ISSN en trámite

MÉTODO NUMÉRICO HEURÍSTICO PARA EL CÁLCULO DE RAÍCES DE POLINOMIOS

Ramón Cantú Cuéllar
Luis Chávez Guzmán
José Luis Cantú Mata

Resumen
En este artículo se propone un nuevo método numérico, para obtener las raíces reales de una ecuación polinomial, de tipo heurístico. Aunque el número de iteraciones requerido puede ser elevado, tiene como ventaja que es simple y por ser un método numérico tiene una convergencia a la solución óptima para cierto error permisible determinado.

Palabras clave: Métodos numéricos, raíces de polinomios, heurísticas

Introducción

Los polinomios son un modelo matemático importante, pueden ser multiplicados y divididos fácilmente por otros polinomios. También pueden ser fácilmente diferenciados, integrados y evaluados. Los polinomios se encuentran extensivamente en todas las disciplinas científicas, especialmente en conexión con las ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, la ecuación característica de un sistema de n ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes puede ser expresada en forma de una ecuación polinomial.

Las raíces de polinomios de grado 1, 2, 3, 4 pueden ser determinadas por métodos clásicos. Sin embargo estos métodos son completamente complicados para las ecuaciones de tercer y cuarto grado. Por esta razón y para poder resolver ecuaciones de grado mayor, se han desarrollado métodos numéricos de aproximaciones sucesivas, tales como el método de Newton-Raphson y el de Halley, tal como aparecen en la obra de Leader (2004) y algunos de sus variantes como el método de Birge-Vieta, que aparece en la obra de Aldrecut (2000) y el método de Muller, como lo describen Burden y Faires (2010) entre otros.

Cada polinomio de la forma

$$P_n(\mathrm{x}) = = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (1)$$

tiene al menos n distintas raíces αi (i = 1,2, …,n).

Por el teorema fundamental del álgebra, que aparece en la obra de Lehmann (2011) existe al menos una raíz de la ecuación algebraica (1).

Además, por el teorema del factor, tal como se muestra en la obra de Rees y Sparks (2005) si α_1 es una de las raíces, es decir, si $P_n(\propto_1) = 0$ entonces

$$P_n(x) = (x - \propto_1)P_{n-1}(x) \qquad (2)$$

donde $(x - \propto_1)$ es un factor lineal de P_n(x), y por este mismo teorema, podemos expresar el polinomio (1) como el producto de n factores lineales

$$P_n(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n) \qquad (3)$$

En este artículo se desarrollará un nuevo método numérico de aproximaciones sucesivas, de tipo heurístico que permite obtener un factor lineal de un polinomio de grado n, usando un punto inicial dado, en términos de los coeficientes del polinomio, donde dichos coeficientes deben ser números reales, para algún error permisible ξ determinado, entre menor sea ξ mejor será la aproximación a la raíz real buscada, aunque requerirá un número mayor de iteraciones del método.

Justificación
Es posible desarrollar un método numérico para obtener raíces de polinomios, con un punto de partida y para un error permisible ξ , que permite obtener una solución del problema suficientemente aceptable, basado en una técnica heurística y de aproximaciones sucesivas.

La contribución del presente trabajo es ofrecer una técnica numérica alternativa a los métodos existentes para el cálculo de raíces de polinomios, teniendo como principal característica que no se requiere información adicional sobre el problema, ya que el punto inicial de búsqueda depende de la misma ecuación analizada y que no utiliza derivadas, aunque para este tipo de problema, como se mencionó en la introducción, no es complejo su cálculo.

Objetivo
Desarrollar un método numérico para la obtención de raíces de polinomios, sin el empleo de derivadas, basado en el concepto de técnicas heurísticas, con un apropiado margen de error con respecto a la solución óptima, es decir, la raíz de la ecuación buscada.

Metodología
Dentro de la optimización no lineal, comenzaron a aparecer algoritmos que proporcionan soluciones factibles(es decir, que satisfacen las restricciones del problema), las cuales, aunque no optimicen la función objetivo, se supone que al menos se acercan al valor óptimo en un tiempo de cálculo razonable. Este tipo de algoritmos se denominan heurísticas. Este concepto será adaptado en el desarrollo de las iteraciones sucesivas del método que propondremos, ya que una importante ventaja de las técnicas heurísticas, con respecto a las métodos que buscan soluciones exactas es que, por lo general, permiten una mayor flexibilidad para el manejo de las características del problema.
Además Díaz, Glover, Ghaziri, González, Laguna, Moscato y Tseng (2000) mencionan que no suele resultar complejo diseñar algoritmos heurísticos que en lugar de considerar funciones lineales, utilicen no linealidades.

Por otra parte, Cantú, Mata, Guerra y Elizondo (2010) han usado técnicas numéricas y heurísticas para crear un algoritmo para la solución de ecuaciones no lineales, que puede considerarse como un antecedente a este trabajo.

La heurística en la que basaremos nuestro método consiste en descomponer el polinomio para la que se busca una raíz a partir de los términos con signo positivo y negativo y definir una fracción en términos de dichos componentes, clasificándose los sumandos con diferentes signosy también en términos del grado de la ecuación, la cual será multiplicada por el valor actual de la raíz, o por el valor inicial en el comienzo del método, determinándose así la fórmula recursiva asociada al método numérico propuesto.

Para un polinomio de la forma (1), para el cual sus coeficientes son números reales. Partiendo del punto

$$x_0 = \frac{-a_n}{a_{n-1}} \qquad (4)$$

se obtendrá un nuevo valor mas cercano a la raíz x1 con la fórmula

$$x_1 = x_0 \pm \Delta x \qquad (5)$$

Definiremos ∆x con signo negativo o positivo, en términos de los sumandos del polinomio, y tomando en cuenta los signos de los coeficientes de sus sumandos, expresando (1) como

$$P_n(x) = g(x) + h(x) \qquad (6)$$

donde $g(x)$ representa los términos de $P_n(x)$ con coeficientes positivos y $h(x)$ los sumandos con signo negativo, para obtener x_1 por medio de la fórmula

$$x_1 = x_0\left(1 \pm \frac{2}{n}\left[\frac{h(x_0)-g(x_0)}{h(x_0)+g(x_0)}\right]\right) \qquad (7)$$

donde n es el grado del polinomio.

Repitiendo este procedimiento para obtener x_2 a partir del punto obtenido x_1 y (7), y así para las demás aproximaciones $x_{3,\dots,}, x_n$ se genera la fórmula recursiva del método

$$x_{i+1} = x_i\left(1 \pm \frac{2}{n}\left[\frac{h(x_i)-g(x_i)}{h(x_i)+g(x_i)}\right]\right) \qquad (8)$$

En algunos casos se empleará (7) con signo positivo y en otros con signo negativo, dependiendo en cual de los dos casos se llegue a una convergencia del método para algún error permisible ξ, que cumpla con la condición

$$\left|x_{i+1} - x_i\right| \le \xi \qquad (9)$$

Es importante aclarar que los coeficientes de $h(x)$ empleados en (8) siempre serán positivos, y el signo de los coeficientes de (1) permite definir las funciones $g(x)$ y $h(x)$.

Resumen computacional del método

Paso 0: Leer $x_0 = \frac{-a_n}{a_{n-1}}$, la aproximación inicial de la raíz de $P_n(x) = 0$.

ξ : Término de convergencia

Paso 1: Hacer $i = 1$

Paso 2: Calcular aproximaciones sucesivas de la raíz α, con la fórmula

$$x_{i+1} = x_i \left(1 \pm \frac{2}{n}\left[\frac{h(x_i)-g(x_i)}{h(x_i)+g(x_i)}\right]\right)$$

Calcular la condición de convergencia en cada iteración

$$\Delta = \left|x_{i+1} - x_i\right| \leq \xi$$

Paso 3: Prueba de convergencia o divergencia

(a) Si Δ i+1 ≤ ξ ir al paso 4.
(b) Si Δ i+1 > ξ hacer $i = i + 1$ e ir al paso 2.

Paso 4: Salida de la raíz α. Hacer α = xi+1 . Escribir α.

Resultados

1.- Para el polinomio

$$P_3(x) = x^3 - 0.5x^2 - 8x + 7.5 = 0$$

y punto de partida $x_0 = \frac{-a_3}{a_2} = \frac{-7.5}{-8}$, con ξ = 0.001 y ξ = 0.0001.

Sea $g(x) = x^3 + 7.5$, $h(x) = 0.5x^2 + 8x$, como es una ecuación cúbica n=3, al aplicar el método usando el signo negativo en el coeficiente del segundo sumando del segundo término de (7) se obtiene la fórmula recursiva

$$x_{i+1} = x_i \left(1 - \frac{2}{3}\left[\frac{0.5x^2+8x-x^3-7.5}{0.5x^2+8x+x^3+7.5}\right]\right) \qquad (9)$$

usando (9) se obtienen los resultados del progreso del método en la Tabla 1:

Iteración i	x_i
0	0.9375
1	0.9522
2	0.9648
3	0.9731
4	0.9794
5	0.9842
6	0.9879
7	0.9907
8	0.9928
9	0.9944
10	0.9957
11	0.9967
12	0.9974
13	0.9980
14	0.9984
15	0.9987
16	0.9990
17	0.9992
18	0.9993

Tabla 1: Resultados de las iteraciones del método numérico heurístico.

Para el error permisible ξ = 0.001 Con Δ = $|x_{i+1} - x_i| = 0.001$. se obtiene la raíz α = 0.9967 en 11 iteraciones raíz con valor $P_3(\alpha) = 0.01958$ y para ξ = 0.0001 la raíz es mas exacta, obteniéndose en 18 iteraciones α = 0.9993 con valor $P_3(\alpha) = 0.0042$.

La raíz real de la ecuación es 1, es decir

$$P_3(1.0) = 0.0$$

Dividiendo $P_3(x)$ por $(x-1)$, se obtiene la ecuación cuadrática

$$x^2 - 10x + 22$$

Las raíces de la ecuación cuadrática son obtenidas con la fórmula cuadrática y son

$$5+\sqrt{3}$$

$$5-\sqrt{3}$$

Este mismo ejemplo puede ser resuelto usando el método de Birge-Vieta en tres iteraciones, con el mismo punto de partida, llegando al resultado de α = 0.9999 pero en esta técnica en cada iteración se aplica dos veces división sintética y el método de Newton-Raphson, lo cual incrementa el trabajo de cálculo en cada iteración y el método heurístico que proponemos no requiere del empleo de dichas técnicas matemáticas en el desarrollo de cada iteración. Aunque en este caso en particular el trabajo de cálculo es mayor con el método heurístico, pero "reducido" por solo usar la fórmula recursiva (9).

2.- Para el polinomio

$$P_4(x)=x^4-7x^3+13x^2+45x-50=0$$

y punto inicial $x_0=\frac{-a_4}{a_3}=\frac{-(-50)}{45}$, con error permisible ξ = 0.0001.

Sea $g(x)=x^4+13x^2+45x$, $h(x)=7x^3+50$, n = 4, en este caso al aplicar el método usando el signo positivo en el coeficiente del segundo sumando del segundo término de (7) la fórmula recursiva es

$$x_{i+1}=x_i\left(1+\frac{1}{2}\left[\frac{7x^3+50-x^4-13x^2-45x}{7x^3+50+x^4+13x^2+45x.}\right]\right) \qquad (10)$$

En la Tabla 2 se muestran los resultados de la aplicación del método para este problema, al usar la ecuación (10).

Iteración i	x_i	Iteración i	x_i
0	1.1111	12	0.9683
1	1.0762	13	0.9670
2	1.0496	14	0.9660
3	1.0293	15	0.9653
4	1.0137	16	0.9647

ISSN en trámite

5	1.0018	17	0.9643
6	0.9927	18	0.9640
7	0.9857	19	0.9637
8	0.9804	20	0.9635
9	0.9763	21	0.9633
10	0.9720	22	0.9632
11	0.9699		

Tabla 2: Resultados de las iteraciones del método numérico heurístico para el polinomio de cuarto grado.

Donde Δ = 0.0001 en la iteración 22 y se obtiene una raíz α = 0.9632 con valor $P_4(\alpha) = 0.010$.

Resolviendo este mismo problema con el método de Lin-Bairstow, como aparece en la obra de Hildebrand (1987) se requiere de un factor cuadrático inicial cercano a la factorización del polinomio, que requiere cierto trabajo de cálculo el obtenerlo, además de la aplicación de doble división sintética en dos partes y la solución de un sistema de ecuaciones lineales de 2x2 en cada iteración, lo que aumenta su tiempo de cálculo, obteniéndose el mismo resultado en 12 iteraciones, pero con mucho mayor trabajo de cálculo en cada iteración, en cambio el método heurístico tiene la ventaja de que no necesita de un factor cuadrático inicial ni la solución de ecuaciones lineales, solo el empleo de (10) y el punto inicial que se obtiene del mismo polinomio y aunque son mas las iteraciones, en general el trabajo de cálculo es menor que con el método de Lin-Bairstow.

Conclusiones

Se ha propuesto un método para obtener un término lineal de un polinomio de tipo heurístico y de aproximaciones sucesivas, teniendo como ventaja la sencillez en la que se efectúan las iteraciones y que no se emplean derivadas, aunque puedan parecer demasiadas el número de iteraciones, el trabajo de cálculo es del tipo “rápido y sencillo” o “abreviado” y para obtener el punto inicial se utilizan los dos últimos coeficientes de la ecuación, lo que evita la búsqueda de un valor inicial con técnicas de análisis numérico alternativas.

Bibliografía

Aldrecut, M. (2000) Introductory Numerical Analysis, Lecture Notes, Parkland: Universal Publishers

Burden, R. L. y Faires, J. D. (2010) Numerical Analysis, (9na ed.) Boston: Cengage Learning

Cantu, R., Mata, N., Guerra, M.E., Elizondo, R. (2010). Método numérico para la solución de ecuaciones no lineales mediante el empleo de una heurística. En Guerra, M.E. García, D.M., Martínez, D.M. Huerta, E. (Ed.) Libro de Memorias de los Trabajos Libres del VI Congreso de ingeniería Industrial y de Sistemas de la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la UANL, 215-220, San Nicolás de los Garza N.L México.

Díaz, A., Glover, F., Ghaziri, H., González Velarde, J.L., Laguna M., Moscazo, P., Tseng, F. T. (2000) Optimización Heurística y Redes Neuronales. Madrid: Paraninfo.

Hildebrand, F B, (1987) Introduction to Numerical Analysis,(2da. ed.) New York: Dover.

Leader, J. (2004) Numerical Analysis and Scientific Computation. New York: Addison-Wesley.

Lehmann, C. H. (2011) Algebra, México, Limusa.

Rees, P. K., Sparks, F. W. (2005) Algebra, México, Reverté.