



# Análisis de variables no correlacionadas en protección de líneas de transmisión

Jorge Luis Arizpe Islas, Juan Rafael Cervantes Vega

## RESUMEN

El objetivo central de este trabajo consiste en aplicar una técnica estadística de análisis multivariable para encontrar patrones de datos de alta dimensión y simplificar el proceso de discriminación y ubicación de cortocircuitos en líneas de transmisión.

La ventaja fundamental de esta técnica es la reducción del número de dimensiones de los datos, sin que exista mucha pérdida de información. En este artículo se hace una descripción de esta transformación matemática, y se presentan aplicaciones en el área de protección de los sistemas eléctricos de potencia, las cuales son simuladas en el programa PSCAD.

**Palabras clave:** Estadística, Varianza, Covarianza, Correlación.

## ABSTRACT

The central objective of this work is to apply a multivariate statistical analysis techniques to find patterns of high-dimensional data and simplify the process of discrimination and location of short circuits in transmission lines.

The main advantage of this technique is reducing the number of data dimensions, without any great loss of information. This article presents a mathematical description of this transformation is made, and applications are presented in the area of protection of electric power systems, which are simulated in the PSCAD program.

**Keywords:** Statistics, Variance, Covariance, Correlation.

## 1 INTRODUCCIÓN

Por medio del Centro Nacional de Control de Energía (CENACE), la CFE garantiza la seguridad, calidad y economía del suministro en el Sistema Eléctrico Nacional<sup>1</sup>. Estos Centros monitorean la operación de todos los componentes de la red, a través de la infor-

<sup>1</sup> Centro Nacional de Control de Energía (Cenace) [http://www.cfe.gob.mx/Proveedores/4\\_Informaciongeneral/Control\\_despacho\\_energia/Paginas/Control-y-despacho-de-energia-.aspx](http://www.cfe.gob.mx/Proveedores/4_Informaciongeneral/Control_despacho_energia/Paginas/Control-y-despacho-de-energia-.aspx)

Recibido 21 de octubre, 2015; aceptado 24 de noviembre, 2015

M.C. Jorge Luis ARIZPE ISLAS  
Profesor de la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la UANL.  
Correo electrónico: jlarizpei@yahoo.com.mx

M.C. Juan Rafael CERVANTES VEGA  
Coordinador General de Eléctrica de la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la UANL.

mación de niveles de tensión en subestaciones, flujos potencia (activa y reactiva) en líneas de transmisión y transformadores, niveles de carga en los generadores y el estado de los sistemas de protección, control y medición de la red eléctrica, etc.

De tal forma que para un Sistema Eléctrico de Potencia (SEP) con un número aproximado de 200 subestaciones, el CENACE recibiría en promedio de 1,250 datos por segundo, dependiendo del sistema de adquisición de datos (SCADA) y de las condiciones de operación.

Actualmente los SEPs cuentan con dispositivos digitales de protección, medición y supervisión, que reciben información trifásica en tiempo real de los niveles de tensión y corriente. Las protecciones de líneas de transmisión cuentan con una frecuencia de muestreo de 4 kHz a 8 kHz y el equipo procesa poco más de 20,000 valores instantáneos de tensión y corriente por segundo.

Esto significa que se tiene un alto volumen de información para manipular en tiempo real, por lo que es de suma importancia el desarrollo de algoritmos capaces de procesar esta información en el menor tiempo posible.

El análisis de variables no correlacionadas o de componente principal (ACP) es una técnica estadística de análisis multivariable ampliamente utilizada para encontrar patrones de datos de alta dimensión [1]. Esto se logra analizando la estructura de la varianza-covarianza de los datos analizados a través de combinaciones lineales de los datos originales y permite expresar la información de tal forma que se acentúen las similitudes y diferencias en los datos bajo estudio. La ventaja fundamental de ACP es que una vez que se han encontrado los patrones en los datos se puede seleccionar la información más importante reduciendo el número de dimensiones de los datos, sin que exista gran pérdida de información. Para entender cómo trabaja esta técnica es necesario tener en mente algunos conceptos utilizados en estadística como los son: media, desviación estándar, varianza, covarianza, matriz de covarianza, eigenvectores y eigenvalores [2]. Los cuales se describen a continuación.

## 2 CONCEPTOS DE ESTADÍSTICA UTILIZADOS

En esta sección se mostrarán algunos conceptos matemáticos necesarios para entender el proceso de Análisis de Variables No Correlacionadas. Además, se incluye una sección donde se explican brevemente las medidas estadísticas de distribución, lo cual permite saber cómo están dispersos los datos. También, se presenta una breve sección en álgebra matricial, eigenvectores y eigenvalores, los cuales son muy importantes al realizar este análisis.

El propósito generalizado de la estadística está basado en la idea de que se tiene un gran grupo de datos el cual se desea analizar con el fin de encontrar relación entre los puntos individuales que conforman al grupo. Para ello es necesario aplicar algunas mediciones al grupo de datos así como interpretar de manera correcta los resultados de esas mediciones.

### 2.1 Desviación estándar

Al definir la desviación estándar es necesario un grupo de datos, los cuales en términos estadísticos consisten en una muestra que sea representativa de la

población de la que fue tomada, con el fin de trabajar solamente con la muestra y evitar el uso de la población entera.

Una muestra se puede representar de la siguiente forma:

$$x = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n] \quad (1)$$

Existen algunos cálculos que se pueden realizar con el grupo de datos  $x$ . Por ejemplo, es posible calcular la media de la muestra, cuya fórmula es:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (2)$$

Nótese que el símbolo  $\bar{x}$  indica la media del grupo  $x$ . Desafortunadamente la media solo encuentra el punto medio de los datos, pero no proporciona mayor información acerca de los datos de estudio.

A continuación, se presentan dos grupos de datos que tienen exactamente la misma media (10), cabe señalar que estos grupos son diferentes:

$$[0 \ 8 \ 12 \ 20] \text{ y } [8 \ 9 \ 11 \ 12] \quad (3)$$

Como se puede observar los dos grupos tienen la misma media, de tal forma que es necesario aplicar una medida que provea mayor información acerca de la dispersión de los datos, como lo es la desviación estándar.

La desviación estándar ( $s$ ) de un grupo de datos es una medida de su dispersión o variación, la cual se define como:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{(n-1)}} \quad (4)$$

La razón por la que se divide entre  $n-1$  en lugar de  $n$ , es ampliamente tratada en [3] donde se explica el cambio de denominaciones y la diferencia entre muestras y poblaciones.

Ejemplo: Al aplicar la desviación estándar a los grupos presentados anteriormente, se tiene:

Grupo 1: [ 0 8 12 20 ]

$x$	$(x - \bar{x})$	$(x - \bar{x})^2$
0	-10	100
8	-2	4
12	2	4
20	10	100
Total		208
Dividido por (n-1)		69.33
Raíz cuadrada		8.3266

Grupo 2: [ 8 9 11 120 ]

$x$	$(x - \bar{x})$	$(x - \bar{x})^2$
8	-2	4
9	-2	1
11	1	1
12	2	4
Total		10
Dividido por (n-1)		3.33
Raíz cuadrada		1.8257

Una vez que se ha aplicado la desviación estándar a los grupos 1 y 2, como se observa, el primer grupo tiene mayor desviación estándar, por el hecho de que sus datos están más dispersos de la media.

### 2.2 Varianza

La varianza es otra medida de dispersidad de los datos, la cual es muy parecida a la desviación estándar, y su expresión es:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{(n-1)} \quad (5)$$

Como se puede apreciar, se trata de la desviación estándar ( $s$ ) elevada al cuadrado, y  $s^2$  es el símbolo para la varianza de un grupo de datos. Las dos son medidas de dispersidad de los datos. Aunque la desviación estándar es más usada. Por otra parte la varianza provee una sólida plataforma para explicar el concepto de covarianza.

### 2.3 Covarianza

Las últimas dos medidas presentadas son unidimensionales. Pero la mayoría de los datos prácticos tienen más de una dimensión, y el objetivo del análisis estadístico consiste en ver si existe alguna relación entre las dimensiones, por ejemplo, se puede estar interesado en conocer la relación que existe entre la altura de los alumnos y la calificación alcanzada en un examen. La desviación estándar y la varianza operan solamente una dimensión, de tal manera que es necesario contar con una forma de medir el grado en que los valores de una dimensión varía con respecto a otras dimensiones. La covarianza puede proporcionar esa información ya que permite hacer la medición entre dos dimensiones.

Si se tiene un grupo de datos de tres dimensiones ( $x, y, z$ ) entonces es posible medir la covarianza entre las dimensiones  $X$  y  $Y$ , dimensiones  $X$  y  $Z$  y por último  $Y$  y  $Z$ . La expresión para la covarianza es muy similar a la de la varianza:

$$\text{var}(x) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})}{(n-1)} \quad (6)$$

Donde se expandió el término al cuadrado para formar dos partes. La fórmula de la covarianza es:

$$\text{cov}(x, y) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{(n-1)} \quad (7)$$

Se puede observar que se trata de la misma fórmula excepto que en el segundo término en corchetes, las  $X$ 's se remplazaron por  $Y$ 's, y la información que genera el cálculo de la covarianza indica cómo están relacionados los datos de las dimensiones.

La covarianza es de gran utilidad cuando se requiere encontrar las posibles relaciones existentes entre datos de alta dimensión donde una visualización gráfica no está disponible.

### 2.4 Matriz de covarianza

La varianza es una medida entre dos dimensiones, si se tiene un grupo de datos con más de dos dimensiones, entonces existe más de una medida de covarianza que puede ser calculada. Por ejemplo, para un grupo de datos de tres dimensiones (dimensiones  $x, y, z$ ), se puede calcular  $\text{cov}(x,y)$ ,  $\text{cov}(x,z)$ ,  $\text{cov}(y,z)$ . De hecho para un grupo  $n$ -dimensional es necesario calcular  $n(n+1)/2$  valores diferentes de covarianza. Resulta de gran utilidad ordenar todas las covarianzas calculadas en una matriz, la cual por definición es de la siguiente forma:

$$C_{n \times n} = (c_{i,j}, c_{i,j} = \text{cov}(Dim_i, Dim_j)) \quad (8)$$

Donde:

$C_{n \times n}$  es una matriz con  $n$  filas y  $n$  columnas, y la  $Dim_i$  es la  $i$ -ésima dimensión.

La fórmula indica que la matriz es cuadrada ( $n \times n$ ) y que cada término es el resultado de calcular la covarianza entre dos dimensiones. Por ejemplo, para una matriz de covarianza de tres dimensiones ( $x, y, z$ ), la matriz quedaría de la siguiente forma:

$$\text{cov} = \begin{bmatrix} \text{cov}(x, x) & \text{cov}(x, y) & \text{cov}(x, z) \\ \text{cov}(y, x) & \text{cov}(y, y) & \text{cov}(y, z) \\ \text{cov}(z, x) & \text{cov}(z, y) & \text{cov}(z, z) \end{bmatrix}$$

Aquí el término de la fila 2 y columna 3, es el valor de la covarianza calculado entre la 2ª y 3ª dimensión. Nótese que la diagonal principal consiste de las varianzas de cada una de las dimensiones. Además debido a que  $\text{cov}(a,b) = \text{cov}(b,a)$ , la matriz es simétrica con respecto a la diagonal principal.

### 2.5 Eigenvalores y Eigenvectores

Asumiendo que  $A$  es una matriz cuadrada, supóngase que un vector  $x$  diferente de cero es tal que al ser multiplicado por  $A$ , el resultado es el mismo vector, escalado por  $\lambda$ .

En forma matemática:

$$Ax = \lambda x$$

Donde  $\lambda$  es un escalar multiplicado por un vector  $x$ .

Si la ecuación anterior es verdadera, entonces se dice que  $x$  es un eigenvector de la matriz  $A$ , y  $\lambda$  es un eigenvalor de la matriz  $A$  [4]. Los eigenvalores y eigenvectores pueden ser encontrados para matrices cuadradas.

## 3 ANÁLISIS DE VARIABLES NO CORRELACIONADAS

Con la finalidad de conocer la relación existente entre un grupo de variables puede ser de utilidad transformar las variables originales en un nuevo grupo de variables, no correlacionadas, llamadas componentes principales (CP). Esas nuevas variables son combinaciones lineales de las variables originales y están ordenadas en forma decreciente de importancia, de tal manera que la primer componente principal cuenta con la mayor dispersión en los datos originales. El ACP fue propuesto por Karl Pearson y posteriormente fue desarrollado más detalladamente por Harold Hotelling en 1930 [5]. La transformación consiste en una rotación ortogonal en el espacio  $p$ . La técnica para encontrar esta transformación es llamada análisis de componente principal cuyos objetivos generales son: la reducción de datos, su posible interpretación y la construcción de la población.

### 3.1 Reducción de datos

Cuando se tienen datos que originalmente tienen  $p$  variables, generalmente su varianza se puede definir en términos de un pequeño número ( $m$ ) de componentes principales, de tal forma que cuando mucha de la información total contenida en las variables originales se concentra en las primeras CP, entonces el grupo de datos que originalmente consistía de  $n$  observaciones y  $p$  variables puede ser reducido a uno conformado de  $n$  observaciones en  $m$  componentes principales.

### 3.2 Interpretación

Un análisis de componente principal puede mostrar relaciones que no se habían considerado previamente, y permite interpretaciones que no podrían hacer con resultados ordinarios.

### 3.3 Construcción de la población

Supóngase  $X = [X_1 \dots X_p]$  es una variable aleatoria  $p$  dimensional con media  $\mu$  y matriz de covarianza  $\Sigma$ . El problema consiste en encontrar un nuevo grupo de variables, a las llamadas  $Y_1, Y_2, \dots, Y_p$  las cuales no están correlacionadas y su varianza se decrementa de la primera a la última. Cada  $Y_j$  será una combinación lineal de las  $X$ 's así que:

$$Y_j = a_{1j}X_1 + a_{2j}X_2 + \dots + a_{pj}X_p \quad (9)$$

$$Y_j = a_j^T X$$

Donde  $a_j^T = a_{j1}, \dots, a_{jp}$  es un vector de constantes.

La ecuación anterior contiene un factor de escala arbitrario. Para asegurar sea ortogonal la condición

$$a_j^T a_j = \sum_k^p a_{kj}^2 = 1$$

es impuesta, de esta manera se asegura que las distancias en el espacio  $p$  sean conservadas.

La primer componente principal  $Y_1$ , se obtiene escogiendo  $a_1$  de tal forma que tenga la varianza más grande posible. Es decir, se escoge  $a_1$  de tal forma que maximice la varianza  $a_1^T X$  sujeta a la restricción  $a_1^T a_1 = 1$ . Esta propuesta fue sugerida originalmente por Harold Hotelling [5] dando resultados equivalentes a los trabajos de Karl Pearson, el cual encontró la línea en el espacio  $p$  cuya suma de las distancias al cuadrado de los puntos a la línea es minimizada.

La segunda componente principal es encontrada escogiendo  $a_2$  para el cual  $Y_2$  tenga la mayor varianza posible para todas las combinaciones de  $Y_j$  las cuales deben ser no correlacionadas con  $Y_1$ . De manera similar se obtiene  $Y_3, \dots, Y_p$  tales que no estén correlacionadas y tengan varianza decreciente.

Para encontrar la primera componente principal se escoge  $a_1$  la cual maximiza la varianza de  $Y_1$  sujeta a la restricción de normalización  $a_1^T a_1 = 1$ .

La varianza de esta dada por:

$$Var(Y_1) = Var(a_1^T X) \quad (10)$$

$$Var(Y_1) = a_1^T \sum a_i$$

Así que

$$Var(Y_1) = a_1^T \sum a_i$$

será la función objetivo.

El procedimiento estándar para maximizar una función de varias variables sujeto a una o más restricciones es el método de los multiplicadores de Lagrange. En el caso de solo una restricción, este método usa el hecho de que los puntos estacionarios de una función diferenciable de variables, sea  $f(x_1, \dots, x_p)$ , su-



jeta a la restricción  $g(x_1, \dots, x_p) = c$ , existe un número  $\lambda$  llamado multiplicador de Lagrange tal que:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, p \quad (11)$$

en los puntos estacionarios.

Esas  $p$  ecuaciones junto con la restricción son suficientes para determinar los puntos estacionarios (y los correspondientes valores  $\lambda$ ).

De todas formas es necesario saber si un punto estacionario es un máximo o un mínimo, para esto es de gran ayuda formar una nueva función,  $L(x)$  tal que:

$$L(x) = f(x) - \lambda[g(x) - c] \quad (12)$$

Donde el término entre corchetes es cero.

Entonces esta ecuación puede reescribirse como

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (13)$$

Aplicando este método a nuestro problema, podemos escribir:

$$L(a_1) = a_1^T \sum a_1 - \lambda(a_1^T a_1 - 1) \quad (14)$$

A partir de la cual se obtiene:

$$\frac{\partial L}{\partial a_1} = 2 \sum a_1 - 2\lambda a_1 \quad (15)$$

Igualando a cero se consigue:

$$(\sum - \lambda I) a_1 = 0 \quad (16)$$

Si esta última expresión tiene una solución para  $a_1$  diferente al vector nulo, entonces  $(\Sigma - \lambda I)$  debe ser una matriz singular. Así que debe ser escogido para que:

$$|\sum - \lambda I| = 0 \quad (17)$$

Así que una solución para  $(\Sigma - \lambda I)$  diferente de cero existe si y solo si  $\lambda$  es un eigenvalor de  $\Sigma$ .

$\Sigma$  tiene  $p$  eigenvalores ya que  $\Sigma$  es una matriz definida positiva, los cuales se pueden denotar por  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_p \geq 0$ . Ahora se escoge un eigenvalor para determinar el primer componente principal:

$$\begin{aligned} \text{Var}(a_1^T X) &= a_1^T \sum a_1 \\ \text{Var}(a_1^T X) &= a_1^T \lambda I a_1 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\text{Var}(a_1^T X) = \lambda$$

Debido a que se desea determinar la varianza se selecciona el  $\lambda$  que sea el más grande eigenvalor al cual se denominara  $\lambda_1$ . Entonces a partir de la ecuación (16) el primer componente principal  $a_1$  será el eigenvector de  $\Sigma$  correspondiente al más grande eigenvalor. La segunda componente principal llamada  $Y_2 = a_2^T X$  es obtenida por la extensión al razo-

namiento anterior teniendo en cuenta la restricción  $a_2^T a_2 = 1$  y la condición de que  $Y_2$  no debe estar relacionada con  $Y_1$ . Para esta última se tiene:

$$\text{Cov}(Y_2, Y_1) = \text{Cov}(a_2^T X, a_1^T X)$$

$$\text{Cov}(Y_2, Y_1) = E[a_2^T (X - \mu)(X - \mu)^T a_1] \quad (19)$$

$$\text{Cov}(Y_2, Y_1) = a_2^T a_1$$

el cual se requiere que sea cero, ya que  $\sum a_i = \lambda_i a_i$  es posible utilizar la condición equivalente más simple  $a_2^T \sum a_2$ , sujeta a las dos restricciones, es necesario introducir dos multiplicadores de Lagrange, los cuales serán denotados por  $\lambda$  y  $\delta$ , y a partir de la ecuación:

$$L(a_2) = a_2^T \sum a_2 - \lambda(a_2^T a_2 - 1) - \delta a_2^T a_1 \quad (20)$$

en los puntos estacionarios se tiene:

$$\frac{\partial L}{\partial a_2} = 2(\sum - \lambda I) a_2 - \delta a_1 = 0 \quad (21)$$

Si se premultiplica la ecuación por  $a_1^T$ , se obtiene:

$$(\sum - \lambda I) a_2 = 0 \quad (22)$$

esto debido a que  $a_1^T a_2 = 0$ . Pero de la ecuación (19) es necesario que  $a_2^T \sum a_2$  sea cero así que  $\delta$  es el punto estacionario. Por lo tanto la ecuación se convierte en:

$$2a_1^T \sum a_2 - \delta = 0 \quad (23)$$

Se puede observar que la elección de  $\lambda$  corresponde al segundo eigenvalor más grande de  $\Sigma$ , y  $a_2$  será su correspondiente eigenvalor.

Continuando con este razonamiento la  $j$ -ésima componente principal será el eigenvector asociado al  $j$ -ésimo eigenvalor más grande. Una importante propiedad es que los eigenvalores pueden ser interpretados como las varianzas de sus respectivas componentes. La suma de las varianzas es dada por:

$$\sum_{i=1}^p \text{Var}(Y_i) = \sum_{i=1}^p \lambda_i = \text{trace}(\Lambda) \quad (24)$$

Donde:

$$\text{trace}(\Lambda) = \text{trace}(A^T \sum A)$$

$$\text{trace}(\Lambda) = \text{trace}(\sigma A A^T)$$

$$\text{trace}(\Lambda) = \text{trace}(\sum)$$

$$\text{trace}(\Lambda) = \sum_{i=1}^p \text{Var}(X_i)$$

Lo que muestra que la suma de las varianzas de las variables originales y sus componentes principales es la misma. Por lo tanto es conveniente enun-

ciar la *i*-ésima componente principal cuenta con una proporción de

$$\frac{\sum_{j=1}^m \lambda_j}{\sum_{j=1}^p \lambda_j}$$

de la variación total en los datos originales. Sin embargo, se debe recordar que no es haciendo un análisis en el sentido estricto de la expresión. Cabe señalar que las primeras *m* componentes principales cuentan como una proporción de la varianza total.

$$\frac{\sum_{j=1}^m \lambda_j}{\sum_{j=1}^p \lambda_j}$$

## 4 APLICACIÓN DE ANÁLISIS DE COMPONENTE PRINCIPAL

### 4.1 Ejemplo 1

#### Obtención de datos

Se aplicará ACP a un grupo de datos en dos dimensiones con la finalidad de visualizar el resultado de cada uno en cada paso.

x	2.5	0.5	2.2	1.9	3.1	2.3	2.0	1.0	1.5	1.1
y	2.4	0.7	2.9	2.2	3.0	2.7	1.6	1.1	1.6	0.9

La figura 1 muestra los datos utilizados en forma gráfica:

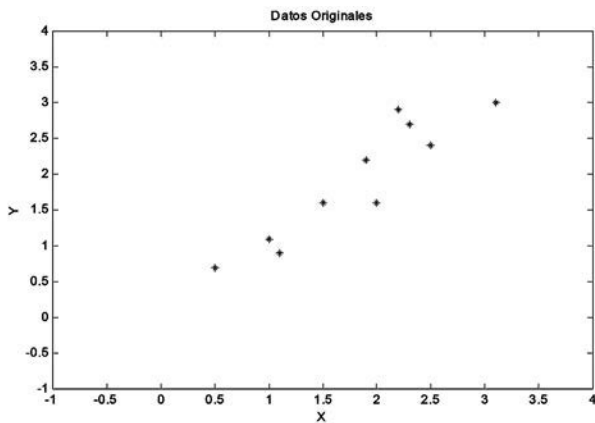


Figura 1. Datos originales.

#### Extracción de la media de los datos

Para que ACP funcione apropiadamente es necesario realizar una traslación al origen, para lo cual se debe sustraer la media de cada uno de los datos de la dimensión. Esto produce grupos de datos cuya media es cero.

x	0.69	-1.31	0.39	0.09	1.29	0.49	0.19	-0.81	-0.31	-0.71
y	0.49	-1.21	0.99	0.29	1.09	0.79	-0.31	-0.81	-0.31	-1.01

La figura 2 muestra los datos del ejemplo con la traslación al origen, en forma gráfica:

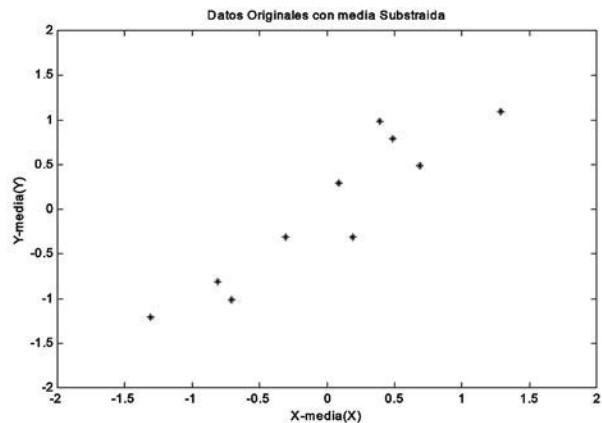


Figura 2. Datos con la media sustraída.

#### Cálculo de la matriz de covarianza

Como los datos son de dos dimensiones, se obtiene una matriz de 2 x 2.

La matriz calculada queda de la forma:

$$\text{cov} = \begin{bmatrix} 0.6166 & 0.6154 \\ 0.6154 & 0.7166 \end{bmatrix}$$

#### Cálculo de eigenvectores y eigenvalores de la matriz de covarianza

Es necesario calcular los eigenvectores y eigenvalores de la matriz de covarianza. Ellos contienen información importante para el ACP.

Para la matriz de covarianza de este ejemplo se obtiene:

$$\text{eigenvalores} = \begin{bmatrix} 1.2840 & 0 \\ 0 & .0491 \end{bmatrix}$$

$$\text{eigenvectores} = \begin{bmatrix} -0.6779 & -0.7352 \\ -0.7352 & 0.6779 \end{bmatrix}$$

Es importante notar que los eigenvectores son ortonormales, su significado se puede ver en la figura 3, donde las líneas punteadas corresponden a los eigenvalores 1 y 2, los cuales son ortogonales y unitarios. Se puede observar que la línea correspondiente al eigenvector  $e_1$  caracteriza la mayor información del comportamiento de los datos, la línea  $e_2$  corresponde al segundo eigenvector el cual contiene menor información acerca del comportamiento de los datos. El resto del proceso de ACP consiste en transformar los datos para expresarlos en términos de esos nuevos ejes.

#### Elección de las componentes principales y formación del vector de transformación

Es necesario ordenar los eigenvalores y su eigenvector asociado del más grande al más pequeño,

el eigenvector asociado al eigenvalor más grande corresponde a la primera componente principal, el eigenvector asociado al segundo eigenvalor más grande corresponde a la segunda componente principal y así sucesivamente. Es posible ignorar las componentes menos significativas, con su correspondiente pérdida de información, pero si los eigenvalores correspondientes son pequeños, entonces las pérdidas son despreciables.

Una vez seleccionadas las componentes principales que se van a utilizar, se forma una matriz de transformación T con los eigenvectores:

$$T = [eig_1 \ eig_2 \dots \ eig_n]$$

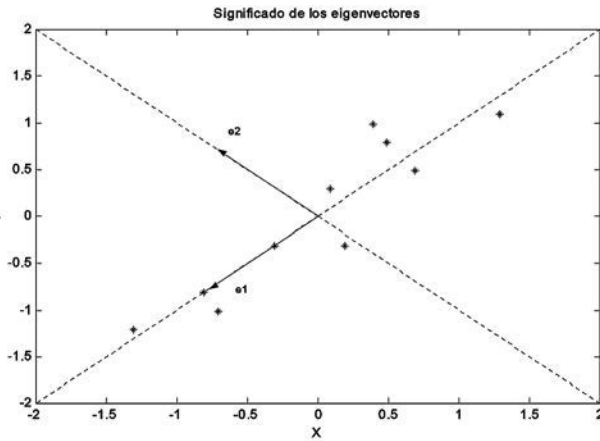


Figura 3. Significado de los eigenvectores.

*Obtención de los nuevos datos*

Finalmente, se lleva a cabo la transformación de los datos, lo cual dará como resultado los datos originales en términos de los eigenvectores previamente escogidos los cuales serán los nuevos ejes, esto se muestra en la figura 6. La figura 4 muestra la varianza de las dos componentes principales.

$$\text{Datos finales} = T \cdot \text{Datos ajustados}$$

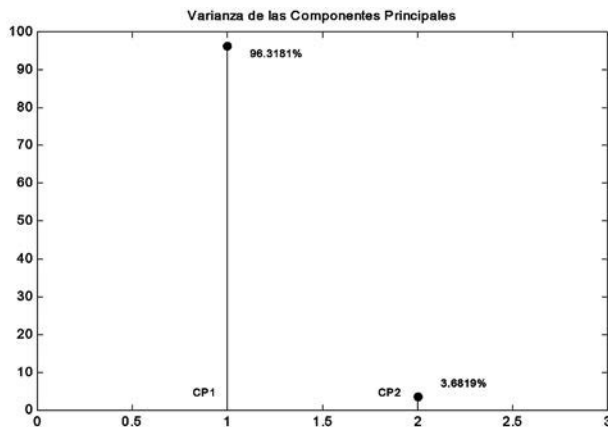


Figura 4. Varianza de las dos componentes principales.

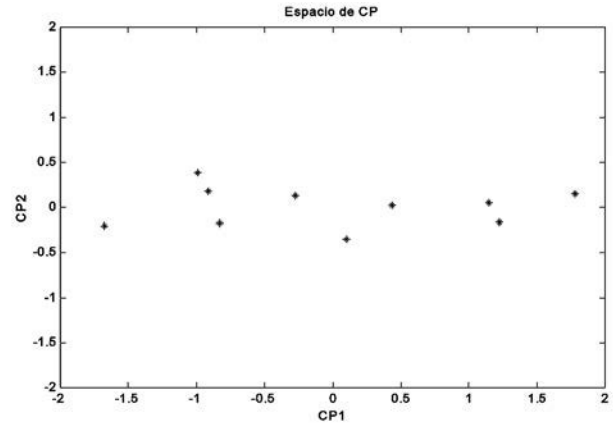


Figura 5. Datos finales utilizando las dos componentes principales.

*4.2 Ejemplo 2*

Se consideró el problema de reducir el tiempo para la detección de fallas en líneas de transmisión, así como mejorar la sensibilidad de los esquemas de protección ante fallas de alta impedancia, y mejorar la seguridad del algoritmo por la discriminación entre fallas internas y externas al final de la línea de transmisión protegida (figura 6), utilizando las señales transitorias de alta frecuencia generadas en el punto de aparición de la falla, ya que contienen información que describe las características de la falla.

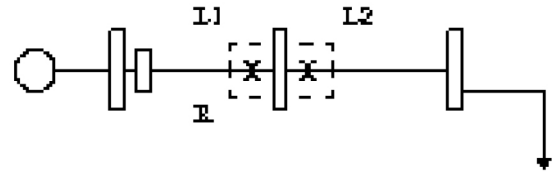


Figura 6. Pérdida de seguridad de los algoritmos de zonas de protección basados en ondas viajeras.

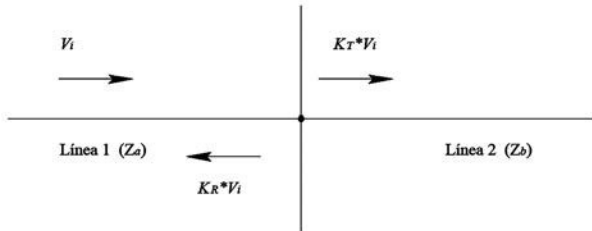
En el caso de los sistemas de transmisión de alta tensión, las ondas viajeras que se generan ante la aparición de un disturbio en la línea de transmisión se propagan por las líneas hasta que llegan a una discontinuidad (elementos en una subestación, unión de varias líneas, etc.); en ese punto las ondas se dividen en una onda reflejada y onda transmitida (figura 6), la onda viajera reflejada viaja a través de la línea superpuesta a la onda incidente. La onda transmitida o refractada penetra más allá de la discontinuidad.

La magnitud de cada una de esas ondas está dada por los coeficientes de reflexión ( $K_R$ ) y transmisión ( $K_T$ ) los cuales son de la forma:

$$K_R = \frac{Z_b - Z_a}{Z_a + Z_b} \quad K_T = \frac{2Z_b}{Z_a + Z_b}$$

donde:  $Z_a$  y  $Z_b$  corresponden a las impedancias características de cada una de las líneas. Cabe mencionar que la impedancia característica de la línea, dependiendo de la geometría de la línea, definida como:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$



**Figura 7.** Comportamiento de las ondas viajeras al alcanzar una discontinuidad en un SEP.

Las ondas viajeras propagándose por una línea de transmisión experimentan una modificación en su contorno al atravesar por una discontinuidad que se caracteriza por un cambio de impedancia. En el caso de la figura 6, la onda incidente  $V_i$  que va propagándose por la línea 1 con una impedancia características  $Z_a$  alcanza la discontinuidad (subestación) y continúa a través de la línea 2 con una impedancia  $Z_b$  como una onda refractada. Se aprecia que existe una modificación en la magnitud de la onda; esto se refleja en una modificación en el contorno de la onda viajera entre  $V_i$  y  $K_R V_i$ .

En el caso de que ambas líneas sean idénticas ( $Z_a = Z_b$ ), el contorno de la onda viajera no se ve afectado, y no existe onda reflejada. Esta situación, es difícil que se presenten en sistemas eléctricos de potencia reales. Así, las ondas viajeras que se propagan a través de una línea de transmisión se ven mínimamente afectadas en su contorno (o bien no se perciben cambios abruptos) aun considerando pérdidas por atenuación.

Por tanto, un frente de onda originado por una falla externa experimenta una modificación en su contorno al pasar por la discontinuidad que representa el cambio de la impedancia característica entre las líneas de transmisión ( $Z_a$  a  $Z_b$  en la figura 7). A diferencia de esto, un frente de onda originado por una falla interna solo es afectado por la atenuación propia de la línea. En general, esta diferencia es muy sutil y difícil de identificar.

Un ACP puede mostrar relaciones que no se habían considerado previamente, y permite interpretaciones que no se podrían hacer con resultados ordinarios, esta

técnica fue inicialmente estudiada por H. Hotelling en 1933 [2, 5] y se define de la siguiente manera.

Para un grupo de vectores  $p$ -dimensionales  $\{t^n\}$ ,  $n \in \{1...N\}$ , los  $q$  ejes principales  $w_j$ ,  $j \in \{1...q\}$  son aquellos ejes ortonormales en los cuales la máxima varianza es retenida por proyección. Se puede demostrar que los ejes  $w_j$  corresponde a los  $q$  eigenvalores dominantes en:

$$S w_j = \lambda_j w_j$$

asociados a los eigenvectores más grandes de la matriz de covarianza de  $S$  formada por:

$$S = \frac{\sum_1^n (t_n - \bar{t})(t_n - \bar{t})}{n - 1}$$

donde  $\bar{t}$  es la media de la muestra. La nueva representación vectorial es:

$$x_n = W^T (t_n - \bar{t})$$

Siendo  $W = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_q]$  y  $x_n$  corresponde a la representación reducida  $q$  dimensional de los vectores  $t_n$ .

Cuando se tienen datos que originalmente tienen  $p$  variables, generalmente su varianza puede ser explicada en términos de un pequeño número  $q$  de componentes principales, de tal forma que la información más representativa contenida en las variables originales se concentra en las primeras  $CP$ , esto significa que el grupo de datos que originalmente consistía de  $n$  observaciones y  $p$  variables puede ser reducido a uno conformado de  $n$  observaciones en  $q$  componentes principales.

#### Resultados obtenidos

Se han realizado simulaciones en el programa PSCAD, utilizando el sistema de prueba de la figura 8, donde la principal característica del sistema es que ambas líneas de transmisión son prácticamente idénticas. La diferencia es que la línea uno tiene un conductor por fase y la línea dos tiene dos conductores por fase, esto es para tener un escenario donde la zona de pérdida de seguridad del algoritmo (figura 7) es muy crítica, ya que el cambio de impedancia característica entre ambas líneas es muy pequeño.

A medida de ejemplo, en la figura 9 se muestra la aplicación del ACP en la identificación de la forma de onda de corriente para fallas monofásicas en la zona interna de la línea de transmisión en una posición.

El algoritmo se ha estado probando en forma exhaustiva con distintos escenarios de simulación utilizando el sistema de la figura 8. Una de las pruebas es la que aparece en la figura 9.



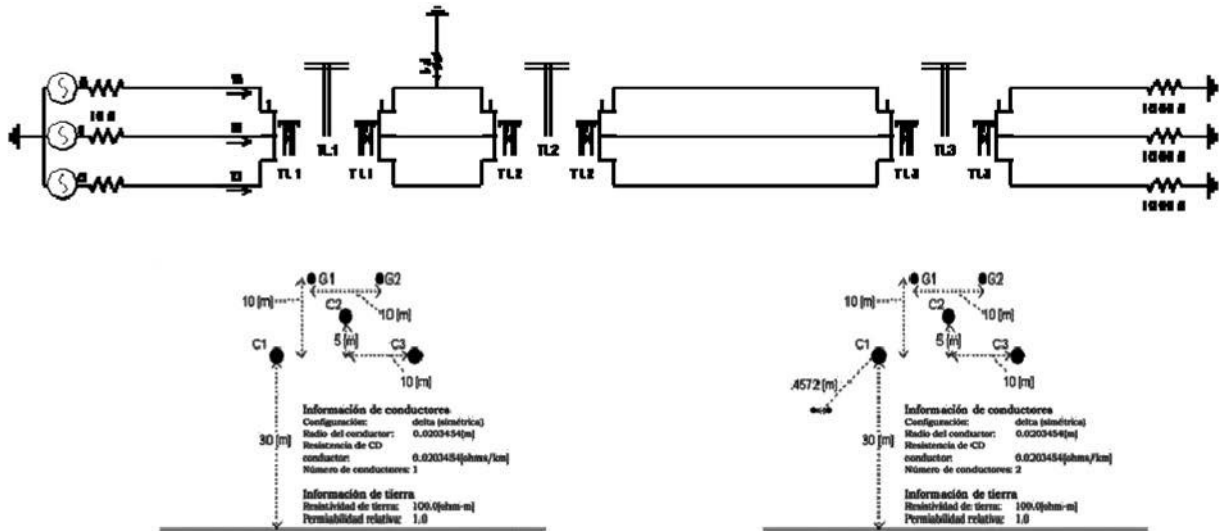


Figura 8. Sistema de prueba radial.

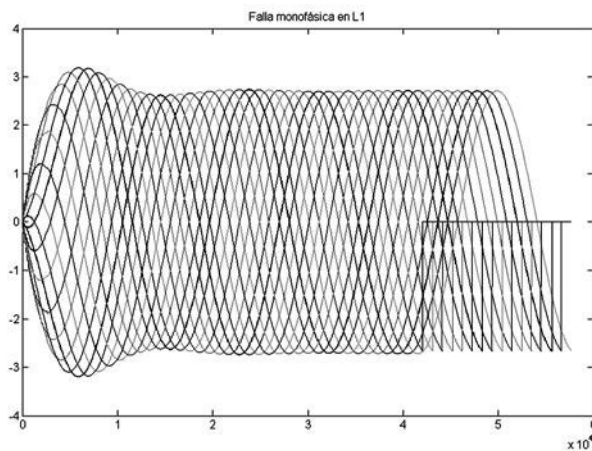


Figura 9. Ejemplo de formas de onda de corriente para fallas monofásicas.

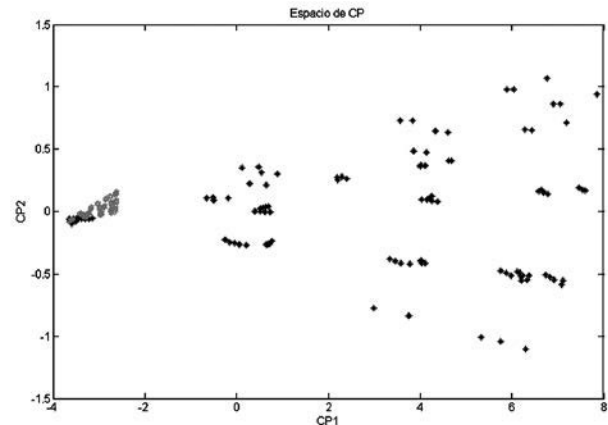


Figura 10. Representación de las ondas viajeras de la figura 9 en el subespacio de CP.

En este caso se simulan 416 casos de fallas monofásicas, que corresponden a 13 fallas internas (10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 95, 97, 99, 99.9% de la longitud de la línea de transmisión interna) y 13 fallas externas (90, 80, 70, 60, 50, 40, 30, 20, 10, 5, 3, 1, 0.1% de la longitud de la línea de transmisión externa) cada una de las cuales se simuló para dieciséis instantes de tiempo distintos.

El porcentaje de efectividad del resultado pretendido es del 94%, no obstante, esto no ha sido completamente satisfactorio.

## 5 CONCLUSIONES

Es posible utilizar la técnica de ACP con el propósito de obtener una representación en un subespacio de dos dimensiones de las mediciones de corriente obtenidas a partir de un cortocircuito en LT.

Al aplicar el ACP se simplifica el proceso de reconocimiento de las formas de onda de corriente a través de su representación en un subespacio de dos dimensiones, que corresponden a las primeras dos componentes principales más dominantes, cuyos ejes son los eigenvectores asociados a los eigenvalores de mayor valor de la matriz de covarianza de los datos originales.

A partir de los resultados expresados en este trabajo, es posible resolver el problema de localización de fallas en LT a través del análisis de la distancia de cada punto en el plano al eje de separación.

El algoritmo de protección propuestos en algunos trabajos de la actualidad utilizan una frecuencia de muestreo de 1 MHz ( $\Delta t = 1$  seg), lo cual no es realizable en los relevadores de protección actuales, que no superan 8 kHz como frecuencia de muestreo, equivalente a 64 muestras por ciclo. Debido a ello, una de

las metas de este trabajo es reducir la frecuencia de muestreo.

Cabe mencionar que los transformadores de corriente (TC) considerados en este trabajo son ideales; sin embargo, poseen un ancho de banda limitado, y actúan como filtros pasa bajos. El ancho de banda práctico de un TP es de 2kHz, mientras que el de un TC es de 10kHz [13]; por esta razón, en este trabajo solo se utilizan ondas viajeras de corriente originados por la falla.

Evidentemente las ondas viajeras en una línea de transmisión se originan, además de por cortocircuitos, por maniobras de apertura y cierre de interruptores. Por lo que, se deberán enfocar los esfuerzos para desarrollar un algoritmo capaz de discriminar entre la onda viajera originada por una falla y por un cortocircuito. Este aspecto no es considerado en los trabajos desarrollados hasta el momento.

## REFERENCIAS

- [1] Christopher Chatfield and Alexander J. Collins Introduction to Multivariate Analysis, School on Mathematics, Bath University, Chapman and Hall, London-New York 1980.
- [2] T. W. Anderson An Introduction to multivariate Statistical Analysis, Stanford University, John Wiley and sons. December 1957.
- [3] Murray R. Spiegel Estadística, Harford Graduate Center, Serie Sahum, 2a Edición, España 1991.
- [4] Harvey Gerber Algebra Lineal, Simnon Fraser University, Grupo editorial Iberoamericana, EUA 1992.
- [5] Stefan Van Aelst Principal Component Analysis, Ghent University, Faculty of Sciences, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Krijgslaan 281, S9 B-9000 Gent BELGIUM.

