

Dominio de Funciones con Raíz Cuadrada

Elizabeth Guajardo García
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, UANL.
México.

Resumen. Se expone una propuesta didáctica que propicie en los alumnos universitarios la adquisición de un aprendizaje significativo de desigualdades cuadráticas para aplicarlo a encontrar el dominio de funciones con raíz cuadrada. La estrategia didáctica está centrada en el aprendizaje, e implementa el uso del Graphmatica y el Sketchpad como herramientas cognitivas en el aula, involucrando al alumno en actividades de construcción de un lenguaje gráfico estrechamente relacionado con el lenguaje analítico, que los conduzca al contexto algebraico. El objetivo es contribuir al desarrollo de la habilidad de transferencia del proceso de resolución de ecuaciones cuadráticas hacia el proceso de resolución de desigualdades cuadráticas para entonces encontrar dominios de funciones con raíz cuadrada.

Palabras Clave: desigualdades cuadráticas, transferencia, herramientas cognitivas.

1. Planteamiento del problema

En base a la experiencia de la autora se observa que con frecuencia los alumnos tienen dificultades para determinar el dominio de funciones con raíz cuadrada sobre todo cuando es una raíz cuadrada de una expresión cuadrática, ya que tienen que resolver una desigualdad del tipo $ax^2 + bx + c \geq 0$. Algunos de los alumnos resuelven desigualdades cuadráticas como si fueran ecuaciones cuadráticas, es decir, ven una expresión cuadrática en una desigualdad y lo que hacen es tratar de resolverla despejando la variable cuadrática (esto es muy común cuando no aparece el término lineal) o factorizan y obtienen como resultado un intervalo que no tiene fundamento o no coincide con lo que resuelven analíticamente. A pesar de que los alumnos ya fueron instruidos en la solución de desigualdades cuadráticas utilizando métodos analíticos, se observa que, éstos métodos no han sido suficientes ya que los alumnos no tienen una visualización clara de lo que es resolver una desigualdad. Entonces el proceso de resolución de una ecuación cuadrática está incidiendo en el proceso de resolución de una desigualdad cuadrática, y asimismo esto repercute en la obtención del dominio de funciones con raíz cuadrada.

De lo anterior, la autora identifica como PROBLEMA un conflicto cognitivo al transferir el proceso de resolución de ecuaciones cuadráticas en la resolución de desigualdades cuadráticas, que se manifiesta en el proceso enseñanza aprendizaje del Cálculo Diferencial, en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Autónoma de Nuevo León.

En correspondencia con el problema se formula como OBJETIVO GENERAL DEL TRABAJO el diseñar estrategias didácticas para implementar el uso de la tecnología en el aprendizaje de desigualdades cuadráticas para así encontrar dominios de funciones con raíz cuadrada.

En este contexto, la autora plantea que el alcance del trabajo es posible a partir de la siguiente HIPOTESIS: Si se diseñan estrategias didácticas centradas en el aprendizaje, implementando el uso de la tecnología, se contribuirá al desarrollo de la habilidad de transferencia del proceso de

resolución de ecuaciones cuadráticas hacia el proceso de resolución de desigualdades cuadráticas, para después aplicarlo en la obtención del dominio de funciones con raíz cuadrada.

2. Elementos teóricos básicos

La autora coincide con Dörfler (2007), en que las herramientas computacionales permiten aproximaciones matemáticas desde diferentes ángulos del que es hecho tradicionalmente, ya que los aprendices pueden desarrollar una visión del proceso dinámico al incorporar varias representaciones gráficas.

Por otro lado, el uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas genera los siguientes resultados:

- Propicia un aprendizaje autónomo ligado a una experiencia extraescolar.
- Permite impartir una enseñanza innovadora y de calidad.
- Facilita al alumno la adquisición de actitudes, intereses y valores, lo que le llevará a responsabilizarse en un aprendizaje independiente de manera permanente.

3. Ejemplos de Actividades Propuestas

3.1. Actividad 1.

Encontrar el dominio de $f(x) = \sqrt{x^2 - 16}$

Solución:

Sabiendo que el dominio de la función $f(x) = \sqrt{x}$ son todos los números reales ≥ 0 , haciendo uso del Sketchpad resolveremos la *desigualdad cuadrática* $x^2 - 16 \geq 0$ comparando posiciones de rectas. En este caso se grafica en clase los factores de la ecuación cuadrática.

Al factorizar la expresión cuadrática $x^2 - 16 \geq 0$ tenemos $(x + 4)(x - 4) \geq 0$

Luego si consideramos las graficas de $L_1: y = x + 4$, $L_2: y = x - 4$, observamos que:

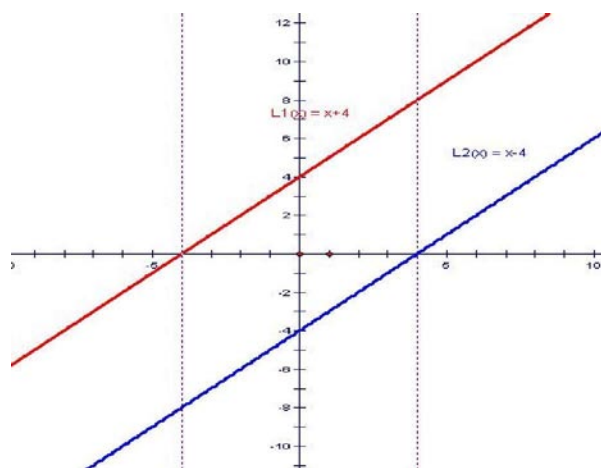


Figura 1. Gráficas de $L_1: y = x + 4$ y $L_2: y = x - 4$

L_1 y L_2 están sobre el eje X si $x > 4$. Entonces $x + 4 > 0$ y $x - 4 > 0$ si $x > 4$
 L_1 y L_2 están bajo el eje X si $x < -4$. Entonces $x + 4 < 0$ y $x - 4 < 0$ si $x < -4$
 es decir, $(x + 4)(x - 4) > 0$ si $x \in (4; \infty)$,
 pero también, $(x + 4)(x - 4) > 0$ si $x \in (-\infty; -4)$

Entonces, el conjunto solución de la desigualdad dada es: $(-\infty; -4] \cup [4; \infty)$, se observa que se incluyen en la solución la $x = 4$ y $x = -4$ ya que para esos valores se cumple la igualdad a cero.

Por tanto el dominio de $f(x) = \sqrt{x^2 - 16}$ es: $(-\infty; -4] \cup [4; \infty)$

3. 2. Actividad 2.

Encontrar el dominio de $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 6}$

Solución:

Para esto utilizaremos el método gráfico apoyado en el Graphmatica, el cual consiste en graficar las funciones cuadráticas, es decir, hay que graficar la parábola que representa a la cuadrática y encontrar sobre la curva la región que satisface que sea mayor e igual a cero.

En este caso para resolver $x^2 - x - 6 \geq 0$, graficaremos $f(x) = x^2 - x - 6$

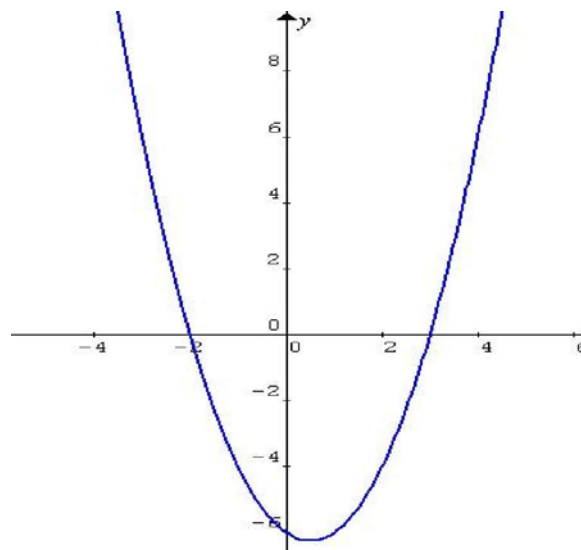


Figura 2. Gráfica de $f(x) = x^2 - x - 6$

Entonces la solución de la desigualdad son los valores de “x”, en los cuales la grafica esta por encima del eje X, o los valores de “x” en los cuales la gráfica toca al eje X. Por tanto el dominio de $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 6}$ es: $(-\infty; -2] \cup [3; \infty)$

4. Valoración de la Propuesta

Se valoró la propuesta didáctica aplicando elementos de métodos empíricos de investigación educativa y se consideraron los siguientes indicadores, basados en el modelo de desarrollo del pensamiento geométrico de Van Hiele, para validar el desarrollo de la habilidad de transferencia entre el registro geométrico y el registro algebraico:

1° Nivel - Visualización: Identificación de una desigualdad.

2° Nivel - Análisis: Identificación de propiedades gráficas de funciones. (Lineales y Cuadráticas).

3° Nivel - Deducción Informal: Identificación de relaciones esenciales entre gráficas y desigualdades lineales y cuadráticas.

4° Nivel - Deducción Formal: Identificación de propiedades analíticas de funciones y de la relación de orden (debe encontrar soluciones para casos particulares).

5° Nivel - Rigor: Aplicación de propiedades de relación de orden y representación de la solución en términos de uniones e intersecciones de intervalos para casos generales.

El docente, como facilitador, propició la construcción de conceptos para *casos generales* (5° Nivel), aplicando propiedades de relación de orden y la representación de la solución de una desigualdad cuadrática, implementando las TIC's como herramientas cognitivas en el desarrollo de la habilidad de resolución de desigualdades cuadráticas.

Para esto se graficó a la parábola $y = ax^2 + bx + c$ con $a > 0$, considerando tres casos, en donde se define al discriminante D como $D = b^2 - 4ac$.

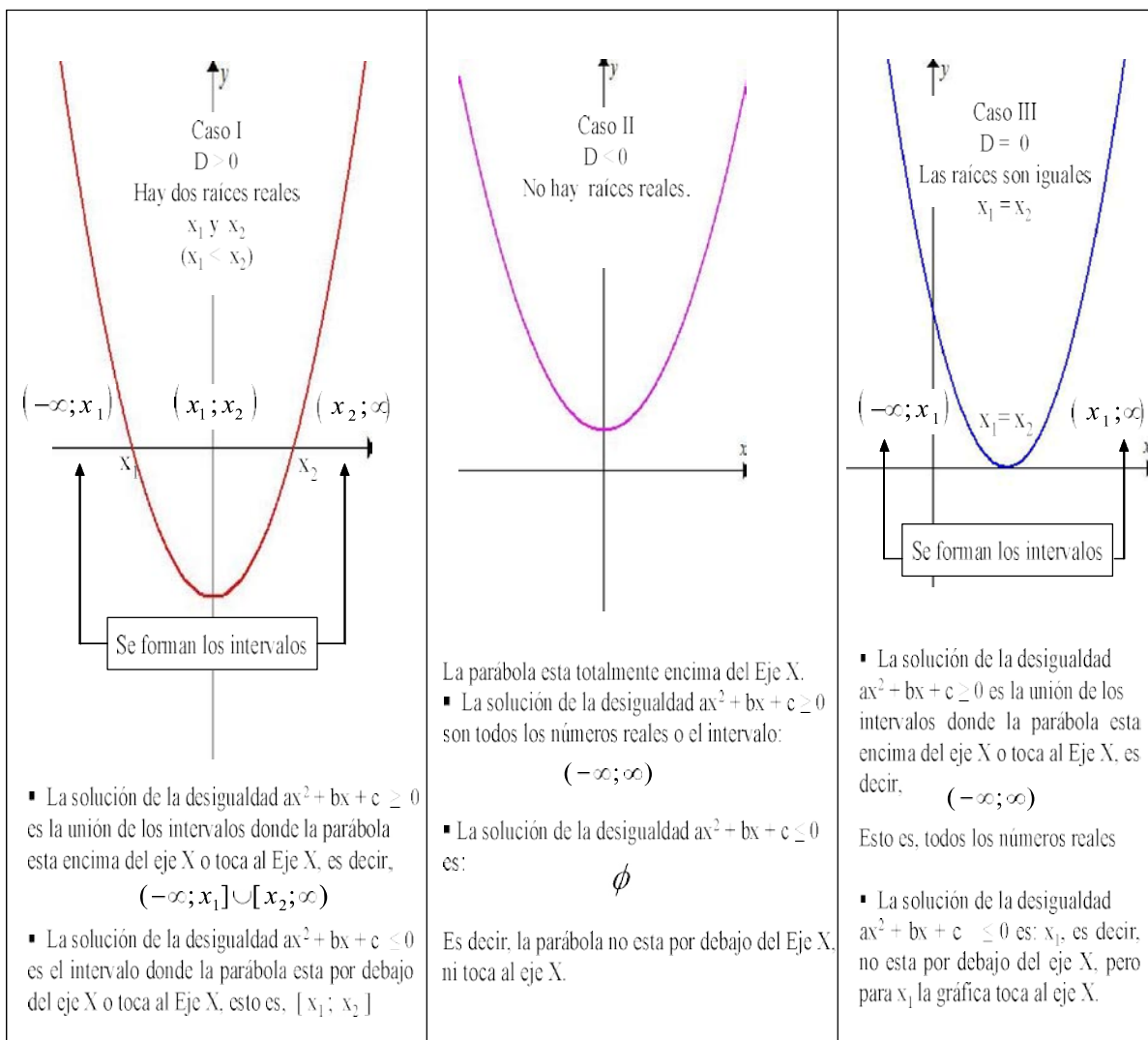


Figura 3. Casos Generales

5. Conclusiones

Se observó que, utilizando las TIC's en el salón de clases se pueden realizar actividades innovadoras que despierten el interés en los alumnos. En este sentido, es muy importante generar situaciones significativas que impidan que el olvido llegue tan fácil.

Como resultado del trabajo investigativo desarrollado, las Estrategias Didácticas propuestas que implementan el uso de los asistentes matemáticos Sketchpad y Graphmatica en el aula, para el

desarrollo de la habilidad de transferencia entre el registro gráfico y el registro geométrico, en *la resolución de una desigualdad cuadrática*, son un aporte práctico para el uso de estas tecnologías en la disciplina que nos ocupa.

Se constató lo afirmado por los Van Hiele, respecto a que el 5° Nivel (Rigor), es un nivel que difícilmente alcanzan los alumnos de nivel preuniversitario, pero que si puede ser desarrollado en el nivel de licenciatura, para propiciar la construcción de conceptos para casos generales aplicando propiedades de relación de orden y la representación de la solución de una desigualdad cuadrática en términos de uniones e intersecciones de intervalos.

6. Recomendaciones

En relación a las dificultades derivadas de la complejidad de los elementos del cálculo, los docentes deben tener en cuenta en la enseñanza de las desigualdades aspectos como:

- a) no introducir las técnicas de resolución demasiado rápido como simples pasos a seguir.
- b) asegurarse de que los símbolos utilizados están claramente diferenciados.
- c) establecer con claridad los requerimientos para realizar la transferencia entre los conceptos de ecuación cuadrática y desigualdad cuadrática.
- d) no introducir la definición y la notación formal hasta que el concepto de desigualdad, así como las técnicas de resolución, estén claramente adquiridos.
- e) en la medida de lo posible, evitar la complejidad notacional que en ocasiones resulta innecesaria.

7. Referencia Bibliográfica

Aréchiga, J. (2001): *Problema de la Transferencia de las Matemáticas*.

Publicado en la página Web: <http://www.uag.mx/63/a04-04.html>

Barbosa, K. (2003): *La enseñanza de las inecuaciones desde el punto de vista de la teoría APOE*.

Relime Vol. 6, Núm. 3, pp. 199-219

Borello, M. (2007): *Relación entre las concepciones del maestro y el aprendizaje de los alumnos en el caso de las desigualdades. Un estado del arte*. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN, México (Tesis de Maestría)

Farfán, R./Albert, A. (2001): *Un acercamiento gráfico a la resolución de desigualdades*.

Edición especial CASIO. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Fundación Polar. Últimas Noticias. El mundo de la matemática. *Inecuaciones*. Fascículo No. 13, pp.102 – 104.

Garrote, M./Hidalgo, M./Blanco, L. (2004). *Dificultades en el aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones*. Facultad de Educación, Universidad de Extremadura, Badajoz, España.

Hitt, F. (1998): *Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículum*.

Educación Matemática, Vol.10, No.2, pp.23 – 45

López, L. (2006): *Metodología para el perfeccionamiento del proceso de enseñanza aprendizaje del Cálculo Vectorial fundamentada en el desarrollo de la Visualización Matemática Tridimensional*. Centro de Estudios de Ciencias de la Educación, Universidad de Camagüey (CECEDUC), Cuba. (Tesis Doctoral)