comportamiento transitorio y el error de estado estable con las siguientes expresiones:

$$T_r = \frac{1}{\delta \omega_n} \quad (3.63)$$

$$T_p = \frac{\pi - \beta}{\omega_n \sqrt{1 - \delta^2}} \quad (3.64)$$

$$T_a = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \delta^2}} \quad (3.65)$$

$$T_s = \frac{4}{\delta \omega_n} \quad (3.66)$$

$$\% \text{ Sobrepaso} = 100 e^{-\frac{\pi \delta}{\sqrt{1 - \delta^2}}} \quad (3.67)$$

$$\% e_{ss} = \frac{100}{1 + C.E.} \text{ para Sistemas Tipo } = 0 \quad (3.68)$$

$$\% e_{ss} = \frac{100}{C.E.} \text{ para Sistemas Tipo no } 0 \quad (3.69)$$

$$C.E. = \frac{K \prod \text{Valores de Ceros} \neq 0}{\prod \text{Valores de Polos} \neq 0} \quad (3.70)$$

Estas fórmulas se detallan y justifican en el Apéndice A, las cuales definen el comportamiento del sistema en el tiempo.

3.6 Programa en Computadora Digital para analizar en el Tiempo Sistemas de Control Lineales.

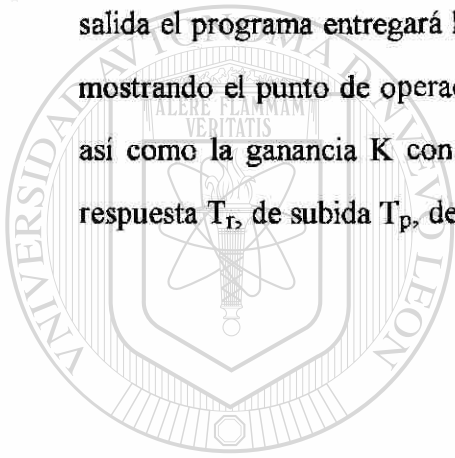
Para implementar un programa en computadora digital que analice, en el dominio del tiempo sistemas lineales, usando las herramientas del presente capítulo es necesario construir el Lugar Geométrico de las Raíces y aplicar el *criterio de Polos Dominantes*. Dado δ se determina la posición del punto de operación, se obtiene la frecuencia natural ω_n , y la ganancia K para con sus valores calcular el % de sobrepaso, y los índices T_R, T_A, T_P, T_S , y $\%e_{ss}$.

Siendo el lugar geométrico de las raíces una gráfica de cómo varían las Raíces de la Ecuación Característica, cuando la ganancia K toma valores desde 0 y al $\rightarrow \infty$, es necesario obtener la ecuación característica a partir de la función de transferencia de lazo abierto $GH(S)$, quedando ésta en función de la ganancia K del sistema. Para obtener las raíces se utiliza el método de Lin Bairstow, método que toma como dato los coeficientes de la ecuación característica; los cuales se consideran constantes. En realidad los coeficientes varían en función de la ganancia del sistema K, por lo cual se calcula un juego de coeficientes para cada valor de K. Las raíces obtenidas serán las coordenadas de puntos que forman parte de la Gráfica del Lugar Geométrico y para construir la gráfica a partir de las coordenadas es necesario graficar en el plano complejo s, los valores de las raíces; donde cada raíz forma una gráfica con variación independiente.

Para conocer el punto de operación es necesario probar para cada punto con coordenadas complejas si su ángulo de posición, calculado con (3.60), coincide con el ángulo β el cual es calculado a partir de la razón de amortiguamiento δ , con (3.61). Una vez que coincidan, dentro de una tolerancia pequeña previamente especificada, se almacenan en memoria los valores de la ganancia K y el valor de ω_n calculado con (3.62). Con los valores anteriores se obtiene el % de sobrepaso, los tiempos de respuesta T_r , de subida T_p , de alcance máximo T_a , de asentamiento T_s , y el % de error de estado estable $\%e_{ss}$, usando las expresiones del Apéndice A, las cuales forman parte del programa digital. Cuando la

tolerancia establecida, para la comparación entre los valores de β y el ángulo de posición de los puntos de la gráfica, no sea pequeña el programa muestra la leyenda **Favor de reducir los incrementos de la Ganancia ΔK** . Si el ángulo de posición es mucho menor que el de β se muestra la leyenda **Favor de incrementar el rango de valores de la Ganancia K** .

El programa digital requiere como datos la función de transferencia de lazo abierto $GH(S)$, los rangos y el incremento de la ganancia K , así como la razón δ de amortiguamiento con la que operará el sistema y la tolerancia en la obtención del punto de operación ε . Como salida el programa entregará los resultados de la Gráfica del Lugar Geométrico de las Raíces, mostrando el punto de operación. También se calcula la frecuencia natural de oscilación ω_n , así como la ganancia K con la que opera. Se calcula el % de sobrepaso, los tiempos de respuesta T_r , de subida T_p , de alcance máximo T_a , de asentamiento T_s y el % de e_{ss} .



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

CAPITULO 4

DISEÑO DE CONTROLES AUTOMATICOS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

4.1 Diseño en el Dominio del Tiempo

Las características de comportamiento en el dominio del tiempo de los sistemas de control dependen de dos factores: la variación de la ganancia del sistema K , y la variación de la entrada R . Cuando los sistemas son no lineales se utilizan métodos de análisis y diseño que toman en cuenta ambos factores al mismo tiempo, pero para sistemas lineales se puede aplicar el teorema de superposición, fijar uno de los factores y analizar la variación del otro o viceversa. En este trabajo al procedimiento donde se fija el valor de la entrada R y se varía la ganancia del sistema K se le llamará **Método en el Dominio del Tiempo** y aquel donde se fija la ganancia del sistema y se varía la entrada dentro de un rango de frecuencias se le conocerá como **Método de Respuesta a la Frecuencia**.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

En el procedimiento donde se varía la ganancia y la entrada permanece fija, se puede utilizar el Método del Lugar Geométrico de las Raíces para análisis y diseño, con lo cual se obtiene una gráfica de cómo varían las raíces de la ecuación característica cuando la ganancia toma valores de cero a infinito, para un sistema dado; ya que el comportamiento transitorio del sistema depende de la posición de las raíces de la ecuación característica en el plano complejo. El procedimiento es útil para análisis del sistema ante diferentes ganancias, como se explicó en el punto 3.2. Además en ocasiones, y para cumplir con los objetivos de diseño para un sistema de control, es necesario agregar polos y/o ceros a la función de transferencia hasta lograr el objetivo deseado y para evaluar lo apropiado del diseño se puede utilizar el

lugar geométrico de las raíces. Para agregar polos y/o ceros hay varias posibilidades siendo éstas la de **Compensación en la Rama Directa**, y la de **Compensación en la Rama de Retroalimentación**. En este capítulo se discuten estos dos métodos y se presentan los algoritmos requeridos para desarrollar un programa de computadora digital que efectue los dos tipos de compensación en forma automática.

4-2. Compensación en la Rama Directa

La compensación en la rama directa está basada en agregar controladores comerciales, los cuales se estudian en el Apéndice B, en la rama directa tal como se muestra en la Figura 4.1. Esta modificación puede cambiar substancialmente el lugar geométrico de las raíces, como se presentará en el desarrollo del método.

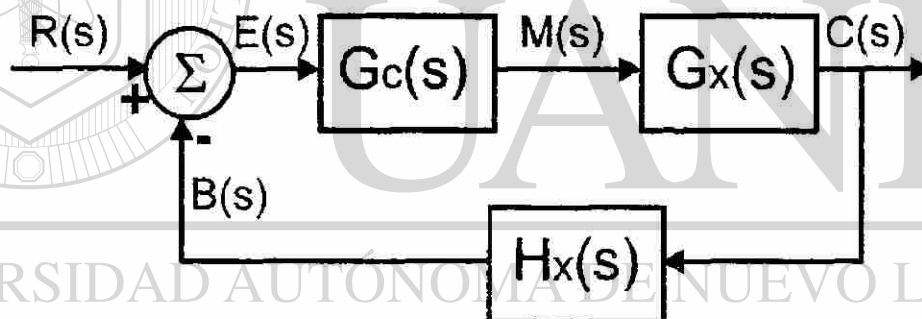


Fig. 4.1 Compensación en la Rama Directa.

Para este desarrollo primero se obtiene la función de transferencia de lazo abierto del sistema y de ahí el lugar geométrico de las raíces, obteniendo el comportamiento del sistema; como en el caso del análisis en el dominio del tiempo el cual se ha ilustrado en el punto 3.2. Una vez obtenidos los índices de comportamiento sus valores se comparan con los requeridos para que el sistema cumpla con el diseño establecido y en caso de no satisfacer los requerimientos se inicia el procedimiento de compensación.

Para iniciar a la compensación se cuenta con información de los parámetros deseados como es el % de sobrepaso, el tiempo de respuesta T_r , el tiempo de subida T_p , el tiempo de alcance máximo T_a , el tiempo de asentamiento T_s y el error de estado estable e_{ss} . De estos valores se obtiene el % de sobrepaso, la razón de amortiguamiento δ , con la fórmula dada por (4.1). Los tiempos permiten obtener la frecuencia natural ω_n , requerida para cumplir cada uno de ellos, aplicando de (4.2) a (4.5), y se selecciona la frecuencia natural mayor. Con el valor de la frecuencia natural y la razón de amortiguamiento se localiza un punto de operación nuevo, el cual cumplirá con los requisitos de diseño; como se muestra en la Figura 4.2. El nuevo punto de operación no forma parte del lugar geométrico de las raíces del sistema original, por lo cual hay que agregar un polo y un cero estratégicamente a fin de que el nuevo punto forme parte del lugar geométrico de las raíces para el sistema compensado.

$$\delta = \frac{\left(\ln \frac{\% \text{ Sobrepaso}}{100} \right)^2}{\pi^2 + \left(\ln \frac{\% \text{ Sobrepaso}}{100} \right)^2} \quad (4.1)$$

$$\omega_n' = \frac{1}{T_R \delta} \quad (4.2) \textcircled{R}$$

$$\omega_n' = \frac{\pi - \beta}{T_p \sqrt{1 - \delta^2}} \quad (4.3)$$

$$\omega_n' = \frac{\pi}{T_a \sqrt{1 - \delta^2}} \quad (4.4)$$

$$\omega_n' = \frac{4}{T_s \delta} \quad (4.5)$$

En la Figura 4.2 se observa que para localizar el polo y el cero es necesario conocer el ángulo γ , el cual es el ángulo por el cual no se cumple la regla de ángulos definida por Evans cuando se definió el lugar geométrico de las raíces. El valor del ángulo se obtiene con (4.6), y se debe lograr incluyendo a la suma los ángulos del polo y del cero. Como el valor debe ser positivo el ángulo del cero debe ser mucho mayor que el ángulo del polo, por tanto, el cero debe localizarse cerca del origen por el lado negativo del eje real y el polo debe colocarse alejado del origen, también por el lado negativo del eje real; lo cual corresponde a un controlador PD.

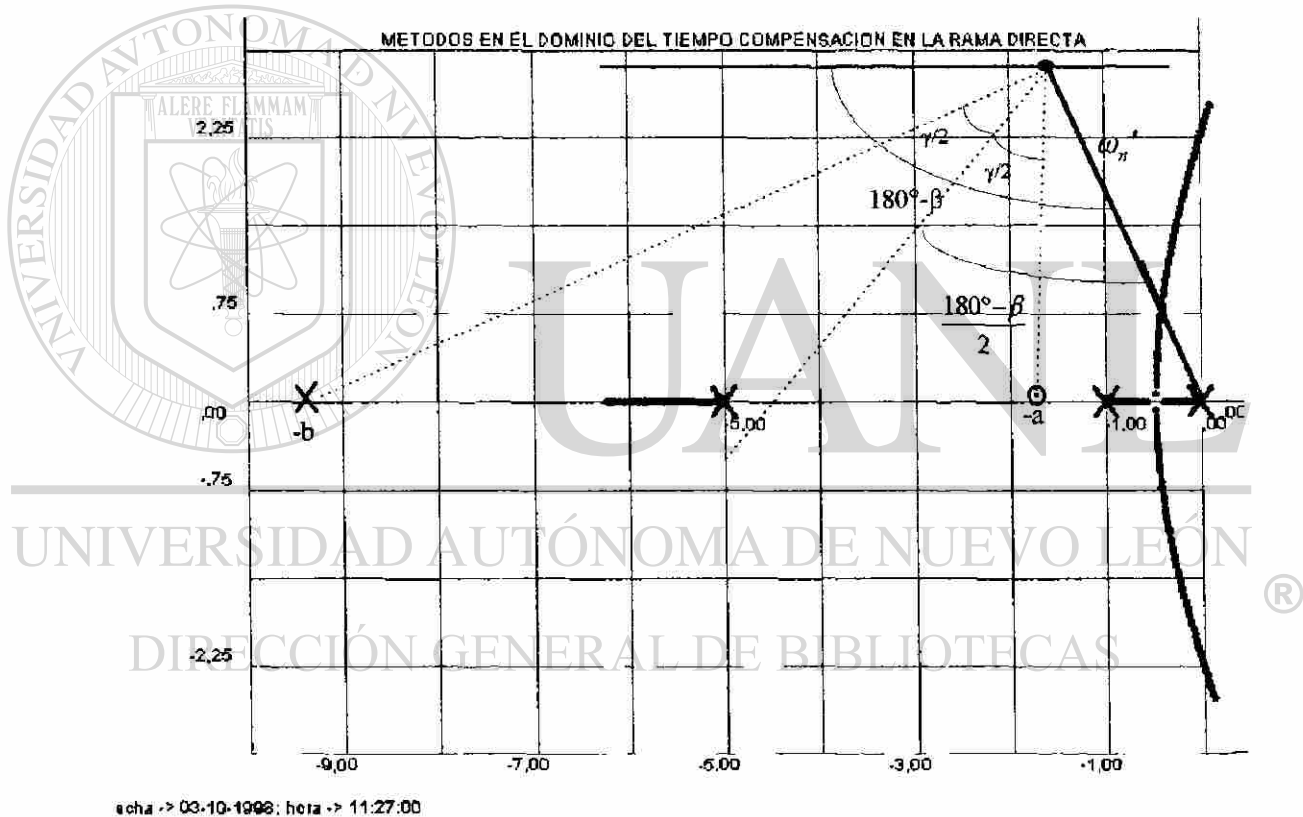


Fig. 4.2 Compensación en la Rama Directa, Lugar Geométrico de las Raíces.

Una forma de lograr lo anterior, como se observa en la Figura 4.2, es trazar una línea horizontal paralela al eje real que pase por el nuevo punto de operación, bisectar el ángulo formado por la línea paralela al eje real y la línea que localiza al punto de operación para colocar al polo y al cero, de manera que la bisectriz lo sea también del ángulo γ faltante. Se

continúa el trazo de las líneas del ángulo y hasta cruzar al eje real y en dichas intersecciones se localiza el polo y el cero buscados.

Una vez compensado el sistema se analiza su respuesta transitoria para verificar si se requiere compensación para el error de estado estable. En caso necesario se debe encontrar la ganancia para que el sistema actúe con las características del nuevo punto de operación; la ganancia se obtiene con el recíproco de (3.29), y una vez obtenida se sigue el método ilustrado en el punto A.3 del Apéndice A. En caso de no cumplirse con el comportamiento deseado es necesario compensar al sistema con un controlador PI, localizando un polo en el origen y un cero con un valor por lo menos un orden de magnitud inferior al menor de los polos o ceros del sistema, todo con el fin de que no se modifique el lugar geométrico de las raíces y no se altere el comportamiento transitorio.

Una vez concluida la etapa de compensación se procede al diseño del controlador, siguiendo los procedimientos que se ilustran en la implementación física, los cuales se describen en el Apéndice B.

Para el ejemplo del punto 3.2, donde la función de transferencia de lazo abierto $GH(s)$ está dada por (4.6) y se requiere que cumpla con los siguientes índices de comportamiento:

% de Sobrepaso = 20%

Tiempo de Respuesta $T_r < 0.8$ seg

Tiempo de Subida $T_p < 1.0$ seg

Tiempo de Alcance Máximo $T_a < 1.3$ seg

Tiempo de Asentamiento $T_s < 3.0$ seg

% de Error de Estado Estable $\% e_{ss} < 2\%$

$$GH(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+5)} \quad (4.6)$$

De los resultados obtenidos para (3.35) se tiene:

Ganancia en el punto de operación $K = 4.19$

Tiempo de Respuesta $T_r = 2.49$ seg

Tiempo de Subida $T_p = 2.56$ seg

Tiempo de Alcance Máximo $T_a = 3.95$ seg

Tiempo de Asentamiento $T_s = 9.99$ seg

Se observa que ninguno de los tiempos cumple con los requerimientos especificados y para que el sistema funcione satisfactoriamente se inicia el proceso de compensación, calculando el valor de la frecuencia natural ω'_n , usando (4.2) a (4.5).

$$\delta = \frac{\sqrt{\left(\ln \frac{\% \text{Sobrepaso}}{100}\right)^2}}{\sqrt{\pi^2 + \left(\ln \frac{\% \text{Sobrepaso}}{100}\right)^2}} = \frac{\sqrt{\left(\ln \frac{20}{100}\right)^2}}{\sqrt{\pi^2 + \left(\ln \frac{20}{100}\right)^2}} = 0.456 \quad (4.7)$$

$$\omega'_n = \frac{1}{T_r \delta} = \frac{1}{0.8 * 0.456} = 2.741 \text{ rad/seg} \quad (4.8)$$

$$\beta = \cos^{-1} \delta = \cos^{-1} 0.456 = 62.87^\circ = 1.1 \text{ rad} \quad (4.9)$$

$$\omega_n = \frac{\pi - \beta}{T_p \sqrt{1 - \delta^2}} = \frac{\pi - 1.1}{1.0 \sqrt{1 - 0.456^2}} = 2.294 \text{ rad/seg} \quad (4.10)$$

$$\omega_n = \frac{\pi}{T_a \sqrt{1 - \delta^2}} = \frac{\pi}{1.3 \sqrt{1 - 0.456^2}} = 2.715 \text{ rad/seg} \quad (4.11)$$

$$\omega_n = \frac{4}{T_s \delta} = \frac{4}{3.0 * 0.456} = 2.923 \text{ rad/seg} \quad (4.12)$$

Resulta una frecuencia natural ω'_n máxima de 2.923 rad/seg, y para estar del lado seguro se toma un valor de $\omega'_n = 3.0$ rad/seg. Con el valor de frecuencia natural y el valor de $\beta = 62.87^\circ$ se puede iniciar el procedimiento gráfico para determinar el polo y el cero que harán que el sistema compensado cumpla con los requisitos de diseño. El procedimiento gráfico se muestra en la Figura 4.3.

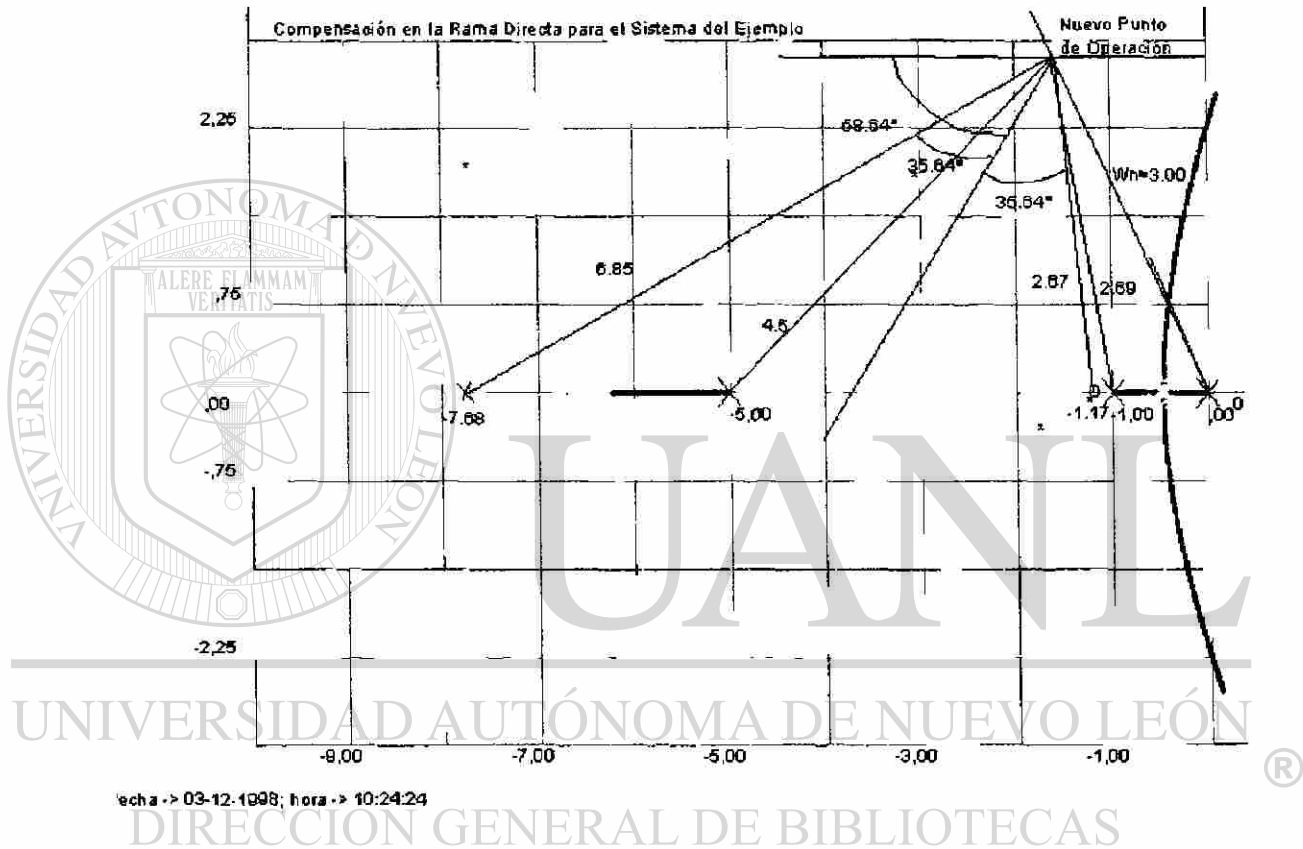


Fig. 4-3 Compensación en la rama directa para el sistema (4.6).

Sobre la gráfica de la Figura 4.3 se puede medir los ángulos de los polos respecto al nuevo punto de operación, el cual se localiza con la línea de β y la frecuencia natural ω'_n y así se obtiene el ángulo γ calculado a partir de la fórmula que deben cumplir los ángulos para formar parte del lugar geométrico de las raíces.

$$\gamma - (117.13^\circ + 97.85^\circ + 36.31^\circ) = 180^\circ \quad \gamma - 251.29^\circ = 180^\circ \quad \gamma = 431.29^\circ \quad (4.13)$$

$$\therefore \gamma = 71.29^\circ \quad (4.14)$$

En la Figura 4.3, donde se realiza el procedimiento gráfico de compensación, el valor del polo "b" y del cero "a" son:

$$a = 1.172 \quad (4.15)$$

$$b = 7.68 \quad (4.16)$$

Con las distancias de los polos y ceros obtenidas de la gráfica de la Figura 4.3, incluyendo las de compensación, se calcula el valor de la nueva ganancia K' tomando el recíproco de (3.29).

$$K' = \frac{6,85 * 4,5 * 2,69 * 3}{2,676} = 92,94 \quad (4.17)$$

Al incluir en la función de transferencia original de lazo abierto el polo y el cero debidos a la compensación y con la ganancia K' determinada para el punto de operación, se tiene como función de transferencia a la forma (4.18), de la cual se obtiene el error de estado estable y para lo cual se sigue el procedimiento presentado en el Apéndice A.

$$GH^*(s) = \frac{92.94(S + 1.172)}{S(S + 1)(S + 5)(S + 7.68)} \quad (4.18)$$

Como el sistema es tipo 1 el error se calcula a una entrada en rampa y se hace de la siguiente manera:

$$\% e_{ss} = \frac{100}{K_v} = \frac{100}{2.836} = 35.26\% \quad (4.19)$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s GH(s) = \frac{92.94 * 1.172}{1 * 5 * 7.68} = 2.836 \quad (4.20)$$

Como el error de estado estable para el sistema compensado con un controlador PD no cumple satisfactoriamente con el valor requerido, es necesario agregar otra compensación, pero ahora usando un controlador PI. El compensador PI agrega un polo en el origen y un cero que se colocará en un lugar muy cercano al origen, a fin de no modificar el lugar geométrico de las raíces y que no varíen los transitorios. Lo anterior da como resultado que el sistema se convierte en tipo 2 y el error de estado estable para la entrada en rampa se vuelve cero. El valor del cero de compensación, como debe ser pequeño, se hace 100 veces menor que el menor de los polos o ceros que son diferentes de cero, con lo cual se asegura que no se modifican los transitorios. Esto da por resultado que el cero estará localizado en -0.01.

En resumen, para que el sistema pueda cumplir con los requisitos de diseño solicitados se le ha de agregar compensación, lo cual se intenta primero con un controlador PD el cual influye sobre los transitorios y después se adiciona un controlador PI para corregir el error de estado estable. Los controladores PD y PI se pueden diseñar a partir de los resultados de la compensación.

El controlador PD y el controlador PI toman las formas dadas a continuación:

$$PD = \frac{K_1(s+1.172)}{(s+7.68)} \quad (4.21)$$

$$PI = \frac{K_2(s+0.01)}{s} \quad (4.22)$$

así, un controlador combinado debido a las dos compensaciones resulta ser el siguiente:

$$PD * PI = \frac{K_1 K_2 (s+0.01)(s+1.172)}{s(s+7.68)} \quad (4.23)$$

donde $K_1 K_2 = \frac{K'}{K}$ o bien numéricamente:

$$K_1 K_2 = \frac{92.94}{4.19} = 22.18 \quad (4.24)$$

Los valores de resistencias y capacitores requeridos se obtienen por comparación de los valores obtenidos en la compensación PD-PI, con sus correspondientes valores en la función de transferencia de los controladores comerciales basados en amplificadores operacionales, como se muestra en el Apéndice B usando (B.27) y (B.29), lo cual resulta en:

$$PI * PD = \frac{\frac{R_f}{R_4} \frac{R_3}{R_2} \left(s + \frac{1}{R_f C_2} \right) \left(s + \frac{1}{R_1 C_1} \right)}{s \left(s + \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} \right)} \quad (4.25)$$

y por comparación se obtiene:

$$\frac{1}{R_f C_2} = 0.01 \quad (4.26)$$

$$\frac{1}{R_1 C_1} = 1.172 \quad (4.27)$$

$$\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} = 7.68 \quad (4.28)$$

$$\frac{R_f}{R_4} \frac{R_3}{R_2} = 22.18 \quad (4.29)$$

Suponiendo valores de $C_1 = 10^{-6}$ y $C_2 = 10^{-4}$ se calcula las resistencias:

$$R_f = \frac{1}{0.01 * 10^{-4}} = 1.0 M\Omega \approx 2 M\Omega \quad (4.30)$$

$$R_1 = \frac{1}{1.172 * 10^{-6}} = 0.85 M\Omega \approx 2 M\Omega \quad (4.31)$$

$$R_2 = \frac{1}{6.508 * 10^{-6}} = 153.65 \text{ K}\Omega \approx 500 \text{ K}\Omega \quad (4.32)$$

$$\frac{R_f}{R_i} \frac{R_3}{R_2} = K_1 K_2 = 22.18 = \frac{1000 \text{ K}\Omega}{153.65 \text{ K}\Omega} \frac{R_3}{R_i} = 6.50 \frac{R_3}{R_i}$$

$$\text{si } R_i = 10 \text{ K}\Omega \text{ entonces como } \frac{R_3}{R_i} = \frac{22.18}{6.50} = 3.41 \quad (4.33)$$

$$R_3 = 3.41 R_i = 3.41 * 10 \text{ K}\Omega = 34.1 \text{ K}\Omega \approx 50 \text{ K}\Omega$$

NOTA: Las aproximaciones son hechas con un reostato de precisión del valor indicado.

De esta manera se ha mostrado el diseño de los controladores comerciales PI y PD de las Figuras B.14 y Figuras B.16 los cuales se colocarán en serie, como se muestra en el diagrama de bloques de la Figura 4.4.

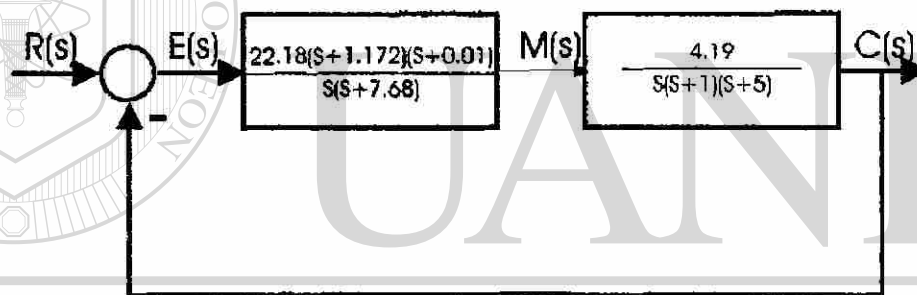


Fig. 4.4 Diagrama de bloques del sistema compensado en la rama directa. ®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

4-3 Compensación en la Rama de Retroalimentación

En esta sección se estudia un procedimiento diferente para lograr que la respuesta transitoria de un sistema se ajuste a los requerimientos establecidos para el diseño. Ahora es una compensación en la retroalimentación, la cual no es aplicable en todos los casos por restricciones que se detallan en el desarrollo, sin embargo, es muy útil en los casos en los cuales se puede aplicar ya que agrega un efecto derivativo aunado al proporcional, que sólo de esta manera se puede lograr, ya que por otros métodos únicamente se tiene realizaciones aproximadas.

Cuando se desea compensar un sistema de control lo que se busca es mejorar su funcionamiento y en la Figura 4.5 se presentan diagramas de bloques de las formas de conexión correcta para compensación en la retroalimentación.

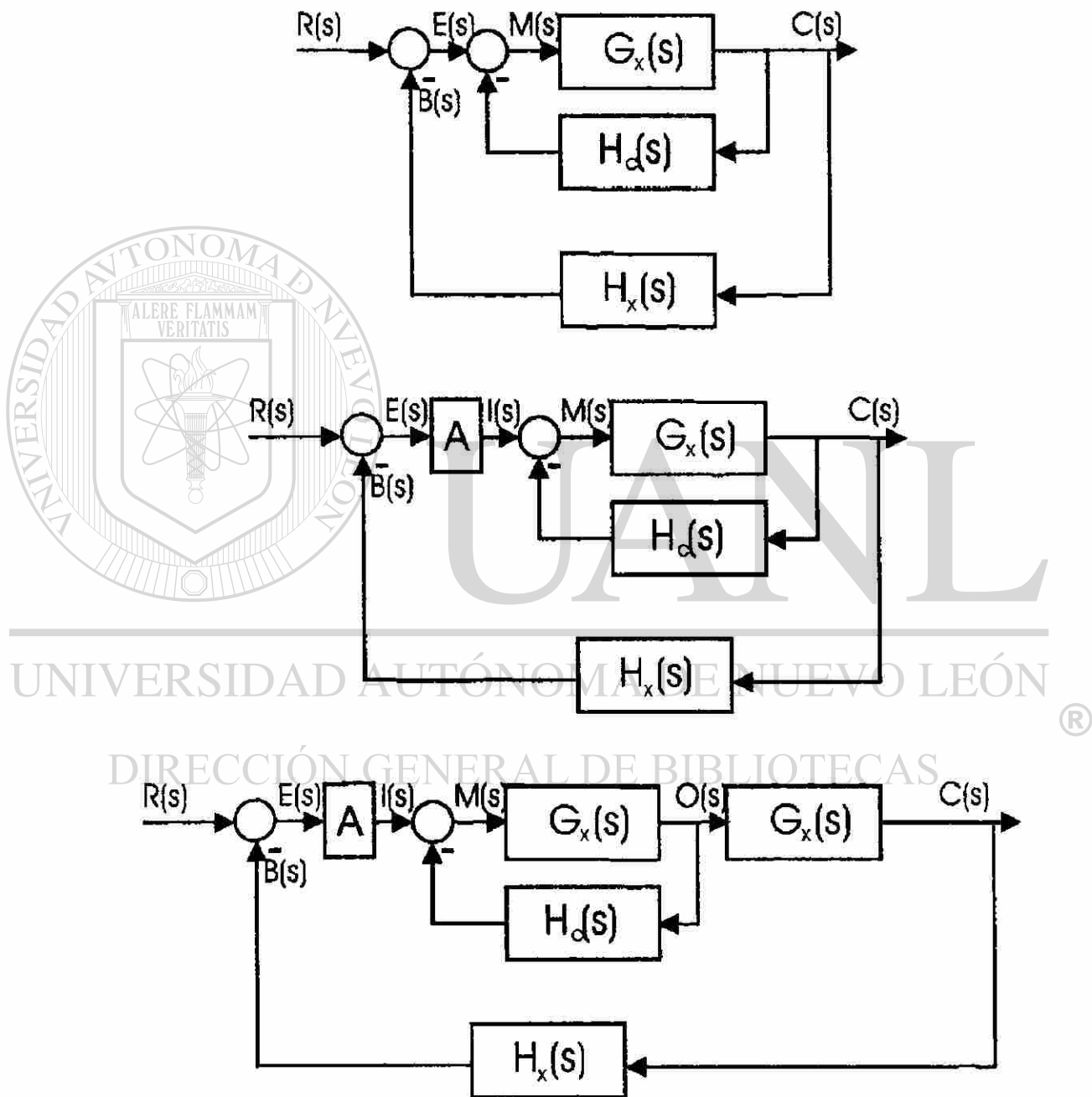


Fig. 4.5 Diagrama de Bloques, Compensación en la Retroalimentación.

De las formas de conexión para la compensación en la retroalimentación que se muestran en la Figura 4.5 se toma la segunda ya que es la más versátil, donde la retroalimentación clásica de señales generalmente viene de la salida de la planta. A efecto de presentar la metodología para esta forma de compensación se sigue un ejemplo, donde $G_x(s)$ está dado por la función de transferencia que se muestra en (4.34), $H_x(s)$ se considera unitaria y $H_c(s)$ será objeto del diseño, así como el valor A de la ganancia del amplificador.

$$G_x(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+5)} \quad (4.34)$$

El primer paso consiste en determinar la forma que debe tener $H_c(s)$ para que el sistema mejore su funcionamiento, para lo cual es necesario aplicar el álgebra de bloques sobre el segundo diagrama de la Figura 4.5. Una vez substituidos los datos del ejemplo, (4.35) muestra la función de transferencia $C(s)/I(s)$ donde se puede apreciar las formas que deberá tomar $H_c(s)$, las cuales se presentan en la Tabla 4.1.

$$\frac{C(s)}{I(s)} = \frac{K}{s(s+1)(s+5) + K H_c(s)} \quad (4.35)$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

TABLA 4.1 Forma de $H_c(s)$

Forma de $H_c(s)$	Tipo de Sistema
K_T	0
$K_T s$	0 y 1
$K_T s^2$	0, 1 y 2
$K_T s^3$	0, 1, 2 y 3

Para el ejemplo y dado que el sistema es tipo 1 la forma de $H_c(s)$ es $K_T s$, de acuerdo a la Tabla 4.1. Substituyendo la expresión en (4.35) resulta en la forma:

$$\frac{C(s)}{I(s)} = \frac{K}{s(s+1)(s+5) + K K_T s} \quad (4.36)$$

y de acuerdo al segundo diagrama de bloques de la Figura 4.5 se tiene:

$$GH(s) = \frac{K A}{s(s+1)(s+5) + K K_T s} \quad (4.37)$$

con esta forma se puede calcular el error de estado estable, usando el procedimiento del Apéndice A.

$$K_V = \lim_{s \rightarrow 0} sGH(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K A}{(s+1)(s+5) + K K_T} = \frac{K A}{5 + K K_T} \quad (4.38)$$

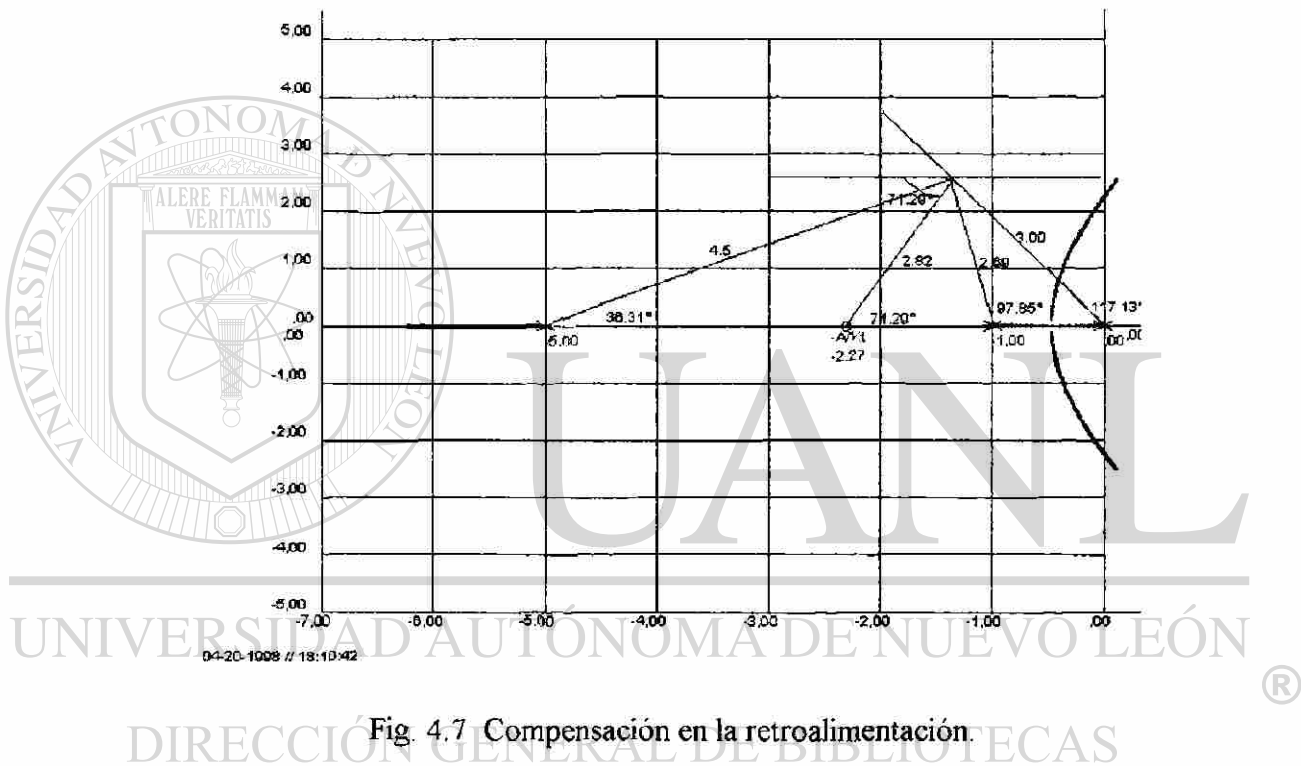
$$\% e_{ss} = \frac{100}{K_V} = \frac{5 + K K_T}{K A} * 100 \quad (4.39)$$

Se observa, por tanto, que el error de estado estable depende de los parámetros de diseño y del punto de operación seleccionado.

Para construir el lugar geométrico de las raíces y continuar con la compensación requerida es necesario encontrar la ecuación característica del sistema la cual se iguala a la unidad. La ecuación característica se obtiene de la función de transferencia total de lazo cerrado del sistema, o sea:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K A}{s(s+1)(s+5) + K K_T s + K A} \quad (4.40)$$

Para ilustrar el método de compensación en la retroalimentación, usando el criterio de polos dominantes y el Lugar Geométrico de las Raíces, se tomará el mismo sistema que representa la expresión (4-6) y que se usó en el caso de Compensación en la Rama Directa. Los requerimientos están dados en (4.13) y (4.14), con el valor del ángulo γ requerido para que el Lugar Geométrico de las Raíces pase por el nuevo punto de operación $\gamma = 71.29^\circ$. En la Figura 4.7 se encuentra la posición del cero a agregar, el cual se localiza en $-A/K_t = 2.27$.



El error de estado estable del sistema compensado en la retroalimentación se obtiene para $GH(s)$ de (4.37) y para calcular el coeficiente de error a la rampa K_V se usa (4.38) y el % Error de Estado Estable con (4.39), como se muestra en seguida:

$$K_V = \lim_{s \rightarrow 0} s GH(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K A}{(s+1)(s+5) + K K_T} = \frac{K A}{5 + K K_T} = \frac{12.89}{5 + 1.89} = 1.87 \quad (4.44)$$

$$\% e_{ss} = \frac{100}{K_v} = \frac{5 + K K_T}{K A} * 100 = \frac{100}{1.87} = 53.47\% \quad (4.45)$$

4.4 Algoritmos para Compensación en la Rama Directa usando Computadora Digital

En esta sección se presentan algoritmos los cuales al ser implementados en computadora digital permiten efectuar compensación en la Rama Directa para un sistema de control. Para lograr que un método eminentemente gráfico pueda desarrollarse en computadora digital es necesario hacer uso de la trigonometría plana.

El primer paso del diseño es verificar si el sistema original cumple con los requerimientos establecidos, esto se logra aplicando los algoritmos desarrollados para análisis en el apartado 3.3. Los resultados obtenidos se comparan con los requerimientos de diseño, como son: los transitorios % de Sobrepasso, Tiempo de Respuesta T_r , Tiempo de Subida T_p , Tiempo de Alcance Máximo T_a , y Tiempo de Asentamiento T_s . Si se cumple con los requerimientos la computadora desplegará un letrero que indica que el sistema no necesita compensación para transitorios. A continuación se verifica el error de estado estable y si cumple con lo establecido se desplegará un letrero que diga que el sistema no necesita compensación para error de estado estable. Si el sistema no cumple con cualquiera de los índices establecidos para el comportamiento transitorio, se seguirá el siguiente procedimiento:

Se obtiene la razón de amortiguamiento δ , y la nueva frecuencia natural de oscilación ω'_n usando (4.46) a (4.51).

$$\delta = \sqrt{\frac{\left(\ln \frac{\% \text{ Sobrepaso}}{100}\right)^2}{\pi^2 + \left(\ln \frac{\% \text{ Sobrepaso}}{100}\right)^2}} \quad (4.46)$$

$$\omega'_n = \frac{1}{T_R \delta} \quad (4.47)$$

$$\beta = \cos^{-1} \delta \text{ en rad} \quad (4.48)$$

$$\omega'_n = \frac{\pi - \beta}{T_P \sqrt{1 - \delta^2}} \quad (4.49)$$

$$\omega'_n = \frac{\pi}{T_A \sqrt{1 - \delta^2}} \quad (4.50)$$

$$\omega'_n = \frac{4}{T_s \delta} \quad (4.51)$$

NOTA: la ω'_n que se usará para el diseño será la mayor de las obtenidas de (4.47) a (4.51), pero multiplicada por el factor de seguridad 1.2.

Una vez obtenida la razón de amortiguamiento δ y la frecuencia natural de oscilación ω'_n , con base en la Figura 4.8, se aplicarán las siguientes relaciones:

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Para obtener el ángulo γ que ha de sumarse por la acción del compensador para que el nuevo punto de operación, localizado por el ángulo β y con la nueva frecuencia natural de oscilación ω'_n forme parte del lugar geométrico de las raíces se debe cumplir con:

$$\gamma = 180^\circ + \sum \text{Ángulos de los Polos} - \sum \text{Ángulos de los Ceros} \quad (4.52)$$

$$\langle \text{Polo o Cero} = \text{tg}^{-1} \frac{\omega'_n \sqrt{1 - \delta^2} - |P_i \text{ o } Z_j|}{|P_r \text{ o } Z_r| - \delta \omega'_n} \quad (4.53)$$

donde P_r = parte real valor del polo
 P_i = parte imaginaria del valor del polo
 Z_r = parte real del valor del cero
 Z_i = parte imaginaria del valor del cero

Si el ángulo resultante es positivo se toma su valor, si el ángulo resultante es negativo se le suman 180° . El ángulo γ que debe agregarse se logra colocando un polo y un cero tal que entre los dos proporcionen dicho ángulo γ . De acuerdo a la Figura 4.8 el ángulo del polo se determinara como:

$$\phi = \frac{180^\circ - \beta}{2} - \frac{\gamma}{2} \quad (4.54)$$

Con el ángulo ϕ y la localización del nuevo punto de operación se obtiene la posición del nuevo polo -b:

$$b = \frac{\omega'_n \sqrt{1 - \delta^2}}{\operatorname{tg} \phi} + \delta \omega'_n \quad (4.55)$$

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

El ángulo α del cero se deduce del triángulo formado con la línea de ω'_n y se obtiene por (4,56). La posición del nuevo cero -a se obtiene aplicando la ley de los senos al mismo triángulo.

$$\alpha = 180^\circ - \beta - \phi \quad (4.56)$$

$$a = \omega'_n \frac{\operatorname{sen} \phi}{\operatorname{sen} \alpha} \quad (4.57)$$

Con el procedimiento anterior se logra una compensación para los transitorios y como siguiente paso se calcula el % de error de estado estable, (3.68), (3.69) y (3.70), y se compara con los requerimientos, si se satisfacen el programa sólo desplegará el letrero de “El Sistema no requiere compensación del error de estado estable”, pero si no cumple con lo establecido se agrega un polo en el origen y un cero de valor 100 veces menor que el menor de los polos o ceros diferentes de cero. Con estos algoritmos y consideraciones se procede a diseñar un programa digital que compensa en la rama directa al sistema de control lineal.

$$K' = \frac{\prod \text{Distancias a Polos}}{\prod \text{Distancias a Ceros}} \quad (4.58)$$

$$\text{Distancia Polo o Cero} = \sqrt{\left((P_r \text{ o } Z_r) - \delta \omega_n \right)^2 + \left(\omega_n \sqrt{1 - \delta^2} - (P_i \text{ o } Z_i) \right)^2} \quad (4.59)$$

donde

P_r = parte real valor del polo

P_i = parte imaginaria del valor del polo

Z_r = parte real del valor del cero

Z_i = parte imaginaria del valor del cero

$$\% e_{ss} = \frac{100}{1 + C.E.} \text{ para Sistemas Tipo} = 0 \quad (4.60)$$

$$\% e_{ss} = \frac{100}{C.E.} \text{ para Sistemas Tipo} \neq 0 \quad (4.61)$$

$$C.E. = \frac{K \prod \text{Valores de Ceros} \neq 0}{\prod \text{Valores de Polos} \neq 0} \quad (4.62)$$

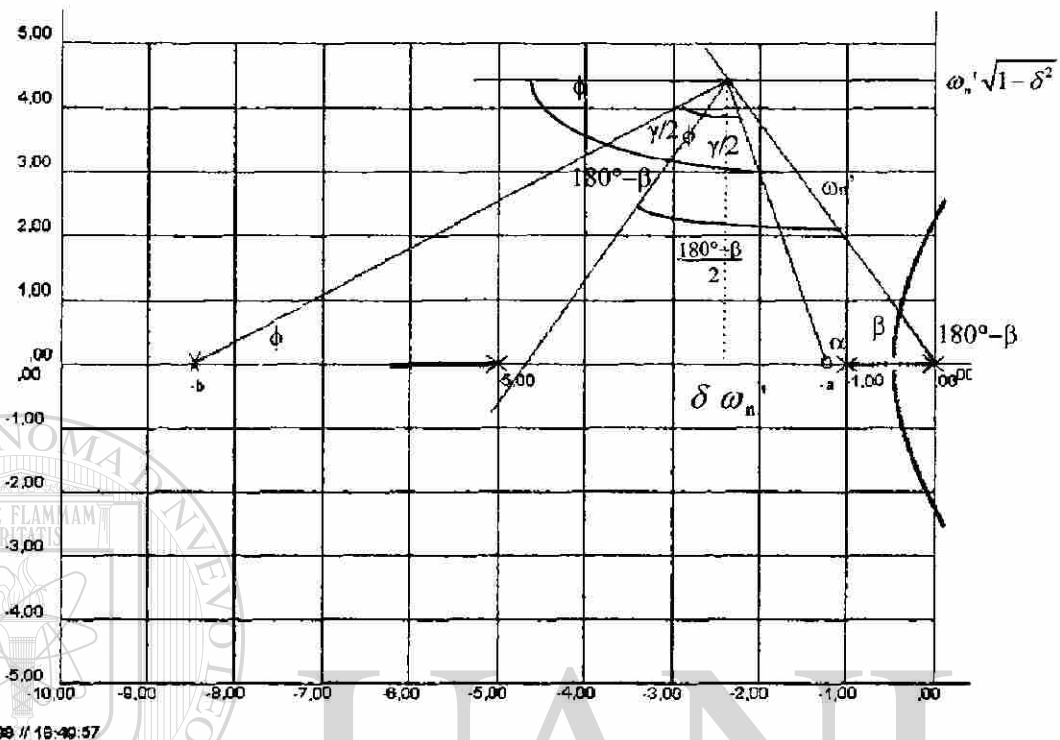


Fig. 4-8 Compensación en la Rama Directa, Método de Polos Dominantes y usando el Lugar Geométrico de las Raíces.

4.5 Algoritmos para Compensación en la Rama de Retroalimentación usando Computadora Digital

En esta sección se trata la forma de algunos algoritmos para lograr compensación en la Retroalimentación por medio de una computadora digital y como ya se estableció para lograr que un método gráfico pueda ser implementado en computadora digital es necesario hacer uso de la Trigonometría Plana.

Nuevamente el primer paso del diseño es verificar si el sistema original cumple con los requerimientos, lo cual se logra aplicando los algoritmos desarrollados en el apartado 3.3. Los resultados obtenidos se comparan con los requerimientos de diseño, tales como % de

Sobrepaso, Tiempo de Respuesta T_r , Tiempo de Subida T_p , Tiempo de Alcance Máximo T_a , y Tiempo de Asentamiento T_s . Si se cumple con estos requerimientos la computadora desplegará un letrero "El Sistema no necesita Compensación para los Transitorios". Pero, si el sistema no cumple con cualquiera de los requerimientos se seguirá los siguientes pasos:

Se obtiene la razón de amortiguamiento δ , y la nueva frecuencia natural de oscilación ω'_n por medio de (4.46) a (4.51). Una vez obtenida la razón de amortiguamiento δ y la frecuencia natural de oscilación ω'_n , con base en la Figura. 4.9, se obtiene las siguientes relaciones:

El ángulo γ que ha de sumarse por la acción del compensador para que el nuevo punto de operación y localizado por el ángulo β , así como que la nueva frecuencia natural de oscilación ω'_n forme parte del lugar geométrico de las raíces, se debe cumplir:

$$\gamma = 180^\circ + \sum \text{Angulos de los Polos} - \sum \text{Angulos de los Ceros} \quad (4.63)$$

$$\langle \text{Polo o Cero} = \text{tg}^{-1} \frac{\omega'_n \sqrt{1-\delta^2} - |P_i \text{ o } Z_i|}{|P_r \text{ o } Z_r| - \delta \omega'_n} \quad (4.53)$$

donde P_r = parte real valor del polo

P_i = parte imaginaria del valor del polo

Z_r = parte real del valor del cero

Z_i = parte imaginaria del valor del cero

Con la posición del nuevo cero y la línea que localiza al nuevo punto de operación se forma un triángulo y al aplicarle la ley de los senos se obtiene la posición del cero $-a/K_t$, tal que compense los transitorios del sistema, el procedimiento es como sigue:

$$\eta = 180^\circ - \beta - \gamma \quad (4.64)$$

$$\frac{-A}{K_t} = \omega'_n \frac{\text{sen } \eta}{\text{sen } \gamma} \quad (4.65)$$

Una desventaja de este método es que no puede compensar el error de estado estable.

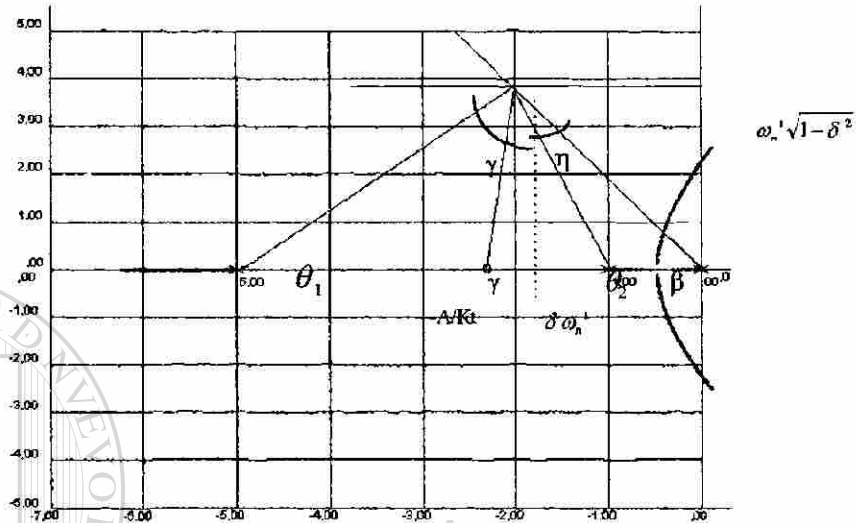


Fig. 4-9 Compensación en la Retroalimentación, Método de Polos Dominantes y el Lugar Geométrico de las Raíces.

4.6 Programa de Computadora Digital para Compensación en la Rama Directa

Para elaborar un programa de computadora digital para compensar en la rama directa por el Método de Polos Dominantes y el Lugar Geométrico de las Raíces, se utilizarán directamente los algoritmos propuestos para tal efecto en el Apartado 4.4. El programa requiere como datos la función de transferencia de lazo abierto $GH(s)$, los rangos y el incremento de la ganancia K , los requerimientos de diseño, como son: % de Sobrepaso o Razón de Amortiguamiento δ , Tiempo de Respuesta T_r , Tiempo de Subida T_p , Tiempo de Alcance Máximo T_a , Tiempo de Asentamiento T_s y el % de Error de Estado Estable $\% e_{ss}$.

El programa muestra como resultados los polos y ceros necesarios para la compensación en la rama directa, los tiempos de los transitorios, el % de Sobrepaso, y el %Error de Estado

Estable, así como una gráfica del diagrama del Lugar Geométrico de las Raíces mostrando el nuevo punto de operación.

4.7 Programa de Computadora Digital para Compensación en la Rama de Retroalimentación

Para implementar un programa de computadora digital para compensar en la retroalimentación por el Método de Polos Dominantes y el Lugar Geométrico de las Raíces, se usaran los algoritmos desarrollados para tal efecto en el Apartado 4.5. El programa requiere como datos la función de transferencia de lazo abierto $GH(s)$, los rangos y el incremento de la ganancia K , los requerimientos de diseño como: % de Sobrepasso o Razón de Amortiguamiento δ , Tiempo de Respuesta T_r , tiempo de Subida T_p , Tiempo de Alcance Máximo T_a , y Tiempo de Asentamiento T_s .

El programa presenta como resultados: el cero necesario para la compensación en la retroalimentación, los tiempos de los transitorios, y el % de Sobrepasso, así como un diagrama del Lugar Geométrico de las Raíces mostrando el nuevo punto de operación.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



CAPITULO 5

ANALISIS DE SISTEMAS DE CONTROL LINEALES EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

5.1 Métodos de Respuesta a la Frecuencia

El concepto *respuesta a la frecuencia* se refiere al comportamiento en el estado estable de un sistema sujeto a una señal senoidal de amplitud fija, pero con una frecuencia que varía en cierto rango. El concepto se ilustra en la Figura 5.1 en la cual un sistema lineal es excitado por una señal $a \text{ sen}(\omega t)$; la respuesta toma la forma $b \text{ sen}(\omega t + \phi)$. Es de interés la relación de amplitud b/a y el ángulo de fase ϕ de la señal de salida, las cuales son función de la frecuencia. El cociente b/a comúnmente se llama *relación de magnitud* y se designa como $M(\omega)$. El ángulo de fase (o de desfase como a veces se llama), se denotará por $\phi(\omega)$.

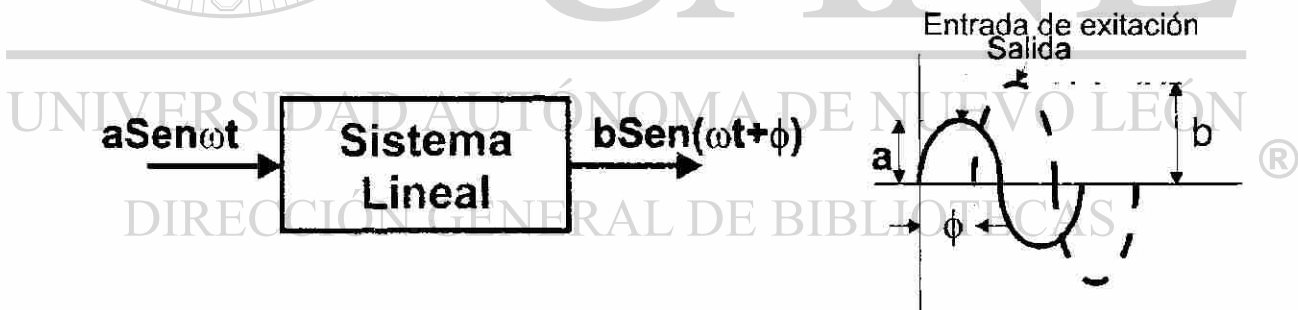


Fig. 5.1 Respuesta a la Frecuencia.

Este capítulo tratará sobre la determinación de la respuesta a la frecuencia, en forma analítica para sistemas lineales, aunque tales datos se pueden obtener experimentalmente si el sistema ya existe. El autor considera que el material presentado es importante puesto que proporciona medios convenientes para obtener la respuesta en el estado estable para cualquier sistema lineal sujeto a una excitación senoidal. El material también sirve de base y está

relacionado con el método de análisis para sistemas de control con el cual se cubre, en la siguiente sección, el tema relacionando con Nyquist [1] pag. 557.

5.2 El Criterio de Nyquist

La respuesta transitoria de un sistema de control lineal depende de la posición de las raíces de la ecuación característica, teniendo un comportamiento estable únicamente si todas las raíces se encuentran localizadas en la mitad izquierda del plano complejo s , es decir, si tienen parte real negativa. Una sola raíz en la mitad derecha del plano s , será causa de que el sistema se comporte en forma inestable. Existen dos razones por las cuales las raíces de la ecuación característica pueden cambiar de posición: una es por variaciones en la Ganancia K y otra por variaciones en la señal de entrada. En esta sección se trata el segundo caso manteniendo K constante, y variando la entrada senoidal. El cambio de excitación puede hacer que algunas de las raíces de la ecuación característica se coloquen en la mitad derecha del plano s y por consiguiente hacer que el sistema tenga un comportamiento inestable.

A fin de establecer la estabilidad para un sistema lineal se usa una gráfica en coordenadas polares, y por lo tanto es necesario relacionar la región de inestabilidad en el plano s con la identificación de inestabilidad en la gráfica en coordenadas polares del plano para $1 + GH(s)$. El plano $1 + GH(s)$ es el nombre que se dará al plano donde $1 + G(s)H(s)$ es mapeada, con s reemplazada por $j\omega$; tal es la terminología que se adoptará en este trabajo. La variable s es compleja, es decir $s = \sigma + j\omega$, y aun cuando puede tomar cualquier valor los valores de $s = \sigma + j\omega$ tienen un significado particular.

La función característica $1 + G(s)H(s)$ puede graficarse para valores específicos de s . La ecuación $1 + G(s)H(s) = 0$ es la unión entre el plano $1 + G(s)H(s)$ y el plano s . Si se escoge alguna línea sobre el plano s y valores de s a lo largo de esta línea se substituyen en la ecuación, se generará la curva correspondiente sobre el plano $1 + G(s)H(s)$. Si se escoge una

trayectoria C sobre el plano s, de manera que encierre a una raíz S_1 , como se muestra en la Figura 5.2, la pregunta es ¿qué curva se generará en el plano $1+G(s)H(s)$?

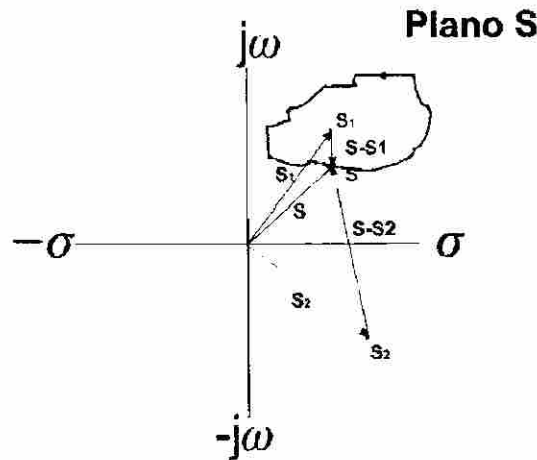


Fig. 5.2 Trayectoria en el Plano s.

Cada punto sobre el plano s puede considerarse como el extremo de un vector. En la Figura 5.2 el punto S_1 es el extremo del vector S_1 , el punto S_2 es el extremo del vector S_2 y el punto variable s es el extremo de un vector variable s. Los vectores $s - S_1$ y $s - S_2$ se obtienen por medio de la substracción vectorial y cada uno de los vectores diferencia es un factor de la ecuación $1+G(s)H(s) = 0$, la cual puede reescribirse explícitamente para el número específico de polos y ceros. No todos los polos y ceros se muestran en la Figura 5.2.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$1+G(s)H(s) = \frac{(s - S_1)(s - S_2)(s - S_3)}{(s - S_a)(s - S_b)(s - S_c)} \quad (5.1)$$

Si se escogen valores de s de manera que la trayectoria C sea una curva cerrada la cual es recorrida en la dirección de las manecillas del reloj y encerrando el cero S_1 entonces el vector $s - S_1$ efectúa una revolución completa en la dirección de las manecillas del reloj. En forma correspondiente, como todos los otros vectores diferencia son externos a la trayectoria que encierra S_1 , no efectúan revoluciones netas sobre el plano s conforme se recorre C. En

esta forma, el segundo miembro de (5.1) experimenta un cambio neto de fase de 360° en la dirección de las manecillas del reloj. La Figura 5.3 ilustra la trayectoria seguida sobre el plano $1+G(s)H(s)$, la cual corresponde a una inclusión neta de la raíz S_1 en el plano s . El resultado que debe considerarse es que el incluir un cero en el plano s corresponde a la inclusión del origen en el plano $1+G(s)H(s)$, ver Figura 5.3.

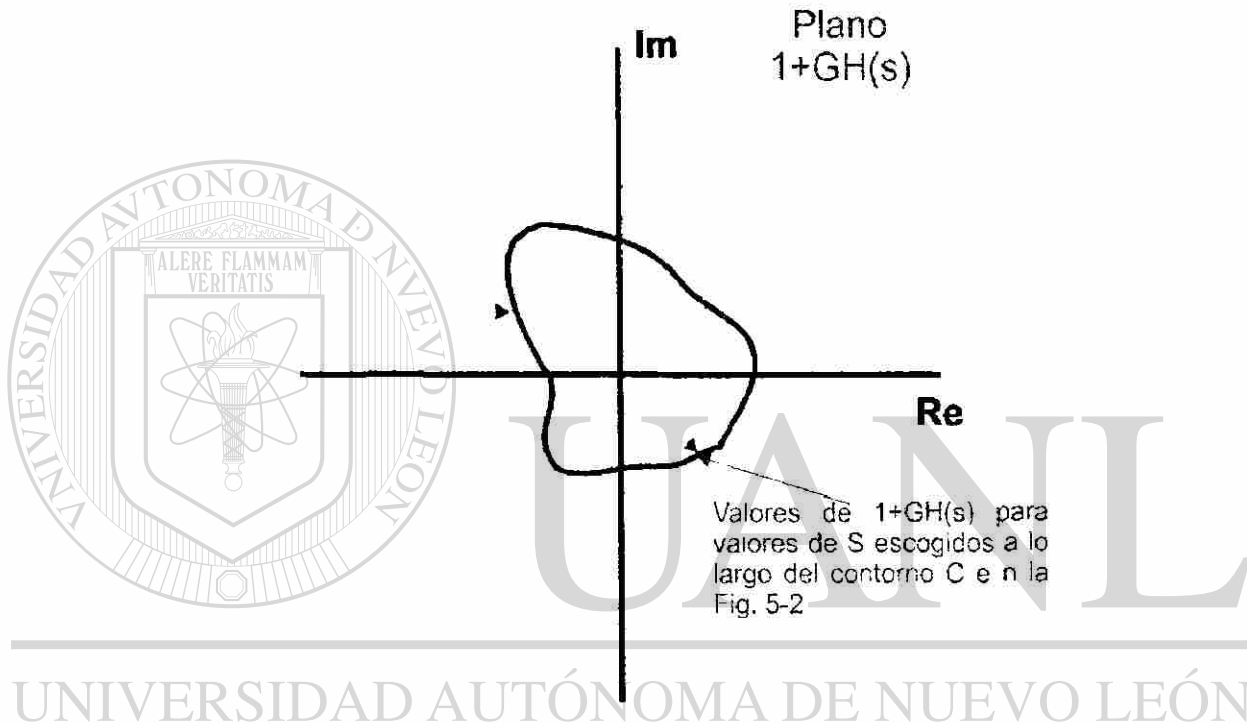


Fig. 5.3 El Plano $1+G(s)H(s)$.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

El plano $1+G(s)H(s)$ puede convertirse fácilmente al plano $G(s)H(s)$, que también se conoce como plano de la función de transferencia de lazo abierto, restando la unidad a cada miembro de la expresión (5.1).

$$G(s)H(s) = \frac{(s - S_1)(s - S_2)(s - S_3)}{(s - S_a)(s - S_b)(s - S_c)} - 1 \quad (5.2)$$

La gráfica que resulta será idéntica a $1+G(s)H(s)$, excepto que el origen para $1+G(s)H(s)$ se desplaza hacia la izquierda, específicamente se localiza en el punto $-1+j0$. Este proceso se ilustra en la Figura 5.4.

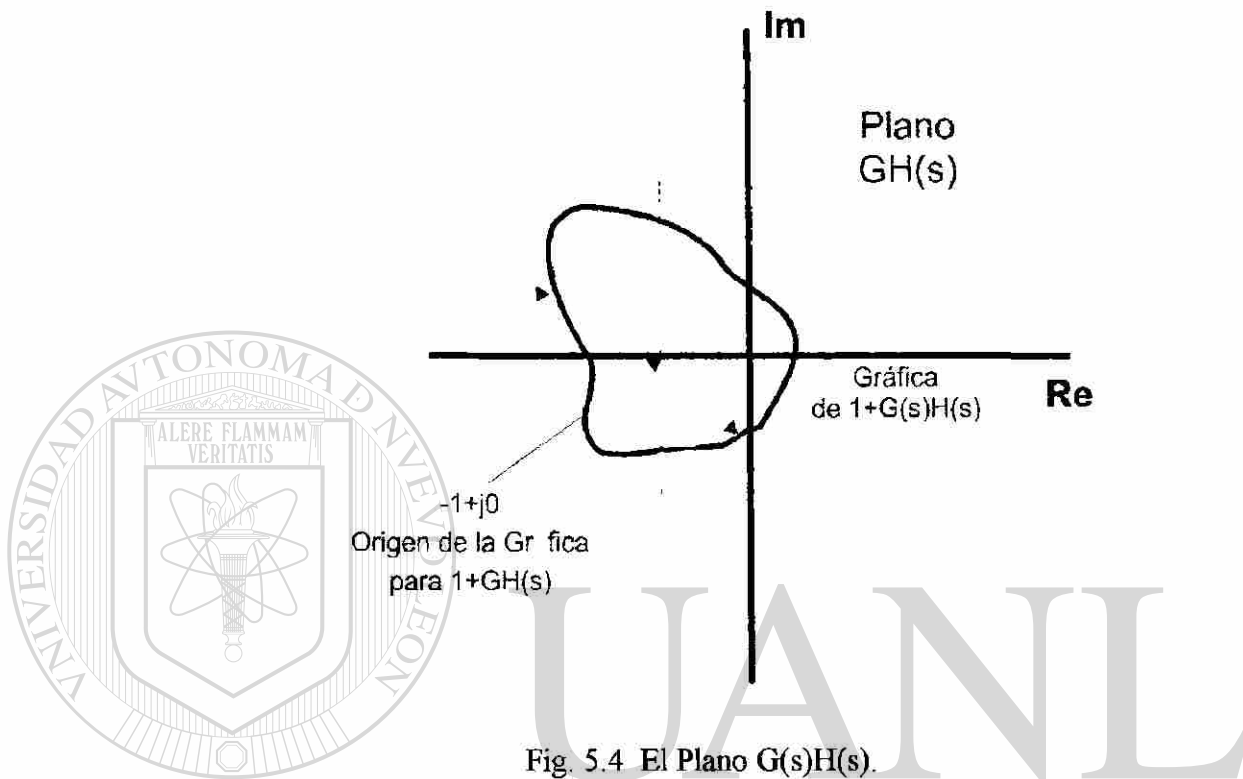


Fig. 5.4 El Plano $G(s)H(s)$.

El criterio para la inestabilidad de un sistema de lazo cerrado, a partir de la función de transferencia de lazo abierto, y graficada en el plano $G(s)H(s)$, es que el punto -1 esté incluido, cuando un cero en el semiplano derecho también lo esté. Si se supone una trayectoria amplia C , para que incluya dos ceros: S_1 y S_2 , entonces, hay dos vectores diferencia $s - S_1$ y $s - S_2$ los cuales giran 360° conforme la trayectoria efectúa una revolución; así $G(s)H(s)$ experimenta dos revoluciones completas alrededor de -1 . Para cada cero incluido por la trayectoria C , la gráfica de $G(s)H(s)$ incluye el punto -1 una vez. Pero al incluir un polo S_a en el semiplano derecho, o sea un polo en el denominador de (5.2), el resultado es una rotación negativa de 360° en la dirección de las manecillas del reloj para $G(s)H(s)$, o sea una inclusión en dirección contraria a las manecillas del reloj del punto -1 en

el plano $G(s)H(s)$. Por ejemplo, si C incluye tres ceros y un polo, la rotación neta sobre $G(s)H(s)$ es de $+720^\circ$ (dos revoluciones en dirección manecillas del reloj).

La clave de este análisis es cubrir la mitad derecha del plano s , incluyendo el eje imaginario. Entonces, sin tener que encontrar realmente todos los polos y ceros que estén en la región, la estabilidad de un sistema puede asegurarse sobre el plano $G(s)H(s)$ por la naturaleza de la inclusión del punto -1 . La Figura 5.5 ilustra la trayectoria seguida para cubrir todo el semiplano derecho. La gráfica principia en cero y procede hasta $+j\infty$ a lo largo del eje imaginario. Los contornos del plano son incluidos por un círculo trazado en la dirección manecillas del reloj con un radio que va desde $+j\infty$ hasta $-j\infty$. Finalmente, la región queda totalmente incluida regresando al origen desde $-j\infty$ a lo largo del eje imaginario.

En general, los valores que se emplean son $s = \pm j\omega$; puesto que al recorrer el eje imaginario, la parte real de s es cero ($\sigma = 0$). Para todos los puntos a lo largo del círculo infinito sobre el plano, $s \rightarrow \infty$. Para $s \rightarrow \infty$, $G(s)H(s)$ toma un valor finito o infinito. Comúnmente, cuando el denominador de $G(s)H(s)$ es de grado mayor que el numerador, $G(s)H(s)$ toma el valor cero. $G(s)H(s)$ se dice que mapea en el origen del plano $G(s)H(s)$. El proceso de trasladar una gráfica del plano s al plano $G(s)H(s)$ se llama *mapeo conforme* [21] pag. 607.

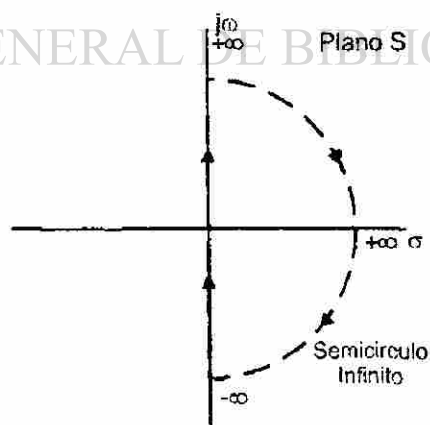


Fig. 5.5 Inclusión de la mitad derecha del Plano s .

Los puntos sobre el plano s que se encuentran sobre el eje imaginario desde 0 hasta $+j\infty$ mapean en el plano $G(s)H(s)$, substituyendo valores específicos de ω en $G(j\omega)H(j\omega)$ después de remplazar s por $j\omega$. La información obtenida corresponderá a la gráfica en coordenadas polares para la respuesta a la frecuencia de ciclo abierto del sistema.

El mapeo conforme correspondiente a la mitad negativa del eje imaginario y se simplifica por el hecho de que es la imagen de la mitad positiva. La gráfica en coordenadas polares que resulta para la función de transferencia de lazo abierto $G(s)H(s)$ se conoce como *Diagrama De Nyquist*.

A fin de ilustrar la obtención del diagrama de Nyquist se propone el sistema mostrado en la Figura 5.6 y se analiza la estabilidad del sistema.

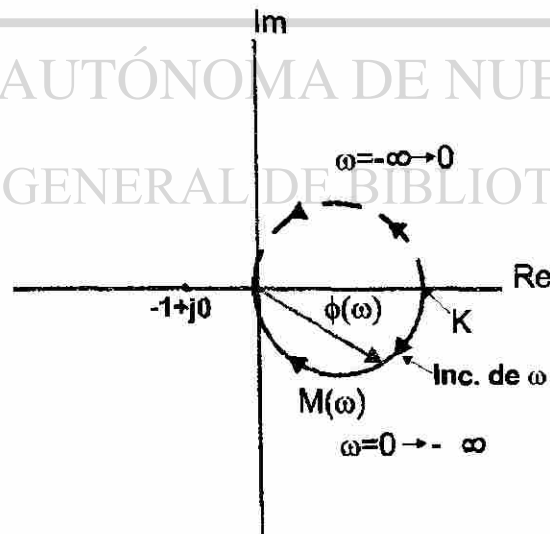
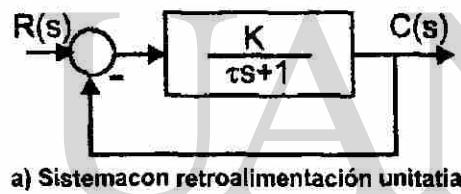


Fig. 5.6 Diagramas para analizar estabilidad.

En este caso $G(s)$ y $H(s) = 1$ por lo tanto,

$$G(s) = \frac{K}{(\tau s + 1)}, \quad G(s)H(s) = \frac{K}{(\tau s + 1)} \quad (5.3)$$

que tiene un solo polo $-1/\tau$, el cual no cae en el semiplano derecho. Substituyendo $s = j\omega$:

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K}{\tau j\omega + 1} \quad (5.4)$$

En $\omega = 0$, $G(j\omega)H(j\omega) = K$; y al $\omega \rightarrow \infty$, $G(j\omega)H(j\omega) \rightarrow 0$. Entre $\omega = 0$ y $\omega \rightarrow \infty$,

$G(j\omega)H(j\omega)$ toma valores con magnitud $M(\omega) = K \left\{ \frac{1}{[(\tau\omega)^2 + 1]^{1/2}} \right\}$ y un ángulo de fase

$\phi(\omega) = -\tan^{-1} \omega\tau$. El diagrama de Nyquist completo se da en la Figura 5.6. La curva sólida es el mapa de la mitad positiva del eje imaginario, mientras que la curva punteada es la imagen que se obtiene por el mapeo de la mitad negativa del eje imaginario.

La estabilidad del sistema se establece rápidamente, debido a que el punto -1 no está incluido por la trayectoria cerrada, no hay polos en el semiplano derecho, y no hay ceros en el semiplano derecho; por lo tanto se concluye que el sistema es estable.

Para una nueva función se traza el diagrama de Nyquist. El sistema se muestra en la Figura 5.7 y se desea analizar la estabilidad del sistema. En este caso:

$$G(s) = \frac{K}{s^2(\tau s + 1)} \quad \text{y} \quad H(s) = s \quad (5.5)$$

así:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(\tau s + 1)} \quad (5.6)$$

La presencia de s en el denominador indica que hay un polo en el origen del plano complejo s y la inclusión que es ilustrada en la Figura 5.7 debe modificarse para rodearlo. Aquí, se decide eliminar el polo de la inclusión del semiplano derecho, lo cual se logra siguiendo una trayectoria a lo largo de un arco de círculo pequeño, el cual se coloca a la derecha del origen, como se muestra en la Figura 5.7. La solución continua sustituyendo s por $j\omega$.

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K}{j\omega (\tau j\omega + 1)} \quad (5.7)$$

Conforme $\omega \rightarrow \pm \infty$, $G(j\omega)H(j\omega) \rightarrow 0$. La magnitud y la fase del vector $G(j\omega)H(j\omega)$ están dadas por:

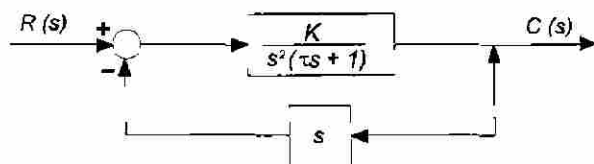
$$M(\omega) = \frac{K}{\omega \left[(\tau j\omega)^2 + 1 \right]^{1/2}} \quad (5.8)$$

$$\phi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(\tau\omega) \quad (5.9)$$

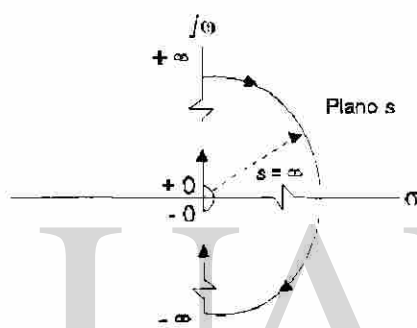
Por lo tanto, al variar ω desde un valor positivo hacia $+\infty$, $M(j\omega)$ disminuye en magnitud y $\phi(j\omega)$ varía desde $-\pi/2$ hasta $-\pi$. De esta manera, la porción continua de la curva se muestra en la Figura 5.7. En el problema real, la forma de la curva puede determinarse rápidamente localizando varios puntos para valores específicos de $j\omega$.

En la región de $j\omega = 0$, el vector s de la Figura 5.7 va desde $-\pi/2$ a $+\pi/2$ (rotación contraria a las manecillas del reloj) y tiene cierta magnitud γ , infinitamente pequeña. Así, $s =$

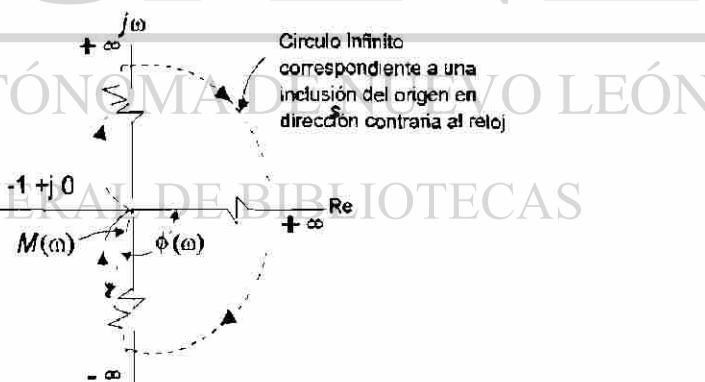
$\gamma e^{j\theta}$ donde $\gamma \rightarrow 0$ y $-\pi/2 \leq \theta \leq +\pi/2$. Como s aparece en el denominador de $G(j\omega)H(j\omega)$, el vector $G(j\omega)H(j\omega)$ es dependiente de $(1/\gamma)e^{-j\theta}$. El resultado es que $M(\omega) \rightarrow \infty$ y $\phi(\omega)$ varía de $-\pi/2$ a $+\pi/2$ en la dirección de las manecillas del reloj. El círculo infinito en el Diagrama de Nyquist puede ir solamente en la dirección indicada en la Figura 5.7.



a) Sistema con retroalimentación no unitaria



b) Inclusión en el plano s para el ejemplo 10-3



c) Gráfica de $G(j\omega)H(j\omega)$ para el ejemplo 10-3

Fig. 5.7 Figuras para ejemplo.

Por inspección, se observa que el sistema es estable, no hay polos en el semiplano derecho y el punto -1 nunca puede ser incluido por la gráfica de $G(s)H(s)$.

Resumiendo, la gráfica en coordenadas polares o diagrama de Nyquist, puede dar tres resultados generales, dependiendo de la naturaleza de la función de transferencia de ciclo cerrado del sistema que se está investigando.

Estos resultados son:

1. Puede haber inclusiones netas en sentido de las manecillas del reloj del punto -1 (puede ocurrir una o más).
2. Puede no haber inclusiones netas del punto -1.
3. Puede haber inclusiones netas del punto -1 en dirección contraria a las manecillas del reloj.

En el caso 1 el sistema es inestable porque la gráfica muestra que hay un exceso de ceros en la mitad derecha del plano s . Para el caso 2, el sistema puede ser estable si no hay ceros ni polos en el semiplano derecho. Sin embargo, es posible que haya un número igual de polos y ceros con componentes reales positivas, en cuyo caso el sistema será inestable (no puede haber ceros con componentes reales para operación estable). En el caso 3, hay polos con componentes reales positivas, pero podría haber también ceros, solamente que en un número menor. En los casos 2 y 3, se necesitan más pruebas para asegurar definitivamente si el sistema es estable o no. Un procedimiento es determinar el número de polos en el semiplano derecho; en muchos casos los sistemas no los tienen.

El análisis presentado aquí, utilizando la inclusión del punto -1 en la gráfica en coordenadas polares de $G(j\omega)H(j\omega)$ para asegurarse de la estabilidad, se conoce como *Criterio de Nyquist para estabilidad* [6] pag. 505. El criterio puede expresarse matemáticamente como:

$$Z = N + P$$

(5.10)

donde:

Z número de ceros en el semiplano derecho s.

N Inclusiones netas en dirección de la manecillas del reloj del punto -1 (una inclusión en dirección contraria a las manecillas del reloj tiene signo negativo).

P número de polos en el semiplano derecho de s.

Si el número de inclusiones netas en la dirección de las manecillas del reloj (+) y el número de polos con componentes reales se conocen, el número de ceros con componentes reales positivas puede determinarse rápidamente.

Una de las metas del diseñador de un control automático es formular un sistema que sea estable. Es razonable pensar que un sistema que en general es estable sea más fácil de sintetizar cuando se construye con elementos estables, que cuando uno o más de los elementos es inestable por sí mismo. A menudo un elemento que tiende a ser inestable se modifica para que tenga una operación estable antes de incorporarse como parte de un sistema completo.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

El hecho de que la mayoría de los sistemas de control prácticos no están compuestos por elementos inestables, reduce la posibilidad de existencia de un polo de $1+G(s)H(s)$ en el semiplano derecho de s. Por ejemplo, si el sistema de la Figura 5.7 está compuesto por dos elementos estables $G_1(s)$ y $H_2(s)$, donde:

$$G_1(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)} \quad \text{y} \quad H_2(s) = \frac{N_2(s)}{D_2(s)} \quad (5.11)$$

los ceros de $D_1(s)$ y $D_2(s)$ deben tener componentes reales negativas debido a que $D_1(s)$ y $D_2(s)$ son en realidad las funciones características para dichos elementos. Como los ceros de $D_1(s)$ y $D_2(s)$ son los polos de $1+G_1(s)H_2(s)$, no hay polos con componentes reales positivas. El resultado es que (5.11) se reduce.

$$Z = N \quad (5.12)$$

El Diagrama de Nyquist, para la mayoría de los sistemas de control prácticos, tomará entonces dos formas generales.

1. No hay inclusión del punto -1; de manera que el sistema es estable.
2. Hay una inclusión neta en dirección de las manecillas del reloj de punto -1, indicando un sistema inestable.

5.3 Márgenes de Ganancia y de Fase

Los *márgenes* para la *ganancia* y la *fase* de un sistema de control son cantidades que pueden usarse como criterios de diseño. Aun cuando son más útiles directamente en el método de análisis al usar los diagramas de Bode, conviene comentar brevemente su representación en el plano GH. Estos parámetros de diseño, en forma conjunta, dan una medida respecto a la inestabilidad de un sistema.

El *margen de ganancia* **MG** está definido como el número máximo por el cual se puede multiplicar la ganancia de un sistema sin que el sistema sea inestable. En la Figura 5.8 se muestra cómo se puede medir en el diagrama de Nyquist el *margen de ganancia* **MG**, esto se debe a que el sistema para alcanzar su estabilidad crítica, su gráfica correspondiente en forma de diagrama de Nyquist debe pasar exactamente por el punto -1 y esto sólo se logra multiplicando $|G(j\omega)|$, cuando $\phi(j\omega) = -180^\circ$, por su recíproco, por lo tanto $|G(j\omega)| = \frac{1}{MG}$.

El *margen de fase MF* está definido como el ángulo que aún se puede desfasar la salida de un sistema, con respecto a su entrada, sin que tenga un comportamiento inestable. En la Figura 5.8 se muestra cómo medir el MF. Puede observarse que es el ángulo que hay que atrasar la fase, cuando $|G(j\omega)| = 1$, para que la gráfica del diagrama de Nyquist pase por el punto -1.

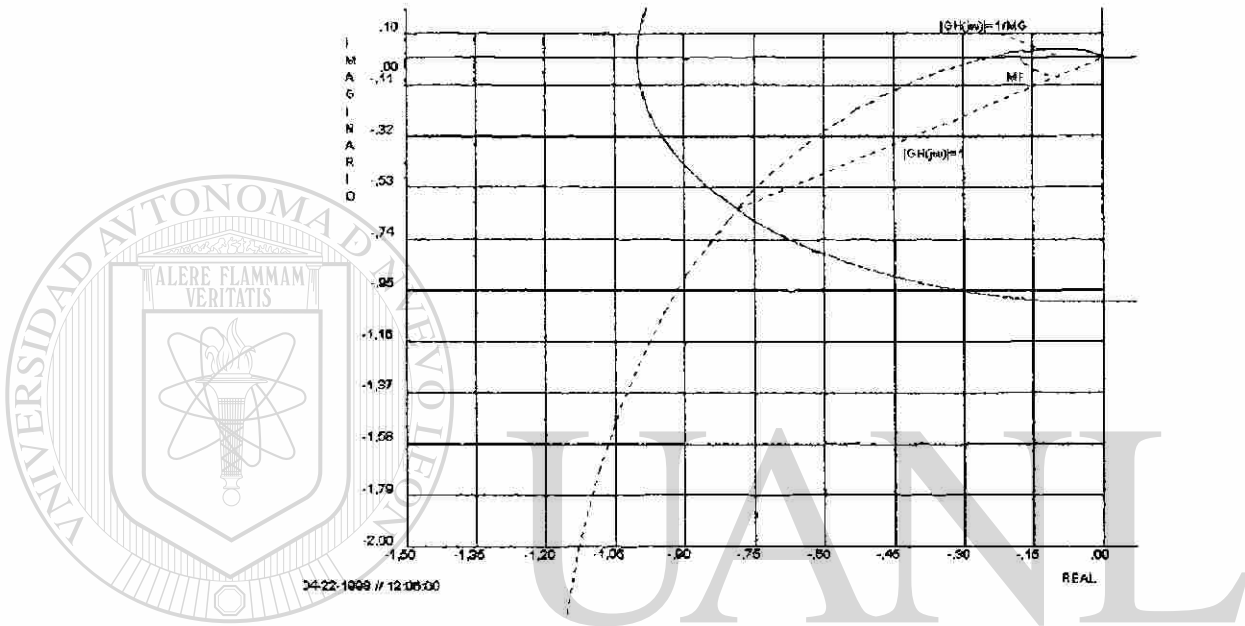


Fig. 5.8 Márgenes de Ganancia y de Fase.

Si se desea estudiar la estabilidad de la función de transferencia de lazo abierto (5.13),[®] determinando los márgenes de fase y de ganancia:

$$GH(s) = \frac{24}{s(s+2)(s+6)} \quad (5.13)$$

Para obtener el diagrama de Nyquist, Figura 5.9, primero se normaliza la función de transferencia de lazo abierto $GH(s)$:

$$GH(j\omega) = \frac{2}{j\omega \left(\frac{j\omega}{2} + 1 \right) \left(\frac{j\omega}{6} + 1 \right)}$$

y se usan las fórmulas para calcular la magnitud y el ángulo de fase como se muestra a continuación:

$$|GH(j\omega)| = \frac{2}{\omega \left[\left(\frac{\omega}{2} \right)^2 + 1 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{\omega}{6} \right)^2 + 1 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (5.14)$$

$$\phi_{GH}(j\omega) = -90^\circ - \operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega}{2} - \operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega}{6} \quad (5.15)$$

Al asignar valores a ω en (5.14) y (5.15) se obtiene la Tabla 5.1, de la cual se construye el diagrama de Nyquist de la Figura 5.9.

Tabla 5.1 Tabulación para el diagrama de Nyquist, $GH(s) = \frac{24}{s(s+2)(s+6)}$

ω	$ GH(j\omega) $	$\phi_{GH}(j\omega)$
0.1	19.970	-93.82°
0.2	9.940	-97.62°
0.4	4.890	-105.13°
0.8	2.300	-119.40°
1.0	1.760	-126.03°
2.0	0.670	-153.44°
4.0	0.180	-187.13°
8.0	0.036	-219.10°
9.0	0.026	-223.57°
10.0	0.020	-227.73°
20.0	0.002	-247.60°
40.0	.00037	-258.62°
80.0	.00005	-264.29°
100.0	.00002	-267.72°

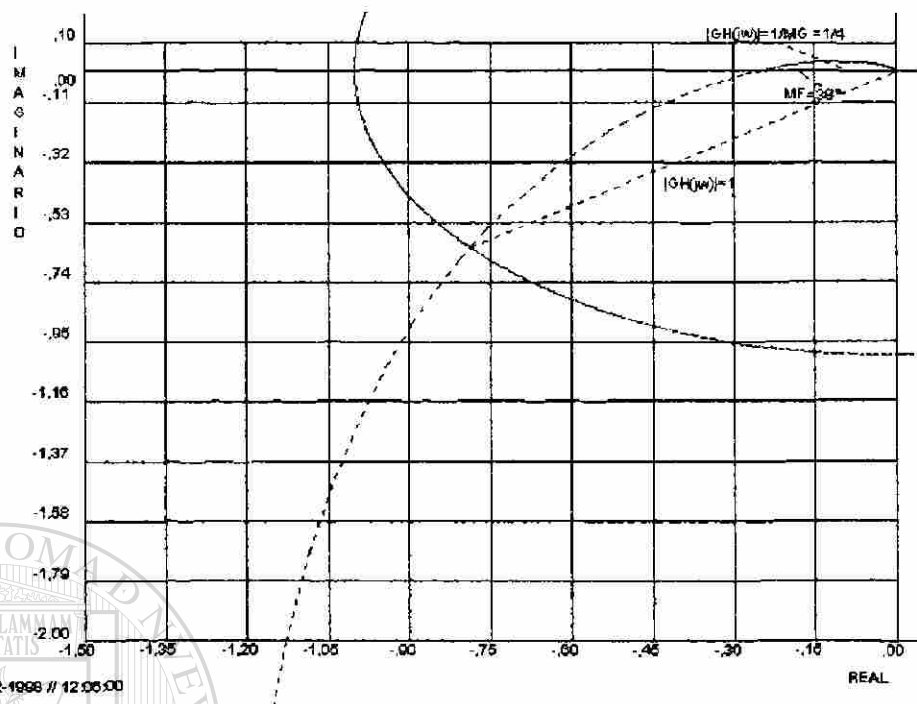


Fig. 5.9 Diagrama de Nyquist mostrando Margen de Fase y Margen de Ganancia.

De mediciones sobre la Figura 5.9 se tiene un margen de fase MF de 38° y el margen de ganancia MG de 4.0, dando como resultado con la aplicación del criterio de Nyquist que el sistema es estable.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

5.4 Diagramas de Bode

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

El análisis y la descripción del comportamiento dinámico de sistemas, estudiando su respuesta a la frecuencia puede llevarse a cabo usando gráficas en coordenadas rectangulares; además de las gráficas polares del inciso anterior. Las cantidades que se analizan son las relaciones de magnitud y de fase de las respuestas a la frecuencia tanto de lazo abierto como de lazo cerrado. Un diagrama de magnitud de Bode es una gráfica de la magnitud expresada en decibeles, de la función de transferencia, contra el logaritmo de la frecuencia. El ángulo de fase también puede graficarse como una función del logaritmo de la frecuencia.

Los diagramas de Bode pueden usarse para analizar el comportamiento de sistemas, identificando en las nuevas coordenadas y la naturaleza del sistema. La estabilidad, por ejemplo, se identificó en el plano s por la ausencia de raíces de la ecuación característica en el semiplano derecho. En el plano $GH(s)$, un sistema compuesto de elementos estables, es estable si el punto -1 no está incluido por la trayectoria cerrada de $G(j\omega)H(j\omega)$. Así mismo se mostrará que existe una interpretación del criterio simplificado de Nyquist, para asegurar la estabilidad del sistema en las gráficas semi-logarítmicas. Los márgenes de ganancia y de fase se pueden especificar nuevamente y el diseño del sistema puede establecerse a partir de la información de los diagramas de Bode.

La ventaja principal al usar los diagramas de Bode, en lugar de la gráfica en coordenadas polares, radica en la facilidad para su formación. Los sistemas de control a menudo están formados por componentes que son aproximados por bloques que contienen funciones de transferencia formadas por constantes, integraciones $1/j\omega$, diferenciaciones $j\omega$, constantes de tiempo $1/(j\omega\tau+1)$ y factores cuadráticos $1/[(\lambda j\omega)^2 + 2\delta\lambda j\omega + 1]$. El diagrama de Bode permite la superposición sistemática de efectos para los diferentes elementos tomados individualmente. Además, los diagramas de magnitud y las gráficas del ángulo de fase pueden obtenerse a partir del análisis experimental de respuesta a la frecuencia de componentes de un sistema, para aquellos casos donde no se conoce la función de transferencia. Las gráficas experimentales pueden usarse para establecer las relaciones de transferencia en el dominio s . Para elementos comerciales un diagrama de magnitud puede, en ocasiones, ser la única fuente de información dinámica disponible.

5.4.1 Conceptos sobre los Diagramas de Bode*

La función de transferencia de lazo abierto de un sistema de control, cuando s es reemplazada por $j\omega$, es en general, un número complejo.

$$G(j\omega)H(j\omega) = \alpha(\omega) + j\beta(\omega) = R\angle\phi = Re^{j\phi} \quad (5.16)$$

Si se desea tomar el logaritmo base 10 de $G(j\omega)H(j\omega)$, se tiene:

$$\log G(j\omega) H(j\omega) = \log R(\omega) + 0.4343j[\phi(\omega) + 2\pi n] \quad (5.17)$$

para $n = 1, 2, 3, \dots$ y donde:

$$R = [\alpha^2 + \beta^2]^{1/2} \quad (5.18)$$

y

$$\phi = \tan^{-1} \beta / \alpha \quad (5.19)$$

El ángulo $2\pi n$ está presente debido a la posibilidad de tener el vector en el mismo lugar sobre el plano complejo.

El valor principal del logaritmo base 10 para la expresión (5.17) es:

$$\log G(j\omega)H(j\omega) = \log R(\omega) + 0.434j\phi(\omega) \quad (5.20)$$

donde el logaritmo base 10 de $G(j\omega)H(j\omega)$ está compuesto por dos funciones de ω , la parte real $\log R(\omega)$ y la parte imaginaria $\phi(\omega)$. De esta forma, para representar completamente el logaritmo base 10 de la función de transferencia de ciclo abierto es necesario graficar la parte real $\log R(\omega)$ y la parte imaginaria $\phi(\omega)$ contra $\log \omega$.

Se puede considerar, como una forma general de $G(j\omega)H(j\omega)$ la relación de valores reales y complejos dada por:

$$G(j\omega)H(j\omega) = K \frac{N_1(j\omega)N_2(j\omega)}{D_1(j\omega)D_2(j\omega)} \quad (5.21)$$

y aplicando logaritmos; se obtienen dos gráficas que representan al $\log G(j\omega)H(j\omega)$, así:

$$\log|G(j\omega)H(j\omega)| = \log K + \log|N_1(j\omega)| + \log|N_2(j\omega)| - \log|D_1(j\omega)| - \log|D_2(j\omega)| \quad (5.22)$$

$$\phi_{GH}(j\omega) = \phi_{N_1}(j\omega) + \phi_{N_2}(j\omega) - \phi_{D_1}(j\omega) - \phi_{D_2}(j\omega) \quad (5.23)$$

El resultado de (5.22) puede expresarse en decibeles, multiplicando por 20, así:

$$20 \log|G(j\omega)H(j\omega)| = 20 \log K + 20 \log|N_1(j\omega)| + 20 \log|N_2(j\omega)| - 20 \log|D_1(j\omega)| - 20 \log|D_2(j\omega)| \quad (5.24)$$

Las gráficas de (5.23) y (5.24) vs el logaritmo base 10 de ω constituyen los diagramas de Bode. La sencillez de graficar un diagrama de Bode se debe a que las operaciones de multiplicación y división se han convertido en sumas y restas por las propiedades de los logaritmos. El procedimiento es calcular los valores en decibeles para cada uno de los factores de $G(j\omega)H(j\omega)$, para valores específicos de ω y combinarlos algebraicamente.

Se tienen varias alternativas al graficar el logaritmo base 10 de la magnitud de $G(j\omega)H(j\omega)$. El método que se adoptará será graficar el logaritmo de $|G(j\omega)H(j\omega)|$ expresado en decibeles, llamados “Magnitud (Decibeles)” contra ω en papel semi-logarítmico. La ordenada es $20 \log|G(j\omega)H(j\omega)|$ graficada en divisiones uniformemente espaciadas, mientras que la abscisa es ω graficada en una escala proporcional al logaritmo base 10. El número de ciclos logarítmicos o décadas, necesarios en la abscisa, se determina por el rango de frecuencia sobre el cual se va a estudiar el sistema. Una de las ventajas de usar el sistema en decibeles y los diagramas de Bode en papel semilogarítmico es el poder incluir en la misma hoja la gráfica del ángulo $\phi_{GH}(\omega)$, y así facilitar el hacer mediciones en las que se tengan que tomar en cuenta las dos gráficas.

5.4.2 Análisis de Estabilidad según Bode

Para los sistemas de control que satisfacen la restricción para la aplicación del criterio simplificado de Nyquist, el análisis de estabilidad en base a los diagramas de Bode es directo. La restricción es que el sistema sea estable en ciclo abierto y, como se ilustró con anterioridad, no debe haber polos de la función de transferencia de lazo abierto en el semiplano derecho.

La Figura 5.10 ilustra el criterio de estabilidad sobre el diagrama de Nyquist. Si el punto $-1+j0$ no está incluido por la gráfica cerrada de $G(j\omega)H(j\omega)$, el sistema es estable; si el punto $-1+j0$ está incluido, el sistema es inestable. En el umbral de inestabilidad la magnitud de $G(j\omega)H(j\omega)$ es la unidad y el ángulo de fase es -180° . En el diagrama de Bode, esto corresponde a 0 db ($20 \log(1) = 0$) y un ángulo de fase de -180° . La Figura 5.10 es un diagrama de Bode con tres posibilidades para una gráfica de magnitud y la correspondiente curva para el ángulo de fase. Si el ángulo de fase es menor que -180° cuando la atenuación es 0 db, el sistema es estable. La frecuencia a la cual la magnitud es de 0 db se llama *punto de cruce*, donde la frecuencia es ω_c . La curva de magnitud, con trazo punteado, ilustra la posición relativa de las gráficas de magnitud y el ángulo de fase para el umbral de inestabilidad. La combinación de la curva de ángulo de fase y la curva de magnitud en la posición más alta representa un sistema inestable.

En resumen, un sistema estable en ciclo abierto es estable en ciclo cerrado si el ángulo de fase es menor que -180° para la frecuencia correspondiente a 0 db. Inversamente, el sistema será estable si la magnitud en db es menor que 0, para la frecuencia correspondiente a un desfase de -180° .

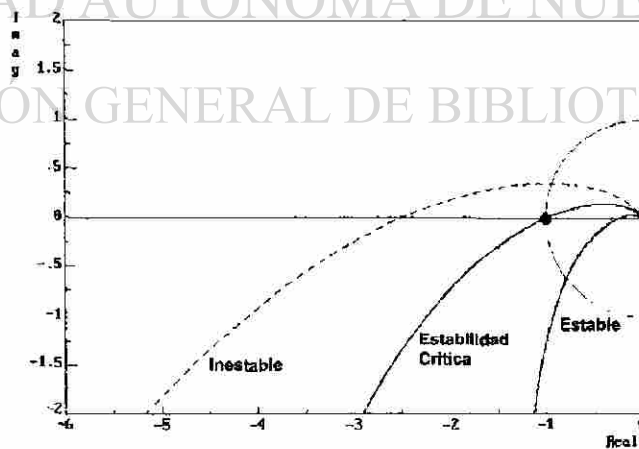
Margen de Ganancia. El Margen de Ganancia definido con anterioridad puede expresarse en decibeles, e identificarse sobre el diagrama de Bode como la cantidad de magnitud abajo de 0 db donde el ángulo de fase es -180° ; esto se ilustra en la Figura 5.11. Un

valor negativo de decibeles a un ángulo de fase de -180° corresponde a un margen de ganancia mayor que la unidad obtenido de los diagramas de Nyquist. La relación entre la magnitud en decibeles y el margen de ganancia obtenido con anterioridad es:

$$\text{Margen de Ganancia en decibeles} = 20\log(MG) \quad (5.25)$$

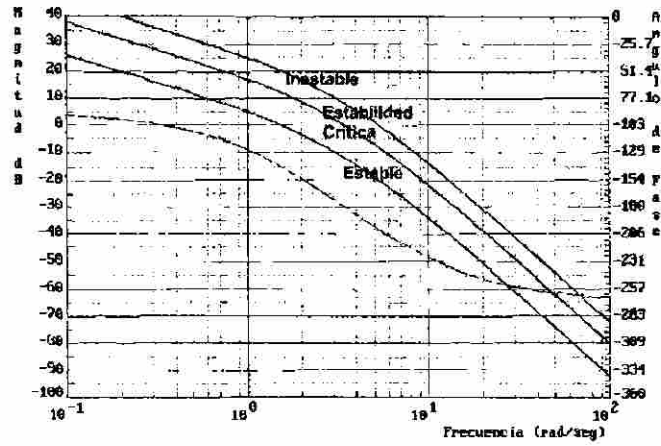
Por ejemplo, un margen de ganancia de 2 corresponde a 6.02 db, mientras que un margen de ganancia de 10 corresponde a una magnitud de 20 db. El margen de ganancia también puede especificarse en decibeles, así los márgenes de ganancia serán 6.02 db y 20 db respectivamente.

Margen de Fase. El margen de fase, concepto ya discutido con anterioridad, puede obtenerse directamente de los diagramas de Bode y es la diferencia de ángulos, a la frecuencia correspondiente a 0 db de magnitud, como se indica en la Figura 5.11. Los márgenes de ganancia y de fase pueden usarse en el proceso de diseño como una medida del comportamiento dinámico. En particular, pueden usarse como criterios para la determinación de la ganancia general del sistema.



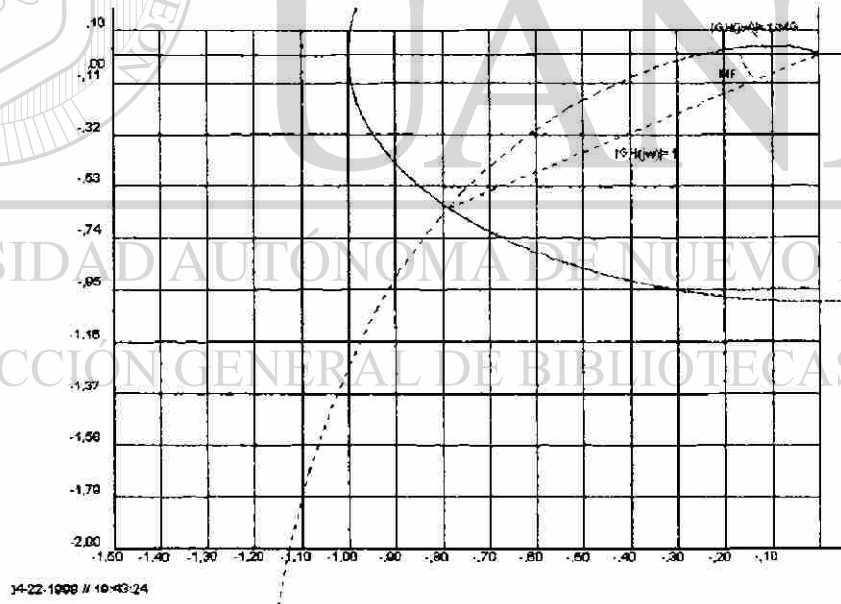
(a)

Fig. 5.10 Interpretación de la estabilidad sobre los diagramas de a) Nyquist y b) Bode.



(b)

Fig. 5.10 Interpretación de la estabilidad sobre los diagramas de a) Nyquist y b) Bode. (Continuación)



(a)

Fig. 5.11 Márgenes de Ganancia y de Fase en los diagramas de a) Nyquist y de b) Bode.

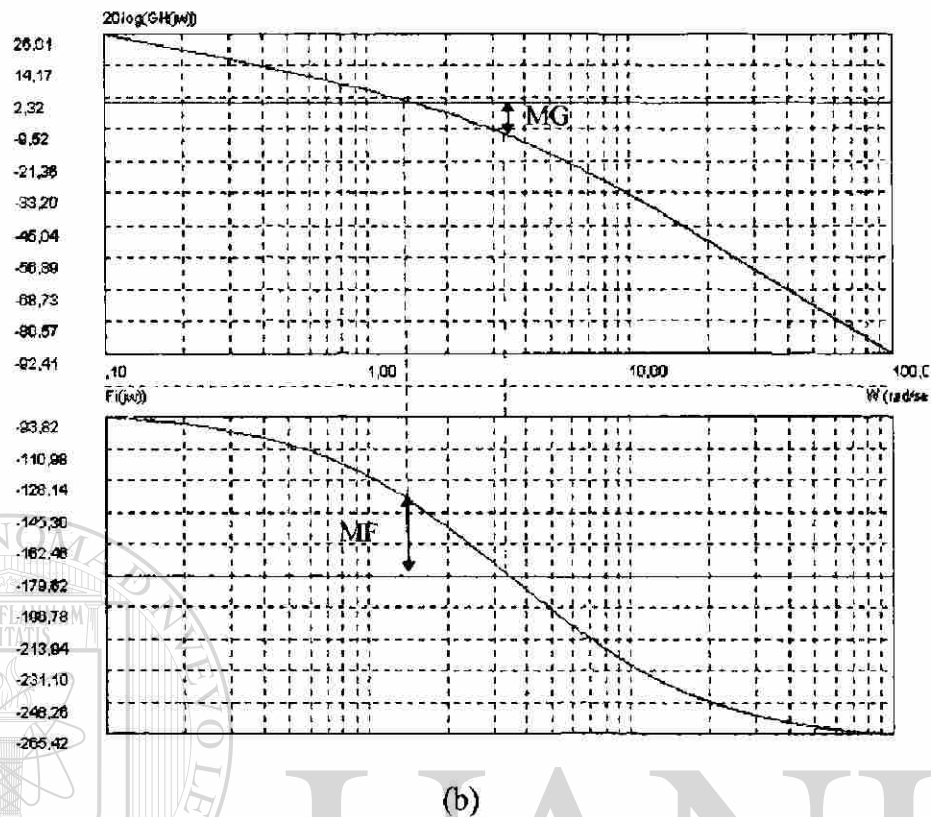


Fig. 5.11 Márgenes de Ganancia y de Fase en los diagramas de a) Nyquist y de b) Bode.
(Continuación)

Para obtener los márgenes de fase MF y de ganancia MG partiendo de los diagramas de Bode y aplicar el criterio de Nyquist para determinar estabilidad, se toma como ejemplo la siguiente función de transferencia de lazo abierto:

$$GH(s) = \frac{24}{s(s+2)(s+6)} \quad (5.26)$$

Para obtener el diagrama de Nyquist de la Figura 5.9, se normaliza la función de transferencia de lazo abierto $GH(s)$ resultando en:

$$GH(j\omega) = \frac{2}{j\omega \left(\frac{j\omega}{2} + 1 \right) \left(\frac{j\omega}{6} + 1 \right)} \quad (5.27)$$

y las fórmulas para calcular la magnitud y el ángulo de fase:

$$20\log|GH(j\omega)| = 20\log 2 - 20\log \omega - 20\log\left[\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 + 1\right]^{\frac{1}{2}} - 20\log\left[\left(\frac{\omega}{6}\right)^2 + 1\right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.28)$$

$$\phi_{GH}(j\omega) = -90^\circ - \operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega}{2} - \operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega}{6} \quad (5.29)$$

Al dar valores a ω en (5.28) y (5.29) se obtiene la Tabla 5.2 para construir el diagrama de Bode de la Figura 5.12.

Tabla 5.2 Valores para los diagramas de Bode

ω (rad/seg.)	$20 \log GH(j\omega) $	$\phi_{GH}(j\omega)$
0,1	26,00854989 db	-93,8109°
0,2	19,95196345 db	-97,607°
0,4	13,78980748 db	-105,099°
0,8	7,237690639 db	-119,347°
1	4,932507550 db	-125,967°
2	-3,46787486 db	-153,329°
4	-14,6073084 db	-186,963°
8	-28,782664 db	-218,878°
10	-33,9014976 db	-227,496°

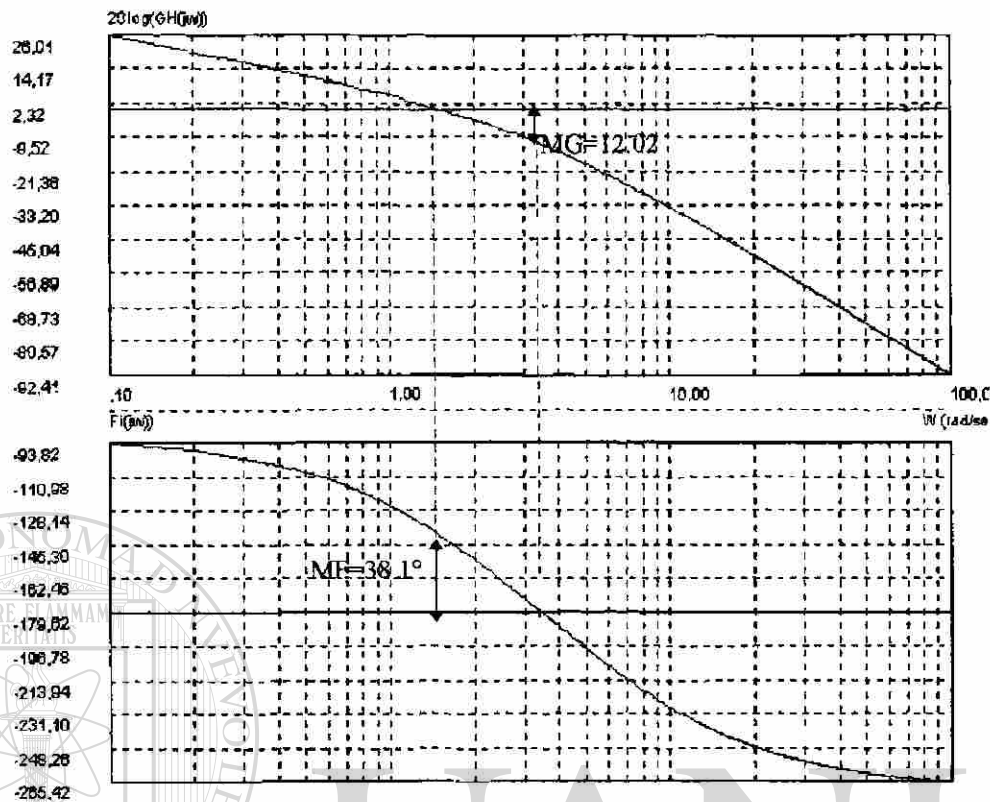


Fig. 5.12 Diagrama de Bode mostrando márgenes de fase, de ganancia y frecuencia de cruce.

Por medio de mediciones en la Figura 5.12 se tiene que el margen de fase $MF = 38.1^\circ$, el margen de ganancia $MG = 12.02$ db y la frecuencia de cruce $\omega_c = 1.53$ rad/seg, dando como resultado que al aplicar el Criterio de Nyquist que el sistema es estable.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

5.5 Carta de Nichols y Diagramas de Bode de Lazo Cerrado

Para efectuar un estudio de resonancia es necesario construir los diagramas de Bode de lazo cerrado, de los cuales se puede obtener la frecuencia de resonancia, la amplitud máxima de resonancia y el ancho de banda. Para obtener los diagramas de Bode de lazo cerrado por medios convencionales se puede usar la Carta de Nichols o fórmulas que se desarrollarán para tal efecto. La Carta de Nichols, Figura 5.14, está formada por una serie de gráficas de magnitud M en decibeles y ángulo de fase N en grados para un sistema en lazo cerrado con retroalimentación unitaria. Los datos de entrada a la Carta de Nichols están en función de la

frecuencia y son: para la ordenada la magnitud de lazo abierto expresada en decibels y en la abscisa el ángulo de fase de lazo abierto en grados. Como salida se tiene para cada frecuencia con diferentes pares de coordenadas, los valores correspondientes de M y N con el cruce de la coordenadas de entrada y consultando los valores correspondientes en cada curva. Los valores de M y N obtenidos de esta manera, junto con la frecuencia, forman una tabla que sirve para construir los diagramas de Bode de lazo cerrado. Estos diagramas, en coordenadas semi-logarítmicas, constan de gráficas de magnitud de lazo cerrado M en db y de ángulo de fase de lazo cerrado N en grados.

Para obtener las fórmulas con las que se construye la Carta de Nichols se parte de un sistema de control con retroalimentación unitaria, representado en forma canónica, Figura 5.13, de la cual se obtiene la función de transferencia de lazo cerrado:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)} \quad (5.30)$$

de donde se obtiene la magnitud y el ángulo de lazo cerrado normalizado para $s = j\omega$.

$$\frac{C}{R}(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)} \quad (5.31)$$

$$M(j\omega) = \left| \frac{C}{R}(j\omega) \right| = \left| \frac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)} \right| \quad (5.32)$$

$$N(j\omega) = \left\langle \frac{C}{R}(j\omega) \right\rangle = \left\langle \frac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)} \right\rangle \quad (5.33)$$

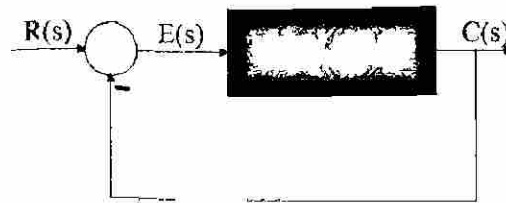


Fig. 5.13 Forma Canónica de un Sistema de Control con retroalimentación unitaria.

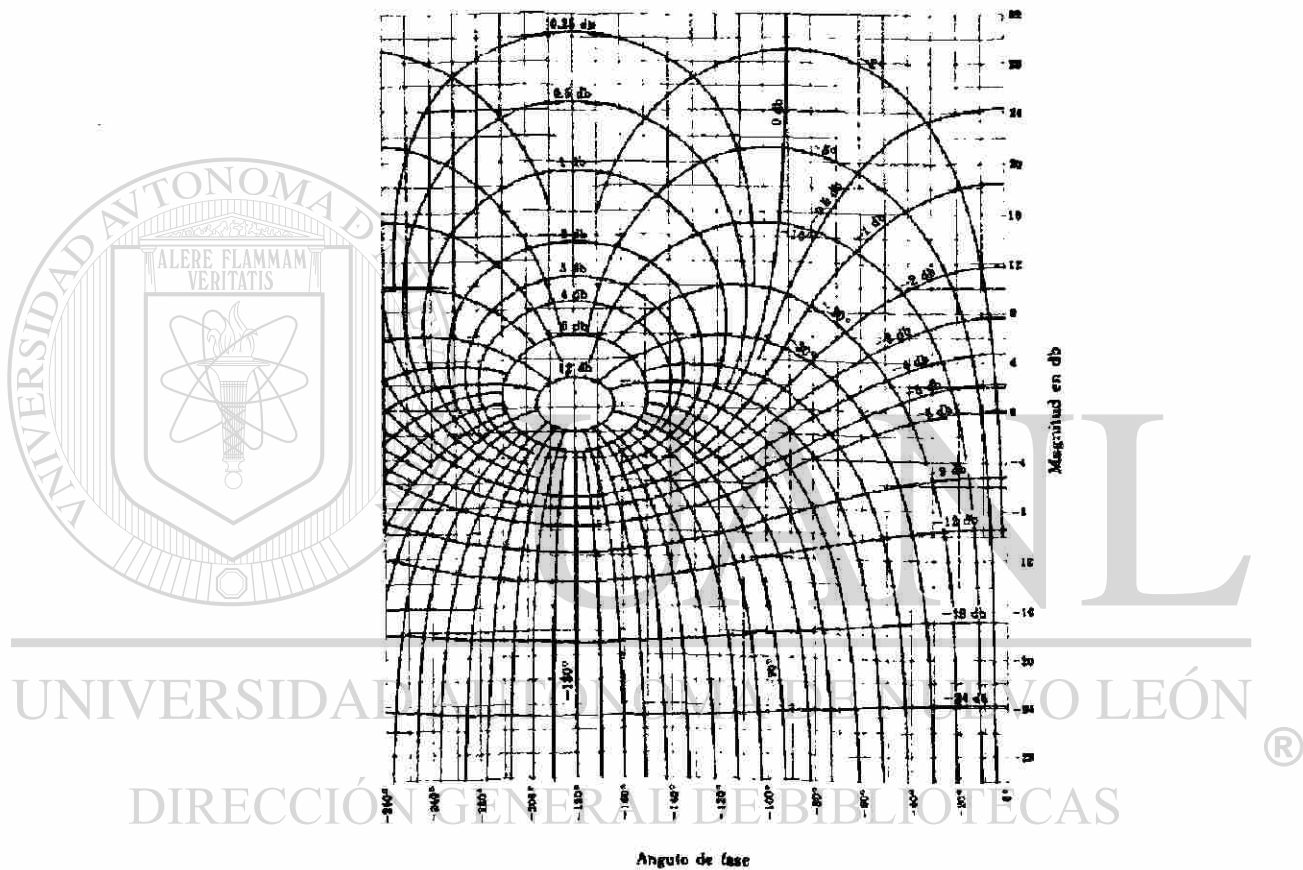


Fig. 5.14 Carta de Nichols.

Para obtener M y N es necesario expresar la función de transferencia en forma rectangular, tal como se expresa en (5.34), ya que las formas dependen los valores de M y N .

$$\frac{C}{R}(j\omega) = \frac{|G(j\omega)| \cos \phi_G(j\omega) + j|G(j\omega)| \operatorname{sen} \phi_G(j\omega)}{1 + |G(j\omega)| \cos \phi_G(j\omega) + j|G(j\omega)| \operatorname{sen} \phi_G(j\omega)} \quad (5.34)$$

donde:

$|G(j\omega)|$ magnitud en lazo abierto

$\phi_G(j\omega)$ ángulo de fase de lazo abierto

Para calcular M se utilizan las reglas para obtener la magnitud de una función compleja C/R, como se muestra:

$$M = \left| \frac{C}{R}(j\omega) \right| = \sqrt{\frac{|G(j\omega)|^2 \cos^2 \phi_G(j\omega) + |G(j\omega)|^2 \sin^2 \phi_G(j\omega)}{1 + 2 \cos \phi_G(j\omega) + |G(j\omega)|^2 \cos^2 \phi_G(j\omega) + |G(j\omega)|^2 \sin^2 \phi_G(j\omega)}} \quad (5.35)$$

simplificando

$$M = \sqrt{\frac{|G(j\omega)|^2}{1 + 2|G(j\omega)| \cos \phi_G(j\omega) + |G(j\omega)|^2}} \quad (5.36)$$

La magnitud de lazo cerrado M de (5.36) es un número real, lo mismo que la magnitud de lazo abierto $|G(j\omega)|$, y si se desea M expresada en decibeles (5.36), se tiene la siguiente modificación:

$$M \text{ db} = 20 \log \sqrt{\frac{|G(j\omega)|^2}{1 + 2|G(j\omega)| \cos \phi_G(j\omega) + |G(j\omega)|^2}} \quad (5.37)$$

El ángulo de fase de lazo cerrado N se calcula por medio de:

$$\frac{C}{R}(j\omega) = \frac{\left[|G(j\omega)| \cos \phi_G(j\omega) + j|G(j\omega)| \operatorname{sen} \phi_G(j\omega) \right] \left[1 + |G(j\omega)| \cos \phi_G(j\omega) - j|G(j\omega)| \operatorname{sen} \phi_G(j\omega) \right]}{\left[1 + |G(j\omega)| \cos \phi_G(j\omega) + j|G(j\omega)| \operatorname{sen} \phi_G(j\omega) \right] \left[1 + |G(j\omega)| \cos \phi_G(j\omega) - j|G(j\omega)| \operatorname{sen} \phi_G(j\omega) \right]} \quad (5.38)$$

y como el denominador de (5.38) es real, no influye en el ángulo de fase de lazo cerrado N , por lo tanto:

$$\left[|G(j\omega)| \cos \phi_G(j\omega) + j|G(j\omega)| \operatorname{sen} \phi_G(j\omega) \right] \left[1 + |G(j\omega)| \cos \phi_G(j\omega) - j|G(j\omega)| \operatorname{sen} \phi_G(j\omega) \right] \quad (5.39)$$

multiplicando y reduciendo:

$$\begin{aligned} & |G(j\omega)| \cos \phi_G(j\omega) + j|G(j\omega)| \operatorname{sen} \phi_G(j\omega) + |G(j\omega)|^2 \cos^2 \phi_G(j\omega) - j|G(j\omega)| \cos \phi_G(j\omega) \operatorname{sen} \phi_G(j\omega) \\ & + j|G(j\omega)| \cos \phi_G(j\omega) \operatorname{sen} \phi_G(j\omega) + |G(j\omega)|^2 \operatorname{sen}^2 \phi_G(j\omega) \end{aligned} \quad (5.40)$$

$$\left[|G(j\omega)| \cos \phi_G(j\omega) + j|G(j\omega)| \operatorname{sen} \phi_G(j\omega) + |G(j\omega)|^2 \right] \quad (5.41)$$

al calcular el ángulo para (5.41) se obtiene el ángulo de fase de lazo cerrado N .

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$N = \operatorname{tg}^{-1} \frac{|G(j\omega)| \operatorname{sen} \phi_G(j\omega)}{|G(j\omega)| \cos \phi_G(j\omega) + |G(j\omega)|^2} \quad (5.42)$$

Para los diagramas de Bode de lazo cerrado construidos a partir de la tabulación obtenida, ya sea usando la Carta de Nichols o a partir de las fórmulas (5.37).

Como ejemplo se calcula el ancho de banda (ω_1 y ω_2), la frecuencia de resonancia ω_c , y la amplitud máxima M_{\max} de los diagramas de Bode de lazo cerrado, tomando como ejemplo la función de transferencia de lazo abierto siguiente:

$$GH(s) = \frac{24}{s(s+2)(s+6)} \quad (5.43)$$

Para obtener el diagrama de Bode de lazo cerrado de la Figura 5.15, se normaliza la función de transferencia de lazo abierto $GH(s)$:

$$GH(j\omega) = \frac{2}{j\omega \left(\frac{j\omega}{2} + 1\right) \left(\frac{j\omega}{6} + 1\right)} \quad (5.44)$$

Ahora las fórmulas para calcular la magnitud y el ángulo de fase en lazo abierto:

$$20 \log |GH(j\omega)| = 20 \log 2 - 20 \log \omega - 20 \log \left[\left(\frac{\omega}{2} \right)^2 + 1 \right]^{\frac{1}{2}} - 20 \log \left[\left(\frac{\omega}{6} \right)^2 + 1 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.45)$$

$$\phi_{GH}(j\omega) = -90^\circ - \operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega}{2} - \operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega}{6} \quad (5.46)$$

Asignando valores a ω en (5.45) y (5.46) se obtiene la primera parte de la Tabla 5.3. La segunda parte de la tabla, para construir el diagrama de Bode de lazo cerrado de la Figura 5.15, se obtiene a partir de la Carta de Nichols o de las fórmulas (5.37) y (5.42).

Tabla 5.3 Valores para el diagrama de Bode de Lazo Cerrado

ω	$20 \log GH(j\omega) $	$\phi_{GH}(j\omega)$	M db	N
0.1	26.00db	-93.82°	0.019db	-2.86°
0.2	19.95db	-97.62°	0.074db	-5.76°
0.4	13.79db	-105.13°	0.296db	-11.75°
0.8	7.23db	-119.40°	1.190db	-25.66°
1.0	4.93db	-126.03°	1.856db	-34.45°
2.0	-3.46db	-153.44°	2.580db	-116.91°
4.0	-14.60db	-187.13°	-12.838db	-188.92°
8.0	-28.78db	-219.10°	-28.536db	-220.53°
10.0	-33.90db	-227.73°	-33.784db	-228.67°

De la Figura 5.15 se tiene que el ancho de banda es $\omega_1 = 0.236$ rad./seg. y $\omega_2 = 2.3$ rad./seg., la frecuencia de resonancia $\omega_c = 1.6$ rad./seg., y una amplitud máxima de $M_{\max} = 3.815$.

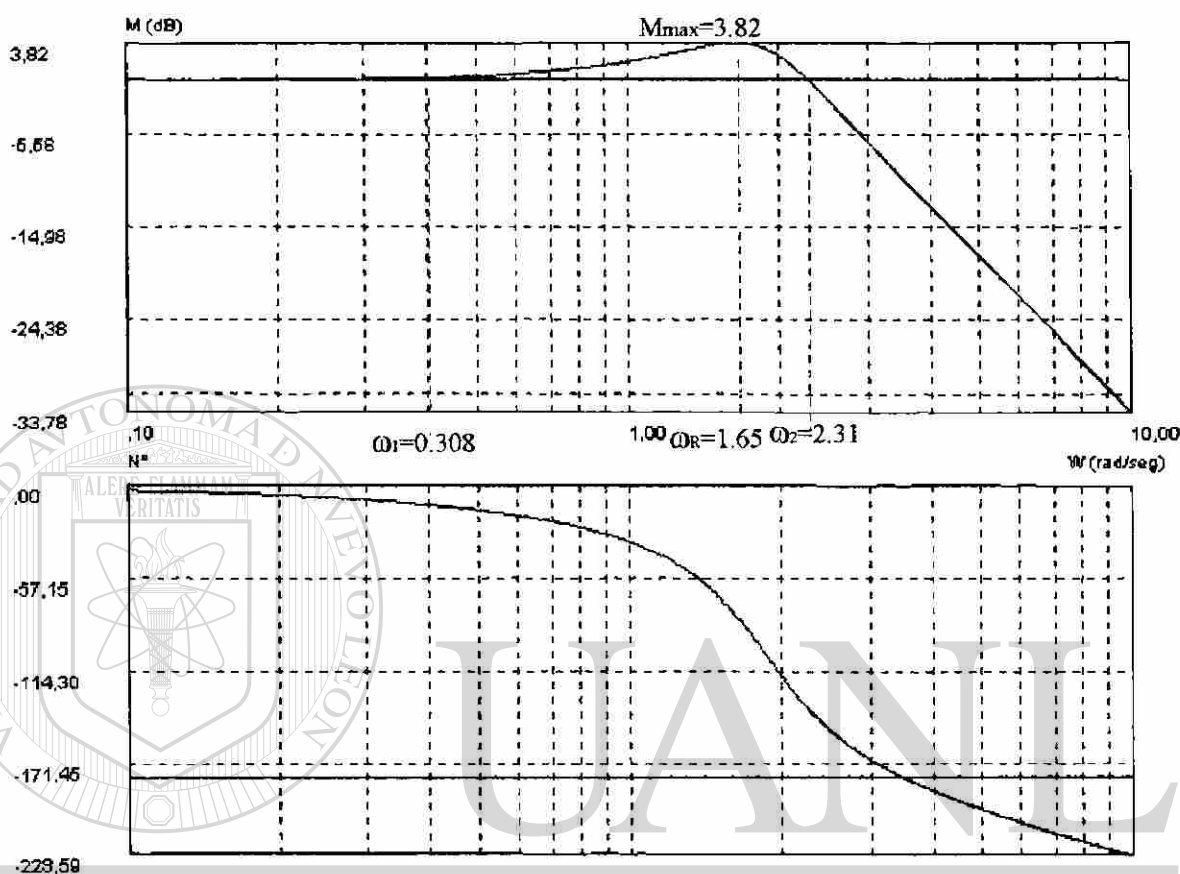


Fig. 5.15. Diagrama de Bode de lazo cerrado mostrando el ancho de banda, la frecuencia de resonancia, y la amplitud máxima.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

5.6 Algoritmos en computadora digital para el Análisis en el Dominio de la Frecuencia

Para formar un programa de computadora digital que efectúe el análisis en el dominio de la frecuencia para un sistema de control lineal, es necesario desarrollar una serie de algoritmos para que la computadora reciba los datos del sistema a analizar, los manipule y arroje los resultados deseados. De acuerdo a los conceptos presentados en los apartados 5.1 a 5.5 es necesario, para llevar a cabo un análisis en el dominio de la frecuencia, construir los diagramas de Nyquist, los diagramas de Bode de lazo abierto, y de lazo cerrado. Con los diagramas de Nyquist se puede obtener el margen de ganancia MG y el margen de fase MF, de los

diagramas de Bode de lazo abierto se puede determinar los márgenes MF y MG y la frecuencia de cruce ω_c , y de los diagramas de Bode de lazo cerrado el ancho de banda ($\omega_1 - \omega_2$), la frecuencia de resonancia ω_c y la amplitud máxima M_{\max} .

5.6.1 Diagrama de Nyquist

Para construir el diagrama de Nyquist se tiene como datos la función de transferencia de lazo abierto $GH(s)$, el rango de frecuencias ω_{\min} y ω_{\max} , y el número de puntos a graficar. La función de transferencia de lazo abierto se puede establecer de la siguiente manera:

- Cantidad de ceros reales
- Cantidad de ceros complejos conjugados
- Cantidad de polos reales
- Cantidad de polos complejos conjugados
- Valor de la ganancia K
- Ceros reales en orden y con signo
- Ceros complejos conjugados en forma de términos cuadráticos $as^2 + bs + c$.
- Polos reales en orden y con signo
- Polos complejos conjugados en forma de términos cuadráticos $as^2 + bs + c$.
- Frecuencia inicial y frecuencia final
- Cantidad de puntos a graficar

A fin de utilizar los datos de polos y ceros para elaborar la tabla y construir el diagrama de Nyquist se usan los algoritmos mostrados en (5.48), para la magnitud en lazo abierto $|GH(j\omega)|$ y la expresión (5.52) para obtener el ángulo de fase en lazo abierto $\phi_{GH}(j\omega)$.

$$K_B = \frac{K \prod_{j=1}^z Z_j \prod_{k=1}^{z/2} c_k}{\prod_{i=1}^p P_i \prod_{l=1}^{p/2} c_l} \quad (5.47)$$

$$|GH(j\omega)| = \frac{K_B \prod_{j=1}^z \left[\left(\frac{\omega}{Z_j} \right)^2 + 1 \right]^{1/2} \prod_{k=1}^{z/2} \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{c_k} \right)^2 + \left(\frac{b_k}{c_k} \omega \right)^2 \right]^{1/2}}{\prod_{i=1}^p \left[\left(\frac{\omega}{P_i} \right)^2 + 1 \right]^{1/2} \prod_{l=1}^{p/2} \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{c_l} \right)^2 + \left(\frac{b_l}{c_l} \omega \right)^2 \right]^{1/2}} \quad (5.48)$$

$$\phi_{GH}(j\omega) = \sum_{j=1}^z \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\omega}{Z_j} \right) + \sum_{k=1}^{z/2} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{b_k \omega}{1 - \frac{\omega^2}{c_k}} \right) - \sum_{i=1}^p \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\omega}{P_i} \right) - \sum_{l=1}^{p/2} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{b_l \omega}{1 - \frac{\omega^2}{c_l}} \right) \quad (5.49)$$

NOTA: Cuando un cero o un polo tomen el valor de cero entonces en la fórmula de la magnitud $|GH(j\omega)|$, si es un polo se divide por ω y si es un cero se multiplica por ω ; y en la fórmula de ángulo de fase $\phi_{GH}(j\omega)$, si es un polo se le restan 90° y si es un cero se le suman 90° .

Después de elaborar una rutina de computadora digital para efectuar estos dos algoritmos, incluyendo el procedimiento descrito en la **NOTA**, se dan valores a ω para formar una tabulación como la mostrada en la Tabla 5.1. Los valores a ω se asignan de acuerdo a los rangos especificados en los datos llevándolos a la década más cercana, para lo cual se cuenta el número de décadas y el número de puntos se divide proporcionalmente en cada década a fin de calcular el valor que se dará a ω .

Para obtener el margen de fase MF se requiere encontrar el valor de ω que hace unitario el valor de la magnitud, calculado con (5.48), y se evalúa el valor del ángulo de fase con (5.49). El resultado se compara con -180° y la diferencia resulta ser el margen de fase MF.

Para encontrar el valor correspondiente de ω se analiza la tabla a fin de determinar el valor al cual la magnitud $|GH(j\omega)|$ es unitaria; se interpola entre valores de ω para encontrar el valor deseado.

Para calcular el valor del margen de ganancia MG se requiere encontrar el valor de ω que haga el valor del ángulo de fase, calculado con (5.49), de -180° y se evalúa el valor de la magnitud con (5.48). El inverso del resultado será el margen de ganancia MG. Para encontrar el valor de ω se busca en la tabla los valores de ω para los cuales $\phi_{GH}(j\omega) = -180^\circ$ y se interpola entre los valores de ω a fin de encontrar el valor del ángulo de fase.

Para graficar en coordenadas polares en el plano GH(s), los datos obtenidos de aplicar (5.47), (5.48) y (5.49) es necesario convertirlas a coordenadas rectangulares, ya que en el lenguaje **Visual Basic** es más fácil manejar el graficado de esta manera.

$$\text{Real } GH(j\omega) = |GH(j\omega)| \cos\{\phi_{GH}(j\omega)\} \quad (5.50)$$

$$\text{Imag } GH(j\omega) = |GH(j\omega)| \sin\{\phi_{GH}(j\omega)\} \quad (5.51)$$

5.6.2 Diagramas de Bode de Lazo Abierto

Para construir los diagramas de Bode de lazo abierto se tiene como datos la función de transferencia de lazo abierto GH(s), el rango de frecuencias ω_{\min} y ω_{\max} , y el número de puntos a graficar. La función de transferencia de lazo abierto se establece de la siguiente manera:

- Cantidad de ceros reales
- Cantidad de ceros complejos conjugados
- Cantidad de polos reales

- Cantidad de polos complejos conjugados
- El valor de la ganancia, K
- Ceros reales en orden Z_j con su signo
- Ceros complejos conjugados en forma de términos cuadráticos ($as^2 + bs + c$)
- Polos reales en orden P_i con su signo
- Polos complejos conjugados en forma de términos cuadráticos ($as^2 + bs + c$)
- Frecuencia inicial y frecuencia final
- Cantidad de puntos a graficar

Para usar los datos de polos y ceros al elaborar la tabulación para la construcción del diagrama de Bode de lazo abierto se utiliza la estrategia mostrada por (5.53), para obtener la magnitud en lazo abierto expresada en decibeles $20\log|GH(j\omega)|$, y (5.54) para obtener el ángulo de fase en lazo abierto, $\phi_{GH}(j\omega)$.

$$K_B = \frac{K \prod_{j=1}^z Z_j \prod_{k=1}^{z'/2} c_k}{\prod_{i=1}^p P_i \prod_{l=1}^{p'/2} c_l} \quad (5.52)$$

$$20 \log|GH(j\omega)| = 20 \log K_B + \sum_{j=1}^z 20 \log \left\{ \left(\frac{\omega}{Z_j} \right)^2 + 1 \right\}^{1/2} + \sum_{k=1}^{z'/2} 20 \log \left\{ 1 - \frac{\omega^2}{c_k} + \left(\frac{b_k}{c_k} \omega \right)^2 \right\}^{1/2} \\ - \sum_{i=1}^p 20 \log \left\{ \left(\frac{\omega}{P_i} \right)^2 + 1 \right\}^{1/2} - \sum_{l=1}^{p'/2} 20 \log \left\{ 1 - \frac{\omega^2}{c_l} + \left(\frac{b_l}{c_l} \omega \right)^2 \right\}^{1/2} \quad (5.53)$$

$$\phi_{GH}(j\omega) = \sum_{j=1}^z \text{tg}^{-1} \left(\frac{\omega}{Z_j} \right) + \sum_{k=1}^{z'/2} \text{tg}^{-1} \left(\frac{\frac{b_k}{c_k} \omega}{1 - \frac{\omega^2}{c_k}} \right) - \sum_{i=1}^p \text{tg}^{-1} \left(\frac{\omega}{P_i} \right) - \sum_{l=1}^{p'/2} \text{tg}^{-1} \left(\frac{\frac{b_l}{c_l} \omega}{1 - \frac{\omega^2}{c_l}} \right) \quad (5.54)$$

NOTA: Cuando un cero o un polo tomen el valor cero entonces en la fórmula de la Magnitud $20\log|GH(j\omega)|$, si es un polo se le resta $20\log(\omega)$, y si es un cero se le suma $20\log(\omega)$. En la fórmula de ángulo de fase $\phi_{GH}(j\omega)$, si es un polo se restan 90° y si es un cero se suman 90° .

Después de elaborar una rutina para computadora digital para efectuar los dos algoritmos, incluyendo el procedimiento descrito en la **NOTA**, se asignan valores a ω para hacer una tabulación, como en la Tabla 5.2. Los valores de ω están de acuerdo a los rangos especificados en los datos iniciales y se llevan a la década más cercana, se cuenta el número de décadas y el número de puntos se divide proporcionalmente en cada década para calcular el valor que se dará a ω .

Para obtener el valor del margen de fase MF se requiere encontrar el valor de ω que haga cero el valor de la magnitud, calculada con (5.53), y se evalúa el valor del ángulo de fase con (5.54). El resultado se compara con -180° y la diferencia será el margen de fase MF. Para encontrar el valor de ω se analiza en la tabulación a fin de encontrar los valores de ω en los cuales se tiene cambio de signo; en la magnitud $|GH(j\omega)|$ y se interpola entre los valores de ω para encontrar el valor en el cual la magnitud toma el valor cero.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Para calcular el valor del margen de ganancia MG se requiere el valor de ω que haga -180° el valor del ángulo de fase, calculado con (5.54), y se evalúa el valor de la magnitud con (5.53) y se le cambia el signo al resultado para obtener el margen de ganancia MG. Para encontrar el valor de ω en el cual $\phi_{GH}(j\omega) = -180^\circ$ se analiza la tabulación y se interpola entre los valores de ω para encontrar el valor en el cual el ángulo de fase es de -180° .

Para obtener la gráfica en coordenadas rectangulares semi-logarítmicas con los datos obtenidos de aplicar (5.52), (5.53) y (5.54), es necesario trabajar la escala logarítmica en

forma natural ya que el lenguaje **Visual Basic** sólo los reconoce de esta manera. Para lograr el manejo de la escala horizontal correspondiente a ω , del rango de frecuencia se deducen las décadas con que se trabaja y se distribuye el número de puntos en forma proporcional. Para los valores establecidos se calculan los valores de $20\log|GH(j\omega)|$ y $\phi_{GH}(j\omega)$, que serán graficados.

5.6.3 Diagrama de Bode de Lazo Cerrado

Para construir los diagramas de Bode de lazo cerrado se tiene como datos la función de transferencia de lazo abierto $GH(s)$, el rango de frecuencias ω_{\min} y ω_{\max} , y el número de puntos a graficar. La función de transferencia de lazo abierto se establece de la siguiente manera:

- Cantidad de ceros reales
- Cantidad de ceros complejos conjugados
- Cantidad de polos reales
- Cantidad de polos complejos conjugados
- El valor de la ganancia, K
- Ceros reales en orden Z_j con su signo
- Ceros complejos conjugados en forma de términos cuadráticos ($as^2 + bs + c$)
- Polos reales en orden P_i con su signo
- Polos complejos conjugados en forma de términos cuadráticos ($as^2 + bs + c$)
- Frecuencia inicial y frecuencia final
- Cantidad de puntos a graficar

Para utilizar los datos de polos y ceros al elaborar la tabulación en la construcción del diagrama de Bode de lazo cerrado, primero se usa la estrategia mostrada en (5.48) para obtener la magnitud en lazo abierto expresada en decibeles $20\log|GH(j\omega)|$ y en (5.49) para

obtener el ángulo de fase en lazo abierto $\phi_{GH}(j\omega)$. Con los valores obtenidos se calculan los valores de M y N usando (5.37) y (5.42) y así formar la tabulación.

Para encontrar la amplitud máxima M_{\max} y la frecuencia de resonancia ω_c se inicia una búsqueda en la tabulación para el valor máximo de M y se interpola con el siguiente valor o el anterior, hasta obtener el valor mayor de frecuencia al cual corresponde la frecuencia de resonancia ω_R . Para encontrar el ancho de banda ($\omega_1 - \omega_2$) se buscan las dos frecuencias que tengan un valor de $M_{\max} - 3$ db, en caso de que $M_{\max} > 3$ db, y en caso contrario se toma el valor de ω_1 y ω_2 al levantar sensiblemente de 0 db.

Para construir los diagramas de Bode de lazo cerrado se utiliza la misma técnica que para los diagramas de Bode de lazo abierto, excepto en este caso no es necesario que el 0 db de la escala de magnitud M este alineado con el -180° de la escala de ángulo N.

5.7 Programa de Computadora Digital para análisis en el dominio de la frecuencia

Este programa debe efectuar un análisis en el dominio de la frecuencia, obteniendo como resultados el margen de fase MF, el margen de ganancia MG, la frecuencia de corte ω_c , la amplitud máxima en lazo cerrado M_{\max} , la frecuencia de resonancia ω_c , y el ancho de banda ($\omega_1 - \omega_2$) a partir de los diagramas de Nyquist, del de Bode de lazo abierto, y del de Bode de lazo cerrado los cuales también se pueden mostrar en pantalla, según sean seleccionados. Los diagramas mostrados en pantalla pueden ser manipulados para obtener mediciones o bien para darles un formato más útil al usuario de las gráficas.

El programa de computadora digital para efectuar las tareas descritas hace uso de los algoritmos y procedimientos mostrados en el presente Capítulo. El programa requiere un conjunto de datos, para lo cual establece interactivamente por medio de la pantalla y con

formato **Windows** un despliegue de resultados, las gráficas de resultados son presentadas en pantallas independientes las cuales son seleccionables por el usuario.



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

CAPITULO 6

DISEÑO DE CONTROLES AUTOMATICOS EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

6.1 Introducción

En la actualidad es necesario que los sistemas de control cumplan rigurosamente con los requerimientos del proceso ya que las normas de calidad son estrictas. Para lograr lo anterior es necesario compensar los sistemas para soportar cambios en la entrada sin que se desvien de los requerimientos, en la mayoría de los casos no basta con cambiar la ganancia del sistema K e incluso puede hacer inestable al sistema, así es necesario agregar en la rama directa compensadores en adelante, atraso, o de atraso-adelanto como se muestra en la Figura 6.1.

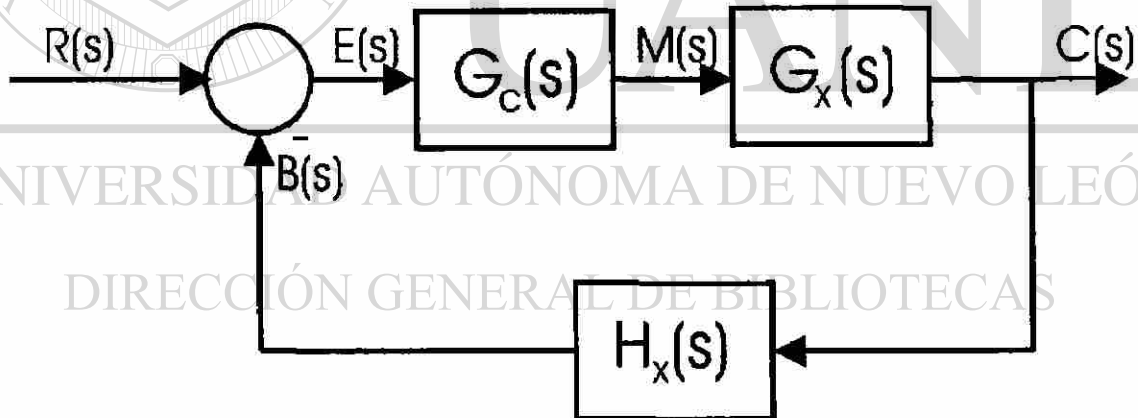


Fig. 6-1 Compensación en la Rama Directa.

$G_x(s)$ es la función de transferencia de los elementos de la rama directa sin compensar, $H_x(s)$ es la función de transferencia de los elementos de la retroalimentación, y $G_c(s)$ es la función de transferencia de la red compensadora.

En los métodos de respuesta a la frecuencia, para realizar un diseño que cumpla con las expectativas, se ha observado en la práctica que con lograr un margen de fase de 45° es suficiente para que el sistema funcione adecuadamente en lazo abierto y en lazo cerrado. Pero al compensar los sistemas no sólo se debe pensar en lograr el MF de 45° sino también cómo se ha de manejar la frecuencia de resonancia y el ancho de banda.

6.2 Compensación en la Rama Directa con Redes de Adelanto, Atraso, o Atraso Adelanto

En el estudio y en el análisis de la compensación con redes colocadas en la rama directa puede utilizarse los métodos de respuesta a la frecuencia, en particular los diagramas de Bode de lazo abierto. El comportamiento de un sistema se puede analizar utilizando los métodos descritos en los apartados 5.3 y 5.4, donde se aplican (6.1), (6.2) y (6.3) para construir los diagramas de Bode de lazo abierto, dichos diagramas se modifican con redes compensadoras colocadas en la rama directa, lo cual se refleja adicionando a (6.2) y (6.3) los efectos producidos, como se muestra en las expresiones siguientes.

$$GH(j\omega) = \frac{K_B N_1(j\omega) N_2(j\omega)}{D_1(j\omega) D_2(j\omega)} \quad (6.1)$$

$$20 \log GH(j\omega) = 20 \log K_B + 20 \log |N_1(j\omega)| + 20 \log |N_2(j\omega)| - 20 \log |D_1(j\omega)| - 20 \log |D_2(j\omega)| \quad (6.2)$$

$$\phi_{GH}(j\omega) = \text{tg}^{-1} \phi_{N_1}(j\omega) + \text{tg}^{-1} \phi_{N_2}(j\omega) - \text{tg}^{-1} \phi_{D_1}(j\omega) - \text{tg}^{-1} \phi_{D_2}(j\omega) \quad (6.3)$$

6.2.1 Compensación con Red de Adelanto

El elemento de compensación de adelanto, tiene una función de transferencia como la mostrada en (6.4):

$$P_{adelanto}(s) = \frac{(s+a)}{(s+b)} \quad (6.4)$$

donde $b > a$, y si $b \gg a$ entonces la red se comportará como un controlador PD.

El efecto sobre el sistema, debido a la red compensadora de adelanto, se puede observar en los diagramas de Bode y los efectos producidos por la red compensadora de adelanto, se presenta en la función de transferencia normalizada, que al aplicar las fórmulas generales de los diagramas de Bode (6.2) y (6.3), se llega a (6.6) y (6.7).

$$P_{adelanto}(j\omega) = \frac{a \left(\frac{j\omega}{a} + 1 \right)}{\left(\frac{j\omega}{b} + 1 \right)} \quad (6.5)$$

$$20\text{Log}|P_{adelanto}(j\omega)| = 20\text{Log}a/b + 20\text{Log}\left[\left(\frac{\omega}{a}\right)^2 + 1\right]^{1/2} - 20\text{Log}\left[\left(\frac{\omega}{b}\right)^2 + 1\right]^{1/2} \quad (6.6)$$

$$\phi_{P_{adelanto}}(j\omega) = \text{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right) - \text{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{b}\right) \quad (6.7)$$

En la Figura 6.2 se tienen los diagramas de Bode que ilustran la contribución individual de la red de adelanto. De (6.7) y en la Figura 6.2 se observa que el ángulo con el cual contribuye la red compensadora siempre será positivo; por lo cual recibe el nombre de red de adelanto. El máximo adelanto posible con esta red se obtiene derivando e igualando a cero la expresión (6.7).

$$\frac{d\phi}{d\omega} = \frac{1}{a \left[1 + \left(\frac{\omega}{a} \right)^2 \right]} - \frac{1}{b \left[1 + \left(\frac{\omega}{b} \right)^2 \right]} = 0 \quad (6.8)$$

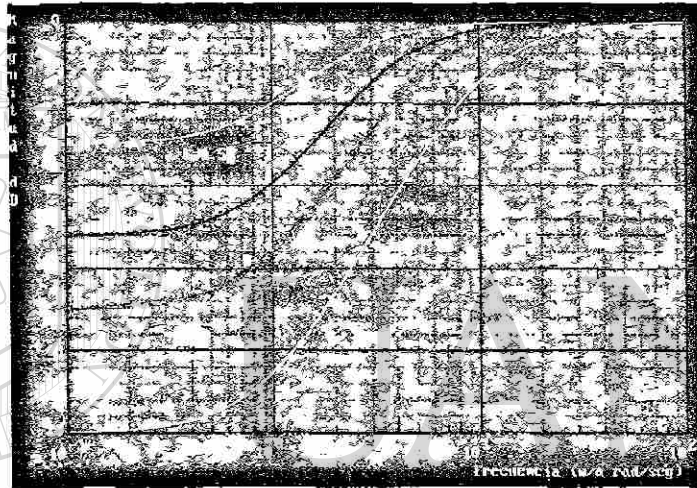
despejando ω resulta en:

$$\omega_m = \sqrt{ab} \quad (6.9)$$

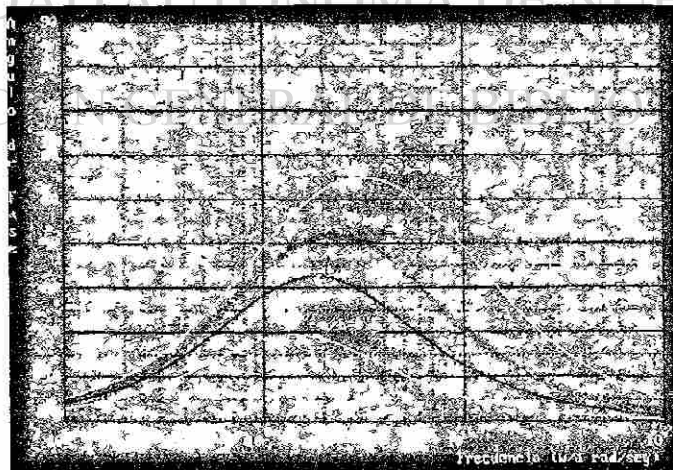
y con este valor de ω en (6.7) se tiene:

$$\phi_{max} = \tan^{-1} \sqrt{\frac{b}{a}} - \tan^{-1} \sqrt{\frac{a}{b}} = 90^\circ - 2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (6.10)$$

De las fórmulas (6.9) y (6.10) para ω_m y ϕ_{max} o de las gráficas de la Figura 6.2 se puede obtener los valores de la relación a/b , de a , y b necesarios para iniciar un proceso que permita realizar la compensación, buscando cumplir con un criterio de desempeño establecido.



(a)



(b)

Fig. 6.2 Respuesta en frecuencia de la Red Compensadora de Adelanto, (a) Magnitud en dB
(b) Angulo de Fase en grados.

A fin de ilustrar el procedimiento se desea compensar al sistema representado por la función de transferencia dado en (6.11) para que trabaje con un 5% de error de estado estable, con un margen de fase de $45^\circ \pm 1^\circ$, y una frecuencia de cruce $\omega_c > \text{rad./seg.}$

$$GH(s) = \frac{24}{s(s+2)(s+6)} \quad (6.11)$$

Antes de iniciar con el proceso de compensación se requiere saber si se cumple con los requisitos de diseño, para lo cual se sigue el procedimiento de análisis normalizando la función de transferencia y obtener (6.12).

$$GH(j\omega) = \frac{2}{j\omega \left(\frac{j\omega}{2} + 1\right) \left(\frac{j\omega}{6} + 1\right)} \quad (6.12)$$

Como K_b en este caso coincide con el coeficiente de error se tiene un error de estado estable del 50%, lo cual no cumple con los requerimientos. Para tratar de cumplir con los requerimientos se agrega una ganancia $\lambda_1 = 10$, a fin de que la K_b en (6.12) tome un valor de 20, como se muestra y usar las fórmulas (6.2) y (6.3) en (6.13) en (6.14), y (6.15) se tiene la magnitud en dB y ángulo de fase en grados de lazo abierto.

$$GH'(j\omega) = \frac{20}{j\omega \left(\frac{j\omega}{2} + 1\right) \left(\frac{j\omega}{6} + 1\right)} \quad (6.13)$$

$$20 \log |GH(j\omega)| = 20 \log 20 - 20 \log \omega - 20 \log \left[\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 + 1 \right]^{\frac{1}{2}} - 20 \log \left[\left(\frac{\omega}{6}\right)^2 + 1 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6.14)$$

$$\phi_{GH}(j\omega) = 0 - 90^\circ - \text{tg}^{-1} \frac{\omega}{2} - \text{tg}^{-1} \frac{\omega}{6} \quad (6.15)$$

en (6.15) y (6.169) están las fórmulas para magnitud y ángulo de fase en lazo cerrado.

$$M \text{ db} = 20 \log \sqrt{\frac{|G(j\omega)|^2}{1 + 2|G(j\omega)| \cos \phi_G(j\omega) + |G(j\omega)|^2}} \quad (6.16)$$

$$N^\circ = \tan^{-1} \frac{|G(j\omega)| \sin \phi_G(j\omega)}{|G(j\omega)| \cos \phi_G(j\omega) + |G(j\omega)|^2} \quad (6.17)$$

Aplicando (6.14) a (6.17) se obtiene la Tabla 6.1 y las gráficas de las Figuras 6.3 y 6.4 de donde se calcula el margen de fase MF que es de -20.8° en $\omega_c = 5.3 \text{ rad/seg}$, por lo cual se requiere un adelanto de fase de 65.8° en esa frecuencia.

Tabla 6-1 Valores, sistema compensado para reducir el error.

ω rad/seg	$20 \log GH(j\omega) $	$\phi_{GH}(j\omega)$	$ GH(j\omega) $	M db	N°
0.4000	33.7898	-105.1240	48.9204	0.0447	-1.1366
$\omega_1 = 0.6 \text{ rad/seg}$	30.0401	-112.4098	31.7691	0.1011	-1.6871
0.8000	27.2377	-119.3961	23.0083	0.1808	-2.2158
1.0000	24.9325	-126.0274	17.6452	0.2847	-2.7146
2.0000	16.5321	-153.4349	6.7082	1.2173	-4.3987
3.4700	7.9292	-180.0844	2.4915	4.4567	0.0566
4.0000	5.3927	-187.1250	1.8605	6.5321	8.1301
$\omega_R = 4.9 \text{ rad/seg}$	4.9000	1.5449	1.1947	10.0004	50.8445
$\omega_c = 5.3 \text{ rad/seg}$	5.3000	-0.0129	0.9985	8.8503	79.8415
$\omega_2 = 6.63 \text{ rad/seg}$	6.6300	-4.6631	0.5846	0.0183	-62.2113
8.0000	-8.7827	-219.0939	0.3638	-6.3234	-56.8215
10.0000	-13.9015	-227.7263	0.2018	-12.7621	-57.5288
20.0000	-30.8751	-247.5902	0.0286	-30.7830	-69.1210

MG=-7.9292
Mmax=10.000
MF=-20.7808

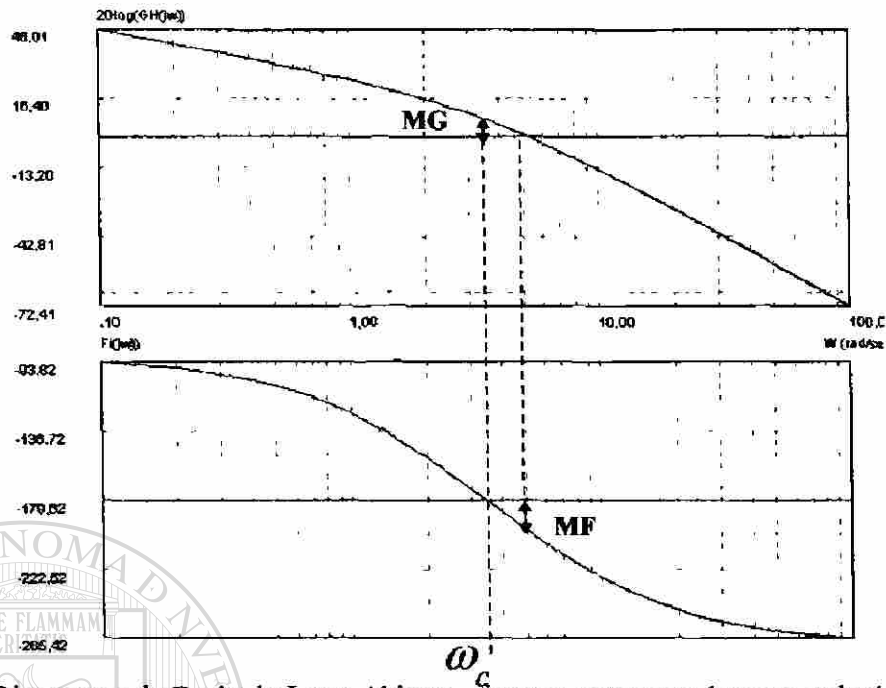


Fig. 6.3 Diagramas de Bode de Lazo Abierto, sistema compensado para reducir el error.

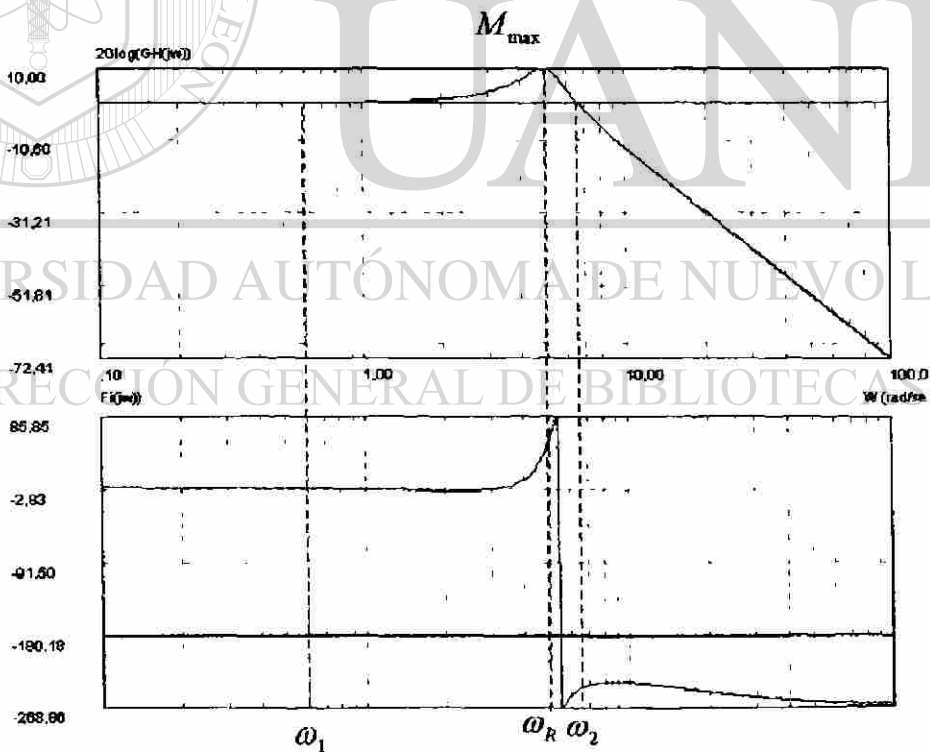


Fig. 6.4 Diagramas de Bode de Lazo Cerrado, sistema compensado para reducir el error.

Para lograr tal adelanto de fase se necesitan dos redes compensadoras de adelanto, como se muestra en (6.18), ya que el máximo adelanto de fase es de 54° .

$$P_{adelanto}(s) = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^2 (s+a)^2}{(s+b)^2} \quad (6.18)$$

Como la relación de a/b requerida es de 0.1 se necesita un valor de $\lambda_2 = 100$ para que el sistema no sea afectado por la atenuación. Para el diseño del compensador se varían los valores de a y b de (6.19) y (6.20) hasta lograr un valor para el cual el sistema tenga el margen de fase deseado. Para lograr una respuesta apropiada los valores de a y b son, respectivamente, de 3.5 y 35 como se observa en (6.21). Con tales valores el sistema compensado queda representado por (6.22) y (6.23).

$$20 \log |GH(j\omega)| = 20 \log 20 - 20 \log \omega - 20 \log \left[\left(\frac{\omega}{2} \right)^2 + 1 \right]^{1/2} \\ - 20 \log \left[\left(\frac{\omega}{6} \right)^2 + 1 \right]^{1/2} + 40 \log \left[\left(\frac{\omega}{a} \right)^2 + 1 \right]^{1/2} - 40 \log \left[\left(\frac{\omega}{b} \right)^2 + 1 \right]^{1/2} \quad (6.19)$$

$$\phi_{GH}(j\omega) = 0 - 90^\circ - \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{2} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{6} \right) + 2 \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{a} \right) - 2 \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{b} \right) \quad (6.20)$$

$$P_{adelanto}(s) = \frac{(0.1)^2 (s+3.5)^2}{(s+35)^2} \quad (6.21)$$

$$20 \log |GH(j\omega)| = 20 \log 20 - 20 \log \omega - 20 \log \left[\left(\frac{\omega}{2} \right)^2 + 1 \right]^{1/2} \\ - 20 \log \left[\left(\frac{\omega}{6} \right)^2 + 1 \right]^{1/2} + 40 \log \left[\left(\frac{\omega}{35} \right)^2 + 1 \right]^{1/2} - 40 \log \left[\left(\frac{\omega}{35} \right)^2 + 1 \right]^{1/2} \quad (6.22)$$

$$\phi_{GH}(j\omega) = 0 - 90^\circ - \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{2} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{6} \right) + 2 \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{35} \right) - 2 \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{35} \right) \quad (6.23)$$

Tabla 6.2 Valores del sistema compensado con red de adelanto.

	A	b	ω	$20 \log GH(j\omega) $	$\phi_{GH}(j\omega)$	$ G(j\omega) $	Mdb	Nº	
	3,5	35	0,1	46,01556662	-90,87	199,8841	0,000667	-0,28614	
	3,5	35	0,2	39,97999571	-91,7307	99,76996	0,002427	-0,57318	
	3,5	35	0,4	33,90138693	-93,3883	49,55293	0,009078	-1,1534	
	3,5	35	0,8	27,67549046	-96,2544	24,19772	0,032816	-2,35862	
	3,5	35	1	25,60701571	-97,3973	19,07	0,048252	-2,99133	
$\omega_1=1,75$ rad/seg	3,5	35	1,75	20,25279154	-100,024	10,29531	0,109679	-185,546	
	3,5	35	2	18,95815479	-100,469	8,869676	0,127406	-186,445	
	3,5	35	4	12,53762503	-102,516	4,235271	0,213469	-193,632	
	3,5	35	8	6,657074581	-112,066	2,152057	0,634986	-207,514	
	3,5	35	10	4,657911786	-118,15	1,709604	1,042099	-215,42	
$\omega_c=15,8$ rad/seg	3,5	35	15,8	0,019373517	-135,488	1,002233	2,464205	-247,587	MF=44,51
$\omega_R=18,7$ rad/seg	3,5	35	18,7	-1,95238864	-143,449	0,798694	2,598108	-90,8383	Mmax.=2,59
	3,5	35	20	-2,78890764	-146,837	0,725362	2,320996	-101,988	
$\omega_2=24$ rad/seg	3,5	35	24	-5,2208297	-156,561	0,548225	0,11656	-133,392	
	3,5	35	24,1	-5,27924639	-156,791	0,54455	0,042924	-134,063	
	3,5	35	36,1	-11,6525696	-180,09	0,26144	-9,02039	-180,529	MG=11,6525
	3,5	35	40	-13,498573	-186,075	0,211384	-11,4542	-188,079	
	3,5	35	80	-28,1128365	-221,809	0,039297	-27,8594	-223,665	
	3,5	35	100	-33,4062118	-230,614	0,021364	-33,2899	-231,878	

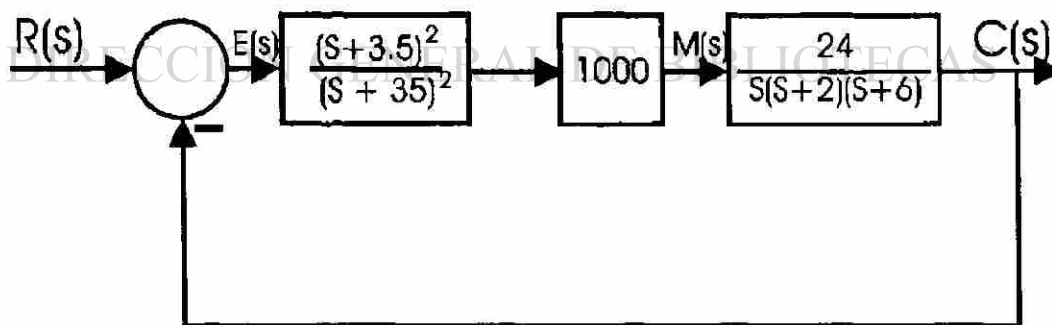


Fig. 6.5 Diagrama de bloques del sistema compensado con Red de Adelanto.

La Figura 6.6 muestra el diagrama de Bode del sistema ya compensado donde se puede determinar un margen de fase MF de 44.51° y una Frecuencia de cruce ω_c es de 15.8 rad/seg con lo cual se cumple con los requerimientos establecidos previamente.

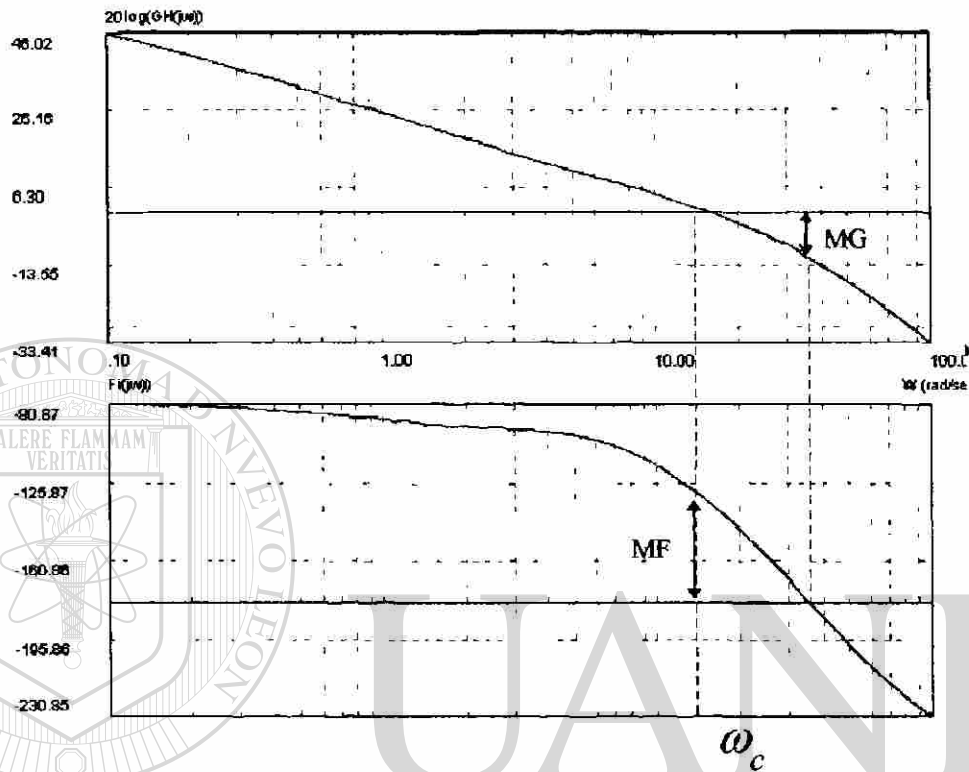


Fig. 6.6 Diagrama de Bode de Lazo Abierto del sistema compensado con Red de Adelanto.

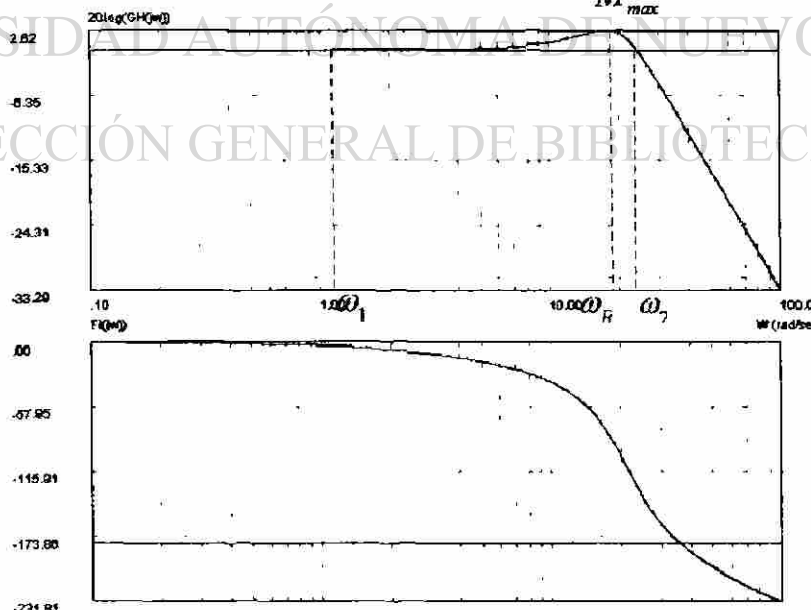


Fig. 6.7 Diagrama de Bode de Lazo Cerrado, sistema compensado con una Red de Adelanto.

Al comparar las gráficas de las Figuras 6.4 y 6.7 se tiene que el ancho de banda cambió de $\omega_1 = 0.6$ rad/seg y $\omega_2 = 6.66$ rad/seg a $\omega_1 = 1.75$ rad/seg y $\omega_2 = 24.0$ rad/seg, que la frecuencia de resonancia cambió de $\omega_r = 4.9$ rad/seg a $\omega_r = 18.7$ rad/seg, y que la amplitud máxima de resonancia pasó de $M_{\max} = 10.0$ a un valor de $M_{\max} = 2.59$.

6.2.2 Compensación con Red de Atraso

Una Red compensadora de atraso tiene como función de transferencia una expresión como la mostrada en (6.24), donde $b > a$, y si $a \rightarrow 0$ entonces la red se comportará como un controlador PI.

$$P_{\text{atraso}}(s) = \frac{a}{b} \frac{(s+b)}{(s+a)} \quad (6.24)$$

El efecto producido sobre el sistema por la compensación de atraso se puede observar en los diagramas de Bode, adicionando los efectos producidos por la red al diagrama sin compensar. En seguida se deducen los efectos producidos por la red de atraso, iniciando con la función de transferencia normalizada. El efecto producido por esta red se obtiene aplicando las fórmulas generales de los diagramas de Bode, es decir (6.2) y (6.3), de donde resulta (6.25) y (6.26).

$$P_{\text{atraso}}(j\omega) = \frac{\left(\frac{j\omega}{b} + 1\right)}{\left(\frac{j\omega}{a} + 1\right)}$$

$$20 \log |P_{\text{atraso}}(j\omega)| = 20 \log \left[\left(\frac{\omega}{b}\right)^2 + 1 \right]^{1/2} - 20 \log \left[\left(\frac{\omega}{a}\right)^2 + 1 \right]^{1/2} \quad (6.25)$$

$$\phi_{P_{\text{atraso}}}(j\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{b}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (6.26)$$

En la Figura 6.8 se tiene los diagramas de Bode que ilustran la contribución de la red de atraso. De (6.26) y la Figura 6.8 se observa que el ángulo con el cual contribuye la red compensadora siempre será negativo, de ahí su nombre de "red de atraso". El máximo atraso se obtiene derivando e igualando a cero la expresión (6.26).

$$\frac{d\phi}{d\omega} = \frac{1}{b \left[1 + \left(\frac{\omega}{b} \right)^2 \right]} - \frac{1}{a \left[1 + \left(\frac{\omega}{a} \right)^2 \right]} = 0 \quad (6.27)$$

despejando ω , y al substituir este valor de ω en (6.26) se tiene(6.29).

$$\omega_m = \sqrt{ab} \quad (6.28)$$

$$\phi_{\max} = \tan^{-1}\sqrt{\frac{a}{b}} - \tan^{-1}\sqrt{\frac{b}{a}} = -90^\circ + 2 \tan^{-1}\sqrt{\frac{a}{b}} \quad (6.29)$$

De (6.25) y (6.26) se obtiene el efecto individual de la red de atraso, el cual se observa en la Figura 6.8. Se puede decir que la reducción en ángulo ocurre a frecuencias bajas y a frecuencias de trabajo sólo se tiene una atenuación de $20 \log(a/b)$, lo cual a la magnitud lo y se aprovecha para la compensación.

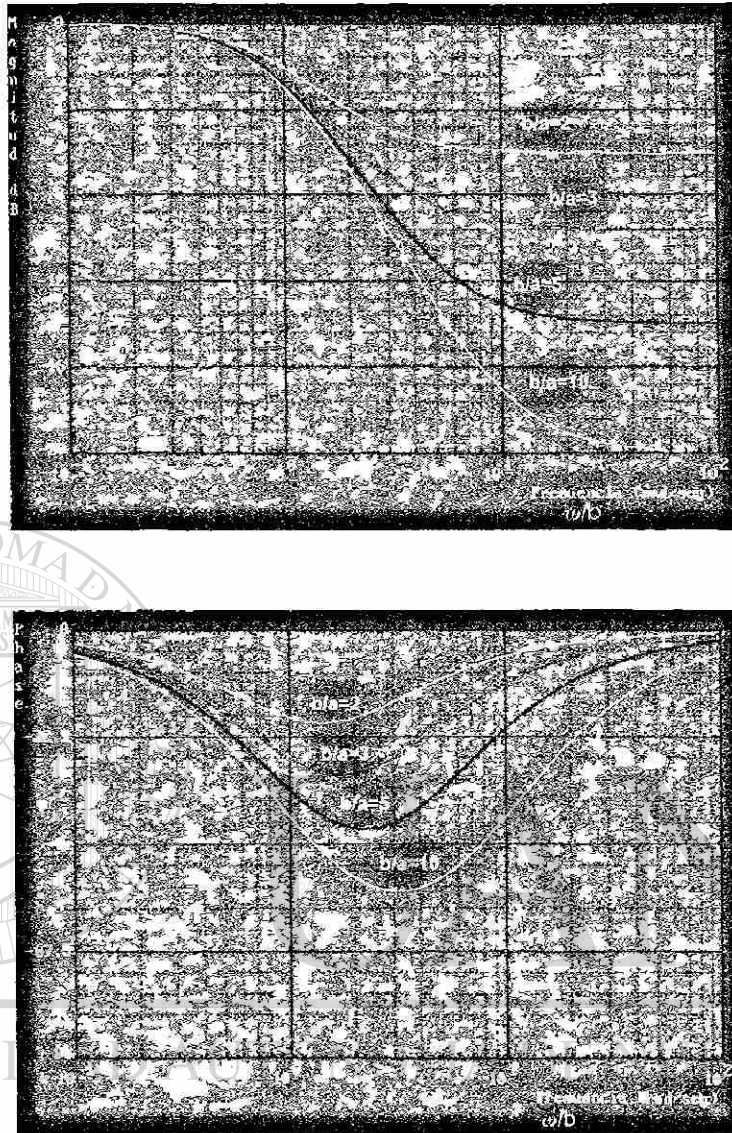


Fig. 6.8 Efecto de la Red Compensadora de Atraso, (a) Magnitud en db, (b) Angulo de Fase.

Para ilustrar, se desea compensar al sistema representado por la función de transferencia (6.30) para que trabaje con un 5% de error de estado estable, con un margen de fase de $45^\circ \pm 1^\circ$, y se tenga una frecuencia de cruce $\omega_c > 1$ rad/seg.

$$GH(s) = \frac{24}{s(s+2)(s+6)} \quad (6.30)$$

Antes de adicionar un esquema de compensación se requiere saber si el sistema cumple con las especificaciones de diseño. En caso de no satisfacer los requerimientos establecidos se sigue el procedimiento de análisis, normalizando la función de transferencia (6.30).

$$GH(j\omega) = \frac{2}{j\omega \left(\frac{j\omega}{2} + 1\right) \left(\frac{j\omega}{6} + 1\right)} \quad (6.31)$$

Como K_b en este caso coincide con el coeficiente de error, resulta un error de estado estable del 50%; lo cual no cumple con los requerimientos. Para cumplir especificaciones se agrega una ganancia $\lambda_1 = 10$ para que K_b de (6.31) cambie a 20, como se muestra en (6.32).

$$GH'(j\omega) = \frac{20}{j\omega \left(\frac{j\omega}{2} + 1\right) \left(\frac{j\omega}{6} + 1\right)} \quad (6.32)$$

Aplicando (6.2) y (6.3) a (6.32):

$$20 \log |GH(j\omega)| = 20 \log 20 - 20 \log(\omega) - 20 \log \left(\left(\frac{\omega}{2} \right)^2 + 1 \right)^{1/2} - 20 \log \left(\left(\frac{\omega}{6} \right)^2 + 1 \right)^{1/2} \quad (6.33)$$

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$\phi_{GH}(j\omega) = 0 - 90^\circ - \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{2} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{6} \right) \quad (6.34)$$

De (6.33) y (6.34) y por las gráficas de la Figura 6.9 se obtiene la frecuencia en la cual el ángulo de fase toma un valor de -135° , (el margen de fase MF sería de 45° si la magnitud fuera de 0 db). En ese punto se tiene una frecuencia de 1.3 rad/seg y una magnitud de 22 dB, por lo tanto se necesita una atenuación del mismo valor en esa frecuencia.

Para lograr la atenuación se necesita una red compensadora de atraso donde $20 \log(a/b) = -22.165 \text{ db}$ y que los valores seleccionados para a y b sean muy pequeños para que no se afecte el atraso de fase a la frecuencia de 1.3 rad/seg , en la cual se desea tener la frecuencia de cruce por 0 db ω_c . Para el diseño del compensador se asignan valores para a y b, hasta que se obtenga un valor tal que el sistema tenga el margen de fase deseado. Una posibilidad para lograr lo anterior requiere los valores de $a = 0.0005$ y $b = 0.0063$ por lo cual la función de transferencia de atraso resulta en:

$$P_{\text{atraso}}(s) = \frac{0.077(s + 0.0063)}{(s + 0.0005)} \quad (6.35)$$

Tabla 6.3 Valores del sistema compensado para reducir el error.

w rad/seg	20log GH(jw)	fGH(jw)	GH(jw)	M db	N°
0.1000	46.0085	-93.8172	199.7227	0.0028	-0.2863
0.2000	39.9520	-97.6197	99.4485	0.0112	-0.5718
0.4000	33.7898	-105.1240	48.9204	0.0447	-1.1366
0.6000	30.0401	-112.4098	31.7691	0.1011	-1.6871
0.8000	27.2377	-119.3961	23.0083	0.1808	-2.2158
1.0000	24.9325	-126.0274	17.6452	0.2847	-2.7146
1.3000	22.0120	-135.2490	12.6066	0.4884	-3.3868
2.0000	16.5321	-153.4349	6.7082	1.2173	-4.3987
3.4700	7.9292	-180.0844	2.4915	4.4567	0.0566
4.0000	5.3927	-187.1250	1.8605	6.5321	8.1301
4.9000	1.5449	-197.0339	1.1947	10.0004	50.8445
5.3000	-0.0129	-200.7808	0.9985	8.8503	79.8415
6.6300	-4.6631	-211.0692	0.5846	0.0183	-62.2113
8.0000	-8.7827	-219.0939	0.3638	-6.3234	-56.8215
10.0000	-13.9015	-227.7263	0.2018	-12.7621	-57.5288
20.0000	-30.8751	-247.5902	0.0286	-30.7830	-69.1210

$\omega_1 = 0.6 \text{ rad/seg}$

$b/a = 12.606$

$\omega_x = 4.9 \text{ rad/seg}$

$\omega_c = 5.3 \text{ rad/seg}$

$\omega_z = 6.63 \text{ rad/seg}$

$MG = 7.9292$

$M_{\text{max}} = 10.0004$

$MF = -20.7808$

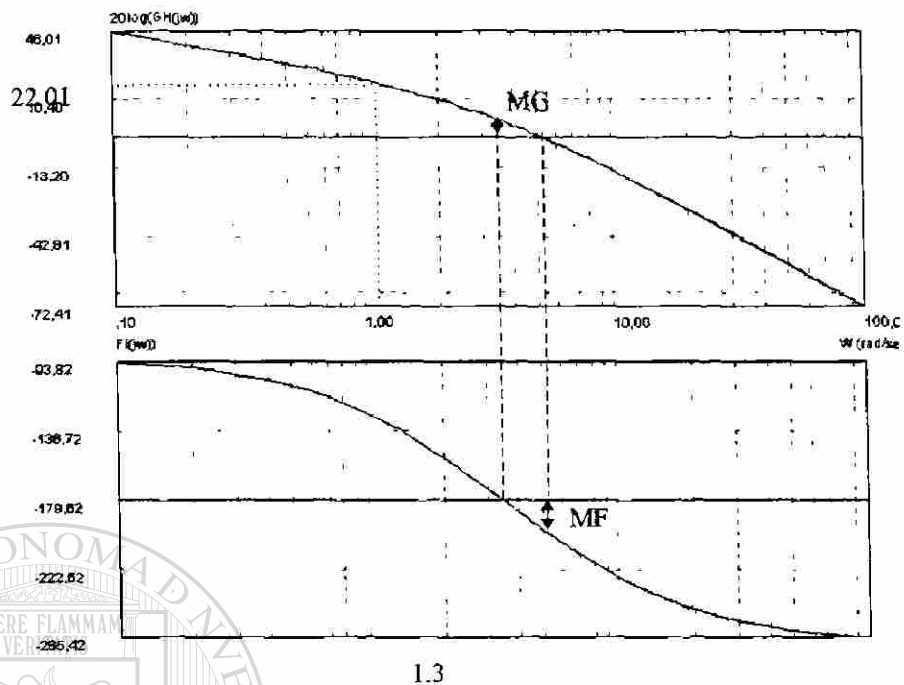


Fig. 6.9 Diagramas de Bode de Lazo Abierto, sistema compensado para reducir el error.

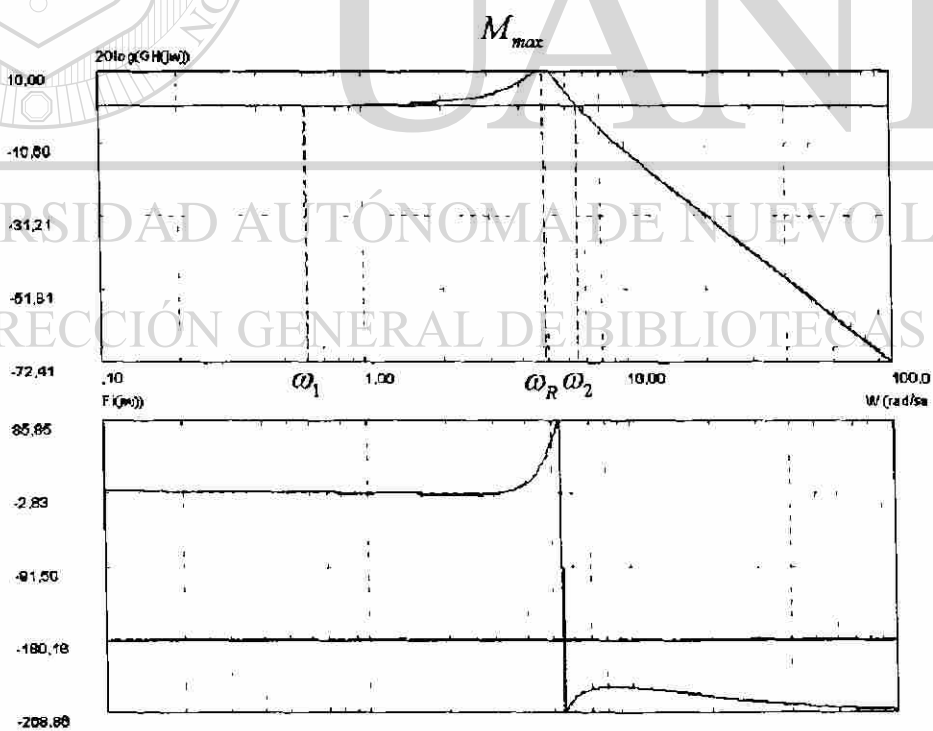


Fig. 6.10 Diagramas de Bode de Lazo Cerrado, sistema compensado para reducir el error.

El sistema compensado queda representado en la Figura 6.11. La Figura 6.12 muestra el diagrama de Bode y se puede observar que el margen de fase MF es de 44.19° y la frecuencia de cruce ω_c es de 1.3 rad/seg, con lo cual se cumplen los requerimientos establecidos.

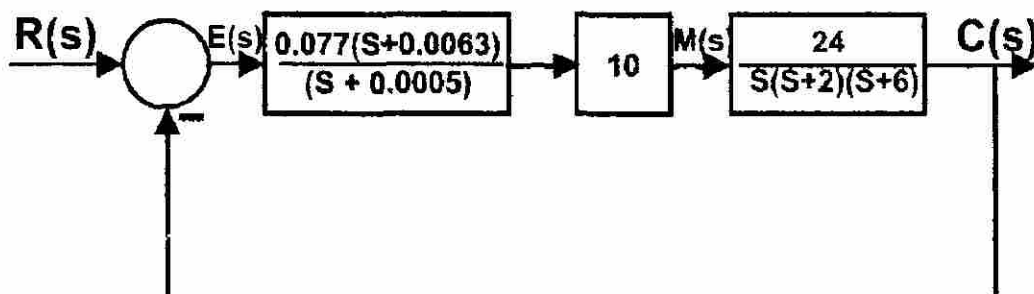


Fig. 6.11 Diagrama de Bloques del sistema compensado.

Tabla 6.4 Valores del sistema compensado con Red de Atraso.

A	b	ω rad/seg	$20\log GH(j\omega) $	$\phi_{GH}(j\omega)$	$ G(j\omega) $	Mdb	Nº	
0,0005	0,0063	0,1	24,01823345	-97,1237	15,88224	0,05246	-3,59644	
0,0005	0,0063	0,2	17,94883255	-99,2652	7,896627	0,112031	-7,25791	$\omega_1=0,2$ rad/seg
0,0005	0,0063	0,4	11,78346698	-105,928	3,883053	0,345908	-14,8953	
0,0005	0,0063	0,8	5,230547362	-119,762	1,826112	1,232663	-33,0901	
0,0005	0,0063	1	2,92526793	-126,299	1,400436	1,803271	-44,8637	
0,0005	0,0063	1,3	0,004664199	-135,429	1,000537	2,445835	-67,6766	MF=44,57145
0,0005	0,0063	1,37	-0,61273344	-137,436	0,931887	2,47961	-73,9122	Mmax=2,47961
0,0005	0,0063	1,92	-4,91281105	-151,645	0,568015	0,028568	-123,792	$\omega_2=1,92$ rad/seg
0,0005	0,0063	2	-5,47524294	-153,495	0,5324	-0,63987	-129,578	
0,0005	0,0063	3,47	-14,07816	-180,029	0,197739	-12,1645	-180,412	MG=14,07816
0,0005	0,0063	4	-16,6147086	-187,046	0,147661	-15,2415	-188,614	
0,0005	0,0063	8	-30,7900723	-218,92	0,028873	-30,5953	-220,29	
0,0005	0,0063	10	-35,9089068	-227,529	0,016016	-35,8158	-228,517	
0,0005	0,0063	20	-52,8824641	-247,343	0,002269	-52,875	-247,764	
0,0005	0,0063	40	-70,6342624	-258,333	0,000294	-70,6338	-258,651	
0,0005	0,0063	80	-88,6156594	-263,992	3,71E-05	-88,6156	-264,295	
0,0005	0,0063	100	-94,4205294	-265,131	1,9E-05	-94,4205	-265,433	

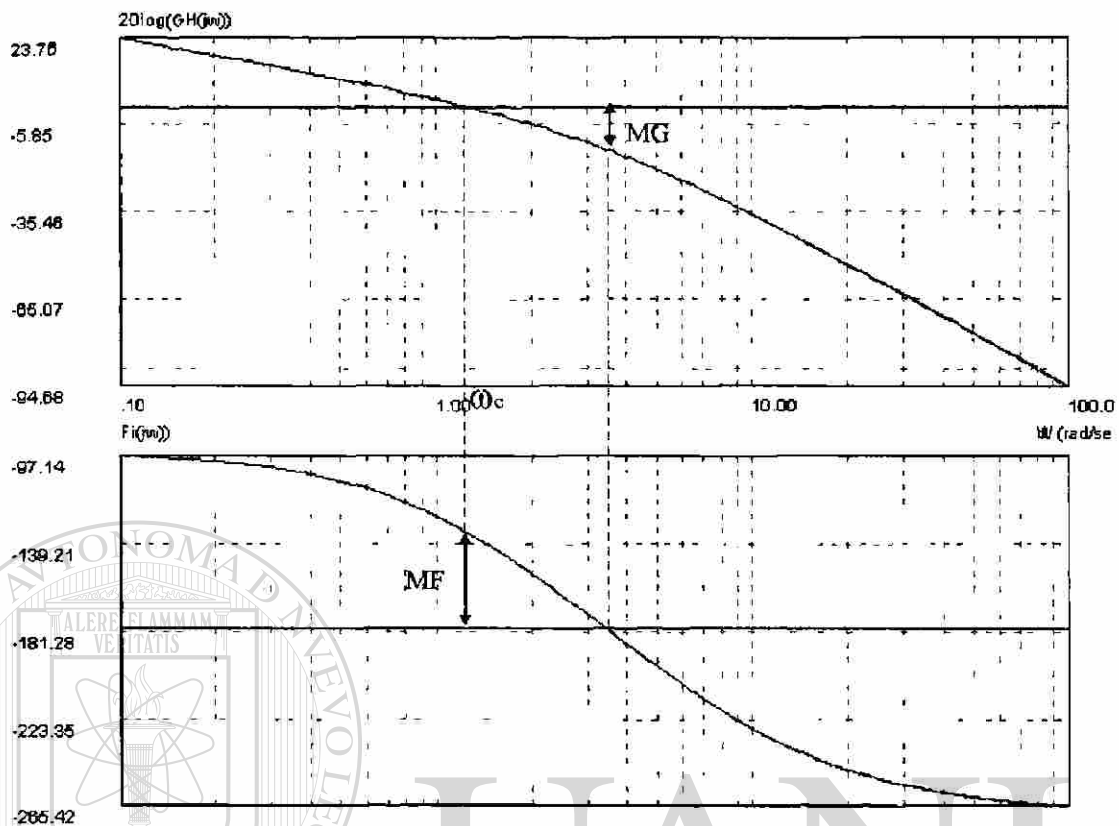


Fig. 6.12 Diagrama de Bode de lazo abierto, sistema compensado con Red de Atraso.

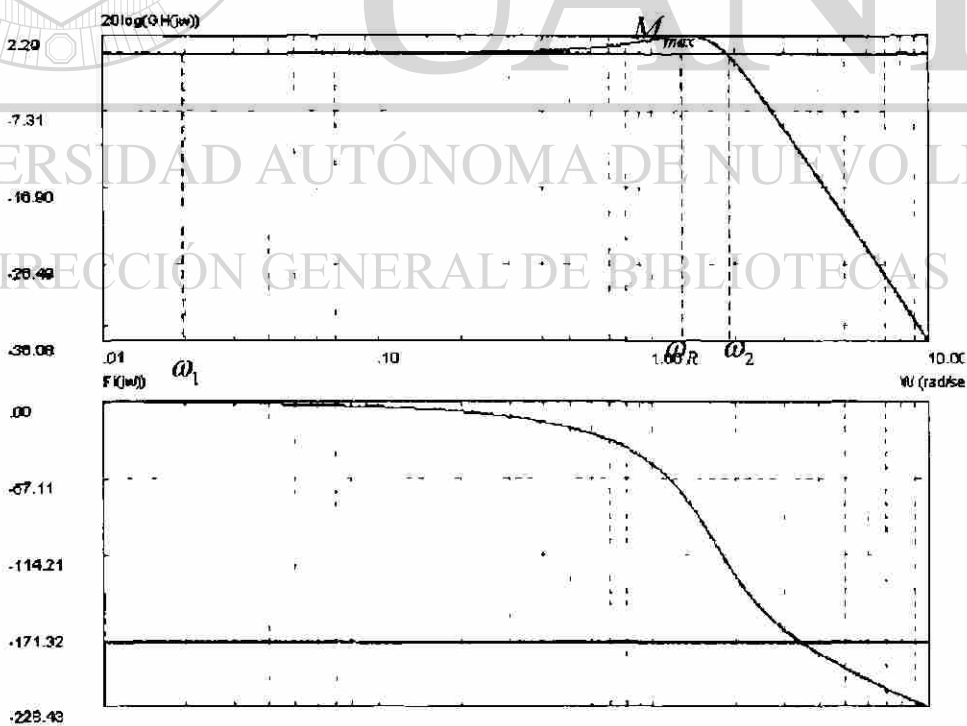


Fig. 6.13 Diagrama de Bode de Lazo Cerrado, sistema compensado con Red de Atraso.

Al comparar las gráficas de las Figuras 6.9 y 6.13 se tiene que el ancho de banda cambió de $\omega_1 = 0.6$ rad/seg y $\omega_2 = 6.65$ rad/seg a $\omega_1 = 0.2$ rad/seg y $\omega_2 = 1.92$ rad/seg, que la frecuencia de resonancia cambió de $\omega_r = 4.9$ rad/seg a $\omega_1 = 1.36$ rad/seg, y que la amplitud máxima de resonancia paso de $M_{\max} = 10.0$ a $M_{\max} = 2.5$.

6.2.3 Compensación con Red de Atraso-Adelanto

La red compensadora de atraso-adelanto, tiene una función de transferencia como la mostrada en (6.36), donde $a_1/b_1 = a_2/b_2$, $b_1 > a_1$, $b_2 > a_2$, $a_1 > b_2$, si $b_1 \gg a_2$, y si $a_2 \rightarrow 0$ entonces la red se comportará como un controlador PID.

$$P_{AA}(s) = \frac{(s + a_1)(s + b_2)}{(s + b_1)(s + a_2)} \quad (6.36)$$

El efecto producido sobre el sistema, por la red compensadora de atraso-adelanto, se puede observar en los diagramas de Bode, adicionando directamente los efectos producidos por esta red compensadora al diagrama de bloques original. En seguida se discute los efectos producidos por la red compensadora de atraso-adelanto y en (6.37) se presenta la función de transferencia normalizada.

$$P_{AA}(j\omega) = \frac{\left(\frac{j\omega}{a_1} + 1\right)\left(\frac{j\omega}{b_2} + 1\right)}{\left(\frac{j\omega}{b_1} + 1\right)\left(\frac{j\omega}{a_2} + 1\right)} \quad (6.37)$$

El efecto producido por el esquema del compensador se obtiene aplicando las fórmulas generales de los diagramas de Bode, (6.2) y (6.3), como se muestra en (6.38) y (6.39).

$$\begin{aligned}
20 \log |P_{AA}(j\omega)| &= 20 \log \left[\left(\frac{\omega}{a_1} \right)^2 + 1 \right]^{1/2} + 20 \log \left[\left(\frac{\omega}{b_2} \right)^2 + 1 \right]^{1/2} \\
&\quad - 20 \log \left[\left(\frac{\omega}{b_1} \right)^2 + 1 \right]^{1/2} - 20 \log \left[\left(\frac{\omega}{a_2} \right)^2 + 1 \right]^{1/2}
\end{aligned} \tag{6.38}$$

$$\phi_{P_{AA}}(j\omega) = \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{a_1} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{b_2} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{b_1} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{a_2} \right) \tag{6.39}$$

La red incluye dos efectos combinados: el de una red compensadora de atraso y una red compensadora de adelanto sin atenuación. Como el efecto de la red de atraso ocurre a bajas frecuencias, sólo se aprovecha el efecto de la red de adelanto, la cual puede ajustarse para que su efecto se tenga a las frecuencias de trabajo y agregue el correspondiente adelanto de fase máximo, tanto en magnitud como en frecuencia. Los cálculos se puede efectuar con (6.9) y (6.10) y observarse en la Figura 6.2, donde puede verse que aporta, además del adelanto de fase, una atenuación en la magnitud y tales características serán aprovechadas para la compensación. La red compensadora de atraso-adelanto permite colocar la frecuencia de resonancia dentro de límites preestablecidos.

Para ilustrar el procedimiento se desea compensar el sistema representado por la función de transferencia (6.40) para que trabaje con un 5% de error de estado estable, con un margen de fase de $45^\circ \pm 1^\circ$, y una frecuencia de cruce $2 \text{ rad/seg} < \omega_c < 5 \text{ rad/seg}$.

Antes de iniciar el procedimiento de compensación se requiere saber si se cumple con los requisitos de diseño. En caso de no satisfacer los requerimientos establecidos se inicia la compensación, normalizando la función de transferencia (6.40) para obtener (6.41).

$$GH(s) = \frac{24}{s(s+2)(s+6)} \tag{6.40}$$

$$GH(j\omega) = \frac{2}{j\omega \left(\frac{j\omega}{2} + 1\right) \left(\frac{j\omega}{6} + 1\right)} \quad (6.41)$$

En este caso Kb coincide con el coeficiente de error, por lo cual el error de estado estable es del 50 %, así que no se cumple con los requerimientos. Así, se propone una ganancia $\lambda_1 = 10.0$, para que Kb tome un valor de 20, como se muestra en (6.42) y aplicando (6.2) y de (6.3) a la expresión (6.42) se tiene (6.43) y (6.44).

$$GH'(j\omega) = \frac{20}{j\omega \left(\frac{j\omega}{2} + 1\right) \left(\frac{j\omega}{6} + 1\right)} \quad (6.42)$$

$$20 \log |GH(j\omega)| = 20 \log 20 - 20 \log \omega - 20 \log \left[\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 + 1 \right]^{\frac{1}{2}} - 20 \log \left[\left(\frac{\omega}{6}\right)^2 + 1 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6.43)$$

$$\phi_{GH}(j\omega) = 0 - 90^\circ - \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{2}\right) - \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{6}\right) \quad (6.44)$$

De (6.43) y (6.44) y de las gráficas de la Figura 6.14 se obtiene para una $\omega = 3.5$ rad/seg, que es el centro del rango de frecuencias donde debe quedar la frecuencia de resonancia, una magnitud de 7.75 dB y un ángulo de fase de -180.59° , por lo que para tener un margen de fase 45° a una frecuencia de 3.5 rad/seg. se requiere de una atenuación de 7.75 dB y un adelanto de fase de 45.59° .

Para lograr la atenuación y el adelanto de fase se propone una red compensadora de atraso-adelanto. Se inicia con una relación de $a/b = 0.2$ que debe cumplirse, tanto en la parte de atraso como en la parte de adelanto, y para que la parte de atraso de la red no afecte el comportamiento del sistema se buscará que los valores de a_2 y b_2 sean pequeños en relación con los valores del sistema, cuidando que cumplan con la relación a/b , y los valores iniciales para a_1 y b_1 , que corresponden a la parte de adelanto de la red. Los valores definitivos para

estos parámetros se obtienen por un proceso iterativo agregando la función de transferencia de la red compensadora dada por (6.33) a la función de transferencia del sistema compensado para reducir el error dado por (6.42), quedando como se muestra en (6.45).

Tabla 6.5 Valores del sistema compensado para reducir el error.

ω	$20\log GH(j\omega) $	$\phi_{GH}(j\omega)$	$ G(j\omega) $	M db	N°
0.1	46.00854989	-93.8109	199.7227	0.002902	-0.28581
0.2	39.95196345	-97.607	99.44849	0.011385	-0.57065
0.4	33.78980748	-105.099	48.92044	0.045195	-1.1339
0.6	30.04009619	-112.372	31.76909	0.101775	-1.68255
0.8	27.23769064	-119.347	23.0083	0.181709	-2.20903
1	24.93250755	-125.967	17.64515	0.28583	-2.70519
2	16.53212514	-153.329	6.708204	1.219347	-184.369
3.5	7.779357117	-180.36	2.448882	4.55802	-179.544
4	5.392691615	-186.963	1.860521	6.525205	-171.718
4.9	1.544935878	-196.855	1.194667	9.94445	-129.092
5.3	-0.01289244	-200.596	0.998517	8.788278	-100.369
6.63	-4.66311623	-210.867	0.58458	-0.00193	-242.328
8	-8.78266403	-218.878	0.363803	-6.33269	-236.917
10	-13.9014976	-227.496	0.201802	-12.7665	-237.602
20	-30.8750536	-247.327	0.028592	-30.7836	-249.157
40	-48.6268516	-258.325	0.003704	-48.6206	-258.834

$w_t=0.6$ rad/seg
 $w_r=4.9$ rad/seg
 $w_c=5.3$ rad/seg
 $w_2=6.63$ rad/seg

$M_{max}=9.94445$
 $MF=-20.5956$

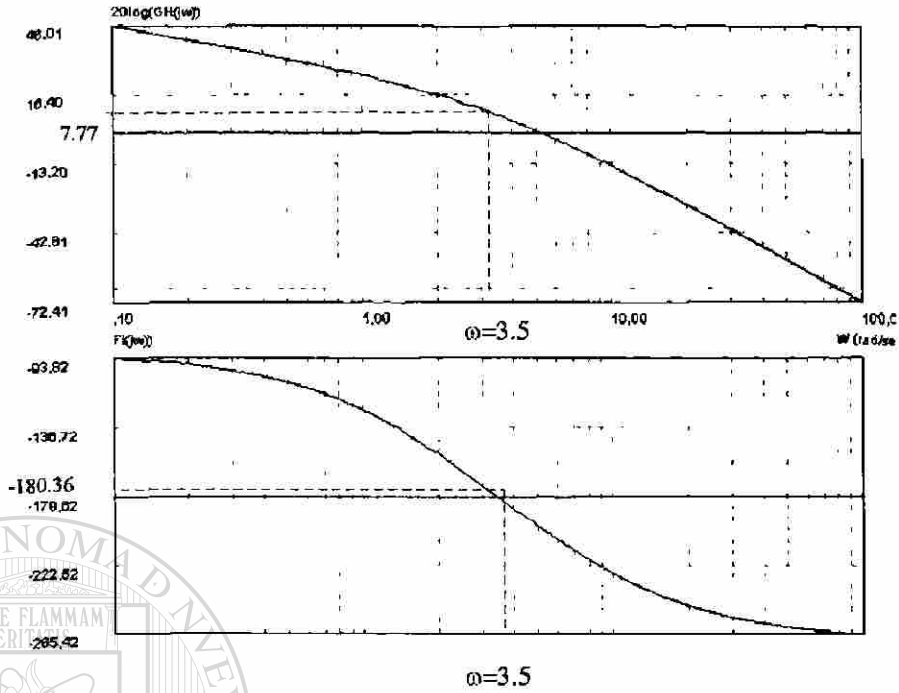


Fig. 6.14 Diagramas de Bode de Lazo Abierto, sistema compensado para reducir el error.

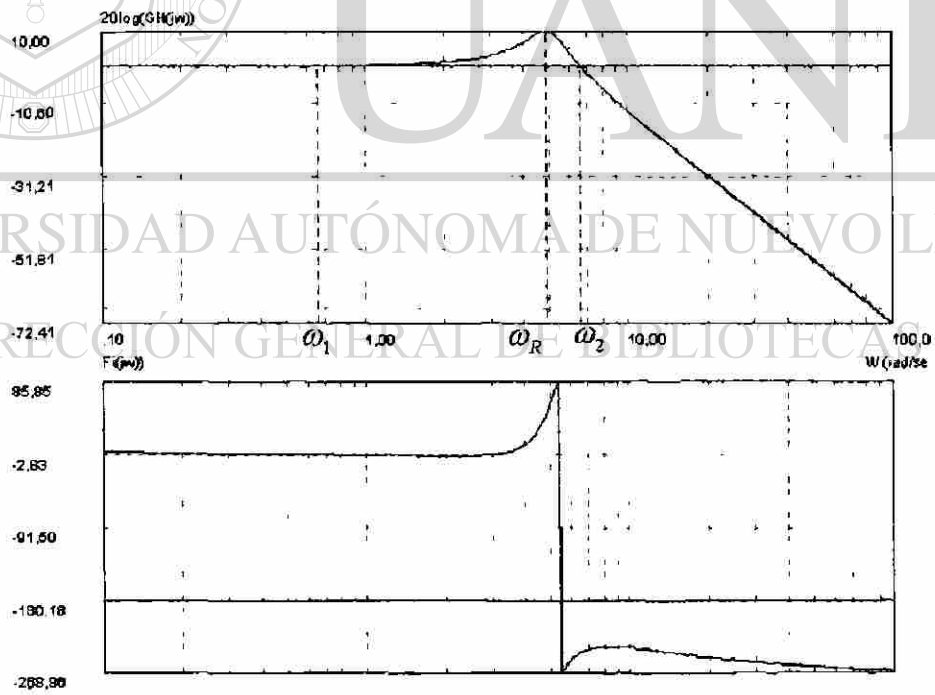


Fig. 6.15 Diagramas de Bode de Lazo Cerrado, sistema compensado para reducir el error.

$$GH''(j\omega) = \frac{20 \left(\frac{j\omega}{a_1} + 1 \right) \left(\frac{j\omega}{b_2} + 1 \right)}{j\omega \left(\frac{j\omega}{2} + 1 \right) \left(\frac{j\omega}{6} + 1 \right) \left(\frac{j\omega}{b_1} + 1 \right) \left(\frac{j\omega}{a_2} + 1 \right)} \quad (6.45)$$

Para el sistema compensado y aplicando las fórmulas (6.2) y (6.3), está representado por (6.46) y (6.47).

$$\begin{aligned} 20 \log |GH(j\omega)| &= 20 \log 20 - 20 \log \omega - 20 \log \left[\left(\frac{\omega}{2} \right)^2 + 1 \right]^{\frac{1}{2}} - 20 \log \left[\left(\frac{\omega}{6} \right)^2 + 1 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &+ 20 \log \left[\left(\frac{\omega}{a_1} \right)^2 + 1 \right]^{\frac{1}{2}} + 20 \log \left[\left(\frac{\omega}{b_2} \right)^2 + 1 \right]^{\frac{1}{2}} - 20 \log \left[\left(\frac{\omega}{b_1} \right)^2 + 1 \right]^{\frac{1}{2}} - 20 \log \left[\left(\frac{\omega}{a_2} \right)^2 + 1 \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (6.46)$$

$$\phi_{GH}(j\omega) = 0 - 90^\circ - \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{2} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{6} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{a_1} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{b_2} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{b_1} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{a_2} \right) \quad (6.47)$$

La Figura 6.16 muestra el diagrama de Bloques del sistema compensado donde se puede observar los valores de los polos y ceros de la red compensadora $a_1 = 1$, $b_1 = 8$, $b_2 = 0.32$, $a_2 = 0.04$. En las Figuras 6.17 y 6.18 se tiene los diagramas de Bode de lazo abierto y lazo cerrado respectivamente, para el sistema compensado con red de atraso-adelanto.

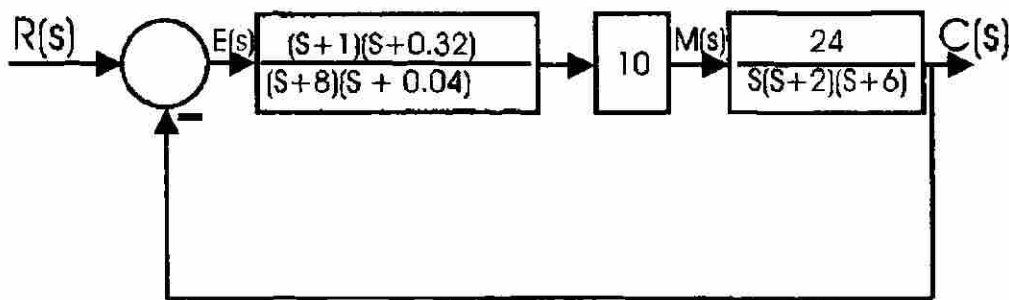


Fig. 6.16 Diagrama de Bloques, sistema compensado con una Red de Atraso-Adelanto.

Tabla 6.6 Valores sistema compensado con Red de Atraso-Adelanto.

a_1	b_1	a_2	b_2	ω	$20 \log GH(j\omega) $	$\phi_{GH}(j\omega)$	$ G(j\omega) $	Mdb	Nº	
1	8	0.04	0.32	0.1	37.85236858	-139.584	78.09414	0.085091	-0.47725	
1	8	0.04	0.32	0.2	27.40195019	-134.352	23.44755	0.259714	-1.79069	$\omega_1=0.2 \text{ rad/seg}$
1	8	0.04	0.32	0.4	18.46696857	-119.086	8.382015	0.469567	-6.29532	
1	8	0.04	0.32	0.8	11.91485172	-105.36	3.942236	0.322386	-14.6682	
1	8	0.04	0.32	1	10.23012283	-103.584	3.247178	0.230226	-17.8582	
1	8	0.04	0.32	2	5.304779345	-111.944	1.841785	0.527129	-212.25	
1	8	0.04	0.32	3.57	-0.00212716	-135.595	0.999755	2.473487	-247.815	MF=44.40516
1	8	0.04	0.32	4	-1.30644703	-141.641	0.860355	2.821703	-263.057	
1	8	0.04	0.32	4.18	-1.83929472	-144.074	0.809162	2.842418	-90.4524	Mmax.=2.842
1	8	0.04	0.32	5.5	-5.54136004	-160.136	0.528363	-0.06908	-141.036	$\omega_2=5.5 \text{ rad/seg}$
1	8	0.04	0.32	7.6	-10.7959521	-179.952	0.288538	-7.83904	-180.356	MG=10.79595
1	8	0.04	0.32	8	-11.7187956	-183.067	0.259454	-9.11695	-184.547	
1	8	0.04	0.32	10	-16.002347	-196.203	0.158447	-14.5836	-199.542	
1	8	0.04	0.32	20	-31.5076954	-229.22	0.026584	-31.3586	-230.699	
1	8	0.04	0.32	40	-48.7941979	-248.864	0.003633	-48.7831	-249.36	
1	8	0.04	0.32	80	-66.6507153	-259.202	0.000465	-66.65	-259.529	
1	8	0.04	0.32	100	-72.4403468	-261.293	0.000239	-72.44	-261.608	

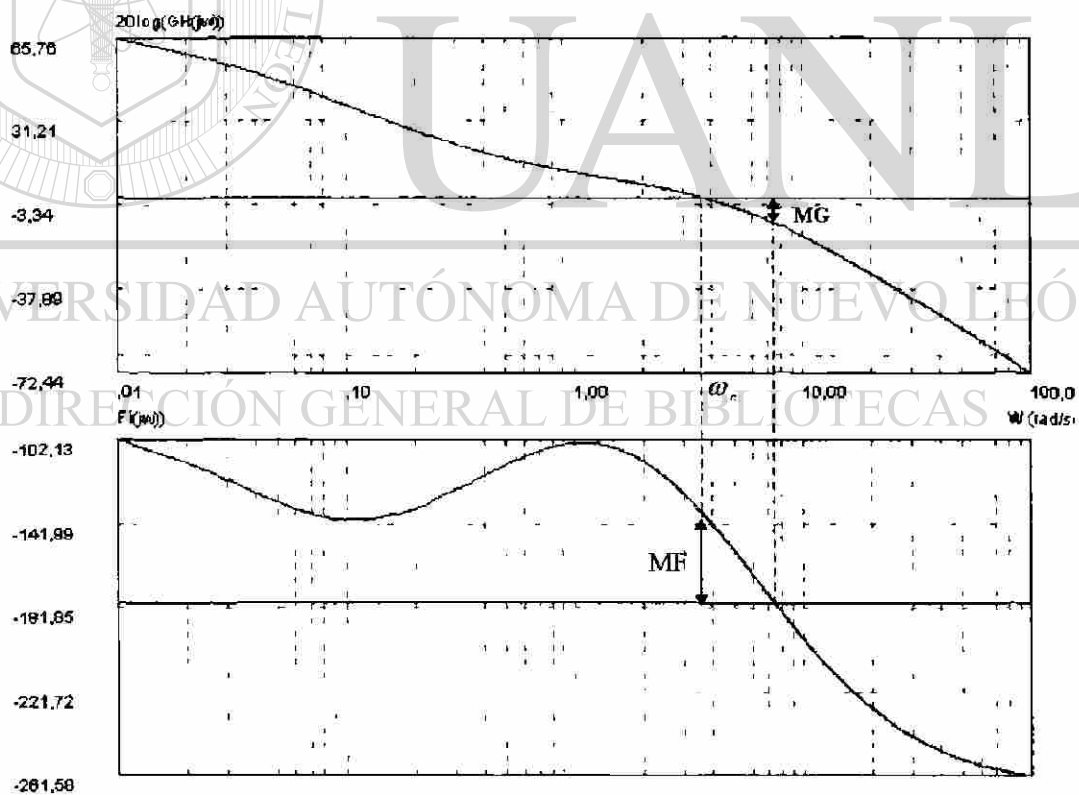


Fig. 6.17 Diagrama de Bode de Lazo Abierto, sistema compensado con Red de Atraso-Adelanto

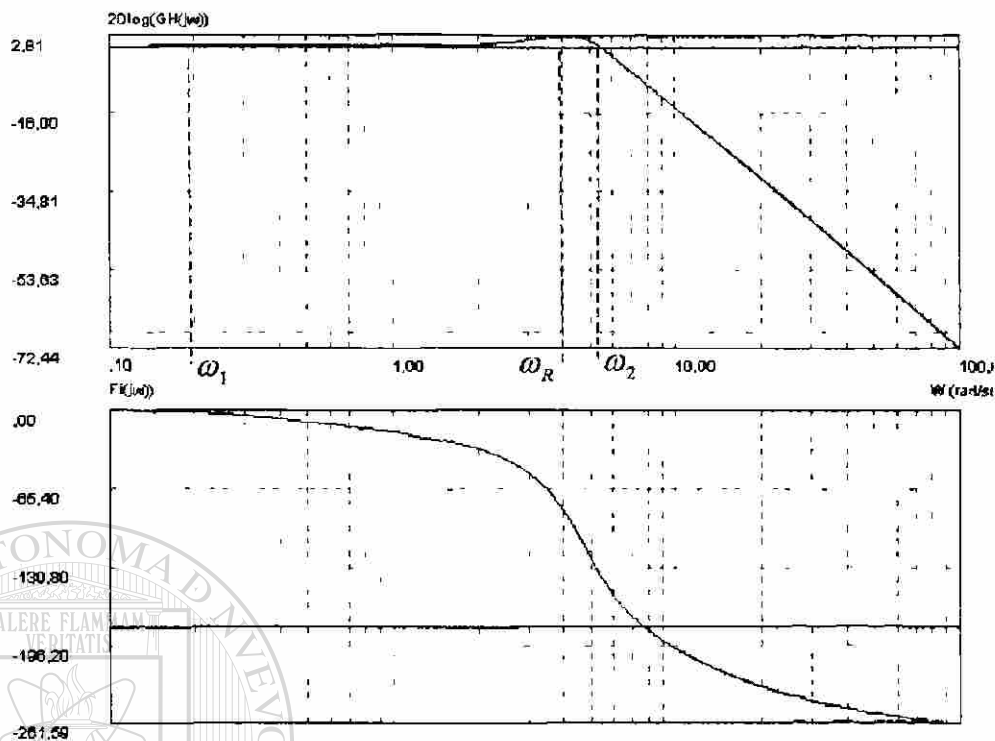


Fig. 6.18 Diagrama de Bode de Lazo Cerrado, sistema compensado con una Red de Atraso-Adelanto.

Al compensar las gráficas de las Figuras 6.16 y 6.18 se observa que el ancho de banda cambió de $\omega_1 = 0.6$ rad/seg y $\omega_2 = 6.63$ rad/seg a $\omega_1 = 0.2$ rad/seg y $\omega_2 = 5.5$ rad/seg, que la frecuencia de resonancia cambió de $\omega_r = 4.9$ rad/seg a $\omega_r = 4.18$ rad/seg, y que la amplitud máxima de resonancia pasó de $M_{\max} = 10.0$ a $M_{\max} = 2.842$.

En forma resumida se presenta una comparación de resultados en la Tabla 6.7 al compensar con redes de adelanto, atraso y atraso-adelanto. El material ha sido desarrollado de la sección 6.2.1 a la 6.2.3.

Tabla 6.7 Tabla Comparativa de Resultados, Compensación con redes de Adelanto, de Atraso, y de Atraso-Adelanto

Criterio de Compensación	Frecuencia de Cruce rad/seg	Margen de Fase MF	Ancho de Banda rad/seg	Frecuencia de Resonancia rad/seg	Valor Máximo de Resonancia
Sin Comp.	1.53	38.1°	0.32-2.28	1.65	3.82
Solo Error	5.29	-20.75°	0.75-6.59	4.9	10.00
Adelanto	15.8	44.51°	1.75-24	18.7	2.39
Atraso	1.3	44.57	0.2-1.92	1.37	2.49
Atraso-Adelanto	3.57	44.4	0.2-5.5	4.18	2.842

De la Tabla 6.7 se tiene que al compensar el sistema con las tres diferentes redes compensadoras, además de lograr el margen de fase requerido, se modifican las características de funcionamiento en lazo cerrado, esto es: el ancho de banda, la frecuencia de resonancia, y la amplitud máxima de resonancia. Para el sistema no compensado se tiene un ancho de banda, una frecuencia de resonancia, y una amplitud máxima de resonancia; que al compensar para reducir el error cambiaron aumentando a valores indeseables el máximo de resonancia y a una frecuencia muy cercana a la frecuencia de trabajo.

Al compensar con una red de adelanto, el ancho de banda aumentó considerablemente, así como la frecuencia de resonancia, lo cual evita entrar en resonancia fácilmente, y si esta condición sucede el máximo de resonancia disminuyó considerablemente y no afectará sensiblemente el funcionamiento del sistema compensado. Al añadir la compensación con red de atraso se tiene una frecuencia de resonancia baja con un ancho de banda reducido y un máximo de resonancia moderadamente alto, lo cual en forma combinada dificulta grandemente el funcionamiento del sistema compensado. Por último, la compensación con una red de atraso-adelanto permite tener la frecuencia de resonancia dentro de un rango de frecuencias preestablecidas, con un ancho de banda aceptable y un máximo de resonancia que permite trabajar a frecuencias muy cercanas a la frecuencia de resonancia.

6.3 Algoritmos para Compensación en el Dominio de la Frecuencia con Computadora Digital

Para compensar un sistema de control con esquemas de adelanto, atraso, o atraso-adelanto, utilizando los métodos de respuesta a la frecuencia aplicando el criterio de Nyquist o los diagramas de Bode de lazo abierto, primero se construyen tales diagramas para el sistema sin compensar, se revisan los márgenes obtenidos para ver si cumplen con los requerimientos de margen de fase de aproximadamente 45° . Para formar los diagramas de Bode se necesita como datos la función de transferencia de lazo abierto $GH(s)$, el rango de frecuencias ω_{\min} y ω_{\max} , y el número de puntos a graficar. La función de transferencia de lazo abierto se alimenta de la siguiente manera:

- Cantidad de Ceros Reales
- Cantidad de Ceros Complejos Conjugados
- Cantidad de Polos Reales
- Cantidad de Polos Complejos Conjugados
- El Valor de la Ganancia K
- Ceros Reales en Orden Z_i
- Ceros Complejos en forma de Términos Cuadráticos ($as^2 + bs + c$)
- Polos Reales en Orden P_i
- Polos Complejos en forma de Términos Cuadráticos ($as^2 + bs + c$)

y los datos de frecuencia:

- ⇒ Frecuencia inicial
- ⇒ Frecuencia final
- ⇒ Cantidad de puntos a Graficar

Para el diseño de la etapa de compensación es necesario, además la aproximación con la que se desea acercarse al margen de fase de 45° , y los requerimientos de lazo cerrado siguientes:

- Tolerancia Margen de Fase $\pm A^\circ$
- Rango de Frecuencia de Resonancia Mínimo
- Rango de Frecuencia de Resonancia Máximo
- Frecuencia mínima del ancho de banda
- Frecuencia máxima del ancho de banda

Para utilizar los datos de polos y ceros, al elaborar la tabulación para la construcción del diagrama de Bode de lazo abierto, se utilizará la estrategia mostrada en (6.49) para obtener la magnitud en lazo abierto en decibeles $20 \log |GH(j\omega)|$ y por (6.50) para el ángulo de fase $\phi_{GH}(j\omega)$, en lazo abierto.

$$K_B = \frac{K \prod_{j=1}^z Z_j \prod_{k=1}^{z'/2} c_k}{\prod_{i=1}^p P_i \prod_{l=1}^{p'/2} c_l} \quad (6.48)$$

$$20 \log |GH(j\omega)| = 20 \log K_B + \sum_{j=1}^z 20 \log \left[\left(\frac{\omega}{Z_j} \right)^2 + 1 \right]^{1/2} + \sum_{k=1}^{z'/2} 20 \log \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{c_k} \right)^2 + \left(\frac{b_k}{c_k} \omega \right)^2 \right]^{1/2} \\ - \sum_{i=1}^p 20 \log \left[\left(\frac{\omega}{P_i} \right)^2 + 1 \right]^{1/2} - \sum_{l=1}^{p'/2} 20 \log \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{c_l} \right)^2 + \left(\frac{b_l}{c_l} \omega \right)^2 \right]^{1/2} \quad (6.49)$$

$$\phi_{GH}(j\omega) = \sum_{j=1}^z \tan^{-1} \frac{\omega}{Z_j} + \sum_{k=1}^{z'/2} \tan^{-1} \left(\frac{b_k}{c_k} \frac{\omega}{1 - \frac{\omega^2}{c_k}} \right) - \sum_{i=1}^p \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{P_i} \right) - \sum_{l=1}^{p'/2} \tan^{-1} \left(\frac{b_l}{c_l} \frac{\omega}{1 - \frac{\omega^2}{c_l}} \right) \quad (6.50)$$

Es importante observar que cuando un cero o un polo toman el valor cero, entonces para la fórmula de la magnitud $20\log|GH(j\omega)|$, si es un polo se le resta $20\log\omega$ y si es un cero se le suma $20\log\omega$; y a la fórmula de ángulo de fase $\phi_{GH}(j\omega)$, si es un polo se le restan 90° y si es un cero se le suman 90° .

Se elaboró una rutina digital para que lleve a cabo los algoritmos descritos para el cálculo de $20\log|GH(j\omega)|$ y de $\phi_{GH}(j\omega)$, incluyendo los casos descritos en la observación del párrafo anterior. Se dan valores a ω para obtener una tabulación como la mostrada en la Tabla 5.2. Los valores se dan a ω de acuerdo a rangos especificados en los datos, llevándolos a la década más cercana. Se cuenta el número de décadas y el número de puntos se divide proporcionalmente en cada década para calcular el valor que se dará a ω para evaluar (6.49) y (6.50).

Para establecer el valor del margen de fase MF, se necesita encontrar el valor de ω en rad/seg que hace cero el valor de la magnitud, calculado con (6.49). El valor del ángulo de fase se evalúa con (6.50) y el resultado se compara con -180° , la diferencia es el margen de fase MF. Para encontrar el valor de ω se busca en la tabulación entre qué valores de ω hubo cambio de signo en la magnitud $|GH(j\omega)|$, y se interpola entre estos valores para encontrar aquel en el cual la magnitud toma un valor de cero. La frecuencia encontrada de la manera descrita es la frecuencia de cruce ω_c .

Para calcular el valor del margen de ganancia MG se necesita el valor de ω que haga 180° el ángulo de fase, calculado éste con (6.50). Se evalúa el valor de la magnitud con (6.49) y se le cambia el signo al resultado, para obtener el margen de ganancia MG. Para encontrar el valor de ω se busca en la tabla aquellos valores de ω para los cuales $\phi_{GH}(j\omega) = -180^\circ$ y se interpola entre estos valores de ω , para encontrar el ángulo de fase.

Para trazar la gráfica en coordenadas rectangulares semilogarítmicas con los datos obtenidos al aplicar (6.48) a (6.50), es necesario que la escala logarítmica se trabaje como natural, ya que **Visual Basic** requiere esta forma en la información. Para el manejo de la escala horizontal correspondiente a ω , de los rangos de frecuencia se deducen las décadas a graficar y se distribuye el número de puntos en forma proporcional, ya que para estos valores se calcularon la magnitud de $20 \log |GH(j\omega)|$ y el ángulo $\phi_{GH}(j\omega)$ que serán graficados. Como la escala es natural las unidades de la escala horizontal se multiplican por el logaritmo base 10 de la cantidad a representar.

Una vez construidos los diagramas de Bode sin incluir compensación, y después de obtener los márgenes de fase y de ganancia, así como la frecuencia de cruce ω_c , se procede a verificar si el margen de fase MF se aproxima lo suficiente a 45° . Se revisa si se tiene establecidos requisitos en cuanto a los parámetros de lazo cerrado y en caso de algún requerimiento se construye el Bode de lazo cerrado y se observa para ver si cumple los requerimientos. Si después de seguir este procedimiento el sistema no cumple con los requerimientos, se procede a la compensación.

6.3.1 Diagrama de Bode de Lazo Cerrado

Para construir los diagramas de Bode de lazo cerrado se tiene como datos la función de transferencia de lazo abierto $GH(s)$, el rango de frecuencias ω_{\min} y ω_{\max} y número de puntos a graficar. La función de transferencia de lazo abierto se establece a partir de la siguiente información:

- Cantidad de Ceros Reales
- Cantidad de Ceros Complejos Conjugados
- Cantidad de Polos Reales
- Cantidad de Polos Complejos Conjugados

- El valor de la Ganancia K
- Ceros Reales en Orden Z_j
- Ceros Complejos de forma Cuadrática ($as^2 + bs + c$)
- Polos Reales en Orden P_i
- Polos Complejos de forma Cuadrática ($as^2 + bs + c$)
- Frecuencia inicial y frecuencia final
- Cantidad de puntos a Graficar

Se usan los datos de polos y ceros para elaborar la tabla de valores y así obtener la construcción del diagrama de Bode de lazo cerrado, por medio (6.49), para obtener la magnitud en lazo abierto expresada en decibeles y por medio de (6.50) para obtener el ángulo de fase en lazo abierto. Con los valores obtenidos se calculan los valores de M y N usando (6.51) y (6.52).

Para encontrar la amplitud máxima M_{max} y la frecuencia de resonancia ω_R se busca en la tabla el valor máximo de M y se interpola con el siguiente o el anterior, hasta dar con el valor mayor; y a este valor correspondera una frecuencia que es la llamada "frecuencia de resonancia" ω_R . Para establecer el ancho de banda ($\omega_1 - \omega_2$), se buscan las dos frecuencias que tengan 3 dB menos que la amplitud máxima M_{max} , en caso de ser mayor a 3 dB y en caso de no ser así, se toma el valor de ω_1 y ω_2 cuando empieza a crecer la gráfica de 0 dB.

Para construir los diagramas de Bode de lazo cerrado se utiliza la misma técnica que para los diagramas de Bode de lazo abierto, excepto que ahora ya no es necesario que el 0 dB de la escala de magnitud M esté alineado con el -180° de la escala de ángulo N.

$$M \text{ db} = 20 \log \sqrt{\frac{|G(j\omega)|^2}{1 + 2|G(j\omega)| \cos \phi_G(j\omega) + |G(j\omega)|^2}} \quad (6.51)$$

$$N = \tan^{-1} \frac{|G(j\omega)| \sin \phi_G(j\omega)}{|G(j\omega)| \cos \phi_G(j\omega) + |G(j\omega)|^2} \quad (6.52)$$

6.3.2 Compensación con Red de Adelanto

Una vez que se establece que el sistema no cumple con los requerimientos establecidos, se analiza la posible falla a fin de seleccionar el tipo de compensación más adecuada. La compensación con red de adelanto se utiliza cuando, además del acercamiento del margen de fase MF a 45° , se necesita un ancho de banda amplio con una frecuencia de resonancia relativamente alta y una amplitud del máximo de resonancia relativamente bajo.

Para iniciar el procedimiento de compensación se analiza el margen de fase del sistema sin compensar y la frecuencia de cruce para obtener el adelanto necesario en la frecuencia de cruce. Si el adelanto de fase debe ser superior a 50° se utilizan dos redes de adelanto para lograr la compensación. Con el dato del adelanto de fase necesario, por cada red, de (6.10) se despeja la relación b/a que junto con la frecuencia de cruce ω_c de (6.9) se puede obtener el valor de a y con la relación b/a el valor de b . De la forma descrita se establecen los primeros valores a utilizar para encontrar, iterativamente, los valores que mejor resuelvan y cumplan con los requerimientos impuestos al sistema de control.

Para comenzar el proceso de solución al diseño de compensación se agregan a la función de transferencia, sin compensar, los polos representados por $-b$ y los ceros representados por $-a$. Con las fórmulas (6.49) y (6.50) se sigue el procedimiento para obtener el margen de fase MF y si éste cumple con los requerimientos establecidos, entonces los valores de a y b serán seleccionados como solución. En caso de no cumplir los requerimientos se toman valores del

doble para a y b que seguirán guardando la misma relación a/b , y se vuelve a obtener el margen de fase. En caso de que los valores sean satisfactorios entonces serán los definitivos, pero si no cumple se observa si el valor del margen de fase se acercó o se alejó del objetivo. Si se acercó a cumplir con el objetivo deseado se doblan los valores de a y b , y si se alejó se reemplaza a y b con valores a la mitad y así sucesivamente hasta sobrepasar el valor del margen de fase y encontrar un rango donde quedan circunscritos los valores de a y b . En seguida, con bisecciones del del rango se trata de llegar a los valores solución. Si al seguir el procedimiento descrito no se logra la compensación, se aumenta la relación a/b , y si se acerca a cumplir el objetivo se sigue aumentando; en caso contrario se disminuye.

Una vez que se encuentran los valores necesarios para la compensación se substituyen en la función de transferencia del sistema y se procede a obtener el diagrama de Bode de lazo cerrado y a determinar el ancho de banda, la frecuencia de resonancia, y la amplitud máxima de resonancia, para ver si se cumple con los criterios establecidos.

6.3.3 Compensación con Red de Atraso

Una vez que se establece que el sistema no cumple con los requerimientos de 45° de margen de fase, sin importar el ancho de banda, ni la frecuencia de resonancia, ni el máximo de resonancia se utiliza una red compensadora de atraso. Para realizar la compensación con una red de atraso se aprovecha la característica de que a las frecuencias de trabajo sólo prevalece la atenuación de valor $20 \log(b/a)$, ya que el atraso de fase ocurre a bajas frecuencias.

De los datos para la construcción del diagrama de Bode sin compensar, particularmente de la fórmula (6.3), se busca el valor de la frecuencia tal que el ángulo de fase sea de -135° , para que el valor de la magnitud sea de 0db y se tenga un margen de fase de 45° . Para diseñar la red compensadora es necesario conocer el valor de la magnitud en la frecuencia que se logro un ángulo de fase de -135° y de ahí calcular la relación de b/a , por medio de la fórmula

Atenuación = $20 \log(b/a)$. Con la relación b/a y fijando un valor para "a" de 100 veces menor que el menor de los polos o ceros que sean diferentes de cero se determina el valor de "b" al multiplicar el valor de a por la relación b/a . Los valores obtenidos de b y a son substituidos en (6.25) y (6.26) para agregarlas a las fórmulas generales (6.2) y (6.3), con las cuales se comprobará si se cumple con los requerimientos. Si se cumplen el sistema quedó compensado, en caso contrario se modifica el valor y se prueba hasta lograr que los requerimientos se satisfagan. De esta manera el sistema queda compensado.

6.3.4 Compensación con Red de Atraso-Adelanto

Al determinar que un sistema no cumple con los requerimientos establecidos, se analiza la falla para seleccionar el tipo de red compensadora más adecuada. La compensación con red de atraso-adelanto se utiliza cuando además del acercamiento del margen de fase MF a 45° se necesita un ancho de banda grande, con una frecuencia de resonancia ajustada a un rango de frecuencias y un máximo de resonancia relativamente bajo. Para lograr lo anterior se determina cual será la frecuencia central del rango y con tal valor se calcula en las fórmulas de magnitud y ángulo los valores correspondientes para fijarse como objetivo que la red compensadora de atraso-adelanto los proporcione. Para lograr los objetivos del diseño se establecen valores a la relación $a_1/b_1 = a_2/b_2$ y luego para a_1 y b_1 que son valores en el rango de trabajo del sistema. Por último se fijan valores para a_2 y b_2 que deben ser sensiblemente menores que a_1 y b_1 , pero guardando la misma relación. Se prueban estos valores y si no cumplen con los criterios deseados se modifican los valores a_1 y b_1 , a_2 y b_2 , así como su relación, hasta encontrar el conjunto de valores que cumplan con los requerimientos deseados.

6.4 Programa de Computadora Digital para diseño en el Dominio de la Frecuencia de Controles Automáticos Lineales

El programa en computadora digital para efectuar la compensación con red de adelanto, de atraso, o de atraso-adelanto requiere como datos la función de transferencia, en la misma forma que se describió en el desarrollo de los algoritmos y procedimientos, sección 6.3. La aproximación permitida al margen de fase de 45° y si hay requerimientos respecto al rango de frecuencias, para la frecuencia de resonancia, o bien para el ancho de banda también son requeridos como datos. Con la información de los requerimiento del rango de frecuencias, de la frecuencia de resonancia y del ancho de banda se decide el tipo de compensación. Si no hay requerimiento alguno se utilizará una red de atraso, si sólo se desea un ancho de banda amplio y una frecuencia de resonancia grande se compensará con una red de adelanto. Por último si se requiere un rango dado para la frecuencia de resonancia, entonces es necesario compensar el sistema con una red de atraso-adelanto.

El programa de computadora digital deberá mostrar como resultado los valores de los parámetros de las redes compensadoras, las gráficas de Bode de lazo abierto y de lazo cerrado, tanto para el sistema sin compensar como para el sistema ya compensado, a fin de tener una comprobación directa sobre los beneficios obtenidos.

Toda la actividad del programa deberá estar debidamente estructurada en los menús generales del programa. En los menus se tendrá uno específicamente para gráficas en el cual unas opciones serán: Gráfica de Nyquist, Gráfica de Bode de lazo abierto, Gráfica de Bode de lazo cerrado. También se dispone de un menu de salidas donde se obtiene la salida de diseño en el dominio de la frecuencia, mostrando el tipo de red utilizada en la compensación y los parámetros de ésta, así como los requerimientos de diseño y los valores de los parametros después de la compensación. Además el programa genera una nueva función de transferencia con los polos y ceros de la compensación, la cual podrá utilizarse con los menús de análisis y obtener resultados para comprobar el diseño.

CAPITULO 7

SINTESIS DE LA SIMULACION DIGITAL, EL ANALISIS Y EL DISEÑO DE CONTROLES AUTOMATICOS LINEALES

En este capítulo de la tesis se describe una metodología para el análisis de sistemas ya construidos y que están en funcionamiento, así como el diseño de nuevos sistemas de control para procesos conocidos.

7.1 Metodología para el Análisis de Sistemas de Control

Dentro de la metodología para el análisis de sistemas de control ya construidos y en funcionamiento se tienen los siguientes pasos:

Primer Paso: Un conocimiento completo del proceso y su sistema de control, describiéndolo en forma escrita y con la ayuda de diagramas esquemáticos.

Segundo Paso: Obtención del modelo matemático lo cual significa escribir ecuaciones algebraicas y diferenciales. Obtener el modelo liberalizado y las funciones de transferencia de cada componente. Unir los componentes en forma de diagramas de bloque.

Tercer Paso: Reducción de los diagramas de bloque de manera que se puedan aplicar los métodos de análisis y diseño, tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia.

Cuarto Paso: Aplicar los métodos de análisis en el dominio del tiempo, combinándose con el lugar geométrico de las raíces, para una vez que se ha encontrado el punto de

operación y con una razón de amortiguamiento dada se pueda obtener matemáticamente los parámetros que determinan el comportamiento transitorio: esto es el tiempo de respuesta T_r , tiempo de subida T_p , tiempo de alcance máximo T_a , tiempo de asentamiento T_s , % de sobrepaso y el % de error de estado estable (ver Capítulo 3 y Apéndice A).

Con la ganancia del punto de operación y las funciones de transferencia obtenidas en el tercer paso se puede continuar.

Quinto Paso: Se aplican los métodos de respuesta a la frecuencia usando el criterio de Nyquist, a través de los diagramas de Bode de lazo abierto y lazo cerrado. Se obtiene el margen de fase MF, el margen de ganancia MG, la frecuencia de cruce ω_c , la amplitud máxima de resonancia M_{max} , el ancho de banda de ω_1 a ω_2 y la frecuencia de resonancia ω_R (ver el Capítulo 5).

El análisis del funcionamiento requiere de una simulación del sistema completo en el tiempo, a fin de compararlo con el funcionamiento real del sistema. En caso de discrepancias se debe redefinir el modelo matemático hasta igualar el comportamiento observado en el sistema real por aquel que presenta el modelo y que puede servir para planeación, para la modificación del control u otros propósitos.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

7.2 Utilización del Programa SADAC para el Análisis de Sistemas de Control

En este apartado se recomienda un procedimiento para realizar el análisis de sistemas de control, implementando los pasos descritos en el apartado anterior usando una computadora digital, y utilizando el programa SADAC. Los tres primeros pasos son de desarrollo matemático y tendrán que efectuarse para tener la información que requiere proporcionarse al programa SADAC.

Para efectuar el **cuarto paso** hay que alimentar al programa SADAC la función de transferencia obtenida en el paso tres, y los datos de análisis en el dominio del tiempo (ver apartado D.3.4 del Apéndice D). Se puede obtener como salidas del programa SADAC la gráfica del lugar geométrico de las raíces (ver apartado D.3.8 del Apéndice D) y los resultados de los cálculos para transitorios (ver apartado D.3.5 del Apéndice D).

Para efectuar el **quinto paso** sólo hay que suministrar al programa SADAC los datos de análisis en el dominio de la frecuencia, ya que en el paso anterior se alimentó la función de transferencia (ver apartado D.3.4 del Apéndice D). Se puede obtener como salidas del programa SADAC las gráficas de Nyquist, de Bode de lazo abierto, y de Bode de lazo cerrado (ver apartado D.3.8 del Apéndice D) y los resultados de las mediciones de los parámetros en el dominio de la frecuencia hechas sobre las gráficas anteriores (ver apartado D.3.5 del Apéndice D).

Para completar el análisis se efectúa una simulación digital con el programa SADAC aprovechando que la función de transferencia ya está cargada en la computadora digital, desde el cuarto paso, (ver apartado D.3.8 del Apéndice D).

7.3 Metodología para el Diseño de Sistemas de Control

En el diseño de sistemas de control se tienen los siguientes pasos:

Primer Paso: Conocimiento del proceso a controlar, y los requerimientos de control para que la tecnología del proceso se cumpla según especificaciones.

Segundo Paso: Seleccionar los componentes necesarios que deben agregarse al proceso para que éste pueda ser controlado.

Tercer Paso: Formación de un diagrama esquemático del control para el proceso.

Cuarto Paso: Obtención de las funciones de transferencia individuales para cada componente del sistema de control y de la planta del proceso, (si se hace necesario se linealiza), para encontrar un diagrama de bloques del sistema completo.

Quinto Paso: Se reduce por álgebra de bloques a una forma tal que se pueda aplicar los métodos para determinar estabilidad del sistema y el respectivo comportamiento dinámico.

Sexto Paso: Se aplican los métodos del dominio del tiempo, combinados con el método del lugar geométrico de las raíces, para efectuar la compensación ya sea en la rama directa, o en la rama de retroalimentación haciendo que el sistema cumpla con los requisitos de funcionamiento. Si no es posible cumplir los requerimientos con el agregado de la compensación se seleccionan nuevamente los componentes, siguiendo un procedimiento, tal como se describe en el segundo paso (ver el Capítulo 4).

Una vez que se ha efectuado la compensación en el dominio del tiempo se procede con:

Séptimo Paso: Se aplican los métodos de respuesta a la frecuencia usando el criterio de Nyquist, en forma de diagramas de Bode, tanto de lazo abierto como de lazo cerrado, para ver si se cumple con las características de diseño. En caso de no cumplir con los criterios especificados, se diseña un nuevo compensador utilizando los métodos de compensación en el dominio de la frecuencia. En caso de que el sistema no pueda ser compensado se da inicio de nuevo al proceso de diseño siguiendo los procedimientos establecidos en los Capítulos 5 y 6 de esta tesis.

Octavo Paso: Se realiza un diagrama esquemático y de bloques para el sistema completo una vez que se ha sido compensado.

Noveno Paso: En base a los planos de conexión y la solución obtenida por el diseño y el análisis se procede a la implementación del sistema de control.

7.4 Utilización del Programa SADAC para el diseño de Sistemas de Control

Para efectuar el diseño de un sistema de control en el caso de un proceso conocido, usando una computadora digital con el programa SADAC, se siguen los pasos del apartado anterior adaptados a los menús del programa como se explica a continuación. Los **pasos del primero al quinto** se llevan a cabo fuera de la computadora.

Sexto Paso: Para trabajar en la computadora digital con el programa SADAC, primero se carga la función de transferencia y los requerimientos de diseño en el dominio del tiempo, (ver apartado D.3.4 del Apéndice D). Se genera como salida una relación mostrando los parámetros del compensador, los requerimientos de diseño y los parámetros del sistema una vez que ha sido compensado (ver apartado D.3.5 de Apéndice D), además se genera la función de transferencia del sistema compensado; para que utilizando la opción de análisis en el dominio del tiempo se pueda comprobar si cumple con los requerimientos establecidos (ver apartado D.3.5 de Apéndice D).

Para proceder al **séptimo paso** sólo hay que cargar en el programa SADAC los datos de análisis en el dominio de la frecuencia, toda vez que en el paso anterior se genero la función de transferencia del sistema compensado (ver apartado D.3.4 del Apéndice D). Se puede obtener como salidas del programa SADAC las gráficas de Nyquist, de Bode de lazo abierto, y de Bode de lazo cerrado (ver apartado D.3.8 del Apéndice D) y los resultados de las mediciones de los parámetros en el dominio de la frecuencia hechas sobre las gráficas anteriores (ver apartado D.3.5 de Apéndice D). Si con los resultados obtenidos no se cumplieron los requerimientos de diseño en el dominio de la frecuencia, se procede al rediseño en el dominio de la frecuencia. Para el rediseño se alimentan nuevamente la función de transferencia y los datos de diseño en el dominio de la frecuencia (ver apartado D.3.4 del Apéndice D) y se obtiene una relación mostrando los resultados del diseño (ver apartado D.3.5 de Apéndice D).

Los últimos dos pasos del apartado anterior se efectúan fuera del programa SADAC.

7.5 Resumen del programa SADAC para la Simulación, el Análisis y el Diseño de Sistemas Lineales de Control Automático.

El programa **SADAC (Simulation, Analysis and Design for Automatic Control)** es un simulador digital en el cual se puede efectuar la simulación, el análisis y el diseño de sistemas lineales continuos de control automático. Para mayor información sobre el uso y las consideraciones implementadas se puede consultar el Apéndice D. El programa está desarrollado con programación de eventos, utilizando el concepto de componentes reutilizables en un lenguaje de programación moderno como es el **Visual Basic** (ver Apéndice D).

El paquete SADAC está desarrollado en **Visual Basic Versión 3.0** que puede trabajar en **Windows 3-11** o en **Windows 95**, en **Formato de 16 Bits**, si se desea que trabaje en formato de 32 Bits se necesita recompilar los programas fuentes en Visual Basic Versión 4.0, formato 32 Bits. Al preparar el paquete para trabajar en formato de 32 Bits sólo puede trabajar en Windows 95 y realizará exactamente las mismas funciones que las ya descritas con anterioridad, pero se gana en velocidad y en el manejo de la calidad de las impresiones; y como desventaja se tiene que se necesitan más recursos computacionales para trabajarlo eficientemente.

Básicamente el programa está dividido en cinco partes: **Entrada de Datos**, **Salida de Resultados**, **Gráficas**, **Análisis**, y **Diseño**. En el procedimiento de entrada de datos se introducen las funciones de transferencia, las matrices y los vectores de la ecuación de estado y de salida, los datos para análisis en el dominio del tiempo o para el dominio de la frecuencia, así como los datos para llevar a cabo el diseño en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia.

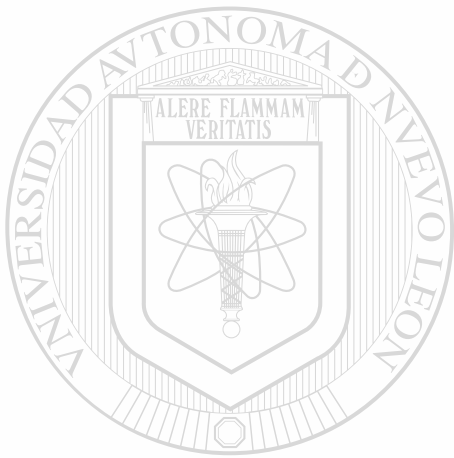
En la parte de Gráficas se puede obtener la respuesta en el tiempo para la función de transferencia actualmente en uso, la respuesta para cada una de las variables de estado o para cada una de las salidas cuando se trabaja con variables de estado. También puede obtenerse en forma de simulación, relacionando cada punto con el tiempo en que sucede y se realiza las gráficas al mismo tiempo que se calcula la solución. La respuesta en el tiempo como la simulación las puede efectuar para el sistema en lazo abierto o para sistemas de lazo cerrado cuando se trabaja con funciones de transferencia. Además, con los datos apropiados de análisis, puede formar las gráficas del lugar geométrico de las raíces, las gráficas polares de Nyquist, los diagramas de Bode de lazo abierto y de lazo cerrado.

En la sección de Análisis se efectúa tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia. En el dominio del tiempo se apoya en el método del lugar geométrico de las raíces, utilizando el criterio de polos dominantes, para trabajar los sistemas como si todos fueran de segundo orden. Se determina el punto de operación a partir de la razón de amortiguamiento δ y de ahí se calcula la frecuencia natural ω_n y la ganancia K , valores con los que posteriormente se calculará los transitorios como: tiempo de respuesta T_r , tiempo de subida T_p , tiempo de alcance máximo T_a , tiempo de asentamiento T_s , y el error de estado estable e_{ss} . Cuando se trabaja en el dominio de la frecuencia se aplica el criterio de Nyquist, tanto a los diagramas polares como a los diagramas de Bode de lazo abierto, para determinar estabilidad, también se calcula el margen de fase MF , el margen de ganancia MG y la frecuencia de cruce ω_c , y se lleva a cabo el análisis de resonancia a través de los diagramas de Bode de lazo cerrado, calculando el ancho de banda ω_1 y ω_2 , la frecuencia de resonancia ω_R , y la amplitud máxima de resonancia M_{max} .

El Diseño se lleva a cabo en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia. En la parte de diseño en el dominio del tiempo se efectúa la compensación, tanto en la rama directa agregando **Controladores PID**, como en la rama de retroalimentación. Para lograr

los objetivos propuestos se apoya en el método del lugar geométrico de las raíces. En la parte de diseño en el dominio de la frecuencia lleva a cabo la compensación en la rama directa agregando redes compensadoras de adelanto, de atraso, o de atraso-adelanto para lo cual se apoya en los diagramas de Bode de lazo abierto.

En la parte de Salida de resultados presenta como salidas los cálculos efectuados, tanto en el análisis como en el diseño y las tabulaciones para las gráficas de respuesta a la frecuencia.



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

CAPITULO 8

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En esta tesis se presenta un estudio que permite el desarrollo de una serie de programas para computadora digital, reunidos en un paquete llamado **SADAC, Simulación Análisis y Diseño de Controles Automáticos, (Simulation, Analysis & Design for Automatic Control)**. El paquete contiene programas para simulación, el análisis y el diseño de controles automáticos lineales. El paquete está desarrollado con base en una programación por eventos, utilizando el concepto de componentes reutilizables en un lenguaje moderno con ambiente Windows, **VISUAL BASIC version 3.0**.

El paquete desarrollado, a diferencia de simuladores comerciales, es sencillo de utilizar ya que la presentación, la entrada de datos y la salida de resultados se efectúa en ambiente gráfico, se hace un uso extenso de menús, sub-menús, y ventanas. Además, el paquete realiza automáticamente, sin intervención del usuario, el análisis y el diseño tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia, según se describe en los Capítulos del 3 al 6 y en el Apéndice D.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

El paquete también cuenta con un editor gráfico e Iconos para colocar agregados a las gráficas y para efectuar mediciones sobre la misma, lo cual hace que las gráficas sean más útiles a las posibles necesidades del usuario.

Esta primera versión del paquete de simulación está limitada a tratar con sistemas de control automático continuos lineales para el control tradicional, pero deja abierta la posibilidad para que en versiones posteriores se aborden las técnicas de control moderno para la solución del problema de control en sistemas de control no lineal, y de control digital o de

datos muestreados, considerando su aplicación en rangos de estabilidad para sistemas no lineales y la implementación de algoritmos especiales para sistemas muestreados por medio de la transformada z .

Para utilizar este paquete se toma como información básica de entrada la función de transferencia del sistema de control a estudiar, por lo cual es necesario el conocer dicha función previamente. Aun cuando para cada parte del programa se requieren datos particulares la función de transferencia se utiliza prácticamente en todas las partes del simulador, excepto cuando se trata de la respuesta en el tiempo y en la simulación de sistemas con varias entradas y varias salidas la cual utiliza como información primaria las matrices y los vectores de la ecuación general de estado de todo el sistema, incluyendo la ecuación de salida, que por supuesto deben conocerse con anterioridad.

Cada parte del programa necesita entradas particulares, como son: los detalles de funcionamiento requeridos para el diseño, tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia, los cuales deberán establecerse de antemano.

En cuanto a los resultados, ya sean del tipo gráficos o en forma de funciones de transferencia compensadas, pueden ser grabados en archivos para posteriormente ser utilizados cuando sea necesario. También es posible guardar un registro de todas las funciones de transferencia, de las matrices de variables de estado, y de las gráficas que intervienen en un proyecto dado.

El programa SADAC tiene la capacidad de realizar verdaderas simulaciones de sistemas lineales con coeficiente invariantes en el tiempo, presentando los puntos de las gráficas al momento de calcularse y haciendo que la gráfica se realice apareciendo en pantalla cada valor en el tiempo en el cual se efectúa la simulación. Una vez terminada la gráfica ésta puede ser escalada en tiempo o en magnitud de la salida, se pueden editar las gráficas agregando cuadrícula, letreros o líneas rectas, también es posible cambiar colores, los tipos de letras y las

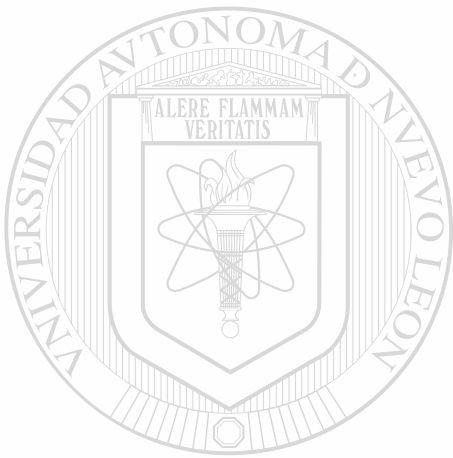
características de las líneas de la gráfica. Además, se tiene la capacidad de utilizar cursores para efectuar mediciones en las gráficas y se tiene la posibilidad de realizar graficación múltiple. Este procedimiento lo realiza en base a la solución de la ecuación matricial de estado, utilizando el método de integración numérico de la suma de paralelogramos, por consiguiente, es importante tener cuidado de que el período de muestreo sea pequeño.

El programa SADAC puede utilizarse para realizar un verdadero diseño de sistemas lineales continuos de control automático, ya que tiene opciones para el diseño en el dominio del tiempo, la compensación en la rama directa con controladores PID, y en la retroalimentación con compensadores tipo derivativos y el diseño en el dominio de la frecuencia, en el cual se compensa en la rama directa con redes compensadoras de adelanto, de atraso y de atraso-adelanto. Con estos tipos de compensaciones, combinados adecuadamente, casi siempre se puede lograr que un sistema funcione cumpliendo con los requerimientos impuestos a la tecnología del proceso que se está controlando. Además, el paquete SADAC contiene procedimientos que permiten comprobar resultados con los análisis y las simulaciones.

Se recomienda tomar en cuenta, tanto para el análisis como para el diseño, que en este paquete se utiliza la consideración de polos dominantes para aproximar el sistema a segundo grado y tratarlo como tal, teniendo como consecuencia resultados aproximados y en algunos casos, cuando no se pueden definir los dos polos dominantes, el programa no debe ser utilizado porque daría poco confiables. Otro aspecto importante es que se están utilizando métodos de análisis y de diseño de control tradicional, en los cuales no se determina controlabilidad y observabilidad de los sistemas, por lo tanto y sobre todo en los métodos de diseño, que en parte se realizan por procedimientos de prueba y error, fue necesario introducir algoritmos durante el proceso que indicaran si el problema de diseño tenía solución o no, ya que era imposible pronosticarlo; como sucede al aplicar las técnicas de control moderno.

Para complementar los estudios de análisis o diseño, el programa SADAC tiene manera de presentar como resultados las gráficas del lugar geométrico de las raíces, los diagramas de Nyquist, los diagramas de Bode de lazo abierto, y Bode de lazo cerrado y las tabulaciones de las gráficas cuando se trata de métodos de respuesta a la frecuencia.

Por lo antes mencionado se tiene que el paquete que se presenta forma un simulador que realmente está diseñado para facilitar el trabajo de los ingenieros del área del control automático.



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



APENDICE A

**RESPUESTA EN EL TIEMPO DE SISTEMAS DE CONTROL
AUTOMÁTICO CONTINUO LINEAL**

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

APENDICE A

RESPUESTA EN EL TIEMPO DE SISTEMAS DE CONTROL AUTOMATICO CONTINUO LINEAL

A.1 Introducción

En los sistemas de control lineales se usa el tiempo como una variable independiente y por esto resulta interesante, en general, calcular la respuesta en el tiempo del sistema. Con frecuencia se aplica una señal de referencia en la entrada del sistema y se estudia el comportamiento del sistema en el dominio del tiempo. Si la finalidad del sistema de control es que la salida siga las variaciones de la entrada lo más fielmente posible, es importante comparar las variables de entrada y salida en todo tiempo.

En general, la respuesta en el tiempo de un sistema consta de dos partes: *la respuesta transitoria y la respuesta de estado estable*. Si $C(t)$ es una respuesta en el tiempo, entonces:

$$C(t) = C_t(t) + C_{ss}(t) \quad (\text{A.1})$$

donde $C_t(t)$ representa la parte transitoria de la respuesta y $C_{ss}(t)$ la parte de estado estable.

El estado estable no está definido de manera normalizada, por ejemplo en el análisis de circuitos, resulta útil definirlo, algunas veces, como aquel estado que es constante. En las aplicaciones de los sistemas de control, sin embargo, cuando una respuesta alcanza su estado estable puede continuar siendo, todavía, una función del tiempo. En los sistemas de control la respuesta de estado estable es simplemente la respuesta que presenta el sistema cuando el tiempo tiende a infinito. Por lo tanto, una señal senoidal la consideramos en estado estable porque su comportamiento no varía cuando $t \rightarrow \infty$.

Se define como la parte transitoria de la respuesta aquella componente que tiende a cero a medida que crece el tiempo. Por consiguiente $C_t(t)$ tiene la propiedad:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C_t(t) = 0 \quad (\text{A.2})$$

La inercia y la fricción están presentes en los servosistemas, por lo cual la respuesta en la salida no puede seguir instantáneamente los cambios súbitos de la entrada por lo que aparece el estado transitorio, es decir cuando las condiciones iniciales no son iguales a las condiciones finales.

Al comparar la respuesta en estado transitorio con la señal de entrada se puede definir la precisión del sistema. Si la respuesta de estado estable no toma exactamente el valor de la entrada se tiene un *Error de Estado Estable*.

A.2 Señales de Entrada Tipo para el análisis del estado transitorio de los Servosistemas

En la práctica, la excitación de entrada de un servosistema no se conoce de antemano.

En la mayoría de los casos, las entradas reales varían de forma aleatoria respecto al tiempo. Por ejemplo, en un radar de seguimiento, la posición y la velocidad del blanco a seguir pueden variar imprevisiblemente, de manera que dichas variables no pueden expresarse matemáticamente con una ecuación simple. Sin embargo, como fundamento importante para el análisis y el diseño de los sistemas de control, es conveniente estudiar el comportamiento del sistema frente a algunas funciones de entrada básicas. Estas señales de prueba permiten establecer las características ideales de comportamiento del sistema, y son estas propiedades las que deberían satisfacer los sistemas de control lineal.

Para analizar el comportamiento en el dominio de la frecuencia se usa una entrada senoidal de frecuencia variable. Al variar la frecuencia de entrada desde cero hasta un rango que permita obtener las características del sistema, se puede obtener las curvas de magnitud y

de ángulo de fase entre la entrada y la salida, en función de la frecuencia. A partir de las características del sistema en el dominio de la frecuencia, es posible prever el comportamiento del sistema analizado en el dominio del tiempo.

Las señales de prueba más usadas en el análisis en el dominio del tiempo son las que se listan a continuación.

A.2.1 Entrada en Escalón (función escalón)

Es el cambio instantáneo del valor de la variable de entrada y la representación matemática de la función escalón es:

$$r(t) = \begin{cases} R & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

$$r(t) = R u_{-1}(t) \quad (\text{A.4})$$

$$R(s) = R U_{-1}(s) = \frac{R}{s} \quad (\text{A.5})$$

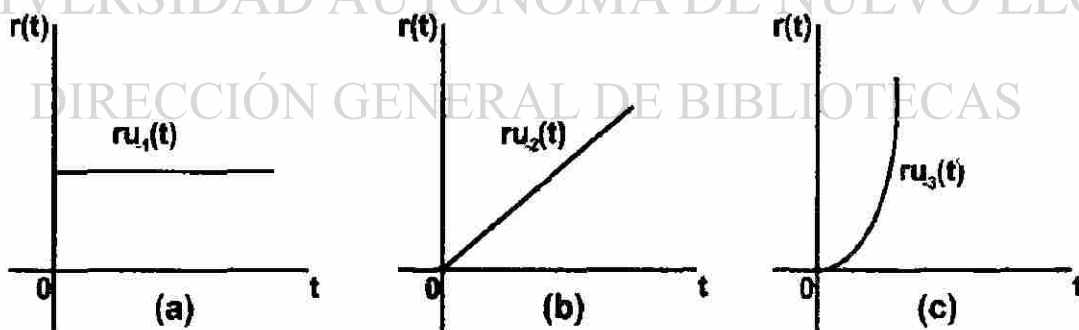


Fig. A.1 Señales de Prueba Elementales.

donde $u_{-1}(t)$ es la función escalón unitario. Para $t = 0$ $r(t)$ no está definida. La Figura A.1(a) representa la función escalón.

A.2.2 Entrada en Rampa (función rampa)

Este es el caso donde la variable de entrada cambia proporcionalmente respecto al tiempo. Matemáticamente, la función rampa se define como:

$$R(t) = \begin{cases} Rt & t \geq 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

o simplemente

$$R(t) = RU_{-2}(t) \quad (\text{A.7})$$

$$R(s) = RU_{-2}(s) = \frac{R}{s^2} \quad (\text{A.8})$$

la Figura A.1(b) representa la función rampa.

A.2.3 Entrada en Aceleración (función parabólica)

En este caso se supone que la entrada cambia de manera proporcional al cuadrado del tiempo. La representación matemática de una entrada en aceleración es:

$$R(t) = \begin{cases} Rt^2 & t \geq 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

o simplemente:

$$R(t) = RU_{-3}(t) \quad (\text{A.10})$$

$$R(s) = RU_{-3}(s) = \frac{R}{s^3} \quad (\text{A.11})$$

En la Figura A.1(c) puede verse la representación gráfica de una función de aceleración.

A.3. Comportamiento de los Servosistemas en el dominio del Tiempo

A.3.1 Respuesta en Estado Estable

En este apartado se discute los criterios típicos utilizados para medir el comportamiento de un sistema de control en el dominio del tiempo. El tiempo de respuesta de un sistema de control puede estar caracterizado por la respuesta transitoria y la de estado estable. Por otra parte, por medio de un índice de funcionamiento se da una medida cualitativa del tiempo total de respuesta. Estos criterios se discuten a continuación.

A.3.2 Error en Estado Estable

Se ha establecido que el error de estado estable mide la precisión del sistema cuando se aplica un tipo específico de entrada. En un sistema físico, debido a la fricción y a otros factores, la salida en estado estable del sistema rara vez concuerda exactamente con la entrada. Por esta razón, en los sistemas de control el error de estado estable es casi inevitable; y es un problema de diseño, donde uno de los objetivos es mantener tal error en un valor mínimo dentro de un valor mínimo dentro de una tolerancia de tolerancia. Por ejemplo, en un sistema de control de posición, se desea que la posición final de salida corresponda exactamente con la referencia. En un sistema de control de velocidad, el objetivo es lograr que la velocidad de salida esté lo más cerca posible del valor de referencia.

Si la entrada de referencia $r(t)$ y la salida controlada $c(t)$ son homogéneas dimensionalmente, por ejemplo, un voltaje controlando un voltaje, una posición controlando una posición, etc., y están al mismo nivel de magnitud o son del mismo orden, la señal de error es:

$$e(t) = r(t) - c(t) \quad (A.12)$$

Sin embargo, a veces puede ser imposible o inconveniente proporcionar una señal del mismo nivel, o incluso de la misma dimensión que la variable controlada. Por ejemplo, puede ser conveniente utilizar una fuente de potencia de bajo voltaje para controlar la salida de una fuente de potencia de alto voltaje; para un sistema de control de velocidad es más práctico utilizar una fuente de voltaje o una entrada de posición como señal para controlar la velocidad del eje de salida. En estas condiciones, la señal de error no puede definirse simplemente como la diferencia entre la entrada de referencia y la salida controlada, y la forma (A.12) carece de sentido. Las señales de entrada y de salida debe ser de la misma dimensión y estar al mismo nivel antes de restarlas. Por esta razón, es común incorporar en el camino de retroalimentación un elemento no unitario, $H(s)$, como aparece en la Figura A.2.

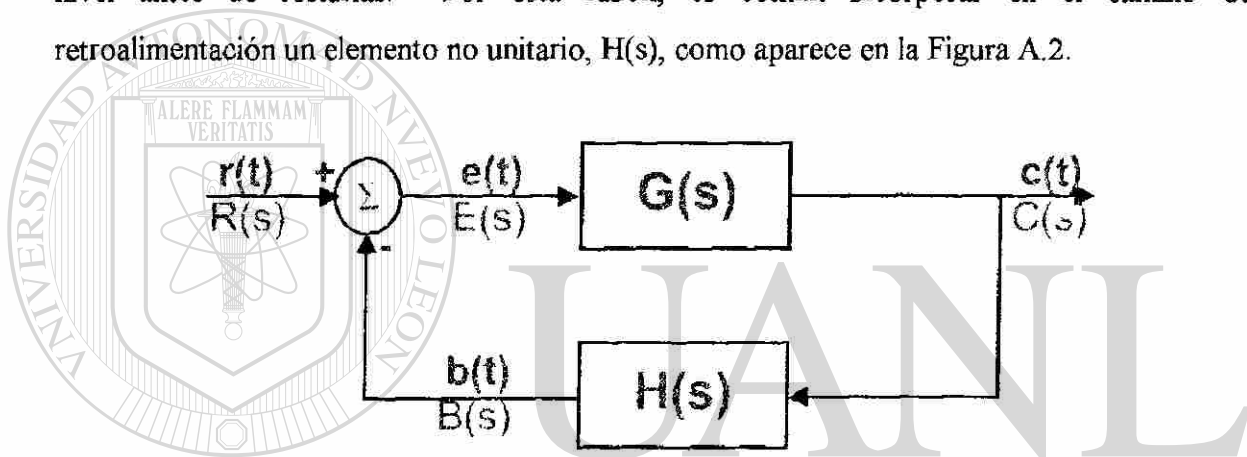


Fig. A.2 Sistema de Control con Retroalimentación no Unitaria

El error de este servosistema con retroalimentación no unitaria está definido por:

$$e(t) = r(t) - b(t) \quad (\text{A.13})$$

$$E(s) = R(s) - B(s) = R(s) - H(s)C(s) \quad (\text{A.14})$$

$$C(s) = G(s)E(s) \quad (\text{A.15})$$

$$E(s) = R(s) - G(s)H(s)E(s) \quad (\text{A.16})$$

$$E(s) = \frac{R(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (\text{A.17})$$

Por ejemplo, si se usa como referencia un valor de 10V para regular un generador de voltaje con salida de 100 V, $H(s)$ es una constante y es igual a 0.1. Cuando el voltaje de salida toma exactamente el valor de 100 V la señal de error es:

$$e(t) = 10 - 0.1 \times 100 = 0 \quad (\text{A.18})$$

Como ejemplo alternativo, se puede suponer que el sistema de la Figura A.2 representa un sistema de control de velocidad. En donde la entrada $r(t)$ se utiliza como referencia para el control de velocidad de la salida del sistema, siempre que $c(t)$ indique el desplazamiento a la salida. Entonces, se requiere un dispositivo, tal como un tacómetro en la trayectoria de retroalimentación, de manera que $H(s) = K_t s$. De este modo el error de velocidad se define como sigue:

$$E(t) = r(t) - b(t) = r(t) - K_t \frac{dc(t)}{dt} \quad (\text{A.19})$$

El error de estado estable de un servosistema se define como el error cuando el tiempo tiende a infinito, o sea:

$$\text{Error de Estado Estable} = e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \quad (\text{A.20})$$

Respecto a la Figura A.2, la transformada de Laplace de la función error es:

$$E(s) = \frac{R(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (\text{A.21}) \quad \text{®}$$

Aplicando el teorema del valor final, el error de estado estable del sistema es:

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \quad (\text{A.22})$$

donde $sE(s)$ no debe tener polos en el eje imaginario ni en la región real positiva del plano s .
Substituyendo (A.21) en (A.22).

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (\text{A.23})$$

expresión que indica que el error de estado estable depende de la entrada de referencia $R(s)$ y de la función de transferencia en lazo abierto $G(s)H(s)$.

A.3.3 Error ante entrada Escalón

El error ante entrada escalón se obtiene de (A.23) substituyendo como expresión de la entrada o sea (A.5) y resulta:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R}{1 + G(s)H(s)} \quad (\text{A.24})$$

y aplicando propiedades de límites se tiene:

$$e_{ss} = \frac{R}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)} \quad (\text{A.25})$$

y si

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s) \quad (\text{A.26})$$

por lo tanto

$$e_{ss} = \frac{R}{1 + K_p} \quad (\text{A.27})$$

y

$$\% e_{ss} = \frac{100}{1 + K_p} \quad (\text{A.28})$$

A.3.4 Error ante entrada Rampa

El error ante entrada tipo rampa se obtiene de (A.23) substituyendo la expresión de una entrada rampa, (A.8) resulta en:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R}{s + sG(s)H(s)} \quad (\text{A.29})$$

si se aplican las reglas de límites se tiene:

$$e_{ss} = \frac{R}{\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s)} \quad (\text{A.30})$$

y si

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s) \quad (\text{A.31})$$

por lo tanto

$$e_{ss} = \frac{R}{K_v} \quad (\text{A.32})$$

$$\% e_{ss} = \frac{100}{K_v} \quad (\text{A.33})$$

A.3.5 Error a la Aceleración

El error a la aceleración se obtiene de (A.23), substituyendo el valor de la entrada ante una aceleración, (A.11) y resulta en :

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R}{s^2 + s^2 G(s)H(s)} \quad (\text{A.34})$$

aplicando las reglas de límites:

$$e_{ss} = \frac{R}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)H(s)} \quad (\text{A.35})$$

y si

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)H(s) \quad (\text{A.36})$$

por lo tanto

$$e_{ss} = \frac{R}{K_a} \quad (\text{A.37})$$

$$\% e_{ss} = \frac{100}{K_a} \quad (\text{A.38})$$

A.4 Tipo de Sistema

El **Tipo** de un sistema de control está definido como la cantidad de polos de lazo abierto que tiene el sistema en el origen, como se ve en (A.39), donde **m** representa el tipo de sistema.

$$G(s)H(s) = \frac{K_B (\tau_a s + 1)(\tau_b s + 1)(\tau_c s + 1)\dots}{s^m (\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)(\tau_3 s + 1)\dots} \quad (\text{A.39})$$

En la Tabla A.1 se puede observar: si el sistema es Tipo 0 tiene un error de estado estable constante cuando se le aplica una entrada en escalón y para las entradas en rampa y aceleración el sistema es inestable. Para un sistema Tipo 1 con una entrada en rampa se tiene un error de estado estable constante y con la entrada escalón no tiene error de estado estable, siendo inestable cuando se aplica una entrada en Aceleración. Para un sistema Tipo 2 con entradas escalón y rampa no se tiene error de estado estable y con una entrada en aceleración se tiene un error de estado estable constante. Un sistema Tipo 3 no tiene error de estado estable bajo ninguna de las tres entradas tipo.

Tabla A.1 Error de Estado Estable para diferentes Tipos de sistemas.

Tipo	K_p	K_v	K_a	$\%e_{ss} = \frac{100}{1+K_p}$	$\%e_{ss} = \frac{100}{K_v}$	$\%e_{ss} = \frac{100}{K_a}$
0	K_s	0	0	$\%e_{ss} = \frac{100}{1+K_B}$	∞	∞
1	∞	K_s	0	0	$\%e_{ss} = \frac{100}{K_B}$	∞
2	∞	∞	K_s	0	0	$\%e_{ss} = \frac{100}{K_B}$
3	∞	∞	∞	0	0	0

A.5 Respuesta Transitoria

Normalmente, para analizar la respuesta transitoria de un servosistema se usa como señal de entrada una función escalón unitario. En la Figura A.3 se tiene una respuesta típica a un escalón unitario de entrada. En general, la respuesta está caracterizada por los siguientes parámetros:

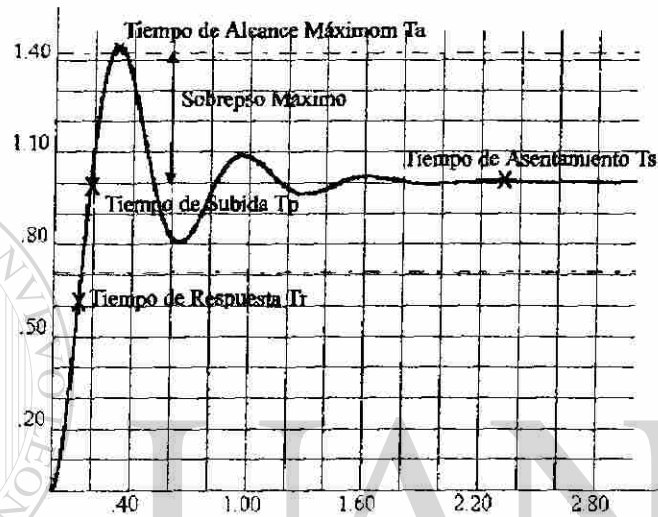


Fig. A.3 Respuesta a Escalón Unitario con Especificaciones en el tiempo.

- a) *Sobrepaso Máximo*. El sobrepaso máximo indica el máximo error entre la entrada y la salida durante el estado transitorio. También se usa para medir la estabilidad relativa del sistema. Es frecuente presentar el valor de sobrepaso como un porcentaje del valor deseado para la salida; o sea:

$$\% \text{ de Sobrepaso} = \frac{\text{Sobrepaso Máximo}}{\text{Valor Final Deseado}} \times 100 \quad (\text{A.40})$$

- b) *Tiempo de Respuesta* (T_r). Se considera al tiempo en el cual un sistema de control tiene una respuesta del 63.21% del valor final.

- c) *Tiempo de subida* (T_p): Es el tiempo en el cual el sistema de control pasa por primera vez por el valor final deseado; al oscilar durante la respuesta transitoria.
- d) *Tiempo de Alcance Máximo* (T_a). Es el tiempo requerido para que la respuesta transitoria del sistema llegue a su alcance máximo.
- e) *Tiempo de Asentamiento* (T_s). Es el tiempo que toma a un sistema de control automático pasar de un estado estable a otro estado estable, cuando se aplica una señal de entrada.

Existen otros parámetros igualmente importantes como el coeficiente de amortiguamiento, la razón de amortiguamiento y la frecuencia natural no-amortiguada, los cuales no están representados en la Figura A.3. En el siguiente apartado se estudiará su comportamiento.

A.6 Ecuación Característica de los Servosistemas

Una vez obtenida la función de transferencia, la ecuación característica resulta de igualar a cero el denominador de la función, como se muestra en seguida.

$$s^n + A_1 s^{n-1} + \dots + A_{n-1} s + A_n = 0 \quad (\text{A.41})$$

Se puede decir también que la ecuación característica es aquella que contiene los coeficientes de la parte homogénea de la ecuación diferencial del sistema. La ecuación característica puede establecerse también en función de las ecuaciones de estado del sistema y se escribe como:

$$|sI - P| = 0 \quad (\text{A.42})$$

donde P es la matriz acompañante en la ecuación de estado $\dot{x}(t) = Px(t) + Bu(t)$. Las raíces de la ecuación característica se denominan *Valores Propios* o *Valores Característicos* de la matriz P .

Considerando el diagrama de bloques del sistema de control retroalimentado que muestra la Figura A.2, la función de transferencia en lazo cerrado de un servosistema es:

$$M(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (\text{A.43})$$

De acuerdo con la definición dada con anterioridad, la ecuación característica de un servosistema se obtiene igualando a cero el denominador de (A.43); o sea:

$$1 + G(s)H(s) = 0 \quad (\text{A.44})$$

observando que en general, (A.44) es la ecuación característica de un sistema de control retroalimentado lineal.

Considerando un servosistema (sin retardo) definido por la siguiente función de transferencia en lazo cerrado:

$$M(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K(s + Z_1)(s + Z_2)\dots(s + Z_m)}{(s + P_1)(s + P_2)\dots(s + P_n)} \quad (\text{A.45})$$

donde $-Z_1, -Z_2, \dots, -Z_m$ son los ceros y $-P_1, -P_2, \dots, -P_n$ son los polos de la función de transferencia; los valores $-P$ son raíces de la ecuación característica. Si la función de transferencia $M(s)$ es una función racional de s , los polos y ceros de $M(s)$ deben ser números reales o pares de números complejos conjugados. Por lo tanto, (A.45) puede reescribirse como:

$$M(s) = \frac{K(s+Z_1)(s+Z_2)\dots(s+Z_m)}{\prod_{i=1}^N (s+\sigma_i) \prod_{k=1}^M (s+\sigma_K+j\omega_k)(s+\sigma_K-j\omega_k)} \quad (\text{A.46})$$

donde $(s+\sigma_i)$ representan los N polos reales y $(s+\sigma_K+j\omega_K)(s+\sigma_K-j\omega_K)$ corresponden a los M polos complejos conjugados.

La respuesta del sistema a una señal de entrada $r(t)$ está dada por la expresión:

$$C(t) = \ell^{-1}\{C(s)\} = \ell^{-1}\{R(s)M(s)\} \quad (\text{A.47})$$

si $r(t)$ es un escalón unitario y $M(s)$ viene dada por (A.46), la respuesta $c(t)$ se transforma en:

$$C(t) = \ell^{-1} \left\{ \frac{K \prod_{j=1}^L (s+Z_j)}{s \prod_{i=1}^N (s+\sigma_i) \prod_{k=1}^M [s^2 + 2\sigma_k s + (\sigma_k^2 + \omega_k^2)]} \right\} \quad (\text{A.48})$$

que al descomponerse en fracciones parciales puede escribirse como (A.49), cuando no hay raíces repetidas.

$$C(t) = \ell^{-1} \left\{ \frac{A_0}{s} + \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{(s+\sigma_i)} + \sum_{k=1}^M \frac{B_k s + C_k}{s^2 + 2\sigma_k s + (\sigma_k^2 + \omega_k^2)} \right\} \quad (\text{A.49})$$

donde A_i , B_k y C_k son constantes a evaluar.

Para las fracciones parciales en (A.49) se identifican pares de transformadas, mediante una Tabla de Transformadas de Laplace, como las siguientes:

$$\ell^{-1} \left\{ \frac{A_0}{s} \right\} = A_0 \quad (\text{A.50})$$

$$\ell^{-1} \left\{ \frac{1}{(s + \sigma_i)} \right\} = e^{-\sigma_i t} \quad (\text{A.51})$$

$$\ell^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + 2\sigma_k s + (\sigma_k^2 + \omega_k^2)} \right\} = \frac{1}{\omega_k} e^{-\sigma_k t} \text{sen}(\omega_k t) \quad (\text{A.52})$$

En caso de no presentarse raíces repetidas en la ecuación característica, la expresión de $C(t)$ toma la forma:

$$C(t) = 1 + \sum_{i=1}^M A_i e^{-\sigma_i t} + \sum_{k=1}^M B_k \frac{1}{\omega_k} e^{-\sigma_k t} \text{sen}(\omega_k t) \quad (\text{A.53})$$

En la última ecuación, los términos que aparecen bajo el símbolo de sumatoria, representan la respuesta transitoria, y el primer término, es la respuesta de estado estable. Además, *la respuesta transitoria se caracteriza por la presencia de términos exponenciales, por formas senoidales amortiguadas o ambos.* Es un hecho importante que la localización de las raíces de la ecuación característica en el plano complejo s , define únicamente la forma de la respuesta transitoria. Las raíces reales σ_i , y las partes reales de las raíces complejas σ_k , aparecen como exponentes y, por lo tanto, controlan el amortiguamiento de la respuesta en el tiempo. La parte imaginaria de las raíces complejas ω_k son las frecuencias de oscilación en las senoides presentes en la respuesta.

A.6.1 Localización en el plano complejo de las raíces características.

Es evidente que si cualquiera de las raíces reales es positiva, es decir, que se localiza en la mitad derecha del plano complejo s . El término exponencial correspondiente en la respuesta transitoria, aumentará monótonicamente con el tiempo, y se dice que el sistema es inestable. En forma semejante, un par de raíces complejas conjugadas, con partes reales positivas, corresponderá a una oscilación senoidal con amplitud creciente. Por lo tanto, se

puede llegar a la conclusión de que para obtener una respuesta estable las raíces de la ecuación característica no deben localizarse en la mitad derecha del plano complejo. Las raíces que se encuentran en el eje imaginario corresponden a sistemas con oscilaciones sostenidas de magnitud constante. La Figura A.4 muestra el efecto sobre el tipo de respuesta, respecto de varias localizaciones de las raíces en el plano complejo s . La forma de las respuestas puede ser senoidal, exponencial amortiguada, o creciente en el tiempo.

Por las respuestas observadas en la Figura A.4 puede verse que las respuestas estables que corresponden a raíces próximas al eje imaginario se amortiguan más lentamente que las que corresponden a raíces que están más alejadas respecto de dicho eje. El tiempo requerido para el decaimiento de la respuesta transitoria, se mide por la distancia horizontal de la raíz al eje $j\omega$, mientras más pequeña sea tal distancia, más lentamente decaen los transitorios. Las raíces que están próximas al eje $j\omega$ se les llama a veces raíces dominantes de la ecuación característica, debido a que todas las otras raíces presentes dan lugar a transitorios que decaen más rápido. Se observa que es común tener en los sistemas de control retroalimentados raíces dominantes, las cuales aparecen en pares complejos conjugados.

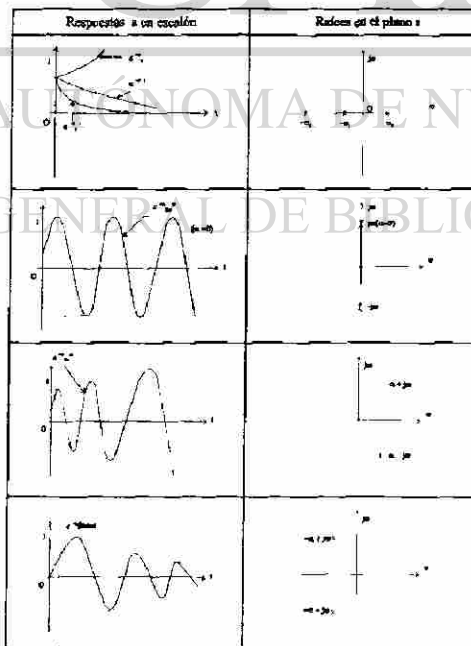


Fig. A.4 Comparación de Respuestas a varias localizaciones de raíces en el plano s .

Si se considera la ecuación cuadrática:

$$s^2 + 2\sigma s + (\sigma^2 + \omega^2) = 0 \quad (\text{A.54})$$

la cual es conveniente escribir como (A.55) y con dos raíces dadas por (A.56).

$$s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (\text{A.55})$$

$$S_1, S_2 = -\delta \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1 - \delta^2} = -\sigma \pm j \omega \quad (\text{A.56})$$

en donde:

$$\delta = \text{razón de amortiguamiento} \quad (\text{A.57})$$

$$\omega_n = \text{frecuencia natural de oscilación sin amortiguamiento } (\delta = 0) \quad (\text{A.58})$$

$$\omega_n = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2} \quad (\text{A.59})$$

$$\sigma = \delta \omega_n = \text{constante de amortiguamiento (amortiguamiento real)} \quad (\text{A.60})$$

$$\omega = \omega_n \sqrt{1 - \delta^2} = \text{frecuencia real de trabajo} \quad (\text{A.61})$$

En términos de la razón de amortiguamiento δ , las raíces de la ecuación característica se pueden clasificar como:

$$0 < \delta < 1 \quad S_1, S_2 = -\delta \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1 - \delta^2} \quad (\text{Sub-Amortiguado}) \quad (\text{A.62}) \textcircled{R}$$

$$\delta = 1 \quad S_1, S_2 = -\omega_n \quad (\text{Amortiguamiento Crítico}) \quad (\text{A.63})$$

$$\delta > 1 \quad S_1, S_2 = -\delta \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1 - \delta^2} \quad (\text{Sobre-Amortiguado}) \quad (\text{A.64})$$

$$\delta = 0 \quad S_1, S_2 = \pm j \omega_n \quad (\text{Sin Amortiguamiento}) \quad (\text{A.65})$$

Si ω_n se mantiene constante y δ se varía de cero a infinito la localización de las raíces características, se alejarán del eje imaginario siguiendo una trayectoria circular de radio ω_n . Las raíces se encontrarán en el punto $s = -\omega = -\omega_n$; para el valor $\delta = 1$. Para valores $\delta > 1$ las raíces se separarán y se localizan a lo largo del eje real, una hacia cero y la otra hacia $-\infty$. Esto se muestra en la Figura A.5.

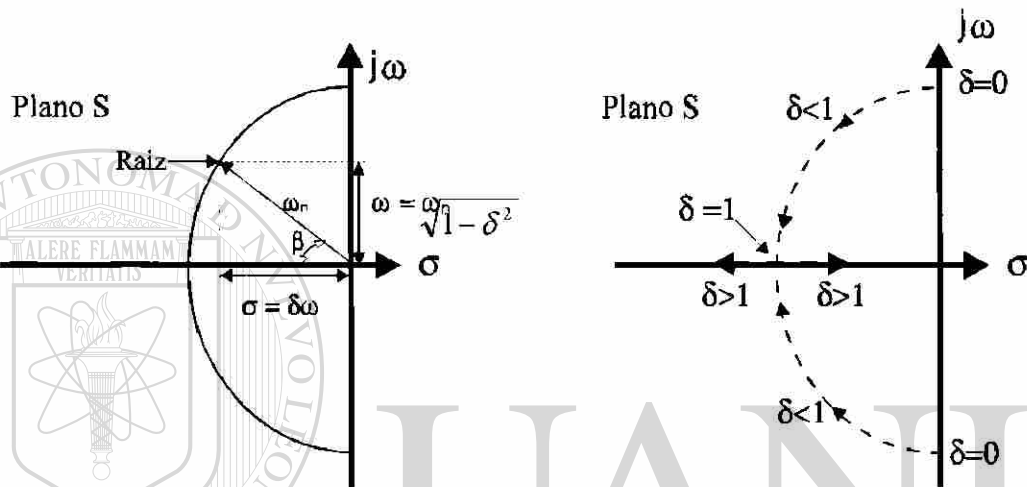


Fig. A.5 Lugar de las raíces características, $\delta (0, \infty)$, ω_n se mantiene constante.

En el caso de las raíces complejas conjugadas, ω_n es la distancia radial de las raíces al origen ya que $\omega_n = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$. La razón de amortiguamiento δ es el coseno del ángulo que forma la línea radial de las raíces respecto del eje real negativo.

$$\cos \beta = \frac{\delta \omega_n}{\omega_n} = \delta \quad (\text{A.66})$$

A.7 Respuesta Transitoria para un Sistema de Segundo Orden

Si se considera un sistema de control retroalimentado, con una función de transferencia de lazo cerrado, como se muestra:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (\text{A.67})$$

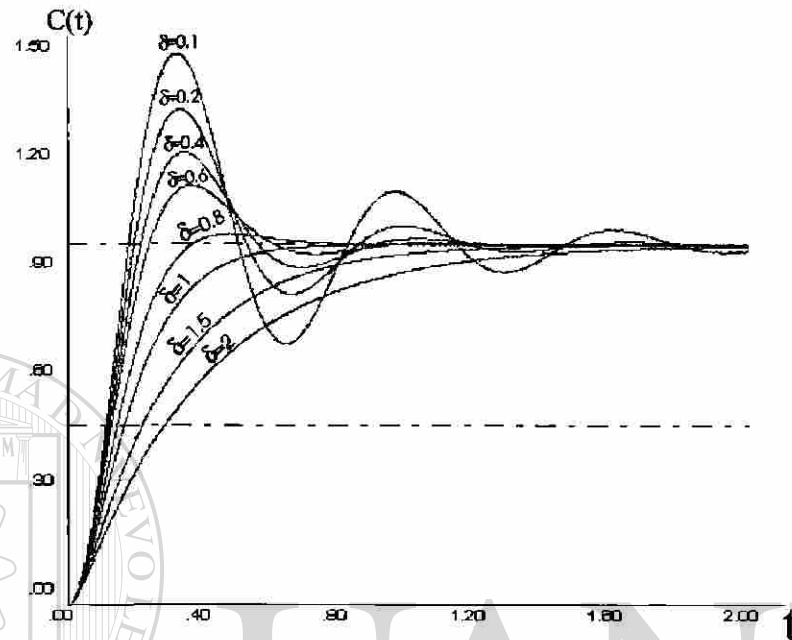


Fig.A.6 Respuesta Transitoria de un Servomecanismo de Segundo Orden con Entrada en Escalón Unitario.

Para una función de entrada en escalón unitario, la respuesta de salida del sistema es:

$$C(t) = \ell^{-1} \left\{ \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)} \right\} \quad (\text{A.68})$$

que en fracciones parciales queda:

$$c(t) = \ell^{-1} \left\{ \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2} \right\} \quad (\text{A.69})$$

o bien

$$= \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{(s+\delta\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1-\delta^2})^2} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{(s+b)^2 + \omega^2} \quad (\text{A.70})$$

si

$$b = \delta\omega_n \quad \text{y} \quad \omega = \omega_n\sqrt{1-\delta^2}$$

y los coeficientes por fracciones parciales resultan en:

$$As^2 + 2Abs + Ab^2 + A\omega^2 + Bs^2 + Cs = \omega_n^2 \quad (\text{A.71})$$

reagrupando terminos se tiene:

$$(A+B)s^2 + (2Ab+C)s + A(b^2 + \omega^2) = \omega_n^2 \quad (\text{A.72})$$

donde

$$A+B=0 \quad \text{y} \quad 2Ab+C=0$$

substituyendo valores en (A.73):

$$A = \frac{\omega_n^2}{b^2 + \omega^2} = \frac{\omega_n^2}{\delta^2\omega_n^2 + \omega_n^2(1-\delta^2)} = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2[\delta^2 + 1 - \delta^2]} = 1 \quad (\text{A.73})$$

$$B = -A = -1 \quad \text{y} \quad C = -2Ab = 2b = 2\delta\omega_n$$

o sea que:

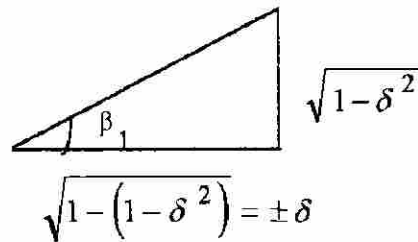
$$C(t) = \ell^{-1} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{s + 2\delta \omega_n}{(s+b)^2 + \omega^2} \right\} \quad (\text{A.74})$$

$$c(t) = \ell^{-1} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{(s+b) + \delta \omega_n}{(s+b)^2 + \omega^2} \right\} \quad (\text{A.75})$$

$$c(t) = \ell^{-1} \left\{ \frac{1}{s} + \frac{\frac{-\delta \omega}{\sqrt{1-\delta^2}} - (s+b)}{(s+b)^2 + \omega^2} \right\} = \ell^{-1} \left\{ \frac{1}{s} + \frac{-\omega\delta - (s+b)\sqrt{1-\delta^2}}{\sqrt{1-\delta^2} [(s+b)^2 + \omega^2]} \right\} \quad (\text{A.76})$$

y si

$$\text{sen } \beta = \sqrt{1-\delta^2} \text{ y } \text{cos } \beta = \delta$$



$$c(t) = \ell^{-1} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}} \frac{\omega\delta + (s+b)\sqrt{1-\delta^2}}{[(s+b)^2 + \omega^2]} \right\} \quad (\text{A.77})$$

$$c(t) = \ell^{-1} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}} \frac{\omega \text{cos } \beta + (s+b) \text{sen } \beta}{[(s+b)^2 + \omega^2]} \right\} \quad (\text{A.78})$$

La transformada inversa de Laplace se encuentra en Tablas:

$$c(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}} e^{-\delta \omega_n t} \text{sen}(\omega t + \beta) \quad (\text{A.79})$$

$$c(t) = 1 + \frac{e^{-\delta \omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}} \text{sen}(\omega_n \sqrt{1-\delta^2} t + \beta) \quad (\text{A.80})$$

donde

$$\beta = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{1-\delta^2}}{-\delta} \right)$$

De (A.80) se pueden obtener fórmulas para calcular el % de sobrepaso, el tiempo de respuesta T_r , el tiempo de subida T_p , el tiempo de alcance máximo T_a , y el tiempo de asentamiento T_s . Los cuales ya fueron mostrados en la Figura A.3.

Con la envolvente de la senoidal $(1 - e^{-\delta \omega_n t})$ de (A.80) se obtiene los tiempos T_r y T_s .

Consultando la Tabla A.2 se observa que cuando el tiempo es igual a la constante de tiempo se tiene el tiempo de respuesta T_r , (A.81). Para obtener el tiempo de asentamiento T_s se considera que el sistema ya se estabilizó cuando oscila un % arriba o abajo del valor final deseado, (A.82).

$$T_r = \frac{1}{\delta \omega_n} \quad (\text{A.81})$$

$$T_s = \frac{A}{\delta \omega_n} \quad \text{donde } A = \begin{cases} 3 & \text{para } \pm 5\% \\ 4 & \text{para } \pm 2\% \\ 5 & \text{para } < \pm 5\% \end{cases} \quad (\text{A.82})$$

Tabla A.2 Valores de la Envolvente para Múltiplos de la Constante de Tiempo

Tiempo t	$(1 - e^{-\delta \omega_n t})$	$100 e^{-\delta \omega_n t}$
$\tau = \frac{1}{\delta \omega_n}$	0.6321	36.78%
$2\tau = \frac{2}{\delta \omega_n}$	0.8646	13.53%
$3\tau = \frac{3}{\delta \omega_n}$	0.9502	4.97%
$4\tau = \frac{4}{\delta \omega_n}$	0.9816	1.83%
$5\tau = \frac{5}{\delta \omega_n}$	0.9932	0.673%

Para obtener el tiempo de subida T_p se considera que (A.80) tiene como valor 1, como se muestra:

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\delta \omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}} \operatorname{sen} \left[\omega_n \sqrt{1-\delta^2} t + \beta \right] = 1 \quad (\text{A.83})$$

$$\frac{e^{-\delta \omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}} \operatorname{sen} \left[\omega_n \sqrt{1-\delta^2} t + \beta \right] = 0 \quad (\text{A.84})$$

$$\operatorname{sen} \left(\omega_n \sqrt{1-\delta^2} t + \beta \right) = 0 \quad (\text{A.85})$$

por lo tanto el argumento de la función seno debe tener el valor de π radianes.

$$\omega_n \sqrt{1-\delta^2} t + \beta = \pi \quad (\text{A.86})$$

Despejando a t se tiene el tiempo de subida T_p :

$$T_p = \frac{\pi - \beta}{\omega_n \sqrt{1-\delta^2}} \quad (\text{A.87})$$

En la Figura A.6 se tiene el comportamiento de la salida del sistema para distintos valores del coeficiente de amortiguamiento δ , en función del tiempo normalizado $\omega_n t$. Se observa que la respuesta es más oscilatoria a menor valor de δ . Cuando $\delta \geq 1$, la respuesta no presenta sobrepaso o sea que la salida no excede el valor de la entrada. Puede obtenerse la relación exacta entre el coeficiente de amortiguamiento y el valor del sobrepaso, tomando la derivada de (A.80) e igualando a cero.

$$\frac{dc(t)}{dt} = -\frac{\delta \omega_n e^{-\delta \omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}} \operatorname{sen} [\omega t + \beta] + \frac{e^{-\delta \omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}} \omega_n \sqrt{1-\delta^2} \cos [\omega t + \beta] \quad (\text{A.88})$$

donde:

$$\beta = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{1-\delta^2}}{-\delta} \right) \quad (\text{A.89})$$

$$\frac{dc(t)}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}} \left[-\delta \omega_n e^{-\delta \omega_n t} \operatorname{sen}(\omega_n \sqrt{1-\delta^2} t + \beta) + \omega_n \sqrt{1-\delta^2} e^{-\delta \omega_n t} \cos(\omega_n \sqrt{1-\delta^2} t + \beta) \right] \quad (\text{A.90})$$

$$-\frac{\omega_n e^{-\delta \omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}} \left[-\delta \operatorname{sen}(\omega_n \sqrt{1-\delta^2} t + \beta) + \sqrt{1-\delta^2} \cos(\omega_n \sqrt{1-\delta^2} t + \beta) \right] = 0 \quad (\text{A.91})$$

$$\begin{aligned} & -\delta \left\{ \operatorname{sen}(\omega_n \sqrt{1-\delta^2} t) \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cos(\omega_n \sqrt{1-\delta^2} t) \right\} \\ & + \sqrt{1-\delta^2} \left\{ \cos(\omega_n \sqrt{1-\delta^2} t) \cos \beta - \operatorname{sen}(\omega_n \sqrt{1-\delta^2} t) \operatorname{sen} \beta \right\} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.92})$$

$$\cos \beta = \delta \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} \beta = \sqrt{1-\delta^2}$$

$$\begin{aligned} & -\delta^2 \operatorname{sen}(\omega_n \sqrt{1-\delta^2} t) - \delta \sqrt{1-\delta^2} \cos(\omega_n \sqrt{1-\delta^2} t) \\ & + \delta \sqrt{1-\delta^2} \cos(\omega_n \sqrt{1-\delta^2} t) - (1-\delta^2) \operatorname{sen}(\omega_n \sqrt{1-\delta^2} t) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.93})$$

$$-\operatorname{sen}(\omega_n \sqrt{1-\delta^2} t) + \delta^2 \operatorname{sen}(\omega_n \sqrt{1-\delta^2} t) - \delta^2 \cos(\omega_n \sqrt{1-\delta^2} t) = 0 \quad (\text{A.94})$$

$$-\operatorname{sen}(\omega_n \sqrt{1-\delta^2} t) = 0 \quad (\text{A.95})$$

por lo tanto, el argumento de (A.95) debe ser:

$$\omega_n \sqrt{1-\delta^2} t = k \pi \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (\text{A.96})$$

el tiempo de los máximos es:

$$t \Big|_{\min}^{\max} = \frac{k\pi}{\omega_n \sqrt{1-\delta^2}} \quad (\text{A.97})$$

El primer valor máximo de la salida $c(t)$ tiene lugar para $k = 1$; por tanto:

$$T_a = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\delta^2}} \quad (\text{A.98})$$

En general, para todos los valores impares de n , $n = 1, 3, 5, \dots$, de (A.97) se obtienen los tiempos en que se producen los sobrepasos; para los valores pares de n , se tienen los mínimos, Figura A.7. Es interesante observar que, aun cuando los valores máximos y mínimos de la respuesta tienen lugar en intervalos periódicos, la senoide amortiguada no es una función periódica. Los valores de los máximos pueden obtenerse sustituyendo (A.97) en (A.80), por lo tanto:

$$c(t) \Big|_{\min}^{\max} = 1 - \frac{e^{-\left(\frac{\delta \omega_n \pi}{\omega_n \sqrt{1-\delta^2}}\right)}}{\sqrt{1-\delta^2}} \operatorname{sen} \left(\frac{\omega_n \sqrt{1-\delta^2} \pi}{\omega_n \sqrt{1-\delta^2}} + \beta \right) \quad (\text{A.99})$$

$$c(t) \Big|_{\min}^{\max} = 1 - \frac{e^{-\left(\frac{\delta \pi}{\sqrt{1-\delta^2}}\right)}}{\sqrt{1-\delta^2}} \operatorname{sen} (n\pi + \beta) \quad (\text{A.100})$$

para $n = 1, 2, 3, \dots$

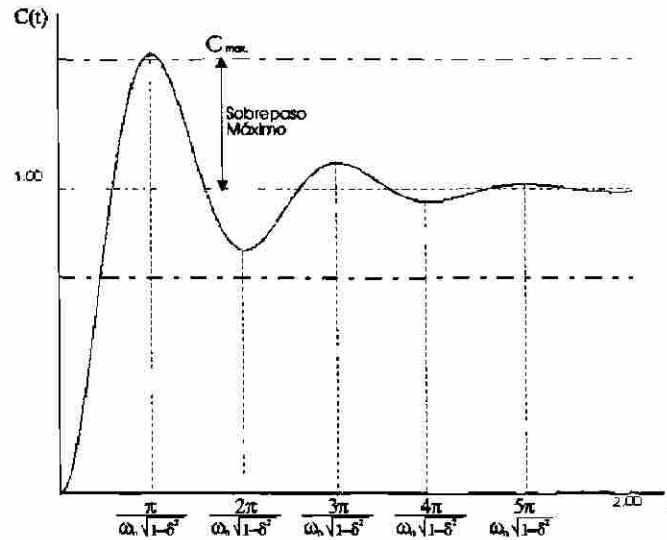


Fig. A.7 Respuesta a escalón unitario, se muestra que los máximos y mínimos tienen lugar a intervalos periódicos.

o también:

$$c(t) \Big|_{\min}^{\max} = 1 - (-1)^n e^{-\left(\frac{\delta \pi}{\sqrt{1-\delta^2}}\right)} \quad (\text{A.101})$$

al substituir $n = 1$ en la última ecuación se obtiene el sobrepaso máximo.

$$\text{Sobrepaso Máximo} = C_{\max} - 1 = e^{-\left(\frac{\delta \pi}{\sqrt{1-\delta^2}}\right)} \quad (\text{A.102})$$

$$\% \text{ de Sobrepaso} = 100 e^{-\left(\frac{\delta \pi}{\sqrt{1-\delta^2}}\right)} \quad (\text{A.103})$$

Por lo tanto, el sobrepaso de una respuesta a escalón en un sistema de segundo orden es sólo función del coeficiente de amortiguamiento δ . La Figura A.8 muestra la relación que

existe entre el sobrepaso, expresado en porciento, y el coeficiente de amortiguamiento, para un sistema de segundo orden.

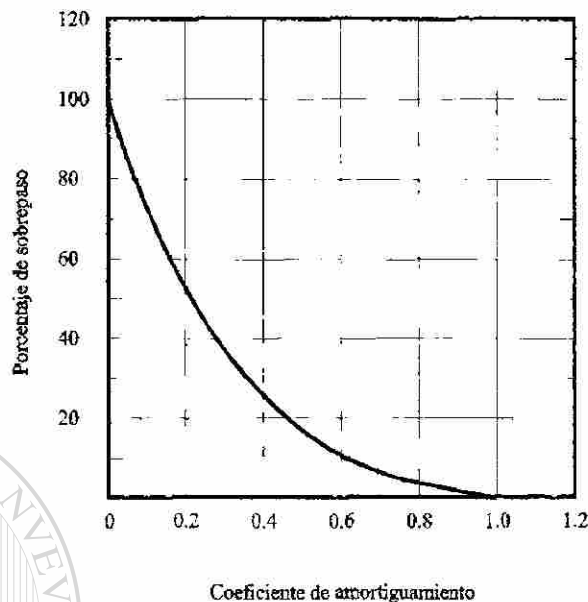


Fig. A.8 Porcentaje de Sobrepaso en función del amortiguamiento, respuesta a escalón de posición para sistema de Segundo Orden.

A.8 Diagrama de transición de un sistema de segundo orden

El punto de partida para deducir la respuesta en el tiempo en la sección anterior fue la función de transferencia, y la solución se obtiene suponiendo nulas las condiciones iniciales. En esta sección se puede apreciar que la forma de las variables de estado presenta una solución más versátil y completa en el dominio del tiempo.

Usando el método descrito en la Sección 2.1, y descrito como método alternativo para obtener la Matriz de Transición, se descompone la función de transferencia de lazo cerrado de (A.67) en las siguientes ecuaciones de estado:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (\text{A.67})$$

$$C(s) = \frac{\omega_n^2 R(s)}{s^2 + 2 \delta \omega_n s + \omega_n^2} \quad (\text{A.104})$$

multiplicando numerador y denominador de (A.104) por s^{-2} , se obtiene:

$$C(s) = \frac{s^{-2} \omega_n^2 R(s)}{1 + 2 \delta \omega_n s^{-1} + \omega_n^2 s^{-2}} \quad (\text{A.105})$$

y definiendo:

$$E(s) = \frac{R(s)}{1 + 2 \delta \omega_n s^{-1} + \omega_n^2 s^{-2}} \quad (\text{A.106})$$

al reescribir (A.105), se tiene:

$$C(s) = \omega_n^2 s^{-2} E(s) \quad (\text{A.107})$$

y de (A.106):

$$E(s) = R(s) - 2 \delta \omega_n s^{-1} E(s) - \omega_n^2 s^{-2} E(s) \quad (\text{A.108})$$

De las ecuaciones (A.107) y (A.108) se puede obtener el diagrama de transición del sistema. En la Figura A.9 se representa la gráfica de transición del sistema de segundo orden.

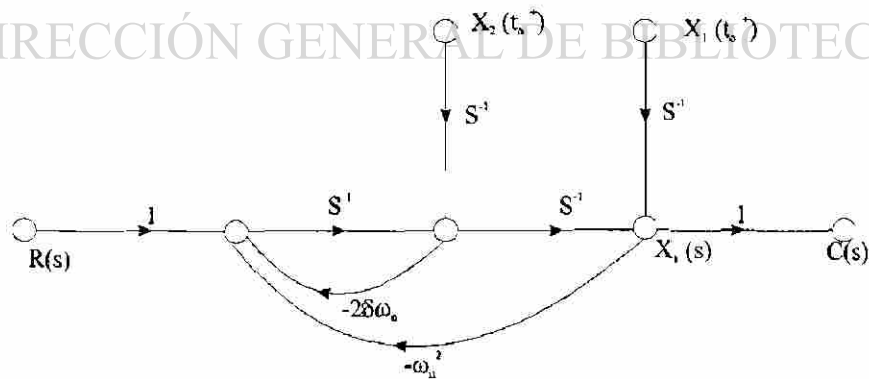


Fig. A.9 Gráfica de transición de un servosistema de segundo orden.

Aplicando la formula de Mason [15] pag. 52, al diagrama de la Figura A.9 se puede obtener directamente la ecuación de transición.

$$X_1(s) = \frac{s^{-1} (1 + 2\delta \omega_n s^{-1})}{\Delta} x_1(t_0) + \frac{s^{-2}}{\Delta} x_2(t_0) + \frac{s^{-2}}{\Delta} R(s) \quad (\text{A.109})$$

$$X_2(s) = \frac{-\omega_n^2 s^{-2}}{\Delta} x_1(t_0) + \frac{s^{-1}}{\Delta} x_2(t_0) + \frac{s^{-1}}{\Delta} R(s) \quad (\text{A.110})$$

donde

$$\Delta = 1 + 2\delta \omega_n s^{-1} + \omega_n^2 s^{-2} \quad (\text{A.111})$$

simplificando (A.109), (A.110) y (A.111) se obtiene las siguientes ecuaciones:

$$X_1(s) = \frac{s + 2\delta \omega_n}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2} x_1(t_0) + \frac{1}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2} x_2(t_0) + \frac{1}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2} R(s) \quad (\text{A.112.a})$$

$$X_2(s) = \frac{-\omega_n^2}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2} x_1(t_0) + \frac{s}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2} x_2(t_0) + \frac{s}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2} R(s) \quad (\text{A.112.b})$$

escribiendo en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s + 2\delta \omega_n}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2} & \frac{1}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2} \\ \frac{-\omega_n^2}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2} & \frac{s}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2} \\ \frac{s}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2} \end{bmatrix} R(s) \quad (\text{A.113})$$

La Transformada de Laplace inversa puede aplicarse a (A.113), mediante la Tabla de Transformadas de Laplace. La ecuación de transición para $t \geq t_0$ y una entrada en escalón unitario $u(t-t_0)$ es:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e^{-\delta \omega_n (t-t_0^+)}}{\sqrt{1-\delta^2}} \operatorname{sen} t' & \frac{e^{-\delta \omega_n (t-t_0^+)}}{\omega_n \sqrt{1-\delta^2}} \operatorname{sen} t' \\ -\omega_n e^{-\delta \omega_n (t-t_0^+)} \operatorname{sen} t' & \frac{e^{-\delta \omega_n (t-t_0^+)}}{\sqrt{1-\delta^2}} \operatorname{sen} t' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_n^2} \left\{ 1 + \frac{e^{-\delta \omega_n (t-t_0^+)}}{\sqrt{1-\delta^2}} \operatorname{sen} t' \right\} \\ -\frac{\omega_n e^{-\delta \omega_n (t-t_0^+)}}{\sqrt{1-\delta^2}} \operatorname{sen} t' \end{bmatrix} \quad (t \geq t_0) \quad (\text{A.114})$$

donde: $t' = \omega_n \sqrt{1-\delta^2} (t-t_0^+) + \beta$ $\beta = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\delta^2}}{-\delta}$ (A.115)

Se puede comprobar que esta ecuación de salida también es la solución de la ecuación (A.67), con condiciones iniciales nulas.

La salida de un sistema de segundo orden con una entrada en escalón unitario está dada por:

$$\begin{aligned}
c(t) &= \omega_n^2 x_1(t) = \\
&= \frac{\omega_n^2}{\sqrt{1-\delta^2}} e^{-\delta \omega_n (t-t_0^+)} \operatorname{sen} \left[\omega_n \sqrt{1-\delta^2} (t-t_0^+) + \beta \right] x_1(t_0^+) \\
&+ \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\delta^2}} e^{-\delta \omega_n (t-t_0^+)} \operatorname{sen} \left[\omega_n \sqrt{1-\delta^2} (t-t_0^+) + \beta \right] x_2(t_0^+) \quad (t \geq t_0) \\
&+ 1 + \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}} e^{-\delta \omega_n (t-t_0^+)} \operatorname{sen} \left[\omega_n \sqrt{1-\delta^2} (t-t_0^+) + \beta \right]
\end{aligned} \tag{A.116}$$



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



APENDICE B

CONTROLADORES COMERCIALES Y REDES COMPENSADORAS

UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

APENDICE B

CONTROLADORES COMERCIALES Y REDES COMPENSADORAS

B.1 Introducción

Los sistemas de control automático tradicionalmente están constituidos por los bloques que se muestra en la Figura B.1. El *detector de error* es un dispositivo físico que realiza la comparación entre la *variable retroalimentada B* y la *referencia R* para calcular el *error E*. El *compensador* es el dispositivo o conjunto de dispositivos que se encargan de aplicar una estrategia de control, manipulando el error de manera tal que el *actuador* trabaje de manera rápida y eficiente. El *amplificador* sirve para dar a la señal que se obtiene del compensador la energía suficiente para hacer funcionar al *actuador*, los tres dispositivos descritos se encuentran comercialmente en un solo paquete, conocido como el **CONTROLADOR** del sistema. El *actuador* es un dispositivo o conjunto de dispositivos que modifican las señales de la *planta* para obligar a la *variable controlada* a que tome el valor final deseado. Se habla de un conjunto de dispositivos porque puede haber tres tipos de actuadores: el *actuador primario* que está en contacto directo con el **controlador**, el *actuador final* que está en contacto con la *planta* y el *actuador secundario* que puede existir como etapa intermedia entre los dos anteriores. La *planta* es la parte fundamental del proceso y es donde se observa normalmente a la *variable que se ha de controlar*. Se tiene al *transductor* que es un dispositivo que cambia la naturaleza de la *variable controlada* a otra forma que sea compatible con la señal de *referencia*, de tal forma que pueda realizarse la comparación y se obtenga la señal de *error*.

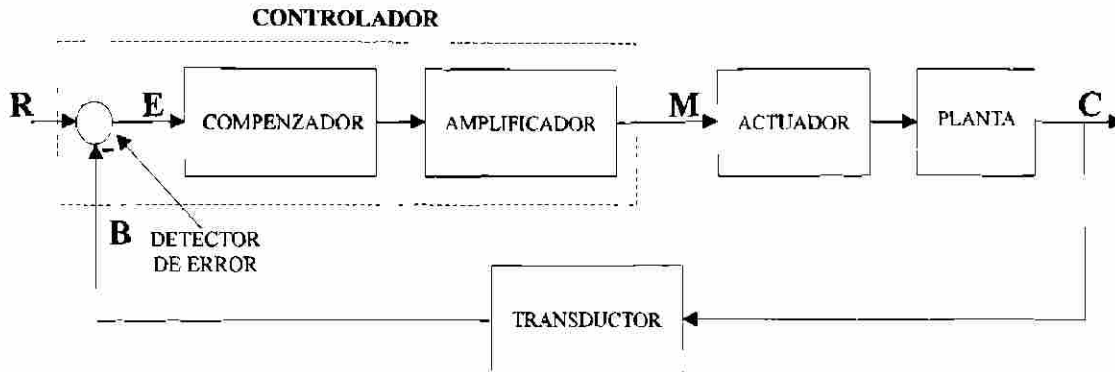


Fig. B.1 Configuración tradicional de un Sistema de Control Automático.

B.2 Los Controladores

Como se observa en la Figura B.1 la parte principal de un sistema de control automático es el **controlador**, y es ahí donde reside la estrategia de control que ha de seguirse para lograr el objetivo del control. En esta tesis sólo se estudia el caso de sistemas de control continuo lineal, así que la estrategia de control seleccionada debe de ser físicamente realizable.

Tres tipos de control son la base para las estrategias de control continuo y estos se detallan a continuación: el tipo de control **proporcional**, en el cual la *variable manipulada* es directamente proporcional al *error*, como se muestra en (B.1). El tipo de control **derivativo**, en el cual la *variable manipulada* es directamente proporcional a la *derivada del error*, como se muestra en (B.2). El tipo de control **integral**, en el cual la *variable manipulada* es directamente proporcional a la *integral del error*, como se muestra en (B.3). En forma práctica de estos tres tipos elementales de control sólo se puede utilizar individualmente el tipo de control **proporcional**. El tipo de control **derivativo** no puede usarse solo ya que el *error* causa problemas sobre todo para señales con gran cantidad de ruido. Así mismo, el tipo de control **integral** al agregar un polo en el origen hace que el control sea inestable para la ganancia normal de trabajo, la cual no puede modificarse al no incluir la parte proporcional. Otra forma en que se conocen los tipos de control son: **proporcional o de banda proporcional**, ya que el valor de K_p depende del error con que puede funcionar el *actuador* y se habla de una banda de proporcionalidad; desde 0 % proporcional en el on-off hasta 100 %

proporcional. Para el tipo de control **derivativo (rate)** también se le conoce como "razón de cambio". El control **integral** o de **reset** significa que restablece el error a cero, lo cual puede analizarse en los desarrollos posteriores.

$$m(t) = K_p e(t) \quad (\text{B.1})$$

$$m(t) = K_d \frac{de(t)}{dt} \quad (\text{B.2})$$

$$m(t) = \frac{1}{K_i} \int_0^t e(t) dt \quad (\text{B.3})$$

Las combinaciones comerciales que existen de estos tres tipos básicos de control son las siguientes: *banda proporcional*, donde la variable manipulada es directamente proporcional al error, como se ve en (B.4), y se le llama comúnmente **controlador P**. El tipo *banda proporcional más rate*, es aquel en el cual la variable manipulada es directamente proporcional en parte al error y en parte a la *derivada del error*, como se muestra en (B.5); comúnmente se le llama **controlador PD**. Control tipo *banda proporcional más reset*, en el cual se trabaja en forma directamente proporcional en parte al error y en parte a la *integral del error*, como se muestra en (B.6); se le conoce como **controlador PI**. El tipo *banda proporcional más reset más rate*, en el cual la acción se toma directamente proporcional en parte al error, en parte a la *integral del error* y en parte a la *derivada del error*, como se muestra en (B.7); se le conoce como **controlador PID**.

$$M(s) = K_p E(s) \quad (\text{B.4})$$

$$M(s) = K_p (1 + K_d s) E(s) \quad (\text{B.5})$$

$$M(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{K_i s} \right) E(s) \quad (\text{B.6})$$

$$M(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{K_i s} + K_d s \right) E(s) \quad (\text{B.7})$$

B.2.1 Análisis Comparativo

En esta sección se presenta un estudio comparativo entre diferentes tipos de controladores comerciales. Se parte de un sistema de control de segundo orden convencional, como en la Figura B.2, cuya *función de transferencia de lazo abierto* se tiene en (B.8) y la *función de transferencia de lazo cerrado* se tiene en (B.9), y a esta forma básica se van agregando los diversos controladores para realizar el estudio comparativo. Para el **controlador P** que se ilustra en la Figura B.3 con (B.10), se tiene la *función de transferencia de lazo abierto* y en (B.11) la *función de transferencia de lazo cerrado*.

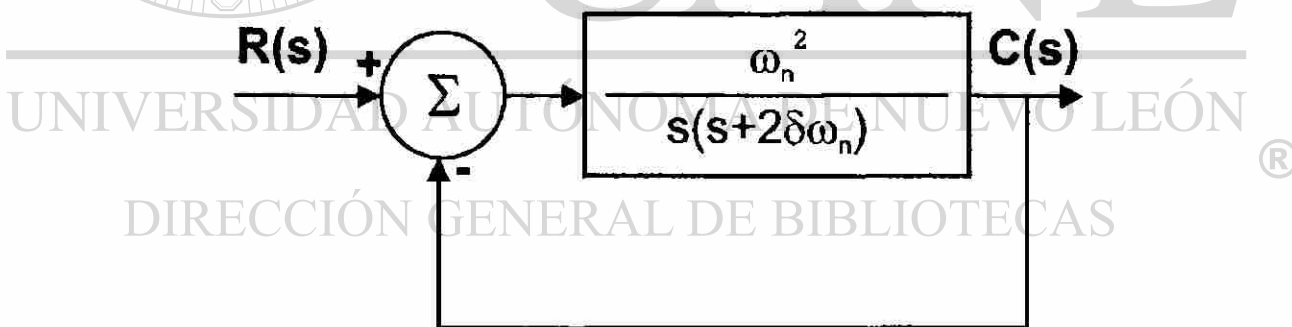


Fig. B.2 Sistema de Segundo Orden Convencional.

$$GH(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\delta\omega_n)} \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (\text{B.9})$$

De la ecuación (B.8) se observa que cualquier sistema de segundo orden es tipo uno y por lo tanto no tiene error al escalón, por lo cual se calcula el error a la rampa y con este se realizan las comparaciones. En (B.9) se presenta la función de transferencia de lazo cerrado de un sistema de segundo orden, del cual con el término independiente se puede obtener la frecuencia natural ω_n , y del término en s se puede despejar la razón de amortiguamiento δ . Con estos valores se puede calcular el % de sobrepaso, el tiempo de respuesta T_r , el tiempo de subida T_p , el tiempo de alcance máximo T_a , y el tiempo de asentamiento T_s . Siguiendo el procedimiento descrito con los controladores se puede realizar un análisis comparativo.

Para el controlador P que se ilustra en la Figura B-3, y con *función de transferencia de lazo abierto* (B.10), se observa que el sistema es tipo 1 y por lo tanto no tiene e_{ss} para una entrada en escalón, pero se debe calcular el coeficiente de error y el % e_{ss} a la rampa; de acuerdo a (B.11). Estos valores quedan en función de los parámetros del sistema de segundo orden y del controlador agregado. Para la *función de transferencia de lazo cerrado* (B.12), el término independiente del denominador contiene la nueva frecuencia natural ω'_n la cual se muestra en (B.13), y del coeficiente de s se obtiene la nueva razón de amortiguamiento δ' , (B.14). Con δ' y la fórmula para el % de sobrepaso de (A.85) se tiene que al aumentar K_p el % de sobrepaso aumenta y al disminuir K_p disminuye el % de sobrepaso. Por otro lado al variar K_p el tiempo de respuesta T_r (A.81), y el tiempo de asentamiento (A.82), no se ven afectados por las variaciones de K_p y al aumentar K_p el tiempo de subida T_p (A.87) y el tiempo de alcance máximo T_a (A.98) disminuyen. Así mismo, al aumentar K_p se disminuye el error de estado estable (B.11), provocando en conjunto que cuando se aumenta K_p el sistema se hace más exacto y pero también sus raíces características se acercan al semiplano derecho, por lo tanto hay que encontrar un valor de K_p adecuado para que el sistema sea relativamente estable y lo suficientemente exacto.

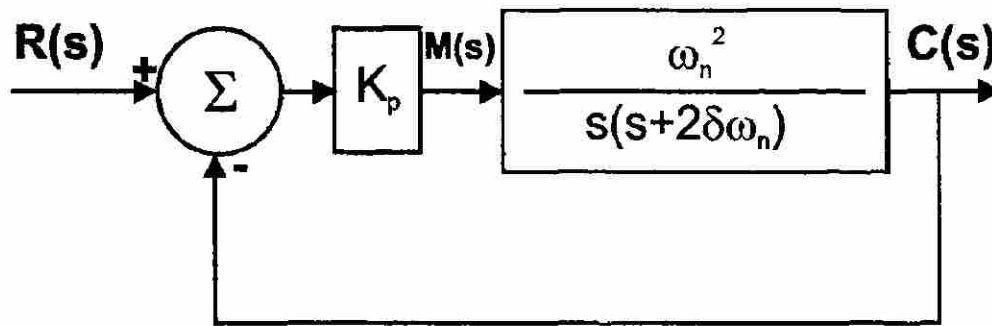


Fig. B.3 Sistema de segundo orden con Controlador P.

$$GH(s) = \frac{K_P \omega_n^2}{s(s+2\delta\omega_n)} \quad (\text{B.10})$$

$$K_V = \lim_{s \rightarrow 0} sGH(s) = \frac{K_P \omega_n}{2\delta} \quad \% e_{ss} = \frac{100}{K_V} = \frac{2\delta}{K_P \omega_n} 100 \quad (\text{B.11})$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_P \omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + K_P \omega_n^2} \quad (\text{B.12})$$

$$\omega_n' = \omega_n \sqrt{K_P} \quad (\text{B.13})$$

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$\delta' = \frac{\delta}{\sqrt{K_P}} \quad (\text{B.14})$$

Para el controlador PD que se ilustra en la Figura B.4, la *función de transferencia de lazo abierto* que resulta en (B.15), es tipo 1 y por tanto no existe e_{ss} para un entrada en escalón, pero hay que calcular el coeficiente de error y el $\% e_{ss}$ a una entrada tipo rampa. De acuerdo a (B.16), y en el denominador de la *función de transferencia de lazo cerrado* (B.17), del término independiente se tiene la nueva frecuencia natural ω_n' que se despeja y se muestra

en (B.18). Del término en s se puede conocer la nueva razón de amortiguamiento δ' como se muestra en (B.19). Al observar el valor de δ' se ve que la fórmula tiene un término extra que depende de K_d y por lo mismo puede hacerse que el sistema responda más rápido o más lento; lo cual se puede observar en las fórmulas de T_r y T_s , (A.81) y (A.82) respectivamente. Como el $\% e_{ss}$ a la entrada rampa disminuye al aumentar K_p se puede aumentar hasta que el error sea lo suficientemente pequeño, ya que la velocidad de respuesta y la estabilidad del sistema se pueden manipular variando K_d . Esto resulta en un sistema estable con un error bastante pequeño y con respuesta lo suficientemente rápida.

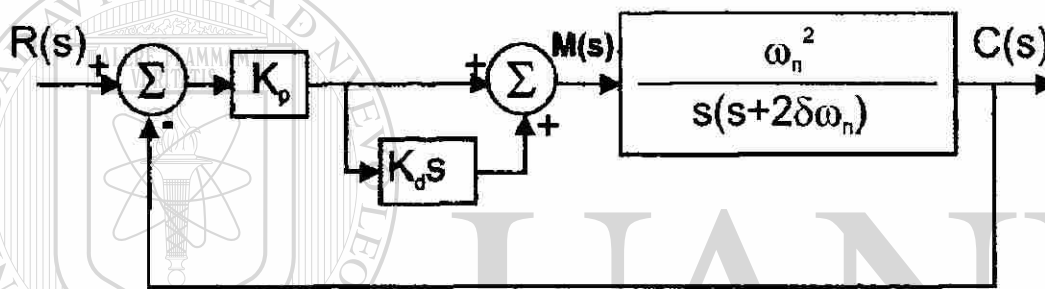


Fig. B.4 Sistema de segundo orden con Controlador PD.

$$GH(s) = \frac{K_p K_d \left(s + \frac{1}{K_d} \right) \omega_n^2}{s(s + 2\delta\omega_n)} \quad (\text{B.15})^{\text{®}}$$

$$K_V = \lim_{s \rightarrow 0} sGH(s) = \frac{K_p \omega_n}{2\delta} \quad \% e_{ss} = \frac{100}{K_V} = \frac{2\delta}{K_p \omega_n} 100 \quad (\text{B.16})$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_p K_d \left(s + \frac{1}{K_d} \right) \omega_n^2}{s^2 + (2\delta\omega_n + K_p K_d \omega_n^2) s + K_p \omega_n^2} \quad (\text{B.17})$$

$$\omega'_n = \sqrt{K_p} \omega_n^2 = \omega_n \sqrt{K_p} \quad (\text{B.18})$$

$$\delta' = \frac{\delta}{\sqrt{K_p}} + \frac{\sqrt{K_p} K_d \omega_n}{2} \quad (\text{B.19})$$

Para el **Controlador PI** que se ilustra en la Figura B.5, y que tiene como *función de transferencia de lazo abierto* a (B.20), se tiene que el sistema es tipo 2 y por lo tanto el error e_{ss} es cero para un entrada en rampa. En el denominador de la *función de transferencia de lazo cerrado* (B.21), se observa que el sistema es de tercer orden por lo que no se puede calcular directamente ω'_n y δ' ni la naturaleza de los transitorios. Para sistemas de tercer orden se requiere que la constante K_p sea relativamente pequeña para no tener problemas de estabilidad, lo cual no afecta al error e_{ss} ya que éste es cero a la entrada en rampa, por ser un sistema tipo 2.

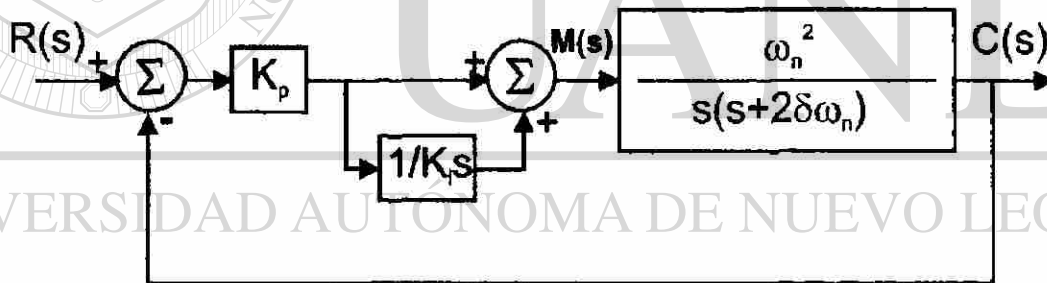


Fig. B.5 Sistema de segundo orden con Controlador PI.

$$GH(S) = \frac{K_p \left(s + \frac{1}{K_i} \right) \omega_n^2}{s^2 (s + 2\delta \omega_n)} \quad (\text{B.20})$$

$$\frac{C(S)}{R(S)} = \frac{K_p \left(s + \frac{1}{K_i} \right) \omega_n^2}{s^3 + 2\delta \omega_n s^2 + K_p \omega_n^2 s + \frac{K_p}{K_i} \omega_n^2} \quad (\text{B.21})$$

Para el **Controlador PID** que se ilustra en la Figura B.6, y observando (B.22) que muestra la función de transferencia de lazo abierto, se puede concluir que el sistema es tipo 2 y por lo tanto no tiene error e_{ss} a una entrada en rampa. De la función de transferencia de lazo cerrado (B.23), se puede ver que la razón de amortiguamiento δ es el coeficiente del término en s^2 y se tiene un agregado en función de K_d . De acuerdo a lo expuesto la aplicación del controlador PID hace que el sistema tenga *respuesta rápida*, que sea *suficientemente estable*, y con *error cero a la entrada rampa*.

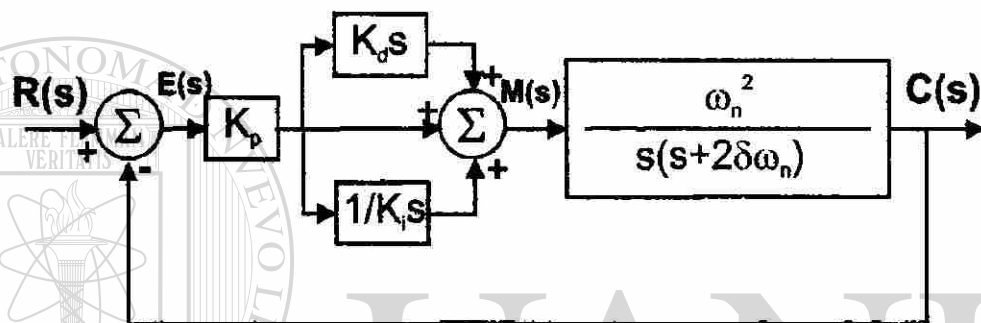


Fig. B.6 Sistema de segundo orden con Controlador PID.

$$\frac{C(s)}{E(s)} = G(s)H(s) = \frac{K_p \left(K_d s^2 + s + \frac{1}{K_i} \right) \omega_n^2}{s^2 (s + 2\delta\omega_n)} \quad (\text{B.22})$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_p \left(K_d s^2 + s + \frac{1}{K_i} \right) \omega_n^2}{s^3 + (2\delta\omega_n + K_p K_d \omega_n^2) s^2 + K_p \omega_n^2 s + \frac{K_p}{K_i} \omega_n^2} \quad (\text{B.23})$$

B.3 Implementación Física

Los *controladores comerciales*, con funciones de transferencia como se mostró en la sección anterior, son dispositivos analógicos, es decir, que existe una contraparte física que efectúa la función descrita. Físicamente los controladores pueden ser de naturaleza muy

diversa pero sólo se mencionan los controladores electrónicos implementados en base a *amplificadores operacionales*.

Los *amplificadores operacionales* son amplificadores de corriente directa del tipo diferencial los cuales tienen una ganancia superior a 10^8 , impedancia de entrada con valor tendiente a ∞ , y una impedancia de salida con valor muy cercano a 0, pero además es lineal en su rango de operación, y tiene un número impar de etapas de amplificación [22] pag. 501. Cualquier amplificador de C. D. que cumpla con estas características puede ser considerado como un amplificador operacional. El nombre se da porqué una de las aplicaciones más comunes es la de efectuar operaciones matemáticas. Los amplificadores operacionales, se representan con el símbolo de la Figura B.7, en la figura se puede observar la polarización en ± 18 V CD el cual es el máximo valor que pueden tomar en la señal de entrada, pero generalmente se les polariza con ± 15 V CD. En la curva de funcionamiento de la Figura B.8 se puede observar que el amplificador operacional se satura aproximadamente en 13.5 V CD y que la parte lineal termina a los 10 V CD. Así, todo amplificador que tenga como salida un valor de voltaje superior a los 10 V CD se considerara que está fuera del rango de operación.

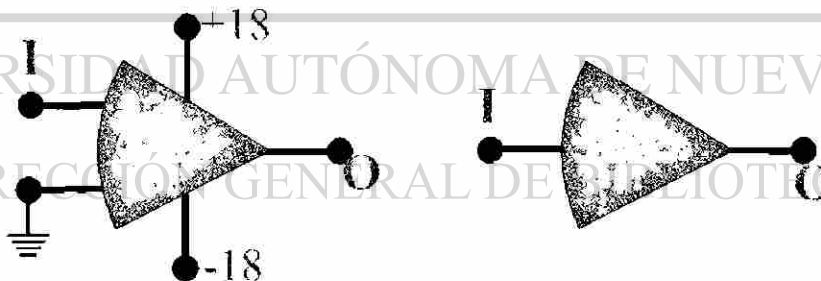


Fig. B.7 El Amplificador Operacional.

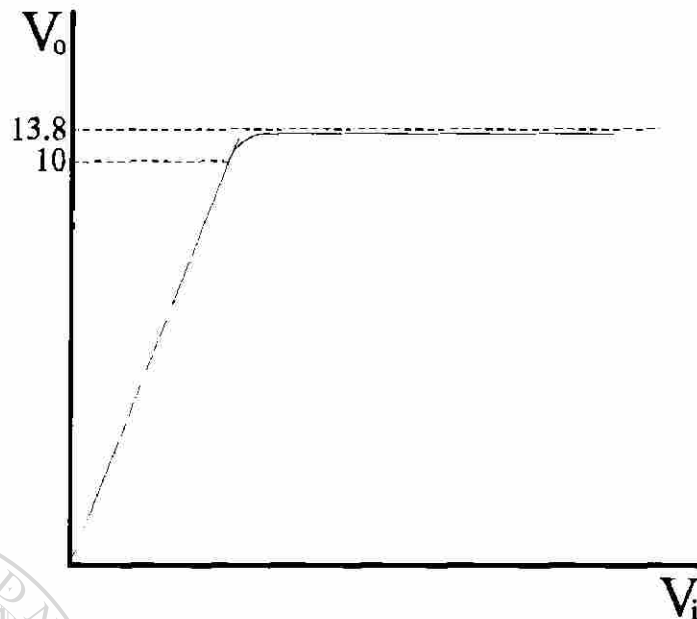


Fig. B.8 Curva de operación del Amplificador Operacional.

La utilidad práctica de los amplificadores operacionales requiere que se conecte retroalimentación, ya que presentan una impedancia de entrada prácticamente infinita; esta característica permite obtener funciones y un comportamiento que son requeridos en la implementación de esquemas de control. A continuación se listan algunas formas en que se pueden conectar los amplificadores operacionales y se anotan las ganancias que se logran. La forma básica de conexión se muestra en la Figura B.9 donde se muestra una impedancia genérica en la entrada y otra en la retroalimentación. El diagrama muestra que la corriente de entrada es la misma que se retroalimenta y por tanto la ganancia de esta forma de conexión está dada por (B.24). Se puede tener una configuración de más de una entrada al amplificador operacional, como se muestra en la Figura B.10, donde la corriente que circula por la retroalimentación es igual a la suma de las corrientes de entrada, por tanto, la salida es la suma de las entradas con ganancias individuales; como se muestra en (B.25).

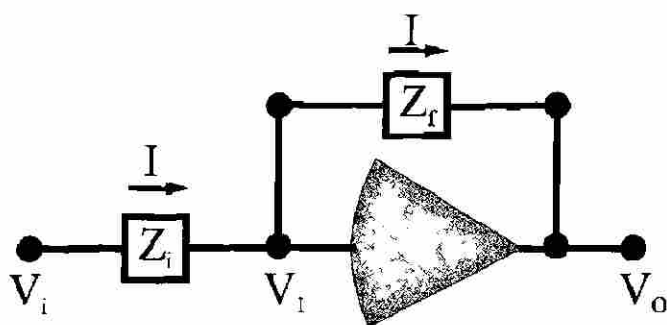


Fig. B.9 Conexión básica de un Amplificador Operacional.

$$\frac{V_o}{V_i} = -\frac{Z_f}{Z_i} \quad (B.24)$$

$$V_o = -\left(\frac{Z_f}{Z_1}V_1 + \frac{Z_f}{Z_2}V_2\right) \quad (B.25)$$

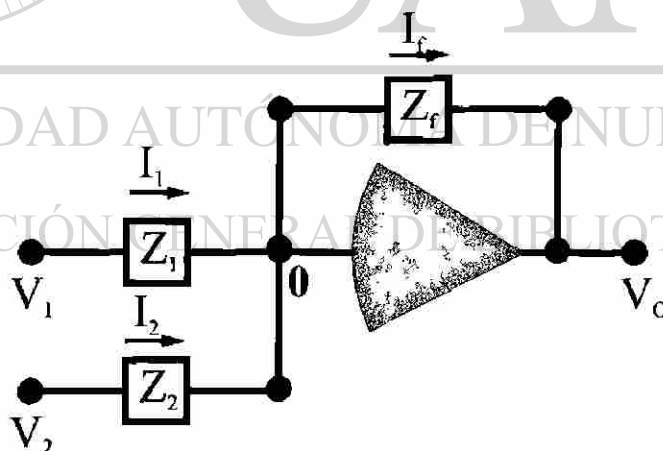


Fig. B.10 El Amplificador Operacional, conexión con varias entradas.

Para lograr que un esquema basado en un amplificador operacional se comporte como *controlador P*, Figura B.11, es necesario conectar impedancias como en la Figura B.12. Así se obtiene (B.26), por medio de (B.27).

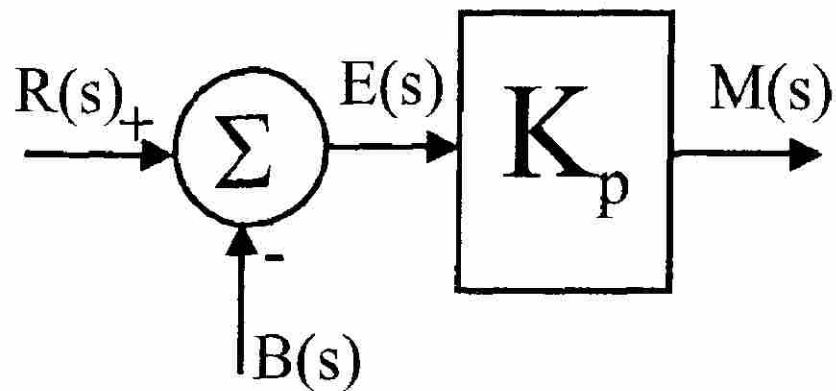


Fig. B.11 Diagrama de bloques del Controlador P.

$$M(s) = K_p [R(s) - B(s)]$$

(B.26)

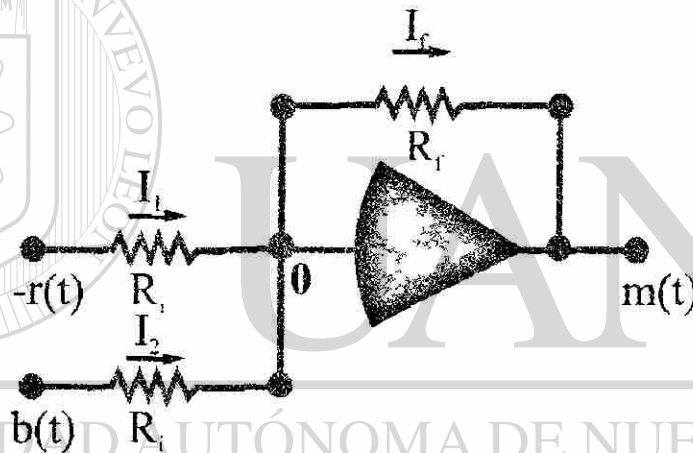


Fig. B.12 Amplificador Operacional conectado como Controlador P.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$M(s) = \frac{R_f}{R_i} (R(s) - B(s))$$

(B.27)

Para lograr que un amplificador operacional se comporte como *controlador PI*, Figura B.13, es necesario conectarlo con impedancias como en la Figura B.14, lo cual se representa en (B.28) y (B.29).

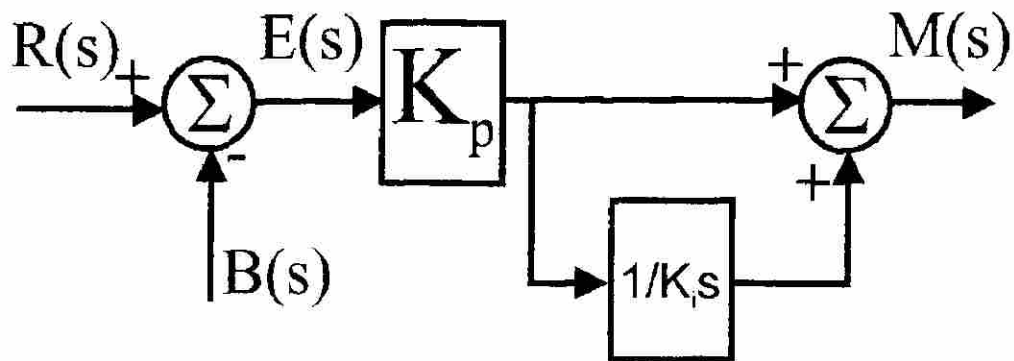


Fig. B.13 Diagrama de bloques del Controlador PI.

$$M(s) = \frac{K_p \left(s + \frac{1}{K_i} \right)}{s} [R(s) - B(s)] \quad (\text{B.28})$$

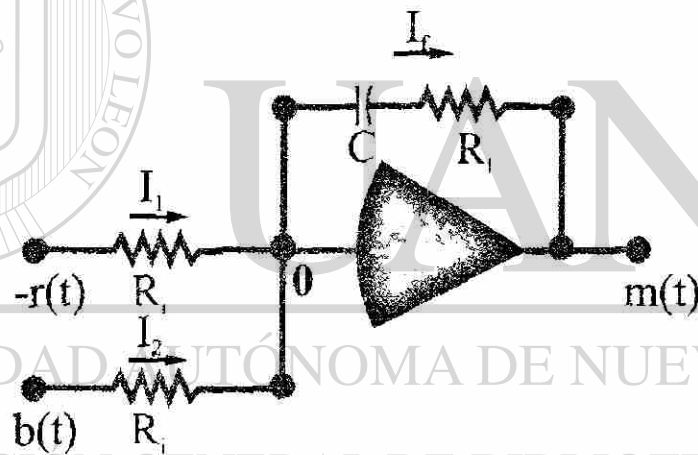


Fig. B.14 Amplificador Operacional conectado como Controlador PI.

$$M(s) = \frac{R_f}{R_i} \left(s + \frac{1}{R_f C} \right) (R(s) - B(s)) \quad (\text{B.29})$$

Para lograr que un amplificador operacional se comporte como *controlador PD*, Figura B.15, es necesario conectarle impedancias como se muestra en la Figura B.16. El arreglo mostrado es sólo una aproximación, y su representación está dada por (B.30) y (B.31).

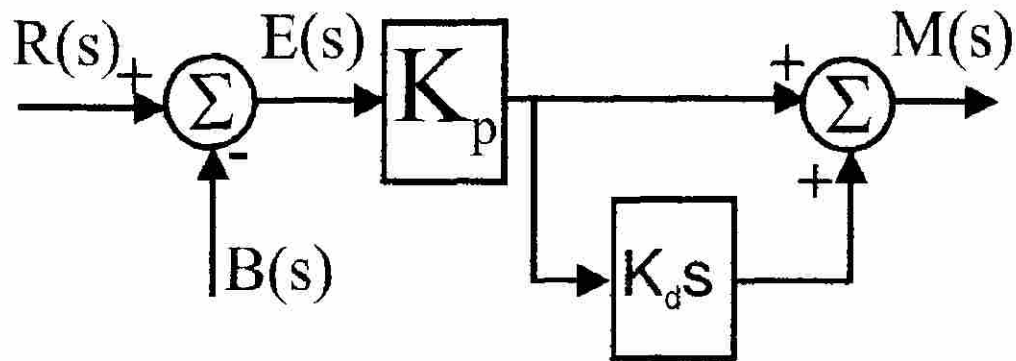


Fig. B.15 Diagrama de bloques del Controlador PD.

$$\frac{M(s)}{E(s)} = K_p K_d \left(s + \frac{1}{K_d} \right) \quad (\text{B.30})$$

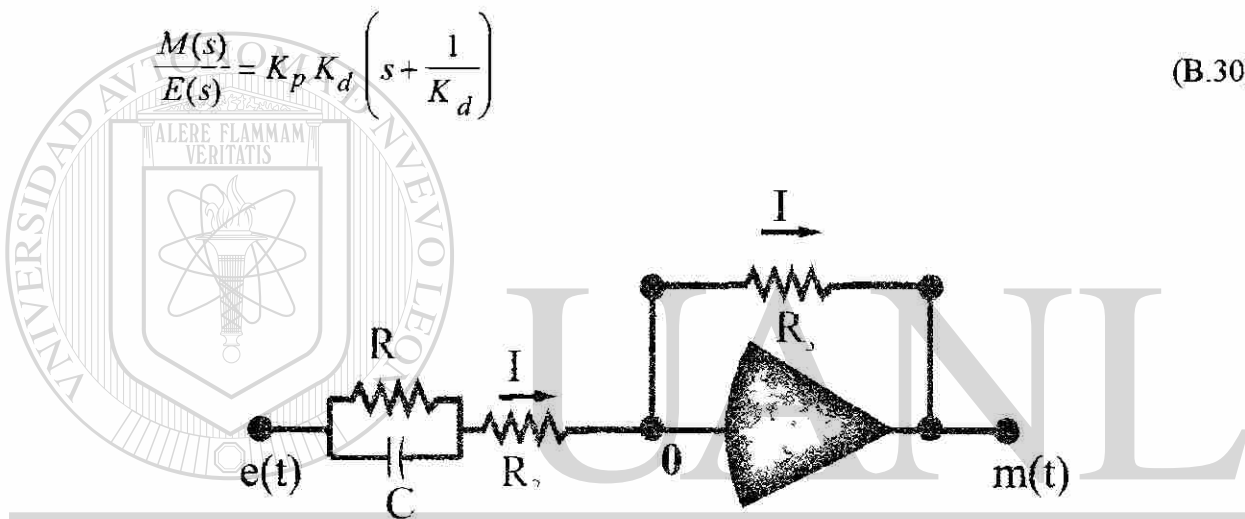


Fig. B.16 Amplificador Operacional conectado como Controlador PD.

$$\frac{M(s)}{E(s)} = - \frac{\frac{R_3}{R_3} \left(s + \frac{1}{R_1 C} \right)}{\left(s + \frac{1}{R_1 C} + \frac{1}{R_2 C} \right)} \quad (\text{B.31})$$

Para lograr que un amplificador operacional se comporte como *controlador PID*, Figura B.17, es necesario conectarle impedancias como se muestra en la Figura B.18, lo cual se representa en (B.32) y (B.33).

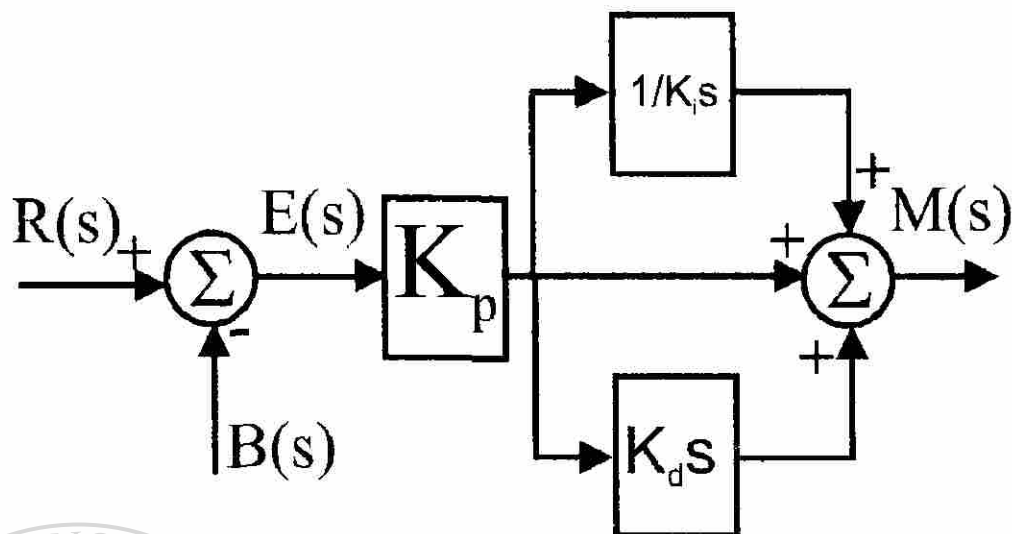


Fig. B.17 Diagrama de bloques del Controlador PID.

$$\frac{M(s)}{E(s)} = \frac{K_p K_d \left(s^2 + \frac{1}{K_d} s + \frac{1}{K_d K_i} \right)}{s} \quad (\text{B.32})$$

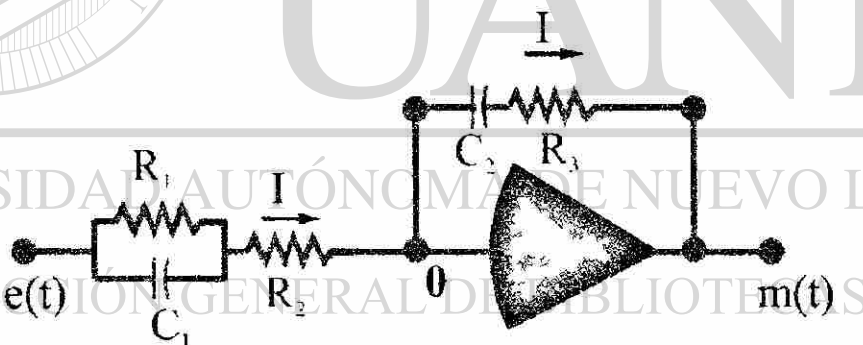


Fig. B.18 Amplificador Operacional conectado como Controlador PID.

$$\frac{M(s)}{E(s)} = - \frac{R_3}{R_2} \frac{\left(s^2 + \left(\frac{1}{R_3 C_2} + \frac{1}{R_1 C_1} \right) s + \frac{1}{R_1 C_1 R_3 C_2} \right)}{s \left(s + \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} \right)} \quad (\text{B.33})$$

B.4 Redes Compensadoras

Las redes compensadoras son circuitos pasivos que permiten mejorar el comportamiento de los sistemas de control y se utilizan al aplicar las técnicas de respuesta a la frecuencia, usando el criterio de Nyquist. Se puede considerar: **red compensadora de adelanto**, **red compensadora de atraso**, y **red compensadora de atraso-adelanto**, estas redes se sintetizan con circuitos eléctricos pasivos y reciben el nombre de acuerdo a su características de comportamiento.

B.4.1 Red Compensadora de Adelanto

Se realiza en base a resistencias y capacitores, tal como se presenta en la Figura B.19.

La función de transferencia se deduce de (B.34) a (B.36).

$$C \frac{d}{dt}(v_i - v_o) + \frac{1}{R_1}(v_i - v_o) = \frac{1}{R_2}v_o \quad (\text{B.34})$$

$$C s[V_i(s) - V_o(s)] + \frac{1}{R_1}[V_i(s) - V_o(s)] = \frac{1}{R_2}V_o(s) \quad (\text{B.35})$$

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{s + \frac{1}{R_1 C}}{s + \frac{1}{R_1 C} + \frac{1}{R_2 C}} = \frac{s + a}{s + b} \quad (\text{B.36})$$

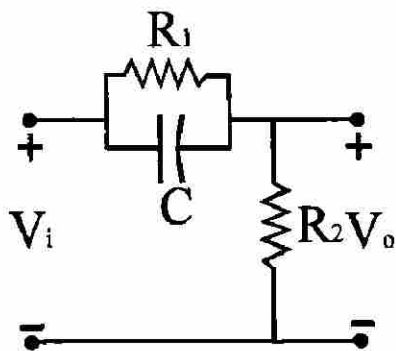


Fig. B.19 Red Compensadora de Adelanto.

Al observar (B.36) se tiene que si "b" es grande con respecto a "a" la red en combinación con un amplificador operacional se comporta como un *controlador PD*.

B.4.2 Red Compensadora de Atraso

Esta red se realiza en base a resistencias y capacitores, como se muestra en la Figura B.20. La función de transferencia se obtiene de (B.37) a (B.40)

$$i R_1 + \frac{1}{C} \int_0^t i dt + i R_2 = v_i \quad (\text{B.37})$$

$$\left(R_1 + R_2 + \frac{1}{sC} \right) I(s) = V_i(s) \quad (\text{B.38})$$

$$V_o(s) = \left(R_2 + \frac{1}{sC} \right) I(s) \quad (\text{B.39})$$

$$P_{\text{atraso}} = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{\frac{R_2}{R_1 + R_2} \left(s + \frac{1}{R_2 C} \right)}{\left(s + \frac{1}{(R_1 + R_2)C} \right)} = \frac{a}{b} \frac{(s + b)}{(s + a)} \quad (\text{B.40})$$

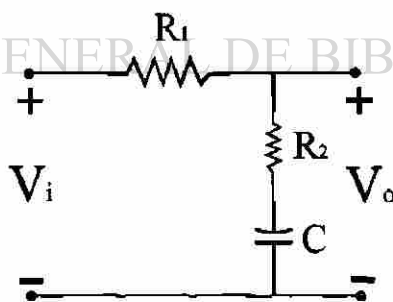


Fig. B.20 Red Compensadora de Atraso.

En esta red al observar (B.40) y si "a" es muy pequeña, la red en combinación con un amplificador operacional se comporta como un *controlador PI*.

B.4.3 Red Compensadora de Atraso-Adelanto

Esta red se realiza en base de resistencias y capacitores, y una posible configuración se presenta en la Figura B.21. La función de transferencia se deduce de (B.41) a (B.44).

$$C_1 \frac{d}{dt} (v_i - v_o) + \frac{1}{R_1} (v_i - v_o) = i \quad (\text{B.41})$$

$$\frac{1}{C_2} \int_0^t i dt + i R_2 = v_o \quad (\text{B.42})$$

$$C_1 s [V_i(s) - V_o(s)] + \frac{1}{R_1} [V_i(s) - V_o(s)] = \frac{1}{R_2 + \frac{1}{sC_2}} V_o(s) \quad (\text{B.43})$$

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{(s + \frac{1}{R_1 C_1})(s + \frac{1}{R_2 C_2})}{s + (\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_2 C_1})s + \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2}} = \frac{(s + a_1)(s + b_2)}{(s + b_1)(s + a_2)} \quad (\text{B.44})$$

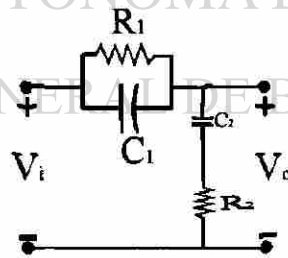


Fig. B.21 Red Compensadora de Atraso-Adelanto.

Esta red se observa en (B.44) y se tiene que si "b₁" es grande respecto a "a₁" y "a₂" es muy pequeña, la red en combinación con un amplificador operacional se comporta como un controlador PID.



APENDICE C

MÉTODOS NUMÉRICOS PARA LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES ALGEBRAICAS NO LINEALES

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

APENDICE C

METODOS NUMERICOS PARA LA SOLUCION DE ECUACIONES ALGEBRAICAS NO LINEALES

C.1 Introducción

Las soluciones de una ecuación algebraica no lineal se conocen como *Raíces o Ceros*. La motivación principal para resolver ecuaciones no lineales por métodos computacionales es que dichas ecuaciones carecen, por lo general, de una solución exacta. La solución analítica de ecuaciones polinomiales existe en forma cerrada sólo hasta polinomios de orden cuatro, [23] pags. 1-32 y no existen soluciones cerradas para ordenes superiores. Por lo tanto, las raíces se obtienen mediante métodos computacionales basados en procedimientos iterativos.

Los métodos numéricos diseñados para encontrar raíces son variados, [23] pags. 1-32 y cada uno tiene limitaciones y defectos. Por tanto, se deben conocer las características de convergencia de cada método (en particular sus dificultades) y se debe tener familiaridad con los métodos mediante la práctica en computadora digital.

En la Tabla C.1 se listan algunas de las características principales de los métodos numéricos que se citan más frecuencia en la literatura, para resolver ecuaciones no lineales. Los tres primeros métodos de la Tabla C.1 (el de Bisección, el de la Falsa Posición, y el método de la Falsa Posición Modificado), tienen una característica en común; y esta es que pueden encontrar una raíz si se conoce un intervalo que contenga a la raíz buscada. Por lo tanto, estos métodos necesitan un esfuerzo preliminar para estimar el intervalo que contenga a la raíz deseada. Los métodos de Newton y de la Secante necesitan un punto inicial, pero no es necesaria la estimación de un intervalo. El método de Sustitución Sucesiva es un algoritmo

iterativo simple, aunque su desventaja es que la iteración no siempre converge. El método de Bairstow está deducido para aplicarlo a polinomios y se basa en el método de Newton, como se explica posteriormente. Al aplicar varias veces este método a polinomios "deflacionados", es decir a polinomios de grado menor, se puede calcular todas las raíces, incluyendo raíces complejas, aunque en ocasiones el proceso iterativo puede no lograr la convergencia.

Tabla C.1 Resumen de esquemas para encontrar raíces [23 pags. 1-32.]

Nombre	Necesidad de especificar un intervalo que contenga a la raíz	Necesidad de la continuidad de f'	Tipos de ecuaciones	Otras características especiales
Bisección	SI	NO	Cualquiera	Robusto, aplicable a funciones no analíticas
Falsa posición	SI	SI	Cualquiera	Convergencia lenta en un intervalo grande
Falsa posición modificada	SI	SI	Cualquiera	Más rápido que el método de la Falsa Posición
Método de Newton	NO	SI	Cualquiera	Rápido; se necesita calcular f' ; (trata raíces complejas)
Método de la Secante	NO	SI	Cualquiera	Rápido; no se requiere calcular f'
Sustitución Sucesiva	NO	SI	Cualquiera	Puede no converger
Método de Bairstow	NO	SI		Factores Cuadráticos

C.2 Método de Bairstow

Pocos algoritmos se especializan en encontrar raíces casi automáticamente, entre estos procedimientos están el de diferencias de cocientes, el método de Bairstow y la aplicación de la iteración QR, [23 pags. 1-32.] Aun cuando el método de diferencias de cocientes es sencillo y fácil de usar, falla muy a menudo en lograr convergencia. El método de iteración QR es el mejor de los tres, pero no se puede utilizar sin comprender el concepto de los valores propios de una matriz. El método de Bairstow tiene problemas de exactitud, sobre todo con polinomios de alto grado, y en ocasiones falla, pero es más confiable que el método de diferencias de cocientes.

El método de Bairstow es un esquema iterativo que trata de encontrar un factor cuadrático de un polinomio en cada aplicación, sin que necesariamente se tenga un conocimiento previo de los posibles valores de la raíz. Al aplicar en forma repetida el método de Bairstow a los polinomios residuos y una vez que se ha "deflacionado" el polinomio original de esta etapa considerando como factor a la raíz encontrada, se puede calcular otros factores cuadráticos del polinomio. El método sufre en la precisión de los resultados, debido al proceso de deflación, por lo que la precisión de las raíces calculadas se debe verificar o mejorar por algún otro procedimiento.

Las raíces complejas de un polinomio con coeficientes reales siempre dan lugar a parejas de números complejos conjugados. Por tanto, si un factor cuadrático de la forma $x^2 + \bar{p}x + \bar{q}$ se factoriza del polinomio, la pareja de raíces complejas se puede calcular resolviendo la cuadrática $x^2 + \bar{p}x + \bar{q} = 0$.

Si se considera un polinomio con coeficientes reales y de orden n:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \quad (C.1)$$

se puede reescribir en la forma

$$y = (x^2 + px + q)G(x) + R(x) \quad (\text{C.2})$$

donde p y q son coeficientes arbitrarios, $G(x)$ es un polinomio de orden $n-2$ y $R(x)$ es el residuo, que será un polinomio de orden 1, es decir, a lo más una función lineal.

Si p y q se escogen de manera que $R(x)$ se anule, entonces $(x^2 + px + q)$ es un factor cuadrático. Las raíces de un factor cuadrático están dadas por:

$$\frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \quad (\text{C.3})$$

si se escribe el polinomio de orden $n-2$ y el residuo como:

$$G(x) = b_2 + b_3 x + b_4 x^2 + \dots + b_n x^{n-2} \quad (\text{C.4})$$

$$R(x) = b_0 + b_1 x \quad (\text{C.5})$$

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Los valores de b_0 y b_1 dependen de los valores seleccionados para p y q en el factor cuadrático, por lo que se pueden considerar como funciones de p y q :

$$b_0 = b_0(p, q) \quad (\text{C.6})$$

$$b_1 = b_1(p, q) \quad (\text{C.7})$$

Así el propósito es encontrar $p = \bar{p}$ y $q = \bar{q}$, tales que $b_0(p, q) = b_1(p, q) = 0$, con lo cual se tiene que $R(x) = 0$, y $(x^2 + \bar{p}x + \bar{q})$ será un factor cuadrático.

Para obtener una forma para las expresiones (C.6) y (C.7), se substituye en (C.8) y (C.9) y se reescribe la ecuación resultante como una serie de potencias. Como la ecuación obtenida debe ser igual a (C.1), se igualan los coeficientes de potencias semejantes de x en las dos ecuaciones.

$$\begin{aligned}
 a_n &= b_n \\
 a_{n-1} &= b_{n-1} + pb_n \\
 a_{n-2} &= b_{n-2} + pb_{n-1} + qb_n \\
 &\vdots \\
 a_2 &= b_2 + pb_3 + qb_4 \\
 a_1 &= b_1 + pb_2 + qb_3 \\
 a_0 &= b_0 + qb_2
 \end{aligned} \tag{C.8}$$

Al reescribir (C.8), los coeficientes b_n hasta b_0 se pueden calcular en orden descendente:

$$\begin{aligned}
 b_n &= a_n \\
 b_{n-1} &= a_{n-1} - pb_n \\
 b_{n-2} &= a_{n-2} - pb_{n-1} - qb_n \\
 &\vdots \\
 b_2 &= a_2 - pb_3 - qb_4 \\
 b_1 &= a_1 - pb_2 - qb_3 \\
 b_0 &= a_0 - qb_2
 \end{aligned} \tag{C.9}$$

Si se considera a p y q en (C.6) y (C.7) como estimaciones cercanas para los valores exactos \bar{p} y \bar{q} , las expresiones de $b_0(\bar{p}, \bar{q})$ y $b_1(\bar{p}, \bar{q})$ se pueden desarrollar en serie de Taylor alrededor de p y q :

$$b_0(\bar{p}, \bar{q}) = b_0(p, q) + \Delta p \left(\frac{\partial b_0}{\partial p} \right) + \Delta q \left(\frac{\partial b_0}{\partial q} \right) + \dots \quad (\text{C.10})$$

$$b_1(\bar{p}, \bar{q}) = b_1(p, q) + \Delta p \left(\frac{\partial b_1}{\partial p} \right) + \Delta q \left(\frac{\partial b_1}{\partial q} \right) + \dots \quad (\text{C.11})$$

donde

$$\Delta p = \bar{p} - p, \quad \Delta q = \bar{q} - q$$

si las derivadas parciales se evalúan en p y q . Los lados izquierdos de las ecuaciones (C.10) y (C.11) se anulan, debido a que \bar{p} y \bar{q} son valores que hacen cero las expresiones b_0 y b_1 .

Si se trunca los lados derechos de (C.10) y (C.11), después de los términos lineales que solamente incluyen las derivadas de primer orden, se obtiene:

$$\Delta p \left(\frac{\partial b_0}{\partial p} \right) + \Delta q \left(\frac{\partial b_0}{\partial q} \right) = -b_0(p, q) \quad (\text{C.12})$$

$$\Delta p \left(\frac{\partial b_1}{\partial p} \right) + \Delta q \left(\frac{\partial b_1}{\partial q} \right) = -b_1(p, q) \quad (\text{C.13})$$

Los valores numéricos de los lados derechos de (C.12) y (C.13) se evalúan mediante las últimas dos ecuaciones de (C.9). Si se conocen las derivadas parciales, se pueden resolver (C.12) y (C.13) para las correcciones Δp y Δq .

Las derivadas parciales de (C.12) y (C.13) se evalúan en forma recursiva, calculando las derivadas parciales de todas las ecuaciones que aparecen en (C.9):

$$\begin{aligned}
(b_n)_p &= 0 \\
(b_{n-1})_p &= -b_n - p(b_n)_p \\
(b_{n-2})_p &= -b_{n-1} - p(b_{n-1})_p - q(b_n)_p \\
(b_2)_p &= -b_3 - p(b_3)_p - q(b_4)_p \\
(b_1)_p &= -b_2 - p(b_2)_p - q(b_3)_p \\
(b_0)_p &= -q(b_2)_p
\end{aligned} \tag{C.14}$$

y

$$\begin{aligned}
(b_n)_q &= 0 \\
(b_{n-1})_q &= 0 \\
(b_{n-2})_q &= -b_n \\
(b_2)_q &= p(b_3)_q - b_4 - q(b_4)_q \\
(b_1)_q &= p(b_2)_q - b_3 - q(b_3)_q \\
(b_0)_q &= -b_2 - q(b_2)_q
\end{aligned} \tag{C.15}$$

donde los subíndices p y q denotan las derivadas parciales con respecto a p y q , respectivamente. Las dos últimas ecuaciones de (C.14) y las dos últimas ecuaciones de (C.15) dan los valores de las derivadas parciales requeridas.

Una posible implementación del método de Bairstow puede establecerse como sigue:

- a) Se efectúa una estimación inicial para p y q y se calcula b_0 y b_1 mediante (C.9).
- b) Se calcula $(b_0)_p, (b_1)_p, (b_0)_q$ y $(b_1)_q$ mediante (C.14) y (C.15) (las ecuaciones deben calcularse en forma recursiva).

- c) Se resuelve (C.12) y (C.13) para Δp y Δq .
- d) Se obtiene \bar{p} y \bar{q} mediante $\bar{p} = p + \Delta p$ y $\bar{q} = q + \Delta q$, respectivamente.
- e) Si los valores $|\Delta p|$ y $|\Delta q|$ son mayores que una tolerancia previamente especificada se efectúa otra iteración desde el paso a) hasta el paso d), utilizando los valores actualizados de \bar{p} y \bar{q} del paso anterior, como estimaciones actualizadas de p y q .

Dentro de las ventajas significativas del método de Bairstow es que en la mayoría de los problemas, el proceso iterativo converge a uno de los factores cuadráticos, independientemente de la estimación inicial para p y q , pero en ocasiones puede no lograrse convergencia. También se obtiene de manera automática los coeficientes del polinomio reducido $G(x)$ y si se repite el procedimiento descrito hasta que el orden del polinomio reducido sea menor o igual que 2, se puede encontrar todos los factores cuadráticos. Por otro lado, una desventaja es que la precisión de las raíces encontradas por este método puede no sea la requerida. Por tanto, es recomendable mejorar la precisión aplicando el método de Newton con cada raíz al polinomio original. La precisión tiende a degradarse, particularmente si el polinomio tiene raíces múltiples.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

Ejemplo C.1

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Por medio del programa de computadora encontrar los factores cuadráticos del polinomio siguiente:

$$y = 3.3 + 0.5x + 2.3x^2 - 1.1x^3 + x^4$$

Solución

Se presenta la salida del programa digital que muestra:

- 1) $P = 0.9$ y $Q = 1.1$ por lo que el factor cuadrático es $x^2 + 0.9x + 1.1$
- 2) Entonces, las raíces del factor cuadrático son $-0.45 \pm j 0.94736$
- 3) El polinomio reducido es $x^2 - 2x + 3$, el cual es otro factor cuadrático.

Los factores exactos son $(x^2 + 0.9x + 1.1)$ y $(x^2 - 2x + 3)$. Así, el primer factor cuadrático es exacto, pero el segundo tiene cierto error. En general el primer factor cuadrático calculado es el más preciso.

ESQUEMA DE BAIRSTOW

ORDEN DEL POLINOMIO?
4

A(0)?
3.3

A(1)?
0.5

A(2)?
2.3

A(3)?
-1.1

A(4)?
1

TOLERANCIA?
0.00001

P= 0.900000 Q= 1.100000

FACTOR CUADRATICO= X**2 + (0.90000 X) + (1.10000)

LAS RAICES DEL FACTOR CUADRATICO SON

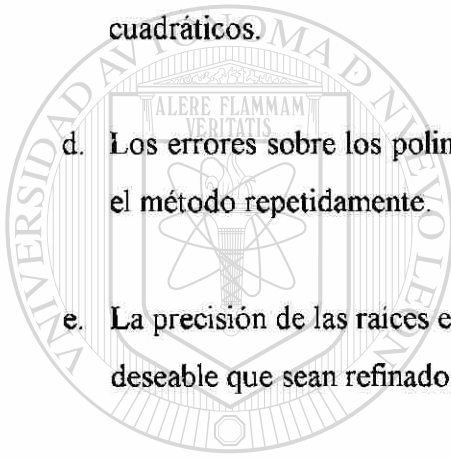
-0.450000 + 0.947365 I
-0.450000 - 0.947365 I

COEFICIENTES DEL POLINOMIO REDUCIDO

ORDEN	COEFICIENTES
0	3.00000
1	-2.00000
2	1.00000

C.3 Resumen

- a. El método de Bairstow encuentra un factor cuadrático de un polinomio, a partir del cual se calcula una pareja de raíces.
- b. Las raíces complejas siempre aparecen como una pareja de números complejos conjugados.
- c. Al repetir la aplicación del método al polinomio reducido, se puede calcular otros factores cuadráticos.
- d. Los errores sobre los polinomios reducidos y los factores cuadráticos aumentan al aplicar el método repetidamente.
- e. La precisión de las raíces encontradas puede ser pobre, por lo que los valores obtenidos es deseable que sean refinados mediante otro procedimiento.
- f. El proceso iterativo puede no lograr convergencia en algunos problemas.

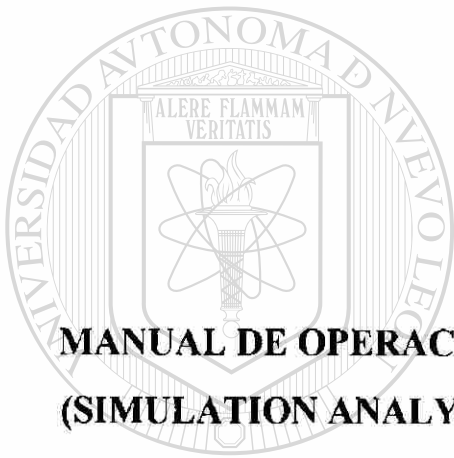


UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



APENDICE D

MANUAL DE OPERACION DEL PAQUETE DE PROGRAMAS SADAC (SIMULATION ANALYSIS & DESIGN FOR AUTOMATIC CONTROL)

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

APENDICE D

MANUAL DE OPERACION DEL PAQUETE DE PROGRAMAS SADAC (SIMULATION ANALYSIS & DESIGN FOR AUTOMATIC CONTROL)

D.1 Descripción General del Programa SADAC

El programa **Simulación Análisis y Diseño de Controles Automáticos (SADAC)** es un programa para computadora digital que simula, analiza y diseña sistemas de control lineales. Este paquete está desarrollado con la programación de eventos utilizando el concepto de componentes reutilizables en un lenguaje de programación moderno llamado **Visual Basic**.

La versión se desarrolló en **Visual Basic 3.0** por lo cual puede trabajar en **Windows 3-11** o en **Windows 95**, con **Formato de 16 Bits**. Si se desea un Formato de 32 Bits se necesita recompilar los programas fuentes en Visual Basic Versión 4.0 Formato 32 Bits. Al preparar el paquete para trabajar en Formato de 32 Bits sólo se puede trabajar en Windows 95 y el paquete realizara exactamente las mismas funciones que en el caso anterior, solamente se gana en velocidad y en el manejo de impresiones, pero se necesitan más recursos de hardware para trabajarlo.

Básicamente el programa está dividido en cinco partes:

- Entrada de Datos
- Salida de Resultados
- Gráficas
- Análisis
- Diseño

En la entrada de datos se introducen las funciones de transferencia, las matrices y vectores de la ecuación de estado y de salida, los datos para el análisis, tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia, así como los datos para realizar el diseño tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia.

En la parte de gráficas se puede obtener la respuesta en el tiempo para la función de transferencia en estudio para cada una de las variables de estado o variables de salida cuando se trabaja con variables de estado. Así mismo se puede obtener la simulación relacionando para cada punto en el tiempo y realiza las gráficas donde los valores de la variable se van a graficar en el tiempo que le corresponde en la tabulación. La respuesta en el tiempo y la simulación se pueden efectuar para el sistema en lazo abierto o en lazo cerrado cuando se trabaja con funciones de transferencia. Además, con los datos apropiados de análisis, puede realizar las gráficas del Lugar Geométrico de las Raíces, gráficas polares de Nyquist, las gráficas de los diagramas de Bode de lazo abierto y de lazo cerrado.

El análisis se realiza tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia. Para obtener resultados en el dominio del tiempo se usa en el método del Lugar Geométrico de las Raíces utilizando el criterio de polos dominantes, a fin de trabajar los sistemas como si fueran de segundo orden. Se determina el punto de operación a partir de la razón de amortiguamiento δ y de ahí calcula la frecuencia natural ω_n y la ganancia K con las cuales se calculara los tiempos transitorios: tiempo de respuesta T_r , tiempo de subida T_p , tiempo de alcance máximo T_{as} , tiempo de asentamiento T_s , y el error de estado estable e_{ss} . Al trabajar en el dominio de la frecuencia se aplica el criterio de Nyquist tanto a los diagramas polares como a los diagramas de Bode de lazo abierto para determinar estabilidad, también se calcula el margen de fase MF, el margen de ganancia MG y la frecuencia de cruce ω_c , y se lleva a cabo el análisis de resonancia a través de los diagramas de Bode de lazo cerrado calculando el ancho de banda $\omega_1 - \omega_2$, la frecuencia de resonancia ω_R , y la amplitud máxima de resonancia M_{max} .

El diseño se realiza en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia. En la parte de diseño en el dominio del tiempo se efectúa la compensación tanto en la rama directa al agregar **controladores PID**, así como en la retroalimentación; para lo cual se apoya en el método del Lugar Geométrico de las Raíces. En la parte de diseño en el dominio de la frecuencia se efectúa compensación en la rama directa agregando redes compensadoras de adelanto, de atraso, o de atraso-adelanto lo cual se lleva a cabo apoyándose en los diagramas de Bode de lazo abierto.

En la salida de resultados se obtienen los cálculos realizados tanto en el análisis como en el diseño y las tabulaciones para las gráficas de respuesta a la frecuencia.

D.2 Hardware Requerido

Para que el paquete SADAC funcione adecuadamente se necesita una computadora en ambiente Windows 3.11 o Windows 95. Para trabajar en Windows 3.11 se necesita como mínimo una computadora con procesador 80486 de 33 MHz., con 4 MB. de memoria RAM, un disco duro con 10 MB libres, monitor VGA, y mouse; es recomendable un procesador 80486 de 100 MHz., con 8 MB de memoria RAM, disco duro con 10 MB libres, monitor VGA, y mouse.

Para trabajar en Windows 95 se requiere que la computadora tenga como mínimo un procesador Pentium, con 8 MB. de memoria RAM, disco duro con 10 MB. libres, monitor VGA y mouse; es recomendable un procesador Pentium de 120 MHz, con 16 MB de memoria RAM, disco duro con 10 MB libres, monitor VGA, y mouse.

D.3 Forma de Operar del Paquete SADAC

El programa SADAC consta de varios elementos para su funcionamiento, como se puede apreciar en la Figura D.1.

Menú Principal:	Contiene procedimientos para el funcionamiento del SADAC
Menú de Iconos:	Contiene Iconos que realizan una serie de eventos utilizables
Area Gráfica:	Despliega la(s) gráfica(s) según el tipo de evento
Ventana de Control de Gráficas:	Esta ventana tiene la función de escalar las gráficas y formatear el número de pantallas.
Ayuda Inmediata:	Presenta una serie de textos que son ayudas; el texto se activa al pasar el apuntador del ratón sobre un Icono o todo aquel elemento que realice una operación, indicando su función

D.3.1 Manejo de Gráficas

La pantalla principal, Figura D.1, contiene iconos para edición de gráficas los cuales están colocados en la esquina superior izquierda. Aparecen iconos para *Edición Gráfica* al oprimir una vez el botón izquierdo del ratón, fijando el puntero sobre el icono, Figura D.2.

- *Puntero del Ratón*: Para volver al puntero del ratón, se oprime el botón izquierdo del ratón sobre el icono.
- *Letrero en Gráfica*: Cuando está activado, habilita escritura dentro del área gráfica en el lugar donde se coloca el puntero del ratón y se oprime una vez el botón izquierdo. El letrero se hace permanente oprimiendo la tecla escape (Esc).

- *Cursor de Pantalla:* Cuando está activado despliega, en la parte inferior de la barra vertical del lado derecho de la pantalla principal, las coordenadas de cada punto del área gráfica donde se posiciona el puntero de ratón.
- *Trazo de Líneas en Gráfica:* Cuando está activado permite de trazar líneas rectas dentro del área gráfica. La línea se traza entre dos posiciones del ratón donde se haya oprimido una vez el botón izquierdo.
- *Cursor Gráfico:* Cuando está activado despliega las coordenadas de cualquier punto de la gráfica donde se posicione el puntero del ratón. Marca con líneas las coordenadas y desde la parte inferior de la barra vertical del lado derecho de la pantalla principal se puede manipular para que el punto se deslice sobre la gráfica.

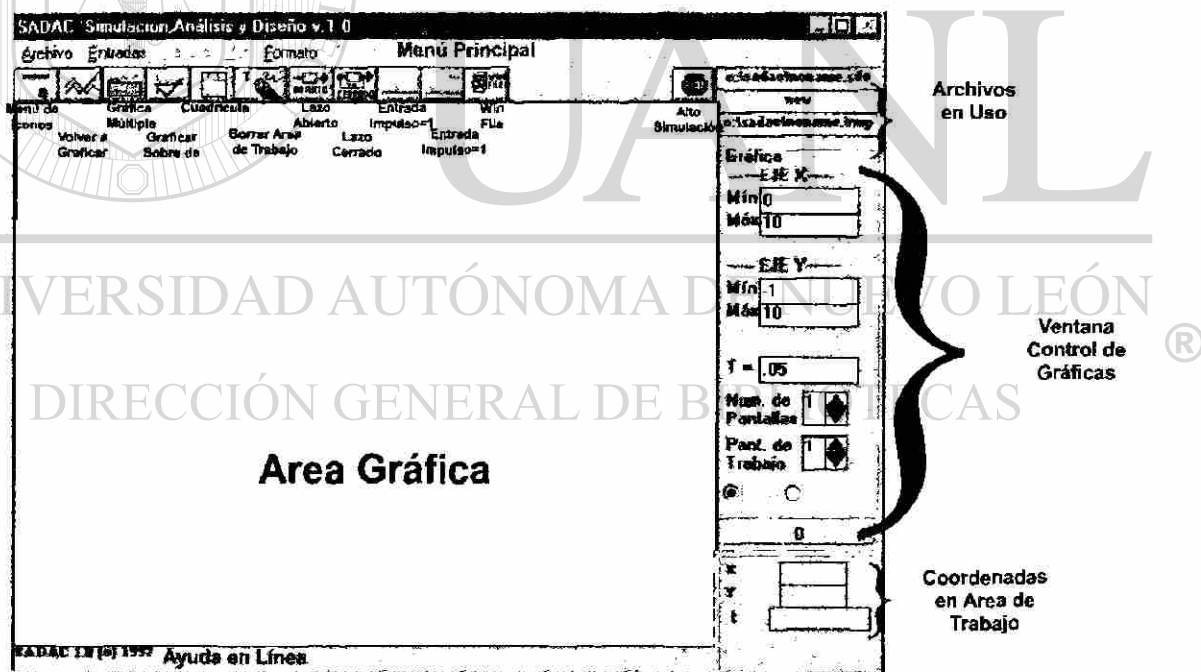


Fig. D.1 Pantalla Principal.

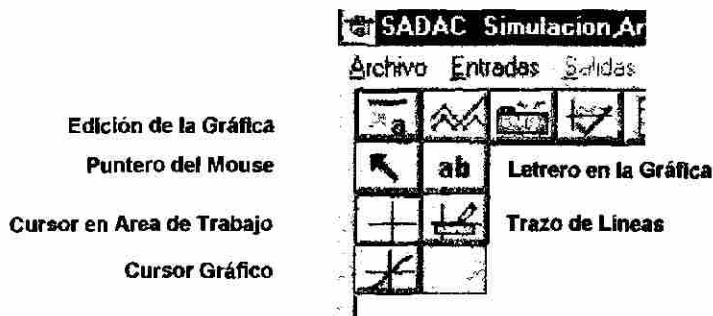


Fig. D.2 Iconos de Edición de Gráficas.

Volver a Graficar: Al oprimir el botón izquierdo del mouse con el puntero sobre el icono se vuelve a dibujar la gráfica con la nueva opción o con la misma gráfica, según sea el caso.

Graficación Múltiple: Se activa oprimiendo una vez el botón izquierdo del mouse con el puntero sobre el icono, Figura D.3. Se presenta una pantalla auxiliar donde se lleva en archivo un registro de las direcciones de los archivos que se han de graficar. Para utilizar esta opción sólo se da el nombre, una descripción y una marca de activado o desactivado para cada archivo que se desea graficar usando los mismos ejes de coordenadas.

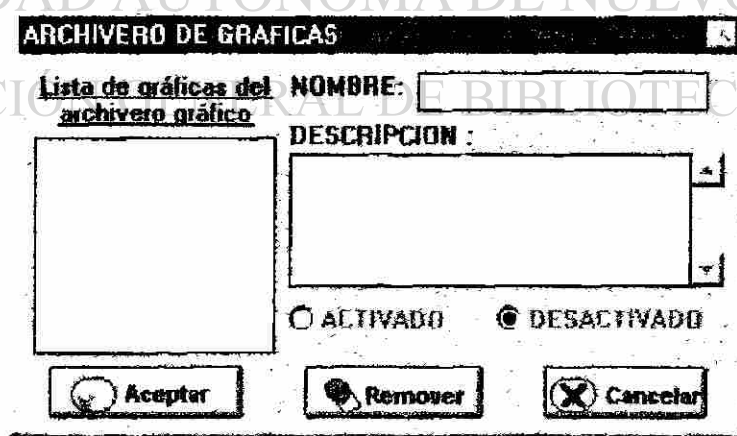


Fig. D.3 Graficación Múltiple.

Graficar Sobre de: Este icono activa o desactiva la posibilidad de la graficación múltiple de funciones de transferencia dadas de alta en la pantalla, Figura D.3.

Cuadrícula: Activa la cuadrícula para la gráfica que se está trabajando al oprimir una vez el botón izquierdo del mouse fijando el puntero sobre el icono; si se oprime de nuevo el botón izquierdo se desactiva. Al estar activada la opción la cuadrícula aparece en todas las gráficas que se presenten en cualquiera de las ventanas.

Borrar Area de Trabajo: Si se oprime el botón izquierdo del mouse con el puntero sobre el icono se borra el área de trabajo, por ventanas.

Gráfica de Lazo Abierto: Durante una simulación o respuesta en el tiempo al estar activado, la gráfica en el área de trabajo es la de lazo abierto. Para activarlo se oprime una vez el botón izquierdo del mouse con el puntero sobre el icono.

Gráfica de Lazo Cerrado: Al efectuar simulación o respuesta en el tiempo si está activado, la gráfica en el área de trabajo es la de lazo cerrado. Para activar la opción se oprime una vez el botón izquierdo del mouse con el puntero sobre el icono.

Entrada Impulso = 1: Este icono activa la entrada impulso unitario en $t = 0$, para obtener la respuesta en el tiempo. Para activarlo se oprime una vez el botón izquierdo del mouse con el puntero sobre el icono.

Entrada Escalón = 1: Este icono activa la entrada escalón unitario en $t = 0$, para obtener la respuesta en el tiempo. Para activarlo se oprime una vez el botón izquierdo del mouse con el puntero sobre el icono.

Manejador de Archivos: Al activarlo se invoca al manejador de archivos de Windows. Para activarlo se oprime una vez el botón izquierdo del mouse con el puntero sobre el icono.

Al mismo nivel, pero hacia la derecha aparece otro icono con la palabra *STOP*, cuyo efecto es detener la simulación, al activarse se detiene la simulación y al desactivarlo la simulación continua. Para activarlo se oprime una vez el botón izquierdo del mouse con el puntero sobre el icono y se desactiva oprimiéndolo nuevamente el botón izquierdo.

D.3.2 Escalamiento y Ventanas

En la parte derecha de la pantalla principal se tiene una barra vertical, la cual en su parte superior indica el nombre de los archivos actualmente en uso. En la parte media se muestra los límites tanto del eje horizontal como del eje vertical, así como el periodo, también en su parte media se muestra el número de ventanas en que se divide el área de trabajo de la pantalla principal; pudiendo seleccionarse cualquiera de ellas. Otro indicador, en la parte media inferior de la ventana de trabajo, muestra botones para activar el escalamiento automático o el escalamiento manual y un cuadro de diálogo en el cual se muestra los puntos que se están calculando. En la parte inferior de la barra se tienen desplegadas las coordenadas que se están graficando durante la simulación o las coordenadas que marca el cursor cuando está activado.

D.3.3 Manejo de Archivos

En la parte superior aparece la barra de Menú Principal donde se tiene los siguientes menús: *Archivo, Entradas, Salidas, Ver, Formato, Gráficas*. En la Figura D.4 se muestra el *Menú de Archivo* con sub-menús. El menú se activa apuntando sobre él y oprimiendo el botón izquierdo del ratón, o presionando al mismo tiempo las teclas <Alt> y <A>. Este menú presenta opciones para *Abrir, Guardar, o Guardar como*. En la opción *Proyecto* se permite guardar los archivos que componen el proyecto actual y sus direcciones donde están localizados; el archivo tiene extensión *.SDC*, así un proyecto (*.SDC*) contiene funciones de transferencia y las variables de estado. Las funciones de transferencia se guardan en forma individual, con la opción *Archivo* agregándose una extensión *.FDT*. Los datos de *Espacio de*

Estado se guardan en forma individual en la opción archivo, y tienen una extensión **.MVE**. Las Gráficas son almacenadas por medio de la *Opción Imagen*, lo cual se hace usando imágenes Bit Mapped en archivos con extensión **.BMP** o como imágenes Windows MetaFile en archivos con extensión **.WMF**. La opción *Proyecto Nuevo* permite inicializar el programa SADAC como si se arrancara nuevamente.

El menú de Archivo descrito da la opción de *Imprimir*, esta opción está pendiente para desarrollarse en un futuro y debe permitir imprimir cualquier contenido de la pantalla de trabajo. Esta opción de impresión también debe permitir imprimir varias gráficas en una misma hoja. Además, a este menú de Archivo le corresponde contener la *opción Terminar*; que cuando se utiliza finaliza ordenadamente el programa, cerrando a su vez los archivos abiertos por él durante la sesión y borrando los archivos temporales usados durante las corridas. En caso de desear conservar alguna información ésta debe guardarse antes de terminar el programa.

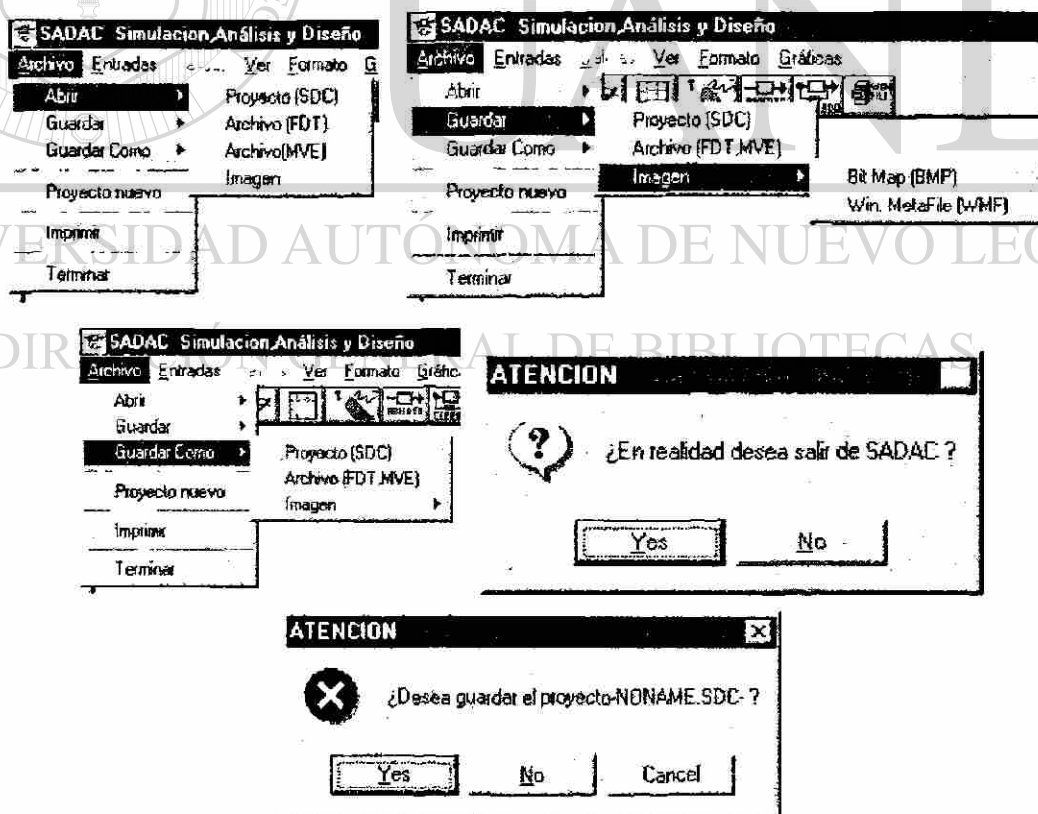


Fig. D.4 Menú de Archivo con sub-menús y Pantallas Auxiliares.

D.3.4 Manejo de Entradas

En la Figura D.5 se muestra el *Menú de Entradas*. Este menú se activa apuntando a él y oprimiendo el botón izquierdo del ratón o presionando al mismo tiempo la tecla <Alt> y <E>. El menú da la opción de cargar datos para el programa SADAC como son: la *Función de Transferencia*, las *Variables de Estado*, los datos para *Análisis*, *Dominio del Tiempo*, *Dominio de la Frecuencia*, *Diseño*, *Dominio del Tiempo*, *Compensación en la Rama Directa* y *Compensación en la Retroalimentación* y *Dominio de la Frecuencia*.

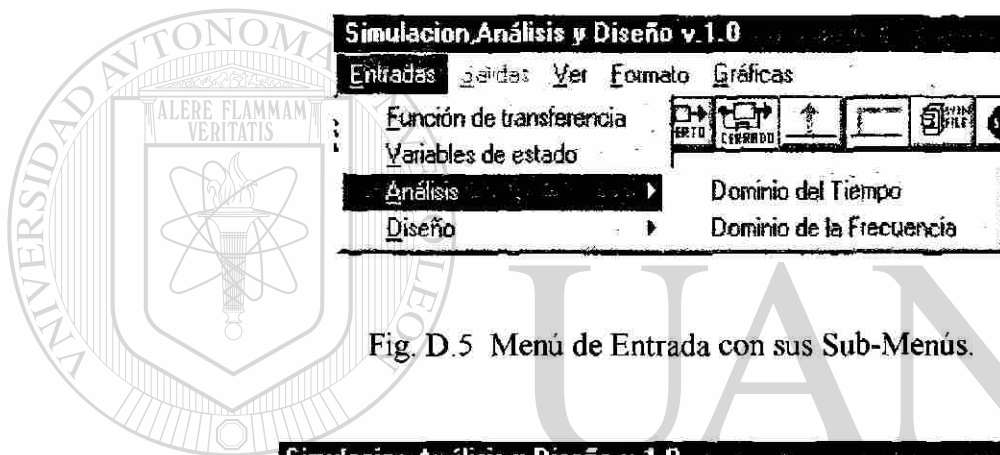


Fig. D.5 Menú de Entrada con sus Sub-Menús.

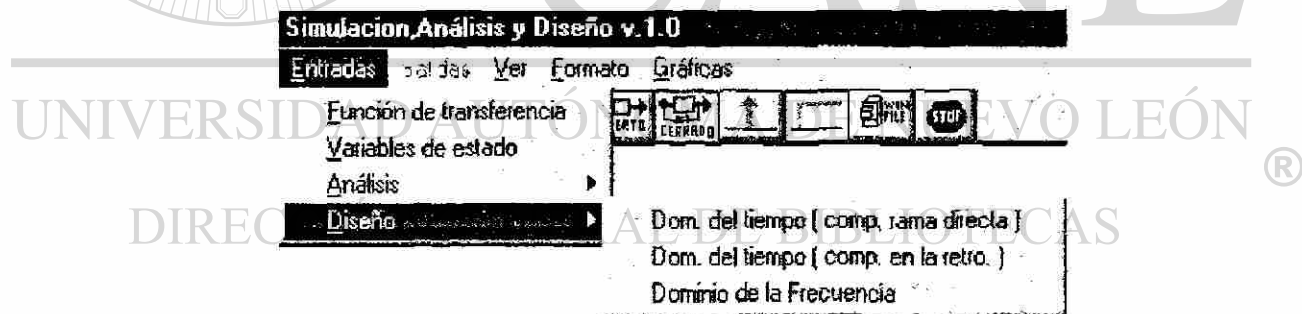


Fig. D.5 Menú de Entrada con Sub-Menús, (Continuación).

Al estar activada la opción de Función de Transferencia en el menú de entrada se presenta una pantalla auxiliar, como se muestra en la Figura D.6. Se permite introducir el nombre de la función de transferencia y la ganancia del sistema en forma de numérica con decimales. Posteriormente se puede introducir los polinomios del numerador, lo cual se efectúa de la siguiente manera: primero el número que indica la cantidad de polinomios y en

seguida los polinomios, cada uno entre corchetes [], indicando primero el grado y seguido después de los coeficientes, escritos de exponente mayor a menor y separados por comas; por ejemplo $s(s+1)(s+5) \Rightarrow 3[1:1,0][1:1,1][1:1,5]$. A continuación se procede a introducir los polinomios del denominador, de la misma manera que los del numerador. Después de introducir los datos se debe oprimir <Verificar>, para comprobar que los datos se han capturado en forma correcta.

Fig. D.6 Pantalla Auxiliar de Entrada de Datos (Función de Transferencia).

En la Figura D.6 también se muestra el botón para *Cancelar*, el cual cancela la opción y regresa al estado anterior (como si esta opción nunca se hubiera seleccionado), un botón para *Remover* el archivo marcado en la lista, un botón para *Limpiar* cuya acción será borrar los datos capturados en esta pantalla, un botón de *Aceptar* cuya acción permite aceptar los datos

mostrados en esta pantalla y activar el programa para que continúe con los cálculos. También se tiene la opción *Ver Función* que muestra en una pantalla auxiliar la función de transferencia actual. En la parte derecha de este sub-menú se tiene una ventana, en la cual se muestra todas las funciones de transferencia introducidas en el proyecto con extensión .TMP en caso de no haber sido grabadas y con extensión .FDT si ya fueron guardadas.

Cuando se activa la opción *Variables de Estado* el menú de entrada presenta una pantalla auxiliar, Figura D.7(a). En la forma se requiere el nombre para identificación, el número de variables de estado, el número de entradas, el número de salidas, el número de muestras o evaluaciones, y el periodo de muestreo. Se tiene la opción para *Cancelar*, y si se utiliza se regresa al estado anterior como si no se hubiera seleccionado esta opción del menú. La opción *Remover* elimina de la lista adjunta el archivo MVE seleccionado. La opción *Limpiar* borra los datos de la pantalla actual, mientras que la opción *Aceptar* toma los datos en pantalla y genera las matrices activando los cálculos del programa. La opción *Captura de Datos* habilita pantallas auxiliares para capturar matrices y vectores en la forma general de variables de estado, las cuales son generadas usando los datos en pantalla, Figura D.7(a).

The screenshot shows a window titled "Entrada de datos (Matriz variables de estado)". It contains the following fields and controls:

- Text input field: VE1
- Text input field: 3
- Text input field: 1
- Text input field: 1
- Text input field: 1000
- Text input field: 0.01
- Buttons on the right:
 - Captura de datos (with a floppy disk icon)
 - Aceptar (with a checkmark icon)
 - Cancelar (with an X icon)
 - Remover (with a trash can icon)
 - Limpiar (with a broom icon)

Fig. D.7(a) Pantalla de la opción Variables de Estado del Menú Entrada.

La pantalla auxiliar, como se muestra en la Figura D.7(b), permite cargar al programa la matriz acompañante P . La matriz P es una matriz cuadrada cuyas dimensiones dependen del número de variables de estado.

Variable	1	2	3
Escalon	0	1	0
Impulso	0	0	1
Rampa			
Aceleración	-96	-36	-8
Seno			
Coseno			

Fig. D.7(b) Pantalla Auxiliar para cargar la Matriz Acompañante P .

La pantalla auxiliar de la Figura D.7(c) permite alimentar los datos de la matriz B , la cual relaciona entradas o excitaciones con las variables de estado. La matriz B tiene un número de columnas que dependen de las entradas y el número de renglones depende de las variables de estado.

Variable	1
Escalon	0
Impulso	0
Rampa	
Aceleración	24
Seno	
Coseno	

Fig. D.7(c) Pantalla auxiliar para cargar la Matriz B .

La pantalla auxiliar de la Figura D.7(d) permite seleccionar el vector de entradas $u(t)$. El vector $u(t)$ tiene como dimensión el número de entradas que se han definido en el programa.

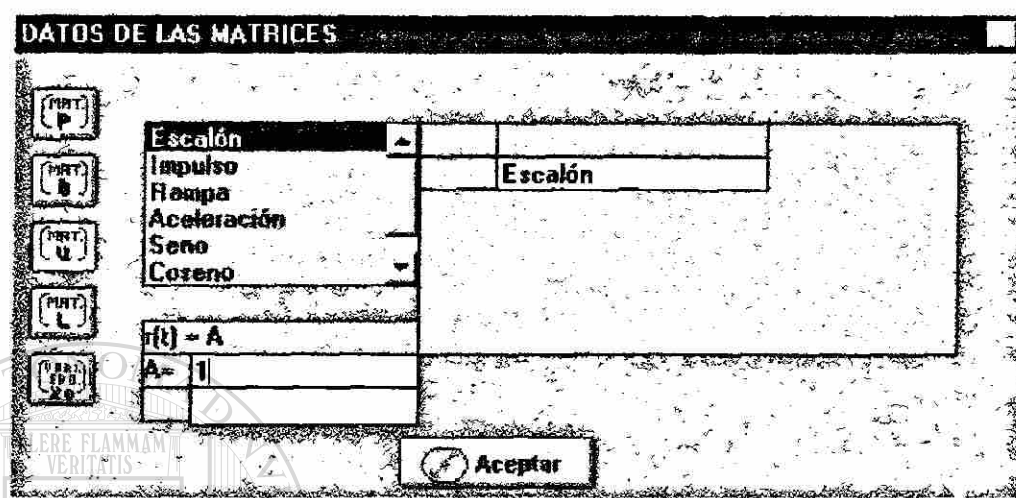


Fig. D.7(d) Pantalla auxiliar para cargar el Vector de Entradas $u(t)$.

La pantalla auxiliar de la Figura D.7(e) permite introducir los elementos de la matriz L , la cual relaciona las salidas con las variables de estado. La matriz L tiene tantas columnas como variables de estado haya y el número de renglones depende del número de salidas.

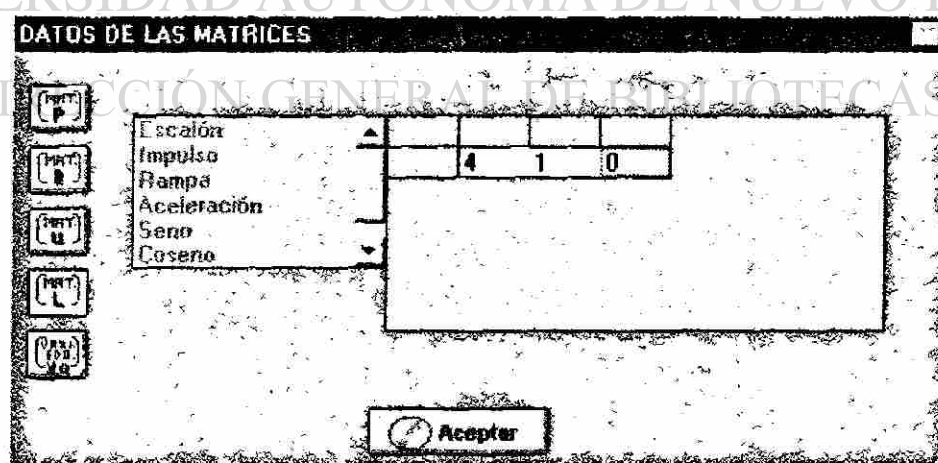


Fig. D.7(e) Pantalla auxiliar para cargar la Matriz L .

La pantalla auxiliar de la Figura D.7(f) permite manejar el vector de condiciones iniciales $x(0)$. El vector $x(0)$ tiene una dimensión igual al número de variables de estado.

Variable	Valor
Estrategia	0
Amplitud	0
Aceleración	0

Fig. D.7(f) Pantalla auxiliar para cargar el Vector de Condiciones.

Se cuenta con una pantalla auxiliar *Entrada de Datos* para el análisis en el dominio del tiempo, Figura D.8, en la que se asignan datos para el análisis en el dominio del tiempo. Los datos a especificar son: razón de amortiguamiento δ o % de sobrepaso, rango de la ganancia K para construir el Lugar Geométrico de las Raíces, el incremento ΔK , % de tolerancia para el ángulo β en el punto de operación, y el % de oscilación sobre el valor final que se desea considerar suponiendo que el sistema alcanzó su estado estable.

Razón de amortiguamiento (d)	
% sobrepaso	20
Rango de K ($K_{min} - K_{max}$)	0-40
Incremento de la ganancia K	0.1
% de tolerancia en el cálculo de β	1
% de oscilación del valor final deseado	2

Mensaje: ?

Fig. D.8 Pantalla auxiliar para Análisis en el Dominio del Tiempo, (Entrada de Datos).

Los datos requeridos para el análisis en el dominio de la frecuencia son: la frecuencia inicial ω_i , la frecuencia final ω_f , y el número de puntos, tal como se muestra en la pantalla auxiliar de la Figura D.9.

Análisis en el Dominio de la Frecuencia

Entrada de datos

Wi = 0.1

Wf = 100

Número de puntos = 1000

Aceptar

Cancelar

ETDP

Fig. D.9 Pantalla auxiliar para Análisis en el Dominio de la Frecuencia, (Entrada de Datos).

Los datos necesarios para diseño en el dominio del tiempo con compensación en la rama directa son los mismos que para análisis en el dominio del tiempo, pero además se necesitan los datos de requerimiento: tiempo de respuesta $T_r < a$, tiempo de subida $T_p < a$, tiempo de alcance máximo $T_a < a$, tiempo de asentamiento $T_s < a$, y % error de estado estable $\% e_{ss}$, tal como se muestra en la pantalla auxiliar de la Figura D.10.

Diseño en el Dominio del Tiempo (comp. rama directa)

Entrada de datos

razón de amortiguamiento (r) →	0.1	Tiempo de respuesta (Tr) <	0.5
% sobrepaso →	20	Tiempo de subida (Tp) <	0.8
Rango de K (Kmin - Kmax) →	0-40	Tiempo de alcance máx. (Ta) <	1.2
Incremento de la ganancia K →	0.1	Tiempo de asentamiento (Ts) <	3
% de tolerancia en el cálculo de 'B' →	1	% error de edo. estable (%Ess) <	2
% de oscilación del valor final deseado →	2		

Mensaje

Aceptar

Cancelar

Limpiar

Fig. D.10 Pantalla auxiliar para Diseño en el Dominio del Tiempo, Compensación en la Rama Directa.

Los datos para diseño en el dominio del tiempo, con compensación en la retroalimentación, son los mismos que para análisis en el dominio del tiempo pero además se necesitan los datos de requerimientos como: tiempo de respuesta $T_r < a$, tiempo de subida $T_p < a$, tiempo de alcance máximo $T_a < a$, tiempo de asentamiento $T_s < a$, % de error de estado estable $\% e_{ss} < a$, así como establecer la Ganancia en la Retroalimentación K_t , como se muestra en la pantalla auxiliar de la Figura D.11.

Diseño en el Dominio del Tiempo [comp. en la rama de retroalimentación]

Entrada de datos

Frec. de amortiguamiento (ζ)		Tiempo de respuesta (T_r)	<	0.5
% sobrepaso	20	Tiempo de subida (T_p)	<	0.8
Rango de K [K_{min} - K_{max}]	0-40	Tiempo de alcance máx. (T_a)	<	1.3
Incremento de la ganancia K	0.1	Tiempo de asentamiento (T_s)	<	3
% de tolerancia en el cálculo de β^*	1	% error de edo. estable ($\%E_{ss}$)	<	2
% de oscilación del valor final deseado	2			

Valor de la const. de retro. (K_t)

1 3 5 10 15

Mensaje

?

Fig. D.11 Entrada de datos Diseño en el Dominio del Tiempo, Compensación en la Retroalimentación.

Los datos para diseño en el dominio de la frecuencia son los mismos que para análisis en el dominio de la frecuencia y sólo cuando haya un requerimiento especial en la frecuencia de resonancia se debe alimentar al programa, como se muestra en la Figura D.12.

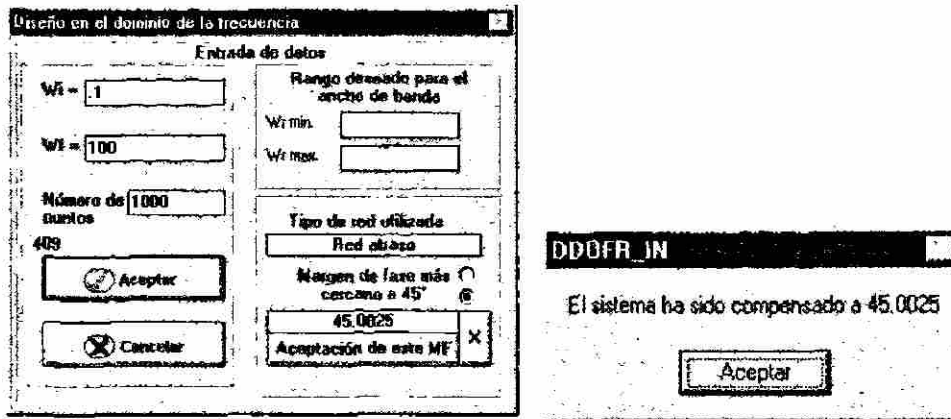


Fig. D.12 Entrada de Datos Diseño en el Dominio de la Frecuencia.

D.3.5 Manejo de Salidas

El *Menú Salidas*, como se muestra en la Figura D.13, permite obtener por medio de pantallas auxiliares los resultados para el *análisis en el dominio del tiempo* y para el *dominio de la frecuencia*

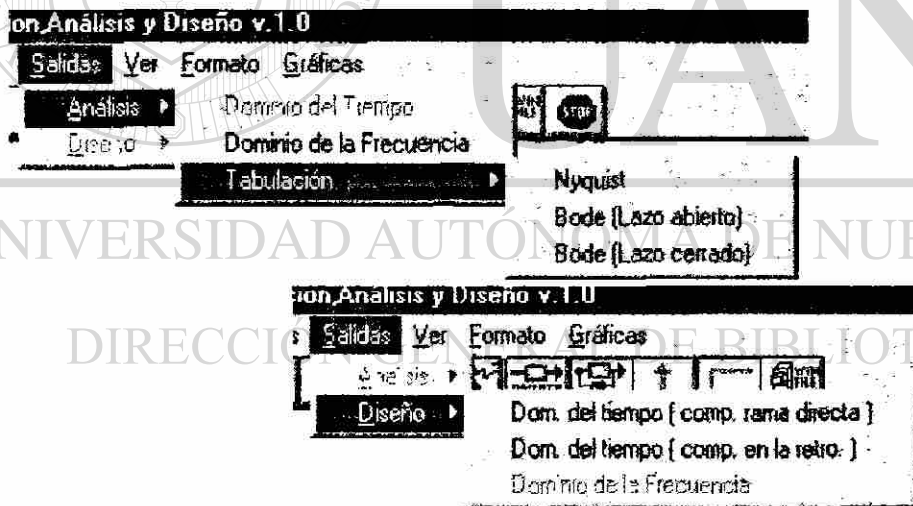


Fig. D.13 Menú de Salidas.

El menú de salidas también permite listar *tabulaciones* para *Nyquist*, *Bode de lazo abierto*, *Bode de lazo cerrado*, *diseño en el dominio del tiempo*, *compensación en la rama directa* y *en la retroalimentación*, así como *diseño en el dominio de la frecuencia*.

El *Sub-Menú de Análisis*, Figura D.13, tiene tres opciones. Una primera opción es para el *Dominio del Tiempo* la cual activa una componente del programa SADAC que efectúa análisis en el dominio del tiempo, auxiliado por el Lugar Geométrico de las Raíces y con base en que existe por lo menos un par de polos dominantes. Los resultados se presentan en una pantalla auxiliar, como en la Figura D.14, los cuales son: δ o razón de amortiguamiento, % de sobrepaso, β o ángulo que marca el amortiguamiento del punto de operación en el plano s , tiempo de respuesta T_r , tiempo de subida T_p , tiempo de alcance máximo T_a , tiempo de asentamiento T_s , frecuencia natural ω_n , ganancia del punto de operación K , y % error de estado estable $\% e_{ss}$.

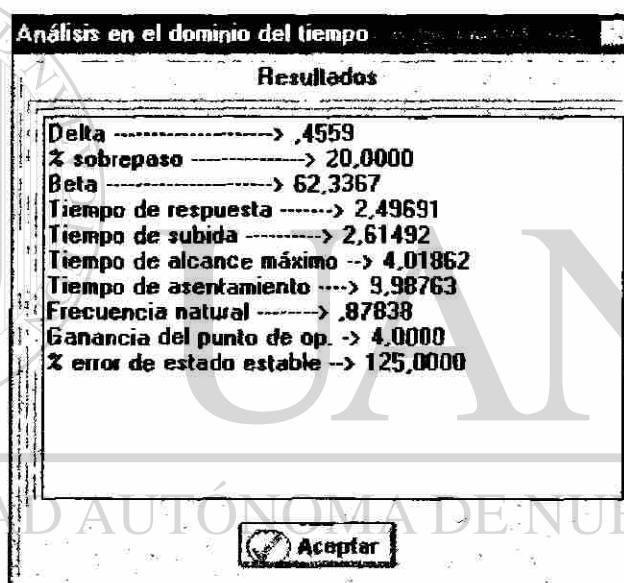


Fig. D.14 Pantalla auxiliar de salidas, opción Análisis en el Dominio del Tiempo.

La segunda opción disponible es la de *Análisis en el Dominio de la Frecuencia* la cual activa una componente del programa SADAC que efectúa un análisis en el dominio de la frecuencia en lazo abierto y también en lazo cerrado, con base en los diagramas de Nyquist y Bode. Presenta los resultados en una pantalla auxiliar, como en la Figura D.15, los cuales son: margen de fase MF, margen de ganancia MG, frecuencia de cruce ω_c , el ancho de banda $\omega_1 - \omega_2$, máximo de resonancia M_{max} , y la frecuencia de resonancia ω_R .

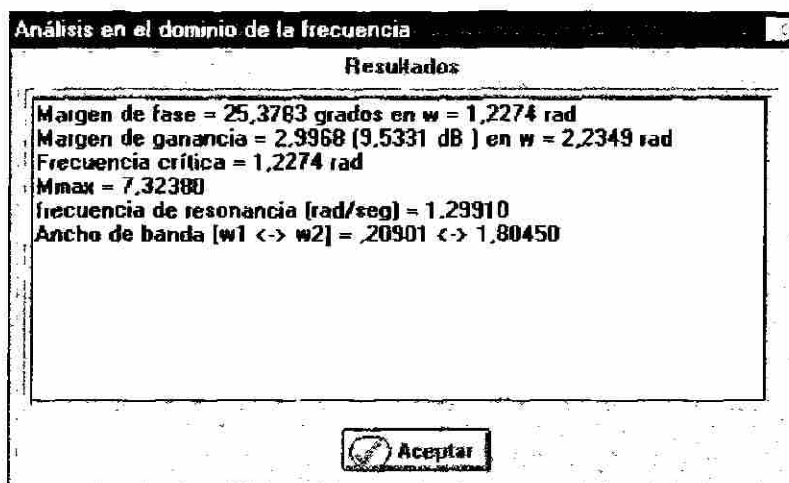


Fig. D.15 Pantalla auxiliar de salidas, opción Análisis en el Dominio de la Frecuencia.

La tercera opción *Tabulación* se lleva a cabo por medio de otro sub-menú, el cual presenta opciones para *tabulación de Nyquist*, *tabulación de Bode (Lazo Abierto)*, y *tabulación de Bode (Lazo Cerrado)*, por medio de pantallas auxiliares para cada una, tal como se muestra en la Figura D.16.

	w (rad/seg)	GH(jw)	Flgh(jw)
1	10000	19,97227	-93,81725
2	20000	9,94485	-97,61975
3	30000	6,58468	-101,39317
4	40000	4,89204	-105,12401
5	50000	3,86717	-108,79989
6	60000	3,17691	-112,40984
7	70000	2,67857	-115,94447
8	80000	2,30083	-119,39605
9	90000	2,00407	-122,75851
10	1,00000	1,76452	-126,02737
11	1,10000	1,56700	-129,19965
12	1,20000	1,40140	-132,27369
13	1,30000	1,26066	-135,24899

CERRAR

Fig. D.16 Pantalla auxiliar de salidas, opción Análisis en el Dominio de la Frecuencia con Tabulación para Nyquist, Bode (Lazo Abierto), Bode (Lazo Cerrado).

Tabulación de Bode (lazo abierto)			
	w (rad/seg)	GH(jw) (dB)	Figh(jw)
1	10000	26.00861	-93.81725
2	20000	19.95201	-97.61975
3	30000	16.37073	-101.39317
4	40000	13.78984	-105.12401
5	50000	11.74788	-108.79989
6	60000	10.04012	-112.40984
7	70000	8.55808	-115.94447
8	80000	7.23771	-119.39605
9	90000	6.03828	-122.75851
10	1.00000	4.93252	-126.02737
11	1.10000	3.90141	-129.19965
12	1.20000	2.93126	-132.27369
13	1.30000	2.01198	-135.24899

CERRAR

Tabulación de Bode (lazo cerrado)			
	w (rad/seg)	Mdb	N
1	10000	.01810	-2.8694
2	20000	.07250	-5.7680
3	30000	.16345	-8.7256
4	40000	.29134	-11.7748
5	50000	.45661	-14.9519
6	60000	.65966	-18.2979
7	70000	.90064	-21.8629
8	80000	1.17913	-25.7040
9	90000	1.49363	-29.8917
10	1.00000	1.84082	-34.5086
11	1.10000	2.21428	-39.6532
12	1.20000	2.60283	-45.4372
13	1.30000	2.98818	-51.9775

CERRAR

Fig. D.16(Continuación) Pantalla auxiliar de salidas ,opción Análisis en el Dominio de la Frecuencia Tabulación para Nyquist, Bode (Lazo Abierto), Bode (Lazo Cerrado).

El *Sub-Menú* para *Diseño* presenta tres opciones *Dominio del Tiempo (Compensación en la Rama Directa)*, *Dominio del Tiempo (Compensación en la Retroalimentación)*, y *Dominio de la Frecuencia*. La primera opción activa una componente del programa SADAC que efectúa la compensación en la rama directa agregando polos y ceros a la función original,

los cuales representan una aproximación de un controlador PID cuyos resultados se muestran en la pantalla auxiliar de la Figura D.17. Los resultados mostrados son la razón de amortiguamiento δ , el % de sobrepaso, el cero y el polo que forman la aproximación PD del controlador, el polo y el cero que forma la parte PI del controlador, la nueva frecuencia natural ω'_n , la ganancia del nuevo punto de operación K' , el nuevo tiempo de respuesta T'_r , el nuevo tiempo de subida T'_p , el nuevo tiempo de alcance máximo T'_a , el nuevo tiempo de asentamiento T'_s , el nuevo error de estado estable e_{ss} , y los valores de comportamiento requeridos.

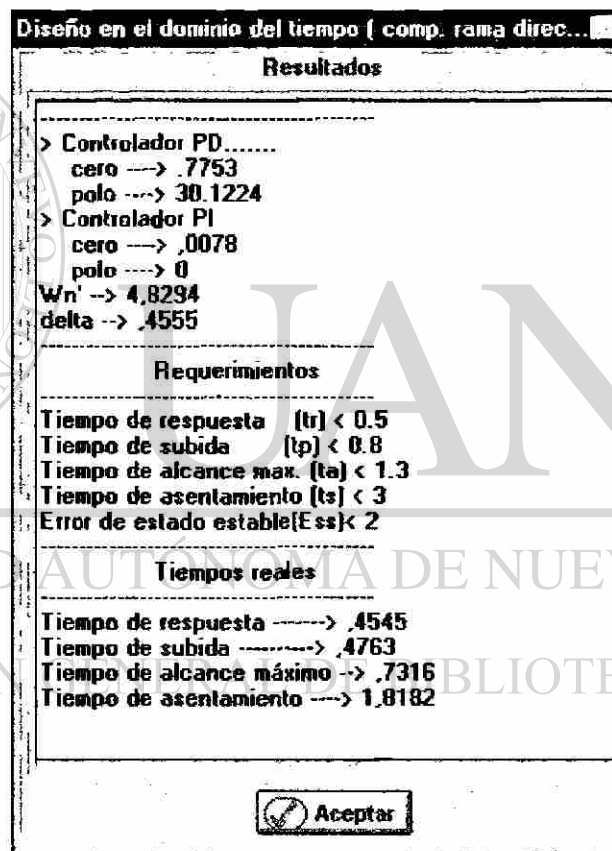


Fig. D.17 Pantalla auxiliar de la Opción Diseño en el Dominio del Tiempo, Compensación en la Rama Directa del Menú Salidas.

La segunda opción del *Sub-Menú Diseño Dominio del Tiempo con Compensación en la Retroalimentación* activa una rutina del programa SADAC la cual efectúa una compensación en la retroalimentación, agregando un cero a la función original para representar una

aproximación de un controlador PD. Los resultados se muestran en la pantalla auxiliar de la Figura D.18, así mismo se lista los requerimientos de desempeño establecidos.

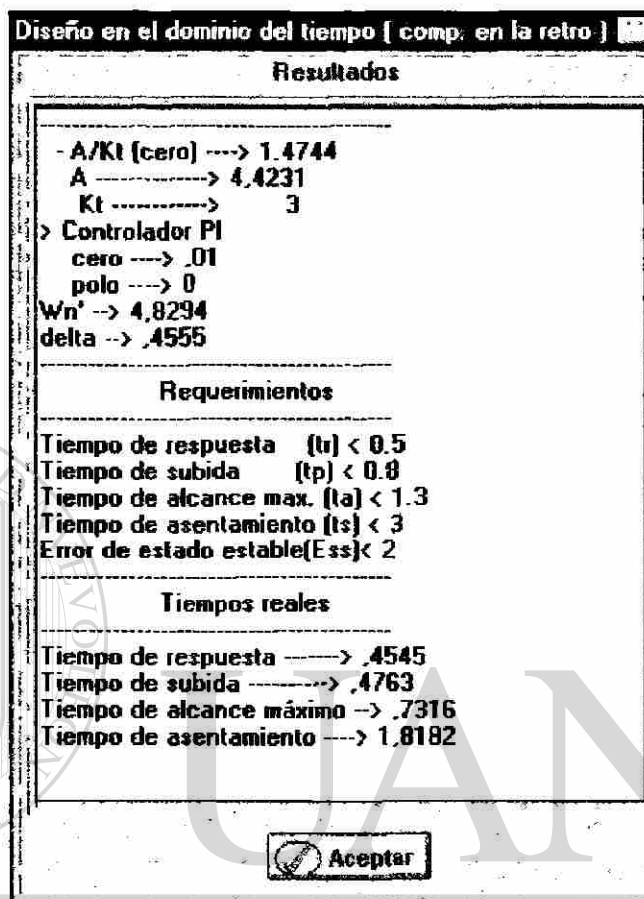


Fig. D.18 Pantalla auxiliar del menú de salida Diseño en el Dominio del Tiempo, Compensación en la Rama de Retroalimentación.

La tercera opción del *Sub-Menú Diseño, Dominio de la Frecuencia*, enlaza a una parte del programa SADAC la cual trabaja la compensación en la rama directa agregando redes compensadoras de adelanto, de atraso, o de atraso-adelanto según sea requerido y presenta como resultados el tipo de red utilizada, los polos y ceros que la componen, el nuevo margen de fase MF, el nuevo margen de ganancia MG, la nueva frecuencia de cruce ω_c , el nuevo ancho de banda $\omega_1 - \omega_2$, la nueva frecuencia de resonancia ω_R , y la nueva amplitud máxima de resonancia M_{max} . Así mismo, se muestran los índices de comportamiento requeridos, Figura D.19.

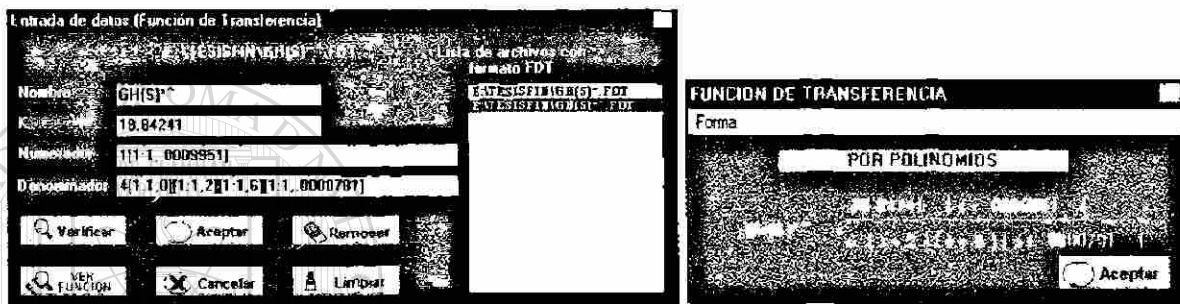
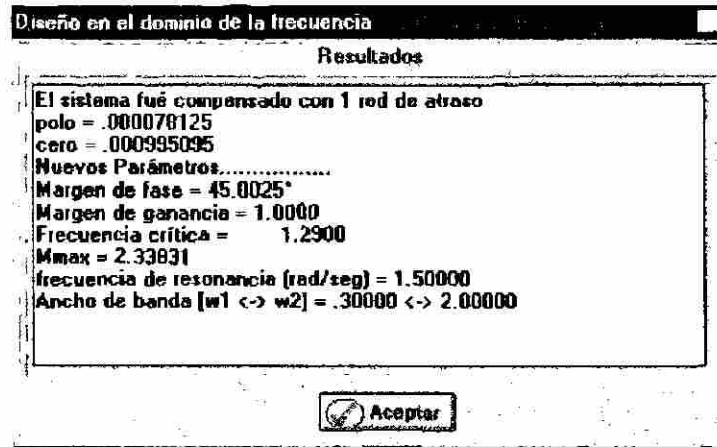


Fig D.19 Resultados Diseño en el Dominio de la Frecuencia.

D.3.6 Despliegue de datos en pantalla

El Menú Ver del Programa SADAC, como se muestra en la Figura D.20, tiene tres opciones: una *Función de Transferencia*, la cual muestra la función de transferencia actualmente activa en el programa, Figura D.21. Con la opción *Variables de Estado* se muestra las matrices y los vectores de las ecuaciones de estado y de salida, Figura D.22, y la tercera opción *Bitácora* la cual muestra la historia de comandos utilizados en la presente sesión, esto se ilustra en la Figura D.23.

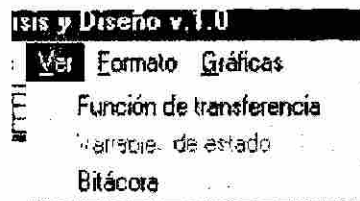


Fig. D.20 Menú Ver.



Fig. D.21 Pantalla auxiliar del Menú Ver, muestra la Función de Transferencia.

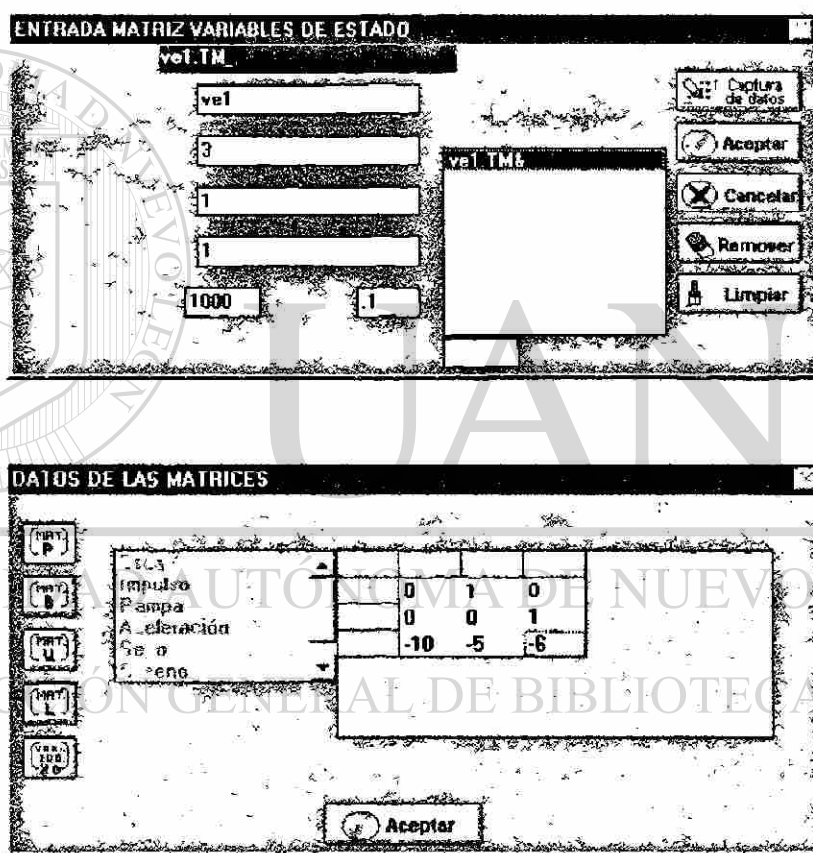


Fig. D.22 Pantalla auxiliar del Menú Ver, se muestran las Variables de Estado.

DATOS DE LAS MATRICES

Escalón	
Impulso	0
Rampa	0
Aceleración	10
Seno	
Coseno	

Aceptar

DATOS DE LAS MATRICES

Escalón	
Impulso	Escalón
Rampa	
Aceleración	
Seno	
Coseno	

$h(t) = A$
 $A = 1$

Aceptar

DATOS DE LAS MATRICES

Escalón			
Impulso	1	0	0
Rampa			
Aceleración			
Seno			
Coseno			

Aceptar

DATOS DE LAS MATRICES

Escalón			
Impulso	1	0	0
Rampa			
Aceleración			
Seno			
Coseno			

Aceptar

Fig. D.22 Pantalla auxiliar del Menú Ver, se muestran Variables de Estado, (Continuación).

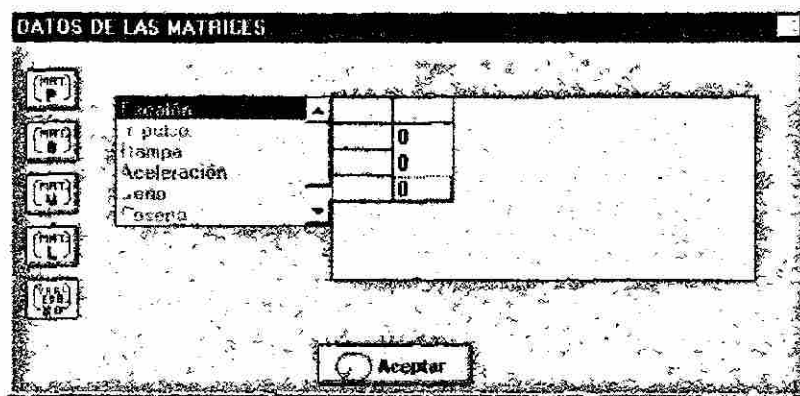


Fig. D.22 Pantalla auxiliar del Menú Ver , se muestran las Variables de Estado, (Continuación).

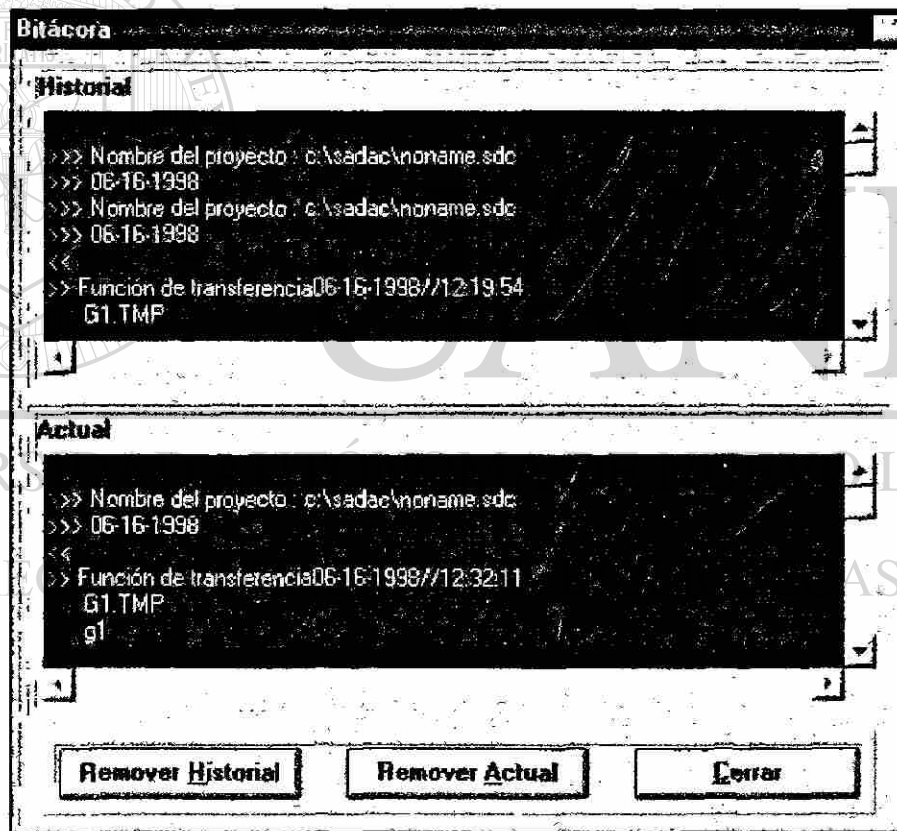


Fig. D.23 Pantalla auxiliar que muestra la Bitácora del programa SADAC.

D.3.7 Utileria de Formato

El *Menú Formato* del programa SADAC, Figura D.24, presenta la opción pantalla que remite a una forma como la de la Figura D.25, ésta permite cambiar las características gráficas del área de trabajo del programa SADAC. La opción permite al usuario cambiar los colores de la pantalla, de la gráfica, de las coordenadas, y de la cuadrícula. También se puede cambiar el estilo de las líneas de la cuadrícula, el número de divisiones en cada eje de coordenadas y variar la escritura de la escala. Además, se puede cambiar el patrón de la línea de trazo, el tipo de letra, el formato de los números, los marcos vertical y horizontal y el número de decimales de las coordenadas.

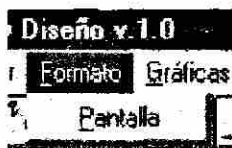


Fig. D.24 Menú Formato

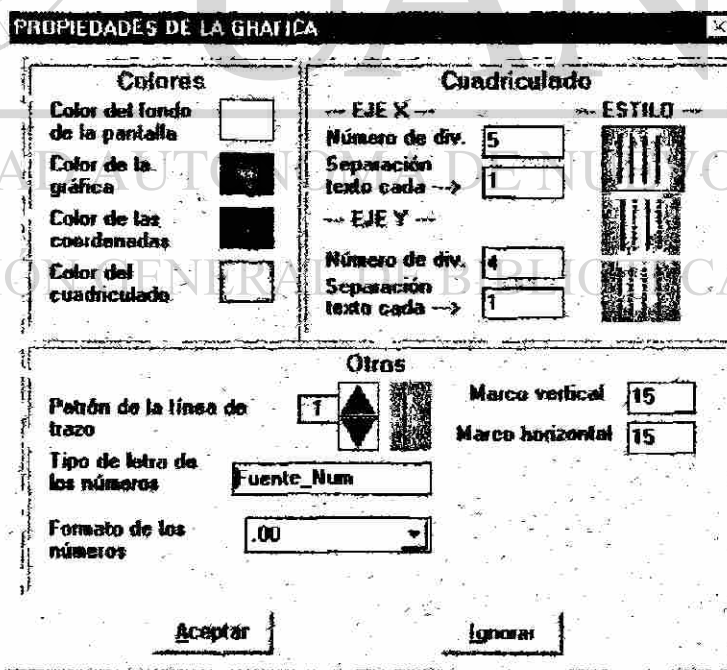


Fig. D.25 Propiedades de la Gráfica, activada por el Menú Formato (opción Pantalla).

D.3.8 Desplegado de Gráficas en Pantalla

El *Menú Gráficas* que se tiene en la Figura D.26, permite mostrar gráficas, como las correspondientes a la *Respuesta en el Tiempo* (en Lazo Cerrado), como se ilustra por medio de la Figura D.27. Las gráficas de *Simulación* en el dominio del tiempo (en Lazo Cerrado), *Respuesta en el Tiempo* (en Lazo Abierto) ilustrado en la Figura D.28. Los resultados gráficos de la *Simulación* del comportamiento en el dominio del tiempo (en Lazo Abierto) Figura D.28, o bien del lugar Geométrico de las Raíces L.G.R. como en la Figura D.29. *El Diagrama de Nyquist* Figura D.30, *el diagrama de Bode (lazo abierto)* Figura D.31, y *el diagrama de Bode (lazo cerrado)*, Figura D.32 para sistemas compensados y sin compensar. Las gráficas pueden modificarse con la barra vertical de escalamiento, la cual está colocada en la parte derecha como se puede apreciar en la Figura D.1. También puede modificarse su apariencia usando el Formateador de Gráficos de la Figura D.25 o por los iconos de formateo de gráficas de la Figura D.2.

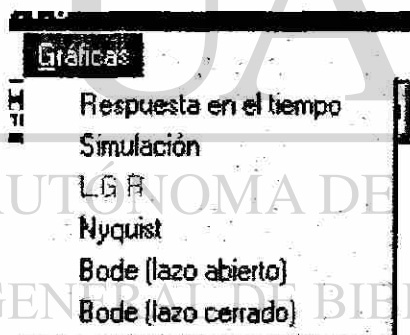


Fig. D.26 Menú de Gráficas.

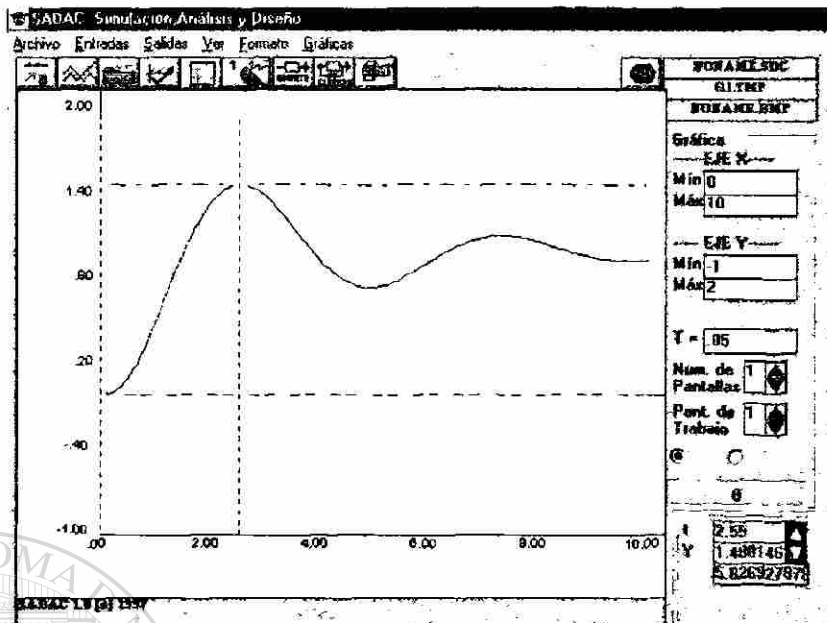


Fig. D.27 Gráfica de la Respuesta en el Tiempo de un Sistema en Lazo Cerrado con entrada Escalón Unitario.

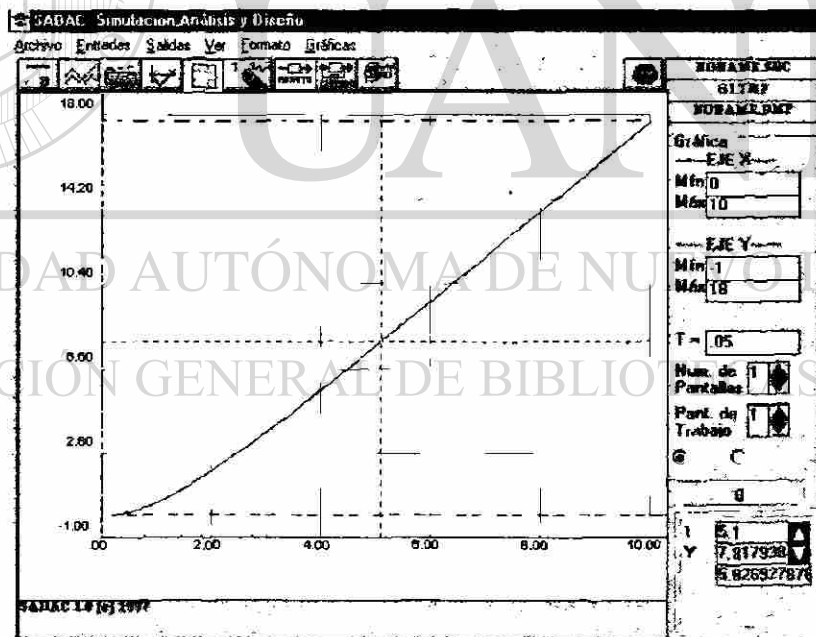


Fig. D.28 Gráfica de la Respuesta en el Tiempo de un Sistema en Lazo Abierto con entrada Escalón Unitario.

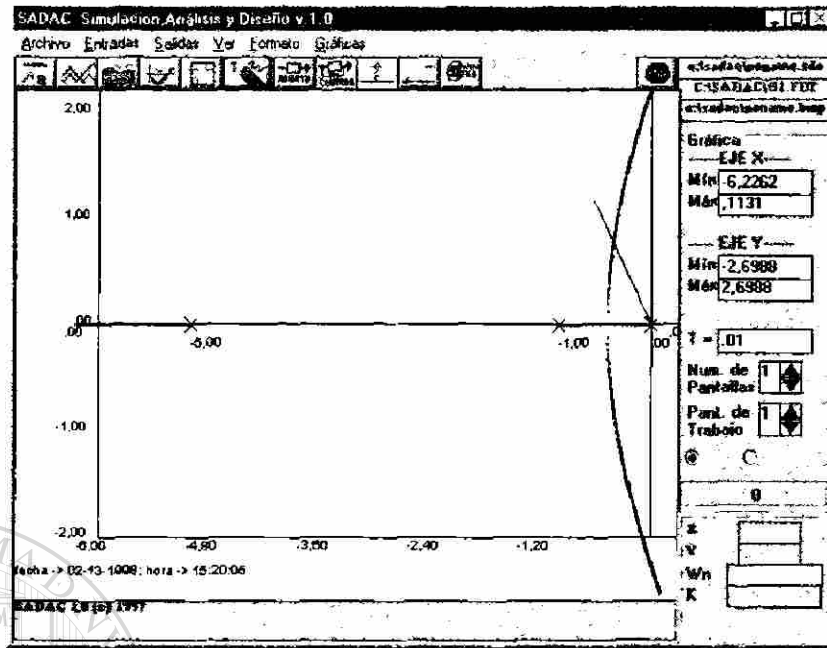


Fig. D.29 Gráfica del Lugar Geométrico de $GH(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+5)}$

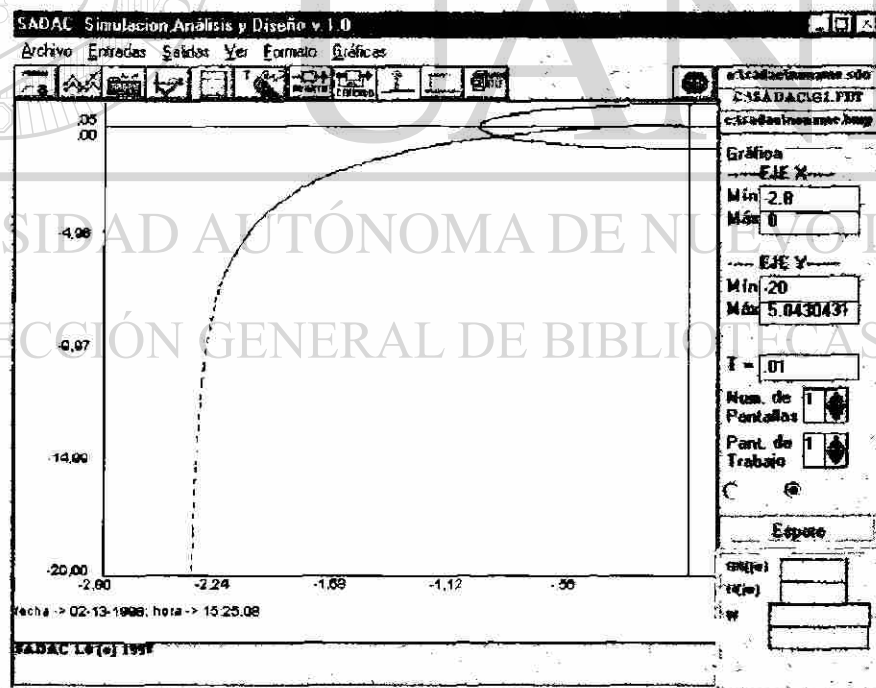


Fig. D.30 Gráfica de Nyquist de función de transferencia $GH(s) = \frac{24}{s(s+2)(s+6)}$

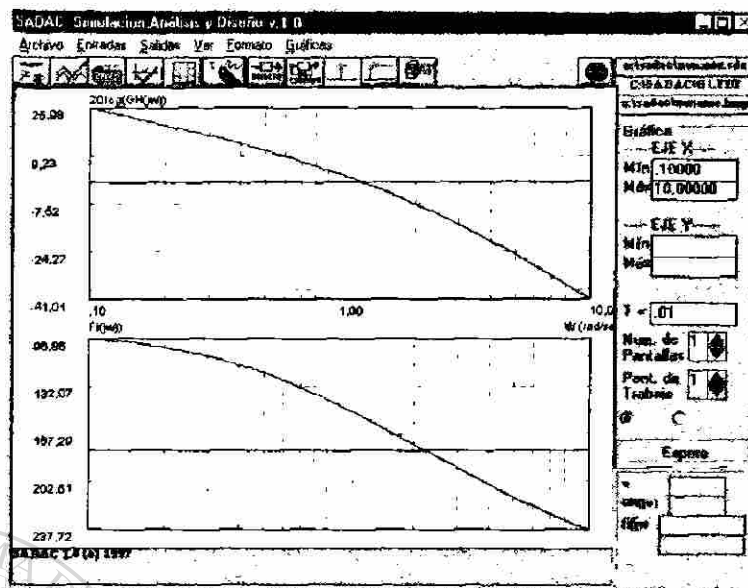


Fig. D.31 Diagramas de Bode de Lazo Abierto para $GH(s) = \frac{24}{s(s+2)(s+6)}$

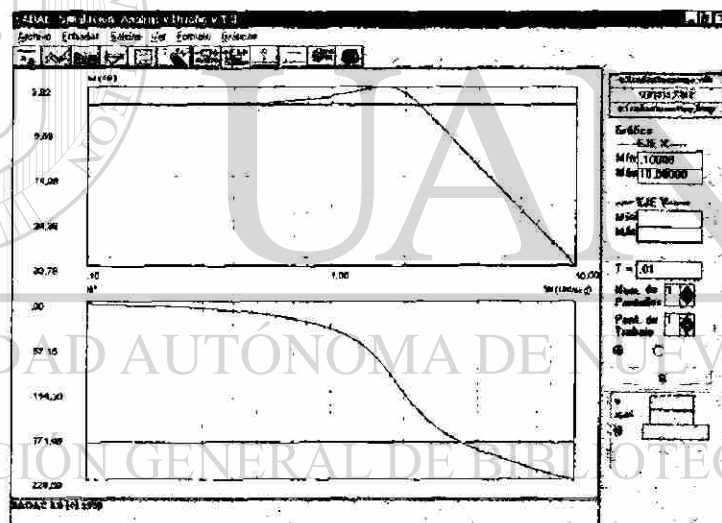


Fig. D.32 Diagramas de Bode de Lazo Cerrado, para $GH(s) = \frac{24}{s(s+2)(s+6)}$

D.3.9 Ventanas

La Figura D.33 muestra cómo dividir la región de trabajo de la pantalla principal. Cada una de las ventanas podrá usar todas las opciones disponibles para definir las gráficas, las cuales se han mencionado con anterioridad. Las pantallas se manejan desde la parte inferior de la barra vertical, la cual está colocada en la parte derecha de la pantalla principal.

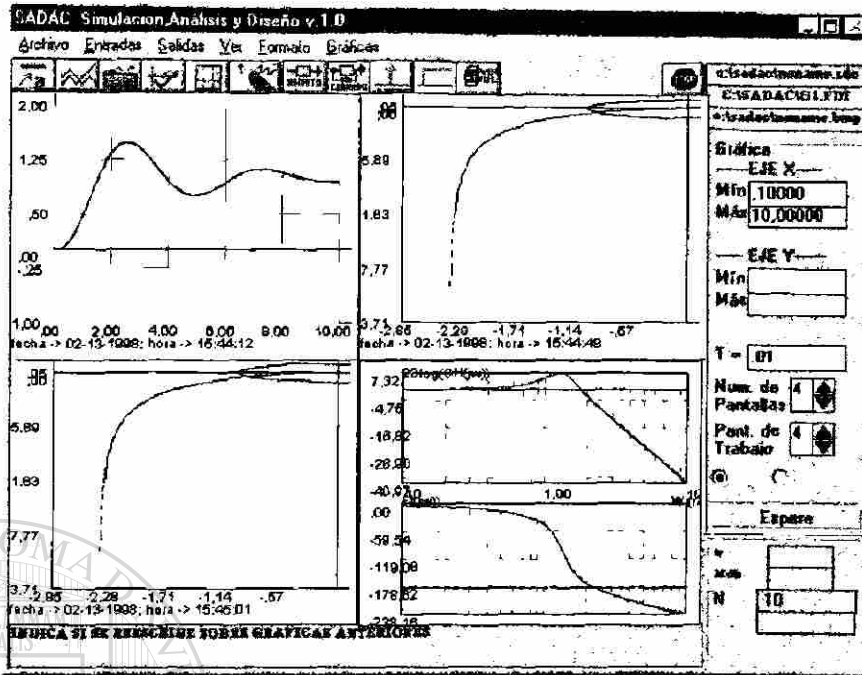


Fig. D.33 División en ventanas de la Región de Trabajo.

D.3.10 Graficación Múltiple

Con esta opción se pueden tener, usando en los mismos ejes de coordenadas, gráficas de respuesta en el tiempo para varias funciones de transferencia, o se pueden mostrar varias respuestas de un mismo sistema de control, como puede observarse en la Figura D.33 bis.

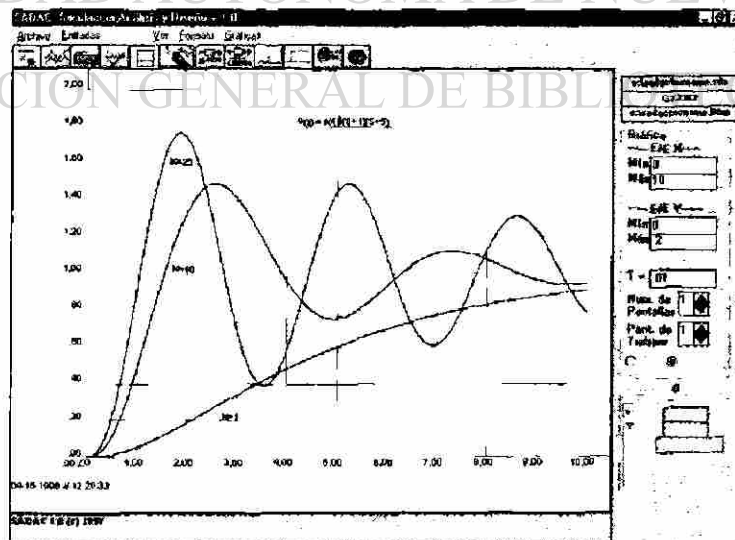


Fig. D.33 bis Opción de Graficación Múltiple.

D.4 Ejemplos de uso del Programa SADAC

Para facilitar el manejo del Programa SADAC se presenta una serie de ejemplos que muestran el uso de la mayor parte de las opciones y tareas del Programa.

D.4.1 Respuesta en el Tiempo y Simulación

Para este par de opciones la diferencia estriba en que en *la Gráfica de la Respuesta en el Tiempo* aparecen todos los puntos al mismo tiempo (graficado tipo batch) y en *la Gráfica de la Simulación* los puntos aparecen el momento en que se están generando. Además se tienen opciones, dependiendo del tipo de entrada, para sistemas SISO (una sola entrada una sola salida) se necesita describir el sistema bajo estudio por medio de una función de transferencia y para un sistema MIMO (varias entradas y varias salidas) se describe al sistema por medio de matrices y vectores de la ecuación de variables de estado y de salida.

Como ejemplo del caso de *Simulación y/o Respuesta* en el tiempo para sistemas SISO (una sola entrada una sola salida) se usa la función de transferencia siguiente:

$$G_1(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+5)} \quad (D.1)$$

En la Figura D.34 se muestra el procedimiento para introducir la función de transferencia al programa SADAC.

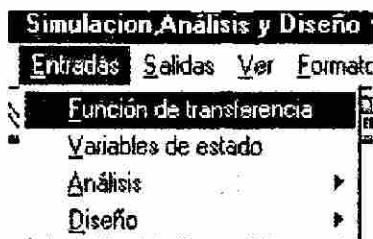


Fig. D.34. Menú para cargar la Función de Transferencia.

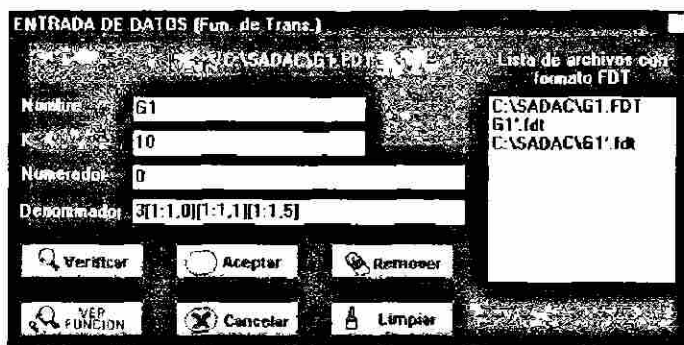


Fig. D.34. Pantalla para cargar la Función de Transferencia, (Continuación).

Para obtener la representación gráfica se selecciona el menú de gráficas y se escoge la opción *Respuesta en el Tiempo o Simulación*, Figura D.35, con la cual se obtendrá un desplegado como se muestra en la Figura D.36.

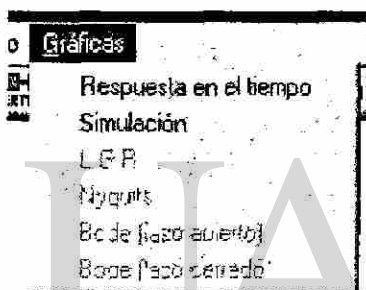


Fig. D.35 Menú para seleccionar el tipo de gráfica

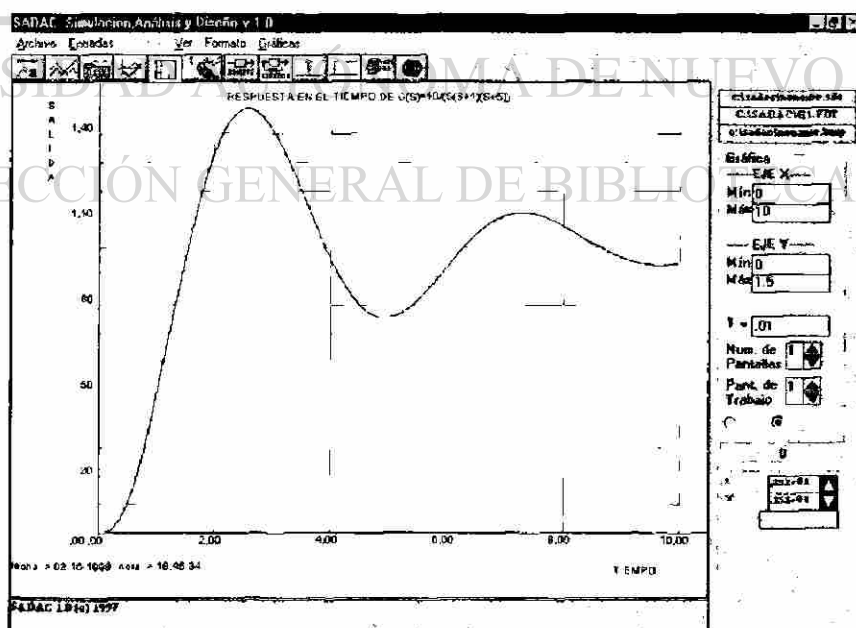


Fig. D.36 Gráfica de Respuesta en el Tiempo.

Para ilustrar el caso de Simulación y/o Respuesta en el Tiempo para sistemas MIMO (varias entradas - varias salidas) se puede sea el sistema mecánico de la Figura D.37.

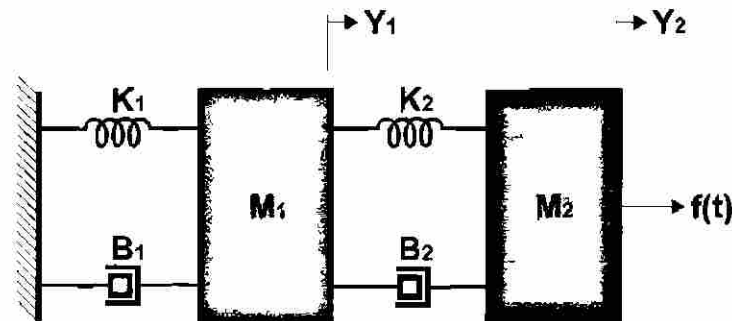


Fig. D.37 Sistema Mecánico Masa-Resorte-Amortiguador.

Como variables de estado para este caso se proponen las variables de (D.2).

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1(t) \\ x_2 &= y_2(t) \\ x_3 &= \frac{dy_1(t)}{dt} \\ x_4 &= \frac{dy_2(t)}{dt} \end{aligned} \quad (D.2)$$

entonces las ecuaciones de estado son las representadas por (D.3).

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \\ \dot{x}_3 &= -\frac{1}{M_1}(K_1 + K_2)x_1 + \frac{K_2}{M_1}x_2 - \frac{1}{M_1}(B_1 + B_2)x_3 + \frac{B_2}{M_1}x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{K_2}{M_2}x_1 - \frac{K_2}{M_2}x_2 + \frac{B_2}{M_2}x_3 - \frac{B_2}{M_2}x_4 + \frac{f(t)}{M_2} \end{aligned} \quad (D.3)$$

en forma matricial el sistema de ecuaciones se representa por (D.4).

$$\dot{x} = Px + Br \quad (D.4)$$

$$y = Lx$$

donde

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{M_1}(K_1 + K_2) & \frac{K_2}{M_1} & -\frac{1}{M_1}(B_1 + B_2) & \frac{B_2}{M_1} \\ \frac{K_2}{M_2} & -\frac{K_2}{M_2} & \frac{B_2}{M_2} & -\frac{B_2}{M_2} \end{bmatrix},$$

(D.5)

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1}{M_2} \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad r = f(t), \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Con valores de los parámetros:

$$\begin{aligned} K_1 &= 500,000 & B_1 &= 15,020 & M_1 &= 320 \\ K_2 &= 80,000 & B_2 &= 350 & M_2 &= 2,500 \\ f(t) &= 50,000 \end{aligned}$$

Se obtienen las matrices siguientes

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1812.5 & 250 & -48.97 & 1.093 \\ 32 & -32 & 0.14 & -0.14 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0004 \end{bmatrix}$$

(D.6)

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad X(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f(t) = 500,000$$

En la Figura D.38 se muestra el procedimiento para cargar las Variables de Estado en el programa SADAC.

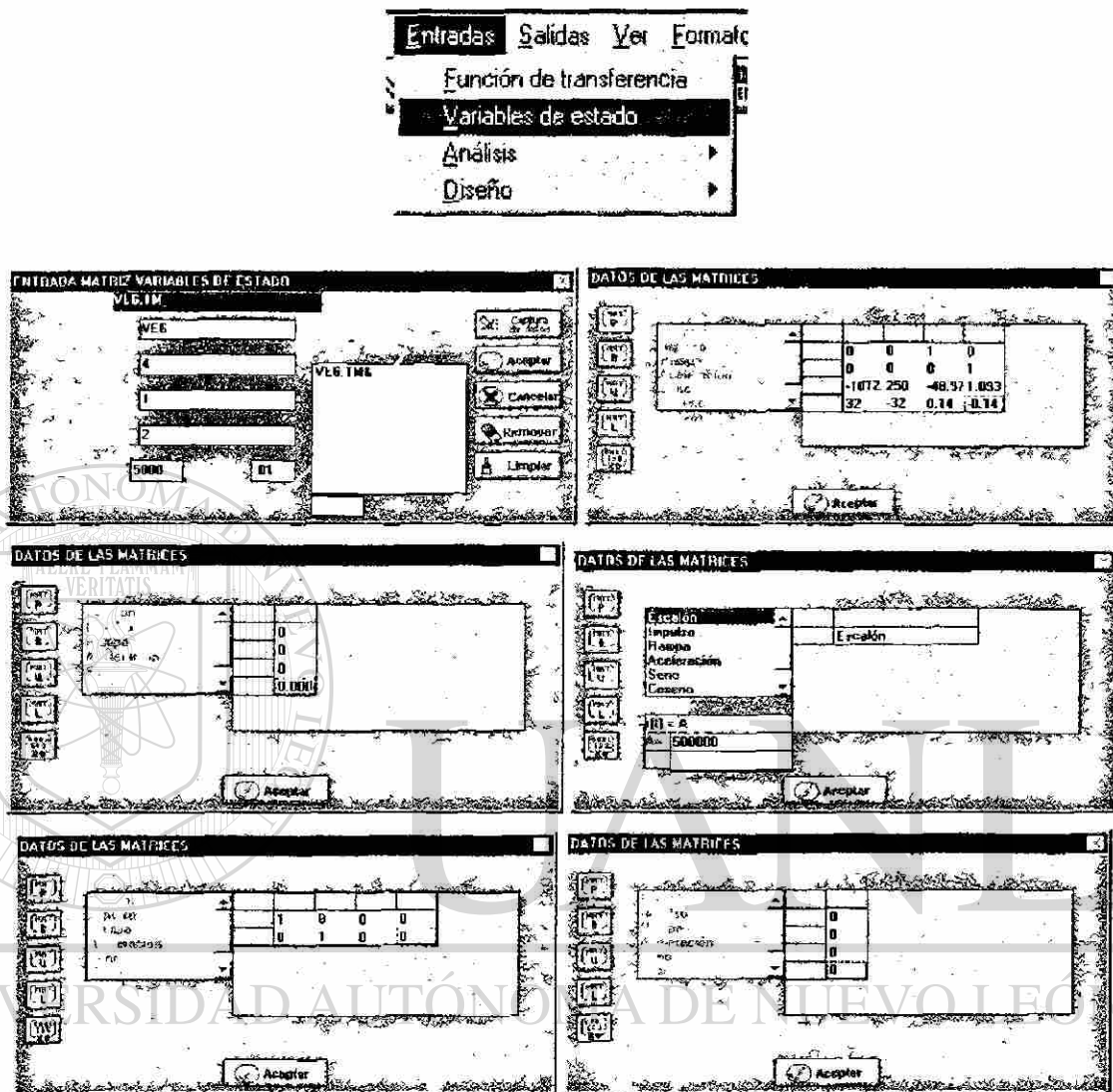


Fig. D.38 Menú de entradas, opción variables de Estado.

Después de introducir las variables de estado se seleccionan las salidas que se desea graficar, de acuerdo a la lista que se muestra en la Figura D.39. La Figura D.40 muestra en sus ventanas las gráficas de las dos salidas para el ejemplo.

Nota: Las gráficas de la Figura D.36 fueron editadas cambiando las escalas originales, se agregó la cuadrícula y los letteros. Para la Figura D.40 la edición consistió en cambiar las escalas originales. Es pertinente recordar que podrían haber sido cambiados los colores originales, los tipos y tamaños de letras, o bien los tipos de líneas en la cuadrícula.

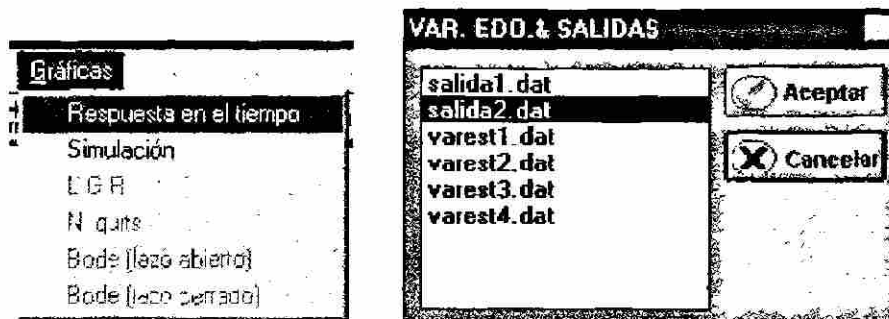


Fig. D.39 Menú y Pantalla Auxiliar para seleccionar la salida a graficar.

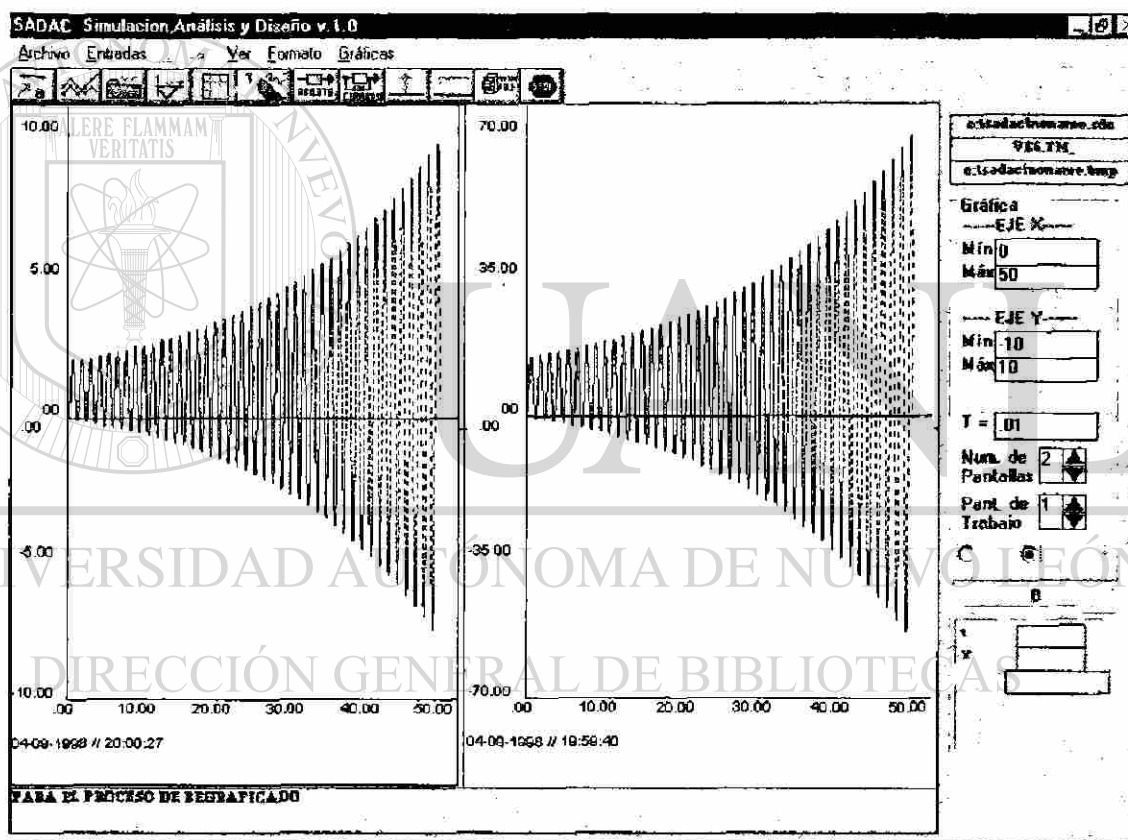


Fig. D.40 Gráficas de las dos salidas seleccionadas.

D.4.2 Análisis en el Dominio del Tiempo

Se presenta el análisis en el dominio del tiempo para la función de transferencia dada en (D.1). Se requiere un 20% de sobrepaso. Este análisis se lleva a cabo suponiendo polos

dominantes y encontrando el punto de operación en la gráfica del lugar geométrico de las raíces, calculando la ganancia en dicho punto, la razón de amortiguamiento y la frecuencia natural. Así se requiere construir el Lugar Geométrico de las Raíces y se necesitan los siguientes datos: Rango de K (0-40), el incremento de K que se establece como 0.1, % de aproximación a β real como 1% y la exactitud para la estabilidad se fija en un 2 %.

Para llevar a cabo el análisis en el dominio del tiempo primero se carga la función de transferencia, el procedimiento se muestra en la Figura D.34. A continuación se cargan los datos para el análisis en el dominio del tiempo, ver la Figura D.41.



Fig. D.41 Carga de datos para Análisis en el Dominio del Tiempo.

Como resultados del análisis en el dominio del tiempo se puede obtener la gráfica del Lugar Geométrico de las Raíces, Figura D.42, y a partir de esa gráfica se obtienen los valores de la ganancia, la frecuencia natural, la razón de amortiguamiento. Los tiempo transitorios, el % de sobrepaso y el % de error de estado estable tal como se muestra en la pantalla auxiliar de la Figura D.43. De la misma manera se puede obtener la gráfica de la respuesta en el tiempo, y comprobar los resultados de la Figura D.44.

Nota: Los resultados mostrados en la pantalla, Figura D.43, pueden ser comprobados con mediciones con el cursor sobre las gráficas del Lugar Geométrico de las Raíces, esto sobre la Figura D.42 y en la gráfica de respuesta en el tiempo, Figura D.44.

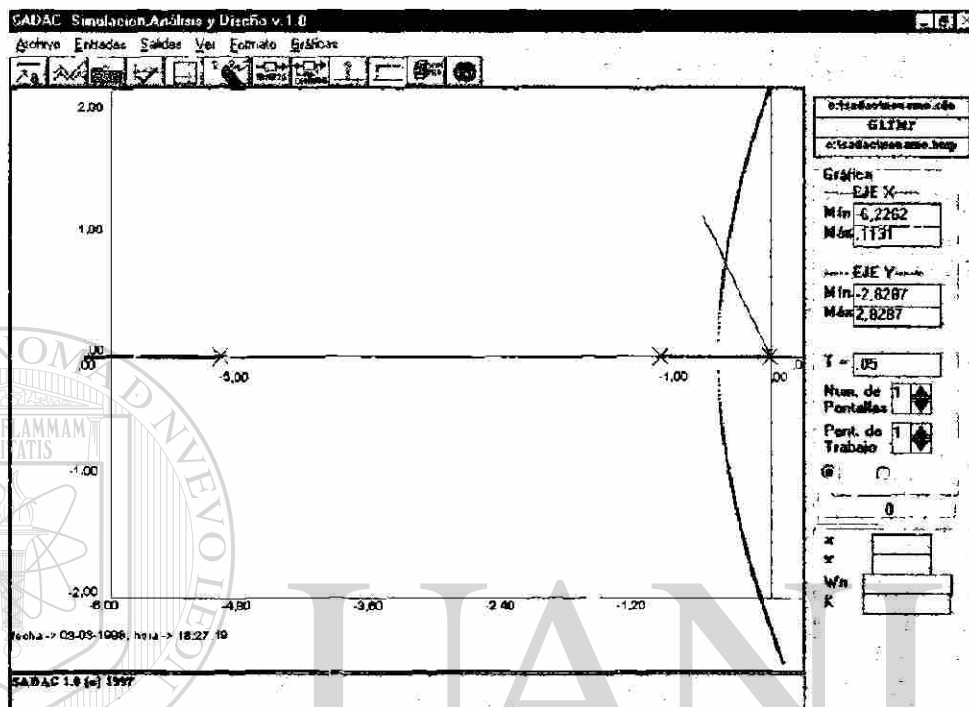


Fig. D.42 Lugar Geométrico de las Raíces, Función de Transferencia del ejemplo.

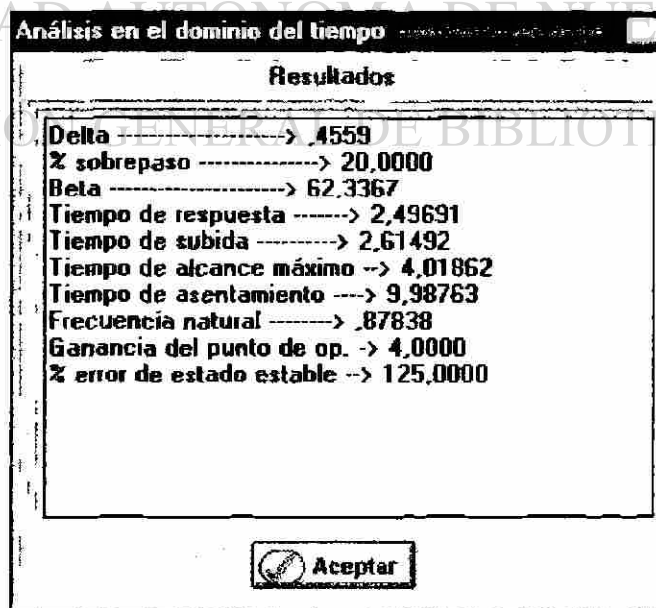


Fig. D.43 Resultados de Análisis en el Dominio del Tiempo, para el Ejemplo.

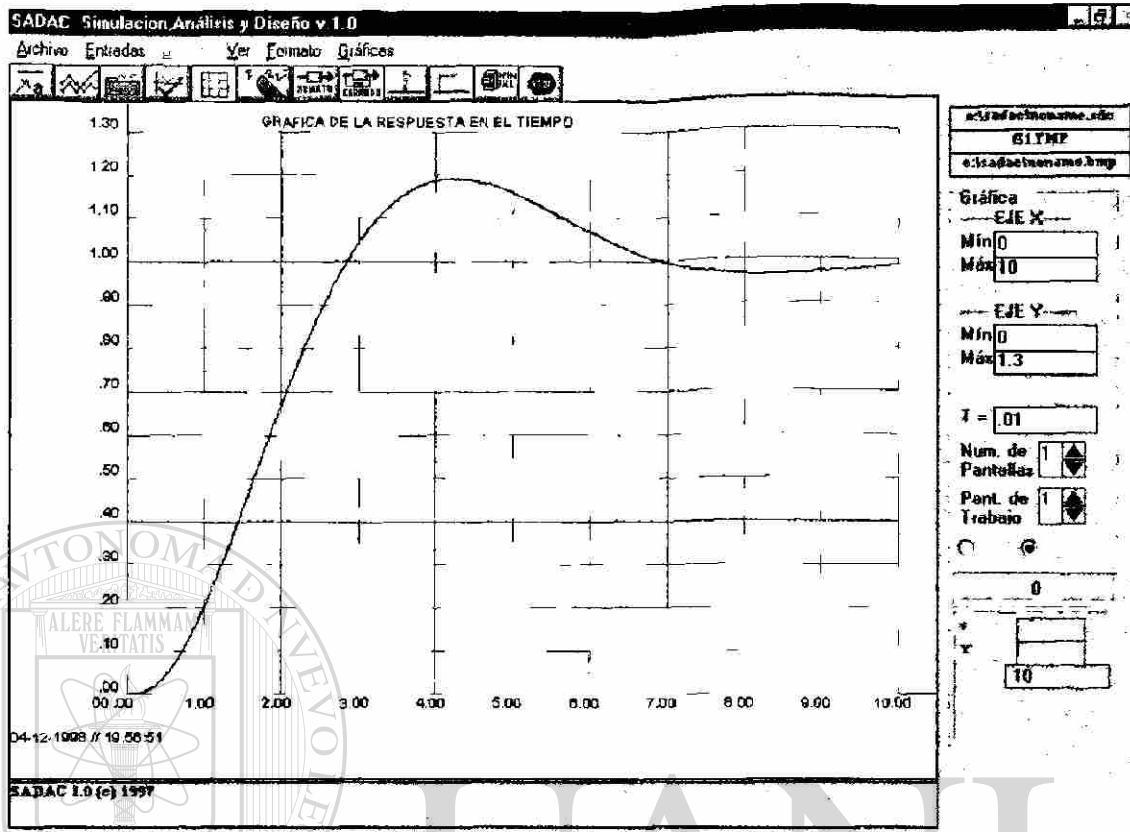


Fig. D.44 Gráfica de Respuesta en el Tiempo, sistema del Ejemplo.

D.4.3 Análisis en el Dominio de la Frecuencia

Como ejemplo se puede efectuar el análisis en el dominio de la frecuencia para la función de transferencia de (D.7). El análisis se lleva a cabo aplicando el criterio de Nyquist a los diagramas polares de Nyquist, y sobre los diagramas en coordenadas rectangulares semilogarítmicas llamados diagramas de Bode de Lazo Abierto. También se hace un estudio de resonancia en los diagramas de Bode de Lazo Cerrado.

$$GH(s) = \frac{24}{s(s+2)(s+6)} \quad (D.7)$$

Para iniciar el análisis se introduce la función de transferencia de (D.7) como se muestra en la Figura D.45, y se selecciona a través del menú el análisis en el dominio de la frecuencia.

Se deben establecer, por medio de la pantalla auxiliar correspondiente, los rangos de frecuencia de trabajo y el número de puntos a graficar, como se muestra en la Figura D.46.

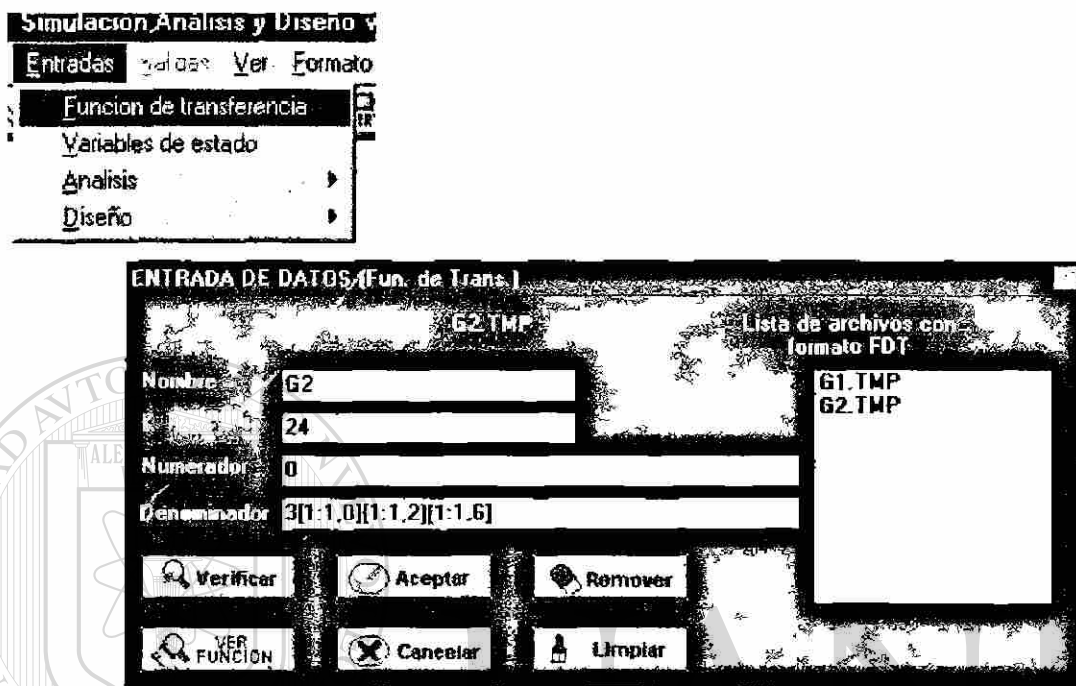


Fig. D.45 Carga de la Función de Transferencia para el ejemplo de Análisis en el Dominio de la Frecuencia.

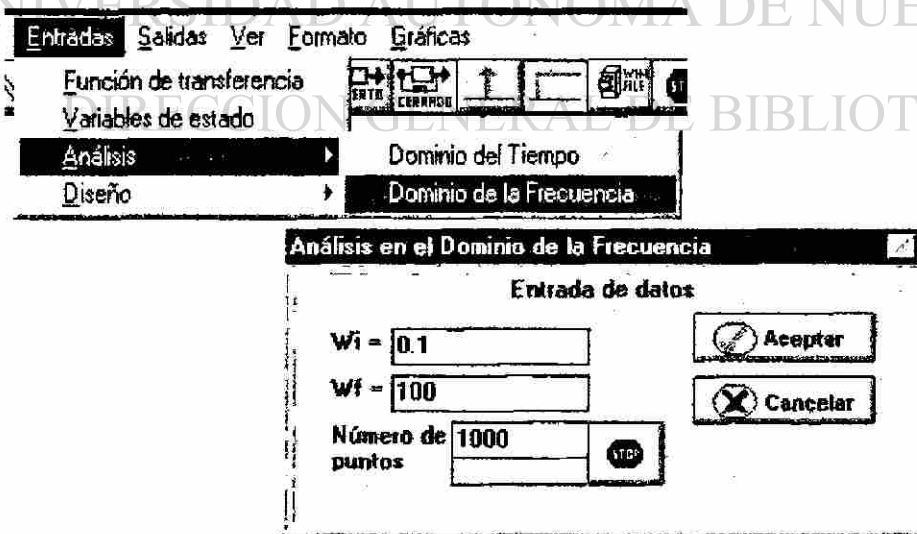


Fig. D.46 Carga de datos para Análisis en el Dominio de la Frecuencia.

Los resultados del análisis en el dominio de la frecuencia se obtienen por medio de una pantalla auxiliar, como se muestra en la Figura D.47; el margen de fase MF, el margen de ganancia MG, la frecuencia de cruce ω_c , el ancho de banda $\omega_1 - \omega_2$, la frecuencia de resonancia ω_R , y el máximo alcance de resonancia M_{max} .

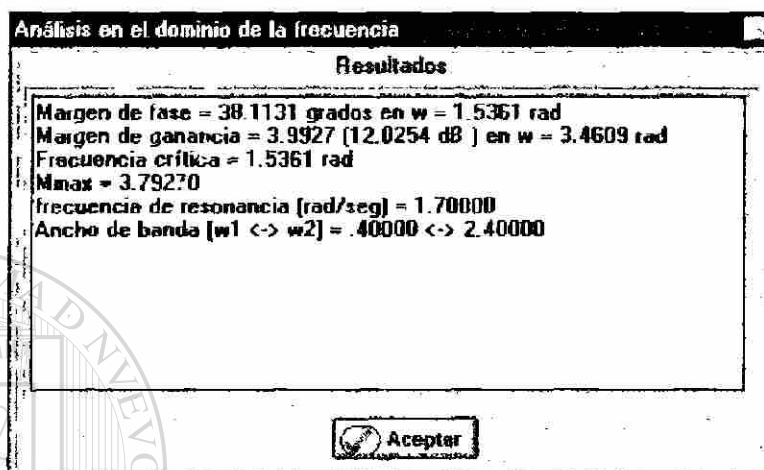


Fig. D.47 Salida del Análisis en el Dominio de la Frecuencia.

También pueden obtenerse como salidas, en el análisis en el dominio de la frecuencia, la tabulación y la gráfica polar de Nyquist. Las Figuras D.48 y D.49 muestran la tabulación y los diagramas de Bode de lazo abierto, respectivamente. La tabulación y los diagramas de Bode de lazo cerrado, se muestran en las figuras D.50 y D.51, respectivamente.

Tabulación Nyquist

	w (rad/seg)	GH(jw)	FGH(jw)
1	.10000	19.97227	-93.81725
2	.20000	9.94485	-97.61975
3	.30000	6.58468	-101.39317
4	.40000	4.89204	-105.12401
5	.50000	3.86717	-108.79989
6	.60000	3.17691	-112.40984
7	.70000	2.67857	-115.94447
8	.80000	2.30083	-119.39605
9	.90000	2.00407	-122.75851
10	1.00000	1.76452	-126.02737
11	1.10000	1.56700	-129.19965
12	1.20000	1.40140	-132.27369
13	1.30000	1.26066	-135.24899

CERRAR

Fig. D.48 Tabulación de Nyquist como salida del Análisis en el Dominio de la Frecuencia.

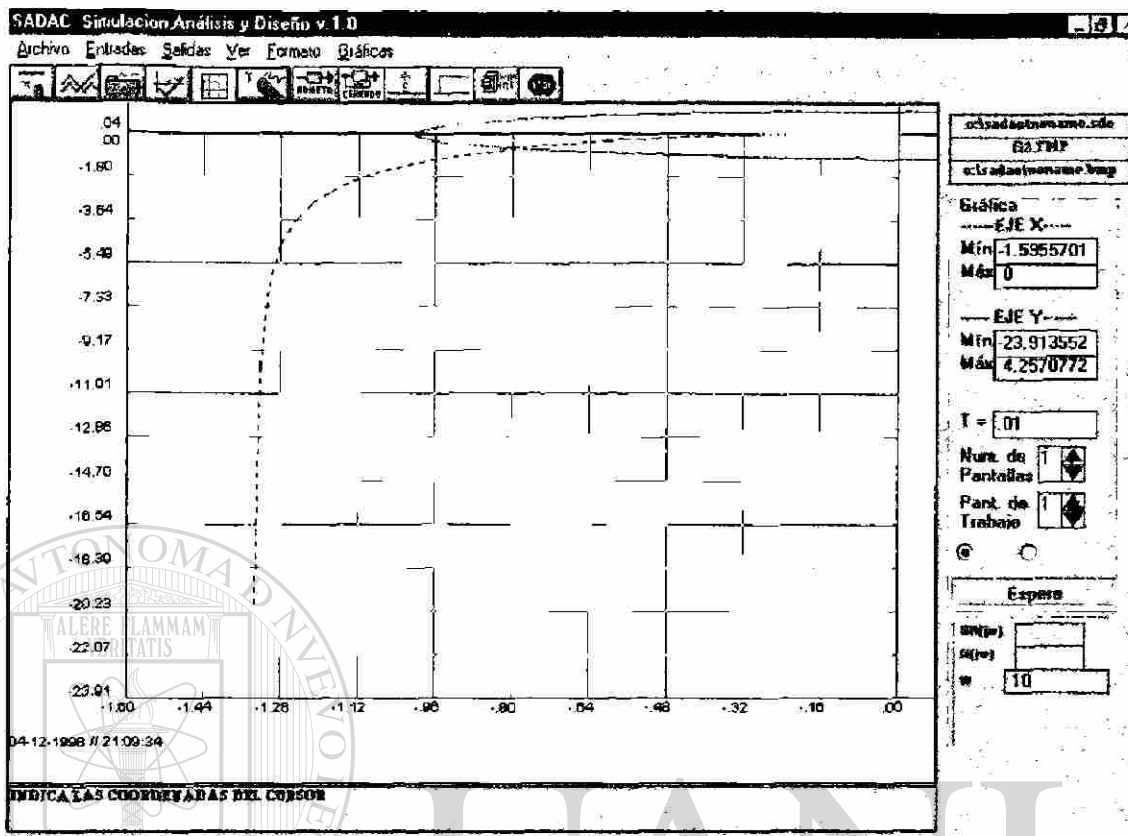


Fig. D.49 Gráfica Polar de Nyquist, salida del Análisis en el Dominio de la Frecuencia.

Tabulación de Bode (lazo abierto)			
	ω (rad/seg)	GH(ω) (dB)	Flgh(ω)
1	10000	26,00861	-93,81725
2	20000	19,95201	-97,61975
3	30000	16,37073	-101,39317
4	40000	13,78984	-105,12401
5	50000	11,74788	-108,79989
6	60000	10,04012	-112,40984
7	70000	8,55808	-115,94447
8	80000	7,23771	-119,39605
9	90000	6,03828	-122,75851
10	1,00000	4,93252	-126,02737
11	1,10000	3,90141	-129,19965
12	1,20000	2,93126	-132,27369
13	1,30000	2,01198	-135,24899

CERRAR

Fig. D.50 Tabulación de Bode de Lazo Abierto, Análisis en el Dominio de la Frecuencia.

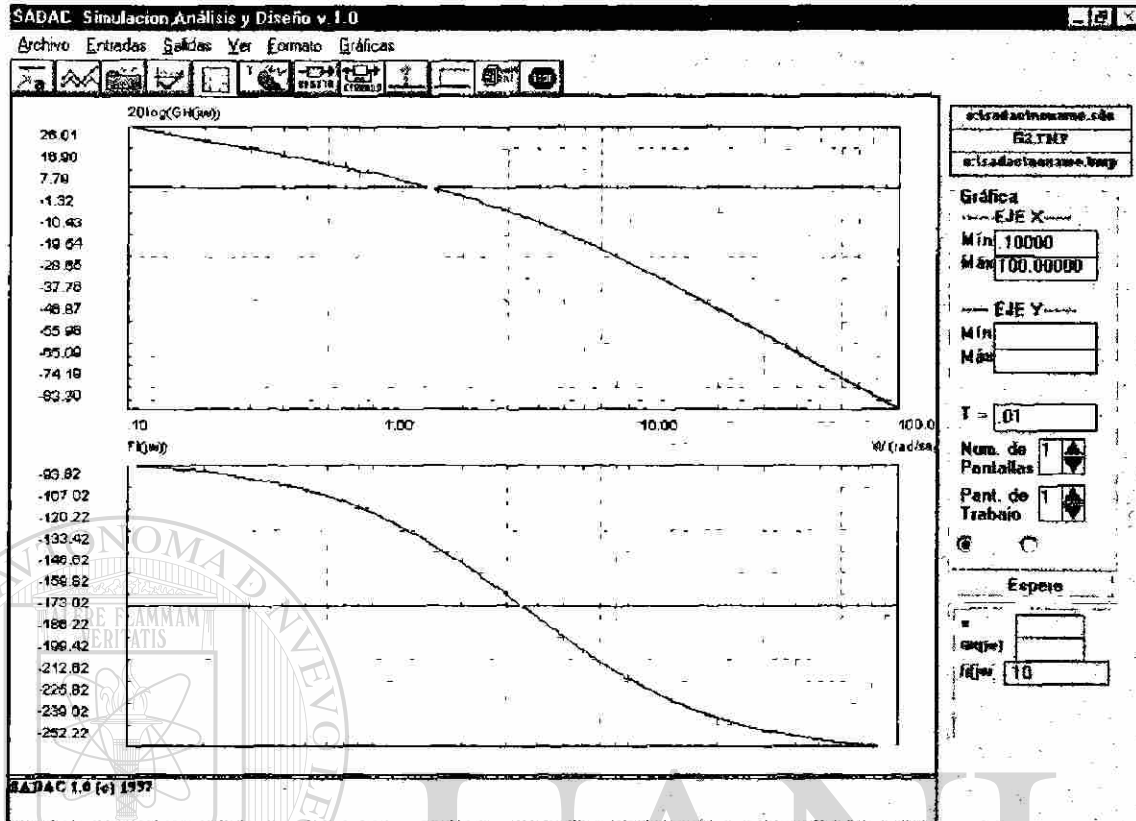


Fig. D.51 Diagramas de Bode de Lazo Abierto, salida del Análisis en el Dominio de la Frecuencia.

Tabulación de Bode (lazo cerrado)			
	w (rad/seg)	Mdb	N
1	10000	.01810	-2.8694
2	.20000	.07250	-5.7680
3	.30000	.16345	-8.7256
4	.40000	.29134	-11.7748
5	.50000	.45661	-14.9519
6	.60000	.65966	-18.2979
7	.70000	.90064	-21.8629
8	.80000	1.17913	-25.7040
9	.90000	1.49363	-29.8917
10	1.00000	1.84082	-34.5086
11	1.10000	2.21428	-39.6532
12	1.20000	2.60283	-45.4372
13	1.30000	2.98818	-51.9775

CERRAR

Fig. D.52 Tabulación de Bode de Lazo Cerrado, del Análisis en el Dominio de la Frecuencia.

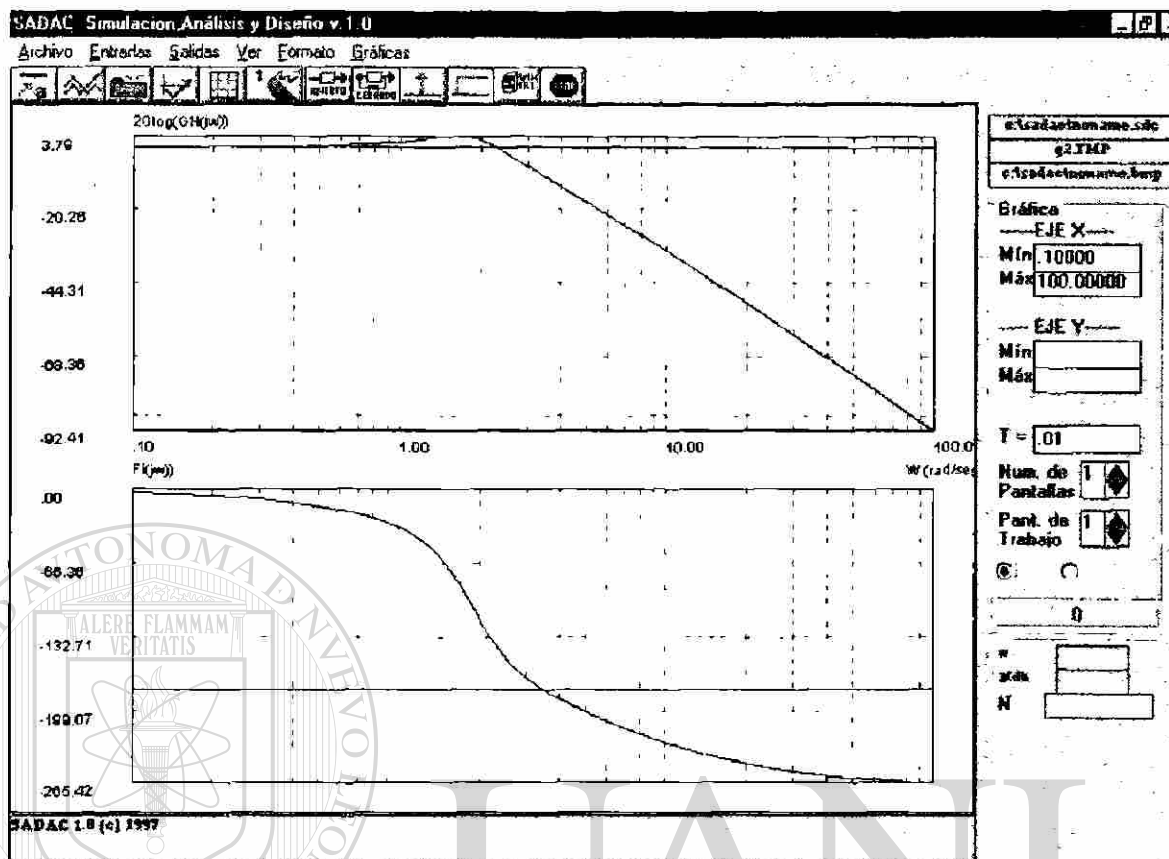


Fig. D.53 Diagramas de Bode de Lazo Cerrado, del Análisis en el Dominio de la Frecuencia.

Nota: Los resultados mostrados en la pantalla auxiliar de la Figura D.47 pueden ser comprobados manipulando las tabulaciones de las Figuras D.48, D.50 y D.52 o bien haciendo mediciones con el cursor en las gráficas de las Figuras D.49, D.51 y D.53.

D.4.4 Diseño en el Dominio del Tiempo, Compensación en la Rama Directa

Para llevar a cabo un diseño efectivo en el dominio del tiempo con compensación en la rama directa se necesita utilizar varias de las opciones del Programa SADAC. Para mostrar lo anterior se presenta un ejemplo.

Planteamiento del Problema: Se desea diseñar, en el dominio del tiempo y con compensación en la rama directa, un sistema de control automático con retroalimentación

unitaria. La Figura D.54 representa el esquema deseado cuya función de transferencia en la rama directa es:

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+5)} \quad (D.8)$$

y se establecen los requerimientos siguientes: que tenga un % de sobrepaso de 20%, un tiempo de respuesta T_r , menor a 0.5 seg., un tiempo de subida T_p , menor a 0.8 seg., un tiempo de alcance máximo T_a , menor a 1.3 seg., un tiempo de asentamiento T_s , menor a 3 seg., y un % de error de estado estable e_{ss} menor a un 2%.

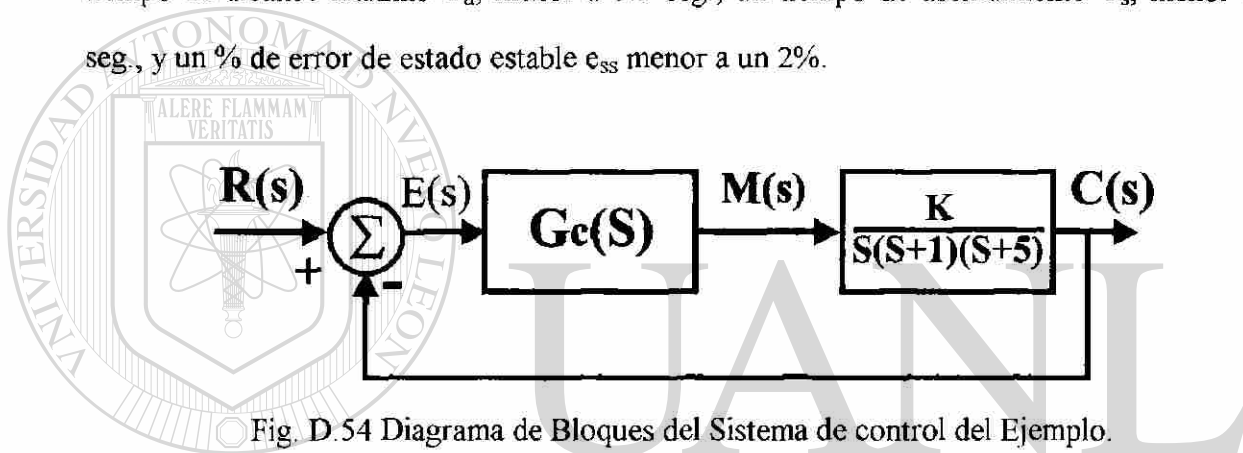


Fig. D.54 Diagrama de Bloques del Sistema de control del Ejemplo.

Después de planteado el problema se prepara su solución y se planea como resolverlo con el programa SADAC. ®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Planeación para la Realización: en este paso se detalla el procedimiento a seguir, a fin de que el sistema de control en cuestión cumpla con los requerimientos y especificaciones. El primer paso es que a partir de la función de transferencia de lazo abierto $GH(s)$, (D.9), se construye el Lugar Geométrico de las Raíces y con la razón de amortiguamiento calculada usando el % de sobrepaso, se localiza el punto de operación midiendo su ganancia K y la frecuencia natural ω_R . Con los valores anteriores se calcula el tiempo de respuesta T_r , el tiempo de subida T_p , el tiempo de alcance máximo T_a , el tiempo de asentamiento T_s , y el error de estado estable e_{ss} . Los valores calculados se comparan con los requerimientos y si cumple

con todos no se requiere realizar ninguna compensación adicional. Pero, si cumple con los tiempos transitorios y no con el error, la compensación será parcial agregando únicamente un controlador PI. Si se cumple con el error de estado estable y no se satisface los tiempos transitorios se realizará otra compensación parcial agregando sólo un controlador PD. Si no se cumple con ninguno de los requerimientos establecidos es necesario efectuar una compensación total, agregando los dos tipos de controladores anteriores lo cual se pueden fácilmente reducir a un solo compensador PID.

$$GH(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+5)} \quad (D.9)$$

Planeación de la Ejecución con el Programa SADAC: Se debe idear un procedimiento para realizar, en computadora digital y con el uso del programa SADAC, lo planeado en el inciso anterior.

Como primer paso para lograr el diseño en el dominio del tiempo usando compensación en la rama directa se carga la función de transferencia de lazo abierto $GH(s)$, (D.9). Como segundo paso se seleccionan y alimentan los datos para el análisis preliminar en el dominio del tiempo: % de sobrepaso = 20 %, rango de variación de la ganancia del sistema K ($K_{\min} - K_{\max} = 0 - 40$), el incremento de la ganancia del sistema K ($\Delta K = 0.1$), la tolerancia en la exactitud del ángulo de amortiguamiento β (1 %), la tolerancia de oscilación alrededor del valor final deseado para que se considere estable (2 %). Como tercer paso se obtienen las salidas del análisis en el dominio del tiempo, la gráfica de respuesta en el tiempo y la gráfica del Lugar Geométrico de las Raíces en caso de desear comprobar los resultados del análisis.

Si después de ejecutar los pasos anteriores se tiene que el sistema no cumple con alguno de los requerimientos se procede a ejecutar un cuarto paso el cual consiste en cargar los datos para diseño en el dominio del tiempo compensación en la rama directa: % de sobrepaso (20 %), rango de variación de la ganancia del sistema K ($K_{\min} - K_{\max} = 0 - 40$), el incremento de la ganancia del sistema K ($\Delta K = 0.1$), la tolerancia en la exactitud del ángulo de

amortiguamiento β (1 %), la tolerancia de oscilación alrededor del valor final deseado para considerarse estable (2 %), tiempo de respuesta $T_r < 0.5$ seg., tiempo de subida $T_p < 0.8$ seg., tiempo de alcance máximo $T_a < 1.3$ seg., tiempo de asentamiento $T_s < 3$ seg., % de error de estado estable $\% e_{ss} < 2$ %. Como quinto paso se tiene ver los resultados de la compensación y comprobarlos con las gráficas de respuesta en el tiempo y del Lugar Geométrico de las Raíces, las cuales son obtenidas a partir de la función de transferencia generada por el programa. Una vez realizados esta serie de pasos se da por terminado el diseño en el dominio del tiempo con compensación en la rama directa.

Ejecución con el Programa SADAC: Se siguen los pasos del inciso anterior. Como primer paso se alimenta la función de transferencia de lazo abierto $GH(s)$, (D.9) tal como se muestra en la Figura D.55. El segundo paso consiste en suministrar los datos para el análisis preliminar en el dominio del tiempo, como se muestra en la Figura D.56.

The image shows a software interface for entering transfer function data. At the top, there is a menu bar with 'Entradas', 'Salidas', 'Ver', and 'Format'. The 'Entradas' menu is open, showing a list of options: 'Función de transferencia', 'Variables de estado', 'Análisis', and 'Diseño'. Below the menu, the main window is titled 'ENTRADA DE DATOS (Fun. de Trans.)'. It contains several input fields: 'Nombre' with the value 'GH(S)', 'Numerador' with the value '0', and 'Denominador' with the value '3[1:1.0][1:1.1][1:1.5]'. To the right of these fields is a list box titled 'Lista de archivos con formato FDT' containing the file 'GH(S).TMP'. At the bottom of the window, there are six buttons: 'Verificar', 'Aceptar', 'Remover', 'VER FUNCION', 'Cancelar', and 'Limpiar'.

Fig. D.55 Carga de la Función de Transferencia, Sistema de Control del Ejemplo.

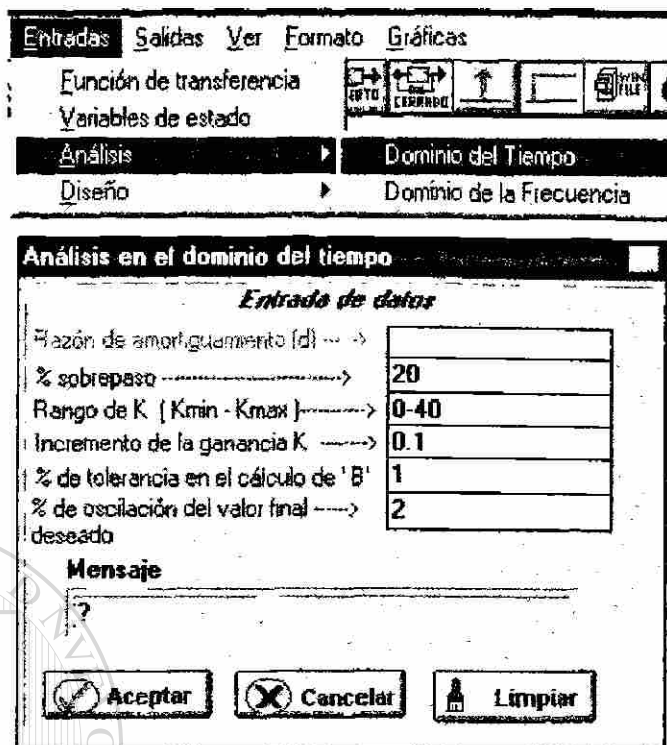


Fig. D.56 Alimentación de Datos para Análisis en el Dominio del Tiempo.

Como tercer paso se tiene el visualizar los resultados del análisis en el dominio del tiempo, esto se lleva a cabo usando el menú mostrado en la Figura D.57, y se comprueba con las gráficas de respuesta en el tiempo y del Lugar Geométrico de las Raíces Figura D.58.

Como puede observarse en la Figura D.57 el sistema no cumple con los requerimientos establecidos, por lo tanto, se debe continuar con el cuarto paso y cargar los datos para efectuar el diseño en el dominio del tiempo con compensación en la rama directa, como se muestra en la Figura D.59.

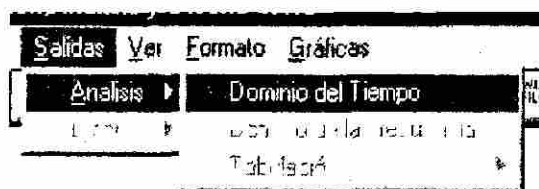


Fig. D.57 Selección de Salida de Análisis en el Dominio del Tiempo.

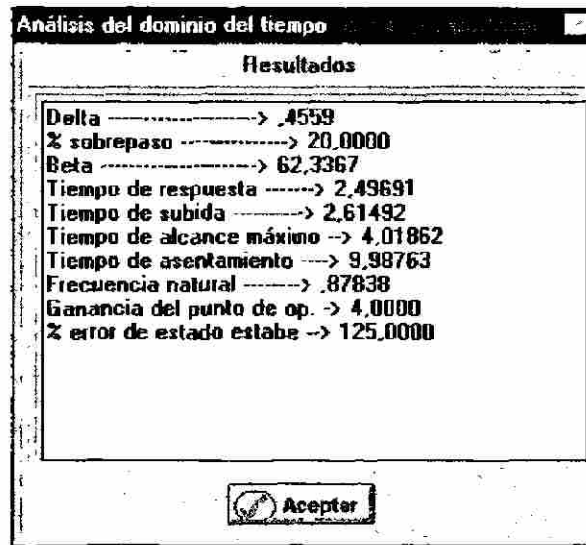


Fig. D.57 Salida de Análisis en el Dominio del Tiempo (Continuación).

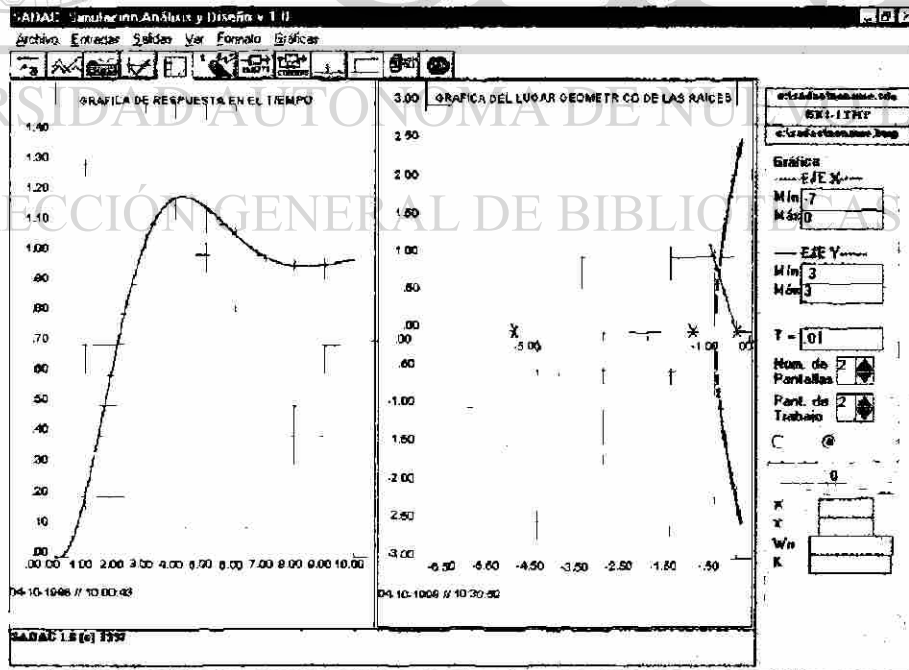
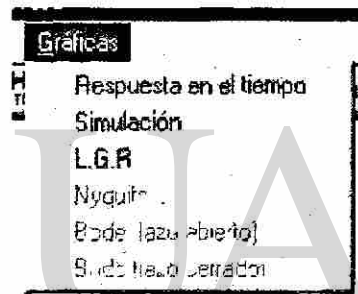
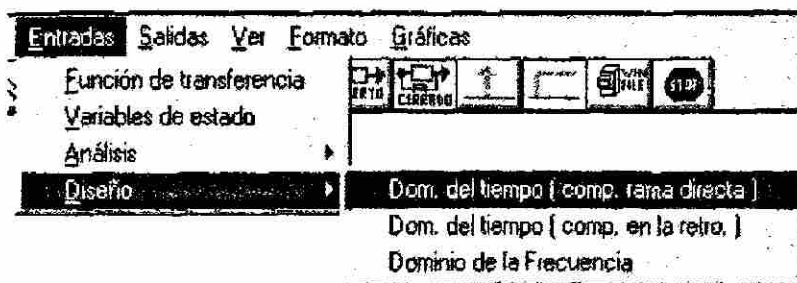


Fig. D.58 Respuesta en el Tiempo y Lugar Geométrico de las Raíces para Ejemplo.



Diseño en el Dominio del Tiempo: [comp. rama directa]

Entrada de datos

Coeficiente de amortiguamiento (ζ)		Tiempo de respuesta (T_r)	<	0.5
% sobrepaso	20	Tiempo de subida (T_p)	<	0.8
Rango de K ($K_{min} - K_{max}$)	0-40	Tiempo de alcance máx. (T_a)	<	1.3
Incremento de la ganancia K	0.1	Tiempo de asentamiento (T_s)	<	3
% de tolerancia en el cálculo de 'B'	1	% error de estab. estable ($\%E_{ss}$)	<	2
% de oscilación del valor final deseado	2			

Mensaje

?

Aceptar

Cancelar

Limpia

Fig. D.59. Alimentación de datos para Diseño en el Dominio del Tiempo, Compensación en la Rama Directa. ®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

De aquí se va al quinto paso es decir a ver los resultados de la compensación y la forma de la nueva función de transferencia la cual es generada por el programa considerando la compensación, Figura D.60. La comprobación se lleva a cabo con las gráficas de respuesta en el tiempo y con el Lugar Geométrico de las Raíces de la nueva función de transferencia del sistema ya compensado Figura D.61.

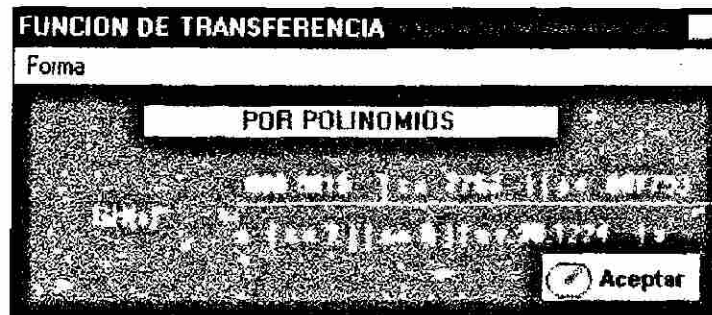
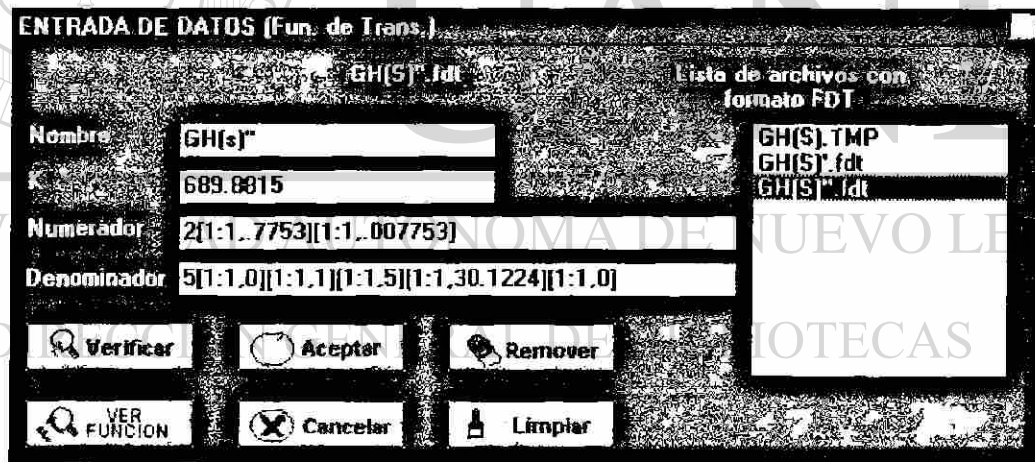
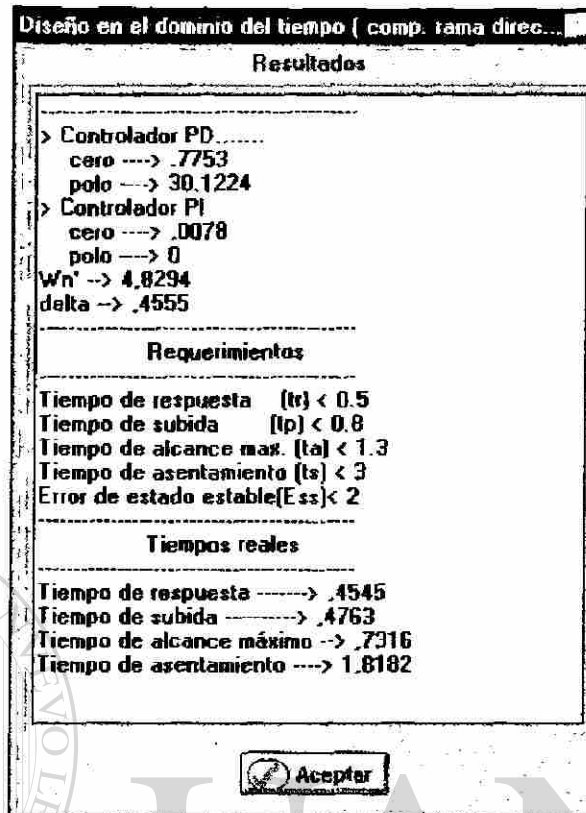


Fig. D.60 Salida de resultados y nueva Función de Transferencia generada por el Diseño en el Dominio del Tiempo con Compensación en la Rama Directa.

Nota: Los resultados de diseño en el dominio del tiempo con compensación en la rama directa Figura D.60, se pueden comprobar haciendo mediciones en las gráficas de respuesta en el tiempo y de Lugar Geométrico de las Raíces del sistema ya compensado, Figura D.61.

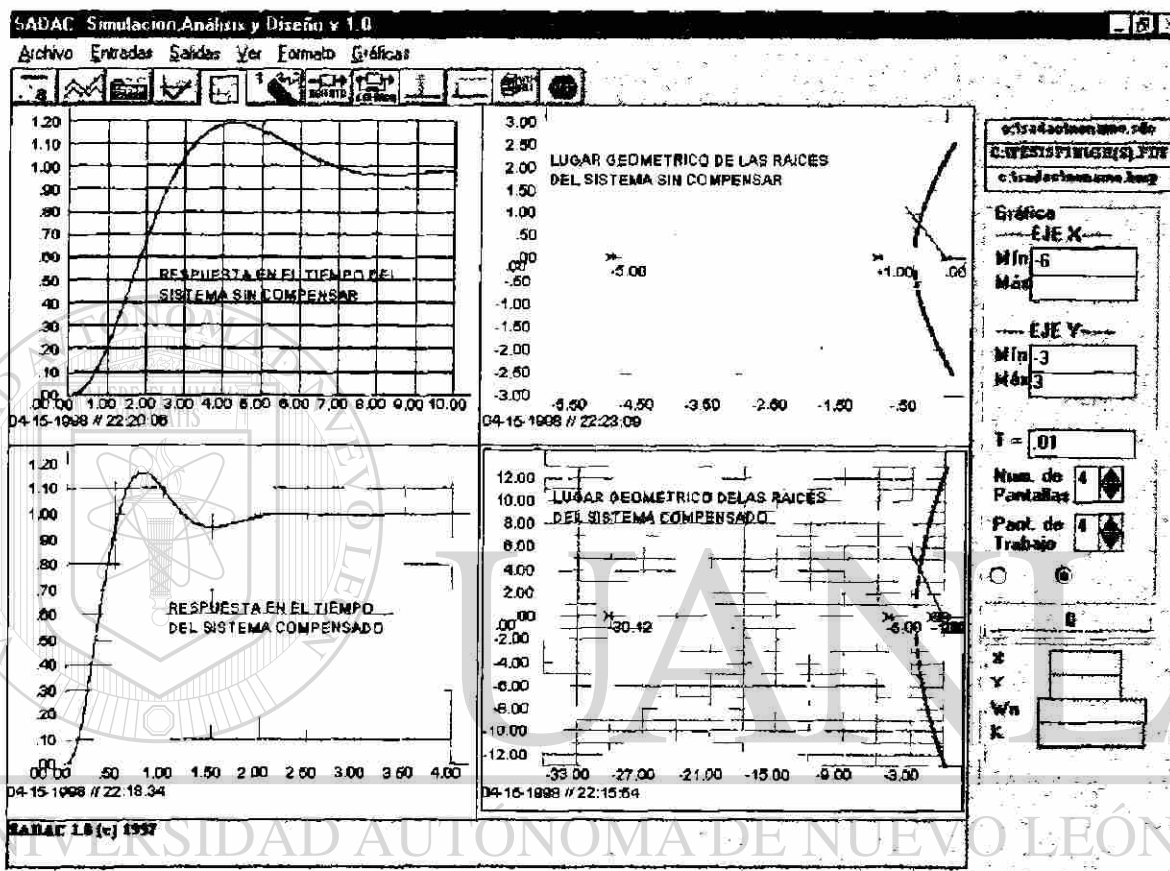


Fig. D.61 Respuesta en el Tiempo y Lugar Geométrico de las Raíces del Sistema sin Compensar y del sistema Compensado.

D.4.5 Diseño en el Dominio del Tiempo, Compensación en la Rama de Retroalimentación.

Para realizar un diseño efectivo en el dominio del tiempo con compensación en la rama de retroalimentación se necesita utilizar varias opciones del Programa SADAC; para mostrarlo se puede seguir el ejemplo anterior.

Planteamiento del Problema: Se desea diseñar en el dominio del tiempo con compensación en la rama de retroalimentación un sistema de control con retroalimentación unitaria y $K_t = 3$, Figura D.62, cuya función de transferencia de la rama directa está dada por (D.8) y se requiere que cumpla con los requerimientos siguientes: un % de Sobrepaso = 20 %, un tiempo de respuesta T_r , menor a 0.5 seg., un tiempo de subida T_p , menor a 0.8 seg., un tiempo de alcance máximo T_a , menor a 1.3 seg., un tiempo de asentamiento T_s , menor a 3 seg., y un % de error de estado estable e_{ss} , menor al 2 %. Una vez planteado el problema se debe planear la realización y la ejecución de las tareas con el programa SADAC.

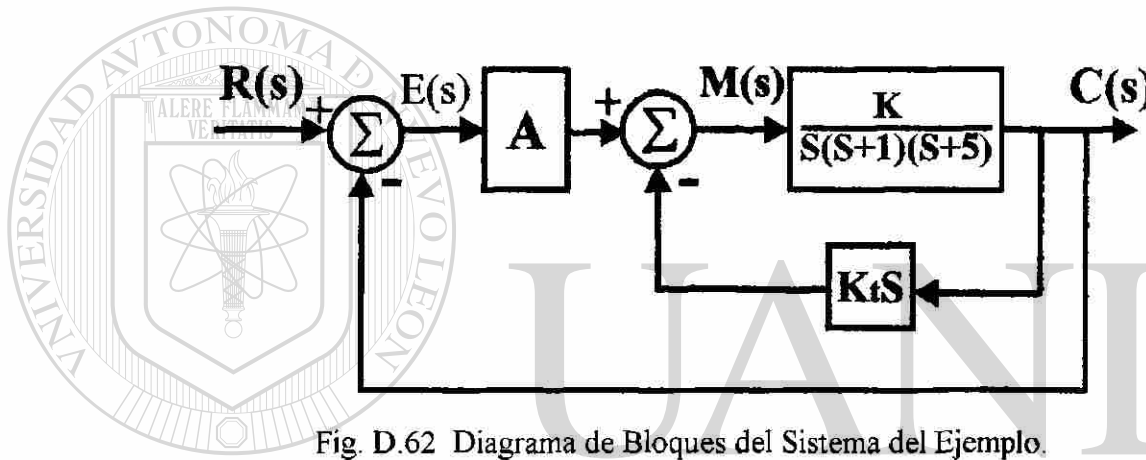


Fig. D.62 Diagrama de Bloques del Sistema del Ejemplo.

Planeación para la Realización: En esta etapa se detalla el procedimiento a seguir para lograr que el sistema de control cumpla con los requerimientos y especificaciones. El primer paso es que a partir de la función de transferencia de lazo abierto $GH(s)$, (D.9) se construye el Lugar Geométrico de las Raíces y con la razón de amortiguamiento que se calcula a partir del % de sobrepaso se localiza el punto de operación y se mide la ganancia K así como la frecuencia natural ω_n . Con los valores obtenidos se calculan el tiempo de respuesta T_r , el tiempo de subida T_p , el tiempo de alcance máximo T_a , el tiempo de asentamiento T_s , y el error de estado estable e_{ss} . Los valores calculados se comparan contra los requerimientos y si se cumple con todos ellos no se requiere realizar ningún tipo de compensación. Pero, si se cumple con los tiempos transitorios y no con el error, la compensación será parcial y deberá agregarse un controlador PI. Si se cumple con el error de estado estable y no cumple con los

tiempos transitorios se efectuara una compensación parcial agregando sólo un compensador $K_t s$ en la rama de retroalimentación interna. En caso de no cumplir con los requerimientos es necesario una compensación total, agregando dos tipos de controladores uno de la forma $K_t s$ en la rama de retroalimentación interna y el otro de tipo PI, en la rama directa.

Planeación de la Ejecución con el Programa SADAC: El procedimiento planeado en el inciso anterior se lleva a cabo en computadora digital usando el programa SADAC.

Como primer paso para el diseño en el dominio del tiempo con compensación en la rama de retroalimentación se introduce la función de transferencia de lazo abierto $GH(s)$, (D.9). Como segundo paso se seleccionan y alimentan los datos para el análisis preliminar en el dominio del tiempo: con un % de sobrepaso de 20 %, rango de variación de la Ganancia del Sistema K ($K_{\min} - K_{\max} = 0 - 40$), el incremento de la ganancia del Sistema K ($\Delta K = 0.1$), la tolerancia en la exactitud del ángulo de amortiguamiento β de 1 %, la tolerancia de oscilación alrededor del valor final deseado para considerarse estable de 2 %. El tercer paso será obtener las salidas de análisis en el dominio del tiempo, la gráfica de respuesta en el tiempo y la gráfica del Lugar Geométrico de las Raíces en caso de desear comprobar los resultados del análisis.

Si después de ejecutar los pasos anteriores se tiene que el sistema no cumple con alguno de los requerimientos se ejecuta un cuarto paso, el cual consiste en cargar datos para efectuar diseño en el dominio del tiempo con compensación en la rama de retroalimentación especificando: % de sobrepaso de 20 %, rango de variación de la ganancia del sistema K ($K_{\min} - K_{\max} = 0 - 40$), el incremento de la ganancia del sistema K ($\Delta K = 0.1$), la tolerancia en la exactitud del ángulo de amortiguamiento β de un 1 %, la tolerancia de oscilación alrededor del valor final deseado para considerarse estable (2 %), tiempo de respuesta $T_r < 0.5$ seg., tiempo de subida $T_p < 0.8$ seg, tiempo de alcance máximo $T_a < 1.3$ seg, tiempo de asentamiento $T_s < 3$ seg, % de error de estado estable $e_{ss} < 2\%$ y una $K_t = 3$. El paso siguiente sería observar los resultados de la compensación y comprobarlos sobre las gráficas

de respuesta en el tiempo y sobre la gráfica del Lugar Geométrico de las Raíces. Una vez terminada esta serie de pasos se finaliza el diseño en el dominio del tiempo con compensación en la rama de retroalimentación.

Ejecución con el Programa SADAC: La ejecución de los pasos del programa SADAC se ilustran en las figuras D.55, D.56 y D.57. Como se puede observar en la Figura D.57 el sistema no cumple con los requerimientos, por lo tanto, se debe seguir con el cuarto paso y alimentar los datos para el diseño en el dominio del tiempo compensación en la rama de retroalimentación, tal como se muestra en la Figura D.63.

Entradas Salidas Ver Formato Gráficas

Función de transferencia
Variables de estado
Análisis
Diseño

Dom. del tiempo (comp. rama directa)
Dom. del tiempo (comp. en la retro.)
Dominio de la Frecuencia

Diseño en el Dominio del Tiempo (comp. en la rama de retroalimentación)

Entrada de datos

Razón de amortiguamiento (d) ---->		Tiempo de respuesta (Tr) <	0.5
% sobrepaso ----->	20	Tiempo de subida (Tp) <	0.8
Rango de K (Kmin - Kmax) ---->	0-40	Tiempo de alcance máx. (Taj) <	1.3
Incremento de la ganancia K ---->	0.1	Tiempo de asentamiento (Ts) <	3
% de tolerancia en el cálculo de 'B'	1	% error de edo. estable (%E _{ss})K	2
% de oscilación del valor final deseado	2	Valor de la const. de retro. (Kl)	<input type="radio"/> 1 <input checked="" type="radio"/> 3 <input type="radio"/> 5 <input type="radio"/> 10 <input type="radio"/> 15

Mensaje

Aceptar Cancelar Limpiar

Fig. D.63 Carga de Datos para Diseño en el Dominio del Tiempo Compensación en la Rama de Retroalimentación.

De aquí se continua al quinto paso a fin de ver resultados de la compensación y la nueva función de transferencia, la cual es generada por el programa después de la compensación. En la Figura D.64 se tiene el resultado y su comprobación con las gráficas de respuesta en el

tiempo y Lugar Geométrico de las Raíces, para la función de transferencia del sistema ya compensado y generada por el programa lo cual se tiene en la Figura D.65.

Diseño en el dominio del tiempo (comp. en la retro)

Resultados

- A/Kt (cero) ----> 1.4744
 A -----> 4.4231
 Kt -----> 3
 > Controlador PI
 cero ----> .01
 polo ----> 0
 Wn' --> 4.8294
 delta --> .4555

Requerimientos

Tiempo de respuesta (tr) < 0.5
 Tiempo de subida (tp) < 0.8
 Tiempo de alcance max. (ta) < 1.3
 Tiempo de asentamiento (ts) < 3
 Error de estado estable(Ess) < 2

Tiempos reales

Tiempo de respuesta -----> .4545
 Tiempo de subida -----> .4763
 Tiempo de alcance máximo --> .7316
 Tiempo de asentamiento ----> 1.8182

Aceptar

ENTRADA DE DATOS (Fun. de Trans.)

Nombre: GH(s) 25.3664

Numerador: 2[1:1.1.4744][1:1.01]

Denominador: 4[1:1.0][1:1.1][1:1.5][1:1.0]

Lista de archivos con formato FDT

GH(S).TMP
 GH(S).Idt
 GH(S).Idt

Verificar Aceptar Remover

VER FUNCIÓN Cancelar Limpiar

Fig. D.64 Salida de resultados y nueva Función de Transferencia generada para el Diseño en el Dominio del Tiempo, Compensación en la Rama de Retroalimentación.



Fig. D.64 Salida de resultados y nueva Función de Transferencia generada para el Diseño en el Dominio del Tiempo Compensación en la Rama de Retroalimentación, (continuación).

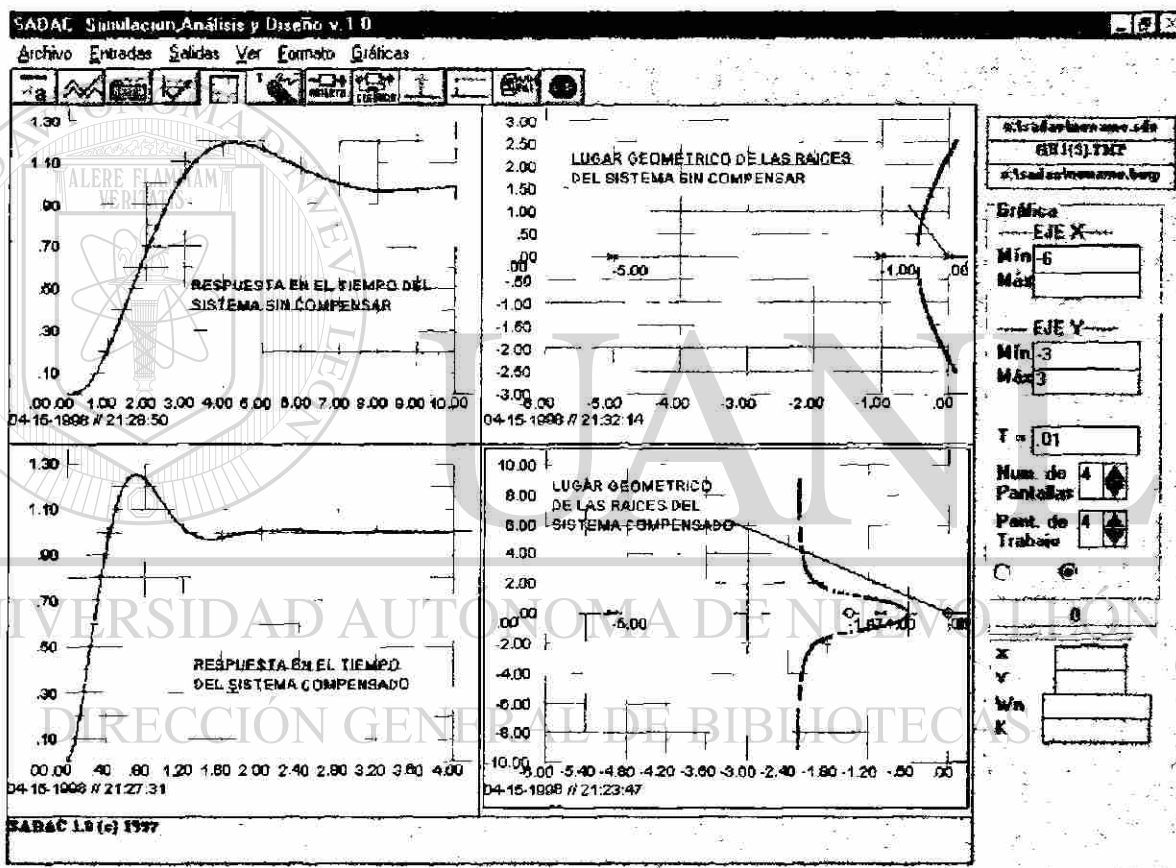


Fig. D.65 Respuesta en el Tiempo y Lugar Geométrico de las Raíces del Sistema de Control sin Compensar y Compensado.

Nota: Los resultados del diseño en el dominio del tiempo compensación en la rama de retroalimentación tal como se tienen en la Figura D.64, se puede comprobar haciendo mediciones sobre las gráficas de respuesta en el tiempo y de Lugar Geométrico de las Raíces, para el sistema de control ya compensado. Estos resultados se muestran en la Figura D.65.

D.4.6 Diseño en el Dominio de la Frecuencia.

Para llevar a cabo un Diseño efectivo en el dominio de la frecuencia se requiere utilizar varias de las opciones del Programa SADAC. A fin de mostrarlo se presenta un ejemplo.

Planteamiento del Problema: se desea diseñar en el dominio de la frecuencia un sistema de control automático con retroalimentación unitaria, donde la configuración está dada por la Figura D.66 cuya función de transferencia de la rama directa es:

$$G(s) = \frac{24}{s(s+2)(s+6)} \quad (\text{D.10})$$

se desea que cumpla con los requerimientos siguientes: un % de error de estado estable $\% e_{ss}$ del 5 %, un margen de fase MF de $45^\circ \pm 1^\circ$, y una frecuencia de cruce comprendida entre $\text{rad/seg} \leq \omega_c \leq 5 \text{ rad/seg}$.

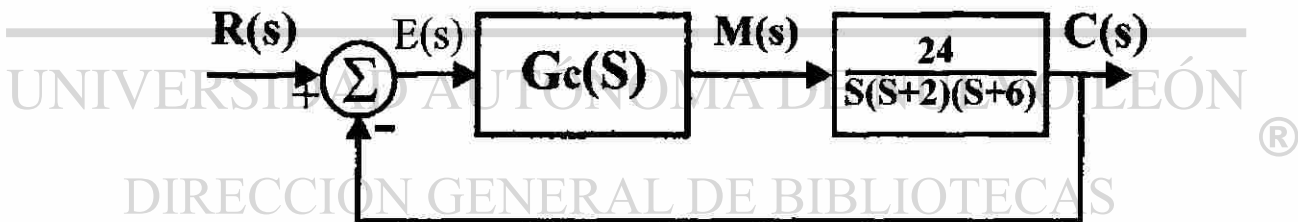


Fig. D.66 Diagrama de Bloques del Sistema de control del Ejemplo.

Después de planteado el problema se planea la realización y la ejecución con el programa SADAC.

Planeación para la Realización: Se detalla el procedimiento a seguir para lograr que el sistema de control automático cumpla con los requerimientos. El primer paso sería a partir de la función de transferencia de lazo abierto $GH(s)$ normalizada, como lo muestra (D.11).

$$GH(j\omega) = \frac{2}{j\omega \left(\frac{j\omega}{2} + 1 \right) \left(\frac{j\omega}{6} + 1 \right)} \quad (D.11)$$

Se calcula el % error de estado estable $\% e_{ss}$, y en caso de no satisfacer los requerimientos se aumenta la ganancia a un valor suficiente. En este caso el $\% e_{ss}$ es de 50 % por lo que se debe aumentar la ganancia $\lambda = 10$, obteniendo una nueva función de transferencia:

$$GH(s)^n = \frac{240}{s(s+2)(s+6)} \quad (D.12)$$

Como segundo paso y a partir de la nueva función de transferencia $GH(s)^n$ se construyen los diagramas de Bode de lazo abierto y se obtiene el margen de fase MF para ver si cumple con los límites requeridos. En caso de satisfacer los requerimientos se termina el problema, pero si no cumple se debe compensar el sistema. Como tercer paso se selecciona el tipo de compensador, red de adelanto, red de atraso, red de atraso-adelanto; para el caso presente una red de atraso-adelanto se considera puede resolver el diseño y como cuarto paso se realiza la compensación.

Planeación de la Ejecución con el Programa SADAC: se establece el procedimiento para efectuar lo planeado en el inciso anterior en una computadora digital con el programa SADAC. Como primer paso en el diseño en el dominio de la frecuencia se alimenta la función de transferencia de lazo abierto una vez que ha sido compensada, para que cumpla con el error de estado estable $GH(s)^n$, (D.12). Como segundo paso se seleccionan y cargan los datos para el análisis preliminar en el dominio de la frecuencia: frecuencia inicial $\omega_i = 0.1$ rad/seg, frecuencia final $\omega_f = 100$ rad/seg, y el número de puntos = 1,000. El tercer paso es obtener las salidas de análisis en el dominio de la frecuencia, las gráficas de Nyquist, los diagramas de Bode de lazo abierto y los diagramas de Bode de lazo cerrado en caso de desear comprobar resultados del análisis.

Si después de ejecutar los pasos anteriores el sistema no cumple con alguno de los requerimientos se procede al cuarto paso, el cual inicia con cargar los datos para efectuar diseño en el dominio de la frecuencia: frecuencia inicial $\omega_i = 0.1$ rad/seg, frecuencia final $\omega_f = 100$ rad/seg, y el número de puntos = 1000, frecuencia de resonancia mínima $\omega_{Rmin} = 2$ rad/seg, frecuencia de resonancia máxima $\omega_{Rmax} = 5$ rad/seg, tolerancia en el margen de fase hacia arriba = 1° , tolerancia en el margen de fase MF hacia abajo = 1° . El quinto paso consiste en consultar los resultados de la compensación y comprobarlos con las gráficas de Nyquist, los diagramas de Bode de lazo abierto, los diagramas de Bode de lazo cerrado. Una vez efectuados los pasos se puede dar por terminado el diseño en el dominio de la frecuencia.

Ejecución con el Programa SADAC. Se siguen los pasos del párrafo anterior. El primer paso donde se carga la función de transferencia de lazo abierto compensada para el error de estado estable $GH(s)^n$, (D.12), se muestra en la Figura D.67.

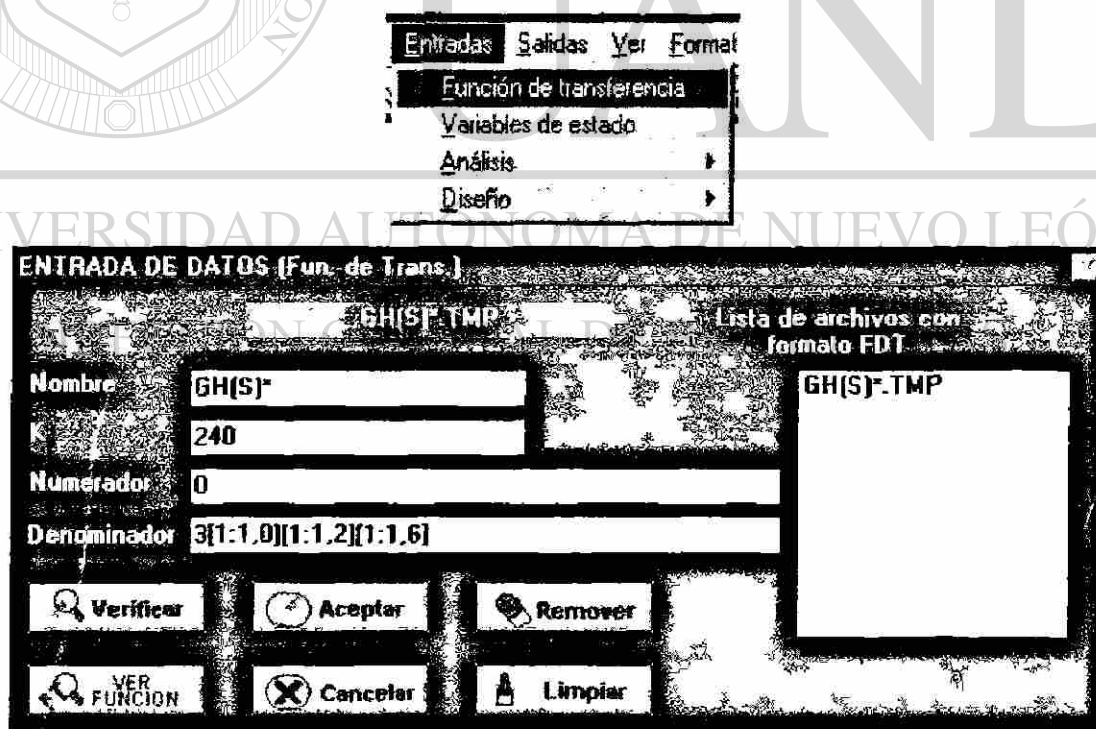


Fig. D.67 Alimentación de la Función de Transferencia compensada para el error de estado estable del Sistema de Control.

El segundo paso, cargar los datos para el análisis preliminar en el dominio de la frecuencia se muestra en la Figura D.68.

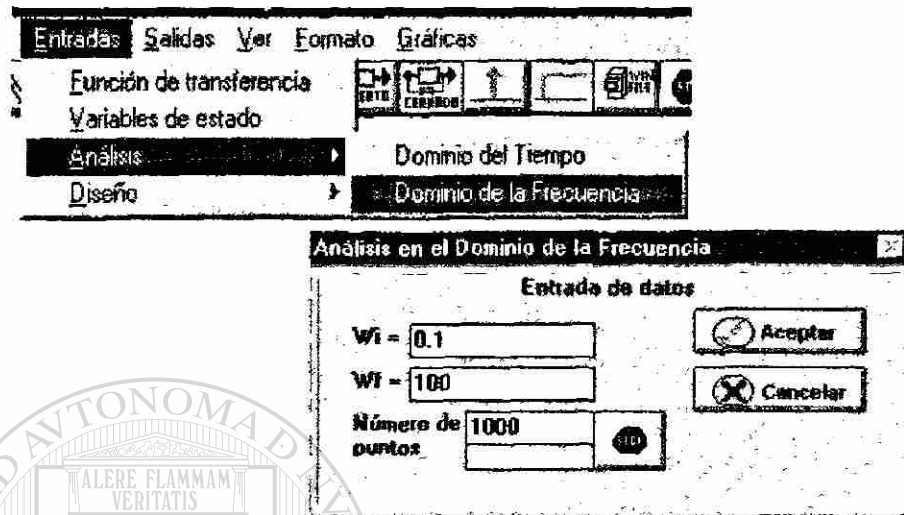


Fig. D.68 Carga de Datos Para Análisis en el Dominio de la Frecuencia.

Como tercer paso se visualizan los resultados del análisis en el dominio de la frecuencia, Figura D.69 y son comprobados por medio de las gráficas de Respuesta en el Tiempo de Nyquist, los diagramas de Bode de lazo abierto, los diagramas de Bode de lazo cerrado, los cuales muestra la Figura D.70 y sus respectivas tabulaciones en la Figura D.71.

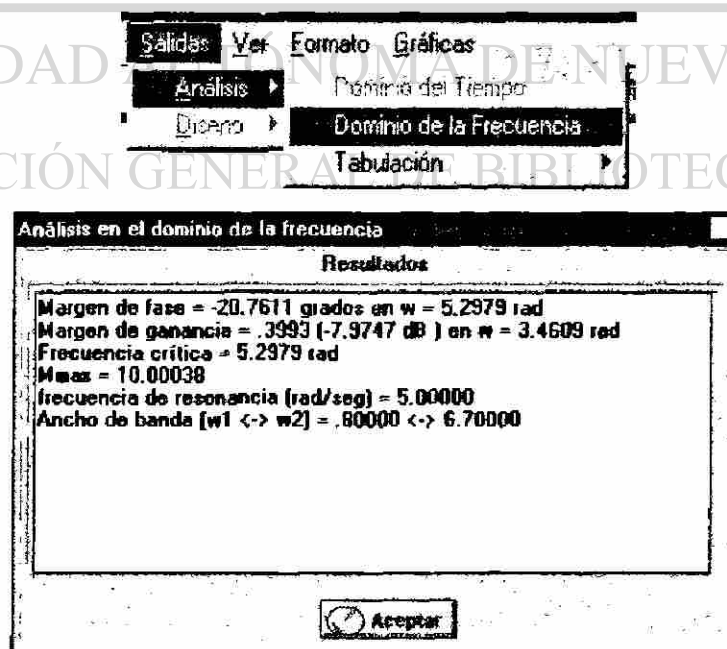
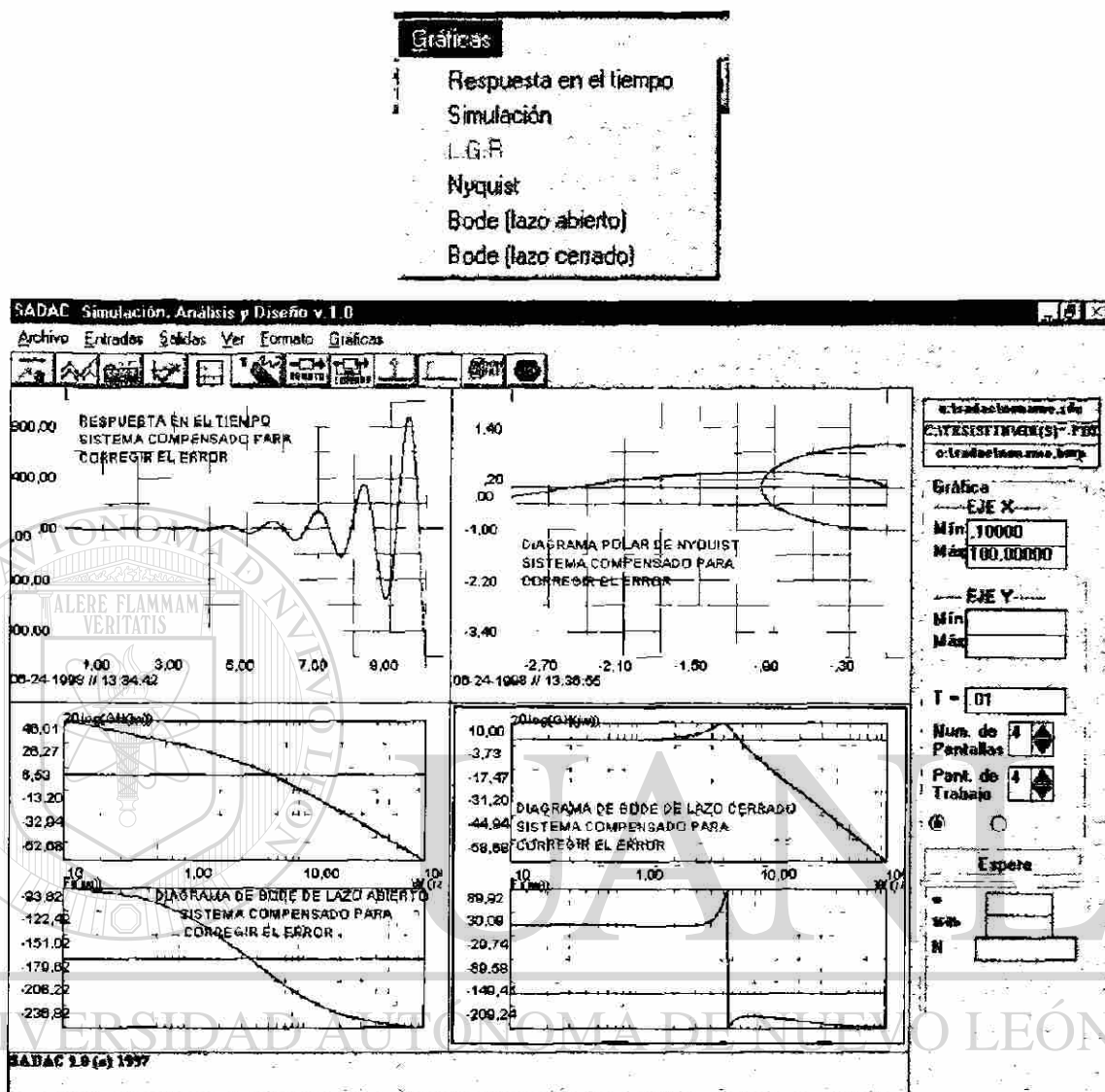


Fig. D.69 Salida de Análisis en el Dominio de la Frecuencia del Sistema de Control.



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS
 Fig. D.70 Gráficas de Respuesta en el Tiempo, de Nyquist, Bode de Lazo Abierto, Bode de Lazo Cerrado para el Sistema de control compensado para el error.

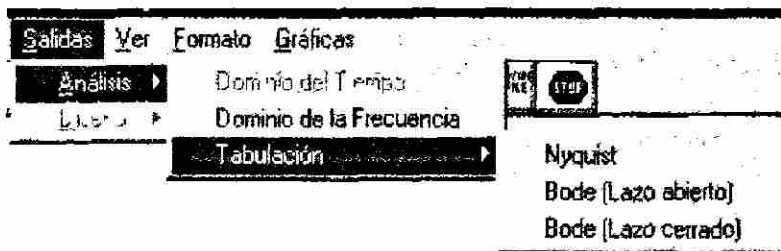


Fig. D.71 Tabulaciones de Nyquist, Bode de Lazo Abierto, Bode de Lazo Cerrado para el Sistema de control compensado para el error.

Tabulación Nyquist			
	w (rad/seg)	GH(jw)	Fgh(jw)
1	10000	199.72273	-93.81725
2	.20000	99.44849	-97.61975
3	.30000	65.84683	-101.39317
4	.40000	48.92044	-105.12401
5	.50000	38.67166	-108.79989
6	.60000	31.76909	-112.40984
7	.70000	26.78571	-115.94447
8	.80000	23.00030	-119.39605
9	.90000	20.04072	-122.75851
10	1.00000	17.64515	-126.02737
11	1.10000	15.67003	-129.19965
12	1.20000	14.01402	-132.27369
13	1.30000	12.60662	-135.24899

CERRAR

Tabulación de Bode (lazo abierto)			
	w (rad/seg)	GH(jw) (dB)	Fgh(jw)
1	10000	46.00865	-93.81725
2	.20000	39.95205	-97.61975
3	.30000	36.37078	-101.39317
4	.40000	33.78988	-105.12401
5	.50000	31.74793	-108.79989
6	.60000	30.04016	-112.40984
7	.70000	28.55813	-115.94447
8	.80000	27.23775	-119.39605
9	.90000	26.03832	-122.75851
10	1.00000	24.93256	-126.02737
11	1.10000	23.90145	-129.19965
12	1.20000	22.93130	-132.27369
13	1.30000	22.01202	-135.24899

CERRAR

Fig. D.71 Tabulaciones de Nyquist, Bode de Lazo Abierto, Bode de Lazo Cerrado, para el Sistema de control compensado para el error, (continuación).

	ω (rad/seg)	Mdb	N
1	.10000	.00279	-.2865
2	.20000	.01116	-.5718
3	.30000	.02513	-.8554
4	.40000	.04474	-1.1367
5	.50000	.07004	-1.4141
6	.60000	.10110	-1.6868
7	.70000	.13799	-1.9549
8	.80000	.18081	-2.2156
9	.90000	.22967	-2.4694
10	1.00000	.28471	-2.7147
11	1.10000	.34607	-2.9502
12	1.20000	.41392	-3.1748
13	1.30000	.48845	-3.3867

CERRAR

Fig. D.71 Tabulaciones de Nyquist, Bode de Lazo Abierto, Bode de Lazo Cerrado, para el Sistema de control compensado para el error (Continuación).

Se observa en la Figura D.69 que el sistema no cumple con los requerimientos, y se debe iniciar el cuarto paso, cargando los datos para el diseño en el dominio de la frecuencia, como se muestra en la Figura D.72.

De acuerdo a lo planeado se continuara con el quinto paso, esto es, ver resultados de la compensación y la función de transferencia nueva generada por el programa después de la compensación. La Figura D.73 y la comprobación por medio de las gráficas de respuesta en el tiempo, el polar de Nyquist, los diagramas de Bode de lazo abierto, los diagramas de Bode de lazo cerrado para la nueva función de transferencia del sistema compensado generada por el programa se tiene en la Figura D.74.

Nota: Los resultados de diseño en el dominio de la frecuencia que se muestran en la Figura D.73, se pueden comprobar haciendo mediciones en las gráficas de Nyquist, los diagramas de Bode de lazo abierto, los diagramas de Bode de lazo cerrado del sistema de control ya compensado lo cual se tiene en la Figura D.74.



Diseño en el dominio de la frecuencia

Entrada de datos

Wi = .1

Wf = 100

Número de puntos 1000

325

Aceptar

Cancelar

Rango deseado para el ancho de banda

W_r min. 2

W_r max. 5

Tipo de red utilizada

Red atraso - adelanto

Margen de fase más cercano a 45°

Aceptación de este MF

Fig. D.72 Carga de Datos para Diseño en el Dominio de la Frecuencia.

Diseño en el dominio de la frecuencia

Resultados

El sistema fué compensado con 1 red de atraso - adelanto

polo adelanto = 8

cero adelanto = 1

polo atraso = .04

cero adelanto = .32

Nuevos Parámetros.....

Margen de fase = 44,3176°

Margen de ganancia = 3,4581

Frecuencia crítica = 3,5708

Mmax = 2,8144

frecuencia de resonancia (rad/seg) = 4,1333

Ancho de banda [w1 <-> w2] = .14955 <-> 5,48108

Aceptar

Fig. D.73 Resultados y nueva Función de Transferencia generada para el Diseño en el Dominio de la Frecuencia.

Entrada de datos (Función de Transferencia)

E: YTESISFIN\GH(S)~.FDT

Lista de archivos con formato FDT

Nombre: GH(S)~

Orden: 240

Numerador: 2[1:1.1][1:1.0.32]

Denominador: 5[1:1.0][1:1.2][1:1.6][1:1.8][1:1.0.04]

Verificar Aceptar Remover

VER FUNCION Cancelar Limpiar

FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

Forma

POR POLINOMIOS

Aceptar

Fig. D.73 Resultados y nueva Función de Transferencia generada para el Diseño en el Dominio de la Frecuencia. (continuación).

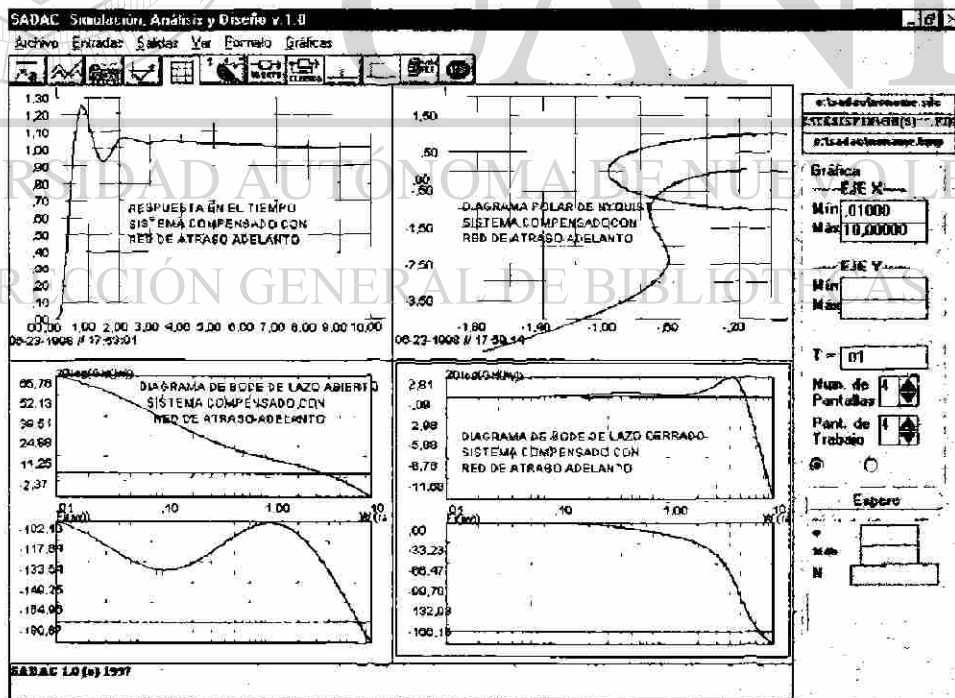


Fig. D.74 Gráficas de Respuesta en el Tiempo, Nyquist, Bode de Lazo Abierto y de Lazo Cerrado, Sistema Compensado.

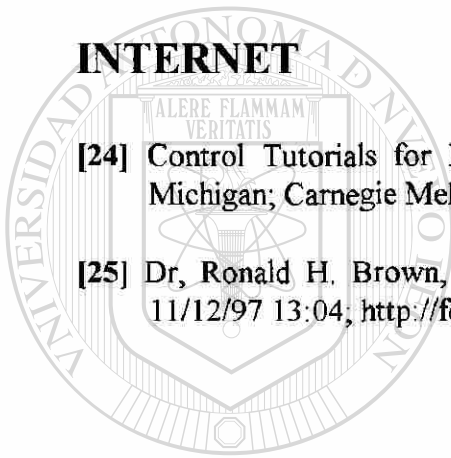
REFERENCIAS

- [1] **Kuo Benjamin C.**, Control System; Seventh Edition; 1995; Prentice Hall
- [2] **Harrison Peter**, Process Control; 1964; McGraw Hill
- [3] **Elgerd I. Olle**, Control System Theory; 1967; McGraw Hill
- [4] **Ogata Katsuico**, State Space Analysis of Control System; 1967; Prentice Hall
- [5] **Ogata Katsuico**, Ingeniería del Control Moderno; Segunda Edición; 1993; Prentice Hall.
- [6] **Raven H. Francis**, Automatic Control Engineering; Fourth Edition; 1987; McGraw Hill.
- [7] **Melsa and Schultz**, Linear Control System; 1969; McGraw Hill.
- [8] **Rohrs, Melsa, & Schultz**, Sistemas de Control Lineal; 1994; McGraw Hill.
- [9] **Harrison & Bollinger**, Controles Automáticos; Segunda Edición; 1974; Editorial Trillas.
- [10] **D'Azzo & Houpis**, Linear Control System Analysis and Design Conventional and Modern; 1975; McGraw Hill.
-
- [11] **Weyric C. Robert**, Fundamentals of Automatic Control; 1975; McGraw Hill.
- [12] **DiStefano, Stuberud y Williams**; Retroalimentación y Sistemas de Control; Segunda edición; 1992; McGraw Hill.
- [13] **Dorf C. Richard**, Sistemas Automáticos de Control Teoría y Práctica; 1977; Fondo Educativo Interamericano.
- [14] **Dorf & Bishop**, Modern Control System; Seventh Edition; 1995; Addison Wesley.
- [15] **Shinners M. Stanley**, Modern Control System Theory and Application; Second Edition; 1978; Addison Wesley.
- [16] **Aström & Hägglund**; Automatic Tuning of PID Controllers; 1988; Instrument Society of America.
- [17] **Hostter, Savant & Stefani**, Sistemas de Control; 1990; McGraw Hill.

- [18] **Francisco Lavier Ceballos**, Enciclopedia de Visual Basic, 1994; Addison Wesley.
- [19] **Bartee C. Thomas**, Fundamentos de Computadoras Digitales; Quinta Edición; 1981; McGraw Hill.
- [20] **Benjamin C. Kuo**, Automatic Control System; 1962; Prentice Hall.
- [21] **Peter V. O'Neil**, Matematicas Avanzadas para Ingenieria, 1994, C.E.C.S.A.
- [22] **Millman & Halkias**, Integrated Electronics, 1972, McGraw Hill.
- [23] **Gerald F. Curtis**, Análisis Numérico, Segunda edición, 1987, Representaciones y Servicios de Ingenieria.

INTERNET

- [24] Control Tutorials for Matlab; William C. Messner & Dawn Tilbury; University of Michigan; Carnegie Mellon, 10/12/97 10:59; <http://cbis.ece.drexel.edu/ctm/>.
- [25] Dr, Ronald H. Brown, Intelligent Systems and Controls Lab; Marquette University; 11/12/97 13:04; <http://fourier.eece.mu.edu/>.



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



