

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN**  
**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**



“Análisis De Estabilidad Y Seguimiento De  
Trayectorias de Sistemas Dinámicos  
Complejos  
Y Con Retardo En El Tiempo Usando Redes  
Neuronales Adaptables”

Por

**SANTIAGO ARROYO GARZA**

Como requisito parcial para obtener el grado  
de Doctor en Ciencias con Orientación en  
Matemáticas

Junio 2015

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS  
DOCTORADO EN CIENCIAS CON ORIENTACIÓN EN MATEMÁTICAS

Los miembros del comité de tesis recomendamos que la tesis

“Análisis de Estabilidad y Seguimiento de Trayectorias de Sistemas Dinámicos Complejos y con retardo en el tiempo usando Redes Neuronales Adaptables”

Realizada por el estudiante Santiago Arroyo Garza sea aceptada para su defensa como opción al grado de Doctor en Ciencias con Orientación en Matemáticas.

El Comité de Tesis

---

Dr. José Paz Pérez Padrón

Director/Asesor

---

Dr. Joel Pérez Padrón

Co-asesor

---

Dra. Lilia Lopez Vera

Revisor

---

Dr. Francisco Rodriguez Ramírez

Revisor

---

Dr. Juan Pablo Salinas Estevané

Revisor

Vo. Bo.

---

Dr. Romeo de Jesús Selvas Aguilar

División de Estudios de Posgrado

San Nicolás de los Garza, Nuevo León Junio del 2015

# RESUMEN

Santiago Arroyo Garza

Fecha de graduación: Junio 2015

Título del estudio: “Análisis De Estabilidad Y Seguimiento De Trayectorias De Sistemas Dinámicos Complejos Y Con Retardo En El Tiempo Usando Redes Neuronales Adaptables”

## **Propósito y método de estudio**

En esta tesis doctoral se estudia el problema de seguimiento de trayectoria de sistemas no lineales complejos basado en la teoría de estabilidad de Lyapunov. Por medio de esta teoría se obtiene una ley de control que garantiza la estabilidad global asintótica del error de seguimiento entre un sistema dinámico complejo modelado por una red neuronal dinámica y una señal de referencia retardada que el sistema debe de seguir. Basados en la teoría de Lyapunov-Krasovskii, se propone una ley de control PID que garantiza la estabilidad asintóticamente global del error de seguimiento entre una red neuronal recurrente y una red dinámica compleja.

El campo de aplicación de las redes neuronales recurrentes con retardo, mediante la estabilización, identificación y seguimiento de trayectorias, va desde los robots en el sector industrial en el transporte, maquinado y manejo de cargas en medios ambientes difíciles u hostiles, en el sector agropecuario mediante tractores y cosechadoras autónomas, en el sector militar mediante los llamados “drones” en actividades de exploración y vigilancia, con propósitos de entretenimiento, en el campo de la salud, mediante las operaciones asistidas por robots y/o brazos mecánicos y en la investigación y desarrollo de cualquier tipo de robot que pueda resolver cualquier tipo de problema.

Con el fin de ilustrar los resultados analíticos, se presentan al final de este escrito simulaciones de seguimiento de trayectoria de una red dinámica compleja interconectada en el que un nodo es un sistema dinámico de Lorentz y tres nodos más interconectados representados por el sistema dinámico de Chen.

Este trabajo es el resultado de la investigación realizada durante el periodo Enero 2012 a Diciembre 2014 dentro del programa “Doctorado en Ciencias con Orientación en Matemáticas” y se presenta como una tesis para obtener el grado de Doctor en Ciencias con Orientación en Matemáticas. Los resultados han sido publicados y presentados en los siguientes congresos:

### **Publicaciones:**

1. José P. Pérez, Joel Pérez P., Ángel Flores H., Santiago Arroyo, “Complex Dynamical Network Control for Trajectory Tracking Using Delayed Recurrent Neural Networks”, Volume 2014, Article ID 162610, 7 pages <http://dx.doi.org/10.1155/2014/162610>

### **Artículos en memorias de Congresos:**

1. Joel Perez P, Santiago Arroyo, “PID Control Law for Trajectory Tracking of Complex Dynamical Systems Via Delayed Recurrent Neural Networks” Nett Florence-Workshop 2014 “Dynamics of Neural Circuits”, Institute for Complex Systems (ISC), CNR, Sesto Fiorentino, Italy, March 17-20, 2014.
2. Joel Perez, Jose P. Perez, Jose J. Hdz, Santiago Arroyo, Angel Flores, “Trajectory Tracking Error Using PID Control Law for a 2 DOF Helicopter Model via Adaptive Time-Delay Neural Networks” Congreso Nacional de Control Automatico, AMCA, Ensenada, Baja California, Octubre 2013.

### **Participaciones en Congresos:**

1. Joel Perez P, Santiago Arroyo, “PID Control Law for Trajectory Tracking of Complex Dynamical Systems Via Delayed Recurrent Neural Networks” Nett Florence-Workshop 2014 “Dynamics of Neural Circuits”, Institute for Complex Systems (ISC), CNR, Sesto Fiorentino, Italy, March 17-20, 2014

## DEDICATORIA Y AGRADECIMIENTOS

Dedico este trabajo de tesis a mi esposa Rosa Nelly Rodríguez Garza por su comprensión y apoyo que siempre me ha brindado y por ser la compañera del proyecto de vida que Dios tuvo desde siempre destinada para mí. La dedico de manera especial para los 6 hijos que Dios nos regaló como matrimonio, para Rosa Nelly, Santiago, Angie Itzel, Alex Salvador (†), Axel Sebastián (†) y Matteo Zadquiel quienes día a día son el motor motivacional que me impulsa para seguir adelante. Dedico también este trabajo para mis padres Delia Garza Rodríguez (†) y Santiago Arroyo Cervantes (†) a quienes agradezco profundamente todas las enseñanzas, y formación que recibí de su parte en los primeros años de mi vida, y que ahora forman parte importante de lo que soy como persona. Dedico también este trabajo para mis hermanos Miguel Angel, Elizabeth, Manuel Alberto, Luis Carlos y José Luis.

También dedico el esfuerzo y trabajo de este documento a mis compañeros y amigos de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas y a todos aquellos que hicieron posible el que pudiera terminar con el mismo. Aunque la lista es enorme debo mencionar en particular a quienes durante este tiempo y muchos años han estado más cerca con su apoyo y comprensión: para Francisco Rodríguez, Martín Martínez, Mateo Vera, Joel Pérez, José Paz, en fin para todos mis amigos de la facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

Así mismo mi agradecimiento a la Dra. Lilia López Vera por la revisión al presente escrito, por las observaciones hechas y por la valiosa contribución en la estructura del mismo.

Agradezco al Dr. Juan Pablo Salinas, por las correcciones y sugerencias al presente escrito, así como al Dr. Francisco Rodríguez su guía durante el proceso de obtención de grado.

Y por supuesto mi mayor reconocimiento tanto para mi asesor como a mi co-asesor de Tesis, sin cuya directriz el presente trabajo no podría haberse concretado, así como por su apoyo y guía durante la presentación de los resultados obtenidos del presente trabajo, en el congreso de Florencia, Italia. Mi agradecimiento, pero sobre todo, mi amistad por siempre tanto al Dr. José Paz Pérez Padrón como al Dr. Joel Pérez Padrón.

Agradezco a la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, por el apoyo que recibí para la presentación de resultados del presente trabajo, en el Congreso de Florencia, Italia, así como también al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por los apoyos realizados a nuestra institución UANL.

## Contenido

ORGANIZACIÓN DE TESIS.....	1
CAPÍTULO 1 .....	2
INTRODUCCION.....	2
CAPÍTULO 2 .....	4
CONCEPTOS ESENCIALES Y FUNDAMENTOS MATEMATICOS .....	4
2.1 Definiciones .....	4
2.2 Sistemas Dinámicos.....	5
2.3 Teorema de existencia y unicidad .....	6
2.4 Estado de un sistema.....	8
2.5 Estado de Equilibrio .....	8
2.6 Estabilidad según Lyapunov .....	8
2.7 Vector de estado.....	10
2.8 Función de Lyapunov.....	11
2.9 Función de control-Lyapunov.....	12
2.10 Sistema Estable Entrada Estado (ISS).....	13
2.11 Concepto de V-estabilidad.....	13
CAPÍTULO 3 .....	20
FUNDAMENTOS DE LAS REDES NEURONALES .....	20
3.1 Procesamiento De Información Neuronal.....	20
3.2 Operaciones Matemáticas Neuronales .....	23
3.3 Características Dinámicas.....	24
3.4 Unidades Neuronales.....	25
3.5 Funciones De Activación .....	26
3.6 Redes Neuronales Dinámicas En Tiempo Continuo.....	27
3.7 Forma General De Una Red Neuronal Dinámica De Hopfield .....	28
3.8 Condiciones Para Los Puntos De Equilibrio De Una Red Neuronal Dinámica... 31	
CAPITULO 4 .....	34
INTRODUCCIÓN A LAS REDES NEURONALES RECURRENTEs .....	34
4.1 Descripción Matemática De Una Red Neuronal Recurrente .....	34
4.2 Red Genética.....	34
4.3 Análisis De Estabilidad Del Error De Seguimiento .....	35
CAPÍTULO 5 .....	37

SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIAS DE REDES DINÁMICAS COMPLEJAS USANDO REDES NEURONALES RECURRENTE CON RETARDO. ....	37
5.1 Introducción .....	37
5.2 Redes Dinámicas complejas Generales .....	37
5.3 Redes Neuronales recurrentes con retardo. ....	38
5.4 Seguimiento de trayectoria.....	38
5.4 Seguimiento de estabilización de error y diseño de control. ....	40
5.5 Simulaciones .....	45
CAPÍTULO 6 .....	56
LEY DE CONTROL PID POR SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIA DE SISTEMAS DINÁMICOS COMPLEJOS VIA REDES NEURONALES RECURRENTE CON RETARDO. ....	56
6.1 Introducción .....	56
6.2 Redes Dinámicas complejas Generales .....	57
6.3 Redes Neuronales recurrentes con retardo. ....	58
5.4 Seguimiento de trayectoria.....	58
6.4 Seguimiento de estabilización de error y diseño de control. ....	61
6.5 Simulaciones .....	67
CAPITULO 7 .....	78
METODOLOGIA .....	78
CAPITULO 8 .....	79
CONCLUSIONES Y TRABAJO A FUTURO .....	79
Bibliografía .....	81
ANEXOS: Participación y Presentación en Congreso de Italia.....	83

## Índice de Figuras

2.1 Una trayectoria $\Gamma$ del sistema 2.1 .....	06
2.2 El flujo $\phi_t$ del sistema 2.1 .....	06
3.1 Neurona.....	21
3.2 Esquema general de la Sinapsis Química .....	21
3.3 Un modelo neuronal simple como un procesador con múltiples entradas (dendritas) y una sola salida (axón) .....	22
3.4 Operaciones sinápticas y somáticas en un modelo simple de una neurona .....	23
3.5 Modelo no lineal de la Neurona .....	26
3.6 $\sigma x = \tanh c x$ .....	27
3.7 $\sigma'(x) = c \operatorname{sech}^2(c x)$ .....	27
3.8 Estructura de una red neuronal dinámica .....	29
3.9 Diagrama de bloque de una red neuronal dinámica de Hopfield .....	30
3.10 Diagrama de bloque de una estructura de una red neuronal dinámica en tiempo continuo.....	30
5.1 Subestado del atractor de Lorentz con condición inicial $X_1(0) = (10, 0, 10)^T$ .....	46
5.2 Subestados del atractor de Chen con condiciones iniciales $X_{2,3,4}(0) = (-10, 0, 37)^T$ .....	47
5.3 Estructura de la red con cada nodo siendo un sistema de Lorentz y Chen .....	48
5.4 Evolución en el tiempo para el sub-estado x1 con estado inicial $X_{n1}(0) = (10, 0, 10)^T$ .....	50
5.5 Error entre la planta y la red neuronal para el sub-estado x1 .....	50
5.6 Evolución en el tiempo para el sub-estado y1 con estado inicial $X_{n4}(0) = (10, 0, 10)^T$ .....	51
5.7 Error entre la planta y la red neuronal para el sub-estado y1 .....	51
5.8 Evolución en el tiempo para el sub-estado z1 con estado inicial $X_{n1}(0) = (10, 0, 10)^T$ .....	52
5.9 Error entre la planta y la red neuronal para el sub-estado z1 .....	52
5.10 Evolución en el tiempo para el sub-estado x4 con estado inicial $X_{n4}(0) = (20, 20, -10)^T$ .....	53
5.11 Evolución en el tiempo para el sub-estado y4 con estado inicial $X_{n4}(0) = (20, 20, -10)^T$ .....	53
5.12 Evolución en el tiempo para el sub-estado z4 con estado inicial $X_{n4}(0) = (20, 20, -10)^T$ .....	54
6.1 Subestado x1 red neuronal del atractor de Lorentz con condición inicial $X_1(0) = (10, 0, 10)^T$ .....	68
6.2 Subestados del atractor de Chen con condiciones iniciales $X_{2,3,4}(0) = (-10, 0, 37)^T$ .....	69
6.3 Red Neuronal del atractor de Chen con condiciones iniciales $X_{2,3,4}(0) = (-10, 0, 37)^T$ .....	69
6.4 Evolución en el tiempo para el subestado x1(PID) con estado inicial $X_{n1}(0) = (10, 0, 10)^T$ .....	72
6.5 Error entre la planta y la red neuronal para el sub-estado x1(PID) .....	72
6.6 Evolución en el tiempo para el sub-estado y1(PID) con estado inicial $X_{n1}(0) = (10, 0, 10)^T$ .....	73
6.7 Error entre la planta y la red neuronal para el sub-estado y1(PID) .....	73
6.8 Evolución en el tiempo para el sub-estado z1(PID) con estado inicial $X_{n1}(0) = (10, 0, 10)^T$ .....	74
6.9 Error entre la planta y la red neuronal para el sub-estado z1(PID) .....	74
6.10 Evolución en el tiempo para el sub-estado x4(PID) con estado inicial $X_{n4}(0) = (20, 20, -10)^T$ .....	75
6.11 Evolución en el tiempo para el subestado y4(PID) con estado inicial $X_{n4}(0) = (20, 20, -10)^T$ .....	75
6.12 Evolución en el tiempo para el sub-estado z4(PID) con estado inicial $X_{n4}(0) = (20, 20, -10)^T$ .....	76



# ORGANIZACIÓN DE TESIS

Esta tesis se organiza de la siguiente manera:

**En el Capítulo 1**, se da la Introducción.

**En el Capítulo 2**, se exponen los conceptos básicos con los cuales trabajaremos a lo largo de la tesis. Se describe lo que es una planta, los sistemas dinámicos, estado de equilibrio, funciones de Lyapunov y el concepto de V-estabilidad.

**En el Capítulo 3**, se describe los fundamentos de las redes neuronales, cómo funcionan las neuronas en cuanto a procesamiento de información, las operaciones matemáticas que realizan, las unidades neuronales y sus funciones de activación.

**En el Capítulo 4**, en este capítulo se describen los conceptos propios de las redes neuronales recurrentes, la descripción matemática de las mismas así como el análisis de estabilidad del error de seguimiento.

**En el Capítulo 5**, se establece una ley de control por el método inverso por seguimiento de trayectoria usando redes neuronales recurrentes con retardo. Se obtienen simulaciones para este caso.

**En el Capítulo 6**, se establece una ley de control PID por seguimiento de trayectoria usando redes neuronales recurrentes con retardo. Se obtienen simulaciones de esta ley de control.

**En el Capítulo 7**, se declara que la principal metodología está basada en las redes neurales recurrentes, funciones de Lyapunov y control Proporcional-Integral (PI). El nuevo esquema de control es aplicado a la sincronización del caos y los resultados son ilustrados por medio de una simulación con un software apropiado.

Finalmente, en el **Capítulo 8** se presentan las conclusiones y trabajo a futuro.

# CAPÍTULO 1

## INTRODUCCION

### **Demanda social e institucional**

La Responsabilidad Social ha adquirido gran relevancia a nivel internacional, desarrollando normativas acerca de los factores que determinan la mejora social, económica y medioambiental, así como la vinculación entre las organizaciones y la sociedad, con la finalidad de generar intervenciones responsables, sustentables y sostenibles que evidencien resultados, efectos e impactos en las personas y en las comunidades. Por el alto impacto de las Universidades en sus comunidades, la reflexión de la Responsabilidad Social se ha trasladado al mundo académico y universitario, como un componente ético en la formación de sus egresados, a través de la Responsabilidad Social Universitaria.

La UANL ha definido la Visión 2020 “La Universidad Autónoma de Nuevo León es reconocida en el año 2020 como una institución socialmente responsable y de clase mundial por su calidad, relevancia y contribuciones al desarrollo científico y tecnológico, a la innovación, la construcción de escuelas de pensamiento y al desarrollo humano de la sociedad nuevoleonense y del País”. El presente estudio impacta a la Dimensión 2 del Modelo de Responsabilidad Social de la UANL, en la que se demanda el desarrollo de Investigaciones socialmente pertinentes, que contribuyan a la solución de problemas sociales.

### **Antecedentes y avances en la solución de la problemática**

Los problemas de control automático que surgen en una amplia variedad de campos de la ingeniería, son caracterizados esencialmente por medios ambientes inciertos y por ser no lineales. La aplicación de redes neuronales a control automático es principalmente para construir un modelo de la planta (es un sistema no lineal el cual queremos controlar), y con base en este modelo se diseñan leyes o acciones de control con el propósito de lograr un comportamiento específico. Las redes neuronales que se usarán en esta tesis son redes neuronales dinámicas descritas por ecuaciones diferenciales.

Resultados recientes [1], [2], [3], [4] muestran que las redes neuronales son una herramienta muy efectiva, para aproximar e identificar una amplia clase de sistemas no lineales complejos cuando la información del modelo matemático es incompleta; por lo tanto, desde su aparición las redes

neuronales presentan un creciente interés debido a su capacidad, al menos teórica, de aproximación de funciones no lineales.

Un problema fundamental en control automático de sistemas no lineales es el seguimiento de trayectorias. Muchas de estas estructuras usan redes estáticas (llamadas también pre-alimentadas) [5], [6]. Recientemente el uso de redes recurrentes se ha incrementado [7]. Las primeras aplicaciones de redes neuronales en sistemas de control realimentado no incluían análisis rigurosos o métodos de diseño. Actualmente, el control neuronal es una técnica bien establecida, basada en análisis bien fundamentados, como se ejemplifica en [5], para redes estáticas, y en [8], [9] para las recurrentes. Recientemente, una tendencia notable en control neuronal es integrar redes neuronales recurrentes, con técnicas efectivas de control no lineal.

Hay una gran cantidad de sistemas con retardo en el tiempo en los procesos industriales, para los cuales es difícil diseñar controladores debido precisamente a esta propiedad de retardo, ya que estos sistemas en general tiene una mayor sobrecarga, un tiempo de ajuste más largo y nos son estables.

En esta tesis doctoral se presenta un nuevo campo de aplicación de las redes neuronales dinámicas con retardo; se presentan los resultados del diseño de una ley de control PID que garantiza la estabilidad del error de seguimiento entre planta y señal de referencia, así como el de una ley de control obtenida por el método de Lyapunov la cual también garantiza la estabilidad del error de seguimiento entre la planta y la referencia, estas dos metodologías pueden considerarse inversas una de la otra. Se desarrolla un análisis sistemático para estabilización, identificación y seguimiento de trayectorias de plantas no lineales modeladas por medio de redes neuronales recurrentes en el tiempo y con retardo para el caso determinístico. Para esto se obtienen leyes de control y leyes de adaptación de pesos en la red neuronal, las cuales garantizan en conjunto que la planta siga dicha señal de referencia. La herramienta principal utilizada para este análisis está basada en la metodología de análisis de estabilidad de Lyapunov.

El programa de Doctorado en Ciencias con Orientación en Matemáticas, ha consolidado grupos de investigación en Matemática Aplicada, que han permitido generar y aplicar conocimiento matemático. El “Análisis de Estabilidad y Seguimiento de Trayectorias de Sistemas Dinámicos Complejos y con retardo en el tiempo usando Redes Neuronales Adaptables”, se presenta como un producto científico de relevancia social, que enfoca el desarrollo humano sostenible de impacto para el sector salud, militar, industrial, comercial, etc.

## CAPÍTULO 2

### CONCEPTOS ESENCIALES Y FUNDAMENTOS MATEMATICOS

*En este capítulo se presentan los conceptos esenciales así como los fundamentos matemáticos utilizados en el presente trabajo. Se hace una breve descripción de los sistemas dinámicos, a través de los cuales podemos modelar sistemas dinámicos complejos (plantas).*

#### 2.1 Definiciones

**Variable controlada y variable manipulada.** La variable *controlada* es la cantidad o condición que se mide o se controla. La variable *manipulada* es la cantidad o condición que el controlador modifica para afectar el valor de la variable controlada. Por lo común la variable controlada es la salida (resultado) del sistema. *Controlar* significa medir el valor de la variable controlada del sistema y aplicar la variable manipulada al sistema para corregir o limitar una desviación del valor medido a partir del valor deseado.

**Plantas.** Una planta puede ser una parte de un equipo, tal vez un conjunto de las partes de una máquina que funcionan juntas, el propósito de la cual es ejecutar una operación particular. En este trabajo, llamaremos planta a cualquier objeto físico que se va a controlar (esto puede ser cualquier brazo mecánico, un helicóptero, un reactor químico, una nave espacial, etc.)

**Proceso.** En este trabajo entenderemos por proceso cualquier operación que se va a controlar.

**Sistemas.** Un sistema es una combinación de componentes que actúan juntos y realizan un objetivo determinado.

**Perturbaciones.** Es una señal que tiende a afectar negativamente el valor de la salida de un sistema. Si la perturbación se genera dentro del sistema se denomina *interna*, en tanto que una perturbación *externa* se produce fuera del sistema y es una entrada.

**Controlador PID.** Es un mecanismo de control por realimentación ampliamente usado en sistemas de control industrial. Este calcula la desviación o error entre un valor medido y un valor deseado. El algoritmo del control PID consiste de tres parámetros distintos: el proporcional, el integral, y el derivativo.

## 2.2 Sistemas Dinámicos

Los sistemas dinámicos son sistemas cuyos parámetros internos (variables de estado) siguen una serie de reglas temporales. Se le llama sistemas porque están descritos por un conjunto de ecuaciones (sistema) y dinámicos porque sus parámetros varían con respecto a alguna variable que generalmente es el tiempo. Un sistema dinámico da una descripción funcional de la solución de un problema físico o del modelo matemático que describe el problema físico.

Matemáticamente hablando, un sistema dinámico es una función  $\phi(t, x)$  definida para toda  $t \in \mathfrak{R}$  y  $x \in E \subset \mathfrak{R}^n$ , el cual describe como los puntos  $x \in E$  se mueven con respecto al tiempo.

Las siguientes definiciones son tomadas de [10], [11], [12], [13] y [14]

**Definición 1** *Un sistema dinámico en  $E$  es una función  $\phi : \mathfrak{R} \times E \rightarrow E$  de clase  $C^1$  donde  $E$  es un subconjunto abierto de  $\mathfrak{R}^n$  y si  $\phi_t(x) = \phi(t, x)$  entonces  $\phi_t$  satisface.*

- i)  $\phi_0(x) = x$ , para toda  $x \in E$
- ii)  $\phi_t \circ \phi_s(x) = \phi_{t+s}(x)$  para toda  $s, t \in \mathfrak{R}$  y  $x \in E$ .

En ii) de la definición anterior, el operador “o” significa el operador composición, esto es

$$\phi_t \circ \phi_s(x) = \phi_t(\phi_s(x)) = \phi_{t+s}(x).$$

En este capítulo, definiremos el flujo  $\phi_t$ , de un sistema no lineal

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.1}$$

En la siguiente definición, denotaremos el máximo intervalo de existencia  $(\alpha, \beta)$  de la solución  $\phi(t, x_0)$  del problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Por  $I(x_0)$ , puesto que los extremos  $\alpha$  y  $\beta$  del intervalo máximo, dependen por lo general de la condición inicial  $x_0$ .

**Definición 2** *Sea  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathfrak{R}^n$  y sea  $f \in C^1(E)$ . Para  $x_0 \in E$  sea  $\phi(t, x_0)$  la solución del problema de valor inicial (2.2) definida en su máximo intervalo de existencia  $I(x_0)$ . Entonces, para  $t \in I(x_0)$ , el conjunto de mapeos  $\phi_t$ , definida por*

$$\phi_t(x_0) = \phi(t, x_0) \tag{2.3}$$

Es llamado el flujo de la ecuación diferencial (2.1) o el flujo definido por la ecuación (2.1);  $\phi_t$  es también referido como el flujo del campo vectorial  $f(x)$ .

Si consideramos que el punto inicial  $x_0$  está fijo y establecemos  $I = I(x_0)$ , entonces el mapeo de  $\phi(\cdot, x_0): I \rightarrow E$  define una curva de solución o trayectoria de solución del sistema (2.1) a través del punto  $x_0 \in E$ . Como es usual, el mapeo  $\phi(\cdot, x_0)$  es identificado con su gráfica en  $I \times E$  y una trayectoria es visualizada como un movimiento a lo largo de la curva  $\Gamma$  a través del punto  $x_0$  en el subconjunto  $E$  del espacio de fase  $\mathbb{R}^n$  como se ve en la figura 2.1. Por otro lado, si pensamos en el punto  $x_0$  como variante a través del de  $K \subset E$ , entonces el flujo de la ecuación diferencial (2.1),  $\phi_t: K \rightarrow E$  puede ser vista como el movimiento de todos los puntos en el conjunto  $K$ , como en la figura 2.2.

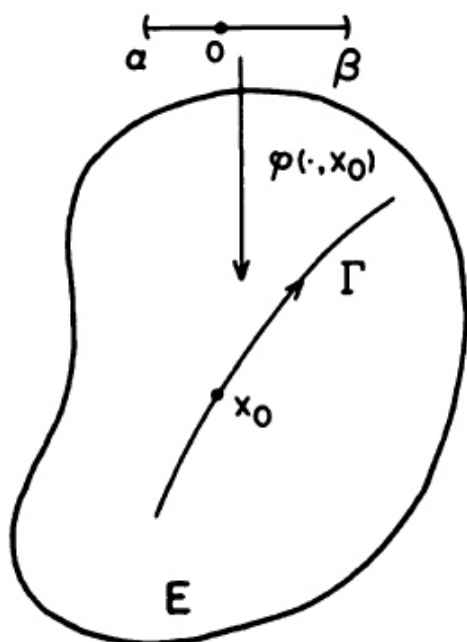


Figura 2.1 Una trayectoria  $\Gamma$  del sistema (2.1)

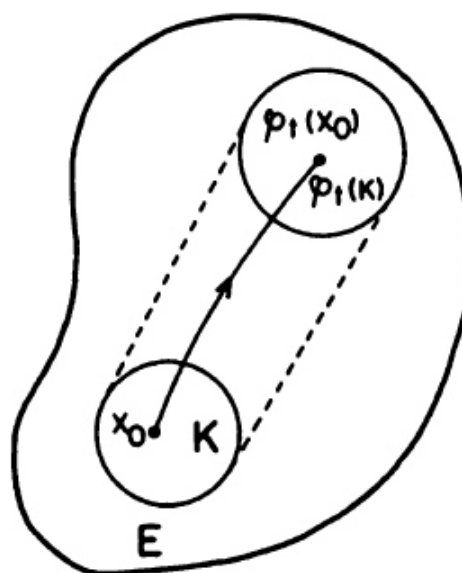


Figura 2.2 El flujo  $\phi_t$  del sistema (2.1)

### 2.3 Teorema de existencia y unicidad

En algunas de estas definiciones consideraremos sistemas autónomos de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\dot{x} = f(x)$$

en oposición a los sistemas no autónomos

$$\dot{x} = f(x, t) \tag{2.4}$$

Donde la función  $f$  puede depender de la variable  $t$ ; sin embargo cualquier sistema no autónomo (2.3) con  $x \in \mathfrak{R}^n$  puede ser escrita como un sistema autónomo (2.1) con  $x \in \mathfrak{R}^{n+1}$  simplemente por establecer  $x_{n+1} = t$  y  $\dot{x}_{n+1} = 1$ .

Las teorías fundamentales para 2.1 y 2.3 no difieren significativamente por lo que es posible obtener la existencia y unicidad de soluciones de 2.3 por hipótesis más débiles de  $f$  como función de  $t$ .

**Definición 3** Suponga que  $f \in C(E)$  donde  $E$  es un subconjunto abierto de  $\mathfrak{R}^n$ . Entonces  $x(t)$  es una solución de la ecuación diferencial 2.1 en un intervalo  $I$  si  $x(t)$  es diferenciable en  $I$  y si para todo  $t \in I$ ,  $x(t) \in E$  y

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad (2.5)$$

Y dado  $x_0 \in E$ ,  $x(t)$  es una solución del problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

En un intervalo  $I$  si  $t_0 \in I$ ,  $x(t_0) = x_0$  y  $x(t)$  es una solución de la ecuación diferencial 2.1 en el intervalo  $I$ .

Con el fin de aplicar el método de aproximaciones sucesivas para establecer la existencia de la solución de 2.1, tenemos que definir el concepto de una condición de *Lipschitz* y mostrar como las funciones  $C^1$  son localmente *Lipschitz*.

**Definición 4** Sea  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathfrak{R}^n$ . Una función  $f$  de  $E \rightarrow \mathfrak{R}^n$  se dice que satisface una condición *Lipschitz* en  $E$  si hay una constante positiva  $K$  tal que para todas las  $x, y \in E$

$$|f(x) - f(y)| \leq K(x - y). \quad (2.6)$$

La función  $f$  se dice que es localmente *Lipschitz* en  $E$  si para cada punto  $x_0 \in E$  hay una  $\varepsilon$ -vecindad de  $x_0$ ,  $N_\varepsilon(x_0) \subset E$  y una constante  $K_0 > 0$  tal que para todas las  $x, y \in N_\varepsilon(x_0)$

$$|f(x) - f(y)| \leq K_0(x - y). \quad (2.7)$$

Por una  $\varepsilon$ -vecindad de un punto  $x_0 \in \mathfrak{R}^n$ , lo cual significa una bola abierta de radio positivo  $\varepsilon$ ; o sea

$$N_\varepsilon(x_0) = \{ x \in \mathfrak{R}^n \mid |x - x_0| < \varepsilon \} \quad (2.8)$$

**Lema 1** Sea  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathfrak{R}^n$  y sea  $f: E \rightarrow \mathfrak{R}^n$ . Entonces sí,  $f \in C^1(E)$ ,  $f$  es localmente *Lipschitz* en  $E$ .

## 2.4 Estado de un sistema

El estado de un sistema dinámico se refiere al conjunto más pequeño de variables (las cuales se denominan variables de estado) de modo que el conocimiento de estas variables en conjunto con el conocimiento de la entrada para un tiempo  $t \geq t_0$  determina por completo el comportamiento del sistema para cualesquier tiempo  $t \geq t_0$ .

A lo largo de esta tesis se hablará indistintamente de estado de equilibrio o punto de equilibrio del sistema. Sin pérdida de generalidad supondremos que el estado de equilibrio de (2.1) es  $x = 0$ , puesto que, si dicho sistema tiene un estado de equilibrio  $x^* \neq 0$ , esto es  $f(x^*, t) = 0, \forall t \geq 0$ , entonces el siguiente cambio de coordenadas  $y = x - x^*$  hace que el sistema (2.1) en las nuevas coordenadas tenga a  $y = 0$  como estado de equilibrio.

## 2.5 Estado de Equilibrio

Un buen lugar para empezar a analizar sistemas no-lineales es determinar los estados de equilibrio de (2.1) y describir el comportamiento de (2.1) cerca de sus estados de equilibrio. Así mismo el comportamiento de un sistema no lineal como (2.1) cerca de un punto de equilibrio hiperbólico  $x_0$  es cualitativamente determinado por el comportamiento del sistema lineal

$$\dot{x} = Ax \quad (2.9)$$

Con la matriz  $A = Df(x_0)$ , cerca del origen. La función lineal  $Ax = Df(x_0)x$  es llamada la parte lineal de  $f$  en  $x_0$ .

**Definición 5** Un punto  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  es llamado un punto de equilibrio o punto crítico de (2.1) si  $f(x_0) = 0$ . Un punto de equilibrio  $x_0$  es llamado un punto de equilibrio hiperbólico de (2.1) si ninguno de los eigenvalores de la matriz  $Df(x_0)$  tiene parte real cero. El sistema lineal (2.9) con la matriz  $A = Df(x_0)$  es llamada la linealización de (2.1) en  $x_0$ .

La estabilidad de puntos de equilibrio no hiperbólico es típicamente más difícil de determinar. Un método debido a Lyapunov, el cual es muy útil para decidir la estabilidad de puntos de equilibrio no hiperbólicos se presenta enseguida:

## 2.6 Estabilidad según Lyapunov

El método de Lyapunov puede ser utilizado para determinar la estabilidad de puntos fijos cuando la información de linealización es inconclusa. La estabilidad de puntos de equilibrio generalmente se caracteriza en el sentido de Lyapunov, el cual nos dice que un punto de equilibrio se dice *estable* si todas las soluciones que se inician en las cercanías del punto de equilibrio permanecen en las cercanías del punto de equilibrio; de otro modo el punto de equilibrio es *inestable*. Un punto de equilibrio se dice asintóticamente estable si todas las



soluciones que se inicien en las cercanías del punto de equilibrio, no solo permanecen en las cercanías del punto de equilibrio, sino que además tienden hacia el equilibrio a medida que el tiempo se aproxima al infinito. Los teoremas de Lyapunov dan condiciones suficientes para estabilidad de puntos de equilibrio. Vamos a definir estabilidad del origen como una propiedad uniforme con respecto al instante inicial

**Definición 6** El estado de equilibrio  $x = 0$  de (2.1) es llamado un estado de equilibrio:

- Estable si, para todo  $t_0 \geq 0$  y  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta(t_0, \varepsilon)$  tal que

$$\|x_0\| < \delta(t_0, \varepsilon) \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0 \quad (2.10)$$

- Uniformemente estable, si para cada  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  independientemente de  $t_0$  tal que (2.10) se satisface.
- Inestable, si no es estable.
- Asintóticamente estable, si es estable y existe  $c = c(t_0)$  tal que  $x(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$  para todo  $\|x(t_0)\| < c$ .
- Uniformemente asintóticamente estable, si es uniformemente estable y existe  $c > 0$  independientemente de  $t_0$  tal que para todo  $\|x(t_0)\| < c$ ,  $x(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , uniformemente en  $t_0$ ; es decir para cada  $\varepsilon > 0$  Existe  $T = T(\varepsilon)$  tal que

$$\|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0 + T(\varepsilon) \quad \forall \|x(t_0)\| < c \quad (2.11)$$

- Globalmente uniformemente asintóticamente estable, si es uniformemente estable y para cada par de números positivos  $\varepsilon$  y  $c$ , existe  $T(\varepsilon, c)$  tal que

$$\|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0 + T(\varepsilon, c) \quad \forall \|x(t_0)\| < c \quad (2.12)$$

Se pueden caracterizar las propiedades introducidas en la definición anterior, en términos de un tipo especial de funciones escalares, conocidas como funciones clase  $K$  y clase  $KL$ .

**Definición 7 (Función Clase  $K$ )** Una función continua  $\alpha : \mathfrak{R}^+ \rightarrow \mathfrak{R}^+$  se dice que pertenece a la clase  $K$ , si es estrictamente creciente y  $\alpha(0) = 0$ . Además, se dice que pertenece a la clase  $K_\infty$  si  $\alpha \in K$  y  $\alpha(r) \rightarrow \infty$  cuando  $r \rightarrow \infty$ .

**Definición 8 (Función clase  $KL$ )** Una función continua  $\beta : \mathfrak{R}^+ \times \mathfrak{R}^+ \rightarrow \mathfrak{R}^+$  se dice que pertenece a la clase  $KL$ , si para cada  $s$  fijo el mapeo

$\beta(r, s)$  pertenece a la clase  $k_\infty$  con respecto a  $r$  y para cada  $r$  fijo el mapeo  $\beta(r, s)$  es decreciente con respecto a  $s$  y  $\beta(r, s) \rightarrow 0$  cuando  $s \rightarrow \infty$ .

Usando las definiciones anteriores, podemos dar definiciones equivalentes para estabilidad uniformemente estable y la estabilidad uniformemente asintóticamente estable que caracterizan los estados de equilibrio de (2.1) como:

**Definición 9** El estado de equilibrio de (2.1) es:

- Uniformemente estable, si existe una función  $\alpha(\cdot)$  clase  $K_\infty$  tal que

$$|x(t)| \leq \alpha(|x(t_0)|), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad \forall x(t_0) \in \mathbb{R}^n \quad (2.13)$$

- Uniformemente asintóticamente estable, si existe una función  $\beta(\cdot, \cdot)$  clase  $KL$  tal que

$$|x(t)| \leq \beta(|x(t_0)|, t - t_0), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad \forall x(t_0) \in \mathbb{R}^n \quad (2.14)$$

- Globalmente uniformemente asintóticamente estable si (2.14) se satisface para cualquier estado inicial  $x(t_0)$

Un caso especial de estabilidad asintótica uniforme ocurre cuando la función  $\beta$  en (2.14) tiene la forma  $\beta(r, s) = k r e^{-\gamma s}$

**Definición 10** (Estabilidad exponencial); El estado de equilibrio de (2.1) es exponencialmente estable si la desigualdad (2.14) se satisface con

$$\beta(r, s) = k r e^{-\gamma s}, k > 0, \gamma > 0. \quad (2.15)$$

Y es globalmente exponencialmente estable si esta condición se satisface para cualquier estado inicial.

## 2.7 Vector de estado

Si se tiene la necesidad de  $\eta$  variables de estado para poder describir de manera completa el comportamiento de un sistema determinado, éstas  $\eta$  variables de estado se consideran los  $\eta$  componentes de un vector  $x$ . A tal vector se le denomina *vector de estado*. Por lo tanto un vector de estado es todo aquel que logra determinar de manera única el estado del sistema  $x(t)$  para cualquier tiempo  $t \geq t_0$ , una vez que se logra obtener el estado en el tiempo  $t = t_0$  y se especifica la entrada para una vez que se logra obtener el estado en el tiempo y se especifica la entrada  $u(t)$  para  $t \geq t_0$ .

**Definición 11** Un campo vectorial  $f$  en un subconjunto abierto  $U$  de  $\mathfrak{R}^n$  es una función que asigna a cada  $x \in U$  un vector columna  $f(x) \in \mathfrak{R}^n$ , lo cual denotaremos como  $f : U \rightarrow \mathfrak{R}^n$ ,  $U \subset \mathfrak{R}^n$

**Definición 12** Dado un campo vectorial  $f \in C^\infty$  (infinitamente diferenciable) en  $\mathfrak{R}^n$  y un campo escalar  $h \in C^\infty$  en  $\mathfrak{R}^n$ , se define la derivada de Lie de  $h$  con respecto  $f$  como

$$L_f h \triangleq \langle dh, f \rangle \quad (2.16)$$

Donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota el producto interno de  $dh$  y  $f$ , esto es:

$$\langle dh, f \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i} f_i \quad (2.17)$$

## 2.8 Función de Lyapunov

Para contestar la cuestión de si un punto de equilibrio no hiperbólico es estable, asintóticamente estable o inestable, el método de Lyapunov nos da respuesta a esta cuestión.

**Definición 13** Si  $f \in C^1(E)$ ,  $V \in C^1(E)$  and  $\phi_t$  es el flujo de la ecuación diferencial (2.1), entonces para  $x \in E$  la derivada de la función  $V(x)$  a lo largo de la solución  $\phi_t(x)$

$$\dot{V}(x) = \left. \frac{d}{dt} V(\phi_t(x)) \right|_{t=0} = DV(x)f(x) \quad (2.18)$$

Esta última igualdad sigue la regla de la cadena. Si  $V(x)$  es negativa en  $E$  Entonces  $V(x)$  decrece a lo largo de la solución  $\phi_t(x_0)$  para  $x_0 \in E$  en  $t = 0$ . Además en,  $\mathfrak{R}^2$ , si  $V(x) \leq 0$ , con la igualdad solo en  $x = 0$ , entonces para números pequeños positivos  $C$ , la familia de curvas  $V(x) = C$  constituye una familia de curvas cerradas, encerrando el origen y las trayectorias de (2.1) a través de estas curvas desde su exterior hasta su interior conforme se incrementa el tiempo  $t$ . Es decir es asintóticamente estable. Una función  $V: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$  satisface la hipótesis del siguiente teorema que es llamado función de Lyapunov

**Teorema 1** Sea  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathfrak{R}^n$  conteniendo  $x_0$ . Suponga que  $f \in C^1(E)$  y que  $f(x_0) = 0$ . Suponga además que existe una función valuada real  $V \in C^1(E)$  que satisface  $V(x_0) = 0$  y  $V(x) > 0$  si  $x \neq x_0$ . Entonces (a) si  $\dot{V}(x) \leq 0$  para toda  $x \in E$ ,  $x_0$  es estable; (b) si  $\dot{V}(x) < 0$  para todo  $x \in E \sim \{x_0\}$ , es asintóticamente estable; (c) si  $\dot{V}(x) > 0$  para todo  $x \in E \sim \{x_0\}$ ,  $x_0$  es inestable.

## 2.9 Función de control-Lyapunov

En teoría de control, una función de control-Lyapunov es una función de Lyapunov  $V(x)$  para un sistema con entradas de control. Como ya vimos, la función ordinaria de Lyapunov se utiliza para probar si un sistema dinámico es estable (mas restrictivamente, asintóticamente estable). Es decir si el sistema empezando en un estado  $x \neq 0$  en algún dominio  $D$  puede permanecer en  $D$  o para estabilidad asintótica pueda eventualmente retornar a  $x = 0$ . La función de control-Lyapunov se utiliza para comprobar si un sistema es estabilizable por retroalimentación, es decir si para cualquier estado  $x$  existe un control  $u(x, t)$  tal que el sistema pueda ser llevado al estado cero mediante la aplicación del control  $u$ .

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (2.19)$$

Consideremos la derivada en el tiempo de una función candidata de Lyapunov  $V(x)$  para el sistema (2.9):

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \frac{\partial V}{\partial x} g(x)u \triangleq L_f V + L_g V u \quad (2.20)$$

$L_f V + L_g V$  son las derivadas de Lie usuales de  $V$  con respecto a  $f$  y  $g$  respectivamente.

El objetivo es encontrar una ley de control  $u = \alpha(x)$  que haga de  $\dot{V}$  una función definida negativa en  $x$ ; lo anterior llevó a los autores [13] a enunciar la siguiente definición:

**Definición 14** Una función suave definida positiva y radialmente no acotada  $V(x)$  es llamada una función Lyapunov de control (*clf*, por sus siglas en inglés) [13] si:

$$\inf_{u \in \mathbb{R}^m} \{L_f V + L_g V u\} < 0, \forall x \neq 0 \quad (2.21)$$

El siguiente Lema es de ayuda para encontrar la ley de control  $u = \alpha(x)$  que haga de  $\dot{V}$  una función definida negativa.

**Lema 2** Una función suave definida positiva y radialmente no acotada  $V(x)$  es una *clf* si  $L_g V = 0 \Rightarrow L_f V < 0, \forall x \neq 0$  [13].

**Definición 12** Una *clf*  $V(x)$  se dice satisfacer la propiedad del control pequeño (*scp*, por sus siglas en inglés) si existe una ley  $u = \alpha_c(x)$  continua en  $\mathbb{R}^n$  tal que  $L_f V(x) + L_g V(x)\alpha_c(x) < 0, \forall x \neq 0$

**Teorema 2** (Sontag) El sistema (2.9) es estabilizable por un control de retroalimentación continuo en el origen y suave fuera de él, si y sólo si existe *clf* con la propiedad del control pequeño [28].

## 2.10 Sistema Estable Entrada Estado (ISS)

Considere el sistema no lineal

$$\dot{x} = f(x, t) + g_1(x, t) d \quad (2.22)$$

donde  $x \in \mathfrak{R}^n$  es el estado,  $d \in \mathfrak{R}^r$  es una perturbación,  $f(0, t) \equiv 0$ .

**Definición 13** Decimos que el sistema (2.22) es entrada estado estable (ISS) si existen funciones  $\beta \in K L$  y  $\chi \in K$  tales que, para cada condición inicial  $x(t_0)$  dada y para cada entrada  $d(\cdot)$  continua en  $[0, \infty)$ , la solución existe para cada  $t \geq 0$  y satisface:

$$|x(t)| \leq \beta(|x(t_0)|, t - t_0) + \chi \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} |d(\tau)| \quad (2.23)$$

Para todo  $t_0$  y  $t$  tal que  $0 \leq t_0 \leq t$ .

Considere el sistema, el que además de la perturbación  $d$  tiene la acción de control  $u$ :

$$\dot{x} = f(x) + g_1(x)d + g_2(x)u \quad (2.24)$$

Donde  $u \in \mathfrak{R}^n$  y  $f(0) = 0$

**Definición 14** Se dice que el sistema (2.24) es entrada estado estabilizable, si existe una ley de control  $u = \alpha(x)$  continua en  $\mathfrak{R}^n$ , con  $\alpha(0) = 0$ , y tal que el sistema en lazo cerrado es ISS con respecto a  $d$ .

**Definición 15** Una función suave definida positiva y radialmente no acotada  $V : \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^+ \rightarrow \mathfrak{R}^+$  es llamada una función Lyapunov de control-ISS (iss-clf) para (2.24) si existe una función  $\rho$  clase  $K_\infty$  tal que la siguiente implicación es satisfecha para toda  $x \neq 0$  y toda  $d \in \mathfrak{R}^r$  [28]:

$$|x| \geq \rho(d) \Rightarrow \sup_{u \in \mathfrak{R}^n} \{L_f V + L_{g_1} V d + L_{g_2} V u\} < 0 \quad (2.25)$$

## 2.11 Concepto de V-estabilidad

### Descripción del problema

Considere una red que consiste de  $n$  nodos acoplados difusos y linealmente, en donde cada nodo es un sistema dinámico descrito por

$$\dot{x}_i = f_i(x_i) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{ij} a_{ij} \Gamma (x_j - x_i), \quad i = 1, 2, 3 \dots N \quad (2.26)$$

Donde  $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})^T \in \mathfrak{R}^n$  son los vectores de estado del nodo  $i$ ,  $f_i: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$  representa la auto-dinámica del nodo  $i$ , las constantes  $c_{ij}$  son las fuerzas de acoplamiento entre el nodo  $i$  y el nodo  $j$ ,  $j = 1, 2, 3 \dots N$ . En este modelo la matriz constante  $\Gamma \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  describe la forma de vincular los componentes en cada par de vectores nodos conectados  $(x_j - x_i)$ , mientras que la matriz de acoplamiento  $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{R}^{N \times N}$  denota la configuración de acoplamiento de la red entera: si hay una conexión entre el nodo  $i$  y el nodo  $j$ , entonces  $a_{ij} = a_{ji} = 1$ ; de otro modo  $a_{ij} = a_{ji} = 0$ . Se define el grado  $k_i$  del nodo  $i$  como el número de conexiones al nodo  $i$ , satisfaciendo

$$k_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N a_{ij} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N a_{ji}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Además, establezcamos que los elementos de la diagonal sean  $a_{ii} = -k_i$ ,

$i = 1, 2, \dots, N$  lo cual significa que el acoplamiento es difusivo y define

$$c_{ii} = -(1/k_i) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{ij} a_{ij}$$

para la normalización. Entonces, la red (2.26) puede ser reescrita en forma compacta como

$$\dot{x}_i = f_i(x_i) + \sum_{j=1}^N c_{ij} a_{ij} \Gamma x_j, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (2.27)$$

Asumiendo que los nodos de la red tienen un estado de equilibrio común  $\bar{x} \in \mathfrak{R}^n$ , satisfaciendo

$$f_i(\bar{x}) = 0 \quad i = 1, 2, 3 \dots N. \quad (2.28)$$

Entonces, el estado estacionario homogéneo

$$x_1 = x_2 = \dots = x_N = \bar{x} \quad (2.29)$$

Es un punto de equilibrio trivial de la red completa (2.27), denotada por  $\bar{X} = (\bar{x}^T, \bar{x}^T, \dots, \bar{x}^T)^T \in \mathfrak{R}^{nN}$ . El objetivo es entonces investigar el problema de estabilidad de la red alrededor de  $\bar{x}$ .

Para definir el concepto de V-estabilidad se requiere la siguiente Asunción donde

$$D_i = \{x_i: \|x_i - \bar{x}_i\| < \alpha\}, \quad \alpha > 0, \quad D = \bigcup_{i=1}^N D_i$$

**Asunción 1** Existe una función de Lyapunov continuamente diferenciable  $V(x): D \subseteq \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^+$  que satisface  $V(\bar{x}) = 0$  con  $\bar{x} \in D$ , tal que para cada función de nodo  $f_i(x_i)$ , hay un escalar  $\theta_i$  que garantiza

$$\frac{\partial V(x_i)}{\partial x_i} (f(x_i) - \theta_i \Gamma(\bar{x} - x_i)) < 0 \quad (2.30)$$

$$\forall x_i \in D_i \quad x_i \neq \bar{x} \quad i = 1, 2, \dots, N$$

En lo subsiguiente  $\theta_i$  será llamado grado pasivo. Es importante notar que desde que  $\theta_i$  no es en general único, el grado pasivo teórico es definido a ser el más grande. Sin embargo, dado que esta cantidad solo es usado para deducir suficientes condiciones de estabilidad en asociación con la función común de Lyapunov  $V$ , cualquiera de tales valores de  $\theta_i$  puede ser tomado como el grado de pasividad en la práctica.

El significado físico de la Asunción, es que existe una función  $V$  (como la energía) para todos los nodos de la red, tal que la energía de  $V$  es decreciente a lo largo de la evolución de la dinámica del nodo, con el grado de pasividad  $\theta_i$  siendo positivo cuando sus nodos conectados se ven forzados a evolucionar al punto de equilibrio. Intuitivamente,  $\theta_i < 0$  significa que el  $i$ ésimo nodo necesita energía del exterior para ser estable, mientras que  $\theta_i > 0$  significa que el  $i$ ésimo nodo por sí mismo ya es estable, por lo que podría proveer algo de su energía extra para estabilizar otros nodos en las redes.

Ahora, sin pérdida de generalidad, asumimos que  $\bar{X} = 0$  y se considera la siguiente función de Lyapunov para la red completa (2.17):

$$V_N(x) = \sum_{i=1}^n V(x_i), \quad X = (X_1^T, \dots, X_N^T)^T \quad (2.31)$$

Su derivada en el tiempo, a lo largo de la trayectoria  $X$  está dada por

$$\dot{V}_N(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(x_i)}{\partial x_i} f_i(x_i) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(x_i)}{\partial x_i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{ij} a_{ij} \Gamma(x_j - x_i) \quad (2.32)$$

Es fácil ver que  $V_N(\bar{x}) = 0$  y  $\dot{V}_N(\bar{x}) = 0$ . También la asunción 1 implica que, para  $X \neq \bar{X} = 0$ , se tiene que

$$\dot{V}_N(x) < - \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(x_i)}{\partial x_i} \theta_i \Gamma x_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(x_i)}{\partial x_i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{ij} a_{ij} \Gamma(x_j - x_i) \quad (2.33)$$

Reescribiendo la desigualdad (2.23) como

$$\dot{V}_N(x) < M(x)$$

Donde

$$M(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(x_i)}{\partial x_i} \left( -\theta_i \Gamma x_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{ij} a_{ij} \Gamma(x_j - x_i) \right). \quad (2.34)$$

Se puede verificar el siguiente resultado, donde

$$D = D_1 \times D_2 \times \dots \times D_N \subseteq \mathfrak{R}^{nN}.$$

### Lema 3

(i) La red (2.17) es localmente asintóticamente estable alrededor de su punto de equilibrio si  $M(x) \leq 0$  para todo  $x \in D \setminus \{0\}$ .

(ii) La red (2.17) es localmente exponencialmente estable alrededor de su punto de equilibrio si  $M(x) \leq \mu_1 \|X\|^2, \mu_2 \|x\|^2 \leq V(x) \leq \mu_3 \|x\|^2$  para algunas constantes  $\mu_1, \mu_2, \mu_3 > 0$  para todo  $x \in D$ .

Más aún la región de atracción es dada por:

$$\Omega = \{X : V_N(x) < r\} \quad (2.35)$$

Con  $r = \inf_{x \in \partial D} V_N(x)$ . En caso de que  $x \in D = \mathfrak{R}^{nN}$ , la estabilidad anterior viene a ser global.

Aquí debemos hacer las siguientes 3 observaciones:



Primero, las funciones nodo  $f_i (i = 1, 2, 3, \dots, N)$  no aparecen en la fórmula (2.34) en la cual ellas son reemplazadas por el correspondiente grado de pasividad  $\theta_i$ , respectivamente. Así el impacto de la auto-dinámica del nodo en la estabilidad de la red es transferido al grado de pasividad  $\theta_i$ .

Segundo, si  $(\partial V(x_i)/\partial x_i) \Gamma x_i > 0$ , entonces de esto puede ser concluido que el iésimo nodo teniendo un grado de pasividad positivo puede ser disipado cuando este aislado.

Tercero, todas las deducciones de arriba, están basadas en la asunción 1, es decir que existe una función común de Lyapunov  $V(x)$ , la cual es usualmente indeterminada y no-única. Por lo tanto, el método propuesto anteriormente de convertir el problema original de estabilidad al estudio de la propiedad de negatividad de la función  $M(x)$  depende fuertemente de la selección de  $V(x)$  (y de  $\theta_i$ ). Por esta razón, la estabilidad así deducida es llamada la *V – estabilidad*.

### **Función cuadrática para V(x)**

Primero, consideremos el caso, donde la función común de Lyapunov  $V(x)$  es seleccionada a ser una monomial cuadrática. A saber, hay una matriz  $Q$  simétrica y definida positiva tal que  $V(x) = x^T Q x$ .

**Teorema** Suponga que existe una función  $V(x) = x^T Q x$ , con  $Q$  siendo una matriz simétrica y definida positiva, que satisface la asunción 1 con valor de grado de pasividad  $\theta_i$ , tal que la siguiente desigualdad se cumple:

$$Q\Gamma + \Gamma^T Q \geq 0. \quad (2.36)$$

Entonces la red (2.17) es *V – estable* si la siguiente desigualdad se satisface:

$$-\Theta + G \leq 0 \quad (2.37)$$

Donde  $\Theta = \text{diag}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N) \in \Re^{N \times N}$  y  $G = (g_{ij}) = c_{ij} a_{ij} \in \Re^{N \times N}$ .

Más aún, si  $D = \Re^{nN}$ , entonces la estabilidad anterior es global.

**Corolario** Suponga que hay una función  $V(x) = x^T Q x$  con  $Q$  siendo una matriz definida simétrica y positiva, que satisface la desigualdad asunción 1 con

valores de grados de pasividad positivo  $\theta_i > 0$ . Entonces la red (2.17) es  $V - estable$ .

### **Funciones generales para $V(x)$**

En la mayoría de los casos generalmente la función de Lyapunov, no es una monomial cuadrática.

**Teorema.** Suponga que hay una función no-lineal  $V(x)$ , que satisface la asunción 1, con valores de grados de pasividad  $\theta_i$ , y que hay dos constantes positivas  $d_1$  y  $d_2$  tal que las siguientes desigualdades se cumplen.

$$\frac{\partial V(x_i)}{\partial x_i} \Gamma x_i \leq d_1 \|x_i\|^2, \quad (2.38)$$

$$\left( \frac{\partial V(x_i)}{\partial x_i} - \frac{\partial V(x_j)}{\partial x_j} \right) \Gamma(x_i - x_j) \geq d_2 \|x_i - x_j\|^2 \quad (2.39)$$

Además, definimos la matriz diagonal  $\Phi_i = \text{diag}\{\phi_i\} \in \mathfrak{R}^{N \times N}$  con  $\phi_i = -\theta_i d_1$  si  $\theta_i \leq 0$  o bien  $\phi_i = -\theta_i d_2$ . Si la siguiente desigualdad se cumple:

$$\frac{1}{d_2} \Phi + G \leq 0 \quad (2.40)$$

Entonces la red (2.37) es  $V - estable$ . Más aún, si  $D = \mathfrak{R}^{n \times n}$ , entonces la estabilidad anterior es global.

**Corolario.** Si hay una función no lineal  $V(x)$  que cumple las dos desigualdades (2.38) y (2.39) y la asunción 1 con valores de grados de pasividad  $\theta_i > 0$ , entonces la red (2.27) es  $V - estable$ .

En vista de los principales resultados deducidos en este capítulo, el problema de estabilidad de una red dinámica compleja, se puede convertir, en el sentido simplificado, en determinar si la suma de dos matrices es negativa definida. Es decir el esquema de  $V - estabilidad$  propuesto en las desigualdades (2.36) a (2.40), las cuales por lo tanto son llamadas las matrices características de la red. El significado físico de la condición deducida es claro: la primera matriz muestra el impacto de la auto-dinámica de los nodos y la segunda matriz indica la influencia de la topología de la red en la estabilidad de la red.

En el desarrollo de esta tesis se empleará la siguiente desigualdad matricial

$$X^T Y + Y^T X \leq X^T A X + Y^T A^{-1} Y$$

La cual se satisface para todas las matrices  $X, Y \in \mathfrak{R}^{n \times k}$  y  $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,

## CAPÍTULO 3

### FUNDAMENTOS DE LAS REDES NEURONALES

Las redes neuronales no son una idea nueva, datan de la década de los años 40, cuando se empezaron a publicar los primeros conceptos. Sin embargo, nunca tuvieron un gran éxito, más que nada porque se necesita una cantidad importante de recursos de un ordenador para entrenar y ejecutar una red neuronal con buenos resultados.

En este capítulo se presenta los fundamentos de las redes neuronales que en el desarrollo del presente trabajo serán consideradas como un sistema con estados en valor continuos y ecuaciones de movimiento expresados por ecuaciones diferenciales. Las fuentes consultadas principalmente son [14], [15], [16], [17] [18], [19], [20], [21] y [22].

#### 3.1 Procesamiento De Información Neuronal

Típicamente, las neuronas son 5 o 6 órdenes de magnitud más lentas que una compuerta de silicio, los eventos en un chip de silicio toman alrededor de nanosegundos ( $10^{-9}$  s) mientras que en una neurona, este tiempo es del orden de los milisegundos ( $10^{-3}$  s). Sin embargo el cerebro compensa en forma excepcional la lentitud relativa en el funcionamiento neuronal con un número inmenso de neuronas con interconexiones masivas entre ellas. Se estima que el número de neuronas en el cerebro es del orden de  $10^{10}$  y que el número de conexiones sinápticas es  $6 \times 10^{13}$ . La red resultante que es el cerebro es una estructura sumamente eficiente. Específicamente, la eficiencia energética del cerebro es aproximadamente de  $10^{-18}$  J/(operaciones x s) lo cual es del orden de  $10^{10}$  veces mayor que la de las mejores computadoras actualmente.

Algunos elementos a destacar de su estructura histológica son:

**Las dendritas**, que son la vía de entrada de las señales que se combinan en el cuerpo de la neurona. De alguna manera la neurona elabora una señal de salida a partir de ellas.

**El axón**, que es el camino de salida de la señal generada por la neurona.

**Las sinapsis**, que son las unidades funcionales y estructurales elementales que median entre las interacciones de las neuronas.

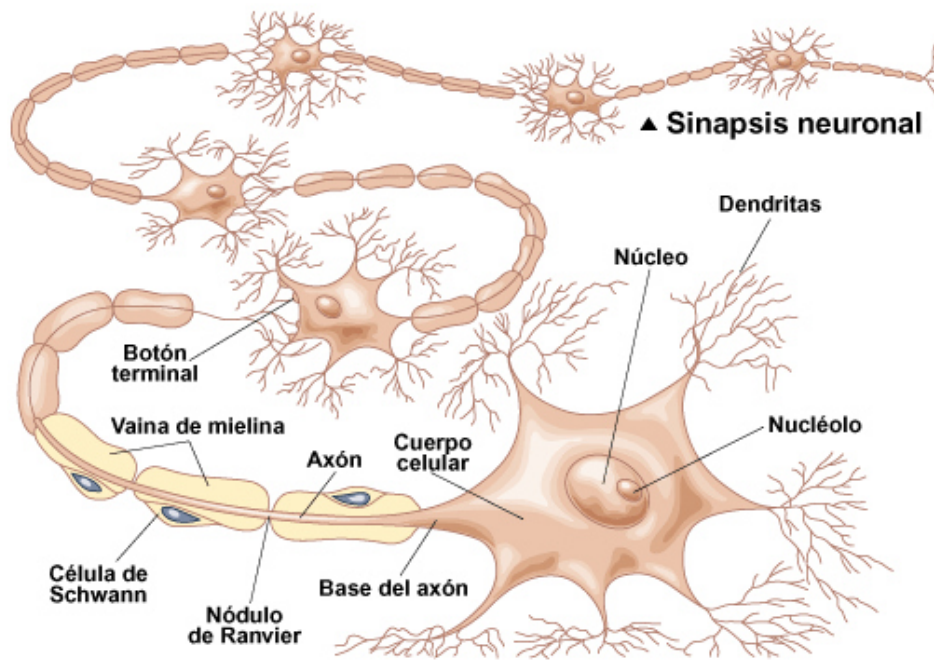


Figura 3.1 Neurona

En las terminaciones de las sinapsis se encuentran unas vesículas que contienen unas sustancias químicas llamadas **neurotransmisores**, que ayudan a la propagación de las señales electroquímicas de una neurona a otra.

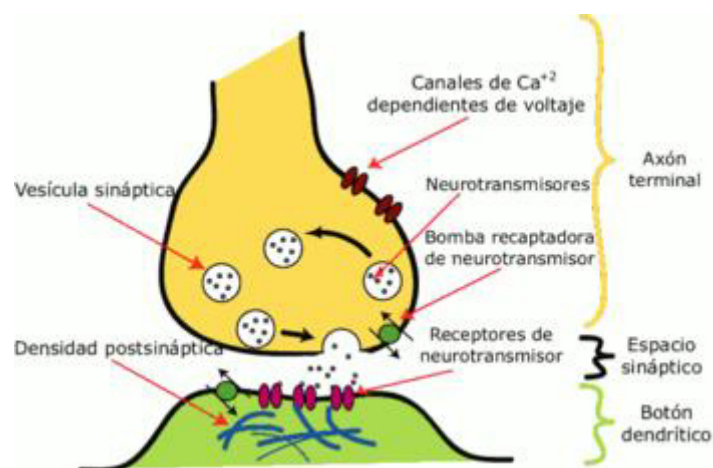


Figura 3.2 Esquema general de la Sinapsis Química

Un modelo neuronal simple es presentado en la figura 3.3. En términos de procesamiento de información, una neurona individual con dendritas como terminales de entrada múltiple y un axón como una sola terminal de salida podría ser considerada como un sistema múltiple-entrada/única salida (MISO). Las funciones de procesamiento de este sistema neuronal pueden ser divididas en las siguientes cuatro categorías:

1. *Dendritas*. Consisten en un árbol de fibras sumamente ramificado, y actúan como puntos de entrada para el cuerpo principal de la neurona. En promedio, hay de  $10^3$  a  $10^4$  dendritas por neurona, que forman una superficie receptiva las señales de entrada a las neuronas.
2. *Sinapsis*. Es un área de almacenamiento de la experiencia pasada (base del conocimiento). Proporciona la memoria a largo plazo a la experiencia acumulada pasada. Recibe información a partir de sensores y otras neuronas, y proporciona las salidas a través de los axones.
3. *Soma*: es el cuerpo celular de la neurona. Es grande y redondo. Recibe la información sináptica y realiza un procesamiento más de la información. Casi todas las funciones lógicas de la neurona se llevan a cabo en el soma.
4. *Axón*. La línea de salida neuronal es llamada axón. La salida aparece en la forma de un potencial de acción que es transmitida a otras neuronas para otro procesamiento.

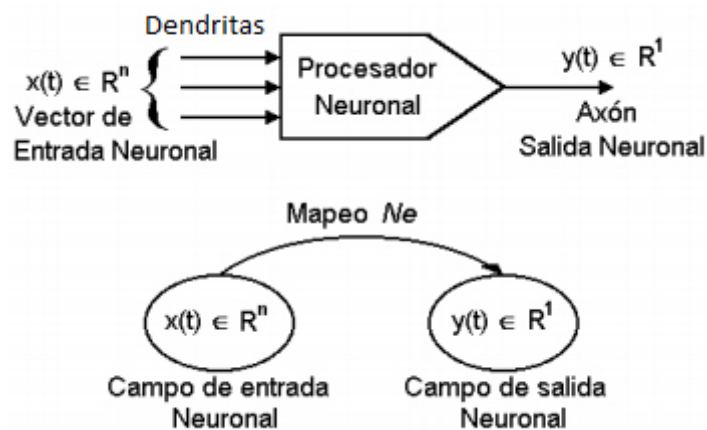


Figura 3.3 Un modelo neuronal simple como un procesador con múltiples entradas (dendritas) y una sola salida (axón).

Cada neurona actúa como un procesador en paralelo debido a que recibe potenciales de acción en paralelo a partir de sus neuronas vecinas y transmite pulsos en paralelo a otras sinapsis vecinas. En

términos de procesamiento de información, la sinapsis también realiza un cambio en la frecuencia y voltaje de un impulso.

### 3.2 Operaciones Matemáticas Neuronales

Una neurona contiene un umbral de sensibilidad, amplificación o atenuación de señal ajustable en cada sinapsis, y una estructura interna que permite que las señales nerviosas entrantes sean integradas a espacio y tiempo. Desde un punto de vista matemático, se puede concluir que el procesamiento de información dentro de una neurona implica las siguientes dos operaciones matemáticas distintas:

1. Operación Sináptica. La fuerza (peso) de la sinapsis es una representación de almacenamiento de conocimiento y por consecuencia de la memoria para el conocimiento previo. La operación sináptica asigna un peso relativo (significativo) a cada señal entrante de acuerdo con la experiencia pasada (conocimiento) almacenada en la sinapsis.
2. Operación somática. La operación somática proporciona varias operaciones matemáticas tales como la agregación, umbralización, activación no lineal, y procesamiento dinámico a las entradas sinápticas. Si la agregación ponderada de las entradas neuronales excede un cierto umbral, la soma producirá una señal de salida a su axón.

Una representación simplificada de las operaciones neuronales arriba mencionadas para una neurona se muestra en la figura 3.4.

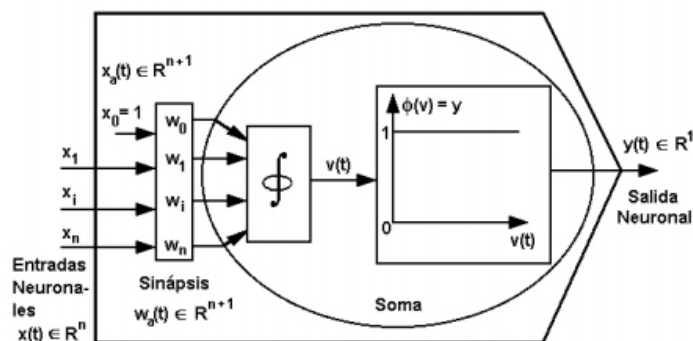


Figura 3.4 Operaciones sinápticas y somáticas en un modelo simple de una neurona

Observaciones experimentales y de análisis matemático han indicado que las células neuronales pueden transmitir información fiable si son suficientemente sobrantes en número. Sin embargo, en general una neurona biológica es un mecanismo imprevisible para el procesamiento de la información. Por consiguiente se postula que la actividad colectiva generada por un gran número de neuronas localmente sobranante es más significativa que la actividad generada por una sola neurona.

### 3.3 Características Dinámicas

Los procesos neuronales dinámicos forman la base que dan lugar a las propiedades de alto orden de los sistemas neuronales. A continuación se describen brevemente algunas de las características más importantes de los procesos de información neuronales dinámicos.

1. *Proceso distribuido y Paralelo.* La información neuronal accedida a través de varios sensores biológicos se distribuye a través de neuronas múltiples. Más aún, los procesos de información neuronal parecen incluir la activación de neuronas múltiples que no solo reciben y transmiten información en paralelo sino que también incorporan paralelismo y mecanismos de actualización distribuida con una capacidad adaptativa para aprender, reconocer, generalizar y diferenciar. De hecho, hay dos sistemas de distribución sensoriales en el cerebro; uno es el sistema específico sensorial tálamo-cortical, y el otro es un sistema no específico usado para la concentración y el impulso. Estas estructuras verifican la importancia y plausibilidad del conocimiento distribuido paralelo en el cerebro.
2. *Capacidad de Codificación Temporal.* La información de estímulo recibido por las neuronas se codifica como los trenes de potenciales de acción (spike trains). Un axón determinado tendrá típicamente una amplitud de picos constante, pero su frecuencia de respuesta llevará el contenido de la información. Por lo general, la información se codifica en forma de modulación de frecuencia y se almacena en el cerebro como memoria a corto plazo o memoria de largo plazo.
3. *La función de la Inhibición Lateral.* La inhibición lateral introduce el intercambio de información de neurona a neurona y afectando una al momento de bloquear la acción de la otra. Este mecanismo de inhibición existe comúnmente, y puede ser generalizada en todo el sistema nervioso. Sin embargo, la inhibición lateral es un mecanismo de interacción neuronal local, y da lugar a importantes propiedades globales. Desde el punto de vista de la información, la inhibición lateral proporciona información sobre los cambios de la misma. Por lo tanto, la inhibición lateral puede ser vista simultáneamente como un principio biológico y como una descripción matemática de un sistema neuronal biológico.
4. *Procesamiento de Pre-alimentación y Realimentación.* Parece que el cerebro utiliza lazos circulares o de reverbero para procesar información. Este lazo se produce cuando una parte del cerebro procesa una entrada y pasa la información a otra área, donde se procesa y se pasa directamente a tras de la ubicación de origen, o través de otros lugares intermedios para y una actualización adicional. Al final, la información se devuelve a través del área del cerebro original para reverberar de nuevo a través de las estructuras. Este proceso implica, obviamente lazos de



Pre-alimentación y de realimentación con alguna transformación dinámica. Este proceso dinámico causado por realimentación proporciona algunas características robustas en el procesamiento de la información.

### 3.4 Unidades Neuronales

La base de una red neuronal artificial es tener muchas unidades de procesamiento interconectadas. Cada unidad en la red está basada en el concepto de una neurona idealizada. Se asume que una neurona ideal responde óptimamente a las entradas aplicadas. Una red neuronal es un conjunto combinado de tales unidades neuronales, conectadas por medio de las conexiones sinápticas complejas caracterizadas por coeficientes de peso, donde cada una hace su contribución a las propiedades de cálculo del sistema entero.

Una red neuronal artificial tiene similitudes con el cerebro tales como:

1. Conocimiento adquirido a través de un proceso de aprendizaje.
2. Una conectividad interna de la unidad neuronal conocida como los pesos sinápticos los cuales son usados para guardar el conocimiento.

El procedimiento para el proceso de aprendizaje es conocido como algoritmo de aprendizaje. Su función es modificar los pesos sinápticos de las redes para lograr un objetivo específico. La modificación de los pesos proporciona un método tradicional para el diseño e implementación de redes neuronales.

La neurona o unidad neuronal es la unidad fundamental para el funcionamiento de una red neuronal y consiste en tres elementos básicos:

1. Un conjunto de enlaces sinápticos, donde cada uno está caracterizado por su propio peso.
2. Una sumatoria para los componentes de las señales de entrada, multiplicadas por el peso sináptico respectivo.
3. Una función de activación no lineal que transforma la suma de salida en la salida de la neurona.

Se aplica también un umbral externo para reducir la entrada de la función de activación.

En términos matemáticos la *i-ésima* neurona puede ser descrita como:

$$v_i = \sum_{j=1}^n w_{ij} x_j \quad (3.1)$$

$$y_i = \sigma(v_i - w_{ij}) \quad (3.2)$$

donde:

$x_j$  es la  $j$ -ésima componente de la entrada,  
 $w_{ij}$  es el peso que conecta la  $j$ -ésima componente de la entrada a la neurona  $i$ ,  
 $v_i$  es la salida de la sumatoria,  
 $\sigma(\cdot)$  es la función de activación no lineal,  
 $y_i$  es la salida de la neurona  $i$ .

La figura 3.5 muestra un esquema de la neurona  $i$ .

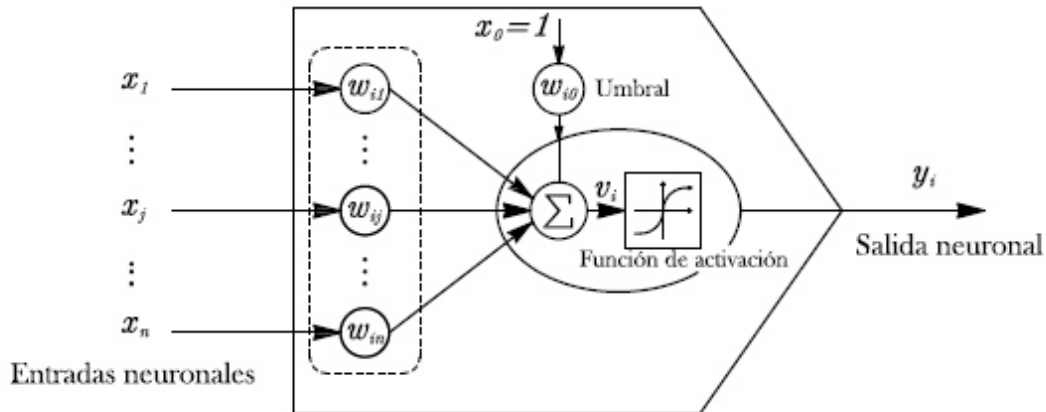


Figura 3.5 Modelo no lineal de la neurona

En general una neurona individual realiza una suma de sus entradas ponderadas y proporciona una salida a través de una función de activación no lineal con un umbral.

### 3.5 Funciones De Activación

La función de activación neuronal no lineal  $\sigma(\cdot)$  en estructuras neuronales adaptables mapea el estado neuronal  $x \in \mathbb{R}^n$  a un espacio de salida neuronal acotado, esto es,  $\sigma(\cdot) \in [-1,1]$ . Para modelos neuronales de tiempo continuo, la función de activación neuronal no lineal  $\sigma(\cdot)$  puede elegirse como una función sigmoide no lineal continua y diferenciable que satisface las siguientes condiciones:

1.  $\sigma(x) \rightarrow \pm 1$  cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ .
  2.  $\sigma(x)$  está acotada por el límite superior 1 y el límite inferior -1.
  3.  $\sigma(x) = 0$  en un único punto,  $x = 0$ .
  4.  $\sigma'(x) > 0$  y  $\sigma'(x) \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ . (Monótonamente creciente).
  5.  $\sigma'(x)$  tiene un valor máximo global
- Un ejemplo típico de la función  $\sigma(x)$  es:

$\sigma(x) = \tanh(cx) = \frac{e^{cx} - e^{-cx}}{e^{cx} + e^{-cx}}$  donde  $c > 0$  y es una constante que determina la pendiente de la función  $\sigma(x)$  que es la ganancia de activación. La figura 3.4 muestra una función de activación neuronal para distintos valores de  $c$  y la figura 3.5 muestra su derivada.

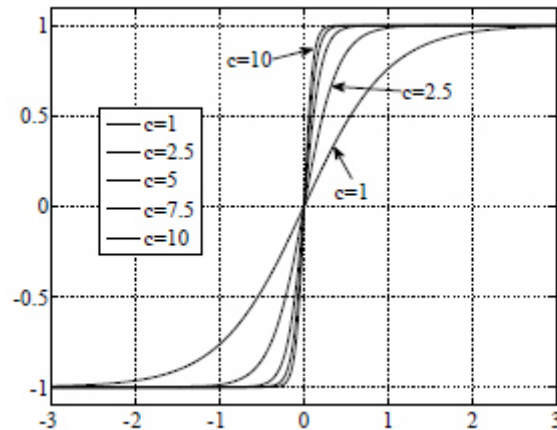


Figura 3.6  $\sigma(x) = \tanh(cx)$

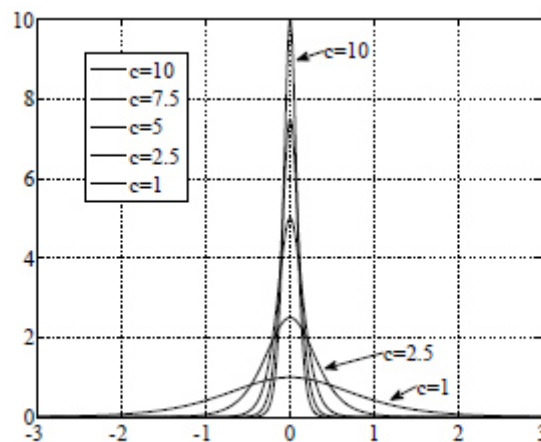


Figura 3.7  $\sigma'(x) = c \operatorname{sech}^2(cx)$

### 3.6 Redes Neuronales Dinámicas En Tiempo Continuo

Una definición universal de un modelo de red neuronal no existe. Para propósitos de análisis teórico, en este trabajo se limita a considerar las redes neuronales como sistemas que tienen estados en valor continuo y ecuaciones de movimiento que pueden ser expresadas por ecuaciones diferenciales.

Una red neuronal consiste de muchas unidades de procesamiento simples interconectadas llamadas neuronas, las cuales forman configuraciones

a capas. Una neurona individual agrega sus entradas ponderadas y proporciona una salida a través de una función de activación no lineal con un umbral. En una red neuronal artificial existen tres tipos diferentes de conexiones: intralayer(dentro-capa), interlayer(entre-capa) y conexiones recurrentes. Las conexiones dentro-capa, llamadas también conexiones laterales o conexiones cruzadas, están unidas entre neuronas de una misma capa de la red. Las conexiones entre-capa están unidas entre neuronas de diferentes capas. Las conexiones recurrentes proporcionan uniones de auto-realimentación. En las conexiones entre-capa, las señales son transformadas en pre-alimentación o en realimentación.

Considere la forma generalizada de una red neuronal dinámica en tiempo continuo definida como:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x(t), u(t), w) \\ y(t) &= h(x(t), w)\end{aligned}\tag{3.3}$$

Donde  $x \in \mathfrak{R}^n$  representa el vector de estado,  $u \in \mathfrak{R}^m$  es el vector de entrada externa y  $w \in \mathfrak{R}^l$  es el vector de parámetros neuronal, el cual contiene los pesos de conexión sinápticos y los parámetros operacionales somáticos;  $f(\cdot)$  es una función que representa la estructura de la red neuronal, y  $h(\cdot)$  es una función que representa la relación entre el vector de estado  $x(t)$  y el vector de salida  $y(t) \in \mathfrak{R}^p$ .

### 3.7 Forma General De Una Red Neuronal Dinámica De Hopfield

Un modelo en tiempo continuo de una red neuronal puede ser descrito por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales no lineales:

$$\dot{x}_i(t) = -\alpha_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n w_{ij} y_j(t) + u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{3.4}$$

$$y_i(t) = \sigma_i(x_i(t)), \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{3.5}$$

Donde  $x_i$  representa el estado de la  $i$ -ésima neurona,  $y_i$  es la salida de la  $i$ -ésima neurona,  $w_{ij}$  es el peso de conexión sináptico que va desde la  $i$ -ésima neurona a la  $j$ -ésima neurona,  $u_i$  es una entrada externa constante,  $\alpha_i$  es una constante positiva y  $\sigma_i(\cdot)$  es una función sigmoideal monótona.

El modelo anterior es conocido como una red neuronal dinámica de Hopfield y consiste en una única capa de neuronas que están totalmente interconectadas por medio de conexiones recurrentes y conexiones dentro-capa. En la figura 3.8 se muestra la estructura descrita por las ecuaciones (3.4) y (3.5).

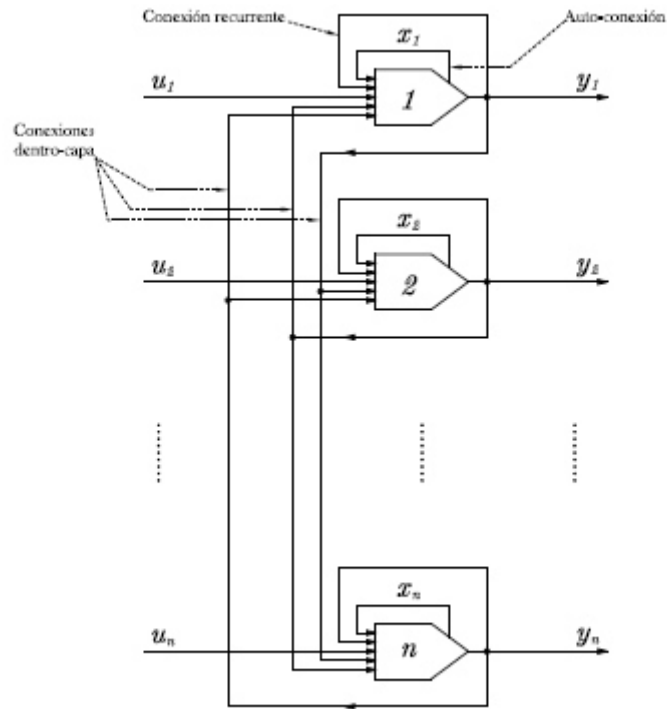


Figura 3.8 Estructura de una red neuronal dinámica

Cada neurona recibe tres tipos de entradas:

$u_i(t)$ : una señal de entrada externa para su procesamiento dinámico,

$x_i(t)$ : una auto-conexión, una señal de realimentación de estado,

$y_i(t)$ : conexiones dentro-capa, una señal de salida proveniente de cada neurona incluyendo la  $i$ -ésima neurona.

Los dos tipos de conexiones (recurrente y dentro de capa) presentes en esta red, involucran las operaciones sinápticas. Nótese que esta red neuronal dinámica es un sistema dinámico no lineal determinístico continuo y en la figura 3.9 se muestra su diagrama de bloque.

Una forma vectorial del sistema dado por las ecuaciones (3.4) y (3.5) se puede expresar como:

$$\dot{x}(t) = -A x(t) + W \sigma(x(t)) + u \quad (3.6)$$

$$y(t) = \sigma(x(t)) \quad (3.7)$$

Donde  $x(t) = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  es el vector de estado de la red,  $u(t) = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$  es el vector de entrada,  $y = \sigma(x) = (\sigma_1(x_1), \sigma_2(x_2), \dots, \sigma_n(x_n))^T$  es el vector de salida,  $A = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T$ , y

$$W = \begin{bmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n1} & \cdots & w_{nn} \end{bmatrix}$$

es la matriz de peso sináptica.

El diagrama de bloque del sistema neuronal de la ecuación (3.6) y (3.7) se muestra en la figura 3.7.

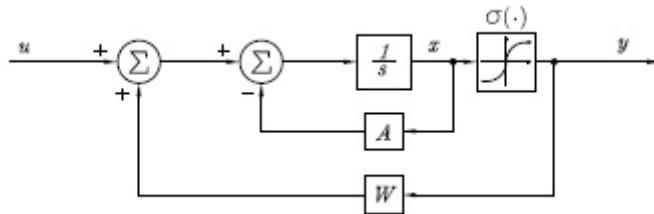


Figura 3.9 Diagrama de bloque de una red neuronal dinámica de Hopfield

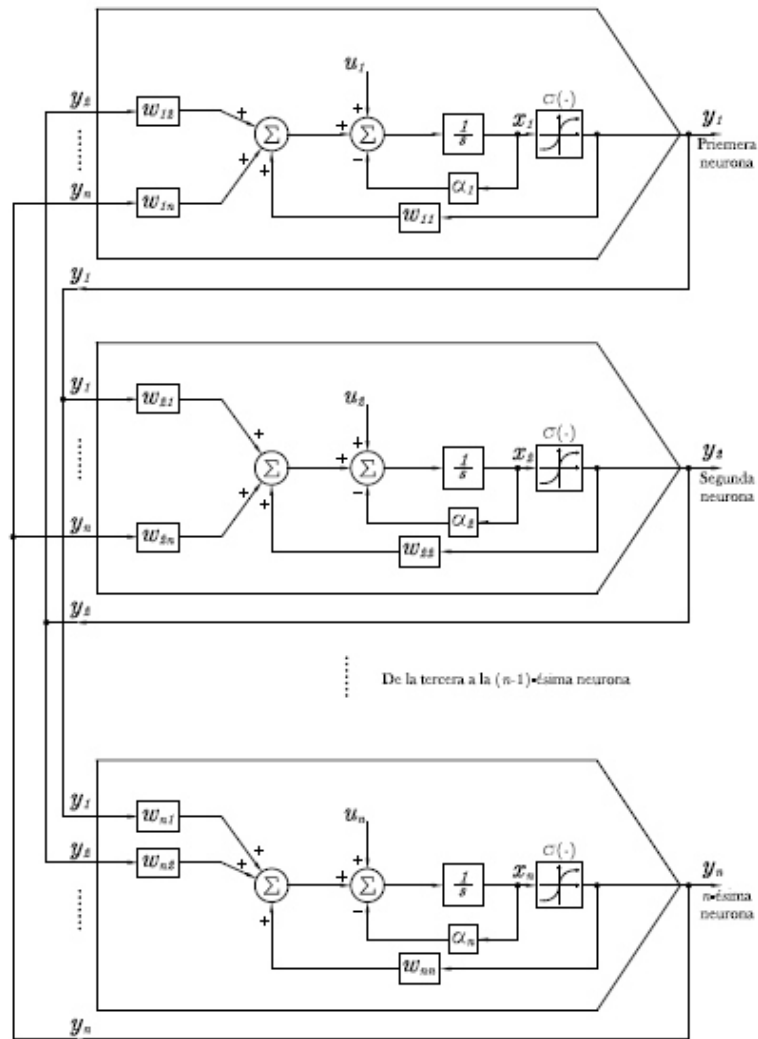


Figura 3.10 Diagrama de bloque de una estructura de una red neuronal dinámica en tiempo continuo

### 3.8 Condiciones Para Los Puntos De Equilibrio De Una Red Neuronal Dinámica

Considere la red neuronal dinámica descrita por la ecuación (3.6)

$$\dot{x}(t) = -A x(t) + W \sigma(x(t)) + u \quad (3.8)$$

Dado un conjunto de vectores diferentes de cero  $\{x^1, x^2, \dots, x^m\} = \{x^i\}$  que representan alguna información específica, se estudia las condiciones para las cuales los vectores  $\{x^i\}$  son los puntos de equilibrio de la red neuronal dinámica (3.8). Asuma la entrada  $u = 0$  y que  $\{x^i\}$  son los puntos de equilibrio del sistema (3.8). Entonces cada vector  $x^i$  en los puntos de equilibrio, satisface  $\dot{x}^i = 0$  y entonces la siguiente igualdad se satisface.

$$0 = -A x^i + W \sigma(x^i) \quad (3.9)$$

Esto es

$$A(x^1, x^2, \dots, x^m) = W(\sigma(x^1), \dots, \sigma(x^m)) \quad (3.10)$$

La cual se escribe como

$$AX = W\Sigma \quad (3.11)$$

Donde  $X = (x^1, x^2, \dots, x^m)$  y  $\Sigma = (\sigma(x^1), \dots, \sigma(x^m))$ . Además asuma que  $m \geq n$  y  $\text{rank}(\sigma(x^1), \dots, \sigma(x^m)) = n$ , donde  $n$  es el número de neuronas.

Entonces (3.11) nos lleva

$$W = AX\Sigma^T(\Sigma\Sigma^T)^{-1} \quad (3.12)$$

Debido a que  $W$  es una matriz simétrica, la parte derecha de esta ecuación es igual a la traspuesta de sí misma, esto es

$$AX\Sigma^T(\Sigma\Sigma^T)^{-1} = \left(AX\Sigma^T(\Sigma\Sigma^T)^{-1}\right)^T \quad (3.13)$$

De donde obtenemos

$$\Sigma\Sigma^T AX\Sigma^T = \Sigma X^T A \Sigma \Sigma^T \quad (3.14)$$

La ecuación anterior se satisface si

$$\Sigma^T A X = X^T A \Sigma \quad (3.15)$$

Esto es

$$(\sigma(x^1), \dots, \sigma(x^m))^T A (x^1, x^2, \dots, x^m) = (x^1, x^2, \dots, x^m)^T A (\sigma(x^1), \dots, \sigma(x^m)) \quad (3.16)$$

O lo que es lo mismo

$$\sigma^T(x^j) A x^i = \sigma^T(x^i) A x^j, \quad i, j = 1, 2, \dots, m \quad (3.17)$$

En consecuencia, (3.17) es una condición suficiente para que el conjunto de vectores diferentes de cero  $\{x^1, x^2, \dots, x^m\}$  sean los puntos de equilibrio del sistema (3.8) para la función vectorial no lineal  $\sigma(\cdot)$ .

De hecho la condición suficiente en (3.17) es también necesaria para toda  $m$ .

Para verificar esto, usando (3.10) y (3.17), se obtiene

$$\sigma^T(x^j) A x^i = \sigma^T(x^i) W x^j \quad (3.18)$$

Luego la simetría de la matriz  $W$  nos lleva a

$$\sigma^T(x^i) W \sigma(x^i) = \sigma^T(x^i) W \sigma(x^j) \quad (3.19)$$

Por lo tanto

$$\sigma^T(x^j) A x^i = \sigma^T(x^i) A x^j, \quad i, j = 1, 2, \dots, m \quad (3.20)$$

Estos resultados se resumen en el siguiente teorema.

**Teorema 4** *Sea  $u = 0$  en el sistema descrito por (3.8) y sea  $\{x^1, x^2, \dots, x^m\}$  un conjunto de vectores constantes diferentes de cero en  $\mathfrak{R}^m$ . Entonces*

1. *La condición dada por (3.10) es necesaria para que  $x^1, x^2, \dots, x^m$  sean los puntos de equilibrio del sistema (3.8).*
2. *Si  $m \geq n$  y  $\text{rank}(\sigma(x^1), \dots, \sigma(x^m)) = n$ , la condición (3.10) es también suficiente para que  $x^1, x^2, \dots, x^m$  sean los puntos de equilibrio del sistema (3.8)*

Demostración: Se tiene que  $m \geq n$  y  $\text{rank}(\sigma(x^1), \dots, \sigma(x^m)) = n$ , entonces deberá existir una matriz simétrica  $W$  tal que  $x^1, x^2, \dots, x^m$  sean los puntos de equilibrio del sistema (3.8). Sea

$$W = \left\{ (\sigma(x^1), \dots, \sigma(x^m)) (\sigma(x^1), \dots, \sigma(x^m))^T \right\}^{-1} (\sigma(x^1), \dots, \sigma(x^m)) (x^1, \dots, x^m)^T A$$

$$W = (\Sigma \Sigma^T)^{-1} \Sigma X^T A \quad (3.21)$$



Luego usando la condición (3.12), es fácil verificar que  $W$  es una matriz simétrica. Multiplicando ambos lados de la igualdad anterior por  $\Sigma = (\sigma(x^1), \dots, \sigma(x^m))$  se llega a las condiciones de equilibrio

$$W\Sigma = (\Sigma\Sigma^T)^{-1}\Sigma X^T A \Sigma = (\Sigma\Sigma^T)^{-1}\Sigma\Sigma^T A X = A X \quad (3.22)$$

Esto es

$$W(\sigma(x^1), \dots, \sigma(x^m)) = A(x^1, x^2, \dots, x^m) \quad (3.23)$$

Así entonces  $x^1, x^2, \dots, x^m$  son los puntos de equilibrio de (3.8)

## CAPITULO 4

### INTRODUCCIÓN A LAS REDES NEURONALES RECURRENTES

En este capítulo se estudia el problema de seguimiento de trayectorias, por medio de una red neuronal recurrente a una red genética, descrita por un modelo dinámico no lineal. En base a la teoría de Lyapunov se obtiene una ley de control que logra la estabilidad asintótica global del error de seguimiento.

#### 4.1 Descripción Matemática De Una Red Neuronal Recurrente

Se considera una red neuronal recurrente descrita por:

$$\dot{x} = A x + W \sigma(x) + u, \quad x, u \in \mathfrak{R}^n \quad A, W \in \mathfrak{R}^{n \times m} \quad (4.1)$$

Donde  $x(t) = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  es el vector de estado,  $u$  es la entrada,  $A$  es una matriz de  $n \times n$  de la que sin pérdida de generalidad se puede considerar como  $A = -\lambda I$ ,  $\lambda$  es una constante positiva,  $W$  es la matriz de peso y  $\sigma(x)$  es una función sigmoide.

#### 4.2 Red Genética

En una red genética con perturbación real, las ecuaciones que describen la regulación dinámica del gen son siempre no lineales, además son descritas por la siguiente ecuación estocástica no lineal de Langevin [23], [24]:

$$dx_r(t) = f_r(x_r(t)) dt + h_r(x_r(t)) dw_r(t) \quad (4.2)$$

Donde  $x_r(t) = (x_{r1}, x_{r2}, \dots, x_{rn})^T$  denota el vector de concentración de  $n$  genes,  $w_r(t)$  es un proceso de Wiener estándar o movimiento Browniano. El primer término del lado derecho de (4.2) denota la interacción no lineal nominal de la red genética, mientras que el segundo término denota el efecto de las fluctuaciones moleculares intrínsecas de la red genética, el cual es dependiente del estado e influirá la estabilidad de la red genética nominal. Como parte de este trabajo se considerará  $h_r(x_r(t)) \equiv 0$ . Entonces (4.2) se puede escribir como:

$$\dot{x}_r(t) = f_r(x_r(t)), \quad x_r, f_r \in \mathfrak{R}^n \quad (4.3)$$

### 4.3 Análisis De Estabilidad Del Error De Seguimiento

El error de seguimiento se define por:

$$e = x - x_r \quad (4.4)$$

Para que el sistema (4.1) siga al sistema (4.3), la siguiente suposición es necesaria (ver [13] para una explicación detallada):

Suposición 4.1 Existen funciones  $\rho(t)$  y  $\alpha(t)$  tales que

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(t) &= A \rho(t) + W\sigma(\rho(t)) + \alpha(t) \\ \rho(t) &= x_r(t) \end{aligned} \quad (4.5)$$

De (4.5) y (4.3) se tiene que:

$$\begin{aligned} Ax_r + W\sigma(x_r(t)) + \alpha(t) \\ = f_r(t) \end{aligned} \quad (4.6)$$

De (4.4) tenemos

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{x}_r$$

La cual se puede escribir como:

$$\dot{e} = Ae + W(\sigma(x(t)) - \sigma(x_r(t))) + (u - \alpha(t)) \quad (4.7)$$

Si se introducen las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} \phi_\sigma(t) &= \sigma(x(t)) - \sigma(x_r(t)) \\ \tilde{u} &= u - \alpha(t) \end{aligned} \quad (4.8)$$

La ecuación (4.7) se puede escribir como:

$$\dot{e} = Ae + W\phi_\sigma(t) + \tilde{u} \quad (4.9)$$

De esta manera el problema de seguimiento se convierte en un problema de estabilización del sistema (4.9). Consideremos la siguiente función de Lyapunov para el análisis del error

$$V(e) = \frac{1}{2} \|e\|^2 \quad (4.10)$$

cuya derivada a lo largo de las trayectorias de (4.9) es

$$\dot{V}(e) = -\lambda \|e\|^2 + e^T W\phi_\sigma(t) + e^T \tilde{u} \quad (4.11)$$

Dicha ecuación satisface la siguiente desigualdad:

$$\dot{V}(e) \leq -\lambda \|e\|^2 + \frac{1}{2} \|e\|^2 + \phi_\sigma^T(t) W^T W \phi_\sigma(t) + e^T \tilde{u} \quad (4.12)$$

De la ecuación (4.8) tenemos que  $\|\phi_\sigma(t)\| \leq L_\sigma \|e(t)\|$ , al aplicarlo al tercer término del lado derecho de (4.12) se obtiene

$$\phi_\sigma^T(t) W^T W \phi_\sigma(t) \leq (L_\sigma)^2 \|W\|^2 \|e\|^2 \quad (4.13)$$

Donde  $L_\sigma$  es la constante de Lipschitz de  $\phi_\sigma$ , por lo que (4.12) se reduce a:

$$\dot{V}(e) \leq -\lambda \|e\|^2 + \frac{1}{2} \|e\|^2 + (L_\sigma)^2 \|W\|^2 \|e\|^2 + e^T \tilde{u} \quad (4.14)$$

De donde se propone la siguiente ley de control

$$\tilde{u} = -(1 + 2(L_\sigma)^2 \|W\|^2) e \quad (4.15)$$

Sustituyendo (4.15) en (4.14) se llega a:

$$\dot{V}(e) \leq -\left(\lambda + \frac{1}{2} + (L_\sigma)^2 \|W\|^2\right) \|e\|^2 \quad (4.16)$$

Claramente  $\dot{V}(e) \leq 0$  para toda  $e \neq 0$ , esto significa que la ley de control propuesta en (4.15) estabiliza global y asintóticamente al sistema (4.9), asegurando así el seguimiento de trayectorias (4.1) y (4.3).

Finalmente de (4.6), (4.8) y (4.15) obtenemos la siguiente acción de control para la red neuronal.

$$u = -(1 + 2(L_\sigma)^2 \|W\|^2) e + f_r(x_r) - A x_r - W \sigma(x_r(t)) \quad (4.17)$$

## CAPÍTULO 5

### SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIAS DE REDES DINÁMICAS COMPLEJAS USANDO REDES NEURONALES RECURRENTES CON RETARDO.

#### 5.1 Introducción

Redes neuronales recurrentes han sido ampliamente usadas en los campos de optimización, reconocimiento de patrones, procesamiento de señales y sistemas de control entre otros. Estas han sido diseñadas de un modo tal que hay un punto de equilibrio que es globalmente asintóticamente estable. En biología y redes neuronales artificiales, los tiempos de retardo surgen en el procesamiento de la información almacenada y en la transmisión de la misma. Además es bien sabido que estos retardos pueden crear trayectorias oscilatorias o incluso inestables. El seguimiento de la trayectoria es un problema muy interesante en el campo de la teoría de los sistemas de control, Esto permite la implementación de importantes tareas de control automático tal como: reconocimiento y seguimiento de objetivos de alta velocidad, inspección visual en tiempo real y reconocimiento del contexto sensitivo y escenas de movimiento entre otros. En este capítulo se presentan los resultados del diseño de una ley de control que garantice el seguimiento de redes dinámicas complejas en general.

#### MODELOS MATEMATICOS

#### 5.2 Redes Dinámicas complejas Generales

Recordemos nuevamente una red que consiste de  $n$  nodos acoplados difusos y linealmente, en donde cada nodo es un sistema dinámico descrito por

$$\dot{x}_i = f_i(x_i) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{ij} a_{ij} \Gamma(x_j - x_i), \quad i=1,2,3,\dots,N \quad (5.1)$$

Donde  $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})^T \in \mathfrak{R}^n$  son los vectores de estado del nodo  $i$ ,  $f_i: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$  representa la auto-dinámica del nodo  $i$ , las constantes  $c_{ij} > 0$  son las fuerzas de acoplamiento entre el nodo  $i$  y el nodo  $j$ , con  $i, j = 1, 2, 3 \dots N$ . En este modelo la matriz constante  $\Gamma = (\tau_{ij} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  describe la forma de vincular los componentes en cada par de vectores nodos conectados  $(x_j - x_i)$ , mientras que la matriz de acoplamiento  $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{R}^{N \times N}$  denota la configuración de acoplamiento de la red entera: esto significa que si hay una conexión entre el nodo  $i$  y el nodo  $j$  ( $i \neq j$ ), entonces  $a_{ij} = a_{ji} = 1$ ; de otro modo  $a_{ij} = a_{ji} = 0$ .

### 5.3 Redes Neuronales recurrentes con retardo.

Consideremos una red neuronal recurrente con retardo en la siguiente forma:

$$\dot{x}_{n_i} = A_{n_i}x_{n_i} + W_{n_i}\sigma\left(x_{n_i}(t - \tau)\right) + u_{n_i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{n_i n_j} a_{n_i n_j} \Gamma\left(x_{n_j} - x_{n_i}\right) \quad i=1,2,\dots,N \quad (5.2)$$

Donde  $\tau$  es el tiempo fijado como tiempo de retardo,  $x_{n_i} = (x_{n_i1}, x_{n_i2}, \dots, x_{n_in})^T \in \mathfrak{R}^n$  es el vector de estado de la red neuronal  $i$ ,  $u_{n_i} \in \mathfrak{R}^n$  es la entrada de la red neuronal  $i$ ,  $A_{n_i} = -\lambda_{n_i}I_{n \times n}$ ,  $i = 1,2,3, \dots, N$  es la matriz de retroalimentación de estado con  $\lambda_{n_i}$  siendo una constante positiva,  $W_{n_i} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  es la matriz de conexión de peso con  $i = 1,2,3, \dots, N$  y  $\sigma(\cdot) \in \mathfrak{R}^n$  es un vector función sigmoide Lipschitz tal que  $\sigma(x_{n_i}) = 0$  únicamente en  $x_{n_i} = 0$  con la constante Lipschitz  $L_{\sigma_i}$ ,  $i = 1,2,3, \dots, N$  y la función de activación neuronal  $\sigma(\cdot) = \tanh(\cdot)$ ,  $i = 1,2,3, \dots, N$ .

### 5.4 Seguimiento de trayectoria

El objetivo es desarrollar una ley de control tal que la  $i$ -ésima red neuronal (5.2) siga la trayectoria del  $i$ -ésimo sistema dinámico (5.1) Definimos el seguimiento del error como  $e = x_{n_i} - x_i$  para  $i = 1,2,3, \dots, N$  cuya derivada con respecto al tiempo es:

$$\dot{e}_i = \dot{x}_{n_i} - \dot{x}_i, \text{ para } i=1,2,\dots,N \quad (5.3)$$

Sustituyendo (1), (2) y (3), obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{e}_i = & A_{n_i}x_{n_i} + W_{n_i}\sigma\left(x_{n_i}(t - \tau)\right) + u_{n_i} - f_i(x_i) + \\ & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{n_i n_j} a_{n_i n_j} \Gamma\left(x_{n_j} - x_{n_i}\right) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{ij} a_{ij} \Gamma\left(x_j - x_i\right) \end{aligned} \quad i=1,2,\dots,N \quad (5.4)$$

Sumando y restando  $W_{n_i}\sigma(x_i(t - \tau))$ ,  $\alpha_i(t)$ ,  $i = 1,2,3, \dots, N$  a la ecuación (5.4) donde  $\alpha_i$  será determinada más adelante y considerando que  $x_{n_i} = e_i + x_i$   $i = 1,2,3, \dots, N$ , entonces

$$\begin{aligned}
\dot{e}_i = & W_{n_i} \left( \sigma \left( x_{n_i}(t - \tau) \right) - \sigma \left( x_i(t - \tau) \right) \right) + \left( u_{n_i} - \right. \\
& \left. \alpha_i(t) \right) + A_{n_i} e_i + A_{n_i} x_i + W_{n_i} \sigma \left( x_i(t - \tau) \right) + \alpha_i(t) - \\
& f_i(x_i) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{n_i n_j} a_{n_i n_j} \Gamma \left( x_{n_j} - x_{n_i} \right) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{ij} a_{ij} \Gamma \left( x_j - x_i \right), \\
& i = 1, 2, \dots, N
\end{aligned} \tag{5.5}$$

En orden a garantizar que la  $i$ -ésima red neuronal (5.2) siga la trayectoria del  $i$ -ésimo sistema dinámico (5.1) la siguiente suposición debe cumplirse:

Supuesto 1: Existe una función  $\rho_i(t)$  y  $\alpha_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, N$  tal que

$$\frac{d\rho_i(t)}{dt} = A_{n_i} \rho_i(t) + W_{n_i} \sigma \left( \rho_i(t) \right) + \alpha_i(t) \tag{5.6}$$

$$\rho_i(t) = x_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Definamos:

$$\tilde{u}_{n_i} = \left( u_{n_i} - \alpha_i(t) \right)$$

$$\begin{aligned}
\phi_\sigma(t - \tau) = & \sigma \left( x_{n_i}(t - \tau) \right) - \sigma \left( x_i(t - \tau) \right) \\
& i = 1, 2, \dots, N
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Considerando las ecuaciones (5.6) y (5.7), la ecuación (5.5) se reduce a

$$\begin{aligned}
\dot{e}_i = & A_{n_i} e_i + W_{n_i} \phi_\sigma(t - \tau) + \tilde{u}_{n_i} + \\
& \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{n_i n_j} a_{n_i n_j} \Gamma \left( x_{n_j} - x_{n_i} \right) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{ij} a_{ij} \Gamma \left( x_j - x_i \right), \\
& i = 1, 2, \dots, N
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Escribiendo las sumatorias como

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{n_i n_j} a_{n_i n_j} \Gamma \left( x_{n_j} - x_{n_i} \right) = & \Gamma \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{n_i n_j} a_{n_i n_j} x_{n_j} - \right. \\
& \left. x_{n_i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{n_i n_j} a_{n_i n_j} \right)
\end{aligned}$$

y

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{ij} a_{ij} \Gamma(x_j - x_i) = \Gamma \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{ij} a_{ij} x_j - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{ij} a_{ij} \right) \quad i=1,2,\dots,N \quad (5.9)$$

Y usando que  $c_{n_i n_j} = c_{ij}$  y  $a_{n_i n_j} = a_{ij}$ , entonces usando la ecuaciones anteriores, la ecuación (5.8) se convierte en,

$$\begin{aligned} \dot{e}_i &= A_{n_i} e_i + W_{n_i} \phi_\sigma(t - \tau) + \tilde{u}_{n_i} + \\ &\quad \Gamma \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{ij} a_{ij} e_j - e_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{ij} a_{ij} \right) \\ \dot{e}_i &= A_{n_i} e_i + W_{n_i} \phi_\sigma(t - \tau) + \tilde{u}_{n_i} + \\ &\quad \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{ij} a_{ij} \Gamma(e_j - e_i) \quad i=1,2,\dots,N \quad (5.10) \end{aligned}$$

Es claro que  $e_i = 0, i = 1,2,3,\dots,N$  es un punto de equilibrio de la ecuación (5.10), cuando  $\tilde{u}_{n_i} = 0, i = 1,2,3,\dots,N$ . De esta forma el problema del seguimiento puede ser reestablecido como un problema de estabilización asintótica global de (5.10)

#### 5.4 Seguimiento de estabilización de error y diseño de control.

En orden a establecer la convergencia de (5.10) para  $e_i = 0, i = 1,2,3,\dots,N$  lo cual asegura el seguimiento deseado, proponemos la siguiente función de Lyapunov-Krasovskii.

$$\begin{aligned} V_N(e) &= \sum_{i=1}^N V(e_i) = \\ &\quad \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \| e_i \|^2 + \int_{t-\tau}^t (\phi_\sigma^T(s) W_{n_i}^T W_{n_i} \phi_\sigma(s)) \quad (5.11) \\ e &= (e_1^T, \dots, e_N^T)^T \end{aligned}$$



La derivada en el tiempo de (5.11), a lo largo de las trayectorias de (5.10) es

$$\begin{aligned}
\dot{V}_N(e) &= \frac{\partial V_N(e)}{\partial e} \dot{e} = , e_N^T \sum_{i=1}^N \frac{\partial V_N(e)}{\partial e_i} \dot{e}_i \\
&= \sum_{i=1}^N (\phi_\sigma^T(t) W_{n_i}^T W_{n_i} \phi_\sigma(t) - \\
&\quad \phi_\sigma^T(t - \tau) W_{n_i}^T W_{n_i} \phi_\sigma(t - \tau) + \\
&\quad e_i^T (A_{n_i} e_i W_{n_i} \phi_\sigma(t - \tau) + \tilde{u}_{n_i} + \\
&\quad \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{ij} a_{ij} \Gamma(e_j - e_i))) \tag{5.12}
\end{aligned}$$

Reformulando (5.12) obtenemos

$$\begin{aligned}
\dot{V}_N(e) &= -\lambda_{n_i} \| e_i \|^2 + e_i^T W_{n_i} \phi_\sigma(t - \tau) + e_i^T \tilde{u}_{n_i} + \\
&\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{ij} a_{ij} e_i^T \Gamma(e_j - e_i) + \phi_\sigma^T(t) W_{n_i}^T W_{n_i} \phi_\sigma(t) - \\
&\phi_\sigma^T(t - \tau) W_{n_i}^T W_{n_i} \phi_\sigma(t - \tau) \tag{5.13}
\end{aligned}$$

A continuación, vamos a considerar la siguiente desigualdad, probada en [9], [10]

$$X^T Y + Y^T X \leq X^T \Lambda X + Y^T \Lambda^{-1} Y \tag{5.14}$$

La cual se cumple para todas las matrices  $X, Y \in \mathfrak{R}^{n \times k}$  y  $\Lambda \in \mathfrak{R}^{n \times n}$

con  $\Lambda = \Lambda^T > 0$ . Aplicando la ecuación 5.14 con  $\Lambda = I_{n \times n}$  al término

$e_i^T W_{n_i} \phi_\sigma(t - \tau) \quad i = 1, 2, \dots, N$  obtenemos

$$\begin{aligned}
&e_i^T W_{n_i} \phi_\sigma(t - \tau) \\
&\leq \frac{1}{2} e_i^T e_i + \frac{1}{2} \phi_\sigma^T(t - \tau) W_{n_i}^T W_{n_i} \phi_\sigma(t - \tau) \\
&\frac{1}{2} \| e_i \|^2 + \frac{1}{2} \phi_\sigma^T(t - \tau) W_{n_i}^T W_{n_i} \phi_\sigma(t - \tau) \tag{5.15}
\end{aligned}$$

para  $i=1,2,\dots,N$

Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned}
\dot{V}_N(e) &\leq \sum_{i=1}^N (-\lambda_{n_i} \| e_i \|^2 + \frac{1}{2} \| e_i \|^2 + \\
&\quad \frac{1}{2} \phi_\sigma^T(t - T) W_{n_i}^T W_{n_i} \phi_\sigma(t - \tau) + e_i^T \tilde{u}_{n_i} + \\
&\quad \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{ij} a_{ij} e_i^T \Gamma(e_j - e_i) + \phi_\sigma^T(t) W_{n_i}^T W_{n_i} \phi_\sigma(t) \\
&\quad - \phi_\sigma^T(t - \tau) W_{n_i}^T W_{n_i} \phi_\sigma(t - \tau)) \tag{5.16}
\end{aligned}$$

Simplificando (5.16), obtenemos

$$\begin{aligned}
\dot{V}_N(e) &\leq \sum_{i=1}^N (-\lambda_{n_i} \| e_i \|^2 + \frac{1}{2} \| e_i \|^2 - \\
&\quad \frac{1}{2} \phi_\sigma^T(t - \tau) W_{n_i}^T W_{n_i} \phi_\sigma(t - \tau) + e_i^T \tilde{u}_{n_i} + \\
&\quad \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{ij} a_{ij} e_i^T \Gamma(e_j - e_i) + \phi_\sigma^T(t) W_{n_i}^T W_{n_i} \phi_\sigma(t)) \\
&\leq \sum_{i=1}^N (-\lambda_{n_i} \| e_i \|^2 + \frac{1}{2} \| e_i \|^2 + \phi_\sigma^T(t) W_{n_i}^T W_{n_i} \phi_\sigma(t) \\
&\quad + e_i^T \tilde{u}_{n_i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{ij} a_{ij} e_i^T \Gamma(e_j - e_i)) \tag{5.17}
\end{aligned}$$

Desde que  $\phi_\sigma$  es Lipschitz con Lipschitz constante  $L_{\phi_{\sigma_i}}$  [7], entonces

$$\begin{aligned}
&\| \phi_\sigma(t) \| = \\
&\| \sigma(x_{n_i}(t)) - \sigma(x_i(t)) \| \leq L_{\phi_{\sigma_i}} \| (x_{n_i}(t)) - (x_i(t)) \| \\
&= L_{\phi_{\sigma_i}} \| e_i(t) \|, \tag{5.18}
\end{aligned}$$

$i=1,2,\dots,N$

Aplicando (5.18) a  $\phi_\sigma^T(t)W_{n_i}^T W_{n_i} \phi_\sigma(t)$  obtenemos

$$\begin{aligned}
& \phi_\sigma^T(t)W_{n_i}^T W_{n_i} \phi_\sigma(t) \\
& \leq \|\phi_\sigma^T(t)W_{n_i}^T W_{n_i} \phi_\sigma(t)\| \\
& \leq \left(L_{\phi_{\sigma_i}}\right)^2 \|W_{n_i}\|^2 \|e_i\|^2, \tag{5.19} \\
& i=1,2,\dots,N
\end{aligned}$$

Ahora (5.17) se reduce a

$$\begin{aligned}
\dot{V}_N(e) & \leq \sum_{i=1}^N (-\lambda_{n_i} \|e_i\|^2 + \frac{1}{2} \|e_i\|^2 + \\
& \quad \left(L_{\phi_{\sigma_i}}\right)^2 \|W_{n_i}\|^2 \|e_i\|^2 + e_i^T \tilde{u}_{n_i} + \\
& \quad \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{ij} a_{ij} e_i^T \Gamma(e_j - e_i)) \\
& \tag{5.20} \\
& = \sum_{i=1}^N e_i^T (-\lambda_{n_i} e_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{ij} a_{ij} \Gamma(e_i) + \left(\frac{1}{2} + \right. \\
& \quad \left. L_{\phi_{\sigma_i}}^2 \|W_{n_i}\|^2\right) e_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{ij} a_{ij} e_i^T \Gamma e_j \left(\frac{1}{2} + \|e_i\|^2 + \tilde{u}_{n_i}\right)
\end{aligned}$$

Ahora definimos  $\tilde{u}_{n_i} = \tilde{u}_{n_i}^{(1)} + \tilde{u}_{n_i}^{(2)}$ ,  $i = 1,2,\dots,N$  y entonces la ecuación (5.20) se convierte en

$$\begin{aligned}
\dot{V}_N(e) & \leq \sum_{i=1}^N e_i^T (-\lambda_{n_i} e_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{ij} a_{ij} \Gamma e_i \\
& \quad + \left(\frac{1}{2} + L_{\phi_{\sigma_i}}^2 \|W_{n_i}\|^2\right) e_i + \tilde{u}_{n_i}^{(1)} + \\
& \quad \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{ij} a_{ij} \Gamma e_j + \tilde{u}_{n_i}^{(2)}) \tag{5.21}
\end{aligned}$$

Ahora, proponemos el uso de la siguiente ley de control:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{n_i} = & - \left( \frac{1}{2} + L_{\phi_{\sigma_i}}^2 \|W_{n_i}\|^2 \right) e_i \\ & - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{ij} a_{ij} \Gamma e_j, \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (5.22)$$

Entonces,  $\dot{V}_N(e) < 0$  para toda  $e \neq 0$ . Esto significa que la ley de control propuesta (5.22) garantiza la estabilidad global y asintótica del error de seguimiento entre planta  $i$ -ésima y señal de referencia  $i$ -ésima asegurando así el seguimiento (5.1) por (5.2). Finalmente, la acción de control que se alimenta a la red neuronal recurrente está dada por:

$$\begin{aligned} u_{n_i} = & f_i(x_i) + \lambda_{n_i} x_i - W_{n_i} \sigma(x_i(t - \tau)) \\ & - \left( \frac{1}{2} + L_{\phi_{\sigma_i}}^2 \|W_{n_i}\|^2 \right) e_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{ij} a_{ij} \Gamma e_j, \\ & i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (5.23)$$

## 5.5 Simulaciones

Para ilustrar la aplicabilidad de los resultados obtenidos, consideraremos una red dinámica con solo un nodo, este nodo es representado por el sistema caótico de Lorentz y tres nodos interconectados idénticos representados por el atractor caótico de Chen. El sistema único de Lorentz es descrito por

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10x_2 - 10x_1 \\ -x_2 - x_1x_2 + 28x_1 \\ x_1x_2 - \left(\frac{8}{3}\right)x_3 \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

$$x_i(0) = (10, 0, 10)^T, \quad i = 1$$

Y el oscilador de Chen es descrito por

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{i1} \\ \dot{x}_{i2} \\ \dot{x}_{i3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1(x_{i2} - x_{i1}) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^4 c_{ij} a_{ij} (x_{j1} - x_{i1}) \\ (p_3 - p_2)x_{i1} - x_{i1}x_{i3} + p_3x_{i2} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^4 c_{ij} a_{ij} (x_{j2} - x_{i2}) \\ x_{i1}x_{i2} - p_2x_{i3} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^4 c_{ij} a_{ij} (x_{j3} - x_{i3}) \end{pmatrix}$$

$$x_i(0) = (-10, 0, 37)^T, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

(5.25)

Si los parámetros del sistema son seleccionados como  $p_1 = 35, p_2 = 3$  y  $p_3 = 28$ , entonces los sistemas de Lorentz y de Chen se muestran en la figura 1 y 2, respectivamente. Con este conjunto de parámetros del sistema, un punto de equilibrio inestable del oscilador (5.25) es  $x = (7.9373, 7.9373, 21)^T$

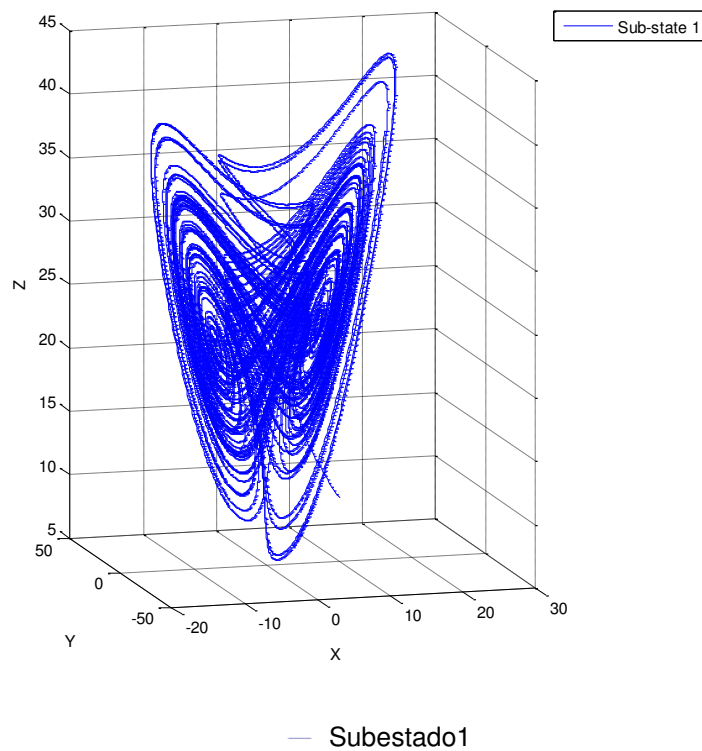


Figura 5.1 Sub-estado del atractor de Lorentz con condición inicial

$$X_1(0) = (10, 0, 10)^T$$

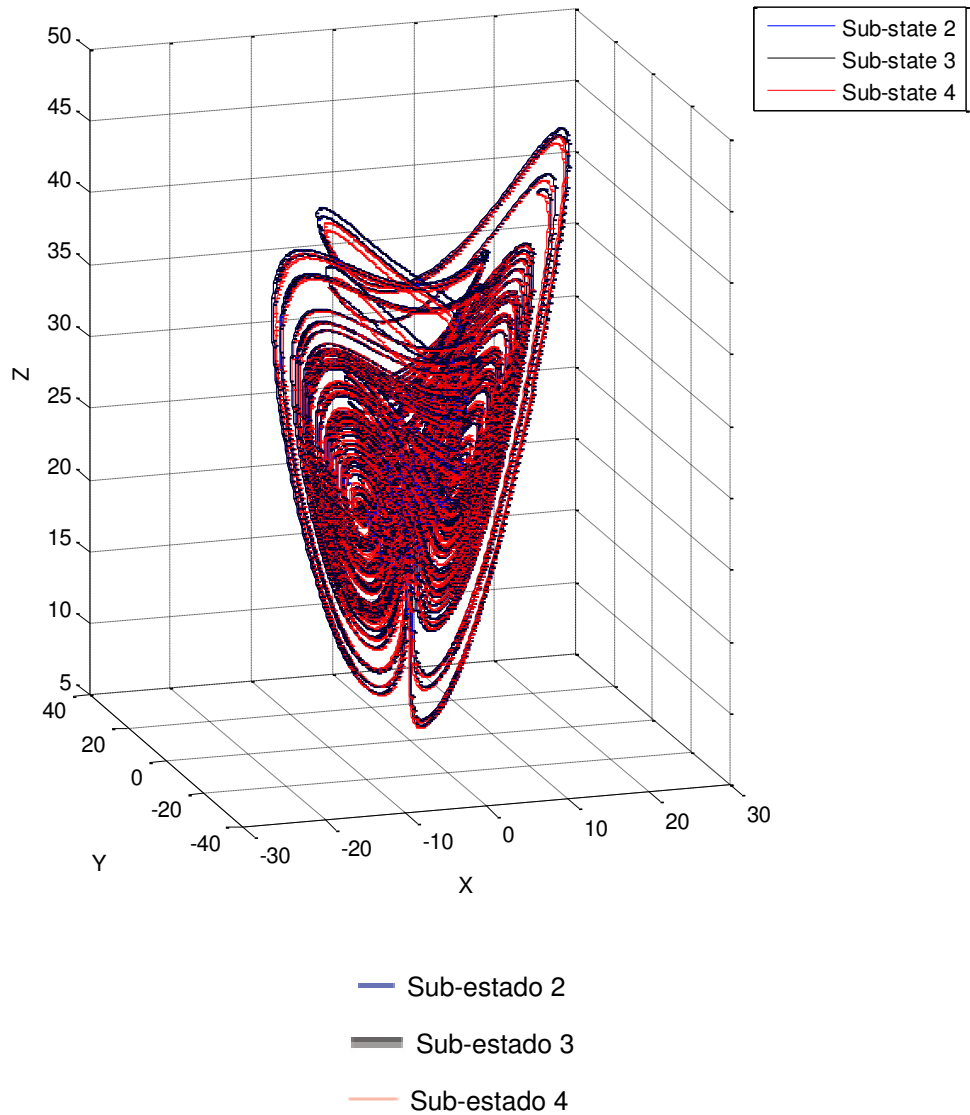


Figura 5.2 Sub-estados del atractor de Chen con condiciones iniciales

$$X_{2,3,4}(0) = (-10, 0, 37)^T$$

Supongamos que cada par de osciladores de Lorentz y Chen están vinculados juntos a través de sus variables de sub-estado idénticas. Esto es,  $\Gamma = \text{diag}(1,1,1)$  y las fuerzas de acoplamiento son  $c_{12} = c_{21} = \pi$ ,  $c_{13} = c_{31} = \pi$ ,  $c_{23} = c_{32} = \pi$ ,  $c_{14} = c_{41} = 2\pi$ ,  $c_{24} = c_{42} = 2\pi$  y  $c_{34} = c_{43} = 2\pi$ .

La figura 5.3 la podemos ver como una red dinámica compleja de sistemas complejos dinámicos no-lineales donde cada nodo representa un sistema dinámico complejo no-lineal por sí mismo, interconectado con otros en su entorno los cuales pueden ser brazos mecánicos, robots, etc.

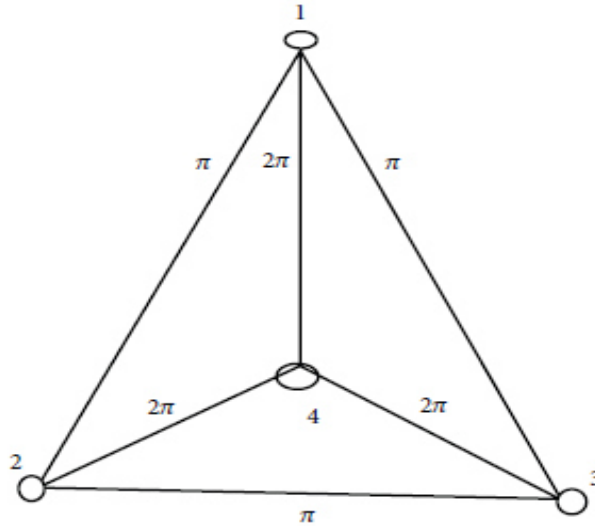


Figura 5.3 Estructura de la red interconectada

La red neuronal es seleccionada como

$$A_{n_i} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad W_{n_i} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma(x_{n_i}(t - \tau)) = \begin{pmatrix} \tanh(x_{n_{i1}}(t - \tau)) \\ \tanh(x_{n_{i2}}(t - \tau)) \\ \tanh(x_{n_{i3}}(t - \tau)) \end{pmatrix} \quad (5.26)$$

$$\tau = 10 \text{ segundos}$$

$$L_{\phi_{\sigma_i}} \triangleq n = 3$$

$$x_{n_i}(0) = (20, 20, -10)^T, \quad i = 1, 2, 3, 4$$



**Teorema 1** Para un sistema no lineal desconocido modelado por (5.1), la ley de aprendizaje en línea  $x_{n_i} tr\{W^T W\} = -e^T W \sigma(x)$  y la ley de control (5.23) asegura el seguimiento de modelos de referencia no lineales (5.4).

**Observación 2** De la ecuación (5.21) tenemos que  $\dot{V}_N(e) \leq \sum_{i=1}^N e_i^T (-\lambda_{n_i} e_i - \sum_{j=1, j \neq i}^N c_{ij} a_{ij} \Gamma e_j + (\frac{1}{2} +$

$$L_{\phi_{\sigma_i}}^2 \|W_{n_i}\|^2) e_i + \tilde{u}_{n_i}^{(1)} + \sum_{j=1, j \neq i}^N c_{ij} a_{ij} \Gamma e_j + \tilde{u}_{n_i}^{(2)}) < 0, \forall e \neq$$

$0, \forall W$ , y por esto  $V$  es decreciente y delimitada desde abajo por  $V(0)$ . Desde que

$$V_N(e) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{2} \|e_i\|^2 + \int_{t-T}^t (\phi_{\sigma}^T(s) W_{n_i}^T W_{n_i} \phi_{\sigma}(s)) ds \right)$$

entonces concluimos que  $e, W \in L_1$  esto significa que los pesos permanecen delimitados.

El experimento es ejecutado como sigue: Ambos sistemas, la red neuronal con retardo (5.2) y las redes dinámicas (5.24) y (5.25) evolucionan independientemente hasta  $t= 10$  segundos; En ese instante, la ley de control propuesta (5.23) es introducida. Los resultados de la simulación se presentan en las Fig. 4 – Fig. 6 para sub-estados del nodo 1. Como puede observarse, el seguimiento es exitosamente alcanzado y el error es asintóticamente estable. Se muestran también en las Fig. 7 – Fig. 9 los seguimientos para sub-estados del nodo 4.

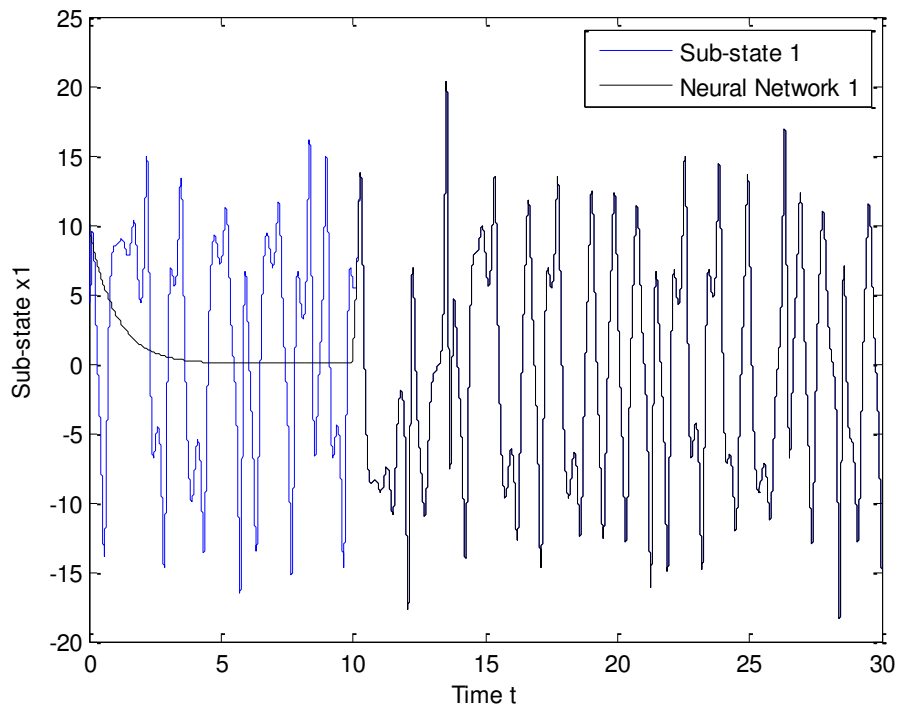


Fig. 5. 4 Evolución en el tiempo para el sub-estado x1 con estado inicial

$$X_{n1}(0) = (10; 0; 10)^T$$

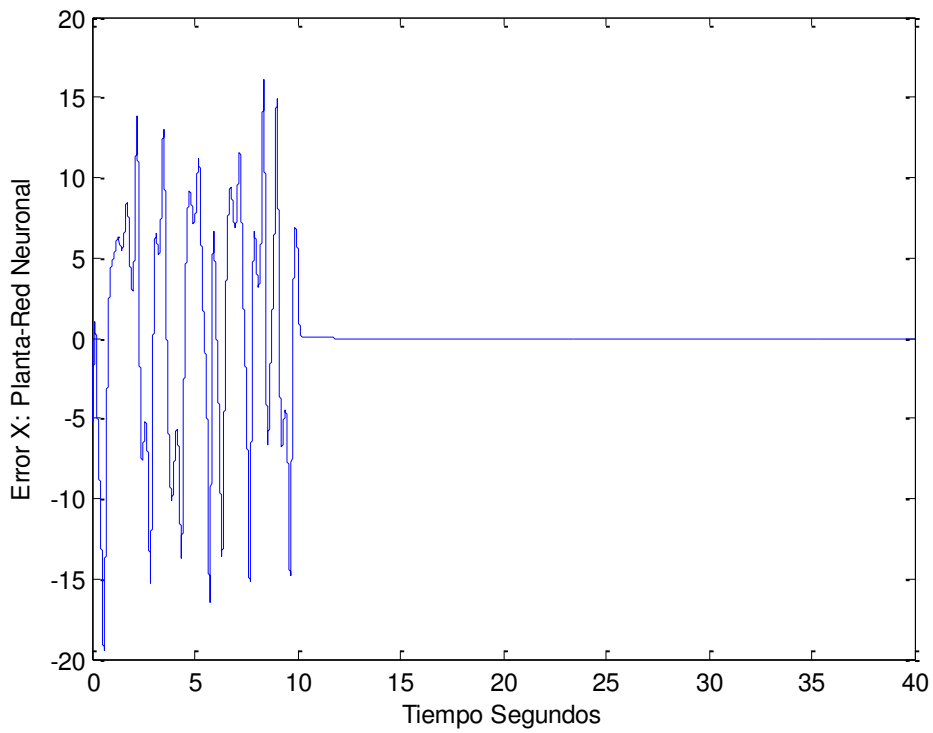


Fig. 5. 5 Error entre la planta y la red neuronal para

el sub-estado x1

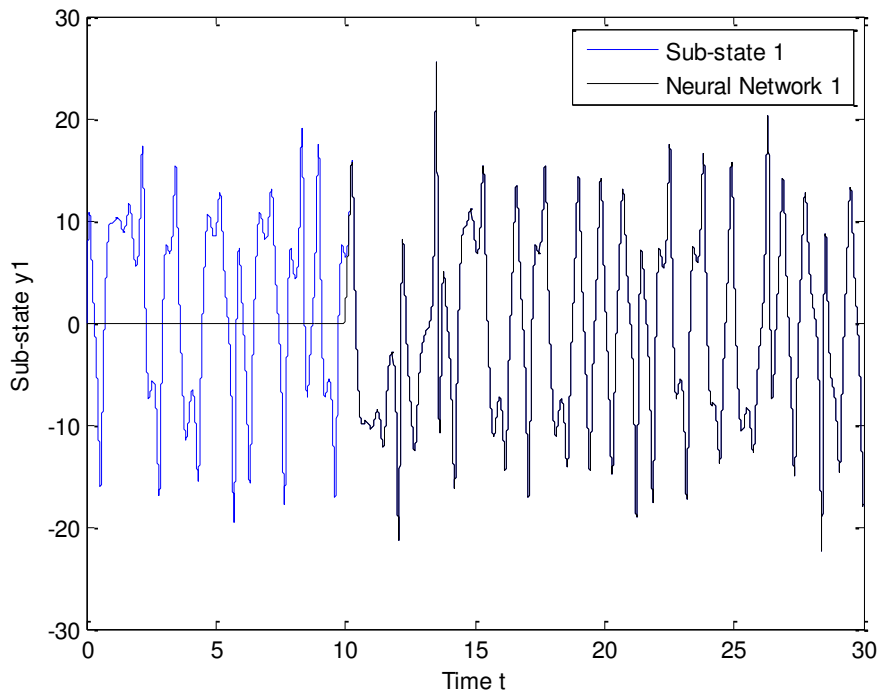


Figura 5.6 Evolución en el tiempo para los sub-estados  $y_1$

con estado inicial  $X_{n1}(0) = (10; 0; 10)^T$

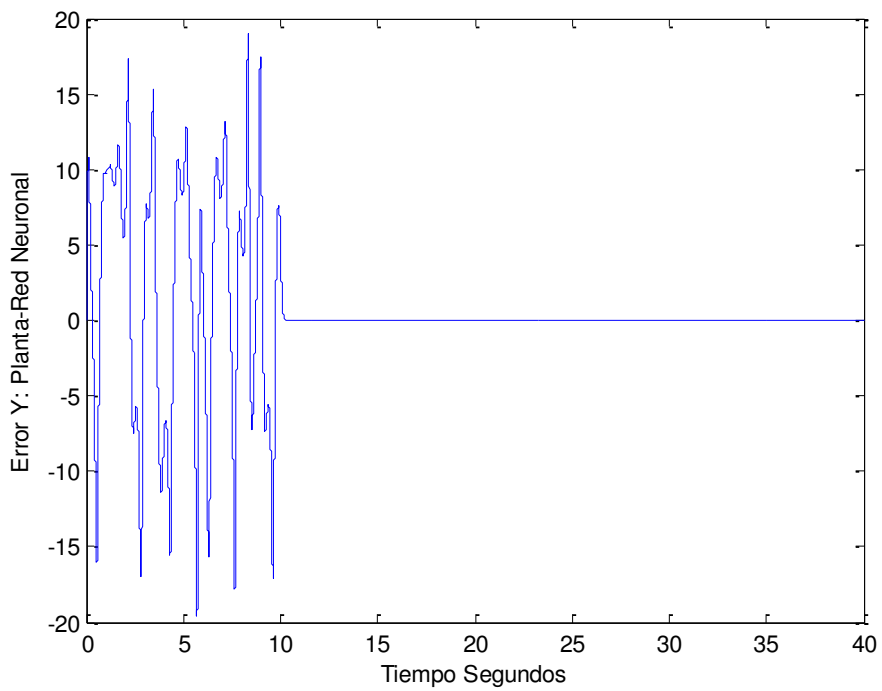


Fig. 5. 7 Error entre la planta y la red neuronal para

el sub-estado  $y_1$

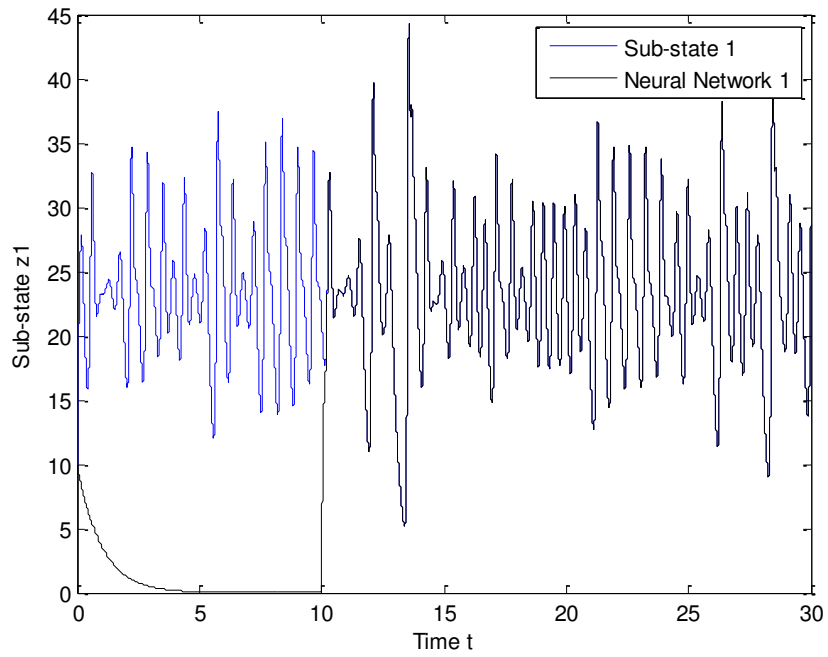


Figura 5.8 Evolución en el tiempo para el sub-estado z1

con estado inicial  $X_{n1}(0) = (10; 0; 10)^T$

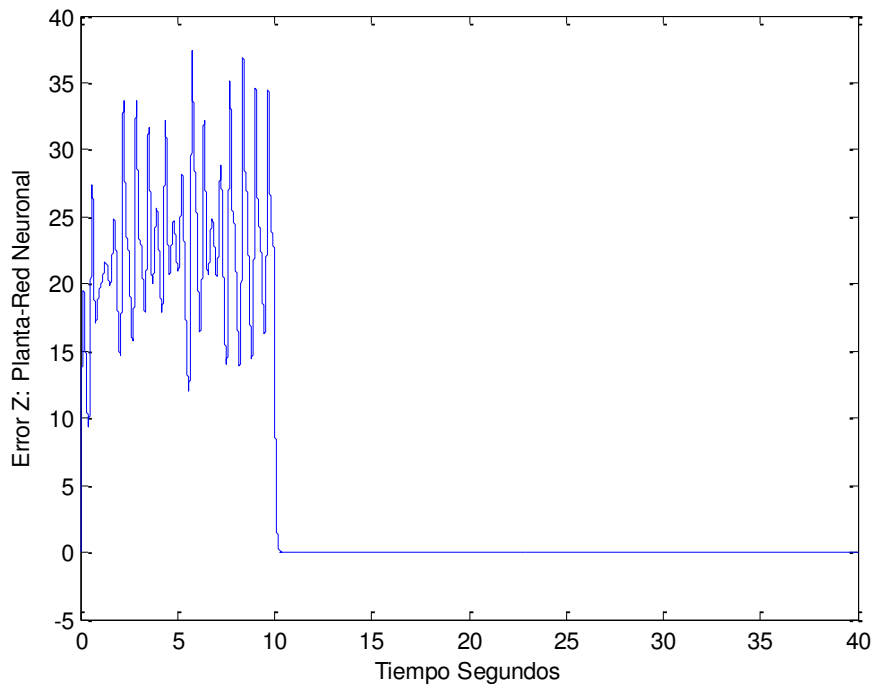


Fig. 5. 9 Error entre la planta y la red neuronal para

el sub-estado z1

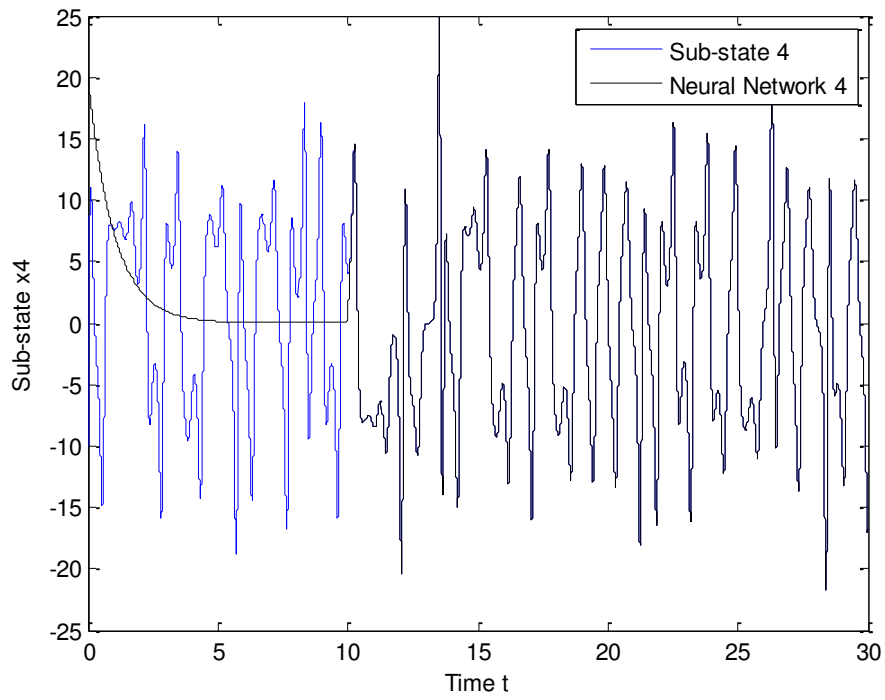


Figura 5.10 Evolución en el tiempo para el sub-estado  $x_4$

con estado inicial  $X_{n_4}(0) = (20, 20, -10)^T$

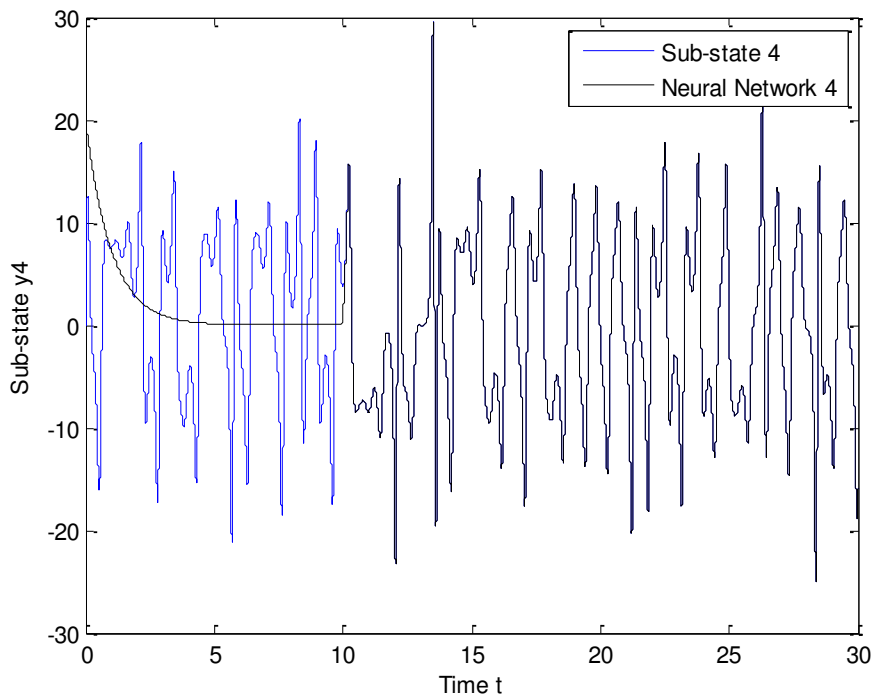


Figura 5.11 Evolución en el tiempo para el sub-estado  $y_4$

con estado inicial  $X_{n_4}(0) = (20, 20, -10)^T$

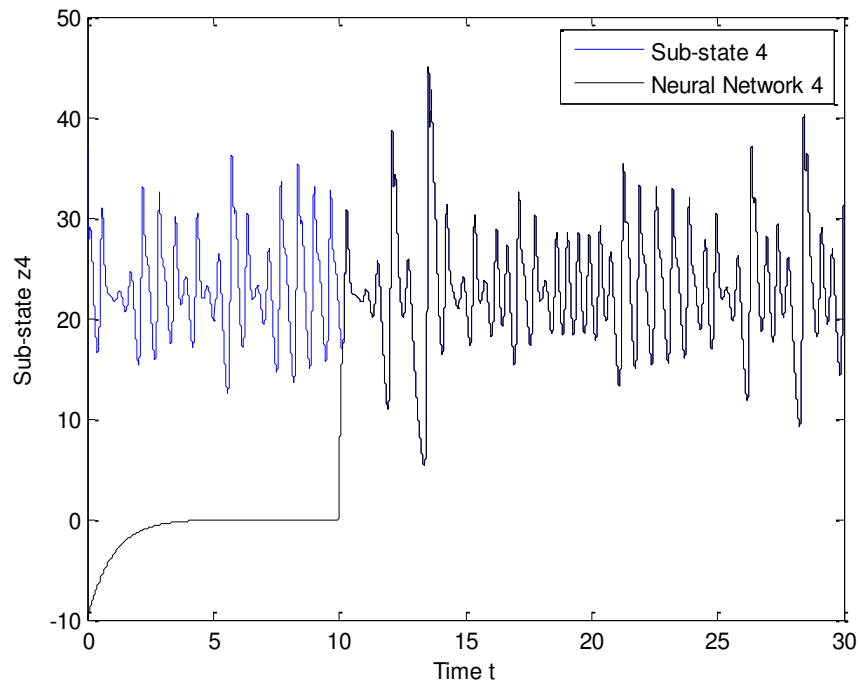


Figura 5.12 Evolución en el tiempo para el sub-estado z4

con estado inicial  $X_{n4}(0) = (20, 20, -10)^T$

## **CONCLUSIONES DEL CAPITULO**

Se ha presentado el diseño de una ley de control (controlador) para seguimiento de trayectorias determinado por una red dinámica compleja general. Este marco de trabajo, está basado en redes neuronales dinámicas con retardo y la metodología está basada en la teoría de V-estabilidad y la estabilidad de Lyapunov. El control propuesto es aplicado a una red dinámica interconectada en donde un nodo es el sistema dinámico de Lorentz y el resto de los nodos interconectados son representados por el atractor de Chen. La ley de control propuesta garantiza la estabilidad del error de seguimiento entre planta y señales de referencia. Los resultados analíticos obtenidos que predicen la estabilidad del error de seguimiento entre planta y señales de referencia son satisfactorios, los cuales pueden verse vía simulación estos muestran claramente el seguimiento deseado. Como trabajo futuros, consideraremos el caso cuando el sistema dinámico es estocástico y este es modelado por una red neuronal estocástica.

## CAPÍTULO 6

### LEY DE CONTROL PID POR SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIA DE SISTEMAS DINÁMICOS COMPLEJOS VIA REDES NEURONALES RECURRENTE CON RETARDO.

#### 6.1 Introducción

En este capítulo se analiza la trayectoria no para un sistema no-lineal sino para una red de sistemas no-lineales acoplados con retardo, los cuales son forzados a seguir una señal de referencia generada por un sistema caótico no-lineal. La ley de control que garantiza el seguimiento de la trayectoria es obtenida usando la metodología de Lyapunov-Krasovskii y la ley de control PID.

En análisis anteriores, se ha discutido ocasionalmente los controladores básicos PID. Por ejemplo, se han presentado controladores PID electrónicos, hidráulicos y neumáticos. También se han diseñado algunos sistemas de control donde los controladores PID estuvieron involucrados. Es interesante hacer notar que más de la mitad de los controladores en la industria el día de hoy son controladores PID o controladores PID modificados.

La acción de control proporcional, tiende a estabilizar el sistema, mientras que la acción de control integral tiende a eliminar o reducir el error de estado estable en respuesta a las diversas entradas. La acción de control de la derivada, cuando es agregada al controlador proporcional, provee un medio de obtener un controlador con alta sensibilidad. Una ventaja de usar la acción de control de la derivada es que ésta responde a la razón de cambio del error que está ocurriendo y puede producir una corrección significativa antes de que el error que está ocurriendo sea demasiado grande. El control derivativo así, se anticipa al error que está ocurriendo, iniciando una acción correctiva temprana, y tiende a incrementar la estabilidad del sistema.

La combinación de la acción de control proporcional, la acción de control integral y la acción de control de la derivada se denomina acción de control proporcional más integral más derivada. Este tiene las ventajas de cada una de las tres acciones de control individuales. La ecuación de un controlador con esta acción combinada es dada por:

$$u_{n_i} = K_{p_i} e_i + K_{v_i} \dot{e}_i + K_{i_i} \int_0^t e_i(\tau) d\tau \quad i=1,2,3,\dots,n$$



El análisis y control del comportamiento complejo en redes complejas, las cuales consisten de nodos dinámicos, ha sido un punto de gran interés en estudios recientes [25], [26], [27]. La complejidad en las redes viene de su propia estructura y dinámica pero también de su topología, la cual a veces afecta sus funciones.

Las redes neuronales recurrentes han sido ampliamente usadas en los campos de optimización, reconocimiento de patrones, procesamiento de señales y sistemas de control, entre otros. Estas redes, tienen que ser diseñadas de tal forma que hay un punto de equilibrio que es globalmente asintóticamente estable. En biología y redes neuronales artificiales, los tiempos de retardo surgen en el procesamiento de la información almacenada y en la transmisión de la misma. También es sabido que estos retardos pueden crear trayectorias oscilatorias o aún más trayectorias inestables [28]. El seguimiento de la trayectoria es un problema muy interesante en el campo de la teoría de los sistemas de control. Esto permite la implementación de importantes tareas para el control automático tales como reconocimiento de un objetivo de alta velocidad y su seguimiento, inspección visual en tiempo real, y reconocimiento de la sensibilidad del contexto y las escenas de movimiento entre otros. En este capítulo se presentan los resultados del diseño de una ley de control que garantice el seguimiento de redes dinámicas complejas generales. se garantiza el resultado del diseño de una ley de control. Recordemos los modelos matemáticos ya vistos en el capítulo anterior.

## MODELO MATEMATICO

### 6.2 Redes Dinámicas complejas Generales

Recordemos nuevamente una red que consiste de  $n$  nodos acoplados difusos y linealmente, en donde cada nodo es un sistema dinámico descrito por

$$\dot{x}_i = f_i(x_i) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{ij} a_{ij} \Gamma(x_j - x_i), \quad i=1,2,\dots,N \quad (6.1)$$

Donde  $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})^T \in \mathfrak{R}^n$  son los vectores de estado del nodo  $i$ ,  $f_i: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$  representa la auto-dinámica del nodo  $i$ , las constantes  $c_{ij} > 0$  son las fuerzas de acoplamiento entre el nodo  $i$  y el nodo  $j$ , con  $i, j = 1, 2, 3 \dots N$ . En este modelo la matriz constante  $\Gamma = (\tau_{ij}) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  describe la forma de vincular los componentes en cada par de vectores nodos conectados  $(x_j - x_i)$ , mientras que la matriz de acoplamiento  $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{R}^{N \times N}$  denota la configuración de acoplamiento de la red entera: esto significa que si hay una conexión entre el nodo  $i$  y el nodo  $j$  ( $i \neq j$ ), entonces  $a_{ij} = a_{ji} = 1$ ; de otro modo  $a_{ij} = a_{ji} = 0$ .

### 6.3 Redes Neuronales recurrentes con retardo.

Consideremos una red neuronal recurrente con retardo en la siguiente forma:

$$\dot{x}_{n_i} = A_{n_i}x_{n_i} + W_{n_i}\sigma\left(x_{n_i}(t - \tau)\right) + u_{n_i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{n_i n_j} a_{n_i n_j} \Gamma\left(x_{n_j} - x_{n_i}\right) \quad i=1,2,\dots,N \quad (6.2)$$

Donde  $\tau$  es el tiempo fijado como tiempo de retardo,  $x_{n_i} = (x_{n_i1}, x_{n_i2}, \dots, x_{n_in})^T \in \mathfrak{R}^n$  es el vector de estado de la red neuronal  $i$ ,  $u_{n_i} \in \mathfrak{R}^n$  es la entrada de la red neuronal  $i$ ,  $A_{n_i} = -\lambda_{n_i}I_{n \times n}$ ,  $i = 1,2,3, \dots, N$  es la matriz de retroalimentación de estado con  $\lambda_{n_i}$  siendo una constante positiva,  $W_{n_i} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  es la matriz de conexión de peso con  $i = 1,2,3, \dots, N$  y  $\sigma(\cdot) \in \mathfrak{R}^n$  es un vector función sigmoide Lipschitz tal que  $\sigma(x_{n_i}) = 0$  únicamente en  $x_{n_i} = 0$  con la constante Lipschitz  $L_{\sigma_i}$ ,  $i = 1,2,3, \dots, N$  y la función de activación neuronal  $\sigma(\cdot) = \tanh(\cdot)$ ,  $i = 1,2,3, \dots, N$ .

### 5.4 Seguimiento de trayectoria

El objetivo es desarrollar una ley de control tal que la  $i$ -ésima red neuronal (6.2) siga la trayectoria del  $i$ -ésimo sistema dinámico (6.1) Definimos el seguimiento del error como  $e = x_{n_i} - x_i$  para  $i = 1,2,3, \dots, N$  cuya derivada con respecto al tiempo es:

$$\dot{e}_i = \dot{x}_{n_i} - \dot{x}_i, \quad \text{para } i=1,2,\dots,N \quad (6.3)$$

Sustituyendo (1), (2) y (3), obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{e}_i = & A_{n_i}x_{n_i} + W_{n_i}\sigma\left(x_{n_i}(t - \tau)\right) + u_{n_i} - f_i(x_i) + \\ & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{n_i n_j} a_{n_i n_j} \Gamma\left(x_{n_j} - x_{n_i}\right) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{ij} a_{ij} \Gamma\left(x_j - x_i\right) \end{aligned} \quad i=1,2,\dots,N \quad (6.4)$$

Sumando y restando  $W_{n_i}\sigma(x_i(t-\tau)), \alpha_i(t)$ ,  $i = 1,2,3, \dots, N$  a la ecuación (6.4) donde  $\alpha_i$  será determinada más adelante y considerando que  $x_{n_i} = e_i + x_i$   $i = 1,2,3, \dots, N$ , entonces

$$\begin{aligned} \dot{e}_i = & W_{n_i} \left( \sigma \left( x_{n_i}(t-\tau) \right) - \sigma \left( x_i(t-\tau) \right) \right) + \left( u_{n_i} - \right. \\ & \left. \alpha_i(t) \right) + A_{n_i} e_i + A_{n_i} x_i + W_{n_i} \sigma \left( x_i(t-\tau) \right) + \alpha_i(t) - \\ & f_i(x_i) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{n_i n_j} a_{n_i n_j} \Gamma \left( x_{n_j} - x_{n_i} \right) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{ij} a_{ij} \Gamma \left( x_j - x_i \right) \end{aligned} \quad i = 1,2, \dots, N \quad (6.5)$$

En orden a garantizar que la  $i$ -ésima red neuronal (6.2) siga la trayectoria del  $i$ -ésimo sistema dinámico (6.1) la siguiente suposición debe cumplirse:

Supuesto 1: Existe una función  $\rho_i(t)$  y  $\alpha_i(t)$ ,  $i = 1,2,3, \dots, N$  tal que

$$\frac{d\rho_i(t)}{dt} = A_{n_i} \rho_i(t) + W_{n_i} \sigma(\rho_i(t)) + \alpha_i(t) \quad (6.6)$$

$$\rho_i(t) = x_i(t), \quad i=1,2, \dots, N$$

Definamos:

$$\tilde{u}_{n_i} = \left( u_{n_i} - \alpha_i(t) \right)$$

$$\phi_\sigma(t-\tau) = \sigma \left( x_{n_i}(t-\tau) \right) - \sigma \left( x_i(t-\tau) \right) \quad (6.7)$$

$$i = 1,2, \dots, N$$

Considerando las ecuaciones (6.6) y (6.7), la ecuación (6.5) se reduce a

$$\begin{aligned} \dot{e}_i = & A_{n_i} e_i + W_{n_i} \phi_\sigma(t-\tau) + \tilde{u}_{n_i} + \\ & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{n_i n_j} a_{n_i n_j} \Gamma \left( x_{n_j} - x_{n_i} \right) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{ij} a_{ij} \Gamma \left( x_j - x_i \right) \end{aligned}$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (6.8)$$

Escribiendo las sumatorias como

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{n_i n_j} a_{n_i n_j} \Gamma(x_{n_j} - x_{n_i}) = \Gamma \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{n_i n_j} a_{n_i n_j} x_{n_j} - x_{n_i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{n_i n_j} a_{n_i n_j} \right) \text{ y}$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{ij} a_{ij} \Gamma(x_j - x_i) = \Gamma \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{ij} a_{ij} x_j - x_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{ij} a_{ij} \right) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (6.9)$$

Y usando que  $c_{n_i n_j} = c_{ij}$  y  $a_{n_i n_j} = a_{ij}$ , entonces usando la ecuaciones anteriores la ecuación (5.8) se convierte en,

$$\dot{e}_i = A_{n_i} e_i + W_{n_i} \phi_\sigma(t - \tau) + \tilde{u}_{n_i} + \Gamma \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{ij} a_{ij} e_j - e_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{ij} a_{ij} \right)$$

$$\dot{e}_i = A_{n_i} e_i + W_{n_i} \phi_\sigma(t - \tau) + \tilde{u}_{n_i} +$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{ij} a_{ij} \Gamma(e_j - e_i)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (6.10)$$

Es claro que  $e_i = 0$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, N$  es un punto de equilibrio de la ecuación (6.10), cuando  $\tilde{u}_{n_i} = 0$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, N$ . De esta forma el problema del seguimiento puede ser reestablecido como un problema de estabilización asintótica global de (6.10)

#### 6.4 Seguimiento de estabilización de error y diseño de control.

En orden a establecer la convergencia de (6.10) para  $e_i = 0$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, N$  lo cual asegura el seguimiento deseado, proponemos la siguiente función de Lyapunov-Krasovskii.

$$V_N(e) = \sum_{i=1}^N V(e_i) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} (e_i^T, w_i^T)(e_i, w_i)^T + \int_{t-T}^t (\phi_\sigma^T(s) W_{n_i}^T W_{n_i} \phi_\sigma(s)) ds, \quad (6.11)$$

$$e = (e_1^T, \dots, e_N^T)^T$$

La derivada en el tiempo de (6.11), a lo largo de las trayectorias de (6.10), y agregando la derivada "D"

$$\dot{V}_N(e) = \sum_{i=1}^N [e_i^T \dot{e}_i + w_i^T \dot{w}_i + \phi_\sigma^T(t) W_{n_i}^T W_{n_i} \phi_\sigma(t) - \phi_\sigma^T(t - \tau) W_{n_i}^T W_{n_i} \phi_\sigma(t - \tau)] = \quad (6.12)$$

$$\sum_{i=1}^N [e_i^T (\dot{e}_i + K v_i \dot{e}_i) + w_i^T \dot{w}_i + \phi_\sigma^T(t) W_{n_i}^T W_{n_i} \phi_\sigma(t) - \phi_\sigma^T(t - \tau) W_{n_i}^T W_{n_i} \phi_\sigma(t - \tau)]$$

$$\sum_{i=1}^N [e_i^T (1 + K v_i) \dot{e}_i + w_i^T \dot{w}_i + \phi_\sigma^T(t) W_{n_i}^T W_{n_i} \phi_\sigma(t) - \phi_\sigma^T(t - \tau) W_{n_i}^T W_{n_i} \phi_\sigma(t - \tau)]$$

Si  $\alpha = (1 + K v_i)$  y  $w = K_{i_i} \int_0^t e_i(\tau) d\tau$ , entonces  $\dot{w}_i = K_{i_i} e_i(t)$

$$\dot{V}_N(e) = \sum_{i=1}^N [\alpha e_i^T (A_{n_i} e_i + W_{n_i} \phi_\sigma(t - \tau) + \tilde{u}_{n_i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{ij} a_{ij} \Gamma (e_j - e_i)) + \phi_\sigma^T(t) W_{n_i}^T W_{n_i} \phi_\sigma(t) - \phi_\sigma^T(t - T) W_{n_i}^T W_{n_i} \phi_\sigma(t - \tau) + w_i^T K_{i_i} e_i(t)]$$

Reformulando (6.12) obtenemos

$$\begin{aligned}
\dot{V}_N(e) = & \sum_{i=1}^N [-\alpha \lambda_{n_i} \| e_i \|^2 + \alpha e_i^T W_{n_i} \phi_\sigma(t - \tau) + \alpha e_i^T \tilde{u}_{n_i} + \\
& \alpha \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{ij} a_{ij} e_i^T \Gamma (e_j - e_i) + \phi_\sigma^T(t) W_{n_i}^T W_{n_i} \phi_\sigma(t) - \\
& \phi_\sigma^T(t - T) W_{n_i}^T W_{n_i} \phi_\sigma(t - \tau) + w_i^T K_i e_i(t)] \quad (6.13)
\end{aligned}$$

A continuación, vamos a considerar la siguiente desigualdad, probada en [9], [10]

$$X^T Y + Y^T X \leq X^T \Lambda X + Y^T \Lambda^{-1} Y \quad (6.14)$$

La cual se cumple para todas las matrices  $X, Y \in \mathfrak{R}^{n \times k}$  y  $\Lambda \in \mathfrak{R}^{n \times n}$

con  $\Lambda = \Lambda^T > 0$ . Aplicando la ecuación 6.14 con  $\Lambda = I_{n \times n}$  al término

$e_i^T W_{n_i} \phi_\sigma(t - \tau) \quad i = 1, 2, \dots, N$  obtenemos

$$\begin{aligned}
& e_i^T W_{n_i} \phi_\sigma(t - \tau) \\
\leq & \frac{1}{2} e_i^T e_i + \frac{1}{2} \phi_\sigma^T(t - \tau) W_{n_i}^T W_{n_i} \phi_\sigma(t - \tau) + \\
& \frac{1}{2} \| e_i \|^2 + \frac{1}{2} \phi_\sigma^T(t - \tau) W_{n_i}^T W_{n_i} \phi_\sigma(t - \tau) \quad (6.15)
\end{aligned}$$

para  $i = 1, 2, \dots, N$

Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned}
\dot{V}_N(e) &\leq \sum_{i=1}^N [(-\alpha\lambda_{n_i} \| e_i \|^2 + \frac{1}{2}\alpha \| e_i \|^2 + \\
&\quad \frac{\alpha}{2} \phi_\sigma^T(t - \tau) W_{n_i}^T W_{n_i} \phi_\sigma(t - \tau) + \alpha e_i^T \tilde{u}_{n_i} + \\
&\quad \alpha \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{ij} a_{ij} e_i^T \Gamma(e_j - e_i) + \phi_\sigma^T(t) W_{n_i}^T W_{n_i} \phi_\sigma(t) - \\
&\quad \phi_\sigma^T(t - \tau) W_{n_i}^T W_{n_i} \phi_\sigma(t - \tau) + w_i^T K_i e_i(t)] \quad (6.16)
\end{aligned}$$

Simplificando (6.16), obtenemos

$$\begin{aligned}
\dot{V}_N(e) &\leq \sum_{i=1}^N [-\alpha\lambda_{n_i} \| e_i \|^2 + \frac{1}{2}\alpha \| e_i \|^2 + \\
&\quad (\frac{\alpha}{2} - 1) \phi_\sigma^T(t - \tau) W_{n_i}^T W_{n_i} \phi_\sigma(t - \tau) + \alpha e_i^T \tilde{u}_{n_i} + \\
&\quad \alpha \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{ij} a_{ij} e_i^T \Gamma(e_j - e_i) + w_i^T K_i e_i(t)] + \\
&\quad \phi_\sigma^T(t) W_{n_i}^T W_{n_i} \phi_\sigma(t) \\
&\leq \sum_{i=1}^N (-\alpha\lambda_{n_i} \| e_i \|^2 + \frac{\alpha}{2} \| e_i \|^2 + w_i^T K_i e_i(t) + \\
&\quad \frac{\alpha}{2} \phi_\sigma^T(t) W_{n_i}^T W_{n_i} \phi_\sigma(t) + \alpha e_i^T \tilde{u}_{n_i} \\
&\quad + \alpha \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{ij} a_{ij} e_i^T \Gamma(e_j - e_i)) \quad (6.17)
\end{aligned}$$

Desde que  $\phi_\sigma$  es Lipschitz con Lipschitz constante  $L_{\phi_{\sigma_i}}$  [7], entonces

$$\begin{aligned} \|\phi_\sigma(t)\| &= \\ \|\sigma(x_{n_i}(t)) - \sigma(x_i(t))\| &\leq L_{\phi_{\sigma_i}} \|(x_{n_i}(t)) - (x_i(t))\| \\ &= L_{\phi_{\sigma_i}} \|e_i(t)\|, \quad i=1,2,\dots,N \end{aligned} \quad (6.18)$$

Aplicando (6.18) a  $\phi_\sigma^T(t)W_{n_i}^T W_{n_i}\phi_\sigma(t)$  obtenemos

$$\begin{aligned} &\phi_\sigma^T(t)W_{n_i}^T W_{n_i}\phi_\sigma(t) \\ &\leq \|\phi_\sigma^T(t)W_{n_i}^T W_{n_i}\phi_\sigma(t)\| \\ &\leq (L_{\phi_{\sigma_i}})^2 \|W_{n_i}\|^2 \|e_i\|^2, \quad i=1,2,\dots,N \end{aligned} \quad (6.19)$$

Ahora (6.17) se reduce a

$$\begin{aligned} \dot{V}_N(e) &\leq \sum_{i=1}^N (-\alpha\lambda_{n_i} \|e_i\|^2 + \frac{\alpha}{2} \|e_i\|^2 + \\ &\quad \frac{\alpha}{2} (L_{\phi_{\sigma_i}})^2 \|W_{n_i}\|^2 \|e_i\|^2 + \alpha e_i^T \tilde{u}_{n_i} + \\ &\quad \alpha \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{ij} a_{ij} e_i^T \Gamma (e_j - e_i) + w_i^T K_i e_i(t) \end{aligned} \quad (6.20)$$

$$= \sum_{i=1}^N e_i^T (-\alpha\lambda_{n_i} e_i - \alpha \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{ij} a_{ij} \Gamma (e_i) +$$

$$\frac{\alpha}{2} (1 + L_{\phi_{\sigma_i}}^2 \|W_{n_i}\|^2) e_i + w_i^T K_i e_i(t) +$$

$$\alpha \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{ij} a_{ij} \Gamma e_j + \alpha \tilde{u}_{n_i})$$



Ahora definimos  $\tilde{u}_{n_i} = \tilde{u}_{n_i}^{(1)} + \tilde{u}_{n_i}^{(2)} + K_{p_i} e_i + w_i - \frac{\gamma}{2} (1 + L_{\phi_{\sigma_i}}^2 \|W_{n_i}\|^2)$ , donde  $w_i = K_{i_i} \int_0^t e_i(\tau) d\tau$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  y entonces la ecuación (6.20) se convierte en

$$\begin{aligned} \dot{V}_N(e) \leq & \sum_{i=1}^N e_i^T (-\alpha \lambda_{n_i} e_i - \alpha \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{ij} a_{ij} \Gamma e_j \\ & + \frac{\alpha}{2} (1 + L_{\phi_{\sigma_i}}^2 \|W_{n_i}\|^2) e_i + \alpha \tilde{u}_{n_i}^{(1)} + \alpha K_{p_i} + \\ & \alpha \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{ij} a_{ij} \Gamma e_j + \tilde{u}_{n_i}^{(2)} + \alpha w_i - \alpha \frac{\gamma}{2} (1 + \\ & L_{\phi_{\sigma_i}}^2 \|W_{n_i}\|^2) + w_i^T K_{i_i} e_i(t) \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \dot{V}_N(e) \leq & \sum_{i=1}^N [-\alpha (\lambda_{n_i} - K_{p_i}) e_i^T e_i - \\ & \frac{\alpha}{2} (\gamma - 1) (1 + L_{\phi_{\sigma_i}}^2 \|W_{n_i}\|^2) e_i^T e_i + (\alpha + K_{i_i}) e_i^T w_i - \\ & \alpha \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{ij} a_{ij} \Gamma e_i^T e_i + \alpha \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{ij} a_{ij} \Gamma e_i^T e_j + \alpha e_i^T \tilde{u}_{n_i}^{(1)} \\ & + \alpha e_i^T \tilde{u}_{n_i}^{(2)} \end{aligned} \quad (6.21)$$

De aquí, seleccionamos  $(\alpha + K_{i_i}) = 0$ , tal que  $K_{v_i} = -K_{i_i} - 1$ ;

$K_{v_i} \geq 0$ , entonces  $K_{i_i} \geq -1$ . Con esta selección de parámetros (6.21) se reduce a:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_N(e) \leq & \sum_{i=1}^N [-\alpha(\lambda_{n_i} - K_{p_i}) e_i^T e_i - \\
& \frac{\alpha}{2} (\gamma - 1) (1 + L_{\phi_{\sigma_i}}^2 \|W_{n_i}\|^2) e_i^T e_i - \alpha \sum_{j=1, j \neq i}^N c_{ij} a_{ij} \Gamma e_i^T e_i \\
& + \alpha \sum_{j=1, j \neq i}^N c_{ij} a_{ij} \Gamma e_i^T e_j + \alpha e_i^T \tilde{u}_{n_i}^{(1)} + \alpha e_i^T \tilde{u}_{n_i}^{(2)}
\end{aligned}$$

En esta parte, si  $\lambda_{n_i} - K_{p_i} > 0$ ,  $\alpha > 0$  y  $\gamma - 1 > 0$ , entonces  $\dot{V}_N(e) < 0, \forall e_i, w_i, W_{n_i} \neq 0$ , el error de seguimiento es asintóticamente estable y converge a cero para cada  $e_i \neq 0$ , es decir la red neuronal puede seguir a la planta asintóticamente.

Nuevamente, proponemos la siguiente ley de control:

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_{n_i} = & - \left( \frac{1}{2} + L_{\phi_{\sigma_i}}^2 \|W_{n_i}\|^2 \right) e_i \\
& - \sum_{j=1, j \neq i}^N c_{ij} a_{ij} \Gamma e_j, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (6.22)
\end{aligned}$$

Entonces,  $\dot{V}_N(e) < 0$  para toda  $e \neq 0$ . Esto significa que la ley de control propuesta (6.22) puede globalmente y asintóticamente estabilizar el íésimo error del sistema (6.10), asegurando así el seguimiento de (6.1) por (6.2). Finalmente, la acción de control que conduce a la red neuronal recurrente está dada por

$$\begin{aligned}
u_{n_i} = & f_i(x_i) + \lambda_{n_i} x_i - W_{n_i} \sigma(x_i(t - \tau)) \\
& + \left( \frac{1}{2} + L_{\phi_{\sigma_i}}^2 \|W_{n_i}\|^2 \right) e_i K_{p_i} e_i + K_{v_i} \dot{e}_i + K_{i_i} \int_0^t e_i(\tau) d\tau \\
& - \sum_{j=1, j \neq i}^N c_{ij} a_{ij} \Gamma e_j \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (6.23)
\end{aligned}$$

## 6.5 Simulaciones

Para ilustrar la aplicación de los resultados obtenidos, nuevamente consideraremos una red dinámica con solo un nodo de Lorentz y tres nodos idénticos de Chen. El sistema único de Lorentz es descrito por

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10x_2 - 10x_1 \\ -x_2 - x_1x_2 + 28x_1 \\ x_1x_2 - \left(\frac{8}{3}\right)x_3 \end{pmatrix} \quad (6.24)$$

$$x_i(0) = (10, 0, 10)^T, \quad i = 1$$

Y el oscilador de Chen es descrito por

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{i1} \\ \dot{x}_{i2} \\ \dot{x}_{i3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1(x_{i2} - x_{i1}) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^4 c_{ij} a_{ij} (x_{j1} - x_{i1}) \\ (p_3 - p_2)x_{i1} - x_{i1}x_{i3} + p_3x_{i2} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^4 c_{ij} a_{ij} (x_{j2} - x_{i2}) \\ x_{i1}x_{i2} - p_2x_{i3} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^4 c_{ij} a_{ij} (x_{j3} - x_{i3}) \end{pmatrix}$$

$$x_i(0) = (-10, 0, 37)^T, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

(6.25)

Si los parámetros del sistema son seleccionados como  $p_1 = 35, p_2 = 3$  y  $p_3 = 28$ , entonces los sistemas de Lorentz y de Chen se muestran en la figura 1 y 2, respectivamente. Con este conjunto de parámetros del sistema, un punto de equilibrio inestable del oscilador (6.25) es  $x = (7.9373, 7.9373, 21)^T$ .

Supongamos que cada par de osciladores de Lorentz y Chen están vinculados juntos a través de sus variables de subestado idénticas. Esto es,  $\Gamma = \text{diag}(1,1,1)$  y las fuerzas de acoplamiento son  $c_{12} = c_{21} = \pi, c_{13} = c_{31} = \pi, c_{23} = c_{32} = \pi, c_{14} = c_{41} = 2\pi, c_{24} = c_{42} = 2\pi$  y  $c_{34} = c_{43} = 2\pi$ .

En la figura 5.3 visualiza esta red dinámica completa.

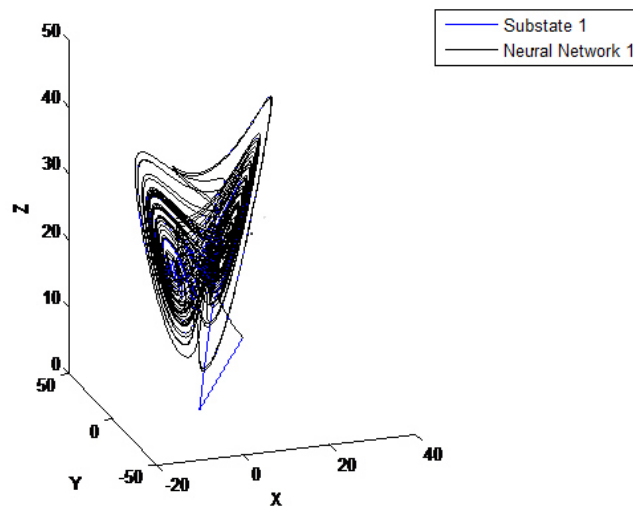


Figura 6.1 Sub-estado  $x_1$  y red neuronal del atractor de Lorentz con condición inicial

$$X_1(0) = (10, 0, 10)^T$$

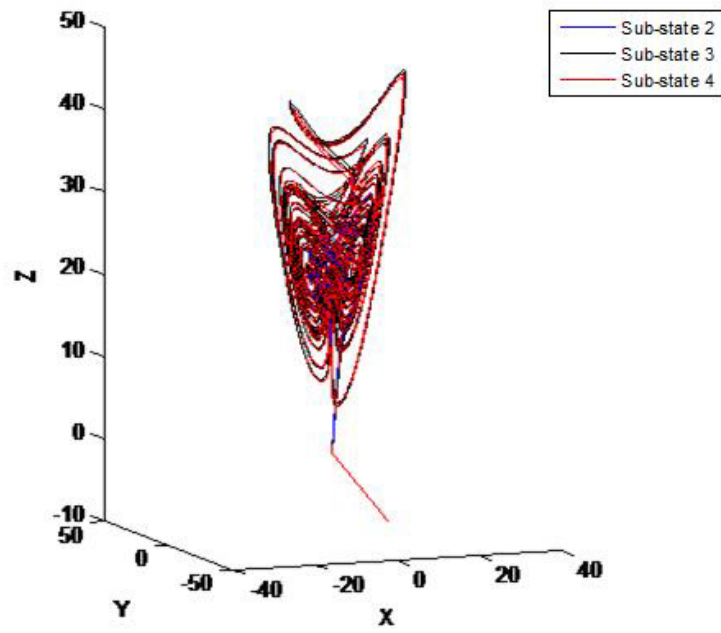


Figura 6.2 Sub-estados del atractor de Chen con condiciones iniciales

$$X_{2,3,4}(0) = (-10, 0, 37)^T$$

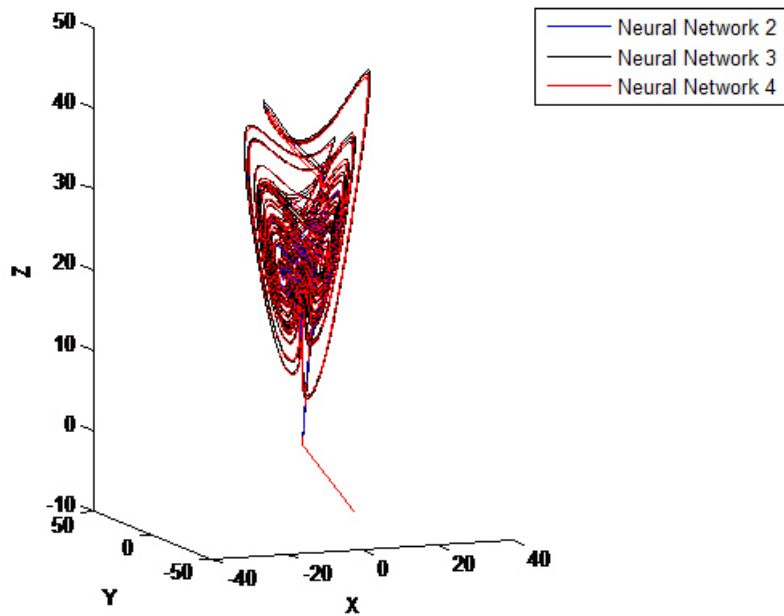


Figura 6.3 Red neuronal del atractor de Chen con condiciones iniciales

$$X_{2,3,4}(0) = (-10, 0, 37)^T$$

Seleccionando nuevamente la red neuronal como

$$A_{n_i} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad W_{n_i} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma(x_{n_i}(t - \tau)) = \begin{pmatrix} \tanh(x_{n_{i1}}(t - \tau)) \\ \tanh(x_{n_{i2}}(t - \tau)) \\ \tanh(x_{n_{i3}}(t - \tau)) \end{pmatrix} \quad (5.26)$$

$$\tau = 10 \text{ segundos}$$

$$L_{\phi_{\sigma_i}} \triangleq n = 3$$

$$x_{n_i}(0) = (20, 20, -10)^T, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

**Teorema 1** Para un sistema no lineal desconocido modelado por (6.1), la ley de aprendizaje en línea  $x_{n_i} \text{tr}\{W^T W\} = -e^T W \sigma(x)$  y la ley de control (6.23) asegura el seguimiento de modelos de referencia no lineales (6.4).

**Observación 2** De la ecuación (6.21) tenemos que  $\dot{V}_N(e) \leq$

$$\sum_{i=1}^N [ -\alpha(\lambda_{n_i} - K_{p_i}) e_i^T e_i - \frac{\alpha}{2} (\gamma - 1)$$

$$(1 + L_{\phi_{\sigma_i}}^2 \|W_{n_i}\|^2) e_i^T e_i - \alpha \sum_{j=1, j \neq i}^N c_{ij} a_{ij} \Gamma e_i^T e_i$$

$$+ \alpha \sum_{j=1, j \neq i}^N c_{ij} a_{ij} \Gamma e_i^T e_j + \alpha e_i^T \tilde{u}_{n_i}^{(1)} + \alpha e_i^T \tilde{u}_{n_i}^{(2)}$$

$< 0, \forall e_i, w_i \neq 0, \forall W_{n_i}$ , y por esto  $V$  es decreciente y delimitada desde abajo por  $V(0)$ . Desde que  $V_N(e) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{2} (e_i^T, w_i^T)(e_i, w_i)^T + \int_{t-T}^t (\phi_\sigma^T(s) W_{n_i}^T W_{n_i} \phi_\sigma(s)) ds \right)$  entonces concluimos que  $e_i, W_{n_i} \in L_1$  esto significa que los pesos permanecen delimitados.

El experimento se ejecuta de la misma manera como fue planteado en el capítulo 5: Ambos sistemas, la red neuronal con retardo (6.2) y las redes dinámicas (6.24) y (6.25) evolucionan independientemente hasta  $t= 10$  segundos; En ese instante, la ley de control propuesta (6.23) es introducida. Los resultados de la simulación se presentan en las Fig. 6.5 – Fig. 6.7 para sub-estados del nodo 1. Como puede observarse, el seguimiento es exitosamente alcanzado y el error es asintóticamente estable. También se muestra en las Fig. 6.8 – Fig. 6.10 para los sub-estados del nodo 4.

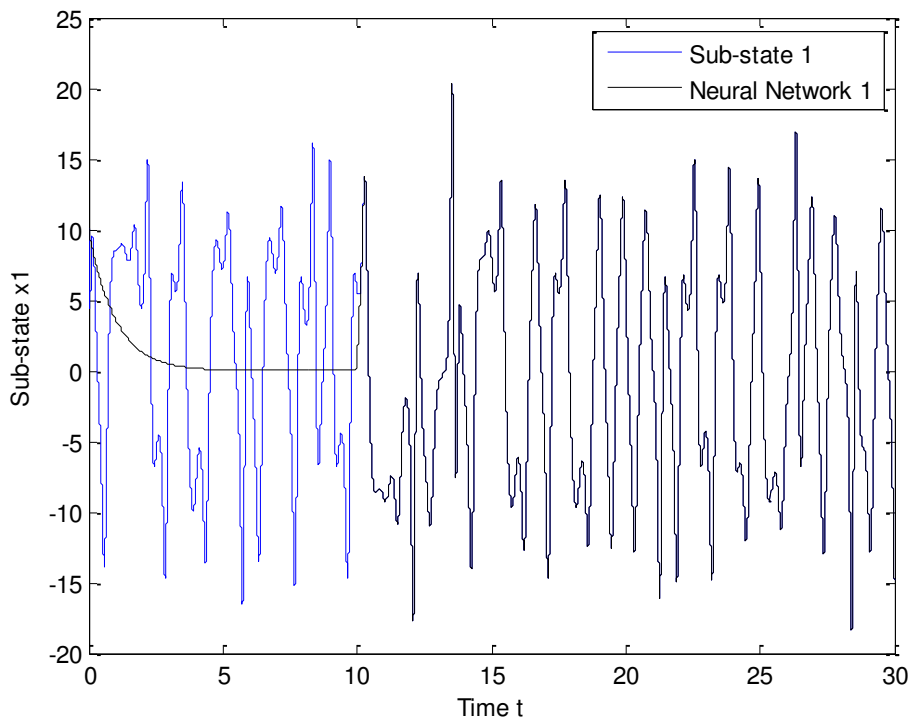


Fig. 6.4 Evolución en el tiempo para el sub-estado x1 (PID) con estado inicial

$$X_{n1}(0) = (10; 0; 10)^T$$

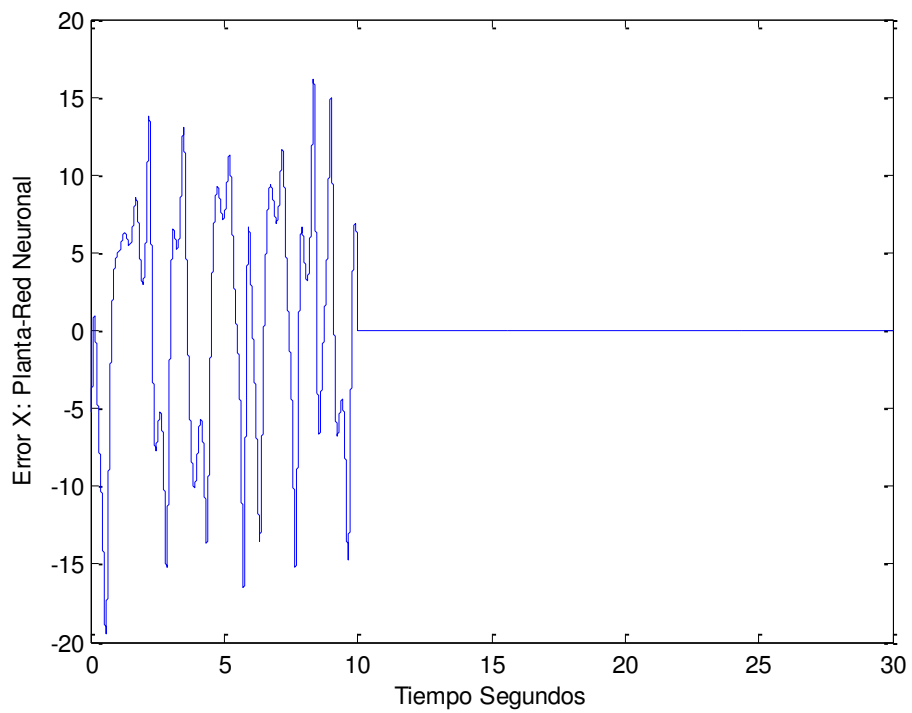


Fig. 6. 5 Error entre la planta y la red neuronal para el sub-estado x1 (PID)



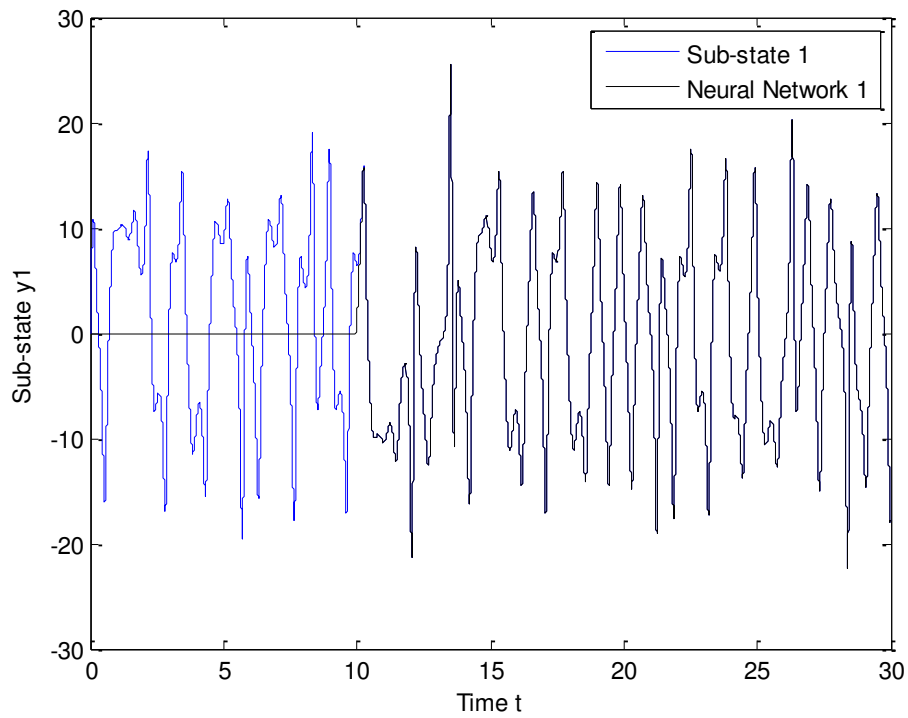


Figura 6.6 Evolución en el tiempo para el sub-estado y1 (PID)

con estado inicial  $X_{n1}(0) = (10; 0; 10)^T$

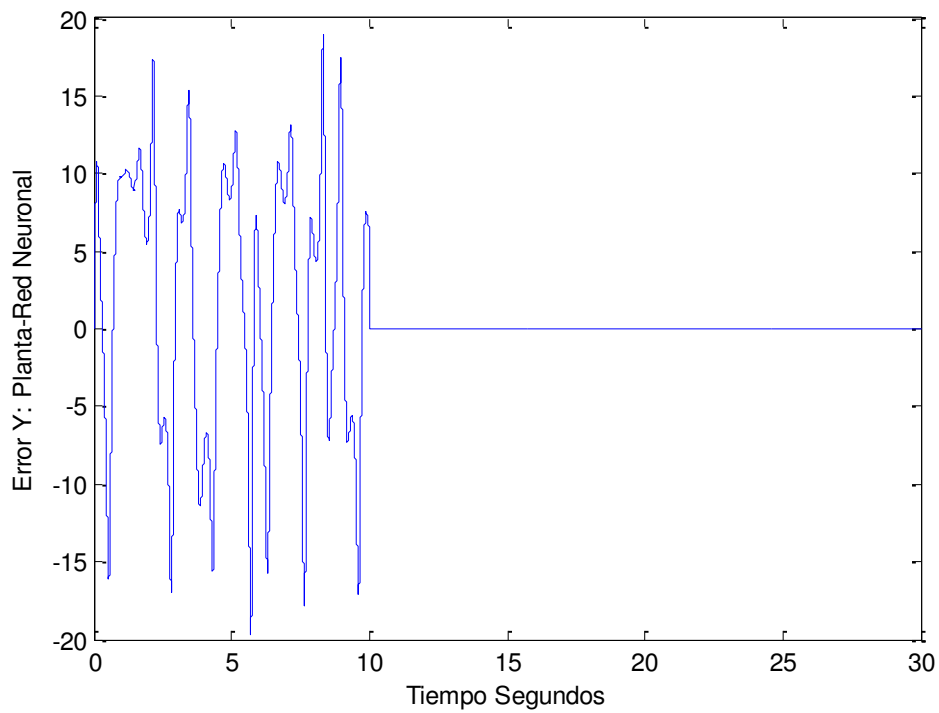


Fig. 6. 7 Error entre la planta y la red neuronal para el sub-estado y1 (PID)

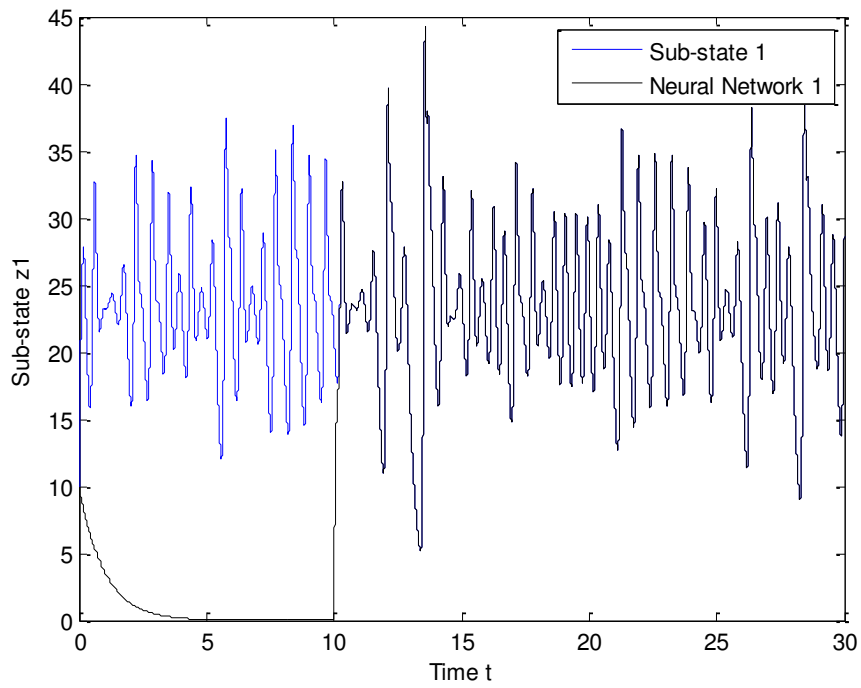


Figura 6.8 Evolución en el tiempo para el sub-estado z1 (PID)

con estado inicial  $X_{n1}(0) = (10; 0; 10)^T$

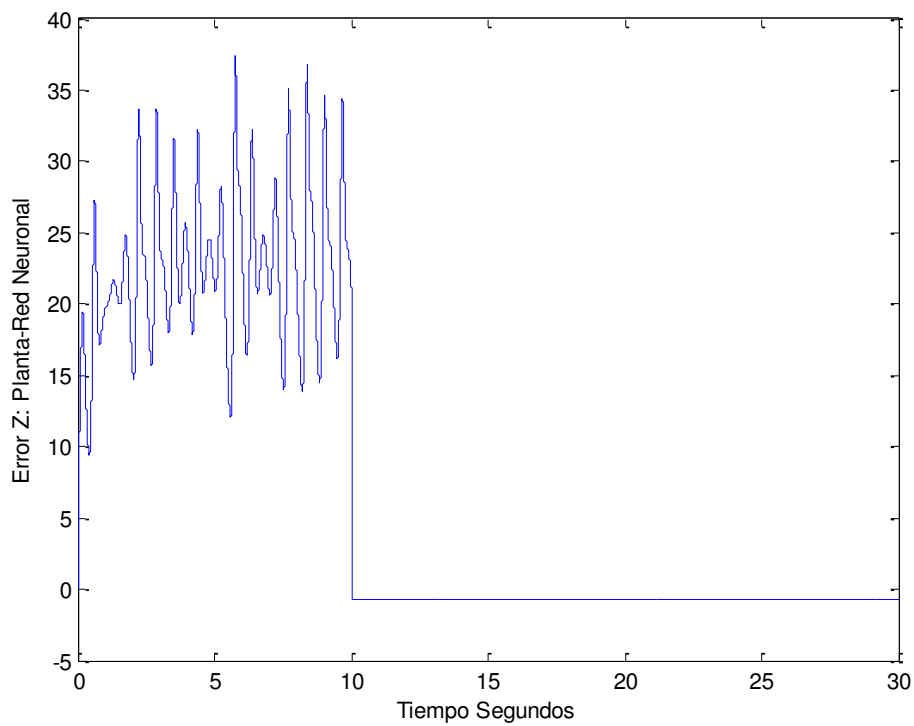


Fig. 6. 9 Error entre la planta y la red neuronal para

el sub-estado z1 (PID)

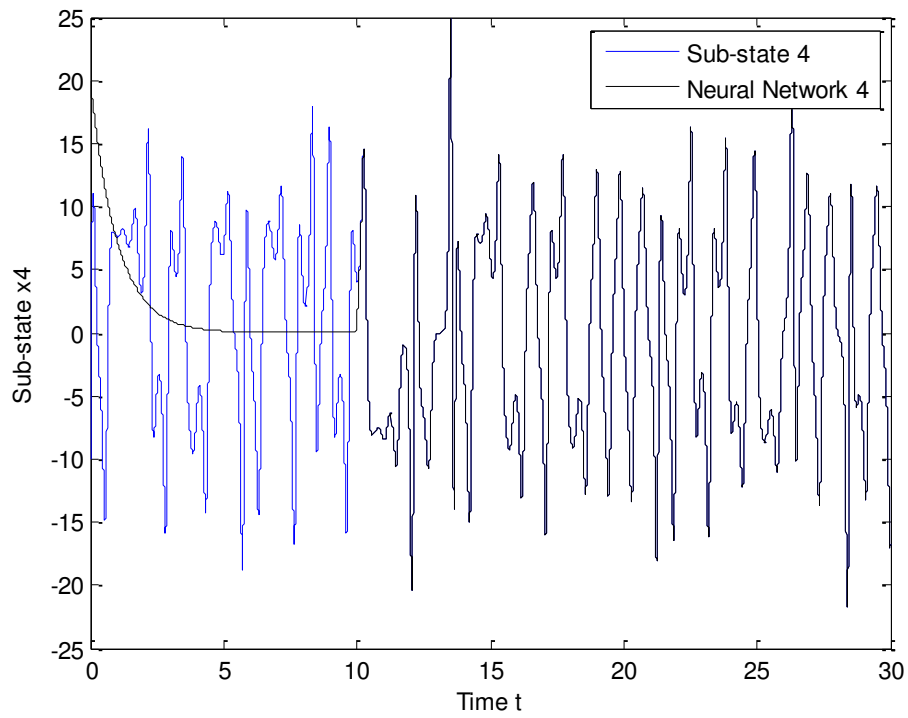


Figura 6.10 Evolución en el tiempo para el sub-estado  $x_4$  (PID)

con estado inicial  $X_{n4}(0) = (20, 20, -10)^T$

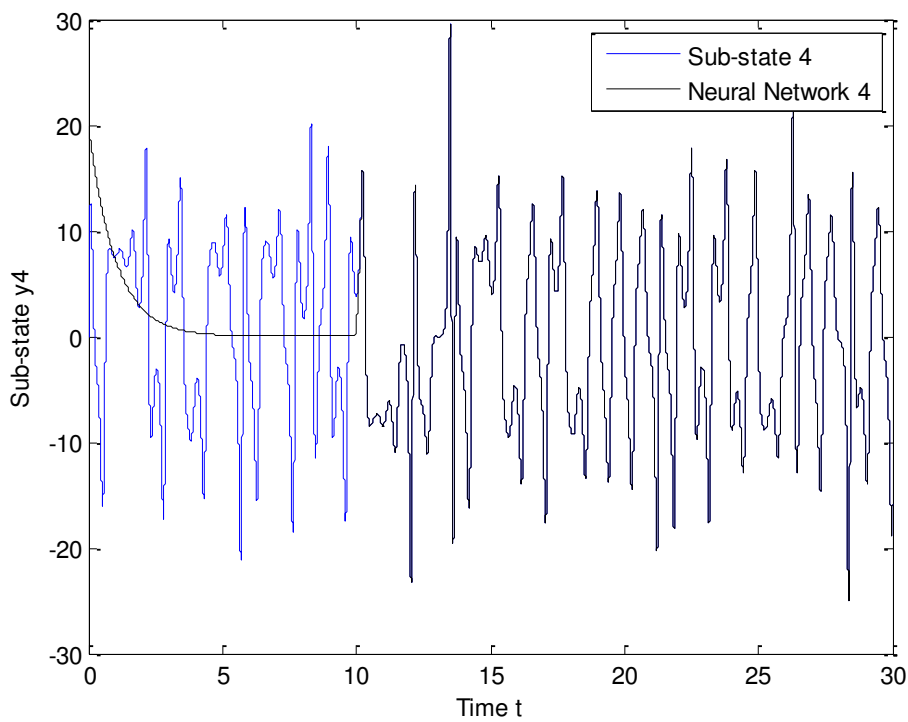


Figura 6.11 Evolución en el tiempo para el sub-estado  $y_4$  (PID)

con estado inicial  $X_{n4}(0) = (20, 20, -10)^T$

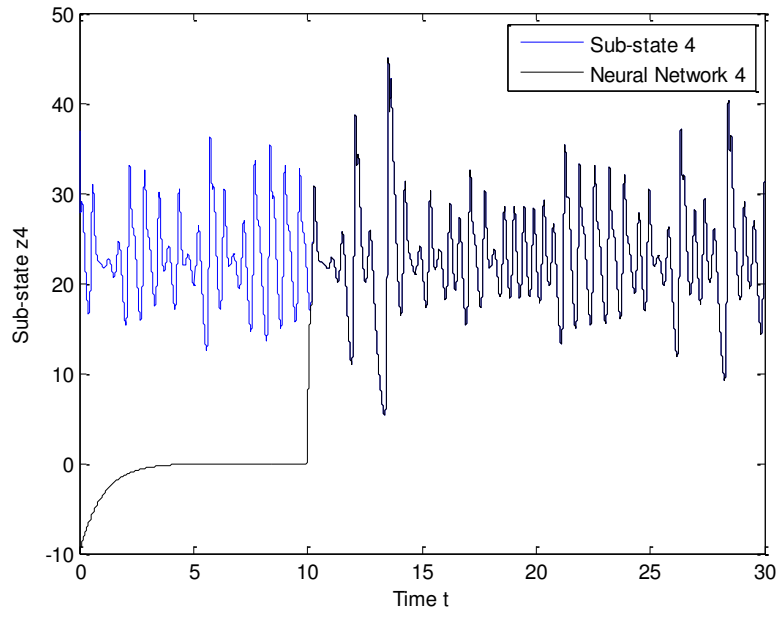


Figura 6.12 Evolución en el tiempo para el sub-estado z4(PID)

con estado inicial  $X_{n4}(0) = (20, 20, -10)^T$

## CONCLUSIONES DEL CAPITULO

Se ha presentado el diseño de una ley de control tipo PID (controlador) para seguimiento de trayectorias de sistemas dinámicos interconectados modelados por redes neuronales dinámicas complejas. Este marco de trabajo, está basado en redes neuronales dinámicas con retardo y la metodología está basada en la teoría de estabilidad-V y Lyapunov-Krasovskii. El control propuesto es aplicado a una red dinámica interconectada en donde un nodo es el sistema dinámico de Lorentz y el resto de los nodos interconectados son representados por el atractor de Chen. La ley de control propuesta garantiza la estabilidad del error de seguimiento entre planta y señales de referencia. Los resultados analíticos obtenidos que predicen la estabilidad del error de seguimiento entre planta y señales de referencia son satisfactorios, los cuales pueden verse vía simulación, estos muestran claramente el seguimiento deseado. Como ya se dijo en el capítulo anterior, en trabajo futuro, consideraremos el caso cuando el sistema dinámico es estocástico y este es modelado por una red neuronal estocástica.

## CAPITULO 7

### METODOLOGIA

El presente trabajo está basado tanto en la metodología de las redes neuronales recurrentes adaptables como en la metodología de las funciones de Lyapunov para sistemas no-lineales. La estructura del controlador propuesta está compuesta de un identificador neuronal y de ley de control usando el enfoque de Lyapunov. El nuevo esquema de control propuesto es aplicado vía simulación para el control de una planta. Los resultados experimentales para el seguimiento de trayectorias muestran la utilidad del enfoque propuesto. Para verificar los resultados analíticos, un ejemplo de una red dinámica simulada y un teorema es propuesto para asegurar el seguimiento de trayectorias en sistemas no-lineales.

## CAPITULO 8

### CONCLUSIONES Y TRABAJO A FUTURO

Una de las principales contribuciones de esta investigación es el análisis de estabilidad asintótica del error de seguimiento entre sistemas no lineales cuyo modelo matemático se desconoce y señales de referencia generadas por ecuaciones diferenciales no lineales. Para garantizar el seguimiento de trayectorias se propone una ley de control PID y se obtienen leyes de adaptación de pesos en la red neuronal, obtenidas mediante el análisis de estabilidad de Lyapunov, el sistema no lineal es identificado por una red neuronal recurrente de pesos variables.

El objetivo es que el sistema dinámico desconocido (planta) siga una señal de referencia dada, este problema es muy importante en control automático, el cual se reduce a determinar una acción de control que garantice la estabilización de la dinámica del error de seguimiento entre la planta y la señal de referencia.

La estabilidad para el error de seguimiento es analizada con funciones de control de Lyapunov y la ley de control PID. Los resultados analíticos obtenidos son alentadores y son ilustrados vía simulación. Como puede verse, se obtiene un seguimiento de trayectorias satisfactorio y la convergencia del error de seguimiento es muy rápida.

Otro punto importante de este trabajo es que en otros enfoques de control, dichos controles son indirectos, es decir primero la red neural identifica la planta desconocida y cuando el error de identificación es pequeño, se aplica el control. En nuestro enfoque el control es directo, es decir, las leyes de aprendizaje para las redes neuronales dependen explícitamente del error de seguimiento, en lugar del error de identificación, esto da como resultado una respuesta más rápida del sistema.

La investigación en esta línea continua para que en un futuro se implementen los algoritmos de control en tiempo real y con retardo en el tiempo, en aplicaciones muy diversas como: medicas, militares, industriales, comerciales, etc.

La presente investigación responde a la Dimensión 2 del Modelo de Responsabilidad Social de la UANL, por constituirse en una "Investigación socialmente pertinente" en un Proyecto de investigación que contribuye a la solución de problemas de seguimiento de trayectorias de sistemas no lineales complejos. La investigación y aplicación del conocimiento matemático se desarrolló desde el Cuerpo Académico en Consolidación "Sistemas Dinámicos"

cuya LGAC es Control de Sistemas Dinámicos, en la cual se investigan, desarrollan y aplican Modelos Matemáticos de Control de Sistemas Dinámicos Complejos.



## Bibliografía

- [1] S. Haykin, *Neural Networks-A comprehensive Foundation*, Macmillan New York USA, 1994.
- [2] K. S. Narendra y S. M. Li, «"Control of nonlinear time-varying systems using neural networks",» New Haven, Conn USA, 1998, pp. 9-18.
- [3] K. S. Narendra y K. Parthasarathy, «"Identification and control of dynamical systems using neural networks",» de *IEEE Trans. on Neural Networks Vol 1*, 1990, pp. 4-27.
- [4] A. S. Poznyak, «"Learning for dynamic neural networks" in 10 th Yale Wkshp. Adaptive Learning Syst.,» Yale University, New Haven, Conn USA, 1998, pp. 38-47.
- [5] M. Gupta y D. Rao, «(Eds), *Neuro-control Systems,» Theory and Applications IEEE Press, Piscataway, N. J. USA, 1994.*
- [6] K. Hunt, G. Irwin y K. Warwick (Eds), «*Neural Networks Engineering in Dynamic Control Systems,*» Springer-Verlag, New York, USA, 1995.
- [7] A. Poznyak, E. Sanchez, J. Perez y W. Yu, «"Nonlinear adaptive trajectory tracking using dynamic neural network",» *IEEE Trans. on Neural Networks, vol. 10, pp 1402-1411 November, 1999.*
- [8] G. Rovithakis y M. Christodoulou, «*Adaptive Control with Recurrent High\_Order Neural Networks,*» Springer\_Verlag, New York, USA, 2000.
- [9] J. Suykens, L. Vandewalle y R. de Moor, «*Artificial Neural Networks for Modelling and Control of Nonlinear Systems,*» *Kluwer Academic Publishers, Boston, USA, 1996.*
- [10] L. Perko, «*Differential Equations and Dynamical System,*» *Second Edition, Springer Verlag, New York, USA, 1996.*
- [11] H. Khalil, *Nonlinear system, Second Edition*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, USA, 1996.
- [12] S. Sastry, *Nonlinear systems analysis, Stability and control*, Springer Verlag, New York, USA, 1999.
- [13] M. Krstic y H. Deng, *Stabilization of Nonlinear Uncertain System*, Springer-Verlag, New York, USA, 1998.
- [14] A. Poznyak, E. Sanchez y W. Yu, «*Differential Neural Network for Robust Nonlinear Control*, World Scientific, Singapore,» 2001.

- [15] M. Gupta, L.J. y N. Homma, Static and Dynamic Neural Networks, John Wiley And Sons, USA, New Jersey, 2003.
- [16] E. Sanchez, A. y A. Loukianov, Discrete-Time High Order Neural Control, primera edición, Springer, 2008.
- [17] Rojas, R. ,Neural Networks, primera edición, Springer, Berlin, 1996.
- [18] Galushkin, A.,Neural Networks Theory, primera edición, Springer, Berlin, 2007.
- [19] Xie, X.Dynamic and Learning in Recurrent Neural Networks, primera edición, Massachusetts Institute of Technology, USA, 2002.
- [20] Graupe, D.,Principles of Artificial Neural Networks, segunda edición, World Scientific, USA, Chicago, 2007.
- [21] Sanchez, E y A. Alanís, Redes Neuronales, primera edición, CINVESTAD, Gdl, 2006.
- [22] Haykin, S.,Neural Networks, segunda edición, Pearson, Canada, Ontario, 1999.
- [23] «McAdams, H y P. Arkin, P. Stochastic mechanism in gene expression, Proc. Nat. Acad. Sci, 94(3),» 1997, pp. 814-819.
- [24] Gillespie, T .,Approximate accelerated Stochastic simulation of Chemically reacting System, J. Chem. Phys, 115(4), Pags. 1716-1733, 2001.
- [25] H. Khalil, «Non linear systems, segunda edición, Prentice Hall, USA, New Jersey,1996».
- [26] «Bor-Sen Chen, Cf. y Wang, Robust H infinite stabilization design in gene networks under stochastic molecular noises: fuzzy interpolation approach, IEEE Transactions on systems, man and cybernetics Part B,» 2008, pp. 25-42.
- [27] «Voit, E., Computational Analysis of biochemical systems: a practical guide for biochemists and molecular biologists, Cambridge, U. K.: Cambridge Univ. Press, 2000».
- [28] E. D. Sontag, Smooth stabilization implies coprime factorization, IEEE Transaction on Automatic Control , Vol. 34, pp. 435-443, 1989.

## ANEXOS: Participación y Presentación en Congreso de Italia



CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE  
ISTITUTO DEI SISTEMI COMPLESSI  
Sede di Sesto Fiorentino – Area di Ricerca del CNR  
Via Madonna del Piano, 10 - 50019 Sesto Fiorentino (Firenze)  
Tel. +39 055 5226679 Fax +39 055 5226683  
web: www.iis.cnr.it E-Mail: admin@iis.cnr.it

---

**Certificate of Attendance for the workshop**  
**"Dynamics of Neural Circuits"**

This is to certify that *Santiago Arroyo Garza* has attended the workshop "Dynamics of Neural Circuits" organized by the Marie Curie Initial Training Network NETT (Neural Engineering Transformative Technologies). The workshop was held at the Institute for Complex Systems, CNR in Sesto Fiorentino (Florence), Italy from March 17 to March 20, 2014.

Sesto Fiorentino, March 20, 2014

Dr. Alessandro Torcini





**UANL**  
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

# "PID Control Law For Trajectory Tracking of Complex Dynamical Systems Via Delayed Recurrent Neural Networks"

NETT Florence-Workshop 2014  
"Dynamics of Neural Circuits" Institute for Complex Systems (ISC), CNR, Sesto Fiorentino, Italy

Joel Perez P.<sup>1</sup>, Santiago Arroyo<sup>2</sup>, Jose P. Perez<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Universidad Autónoma de Nuevo León (UANL), México. e-mail: joel.perezpd@uanl.edu.mx  
<sup>2</sup>Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Universidad Autónoma de Nuevo León (UANL), México. e-mail: santiago.arroyo@cofis.com  
<sup>3</sup>Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Universidad Autónoma de Nuevo León (UANL), México. e-mail: josepazp@gmail.com

March 2014



**FCFM**  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

## ABSTRACT

In this paper the problem of trajectory tracking is studied. Based on the Lyapunov-Krasovskii theory, a PID control law that achieves the global asymptotic stability of the tracking error between a delayed recurrent neural network and a complex dynamical system is obtained. To illustrate the analytic results we present a tracking simulation of a

dynamical network with each node being just one Lorenz's dynamical system and three identical Chen's dynamical systems.  
Keywords: PID Control Law, Trajectory Tracking, Delayed Recurrent Neural Network, Complex Dynamical Network, Lyapunov-Krasovskii Analysis

## MATHEMATICAL MODELS

### GENERAL COMPLEX DYNAMICAL NETWORKS

Consider a network consisting of  $N$  linearly and diffusively coupled nodes, with each node being an  $n$ -dimensional dynamical system, described by

$$\dot{x}_i = f_i(x_i) + \sum_{j=1}^N c_{ij} \phi_{ij}(x_j - x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N$$

where  $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})^T \in \mathbb{R}^n$  are the state vectors of the node  $i$ ,  $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  represents the self-dynamics of the node  $i$ , the constants  $c_{ij} > 0$  are the coupling strengths between node  $i$  and node  $j$ , with  $i, j = 1, 2, \dots, N$ ,  $\Gamma = (\Gamma_{ij}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$  is a constant internal matrix that describes the way of linking the components in each pair of connected nodes  $(x_i - x_j)$ , this means that for some pairs  $(i, j)$  with  $1 \leq i, j \leq n$  and  $\Gamma_{ij} \neq 0$  the two coupled nodes are linked through their  $i$ th and  $j$ th sub-state variables respectively, while the coupling matrix  $A = (A_{ij}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$  denotes the coupling configuration of the entire network, this means that if there is a connection between node  $i$  and node  $j$  ( $i \neq j$ ), then  $A_{ij} = A_{ji} = 1$ , otherwise  $A_{ij} = A_{ji} = 0$ .

### TRAJECTORY TRACKING

The objective is to develop a control law such that the  $i$ th neural network tracks the trajectory of the  $i$ th dynamical system. We define the tracking error as  $e_i = x_{ni} - x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  whose derivative with respect to time is

$$\dot{e}_i = \dot{x}_{ni} - \dot{x}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Substituting, we obtain

$$\dot{e}_i = A_{ni} x_{ni} + W_{ni} \sigma(x_{ni}(t-\tau)) + f_{ni}(x_{ni}) - \dot{x}_i + \sum_{j=1}^N c_{ij} \phi_{ij}(x_j - x_i) - \sum_{j=1}^N c_{ij} \phi_{ij}(x_j - x_i)$$

Adding and subtracting  $W_{ni} \sigma(x_{ni}(t-\tau))$ ,  $A_{ni}(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , where  $A_{ni}$  will be determined below, and considering that  $x_{ni} = e_i + x_i$ ,

## TRACKING ERROR STABILIZATION AND CONTROL DESIGN

In order to establish the convergence of  $e_i = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , which ensures the desired tracking, first, we propose the following Lyapunov function

$$V_0(e) = \sum_{i=1}^N V_0(e_i) = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{1}{2} (e_i^T W_i^{-1} e_i) + \int_{t-\tau}^t \int_{t-\tau}^s (\phi_i^T(s) W_i^* W_i^* \phi_i(s)) ds \right\}$$

The time derivative, along the trajectories, and adding the Derivative "D"

$$\dot{V}_0(e) = \sum_{i=1}^N \left\{ e_i^T \dot{e}_i + \dot{e}_i^T W_i^{-1} e_i + \phi_i^T(t) W_i^* W_i^* \phi_i(t) - \phi_i^T(t-\tau) W_i^* W_i^* \phi_i(t-\tau) \right\} = \sum_{i=1}^N \left\{ e_i^T (A_{ni} + K_{ni}) e_i + \dot{e}_i^T W_i^{-1} e_i + \phi_i^T(t) W_i^* W_i^* \phi_i(t) - \phi_i^T(t-\tau) W_i^* W_i^* \phi_i(t-\tau) \right\}$$

If  $a = (1 + K_{ni})$ ,  $w_i = K_{ni} \int_{t-\tau}^t \phi_i^T(s) ds$ , then  $\dot{w}_i = K_{ni} \phi_i(t)$  and we select  $(a + K_{ni}) = 0$ , so  $K_{ni} = -a = -1$ ,  $K_{ni} \geq 0$ , then  $K_{ni} \geq -1$ . With this selection of parameters is reduced to:

$$\dot{V}_0(e) \leq \sum_{i=1}^N -a(\lambda_{ni} - K_{ni}) e_i^T e_i - \frac{1}{2} (\gamma - 1) (1 + L_{ni}^2) \|W_i\|^2 e_i - a \sum_{j=1}^N c_{ij} \phi_{ij}^T e_i + \sum_{j=1}^N c_{ij} \phi_{ij}^T e_j - a \tau^2 \phi_i^{(2)} + a \tau^2 \phi_i^{(2)}$$

In this part, if  $\lambda_{ni} - K_{ni} > 0$ ,  $a > 0$  and  $\gamma - 1 > 0$ , then  $\dot{V}_0(e) < 0$ ,  $\forall e_i$ ,  $w_i, W_i \neq 0$ , the error tracking is asymptotically stable and it converges to zero for every  $e_i \neq 0$ , i.e. the Neural Network will follow the plant asymptotically.

Now, we propose to use the following control law:

$$\dot{x}_{ni} = (1 + L_{ni}^2) \|W_i\|^2 e_i - \sum_{j=1}^N c_{ij} \phi_{ij} \Gamma_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

dynamical network with each node being just one Lorenz's dynamical system and three identical Chen's dynamical systems.  
Keywords: PID Control Law, Trajectory Tracking, Delayed Recurrent Neural Network, Complex Dynamical Network, Lyapunov-Krasovskii Analysis

## MATHEMATICAL MODELS

### DELAYED RECURRENT NEURAL NETWORKS

Consider a delayed recurrent neural network in the following form:

$$\dot{x}_n = A_n x_n + W_n \sigma(x_n(t-\tau)) + u_n + \sum_{j=1}^N c_{nj} \phi_{nj} \Gamma_{nj} (x_j - x_n), \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

where  $\tau$  is the fixed known time delay [5], [6],  $x_n = (x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nn})^T \in \mathbb{R}^n$  is the state vector of the neural network,  $u_n \in \mathbb{R}^n$  is the input of the neural network,  $A_n = -\lambda_n I_n$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , is the state feedback matrix, with  $\lambda_n$  being a positive constant,  $W_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$  is the connection weight matrix with  $i = 1, 2, \dots, N$ , and  $\sigma(\cdot) \in \mathbb{R}^n$  is a Lipschitz sigmoid vector function [7], [8], such that  $\sigma(x_n) = 0$  only at  $x_n = 0$ , with Lipschitz constant  $L_{ni}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  and neuron activation functions  $\sigma_i(\cdot) = \tanh(\cdot)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

### TRAJECTORY TRACKING

$i = 1, 2, \dots, N$ , then is reduced to

$$\dot{e}_i = A_{ni} e_i + W_{ni} \phi_i(t-\tau) + \bar{u}_i + \sum_{j=1}^N c_{ij} \phi_{ij} \Gamma_{ij} (e_j - e_i) = A_{ni} e_i + W_{ni} \phi_i(t-\tau) + \bar{u}_i + \sum_{j=1}^N c_{ij} \phi_{ij} \Gamma_{ij} (e_j - e_i), \quad i = 1, 2, \dots, N$$

It is clear that  $e_i = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  is an equilibrium point of (10), when  $\bar{u}_i = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . In this way, the tracking problem can be restated as a global asymptotic stabilization problem for the system.

Then  $V_0(e) < 0$  for  $e \neq 0$ . This means that the proposed control law can globally and asymptotically stabilize the  $i$ th error system, therefore ensuring the tracking. Finally, the control action driving the recurrent neural networks is given by

$$u_n = f_n(x_n) + \lambda_n x_n - W_n \sigma(x_n(t-\tau)) + \left\{ \frac{1}{2} (1 + L_{ni}^2) \|W_i\|^2 e_i + K_{ni} e_i + K_{ni} \int_{t-\tau}^t \phi_i^T(s) ds \right\}$$

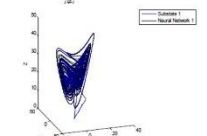


Fig. 1 Sub-State and Neural Network of Lorenz's attractor with initial condition  $X_1(0) = (10; 0; 10)^T$

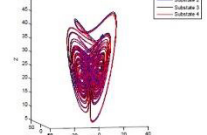


Fig. 2 Sub-States of Chen's attractor with initial condition  $X_{2,3}(0) = (-10; 0; 37)^T$

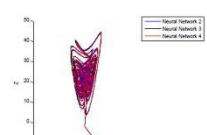


Fig. 2.1 Neural Network of Chen's attractor with initial condition  $X_{2,3,4}(0) = (-10; 0; 37)^T$

## SIMULATIONS

In order to illustrate the applicability of the discussed results, we consider a dynamical network with just one Lorenz's node and three identical Chen's nodes. The single Lorenz system is described by

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10x_1 - 10x_1 x_2 \\ -x_2 - x_2 x_2 + 20x_3 \\ x_1 x_2 - (8/3)x_3 \end{pmatrix}$$

and the Chen's oscillator is described by

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1(x_2 - x_1) + \sum_{j=1}^n c_{1j} \phi_{1j}(x_j - x_1) \\ (p_2 - p_1)x_1 - x_1 x_2 + p_2 x_2 + \sum_{j=1}^n c_{2j} \phi_{2j}(x_j - x_2) \\ x_1 x_2 - p_2 x_3 + \sum_{j=1}^n c_{3j} \phi_{3j}(x_j - x_3) \end{pmatrix}$$

$$x_i(0) = (-10, 0, 37)^T, \quad i = 2, 3, 4$$

If the system parameters are selected as  $p_1 = 35$ ,  $p_2 = 3$ ,  $p_3 = 20$ , then the Lorenz's system and Chen's system are shown in Fig. 1 and Fig. 2 respectively.

Suppose that each pair of two connected Lorenz and Chen's oscillators are linked together through their identical sub-state variables, i.e.  $\Gamma = \text{diag}(1, 1, 1)$ , and the coupling strengths are  $c_{12} = c_{21} = \pi$ ,  $c_{13} = c_{31} = \pi$ ,  $c_{23} = c_{32} = \pi$ ,  $c_{24} = c_{42} = 2\pi$ ,  $c_{34} = c_{43} = 2\pi$ ,  $c_{41} = c_{14} = 2\pi$ . Fig. 3 illustrates this entire dynamical network.

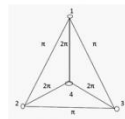


Fig. 3 Structure of the network with each node being a Lorenz and Chen's system.

The neural network is selected as

$$A_n = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad W_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma(x_n(t-\tau)) = \begin{pmatrix} \tanh(x_{n1}(t-\tau)) \\ \tanh(x_{n2}(t-\tau)) \\ \tanh(x_{n3}(t-\tau)) \end{pmatrix}, \quad (\text{Eq. 26})$$

$$\tau = 10 \text{ seconds}, \quad L_{ni} = 3, \quad x_n(0) = (20, 20, -10)^T, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

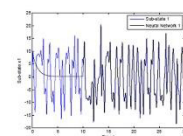


Fig. 4 Time evolution for sub-states 1 with initial state  $X_{n1}(0) = (10; 0; 10)^T$

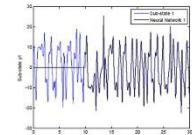


Fig. 5 Time evolution for sub-states 1 with initial state  $X_{n1}(0) = (10; 0; 10)^T$

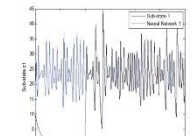


Fig. 6 Time evolution for sub-states 2 with initial state  $X_{n1}(0) = (10; 0; 10)^T$

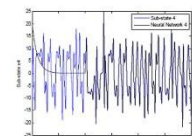


Fig. 7 Time evolution for sub-states 4 with initial state  $X_{n4}(0) = (20; 20; -10)^T$

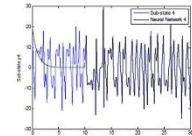


Fig. 8 Time evolution for sub-states 4 with initial state  $X_{n4}(0) = (20; 20; -10)^T$

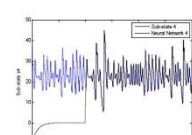


Fig. 9 Time evolution for sub-states 4 with initial state  $X_{n4}(0) = (20; 20; -10)^T$

Simulation results are presented in Fig. 4 - Fig. 6 for sub-states of node 1. As can be seen, tracking is successfully achieved and error is asymptotically stable, as it is shown in Fig. 7 - Fig. 9 for sub-states of node 4.

## ACKNOWLEDGEMENTS

Acknowledgements. The first and second authors thank the support of CONACYT and the Matemáticas Aplicadas group of the Facultad de

Ciencias Físico-Matemáticas, Universidad Autónoma de Nuevo León, México.

## CONCLUSIONS

We have presented the controller design for trajectory tracking determined by a general complex dynamical network. This framework is based on dynamic delayed neural networks and the methodology is based on Lyapunov-Krasovskii theory. The proposed PID Control Law is applied to a dynamical network with each node being a Lorenz and Chen's dynamical

system, respectively, being able to also stabilize in asymptotic form the tracking error between two systems. The results of the simulation shows clearly the desired tracking. In future work, we will consider the stochastic case for the complex dynamical network.