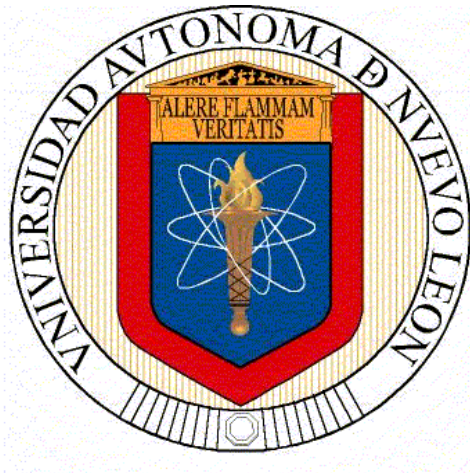


**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**



**TESIS**

**SOBRE LOS PROBLEMAS BINIVEL LINEALES CON  
COEFICIENTES INTERVALOS EN LOS LADOS DERECHOS DE  
LAS RESTRICCIONES DEL NIVEL INFERIOR**

**PRESENTA**

**ARMANDO ORTEGA ROSALES**

**PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRÍA EN CIENCIAS CON ORIENTACIÓN  
EN MATEMÁTICAS**

**JUNIO 2015**

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**



**TESIS**

**SOBRE LOS PROBLEMAS BINIVEL LINEALES CON  
COEFICIENTES INTERVALOS EN LOS LADOS DERECHOS DE  
LAS RESTRICCIONES DEL NIVEL INFERIOR**

**PRESENTA**

**ARMANDO ORTEGA ROSALES**

**PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRÍA EN CIENCIAS CON ORIENTACIÓN  
EN MATEMÁTICAS**

**JUNIO 2015**

“La inteligencia no lo es todo para superarse, es una combinación paralela de intelecto, esfuerzo y disciplina.”

(Armando Ortega Rosales)



Universidad autónoma de Nuevo León  
Facultad de ciencias físico matemáticas  
Centro de investigación en ciencias físico matemáticas

Los miembros del comité de tesis de la subdirección de posgrado de la facultad de ciencias físico matemáticas, recomendamos que la tesis. "Sobre los problemas binivel lineales con coeficientes intervalos en los lados derechos de las restricciones del nivel inferior" realizada por el Lic. Armando Ortega Rosales, con número de matrícula 740221, \_\_\_\_\_ para su defensa para opción al grado de maestría en ciencias con orientación en matemáticas.

Comité de tesis

---

Dr. José Fernando Camacho Vallejo  
Presidente

---

Dra. Yasmín A. Ríos Solís  
Secretario

---

Dr. Álvaro Eduardo Cordero Franco  
Vocal

Vo. Bo.

San Nicolás de los Garza, Nuevo León.

Junio 2015

*Dedicado a mi familia: esposa e hijos y a mis profesores.*

# Agradecimientos

A Dios porque fui bendecido con salud, por disponer los medios para terminar la licenciatura en matemáticas y maestría en ciencias con orientación en matemáticas. A mi esposa e hijos por su sacrificio y paciencia. A mi primo Adrián Lozano y a mi tía Francisca Lozano por su apoyo económico y moral. A mis abuelos que en paz descansan que vieron en mí como si fuera su hijo, además; los consejos que me dieron hasta los últimos momentos para continuar con los estudios. A mi papá que me apoyo en la medida en que pudo. A mis profesores Alfredo Alanís Durán y Lilia López Vera que me enseñaron sus conocimientos en Matemáticas y por su apoyo moral. A mi tutor José Fernando Camacho Vallejo por su enseñanza en programación binivel, LaTeX, software R, así como también por su guía para mi formación profesional y excelencia. Profesora Nataliya I. Kalashnykova por su cátedra en optimización y respaldo moral. Profesor José Paz Pérez Padrón porque me motivó a seguir estudiando con sus consejos y a través de la docencia en matemáticas. Profesor Francisco Almaguer Martínez por su apoyo en resolver dudas en software de matemáticas. Profesor Álvaro Eduardo Cordero Franco por su enseñanza en optimización y porque me avisó de las becas CONACYT; por ende, estoy muy agradecido con CONACYT porque me beco en la maestría y por lo tanto concluyo mis estudios satisfactoriamente.

# Resumen

En este trabajo se estudia una clase particular de problemas de programación binivel en donde las funciones objetivo de ambos niveles y las restricciones son lineales. Además se considera el problema del nivel inferior como un problema de programación por intervalos, en donde los coeficientes intervalos aparecen solamente en los lados derechos de las restricciones. Es decir, se asume que los lados derechos de las restricciones del nivel inferior no se conocen con exactitud sino que están dados por un intervalo delimitando un intervalo de valores.

Este hecho aumenta significativamente la complejidad del problema binivel debido a que la región factible del nivel inferior no se conoce con exactitud y por consecuencia, la reacción óptima del seguidor no puede ser obtenida de forma general repercutiendo directamente en la decisión del líder. La existencia de esta incertidumbre en el nivel inferior evita la posibilidad de obtener una solución óptima binivel que sea factible para todo el intervalo de los lados derechos. Es por esto, que se definen las soluciones robustas binivel.

Se estudian dichas soluciones robustas binivel, se analizan algunas de sus propiedades y se propone una metodología eficiente para encontrar el óptimo del problema partiendo de la solución robusta binivel. La metodología propuesta se valida y ejemplifica con algunos ejemplos numéricos mostrando que el esquema de solución propuesto es conveniente para resolver este tipo de problemas.

**Palabras clave:** programación binivel lineal, coeficientes de intervalo, programación por intervalos.



# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>II</b>
Resumen . . . . .	III
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Descripción del problema . . . . .	1
1.2. Motivación y justificación . . . . .	7
1.3. Objetivo principal . . . . .	9
1.3.1. Objetivos secundarios . . . . .	10
1.4. Metodología . . . . .	10
1.5. Estructura de tesis . . . . .	11
<b>2. Revisión de literatura</b>	<b>13</b>
2.1. Programación matemática con incertidumbre en los parámetros . . . . .	13
2.1.1. Análisis de sensibilidad . . . . .	14

2.1.2.	Lógica difusa . . . . .	18
2.1.3.	Programación estocástica . . . . .	19
2.1.4.	Programación lineal con coeficientes intervalo . . . . .	22
2.2.	Programación binivel . . . . .	25
2.3.	Programación binivel lineal con coeficientes de intervalo . . . . .	29
<b>3.</b>	<b>Definición del problema binivel y conceptos</b>	<b>33</b>
3.1.	Definición del modelo matemático . . . . .	33
3.2.	Ejemplo ilustrativo . . . . .	37
<b>4.</b>	<b>Metodología para obtener la solución óptima binivel</b>	<b>40</b>
4.1.	Aplicación de análisis de sensibilidad en el nivel inferior . . . . .	41
4.2.	Análisis en las restricciones de atadura . . . . .	44
4.3.	Metodología propuesta . . . . .	47
4.4.	Robustez de la metodología . . . . .	48
<b>5.</b>	<b>Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>57</b>
5.1.	Conclusiones . . . . .	57
5.2.	Trabajo futuro . . . . .	59
	<b>Bibliografía</b>	<b>61</b>

# Índice de figuras

1.1. Gráficas ilustrativas en programación binivel lineal . . . . .	5
1.2. Pérdida de factibilidad binivel en diversos escenarios. . . . .	6
3.1. Ejemplo ilustrativo . . . . .	38
4.1. Representación del problema (4.1.1-4.1.5) con respecto al es- cenario más pequeño . . . . .	43
4.2. Ilustración del escenario $b'$ . . . . .	44
4.3. Solución actualizada con análisis de sensibilidad . . . . .	45
4.4. Punto óptimo después de la actualización . . . . .	46
4.5. Ilustración del escenario $\bar{b}$ . . . . .	49
4.6. Representación del ejemplo ilustrativo 2 en el escenario $\underline{b}$ . . . .	50
4.7. Representación del ejemplo ilustrativo 2 en el escenario $\underline{b}$ , con IR en color azul, verde y amarillo . . . . .	51
4.8. Ilustración del escenario $b'$ . . . . .	53
4.9. Ilustración del escenario $b'$ , con IR en color azul, verde y amarillo	54

4.10. Ilustración del escenario $\bar{b}$ . . . . .	55
4.11. Ilustración del escenario $\bar{b}$ , con IR en color azul, verde y amarillo	56

# Capítulo 1

## Introducción

---

En este capítulo se describirá la estructura de los problemas binivel y su importancia en la modelación de problemas que involucran dos tomadores de decisión -un líder y un seguidor-. Además, se hará énfasis en el caso lineal de dichos problemas, es decir, en donde las restricciones y las funciones objetivo del líder y del seguidor son lineales.

Por otro lado, en este capítulo también se describe la motivación que nos orilló a desarrollar esta tesis y se describen los objetivos principales y secundarios de ésta tesis. Por último, se describe la metodología realizada para concluir este estudio y se describe la forma en que está organizado el presente documento.

### 1.1. Descripción del problema

Las principales características de un problema de programación binivel lineal son su estructura jerárquica y la independencia en la toma de decisiones

que hay entre ambos niveles de decisión -el nivel superior y el nivel inferior-. Es decir, en el nivel superior existe un líder, quien optimiza su problema teniendo en cuenta que de forma implícita existe un seguidor que va a tomar su decisión basado en lo que haga el líder. Este proceso no es interactivo ni cooperativo, sino que el líder debe tener presente a la hora de tomar su decisión que existe un seguidor inmiscuido en el proceso.

Como se acaba de mencionar, existe un seguidor que optimiza el problema del nivel inferior conociendo completamente la decisión que ha tomado el líder. El conjunto de soluciones óptimas del seguidor se conoce como el conjunto racional de reacción. Aquí es importante notar que al ser racional, se entiende que las soluciones del seguidor son tomadas de forma inteligente. Es conveniente notarlo porque en los problemas donde el nivel inferior no pueda resolverse la optimalidad con cierta facilidad, hay que estar consciente que el seguidor actúa de forma racional, esto es, en problemas donde hallar el óptimo sea muy complicado, puede sacrificar calidad en su función objetivo ahorrando tiempo de cómputo, o viceversa, entre otros aspectos que pudiera considerar.

Dado lo anterior, entiéndase como la región inducida a todas las parejas ordenadas tales que para cada decisión del líder le corresponda un elemento del conjunto racional de reacción. Además, una solución será considerada factible binivel cuando ésta solución pertenezca a la región inducida. En otras palabras, una solución factible al problema binivel consiste en tener una decisión del líder y la respuesta óptima correspondiente del seguidor. Está claro que la región inducida es la región factible del problema binivel y ahí se debe buscar el óptimo únicamente para el líder, sabiendo que de forma implícita viene considerada la reacción racional del seguidor.

Después de haber discutido la estructura de los problemas de programación binivel, ahora se mencionarán algunas de las áreas en donde se ha aplicado. Además, se discutirán un poco sobre los dos temas principales que nos interesan en esta tesis: (i) programación binivel lineal y (ii) programación con coeficientes intervalo.

La programación binivel ha servido para modelar problemas aplicados a las siguientes áreas de investigación: logística humanitaria como en [1], en la industria de gas natural como en [2], diseño de redes como en [3], en el campo de la economía como en [4], centrales hidroeléctricas de bombeo como en [5], planificación del transporte como en [6], análisis de vulnerabilidad de sistemas de potencia como en [7] y muchas otras aplicaciones que siguen surgiendo.

Ahora bien, el primer tema de gran interés para el presente trabajo es el caso de los problemas programación binivel lineales (BLP por sus siglas en inglés). Este tipo de problemas se han investigado abundantemente dentro de la literatura como en [8], [9] y muchos autores más siguen aportando en este campo de programación binivel. Al igual que en el caso de programación matemática, el caso lineal es el que tiene más propiedades explotables y se puede decir, es el caso más sencillo. La principal diferencia es que está demostrado que los BLP son problemas NP-hard (véase [10]).

Por otro lado, el segundo tema relevante para ésta tesis, es cuando existe incertidumbre en los parámetros del modelo. Existen varias formas de analizar este tipo de problemas, por ejemplo, programación por intervalos, lógica difusa, optimización robusta, o bien, análisis de sensibilidad. Algunos de estos enfoques se describirán en el capítulo 2.

La técnica que considera la incertidumbre que nos interesa en este trabajo es programación por intervalos; en particular, programación lineal con coeficientes de intervalo (LPIC por sus siglas en inglés). En general, este tipo de problemas puede tener incertidumbre en los coeficientes de la función objetivo, en los parámetros de las variables de las restricciones en cuestión y en los lados derechos de las restricciones.

En ésta tesis, se reducirá la incertidumbre del problema al considerar solamente los coeficientes intervalos en los lados derechos de las restricciones. Este caso específico se puede presentar en aplicaciones reales tales como: cuando los recursos disponibles dependen de situaciones ajenas al tomador

de decisiones, como es el caso cuando un trabajador se ausenta al taller, entonces no se tendrá la misma capacidad de atender pedidos; o bien, con demandas de clientes que históricamente podemos tener una estimación del pedido que hará pero puede ser diferente a la orden que realice. Es por esto, que es importante prestar atención al hecho de que algunos de los parámetros del modelo pueden variar o no se conocen en su totalidad. En la literatura se pueden encontrar diversos trabajos que estudian LPIC, tales como en [11], [13], [14], [15], [16], [17], solo por citar a algunos.

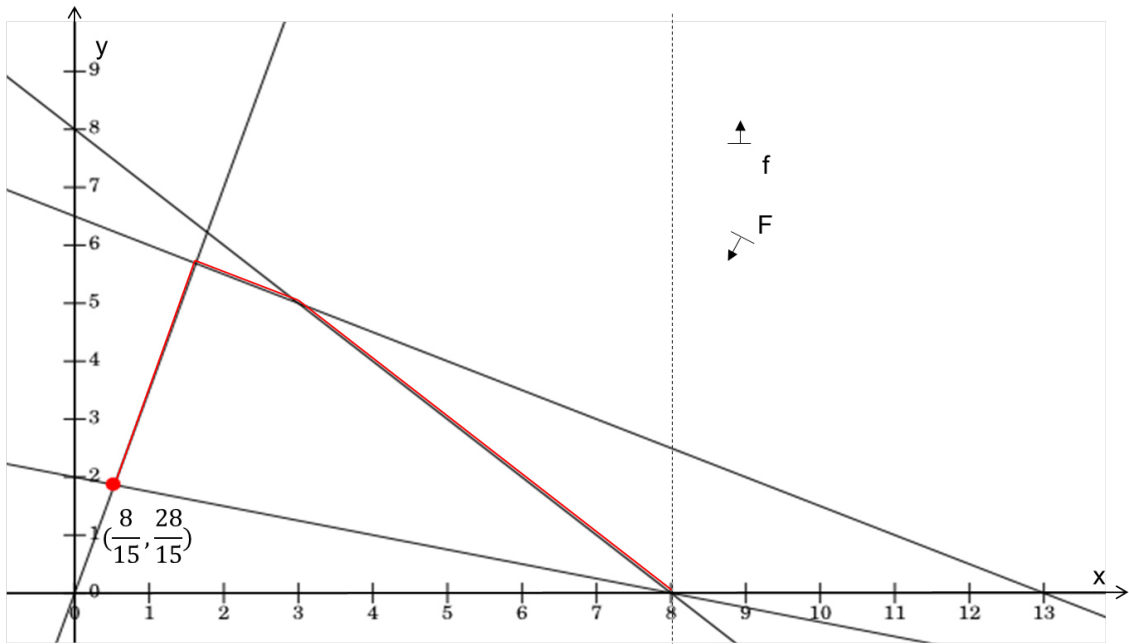
Por lo tanto, lo que se quiere hacer en ésta tesis es una mezcla de estos dos temas, es decir, analizar incertidumbre en los parámetros en los lados derechos de las restricciones con la técnica programación lineal con coeficientes intervalo y programación binivel. Es evidente que esta combinación de características tiene aplicación e interés en problemas reales ya que la estructura jerárquica que considera incertidumbre se presenta muy frecuentemente en diferentes situaciones.

Entonces, en esta investigación se abordará un caso particular de programación binivel lineal con coeficientes de intervalo (LBPIC por sus siglas en inglés) sólo con incertidumbre en los lados derechos de las restricciones del nivel inferior.

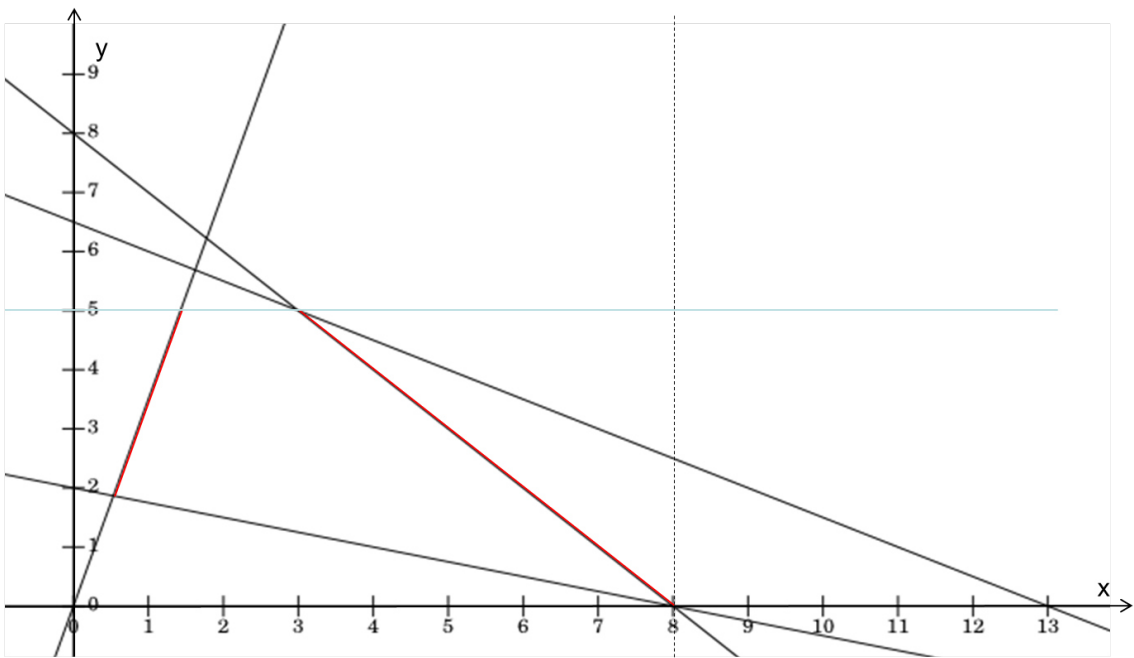
Vale la pena mencionar que en este trabajo no se consideran restricciones en el problema del líder ya que al hacerlo, éstas pueden dejar disconexa la región inducida, tal como se presenta en la figura 1.1. El hecho de dejar disconexa complica aún más el problema binivel lineal. Por el momento, se dejan fuera de este estudio.

Ahora mismo, el hecho de tener coeficientes intervalo en los lados derechos de las restricciones del seguidor, lo que está cambiando en el problema es el poliedro que delimita la región factible. De esta forma, al ser los intervalos continuos se pueden generar infinitas configuraciones, ésto es, los hiperplanos asociados a las restricciones cambian su posición para cada escenario -por escenario se entiende una configuración de valores para los lados derechos-.





(a) La región factible para un problema binivel lineal



(b) Si el líder tiene restricciones adicionales la región factible puede ser disconexa

Figura 1.1: Gráficas ilustrativas en programación binivel lineal

*Observación 1.1.1.* Estas traslaciones de hiperplanos originan una región factible que mantiene la forma del poliedro generado. Dicho poliedro sólo se hace más grande o más pequeño, es decir; por lo general, los vértices siguen siendo determinados por el mismo conjunto de hiperplanos sin importar si el poliedro se alarga o se acota.

Concluyendo con la descripción del problema en la tesis, tenemos que se está considerando un problema de LBPIC con coeficientes de intervalo en los lados derechos de las restricciones del nivel inferior. En este tipo de problemas no se puede proveer de una solución óptima binivel en general, ya que depende del tamaño del poliedro de soluciones factibles. En otras palabras, se tendría un óptimo para cada escenario posible. Es fácil ver que una solución óptima (punto resaltado en negro) para un escenario podría no ser factible para algún otro. (ver figura 1.2).

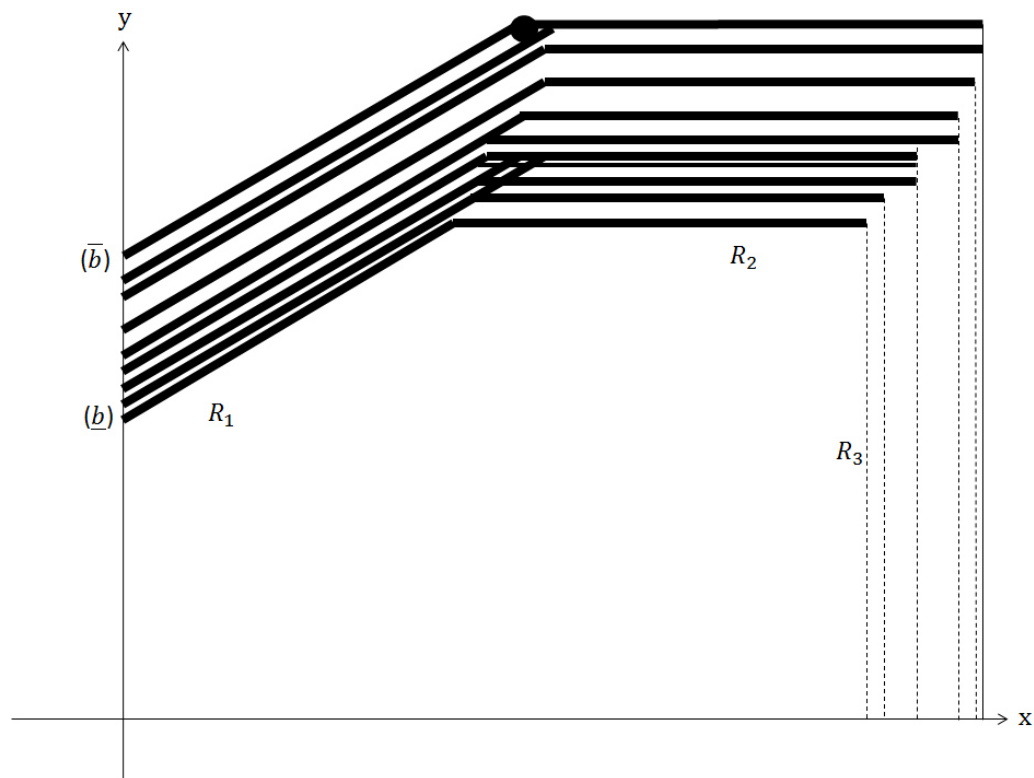


Figura 1.2: Pérdida de factibilidad binivel en diversos escenarios.

Por último, en esta investigación se considera el problema descrito de LBPIC de modo que se considere una incertidumbre en los recursos (pueden variar de un día a otro e incluso en minutos); lo que implica que la región inducida del problema binivel lineal se vea afectada según el parámetro elegido, ya que los hiperplanos que forman las caras del poliedro se trasladan. Como ya se mencionó, por lo general se mantiene la misma forma del poliedro permitiéndonos aprovechar esta característica para la metodología de solución propuesta en el capítulo 4.

## 1.2. Motivación y justificación

Es bien conocido que los problemas de programación binivel son NP-hard, por ende, son problemas retadores e interesantes de analizar. Así mismo, LB-PIC es muy difícil de resolver. Además LB-PIC permite brindar más información para el tomador de decisiones al hacer el análisis para un intervalo de valores de cada recurso disponible (sin perder generalidad). Por consiguiente se le ofrece una perspectiva más amplia, de tal forma que al ejecutar las decisiones tenga un panorama que le permita ver más allá de simplemente considerar la solución óptima.

Por otra parte se ha hecho muy poca investigación en esta área LB-PIC, lo cual nos permite explorar más profundamente este tipo de problemas. Por ejemplo, en [18] han abordado LB-PIC considerando coeficientes intervalo en la función objetivo. Diferencian en tres casos; (i) coeficientes de intervalo sólo en la función objetivo del líder; (ii) coeficientes de intervalo sólo en la función objetivo del seguidor; (iii) coeficientes de intervalo simultáneamente en la función objetivo del líder y en la función objetivo del seguidor. Ahí se proponen unos algoritmos para resolver ese tipo de problemas.

En el caso (i) se obtiene un conjunto de soluciones óptimas binivel, donde cada solución se determina fijando cada uno de los valores del intervalo y se resuelve el problema binivel en forma clásica. Aquí el casco convexo y la

región inducida se mantienen, sólo cambia el vértice de la solución óptima binivel dependiendo del parámetro fijado dentro del intervalo en la función objetivo del líder. Esto es, dependiendo de la pendiente de la función objetivo del líder.

En el caso (ii), de manera similar al caso anterior, se encuentra un conjunto de soluciones óptimas binivel. Allí el poliedro que determina la región factible permanece de la misma manera, pero la región inducida puede variar dependiendo de los valores elegidos en los coeficientes intervalo en la función objetivo del seguidor. Entonces, la solución óptima binivel puede cambiar, aunque la pendiente de la función objetivo del líder siempre sea la misma.

En el caso (iii) se concluye que el casco convexo se mantiene igual, pero puede cambiar la región inducida por lo mencionado en (ii), además que la pendiente de la función objetivo del líder está cambiando lo cual se mencionó en (i). Por lo tanto, se obtiene una diversificación geométrica, permitiendo otro tipo de soluciones factibles y se le ofrece otra perspectiva al tomador de decisiones.

Después, en [19] se hacen unas correcciones en uno de los algoritmos de [18] y generalizan el problema binivel con coeficientes de intervalo para los lados derechos de los recursos y para los coeficientes de las variables de las restricciones del seguidor. Sin embargo para este último caso, no detallan bien como tratan el hecho de que la región inducida no la conocen con exactitud. Estos dos últimos artículos mencionados se analizan más a detalle en el capítulo 2. Se buscó en la literatura de forma exhaustiva y no se encontraron más artículos de LBPIC. Por lo que se consideran los dos trabajos recién descritos y el presente estudio pioneros en este tipo de investigación.

Con lo mencionado arriba se muestra un poco más lo interesantes que son este tipo de problemas de LBPIC. Es por esto que surgió la idea de hacer una investigación de este problema. Se pretende hacer aportaciones que nutran a la ciencia, por lo que este hecho nos motiva a emprender por esta vía la siguiente investigación en el tema de programación binivel lineal con coefi-

cientes intervalo en los lados derechos de las restricciones del nivel inferior.

### 1.3. Objetivo principal

Como ya se ha mencionado anteriormente, los coeficientes de intervalo añaden más complejidad a un problema de LBPIC. Es por esto que en este trabajo se busca definir las soluciones robustas binivel, estudiar sus propiedades y proponer técnicas eficientes para obtenerlas. De este objetivo general podemos partirlo en dos objetivos principales.

El primer objetivo que se persigue en ésta tesis es verificar la siguiente hipótesis: la región inducible robusta binivel proporciona soluciones factibles para el problema de LBPIC. Es decir, si se encuentra la solución óptima binivel que pertenezca a la región inducible robusta, dicha solución será factible para todos los escenarios. La importancia de lo anterior yace en el hecho de que se obtendrá una solución factible para cualquier escenario con lo cual el tomador de decisiones siempre tomará una decisión que pueda llevarse a cabo. Con esto evitamos el caso en que su decisión se vea reflejada en acciones que no puedan realizarse debido a faltante en los recursos, es decir, sean soluciones infactibles.

El segundo objetivo principal es estudiar la siguiente hipótesis: obtener la solución del problema binivel del escenario real partiendo de la solución óptima robusta binivel. Para esto hay que analizar el problema y plantear una metodología que funcione de manera general. Este objetivo es muy importante debido a que el tomador de decisiones podrá tomar su decisión en base al escenario robusto, pero en el momento en que sepa el escenario real pueda venir a actualizar su solución sin tener que volver a resolver el problema binivel en el escenario real. A pesar de que los problemas de programación binivel lineales han sido muy estudiados en la literatura, el hecho de ser problemas NP-hard, dificulta su proceso de resolución. Es preferible partir de la solución robusta y de ahí obtener la solución real.

### 1.3.1. Objetivos secundarios

- Definir el problema binivel lineal con coeficientes de intervalo en los lados derechos de las restricciones del seguidor.
- Demostrar que la región inducible robusta es factible para todos los escenarios.
- Hallar la solución robusta binivel.
- Aplicar análisis de sensibilidad partiendo de la solución robusta binivel para estudiar el impacto de los cambios en los lados derechos de las restricciones.
- Mostrar como llegar a la solución óptima binivel partiendo de la solución robusta binivel.
- Ejemplificar la metodología propuesta y las dificultades de esta clase particular de problemas de programación matemática.

## 1.4. Metodología

El presente estudio se desarrolló utilizando dos tipos de investigación, la bibliográfica y la analítica. A continuación se describe el orden de actividades significativas para desarrollar ésta tesis.

1. Lectura del artículo [18].
2. Aprendizaje del uso de  $\text{\LaTeX}$ .
3. Revisión de literatura en programación binivel.
4. Revisión de literatura en análisis de sensibilidad.

5. Revisión de literatura en programación lineal con coeficientes de intervalo.
6. Revisión de literatura en programación binivel con coeficientes de intervalo.
7. Revisión de literatura en lógica difusa.
8. Definición el problema binivel lineal con coeficientes de intervalo en los lados derechos de las restricciones del seguidor.
9. Definición de conceptos para determinar la región inducida robusta.
10. Aplicación de análisis de sensibilidad a las soluciones robustas binivel.
11. Creación de ejemplos de diferentes características para evidenciar la importancia de las soluciones robustas binivel.
12. Aprendizaje de software para visualización de los ejemplos numéricos.
13. Análisis post-óptimo para actualizar la solución robusta a la solución óptima del cualquier escenario.
14. Demostración del lema que permite darle validez a la metodología propuesta, sobre las restricciones de atadura en el caso general.
15. Elaboración de este documento.

## 1.5. Estructura de tesis

Para finalizar este primer capítulo, se describirá la forma en que está estructurado este documento. En el capítulo 1, se describió el problema de LBPIC a estudiar en esta tesis. Se discutió sobre su complejidad y se identificaron los principales objetivos de esta tesis. Así mismo, se detalló la justificación y la motivación que inspiraron este trabajo. También se mostró la metodología implementada para llegar al desenlace del presente trabajo.

En el capítulo 2, se detalla la revisión de literatura realizada para comprender las diferencias existentes entre los diferentes enfoques que usualmente consideran incertidumbre en los parámetros del problema. Se revisó literatura con respecto a análisis de sensibilidad, lógica difusa, programación estocástica, programación lineal con coeficientes intervalo, programación binivel, programación binivel con coeficientes de intervalo.

Después, se define el problema binivel lineal con coeficientes intervalo en los lados derechos de las restricciones del nivel inferior y algunos conceptos necesarios para tener bien definido el problema en el capítulo 3,. Además, se presenta un ejemplo gráfico para ilustrar el modelo matemático y el impacto que tiene el hecho de tener coeficientes de intervalo en los lados derechos de las restricciones del nivel inferior.

Luego, en el capítulo 4 se propone un esquema para partir de la solución robusta binivel y llegar a la solución óptima binivel de cualquier escenario que ocurra en realidad. Para sustentar y ejemplificar la metodología propuesta se presentan ejemplos numéricos.

Por último, en el capítulo 5 se presentan los resultados obtenidos, así como las conclusiones obtenidas durante este trabajo y se mencionan algunas líneas de investigación para trabajo futuro sobre este mismo tema de investigación.



# Capítulo 2

## Revisión de literatura

---

Este capítulo está dedicado a describir detalladamente la extensa revisión de literatura que se realizó para la elaboración de este trabajo. A detalle, tenemos que la sección 2.1 hace mención de las técnicas que se aplicaron a los problemas de programación no determinística, es decir, problemas que consideran incertidumbre en algunos de sus parámetros. Después, en la sección 2.2 se analizan problemas de programación binivel y sus aplicaciones en la vida real. Por último, en la sección 2.3 se describe la revisión de literatura realizada para problemas lineales modelados con programación binivel considerando coeficientes de intervalo en algunos de los parámetros del modelo, ya sea del líder o del seguidor.

### **2.1. Programación matemática con incertidumbre en los parámetros**

En programación matemática determinística se da por hecho que toda la información necesaria para construir el modelo es conocida, es decir, los

parámetros tienen un valor predeterminado de antemano, es decir, antes de resolver el problema. Sin embargo, en la mayoría de los casos reales esos supuestos valores son aproximaciones o pronósticos; muchos de estos valores pueden cambiar día con día o inclusive minuto a minuto.

De aquí surge la idea de poder variar dichos parámetros de tal forma que al analizar los datos de entrada asociados a los parámetros se debe de considerar una cierta incertidumbre. Una manera de estudiar estos problemas es mediante el uso de programación matemática no determinística.

Dicha incertidumbre en los parámetros se ha analizado con varias técnicas, las cuales se estudiarán en este capítulo: análisis de sensibilidad, lógica difusa, programación estocástica, programación lineal con coeficientes de intervalo, programación binivel, programación binivel lineal con coeficientes de intervalo. En este último enfoque es donde se centra el presente trabajo y se analizará a detalle en el capítulo tres.

### **2.1.1. Análisis de sensibilidad**

Análisis de sensibilidad es una técnica matemática clásica; uno de sus objetivos es revelar cuáles son los parámetros sensibles del problema, ya sea en los coeficientes de la función objetivo, en los coeficientes técnicos de las restricciones o en los lados derechos de las mismas. El objetivo es averiguar si se modifica el vértice correspondiente la solución óptima al cambiar uno o varios de los parámetros del problema.

Así mismo, el análisis de sensibilidad nos permite determinar los límites inferior y superior para obtener un intervalo permisible para los parámetros del problema. De esta manera, se garantiza que el vértice correspondiente a la solución óptima no cambiará siempre y cuando los parámetros sufran cambios independientes dentro de este intervalo.

Ésta técnica es clásica y muy conocida, por lo que se ha aplicado en diversas áreas, tales como: en el mercado financiero, en proyectos empresariales, en modelos hidrodinámicos, en la industria, en la milicia, en los proyectos de inversión de salud, en reformas estructurales, etc.

Con esta técnica se le ofrece un panorama más amplio al dueño de la empresa o al encargado de tomar las decisiones, por ejemplo: si un empresario desea invertir cierta cantidad de dinero y tiene tres opciones de invertir, aplicando análisis de sensibilidad se le puede ofrecer donde existe mayor o menor riesgo, así como también donde puede ganar o tener pérdidas para cada opción de inversión. Por ejemplo, en [20] analizan un proyecto de inversión en el sector servicios de salud, en particular, en la construcción de un servicio hospitalario mediante análisis de sensibilidad. Ellos utilizan cuatro indicadores (ésta es la incertidumbre en los parámetros del problema) para el uso de la capacidad hospitalaria: valor de la tasa de hospitalización, porcentaje de ocupación de hospitalización, promedio de días de hospitalización y una tasa del uso de la cama (número de egresos por cama hospitalaria) por ende, obtienen diversos escenarios con lo cual logran las variaciones de los costos de inversión, ayudándose así para tomar mejores decisiones.

El análisis anterior descrito se fundamenta mediante ejemplos hipotéticos y constructivos, los cuales se basan en situaciones reales. Otra diferencia que vale la pena notar es que los autores conceptualizan el problema y consideran un análisis de sensibilidad que engloba varios elementos esenciales que en otros artículos sólo lo toman como algo de poco interés o bien, de manera aislada o independiente. En ese trabajo, se hace mención en el sector salud, donde los proyectos de inversión siempre serán convenientes ya que son necesarios para la sociedad pero siempre teniendo en mente la buena utilización de los recursos disponibles. En cambio en el sector financiero privado, el proyecto puede ser rechazado si no existen ganancias o bien, es demasiado sensible ante las variaciones de los parámetros. En este caso se dice que el modelo es sensible a los parámetros.

En [21] aplican análisis de sensibilidad para materiales no lineales; es decir, los materiales lineales son los que se representan en una gráfica en  $R^2$  cuyos ejes son la tensión y la deformación unitaria, de tal manera que se forme una línea recta hasta el límite de la elasticidad. En este caso se está analizando el desplazamiento y las deformaciones específicas del material las cuales no son valores pequeños. Abordan los casos de plasticidad (deformación plástica) y el daño obtenido.

Los autores hacen énfasis en que existen varios enfoques para aplicar análisis de sensibilidad para estudiar el efecto de los incrementos en los parámetros sensibles, pero el costo computacional es muy alto debido a que se debe calcular la sensibilidad después de cada perturbación en el sistema. Por lo que proponen un nuevo enfoque, partiendo del hecho de que los incrementos están dados con respecto a una razón de cambio conocida, entonces aplican derivadas en la ecuación global de equilibrio insertando un parámetro de arco constante (equilibrio estructural del sistema y las condiciones en el nivel de desplazamientos) y una restricción de desplazamiento sin pérdida de generalidad del modelo. Éste cociente se da entre la variable de diseño con respecto al desplazamiento y la otra razón de cambio se da entre la variable de diseño con respecto a la tensión. Es bien sabido también que este análisis se puede aplicar a la función objetivo del problema en cuestión o bien, en las restricciones.

Con análisis de sensibilidad optimizan costos y calidad para el diseño y manufactura de una pieza obteniendo información relevante para aplicar algoritmos de optimización. Además, sus resultados les permite saber el comportamiento estructural a través de las perturbaciones del sistema. Para darle validez a su análisis presentan tres ejemplos, el primero sobre plasticidad uniaxial, es decir, sobre el comportamiento elástico no lineal medido en un problema de equilibrio estático trabajando con esfuerzo axial. El segundo ejemplo que presentan es con daño uniaxial, el material se presenta como un modelo de daño con ablandamiento. Y en el tercer ejemplo, analizan una viga trabajando a flexión (esfuerzo compuesto o combinado, de tracción y compresión). Además, sugieren utilizar un algoritmo iterativo de minimización para verificar la ecuación con derivada de la condición de arco. En conclusión, utilizan una nueva metodología aplicando análisis de sensibilidad en un modelo con derivadas y con longitud de arco para este tipo de problemas y

presentan ejemplos ilustrativos para ver el funcionamiento correcto numérico y reduciendo el costo computacional.

Después en [22] se llevó a cabo un análisis de estudio en Madrid, España. Ellos observaron que las superficies residenciales como urbanizadas han tenido un crecimiento de superficie significativo, por lo que están planteando en un modelo clásico existente con autómatas celulares diseñado para simular varios escenarios de crecimiento urbano con una metodología la cual consiste en aplicar análisis de sensibilidad para contar el número de veces que participa cada uno de los factores siguientes.

Existen cuatro parámetros a analizar: vecindad, accesibilidad, aptitud y estocasticidad. La vecindad estima la tendencia a la transformación hacia un tipo de uso urbano. La accesibilidad mide las distancias a diversos elementos como comercios, universidades, zonas urbanas, centro de negocios e infraestructuras de transporte. La aptitud es el proceso de crecimiento urbano en la comunidad de Madrid en períodos anteriores. Y la estocasticidad es el parámetro que trata de replicar el grado aleatorio de los procesos de crecimiento urbano como parte de los sistemas sociales complejos. Proponen ocho modelos de los cuales, siete involucran los tres primeros parámetros anteriores y el octavo modelo sólo con estocasticidad, ya que éste último al involucrar aleatoriedad sería muy complicado hacer una comparación justa los modelos. Además, se menciona que el propósito de su trabajo es comprobar la robustez y la fiabilidad de los resultados del modelo y el grado de influencia de los cuatro factores para mejorar el modelo matemático.

Para cerrar la idea del análisis de sensibilidad, podemos hacer énfasis en la importancia que tiene ésta técnica en el costo-beneficio en proyectos de inversión, ya que por sus características naturales puede considerar un poco de incertidumbre en los parámetros. Este hecho es conveniente porque siempre brindará mayores y mejores herramientas al tomador de decisiones para sustentar su decisión. Con esto, se puede saber que pasaría con la solución óptima si algunos de los parámetros cambian.

## 2.1.2. Lógica difusa

La lógica difusa también permite considerar incertidumbre o variabilidad en los coeficientes del problema. En particular, crea funciones de membresía para poder asignarles un valor a cada parámetro. Una forma de modelar estos problemas es mediante la programación lineal difusa (PLD). Estos problemas son aquellos en donde algunos de los parámetros poseen incertidumbre, de esta manera se definen números difusos en los coeficientes de la función objetivo, en los coeficientes técnicos de las restricciones y en los lados derechos.

El número difuso es una función que depende de al menos de una variable, la cual al conocer el valor que toma, se le asigna un cierto grado de precisión. En otras palabras, el número difuso se apega a cierta función de pertenencia para determinar un valor posible entre cero (el parámetro no pertenece al conjunto difuso) y uno (el parámetro sí pertenece al conjunto difuso). Existen varias funciones de pertenencia, las más comunes debido a su simplicidad son: función trapezoidal, función triangular, función gamma, entre otras.

Esta técnica se ha aplicado a diferentes áreas, por consiguiente se describen dos artículos en particular que fueron de interés para desarrollar esta investigación. Uno de ellos trabaja con un problema programación lineal con restricciones difusas y el otro artículo con otro problema de dualidad en programación difusa.

En [23] abordan el problema programación lineal flexible con restricciones desigualdad difusas. El aporte que ellos hacen es agregarle al problema restricciones de igualdad (RI) y restricciones de caja (RC), para hacer esto último, les asignan una cota superior e inferior para cada una de las variables de decisión del problema. Así mismo, muestran que el problema PLD con RI y RC es equivalente a un problema de optimización paramétrica.

Con la metodología propuesta considerando parámetros difusos en la función objetivo flexible, los autores presentan mejores soluciones que las locali-

zadas en la literatura para el problema que considera unicamente restricciones de desigualdad difusas. También, con ésta metodología encuentran soluciones factibles en espacios factibles vacíos. Para lograrlo, utilizan una función de pertenencia triangular para restricciones de igualdad difusa y para las restricciones de caja usan la función de pertenencia trapezoidal.

Por otro lado, en [24] se hace un estudio sobre programación lineal con subconjuntos difusos en forma matricial con varias funciones objetivo y restricciones de desigualdad. El aporte radica en una transformación primal-dual difusa utilizando las mismas funciones de pertenencia tanto para el primal como el dual. Después se muestra que el problema primal de programación lineal difusa es equivalente en su forma clásica al problema de programación lineal dual difuso y se muestra un ejemplo con estas propiedades. este análisis es válido en diferentes esquemas ya que también se consideraron varias funciones objetivo y restricciones difusas para evidenciar robustez.

### **2.1.3. Programación estocástica**

Otro enfoque para analizar programación lineal no-determinística es mediante programación estocástica, ésta se emplea cuando los parámetros de incertidumbre se consideran como variables aleatorias. Esto es, no se conocen con exactitud pero se conoce distribución de probabilidad asignada a ellos.

Una definición de programación estocástica formal se propone en [25] “es la ciencia que ofrece soluciones para problemas formulados en conexión con sistemas estocásticos, en los que el problema numérico resultante a resolver es un problema de programación matemática de tamaño no trivial”.

Al considerar estocasticidad en la función objetivo de un problema no-determinístico con restricciones determinísticas usualmente se utiliza uno de varios enfoques conocidos, tales como: el valor esperado, la mínima varianza, el mínimo nivel de riesgo y el criterio de Kataoka. La aplicación de estos

enfoques convierte el problema en uno determinístico.

Por otro lado, al considerar un problema de programación estocástica con las restricciones no-determinísticas y con la función objetivo determinística, la técnica más conocida es el método de restricciones de azar, la cual clasifica las restricciones de azar como conjuntas y separadas; es equivalente a un problema determinístico.

Por citar algunas de las aplicaciones en programación estocástica podemos mencionar los siguientes artículos. En [26] la perspectiva que proponen para tratar con la incertidumbre es mediante una secuencia de escenarios discretos con cierta probabilidad de que pase ese escenario particular. Además, pretenden que la solución maximice el valor esperado y que sea factible en todos los escenarios posibles. Modelan un problema de gestión forestal donde los costos de madera existe incertidumbre bajo este esquema.

El enfoque propuesto se basa en considerar que la incertidumbre se traduce en una serie de escenarios con probabilidades y se busca una solución que maximice el valor esperado y que sea factible en todos los escenarios. De ésta forma, su principal objetivo es analizar todos los escenarios posibles con cierta probabilidad y poder determinar la solución que satisfaga lo anterior.

Los autores justifican el por qué analizar este tipo de problemas en Chile y describen las etapas de la metodología que siguieron. Primero, hacen una partición del bosque en celdas (unidades de cosecha) cuyas variables de decisión son, celda que se abordará en un cierto tiempo, caminos a construir, madera trasladada de una celda a otra y la oferta de la madera en la salida en cierto período de tiempo. Segundo, la incertidumbre que existe en el costo de la madera en cada período de tiempo, el cual lo modelan con escenarios de probabilidades. Tercero, el objetivo principal es la optimización en explotación de la madera, en la construcción de caminos y la factibilidad en todos los escenarios, de tal forma que se maximice la utilidad.



La cuarta etapa consiste en definir el modelo matemático con técnicas de programación estocástica asignando un índice al parámetro, donde el índice significa en cual escenario se encuentra(n) el(los) parámetro(s). Después, en la 5ta etapa definen el tamaño del problema a resolver. El predio Los Copihues con 300 hectáreas tiene un volumen explotable de 150,000 metros cúbicos, 25 celdas, 18 escenarios de precios posibles; además, se consideraron cuatro períodos (2004, 2005, 2006 y 2007). La penúltima etapa consiste en abordar con programación estocástica el enfoque estático, es decir, el tomador de decisiones debe efectuarlas al inicio del horizonte de tiempo. Después, consideraron también el modelo con programación estocástica en el enfoque dinámico, esto es, el tomador de decisiones debe planear el horizonte de tiempo en cada período.

Por último, las conclusiones del trabajo fueron que utilizaron el algoritmo de Branch and Fix para encontrar la solución óptima del problema con escenarios discretos y el optimizador resuelve el problema en menos de tres horas. El aporte del trabajo consiste en que ellos contemplan la incertidumbre mediante escenarios con una cierta probabilidad y rompe con la forma tradicional de abordar este tipo de problemas. Las formas clásicas son por valores promedios aplicados a los parámetros con incertidumbre.

En [27] se investigó un problema referente a la planificación de plantaciones de olivos (cuyo fruto es la aceituna) en la región de Castilla-La Mancha, España (se encuentra en dos provincias, Toledo y ciudad Real) con la técnica matemática de programación estocástica discreta. En ese trabajo se presentan dos tablas donde se encuentra el censo agrario de 1989 en estas dos provincias españolas de secano (utiliza sólo el agua que proviene de la lluvia) con sus respectivos porcentajes sobre tierra labrada (tierra arada, barbechada y dispuesta para sembrarla al año siguiente) en cereales, legumbres, viñedo, frutales y haciendo énfasis en olivos.

Se plantea un modelo de programación estocástica discreta en dos etapas, donde cada escenario está caracterizado por datos técnicos y económicos en un horizonte de planificación de períodos de tiempo y con cierta probabilidad. Como principal resultado se tiene que se lograron planificar actividades

agrarias en intervalos de tiempo posteriores. Además, se muestra la sucesión de plantaciones que deberá efectuarse en el horizonte de planificación con el fin de aumentar la superficie de cultivos de olivo y así incrementar las ganancias para la empresa que lleve a cabo esta metodología.

#### **2.1.4. Programación lineal con coeficientes intervalo**

A continuación se describirá el caso de un problema de programación lineal en donde los parámetros con incertidumbre estén en la función objetivo, en los coeficientes técnicos de las restricciones y en los lados derechos. Aquí la incertidumbre está representada como un intervalo de números reales, a ésta área se le ha llamado programación lineal con coeficientes de intervalo (LPIC, por sus siglas en inglés).

Uno de los enfoques importantes en LPIC surge por la perspectiva geométrica cuando los coeficientes intervalo sólo están en la función objetivo. En este caso, se obtienen diferentes rotaciones para cada parámetro fijado dentro del intervalo del hiperplano, por supuesto, la región factible no se afecta en este caso. Así que, se tiene en el mejor de los casos una solución óptima para cada configuración de los valores de los coeficientes en cuestión.

Otra posibilidad es cuando los coeficientes intervalo están presentes en los coeficientes técnicos de las restricciones. En este caso, lo que se afecta es la forma de la región factible, obteniéndose una diversificación sustancial de poliedros. Aquí también se tiene en el mejor de los casos una solución óptima para cada configuración de los valores de los coeficientes en cuestión.

La tercera posibilidad se da en que los coeficientes de intervalo están presentes en los lados derechos de las restricciones, geoméricamente se logra que las aristas del poliedro se trasladan simultáneamente (para cada intervalo que se incrementa proporcionalmente), manteniéndose por lo general la misma forma de la región factible.

En LPIC por lo general se pueden obtener infinitas soluciones óptimas dependiendo de la incertidumbre existente, así pues, induce a pensar en encontrar el mejor valor óptimo y el peor valor óptimo, ya que éstos casos extremos nos conducirían a contar con mayor información para tomar mejores decisiones. Estos hechos han motivado a varios investigadores a analizar este tipo especial de problemas y a estudiar la forma de encontrar dichas soluciones.

Por ejemplo, en [15] se analizó un modelo general de un problema de LPIC con coeficientes de intervalo en todos los parámetros del modelo. Posteriormente hizo diferentes análisis dependiendo de las variables relacionadas con sus respectivos coeficientes, esto es, primero investigó el caso con variables restringidas de signo; después con al menos una variable irrestricta que estaba asociada a un coeficiente fijo; y finalmente con al menos una variable irrestricta que correspondía a un coeficiente de intervalo. La idea de los algoritmos que propusieron se enfoca en el hecho de encontrar la mejor solución óptima y la peor solución óptima para todo coeficiente de intervalo y son desarrollados en base de una generalización del método propuesto en [11].

Es importante notar que sin saber de antemano los valores exactos de esos coeficientes de intervalo no se puede obtener la mejor o peor solución óptima al problema. Bajo este mismo enfoque, en [16] se realizó una extensión al trabajo en [15], también encuentran el mejor o peor valor óptimo y analizan el ajuste de los coeficientes intervalo para obtener estos dos valores extremos. Mencionan que la obtención del peor valor óptimo es complicada, principalmente cuando hay restricciones de igualdad con coeficientes de intervalo y cuando las variables que son irrestrictas están asociadas a un coeficiente de intervalo.

Con el fin de intensificar el análisis y la obtención de propiedades relevantes para estos problemas, los investigadores han particularizado los problemas de LPIC. Es decir, han considerado problemas lineales con coeficientes de intervalo donde las variables son binarias. Por ejemplo, en [13] se aborda un problema lineal binario con coeficientes de intervalo en la función objetivo, en los lados derechos de las restricciones y en los coeficientes de las variables

en las restricciones. En este trabajo se transforma el problema con incertidumbre en dos problemas determinísticos, donde los coeficientes de éstos dos problemas son los límites superiores e inferiores de cada intervalo respectivamente. También se propone un algoritmo para resolver el problema con coeficientes de intervalo utilizando los dos problemas resultantes de la transformación propuesta. Sin embargo, los autores no son capaces de encontrar la mejor o peor solución óptima debido a la existencia de incertidumbre en muchas partes del modelo.

Otro caso particular es cuando existen coeficiente de intervalo sólo en la función objetivo. Véase [14], en donde se distinguen dos tipos de soluciones óptimas que pertenecen a todo el conjunto de soluciones óptimas. A estas dos soluciones les llamaron solución óptima necesaria y solución óptima posible. La primera es una solución óptima para cualquier configuración de coeficientes de la función objetivo dentro del intervalo señalado, y la segunda es una solución óptima para al menos una configuración de los coeficiente de intervalo. Después, aplican el criterio llamado *minimax regret* para encontrar una solución partiendo de un conjunto de soluciones óptimas posibles. Por último, propusieron un algoritmo basado en una relajación del problema para encontrar éstas soluciones. El algoritmo minimiza la máxima diferencia entre dos soluciones posibles, pero la solución encontrada no siempre está en un punto extremo de la región factible.

Por otra parte LPIC también se ha analizado en el caso en que los coeficientes intervalo se encuentran únicamente en los lados derechos de las restricciones. Por ejemplo, en [17] se consideró un programa lineal bajo este enfoque y se introdujeron relaciones de dualidad entre la peor solución óptima del problema primal y la mejor solución óptima problema dual. El problema dual resultante es también un programa lineal pero con coeficiente intervalo en la función objetivo. Los autores separan en dos casos su análisis: (i) cuando las restricciones en el primal son desigualdades, entonces las variables en el dual son restringidas de signo, de aquí que los problemas de hallar el peor óptimo primal y el mejor óptimo dual se pueden resolver de forma polinomial; (ii) cuando las restricciones en el problema primal son de igualdad, entonces las variables en el dual son irrestrictas en signo, de aquí que los problemas de encontrar el peor óptimo del primal y el mejor óptimo del dual ambos son

fuertemente NP-hard. Además, se menciona la importancia que toma el criterio del peor caso ya que permite encontrar una solución factible para todos los escenarios posibles en problemas con restricciones de desigualdad. Para problemas con restricciones de igualdad este criterio carece de sentido ya que dicha solución sería infactible para al menos un escenario.

## 2.2. Programación binivel

En 1934, el economista alemán Heinrich Freiherr von Stackelberg escribió el primer problema de programación binivel en su formulación original en su obra *Marktform und Gleichgewicht* [28]. Cabe mencionar que el problema que propuso es conocido como el juego de Stackelberg y el término *programación binivel* surgió mucho tiempo después. Los primeros en utilizar el término *programación binivel* fueron los autores Bracken y McGill en 1973 [29] y en 1974 [30]. A finales de los ochenta del siglo XX, fue cuando se intensificó la investigación en programación binivel y continua hasta hoy en día.

Por mencionar algunos trabajos interesantes, podemos ver el de [31] donde se menciona que el problema de programación binivel es una generalización de varios problemas de optimización. Además en otras publicaciones tratan a los problemas de programación binivel desde otro enfoque; por ejemplo, por reducciones del modelo. Es decir, los problemas binivel pueden ser convertidos en problemas de optimización en un sólo nivel mediante la consideración de que el problema del nivel inferior se puede sustituir con alguna técnica clásica, tales como en [32] aplicando teoremas de función implícita, en [33] empleando Karush-Kuhn-Tucker, en [34] utilizando una ecuación adicional no diferenciable, entre otras.

La gran importancia que tienen los problemas binivel en la vida real, ha motivado que varios autores hallan investigado en diversas aplicaciones de gran relevancia, entre ellas podemos encontrar los trabajos de [35], [36], [37], [38] y [39].

La programación binivel sirve para modelar problemas que consideren una jerarquización entre su toma de decisiones. Usualmente, las decisiones están particionadas en dos niveles, el superior y el inferior. En el nivel superior hay un líder quien debe optimizar su propio problema teniendo en cuenta que una parte de las decisiones del problema están determinadas implícitamente por la solución óptima de otro problema. Este otro problema es el del nivel inferior asociado al seguidor. Dentro de este marco de toma de decisiones, el seguidor reacciona de forma racional ante la decisión del líder, esto es, optimiza su propia función objetivo considerando sus restricciones parametrizadas en la decisión del líder.

Para que los problemas de programación binivel estén bien definidos es necesario hacer algunas observaciones sobre la existencia y unicidad de la solución óptima del nivel inferior. Si la solución óptima del seguidor existe y es única para cada decisión del líder entonces se dice que el problema binivel está bien definido. Sin embargo, si existen múltiples soluciones óptimas para el seguidor, entonces se genera incertidumbre entre éstas y no está claro cual de todas ellas va a considerar el líder para evaluar su problema. Para abordar ésta incertidumbre usualmente se consideran dos enfoques: el caso optimista y el caso pesimista. Ambos enfoques son los dos casos extremos que pueden considerarse para el conjunto de soluciones óptimas del seguidor. En el caso optimista, el líder influencía al seguidor para que éste elija la solución más conveniente para el líder dentro del conjunto de soluciones óptimas del seguidor. Por otro lado, en el caso pesimista el nivel superior se asume que el seguidor va a elegir la solución que brinde menos beneficio para el líder. Si no hay garantía de la existencia y unicidad de la solución del nivel inferior, deberá asumirse alguno de estos dos casos.

La estructura particular de la programación binivel ha permitido que se hayan estudiado diversas aplicaciones de problemas prácticos. Por ejemplo, en [1] proponen un modelo de programación binivel en logística humanitaria para distribuir eficazmente el apoyo a las zonas dañadas. En esta aplicación, el líder se asume que es el país afectado y debe elegir el medio de transporte y la forma de distribuir rápidamente los productos de ayuda, esto es, mi-

minimizar los tiempos de envío de los centros de acopio a las zonas dañadas; mientras que el seguidor se asume que son los países u organismos internacionales que envían ayuda pero intentando minimizar sus costos de envío del país de origen a los centros de acopio. Ellos reformulan el problema binivel en un problema de programación no lineal de un sólo nivel; dicha reformulación se logra mediante la consideración de las condiciones de optimalidad primal-dual. Además, mencionan que ese tipo de problemas pueden ser resueltos por algoritmos bien conocidos y software especializado de optimización.

Otra aplicación interesante se presenta en [2], en ese trabajo abordan un problema de minimización de transacción monetaria entre un contratista del gas natural y un concesionario de un gasoducto. El problema se modela como un problema de programación binivel lineal entero mixto, es decir, algunas de las variables de decisión pertenecen al conjunto de números enteros y otras son continuas. En este trabajo el líder representa al contratista quien debe llevar el gas natural y transferirlo por el gasoducto desde el punto de recepción hasta ser extraído en el punto de entrega. Por otro lado, el seguidor representa al concesionario del gasoducto, el cual desea minimizar los desbalances, es decir, que lo que se extrae en un punto de recepción sea la misma cantidad que se inyecta en el punto de entrega. Por la naturaleza del gas natural ésto no es posible. De tal forma que existe una diferencia diaria entre el punto de recepción y el punto de entrega, a ésta diferencia se le llama desbalance. Éste desbalance puede ser pequeño, por lo tanto es tolerable por el seguidor, pero si la diferencia de desbalance es grande, entonces el seguidor impone algunas penalizaciones al líder. Desde la perspectiva del contratista, un desbalance positivo es cuando el contratista deja gas en el gasoducto, mientras que un desbalance negativo es cuando el contratista toma gas del gasoducto. Por lo que un desbalance implica una transacción de dinero entre el contratista y el gasoducto, por lo que los autores proponen una técnica de penalización con condiciones generales. El problema binivel entero mixto lo resuelven mediante un método directo empleando algoritmos para obtener soluciones eficientes del problema de los desbalances.

En [3], el autor presenta el problema continuo de diseños de redes (CNDP, por sus siglas en inglés) y lo modela como un problema binivel. En el problema el líder minimiza la suma total de los tiempos de viaje y costos de

inversión de los incrementos de capacidad de las conexiones de la red. Mientras que el seguidor busca el equilibrio del flujo de los usuarios dentro de la red, éste es, el usuario quiere minimizar sus tiempos y costos para transmitir información a través de la red. El problema de diseño de redes es un caso particular del problema de transporte y se clasifica en dos tipos, el caso discreto y el caso continuo. En éste último es donde se enfoca el autor y saber el área que desarrolla su investigación.

Se sabe que los problemas de programación binivel son NP-hard, y esto implica que no existen algoritmos exactos que resuelvan CNDP, por lo que ellos proponen algoritmos conocidos que no usen derivadas y se basen en evaluaciones de la función objetivo. Uno de los algoritmos que utilizó fue el de Nelder-Mead, el cual es un método clásico para minimizar funciones de  $n$ -variables que mediante el uso de un simplex de  $n + 1$  vértices y por medio de reemplazos en el vértice con mayor valor en la función por otro punto derivado de tres operaciones: reflexión, contracción y expansión. Otro de los algoritmos que se aplicó es el de búsqueda dispersa, la cual es una metaheurística que se ocupa para resolver problemas de optimización. Se presentan dos ejemplos numéricos pequeños de diferente tamaño; en el primer ejemplo el algoritmo de búsqueda dispersa obtiene mejores resultados que el algoritmo de Nelder-Mead aunque el costo de cómputo es muy alto. Por otra parte, el algoritmo de Nelder-Mead reduce los tiempos de cómputo sustancialmente pero con peores soluciones que el de búsqueda dispersa. Por lo que implementa un híbrido entre ambos algoritmos obteniendo mejores soluciones con bajo costo computacional. En el segundo ejemplo, concluyendo que la hibridización mejora la calidad de las soluciones obtenidas pero empeora el costo computacional. Ambos algoritmos de manera independiente proveen menores tiempos de cómputo. Ellos atañen este detalle a la topología de la red.

Por último, pero no menos interesante se describe una aplicación de un problema de programación binivel presentado en [7]. Ahí se considera un sistema de potencia eléctrico que está expuesto a fallas en forma natural y se centra en el análisis de vulnerabilidad de sistemas de potencias. Se toman en cuenta dos criterios: (1) el N1, que es la propiedad del sistema para suministrar las demandas de potencia y energía requeridas con contingencias



que se prueban sistemáticamente y (2) el N2, que es la propiedad del sistema para suministrar las demandas de potencia y energía requeridas con contingencias definidas de forma específica. El objetivo es estabilizar el sistema en caso de fallas. En ese trabajo se investiga el sistema de potencias de tal manera que el daño es a propósito y no de forma natural. Éste problema lo modelan con programación binivel, donde el líder toma el papel del agente atacante buscando maximizar la disrupción en el sistema de carga y el seguidor es el agente defensor que intenta minimizar los daños ocasionados por el atacante. Como conclusiones obtienen resultados ligados a la realidad e identifican varios planes de ataque y áreas de prioridad para asegurar la red.

Como se pudo apreciar en ésta subsección, la programación binivel es buena herramienta para estudiar problemas de diferentes estructuras y objetivos en muy diversos enfoques.

### **2.3. Programación binivel lineal con coeficientes de intervalo**

Para concluir con el capítulo de la revisión de literatura vamos a ahondar en el tema de problemas de programación binivel lineal con coeficientes de intervalo. Después de hacer una extensa revisión de literatura solamente se encontraron dos trabajos en bajo estos supuestos. Dichos trabajos son [18] y después en [19] se estudia una extensión del primer artículo.

Las pioneras de estudiar problemas de ésta naturaleza son [18]. En este trabajo se enfocaron en el caso en que los coeficientes de intervalo aparecen exclusivamente en las funciones objetivo; ya sea en la función objetivo del líder, del seguidor o en ambas. Bajo estas condiciones calcularon el mejor y el peor valor óptimo seleccionados apropiadamente dentro del conjunto de soluciones óptimas binivel. Además, demostraron que esas dos soluciones óptimas binivel ocurren en los puntos extremos del poliedro definido por las restricciones seguidor. Mediante ejemplos ilustrativos mostraron las dificultades que

aparecen al resolver estos problemas debido a que la región inducida puede trasladarse de una arista a otra arista dependiendo de la incertidumbre en cuestión. Se llegó a la conclusión de que no es posible generalizar la selección de los valores de los coeficientes intervalo para calcular el mejor o la peor solución óptima binivel, esto es, no se sabe de antemano cuales coeficientes fijos serán obtenidos para calcular dichas soluciones extremas.

Más a detalle podemos dividir este trabajo en tres partes. Primero, se establecen propiedades para hallar el mejor y peor valor óptimo (con respecto al nivel superior) para minimizar los dos niveles del problema con coeficientes de intervalo solamente en la función objetivo del líder con variables restringidas de signo. Para hallar dichas soluciones se exploran los extremos de cada intervalo de la función objetivo del líder. Es decir, se obtienen dos problemas determinísticos al seleccionar el parámetro de cada extremo del intervalo, de tal forma que para encontrar la mejor solución óptima se eligen los límites inferiores de los coeficientes de cada intervalo de la función objetivo del líder. Similarmente, para encontrar la peor solución óptima se eligen los límites superiores de los coeficientes de cada intervalo de la función objetivo del líder ya que es un problema de minimización.

Segundo, se estudia el caso análogo pero con los coeficientes de intervalo únicamente en la función objetivo del seguidor; aquí notan que los coeficientes de intervalo del seguidor pueden afectar la región inducida y por ende la solución óptima binivel. Para localizar éstas dos soluciones extremas, se fijan en las regiones inducidas de tal modo que si el problema tiene sólo una región inducible, entonces se resuelve un sólo problema binivel determinístico en el cual coinciden la mejor y la peor solución óptima binivel. En este caso es importante notar que el parámetro elegido para cada uno de los coeficientes de intervalo de la función objetivo del seguidor puede ser cualquier valor fijo ya que no afecta la solución óptima binivel. Se debe prestar principal atención en los coeficientes de intervalo del seguidor cuando algún intervalo comprende valores positivos y negativos, entonces debe dividirse ese intervalo para obtener el intervalo con la parte positiva y el intervalo con la parte negativa. Esto es, la existencia de múltiples escenarios implica múltiples regiones inducidas, lo cual depende de los valores positivos o negativos de cada intervalo del nivel inferior sabiendo que los coeficientes de intervalo sólo están en la

función objetivo del seguidor.

En el caso en que hayan dos o más regiones inducidas, el problema se resuelve de forma similar, es decir, se contemplan todas las soluciones óptimas binivel obteniéndose una solución óptima binivel para cada una de las regiones inducidas, de allí seleccionan la mejor o peor solución óptima binivel (con respecto al líder) de tal manera que se resuelven dos problemas binivel determinísticos. Para obtener éstas dos soluciones extremas se elige cualquier valor (positivo o negativo, no ambos) para cada uno de los coeficientes de intervalo de la función objetivo del seguidor, suponiendo que los coeficientes del líder son fijos. Por lo que se puede concluir que no se puede saber de antemano en qué parámetro dentro del intervalo de la función objetivo del seguidor está la mejor o peor solución óptima binivel, es decir, el parámetro puede ser el límite inferior, límite superior o algún valor intermedio del intervalo.

Tercero, estudian el problema binivel con coeficientes intervalo en las funciones objetivo del líder y del seguidor, de ésta forma se obtienen dos problemas binivel lineales determinísticos. Para encontrar la mejor solución óptima binivel se considera el límite inferior de los coeficientes para cada intervalo en la función objetivo del líder y cualquier valor para cada intervalo de la función objetivo del seguidor. Con esto, la mejor solución óptima binivel se encuentra con su respectiva región inducible. De manera análoga, para encontrar la peor solución óptima binivel se considera el límite superior de los coeficientes para cada intervalo en la función objetivo del líder y cualquier valor para cada intervalo de la función objetivo del seguidor, de tal forma que la peor solución óptima binivel se encuentre con su respectiva región inducida. Para obtener las soluciones de los problemas binivel (en el caso que sea) proponen dos algoritmos similares al algoritmo del *Kth*-best para hallar las soluciones óptimas extremas.

Luego, en [19] encontraron algunos inconvenientes en la metodología propuesta por [18], específicamente en el algoritmo para encontrar la peor solución óptima. Ellos dan tres contraejemplos para mostrar que el algoritmo no da la peor solución óptima del problema binivel lineal con coeficientes de

intervalo en la función objetivo del líder. Analizan a detalle el algoritmo en los tres distintos casos posibles. Para el primer caso utilizan el mismo ejemplo del artículo anterior pero modificaron los coeficientes de la función objetivo del líder, de tal forma que simulan el algoritmo para encontrar una solución, mostrando que no es la peor solución óptima para el problema binivel analizado. Para el segundo contraejemplo, proponen un problema y vuelven a simular el algoritmo encontrando que el algoritmo tampoco obtiene el peor valor óptimo. Después, para el tercer contraejemplo consideran el segundo ejemplo propuesto en [18]; de nueva cuenta modificaron los parámetros del problema y las variables de las funciones objetivo pero manteniendo las mismas restricciones y de nuevo encuentran que el algoritmo no arroja el peor valor óptimo. Después de validar su hipótesis, hicieron una modificación importante del algoritmo y obtuvieron buenos resultados, ese algoritmo revisado si es capaz de obtener el óptimo en el peor escenario.

Ésta tesis se enfoca en un problema de programación binivel lineal con coeficientes de intervalo en los lados derechos de las restricciones del seguidor. Se considerarán restricciones de desigualdad y variables restringidas de signo. La presencia de dichos coeficientes que denotan incertidumbre en el nivel inferior impacta en la región factible del seguidor de tal forma que las caras del poliedro formado por las restricciones del nivel inferior van cambiando dependiendo del valor seleccionado dentro del intervalo dado. Como consecuencia, éstos mismos coeficientes de intervalo también afecta la región inducida del problema binivel, ya que ésta se traslada, lo cual añade más complejidad al problema en cuestión. Es importante notar que si los lados derechos son conocidos (llámese un *escenario*) el problema resultante es un problema binivel lineal, y dicha clase de problemas ya ha sido muy estudiada.

El principal objetivo que se pretendía conseguir era encontrar una solución óptima binivel que sea factible para todos los escenarios, pero esto no es posible ya que una solución óptima binivel para un escenario, no es ni siquiera solución factible binivel para muchos otros escenarios. Es por esto que, éste estudio se centra en encontrar una solución factible binivel robusta de tal forma que sea una solución factible para todos los escenarios. Después, hacer un análisis para actualizar la solución óptima binivel del *escenario* real partiendo de dicha solución óptima binivel robusta.

# Capítulo 3

## Definición del problema binivel y conceptos

### 3.1. Definición del modelo matemático

Considere el problema binivel definido por:

$$\max_{x \geq 0, y \geq 0} c^t x + d^t y \quad (3.1.1)$$

en el cual  $y$  resuelve

$$\max_{y \geq 0} u^t x + v^t y \quad (3.1.2)$$

$$\text{sujeto a } Ax + By \leq b \quad (3.1.3)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^{n_1}$  es la variable controlada por el líder,  $y \in \mathbb{R}^{n_2}$  es la variable controlada por el seguidor. Además, considere los parámetros del problema (3.1.1)-(3.1.3) de la siguiente manera:  $c, u \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $d, v \in \mathbb{R}^{n_2}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  tal que  $b \in [\underline{b}, \bar{b}]$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n_1}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{m \times n_2}$ . El superíndice  $t$  indica la transpuesta.

Siguiendo la notación descrita por [8] vamos a introducir los conceptos necesarios para el estudio del problema (3.1.1)-(3.1.3).

**Definición 3.1.1.** Llamaremos un escenario  $b$  al caso en que  $b \in [\underline{b}, \bar{b}]$  es conocido de antemano.

**Definición 3.1.2.** Sea  $\Omega_b$  el conjunto de restricciones dado por  $\Omega_b = \{(x, y) : Ax + By \leq b\}$  para un escenario en particular  $b \in [\underline{b}, \bar{b}]$ .

**Definición 3.1.3.** El conjunto factible del seguidor para una  $x$  fija está dado por  $\Omega_b(x) = \{y : y \leq b - Ax\}$  para  $b \in [\underline{b}, \bar{b}]$ .

Llamaremos a  $M_b(x)$  como el conjunto racional de reacción; es decir, el conjunto de soluciones del seguidor tomadas de forma inteligente dada una solución  $x$  del líder para un escenario particular  $b \in [\underline{b}, \bar{b}]$ . Es fácil ver que  $M_b(x) \in \Omega_b(x)$ .

**Definición 3.1.4.** Sea  $M_b(x) = \text{Argmin}\{u^t x + v^t y : By \leq b - Ax\}$  para una  $x$  fija y un escenario  $b \in [\underline{b}, \bar{b}]$ .

**Definición 3.1.5.** La región inducida ( $IR$ , por sus siglas en inglés) del problema para un escenario particular  $b \in [\underline{b}, \bar{b}]$  está definida como sigue  $IR_b = \{(x, y) : y \in M_b(x)\}$ .

**Definición 3.1.6.** Una solución  $(x, y)$  será considerada como factible binivel para un escenario  $b \in [\underline{b}, \bar{b}]$  si  $(x, y) \in IR_b$ .

**Definición 3.1.7.** La solución óptima binivel  $(x^*, y^*)$  para un escenario  $b \in [\underline{b}, \bar{b}]$  es aquella que cumple lo siguiente:

- I.  $(x^*, y^*) \in IR_b$ .
- II.  $c^t x + d^t y \leq c^t x^* + d^t y^*, \forall (x, y) \in IR_b$ .

Para garantizar que el problema binivel dado por (3.1.1)-(3.1.3) esté bien definido vamos a hacer el supuesto clásico de que  $\Omega$  es no vacío y compacto. Además se considera que para cada decisión hecha por el líder, el seguidor tendrá oportunidad de responder, es decir  $M_b(x) \neq \emptyset$ . Es bien sabido que aunque se consideren estos supuestos el problema en cuestión puede no tener solución, es por esto que también vamos a asumir la versión optimista del problema. Este enfoque optimista corresponde al caso en que el nivel inferior dado por (3.1.2)-(3.1.3) tenga múltiples soluciones óptimas, entonces el líder seleccionará la que más le convenga a él sabiendo que para el seguidor cualquiera de esas soluciones le dan el mismo valor de su función objetivo. En el caso en que el nivel inferior tenga solución única entonces el problema está perfectamente bien definido.

*Observación 3.1.8.* En este trabajo no se considera la existencia de restricciones del líder (que involucren o no a las variables del nivel inferior) porque pueden omitir varios escenarios posibles además de dejar disconexa la región inducida. Entonces, podemos decir que  $M_b(x) = IR_b, \forall b \in [\underline{b}, \bar{b}]$ .

En el caso en que se conoce con exactitud el valor de  $b \in [\underline{b}, \bar{b}]$  el problema del nivel inferior puede resolverse de manera óptima y por consecuencia, el óptimo binivel puede ser obtenido. Pero en el caso general, es decir, cuando el valor de  $b$  no se conoce a priori y solo sabemos el intervalo en el que varía no podemos encontrar con exactitud el óptimo del nivel inferior. Supongamos que se resuelve dicho problema para un escenario  $b_1$  y obtenemos la solución óptima binivel pero en la realidad ese escenario  $b_1$  no ocurrió sino que fue otro escenario  $b_2$ . Entonces, puede darse el caso en que la solución óptima binivel para el escenario  $b_1$  no sea factible para el escenario  $b_2$ . De aquí que la solución óptima de un problema binivel con coeficientes intervalo en los lados derechos de las restricciones del nivel inferior debe definirse de tal forma que se garantice la factibilidad binivel.

Entonces, para garantizar la factibilidad binivel vamos a introducir unos conceptos que serán considerados durante este trabajo.

**Definición 3.1.9.** Una solución robusta del problema inferior es aquella  $y$

tal que sea factible para todos los escenarios posibles.

Al variar el escenario lo que en realidad está ocurriendo es que la región factible del problema del nivel inferior está cambiando. A su vez, los conjuntos  $\Omega_b$ ,  $\Omega_b(x)$ ,  $M_b(x)$  y  $IR_b$  se modifican dependiendo el valor que tome  $b$ . Para identificar a las soluciones robustas debemos identificar lo siguiente:

- I. la región factible más chica  $\Omega_{\underline{b}} = \{(x, y) : Ax + By \leq \underline{b}\}$ .
- II. la región factible más grande  $\Omega_{\bar{b}} = \{(x, y) : Ax + By \leq \bar{b}\}$ .

**Definición 3.1.10.** Una solución robusta binivel debe cumplir que  $y \in \Omega_b(x)$ ,  $\forall b \in [\underline{b}, \bar{b}]$ . Es decir, que  $y \in M_{\underline{b}}(x)$ .

*Observación 3.1.11.* Considere un escenario  $b$  tal que  $b \neq \underline{b}$ . Entonces es evidente que si  $y \in M_b(x)$  entonces  $y \notin \Omega_{\underline{b}}(x)$ .

**Definición 3.1.12.** Sea  $RIR$  la región inducida robusta definida como:  $RIR = \{(x, y) : y \in M_{\underline{b}}(x)\}$ .

Entonces el problema binivel lineal con coeficientes intervalo en los lados derechos de las restricciones del nivel inferior definido por (3.1.1)-(3.1.3) lo reescribimos como:

$$\max_{x \geq 0, y \geq 0} \{c^t x + d^t y : (x, y) \in RIR\} \quad (3.1.4)$$

*Observación 3.1.13.* Es conveniente notar que  $RIR = IR_{\underline{b}}$ .

**Lema 3.1.14.**  $RIR$  es factible para todos los escenarios.

Demostración: Queremos demostrar que  $RIR \subset \Omega_{b'}(x), \forall b' \in [\underline{b}, \bar{b}]$ . Sea  $b' > \underline{b}$ , esto es, componente a componente  $b'_i > \underline{b}_i \forall i$ . Por definición de



la  $RIR$  tenemos que  $y \in M_{\underline{b}}(x)$  lo que implica que  $y \in \Omega_{\underline{b}}(x)$ , entonces  $By \leq \underline{b} - Ax$ . Además, como  $b' > \underline{b}$  se cumple que  $By \leq b' - Ax$  lo cual implica  $y \in \Omega_{b'}(x)$ . Por lo tanto,  $RIR \subset \Omega_{b'}(x)$ .

## 3.2. Ejemplo ilustrativo

El problema que nosotros vamos a analizar y resolver es el que está definido en (3.1.4). En la siguiente sección vamos a mostrar un ejemplo ilustrativo y su gráfica correspondiente para mostrar las complicaciones de este tipo de problemas.

Con el objetivo de mostrar las complicaciones derivadas de estos problemas vamos a proponer el siguiente problema de programación binivel lineal con coeficientes intervalos en los lados derechos de las restricciones del seguidor.

Ejemplo: Considere el siguiente problema:

$$\max_{x \geq 0, y \geq 0} 4x - 2y \quad (3.2.1)$$

en el cual  $y$  resuelve

$$\max_{y \geq 0} 3x + 5y \quad (3.2.2)$$

$$\text{sujeto a: } R1_b : 3x - y \leq [9, 15] \quad (3.2.3)$$

$$R2_b : 2y \leq [12, 15] \quad (3.2.4)$$

$$R3_b : 3x + 2y \leq [18, 20] \quad (3.2.5)$$

Es importante notar que  $\underline{b}$  es la región más pequeña y corresponde a los límites inferiores del intervalo que define los lados derechos. De manera análoga,  $\bar{b}$  es la región más grande y corresponde a los límites superiores de dichos intervalos.

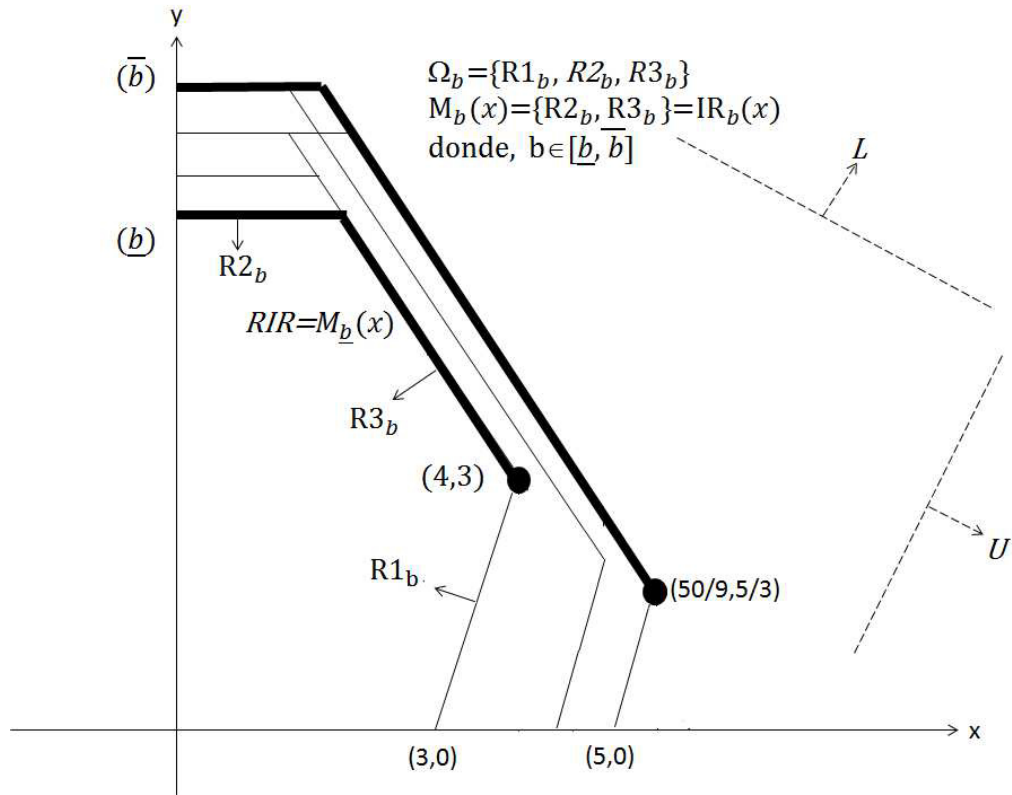


Figura 3.1: Ejemplo ilustrativo

Además, en la figura 3.1 se puede apreciar que el punto  $(50/9, 5/3)$  es una solución óptima para el escenario  $\bar{b}$ ; pero no es solución factible para muchos otros escenarios.

Por otro lado, el punto  $(4,3)$  es una solución óptima para el escenario  $\underline{b}$  y es solución factible para cualquier otro escenario; por lo cual esta solución se considera una solución robusta binivel. Por consecuencia, los puntos contenidos en la región inducible para el escenario  $\underline{b}$  son soluciones factibles para el problema binivel en cualquier escenario.

Esto viene a dar validez a la solución robusta binivel. Supongamos el caso

en que una empresa tiene este problema jerárquico en donde necesita decidir la producción del siguiente mes, en este caso los lados derechos pueden verse como las capacidades de producción de la empresa. Si se considera el caso de producción máxima, es decir, cuando los intervalos de los lados derechos están en el límite superior, al resolver el problema obtendremos una solución óptima y vamos a interpretarla como la cantidad de productos que hay que fabricar. Pero, en el caso en que lo que haya ocurrido en realidad no haya sido el escenario de producción máxima, digamos el escenario extremo de producción mínima. Entonces, el plan de producción realizado por la gerencia de la empresa no tiene sentido al ser infactible para este escenario real.

Por lo tanto, este problema no puede verse tan trivial como obtener la solución óptima para el mejor caso, el caso intermedio o algún otro que produzca infactibilidad en el caso que ocurrió en realidad.

De este ejemplo podemos apreciar que la región inducible del problema binivel con coeficientes intervalo en los lados derechos ( $b$ ) depende directamente del valor del escenario  $b$ . El hecho de que la forma de la región inducible no se conozca con exactitud, viene a reafirmar la aseveración de que no se puede obtener una solución óptima en general para el problema (3.1.1)-(3.1.3). Es decir, no se puede obtener el óptimo sin conocer el escenario ocurrido, es por esto que la consideración de una solución robusta binivel, i.e. que sea factible para cualquier escenario, tiene sentido.

Por último, es conveniente hacer la observación que en cualquier escenario se mantiene la forma de la región inducible (en negrita en la figura 3.1); dicha región solo se hace más grande o más corta dependiendo el escenario considerado. Este hecho, podrá ser considerado a la hora de proponer un algoritmo para resolver el problema.

# Capítulo 4

## Metodología para obtener la solución óptima binivel

---

En este capítulo se va a hacer un estudio de post-optimalidad partiendo de la solución robusta binivel definida en el capítulo anterior. Primero, se va a mostrar la aplicación del análisis de sensibilidad para ver que pasa con los cambios en los lados derechos de las restricciones y su relación con los conceptos necesarios de programación binivel (conjunto racional de reacción, región inducida, solución óptima binivel). Después, se estudia la forma de pasar de la solución robusta binivel hacia la solución del *escenario* real analizando únicamente las restricciones de atadura en el vértice óptimo. Como resultado de éste análisis, se llega a una metodología que parece funcionar adecuadamente con estos fines. Por último, se dará robustez a la metodología propuesta mediante el análisis de varios *escenarios* y ejemplos.

## 4.1. Aplicación de análisis de sensibilidad en el nivel inferior

Al obtener una solución robusta binivel estamos obteniendo el óptimo en el peor escenario (caso más chico) y por lo tanto, subestimando el valor de la función objetivo para muchos otro escenarios. Es por ésto que ahora se busca brindar más información al tomador de decisiones sobre el escenario real.

Consideremos el caso en que ocurrió un escenario  $b'$ , donde  $b' \neq \underline{b}$ . Hasta este momento nosotros tenemos la solución robusta binivel óptima para el escenario  $\underline{b}$ , esto es,  $(x^*, y^*)_{\underline{b}} = (x_{\underline{b}}^*, y_{\underline{b}}^*)$ .

Ahora bien, como tenemos un cambio en el vector de los lados derechos de las restricciones del seguidor, esto es  $b'$ , podemos aplicar análisis de sensibilidad y actualizar o reoptimizar la solución óptima del seguidor. Sin embargo, hay que tener en cuenta que al hacer ese cambio en el vector  $b$ , no hay garantía que el óptimo para el líder se mantenga igual.

Hay que recordar que la solución robusta binivel puede no pertenecer a la región inducible de otros escenarios, esto es,  $(x_{\underline{b}}^*, y_{\underline{b}}^*) \notin IR_{b'}$ . Entonces al encontrar  $y_{b'}^*$  mediante análisis de sensibilidad en el nivel inferior considerando  $x_{\underline{b}}^*$  como fija obtendremos un punto  $(x_{\underline{b}}^*, y_{b'}^*) \in IR_{b'}$ . En otras palabras, partir de la solución robusta binivel nos permite alcanzar una solución binivel factible para el escenario real. Esto nos lleva a preguntarnos si esta solución es óptima para el escenario  $b'$ .

Para ejemplificar vamos a considerar el siguiente problema,

$$\max_{x \geq 0} \quad 4x - 2y_1 - y_2 \quad (4.1.1)$$

en el cual  $y$  resuelve

$$\max_{y_1 \geq 0, y_2 \geq 0} \quad 3y_1 + 5y_2 \quad (4.1.2)$$

$$\text{sujeto a: } 3x + y_1 \leq [4, 7] \quad (4.1.3)$$

$$2y_2 \leq [12, 15] \quad (4.1.4)$$

$$x + 3y_1 + 2y_2 \leq [18, 21] \quad (4.1.5)$$

Si nos enfocamos en el problema del seguidor cuando el líder ha fijado su decisión y además, consideremos el escenario  $\underline{b}$ , tenemos que,

$$\max_{y_1 \geq 0, y_2 \geq 0} 3y_1 + 5y_2 \quad (4.1.6)$$

$$\text{sujeto a: } (R_1) \quad y_1 \leq -3x + 4 \quad (4.1.7)$$

$$(R_2) \quad 2y_2 \leq 12 \quad (4.1.8)$$

$$(R_3) \quad 3y_1 + 2y_2 \leq -x + 18 \quad (4.1.9)$$

La representación gráfica del ejemplo anterior se ilustra en la figura 4.1. De donde podemos apreciar que la solución robusta binivel está dada por  $(x_{\underline{b}}^*, y_{1\underline{b}}^*, y_{2\underline{b}}^*) = (\frac{4}{3}, 0, 6)$  con  $F^*(x_{\underline{b}}^*, y_{1\underline{b}}^*, y_{2\underline{b}}^*) = \frac{-2}{3}$  y  $f^* = (y_{1\underline{b}}^*, y_{2\underline{b}}^*) = 30$ .

Si fijamos  $x_{\underline{b}}^*$  y aplicamos el análisis de sensibilidad al nivel inferior hallamos que los precios sombra son  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (3, \frac{5}{2}, 0)$  y los intervalos permisibles para los lados derechos están dados por  $b_1 \leq \frac{50}{9}$ ,  $b_2 \leq \frac{50}{3}$  y  $b_3 \leq \infty$  (nótese que al ser el caso  $\underline{b}$ , sus valores no pueden ser menores a los actuales debido a la definición del coeficiente intervalo).

Luego, considere el escenario  $b' = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix}$ .

Recuerde que el objetivo es actualizar o reoptimizar la solución óptima binivel partiendo de la solución robusta. Es decir, sin volver a resolver el problema binivel para el escenario  $b'$ , ver la figura (4.2).

Al actualizar la solución óptima del nivel inferior con la técnica tradicional de análisis de sensibilidad obtenemos que  $(x_{\underline{b}'}^*, y_{1\underline{b}'}^*, y_{2\underline{b}'}^*) = (\frac{4}{3}, 1, 6)$  con

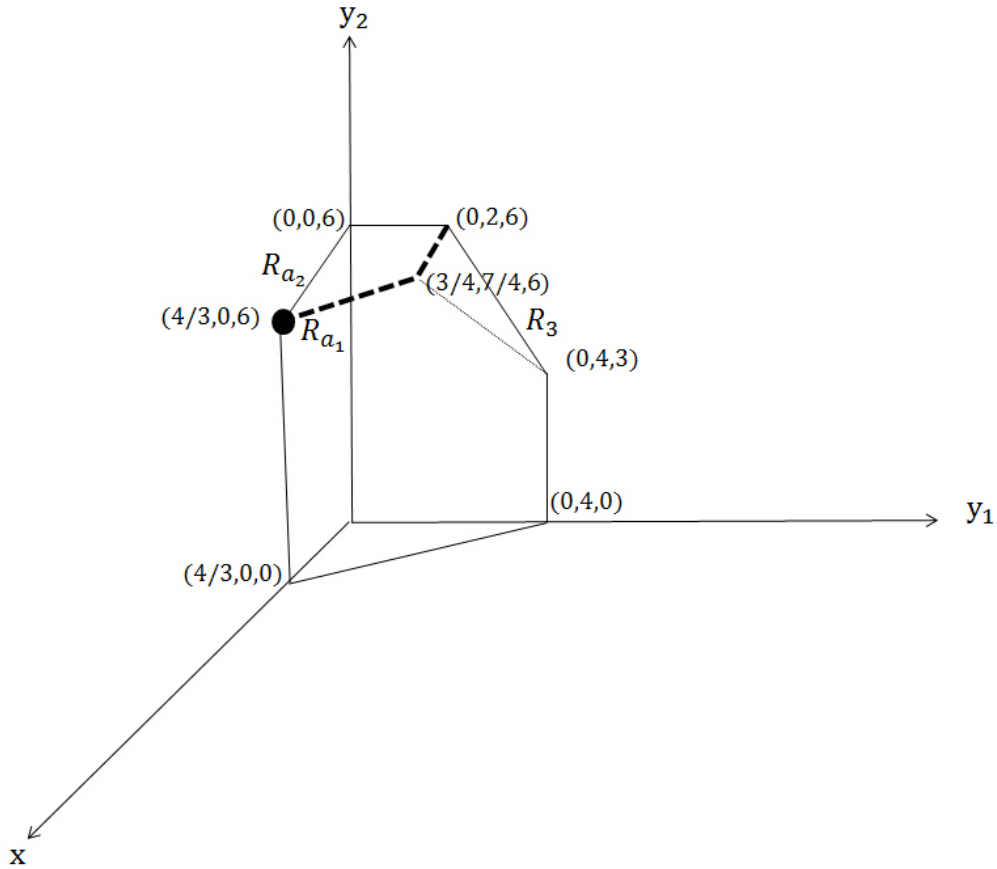


Figura 4.1: Representación del problema (4.1.1-4.1.5) con respecto al escenario más pequeño

$f^*(y_{1b}^*, y_{2b}^*) = 33$ . Cómo se puede ver en la figura 4.3, el punto actualizado pertenece a la región inducida IR, pero no está en un vértice y por lo tanto no es el óptimo.

El problema consiste en actualizar la variable del líder sin tener que emplear otras técnicas para resolver el respectivo problema binivel lineal. El análisis de sensibilidad aplicado al nivel inferior sirve para actualizar la solución del seguidor pero no nos conduce a optimalidad ni nos brinda información sobre la actualización de la variable del líder.

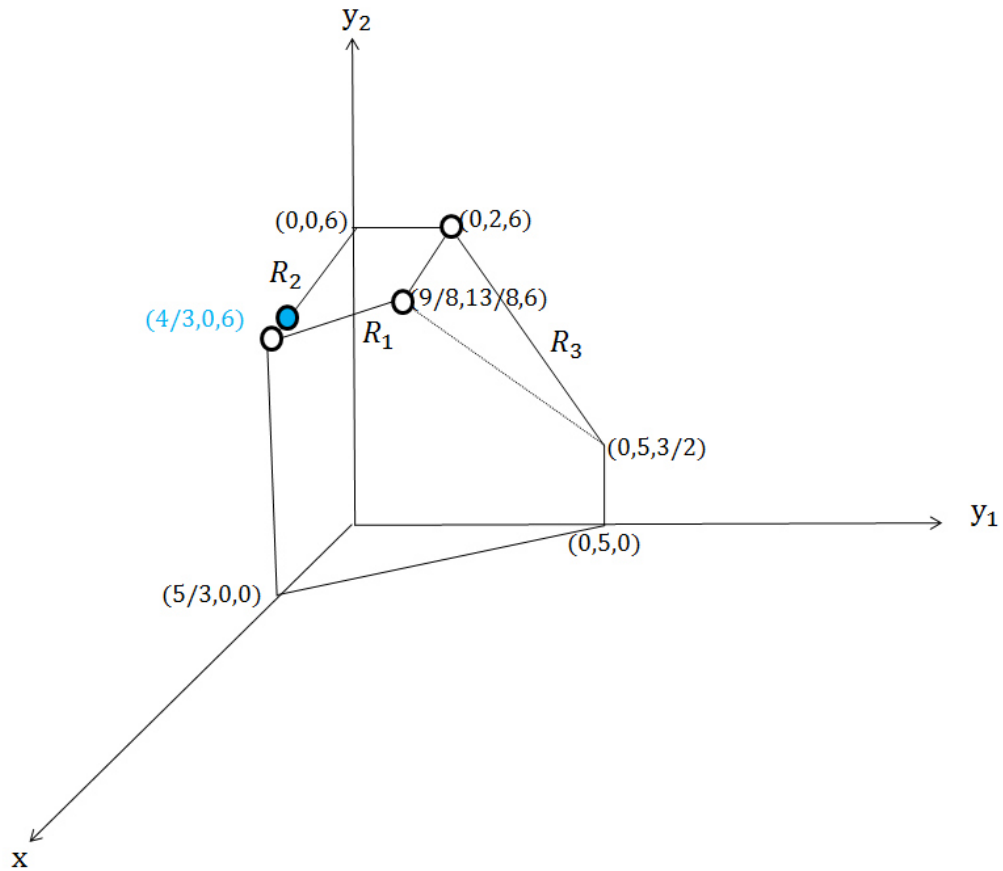


Figura 4.2: Ilustración del escenario  $b'$

## 4.2. Análisis en las restricciones de atadura

Por otro lado, el hecho de que la región inducida mantenga su forma nos permite analizar a las restricciones de atadura para el caso  $\underline{b}$ .



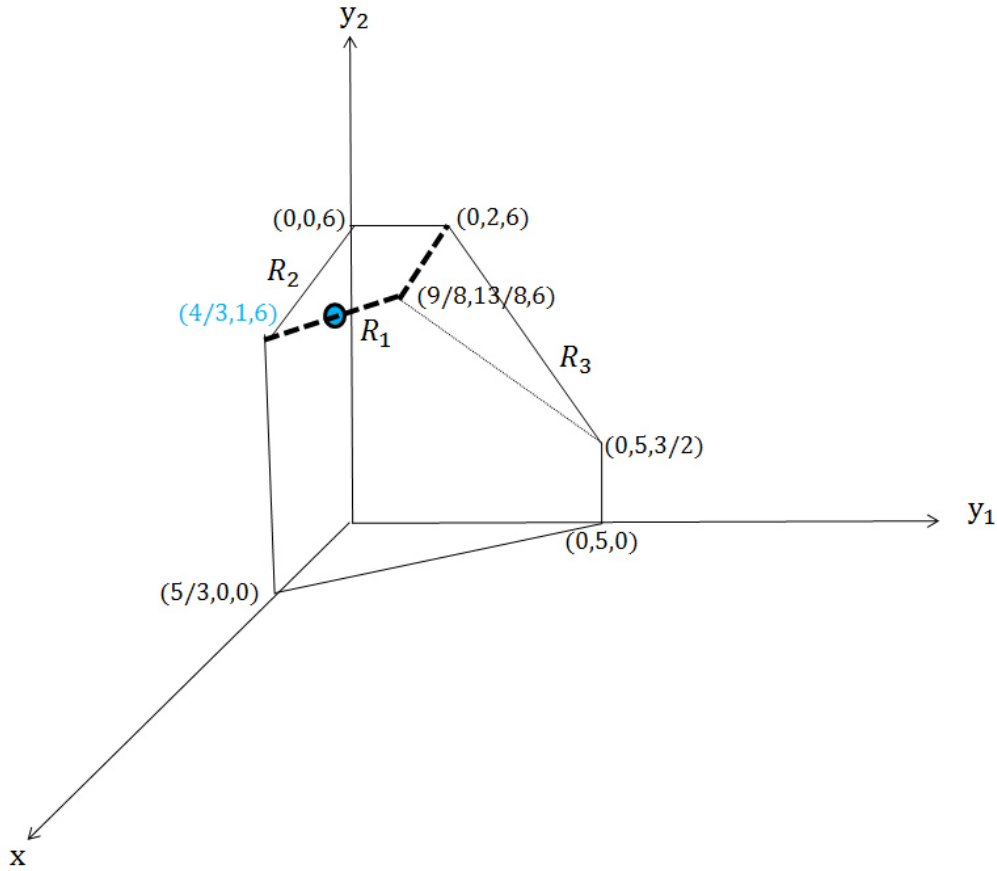


Figura 4.3: Solución actualizada con análisis de sensibilidad

En este ejemplo vemos que  $R_1$  y  $R_2$  son restricciones de atadura en el escenario  $\underline{b}$ . Al saber esto, podemos considerar el sistema de ecuaciones formado por dichas restricciones y obtener el valor de  $x_{b'}^*$ . Es importante mencionar que dicha actualización de  $x_{b'}^*$  se hace antes de actualizar la solución del nivel inferior, es decir, el uso de análisis de sensibilidad descrito anteriormente es independiente a esto.

Entonces, considerando  $(y_{1b}^*, y_{2b}^*) = (0, 6)$  y las restricciones  $R_1 : 3x + y_1 = 5$  y  $R_2 : 2y_2 = 12$  se obtiene el valor de  $x_{b'}^* = \frac{5}{3}$ . Ahora, con este valor  $x_{b'}^*$  hay que resolver el nivel inferior para obtener  $(y_{1b'}^*, y_{2b'}^*) = (0, 6)$  con

$$F^*(x_{b'}^*, y_{1b'}^*, y_{2b'}^*) = \frac{2}{3}.$$

En la siguiente figura 4.4 se aprecia este punto y se confirma que las restricciones de atadura permanecen siendo las mismas.

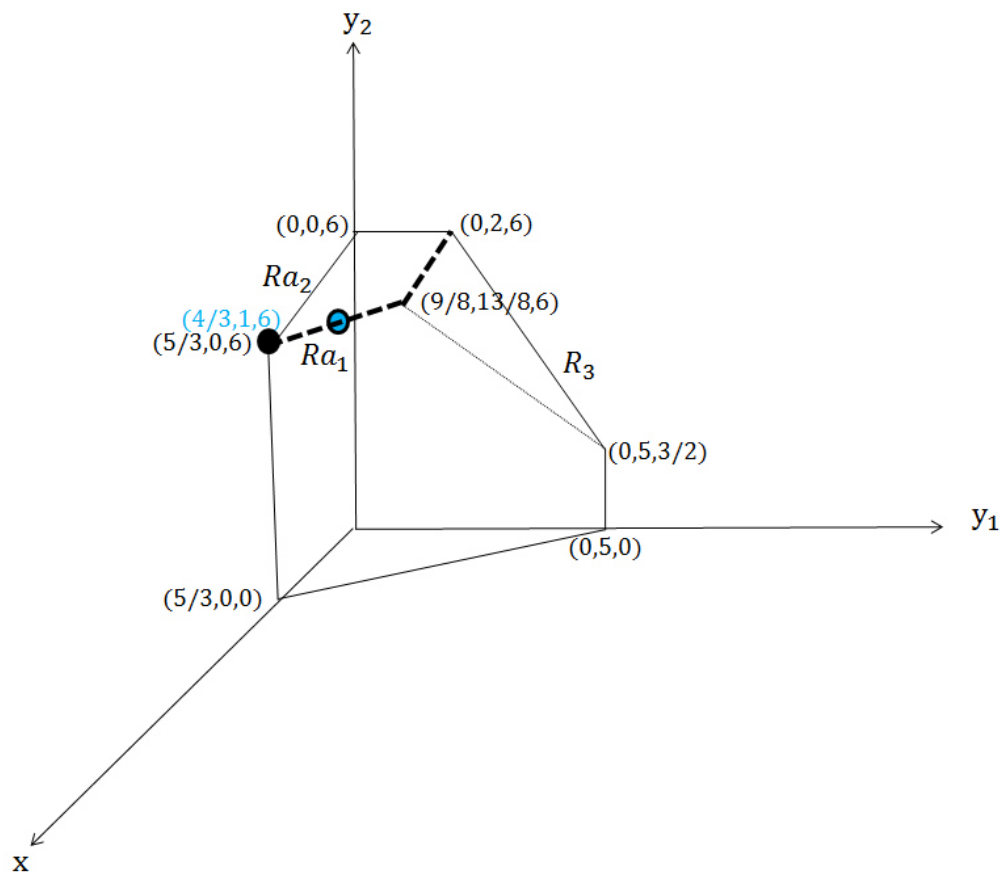


Figura 4.4: Punto óptimo después de la actualización

### 4.3. Metodología propuesta

Para validar la idea descrita anteriormente, podemos observar que con  $(x_b^*, y_{1b'}^*, y_{2b'}^*) = (\frac{4}{3}, 1, 6)$  el valor de la función objetivo del líder  $F(\frac{4}{3}, 1, 6) = -8/3$ . En cambio, con  $(x_{b'}^*, y_{1b'}^*, y_{2b'}^*) = (\frac{5}{3}, 0, 6)$  obtenemos  $F(\frac{5}{3}, 0, 6) = \frac{2}{3}$ .

Con éste análisis hemos actualizado la solución óptima del escenario real partiendo de la solución robusta binivel. El esquema de la metodología propuesta es el siguiente.

*Metodología diseñada para optimizar el problema binivel*

1. Halle  $(x_b^*, y_b^*)$ .
2. Identifique las restricciones de atadura  $R_{ai}$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ .
3. Considere el escenario real  $b'$  y resuelva el sistema de ecuaciones formado por las restricciones de atadura  $R_{ai}$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ . Obtenga  $x_{b'}^*$ .
4. Resuelva el problema lineal del nivel inferior considerando  $x_{b'}^*$ . para obtener  $y_{b'}^*$ .
5. Evalúe  $F^*(x_{b'}^*, y_{b'}^*)$ .

Si el tomador de decisiones no dispone de los recursos para resolver el problema del nivel inferior, puede aplicar análisis de sensibilidad en el nivel inferior considerando  $x_b^*$  como fija y obtener un punto factible binivel  $(x_b^*, y_{b'}^*)$  para el escenario  $b'$ . Aunque al emplear esta estrategia no hay información sobre la distancia a la que se encuentre este punto del óptimo real, y por consecuencia, no hay información de la holgura de optimalidad.

## 4.4. Robustez de la metodología

Para mostrar la robustez de la metodología propuesta vamos a analizar el caso  $\bar{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 15 \\ 21 \end{pmatrix}$ . En la figura 4.5 vemos que el óptimo es  $(x_b^*, y_{1\bar{b}}^*, y_{2\bar{b}}^*) = (\frac{7}{3}, 0, \frac{15}{2})$  con  $F^*(\frac{7}{3}, 0, \frac{15}{2}) = 11/6$ .

También se puede observar que la región inducida mantiene su forma y el óptimo permanece determinado por el mismo conjunto de restricciones de atadura.

Entonces, en base al esquema propuesto debemos checar que  $R_1$  y  $R_2$  son las restricciones de atadura y considerando  $(y_{1\bar{b}}^*, y_{2\bar{b}}^*) = (0, 6)$  hallamos que  $x_b^* = \frac{7}{3}$ . Al resolver el nivel inferior con  $x_b^* = \frac{7}{3}$  fija, obtenemos que  $(y_{1\bar{b}}^*, y_{2\bar{b}}^*) = (0, \frac{15}{2})$  lo cual resulta en  $F^*(\frac{7}{3}, 0, \frac{15}{2}) = \frac{11}{6}$  y coincide con el óptimo mostrado en la figura 4.5.

Con la finalidad de evidenciar el buen funcionamiento y la aplicabilidad de la metodología propuesta en esta investigación, vamos a analizar otro ejemplo. En este caso, el **Ejemplo ilustrativo 2** estará dado por:

$$\max_{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0} 7x_1 + 10x_2 + 5y \quad (4.4.1)$$

en el cual  $y$  resuelve

$$\max_{y \geq 0} 20y \quad (4.4.2)$$

$$\text{sujeto a:} \quad -x_2 + y \leq [2, 5] \quad (4.4.3)$$

$$x_1 \leq [6, 9] \quad (4.4.4)$$

$$20x_1 + 3x_2 + 13y \leq [90, 93] \quad (4.4.5)$$

$$2x_1 + 3x_2 + 4y \leq [32, 35] \quad (4.4.6)$$

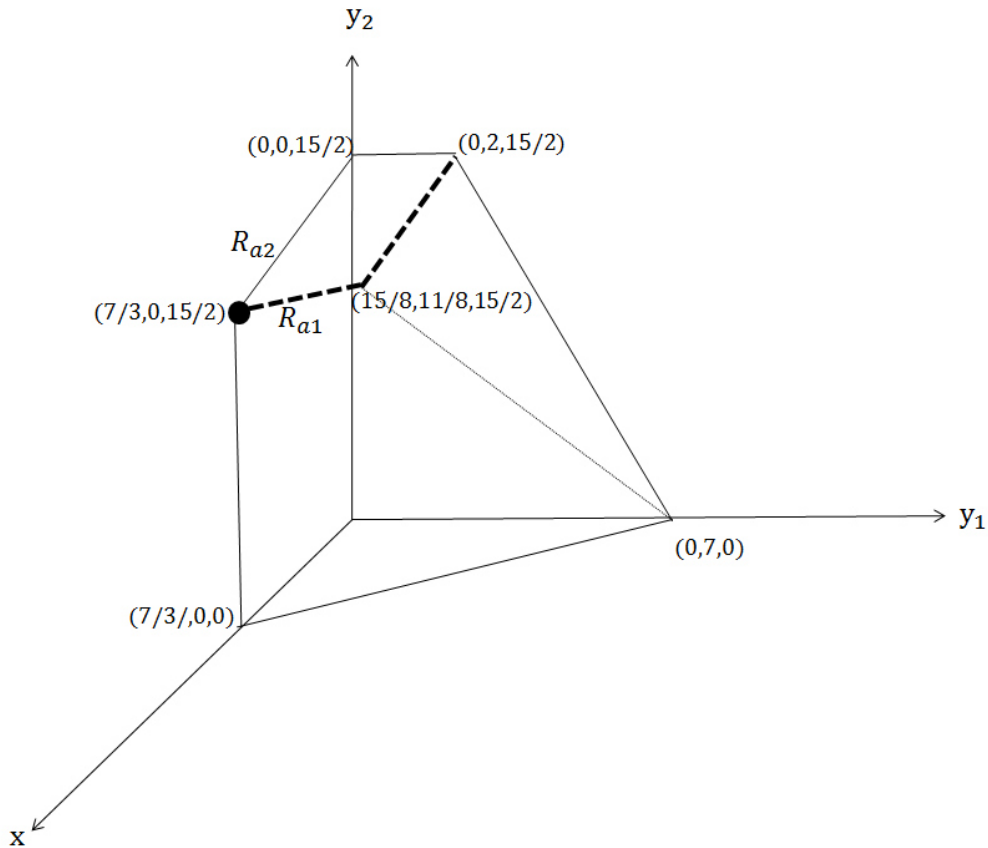


Figura 4.5: Ilustración del escenario  $\bar{b}$

Primero vamos a analizar el problema del nivel inferior cuando en el nivel superior se ha fijado una decisión  $(x_1, x_2)$ . Por ejemplo, si consideramos el escenario  $\underline{b}$ , obtenemos:

$$\max_{y \geq 0} \quad 20y \quad (4.4.7)$$

$$\text{sujeto a: } (R_1) \quad y \leq \quad \quad \quad x_2 + 2 \quad (4.4.8)$$

$$(R_2) \quad 0 \leq \quad -x_1 \quad + 6 \quad (4.4.9)$$

$$(R_3) \quad 13y \leq -20x_1 - 3x_2 + 90 \quad (4.4.10)$$

$$(R_4) \quad 4y \leq -2x_1 - 3x_2 + 32 \quad (4.4.11)$$

La representación geométrica de las restricciones que delimitan la región factible del ejemplo anterior se ilustra en la figura 4.6. De ahí podemos apreciar que la solución robusta binivel está dada por  $(x_{1b}^*, x_{2b}^*, y_b^*) = (\frac{29}{9}, \frac{230}{27}, 0)$  con  $F^*(x_{1b}^*, x_{2b}^*, y_b^*) = \frac{2909}{27}$  y  $f^* = (y_b^*) = 0$ .

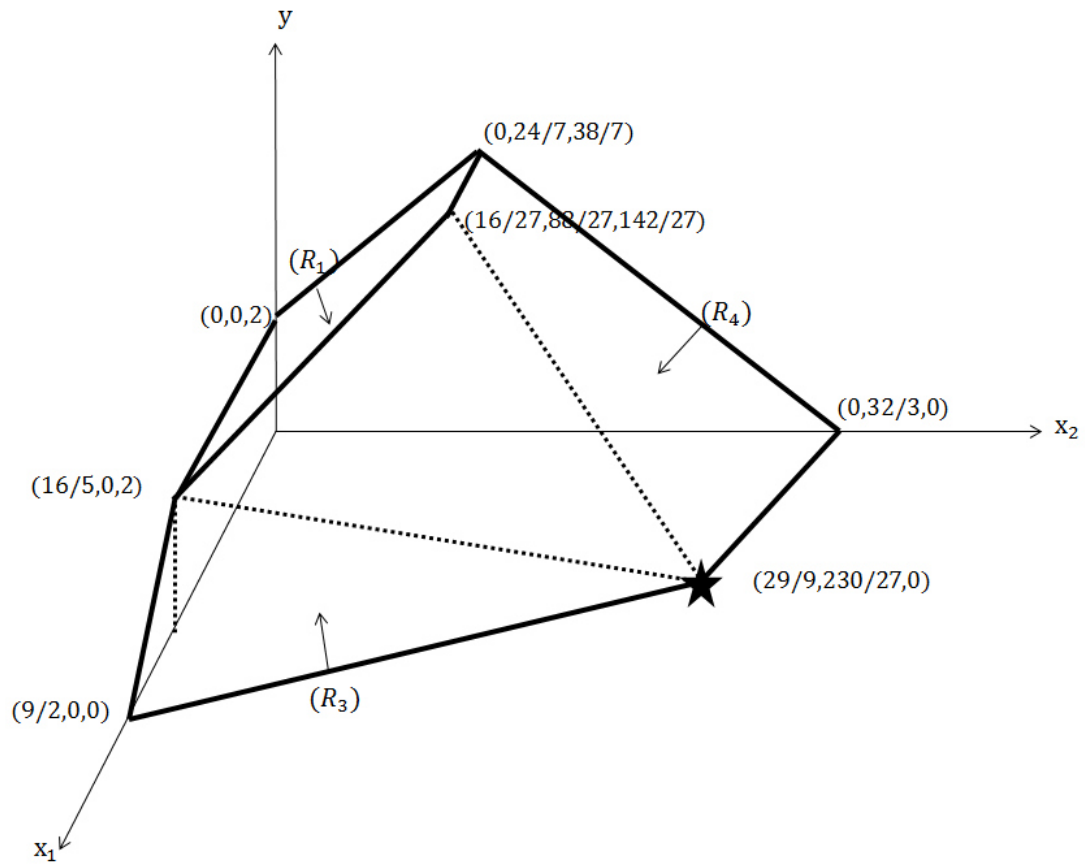


Figura 4.6: Representación del ejemplo ilustrativo 2 en el escenario  $\underline{b}$

Además se observa que las restricciones de atadura son  $R_3 : 20x_1 + 3x_2 + 13y \leq 90$  y  $R_4 : 2x_1 + 3x_2 + 4y \leq 32$ , generando la región inducida tal como se muestra en la figura 4.7.

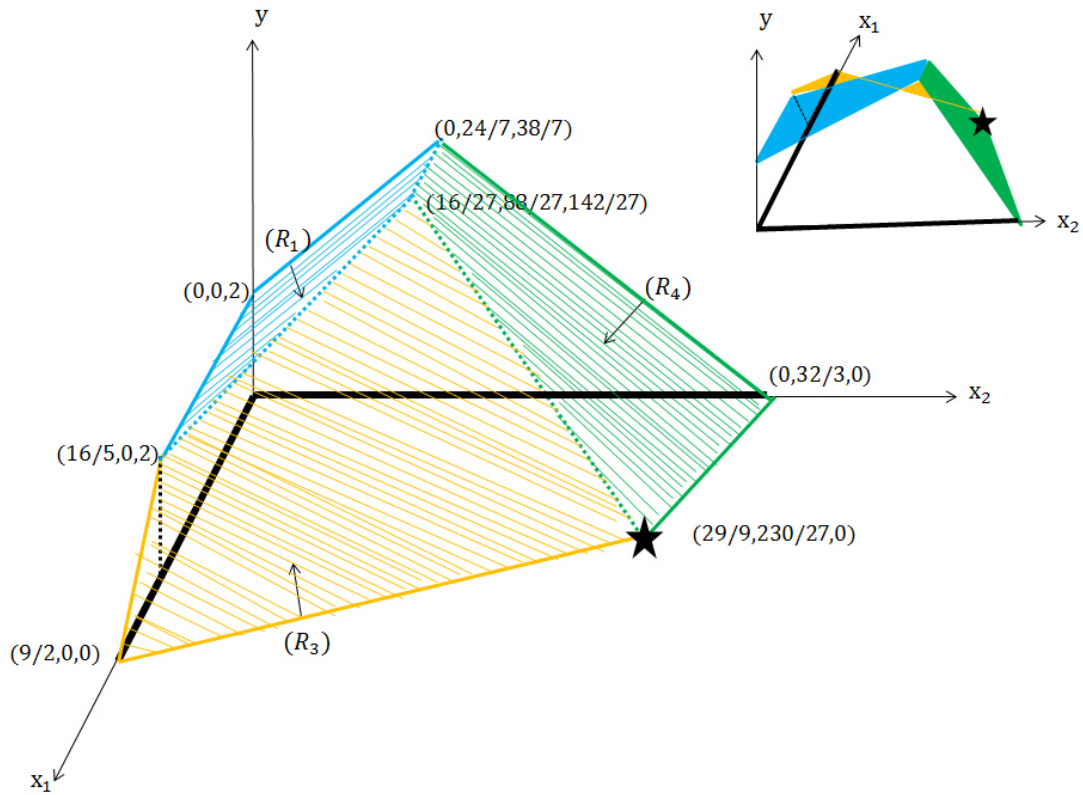


Figura 4.7: Representación del ejemplo ilustrativo 2 en el escenario  $\underline{b}$ , con IR en color azul, verde y amarillo

Ahora considere el escenario  $b' = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 91 \\ 33 \end{pmatrix}$ .

Como se mencionó anteriormente, el objetivo es actualizar la solución óptima binivel partiendo de la solución robusta. Es decir, sin volver a resolver el problema binivel para el escenario  $b'$ .

Aplicando la metodología propuesta en éste estudio obtenemos, la solución robusta  $(x_{1b}^*, x_{2b}^*, y_b^*) = (\frac{29}{9}, \frac{230}{27}, 0)$ . De aquí considere  $y_b^* = 0$ .

Teniendo en cuenta que la región inducida se mantiene con la misma forma, entonces las restricciones de atadura son las mismas para  $b'$ ; esto es,  $R_3 : 20x_1 + 3x_2 + 13y \leq 91$  y  $R_4 : 2x_1 + 3x_2 + 4y \leq 33$ . Resolviendo el sistema de ecuaciones formado por las restricciones de atadura se obtiene  $(x_{1b'}^*, x_{2b'}^*) = (\frac{29}{9}, \frac{239}{27})$ .

El siguiente paso del algoritmo es resolver el problema lineal del nivel inferior considerando  $x_{1b'}^*$  y  $x_{2b'}^*$  para obtener  $y_{b'}^* = 0$ . Por último, se evalúa  $F(x_{1b'}^*, x_{2b'}^*, y_{b'}^*) = F(\frac{29}{9}, \frac{239}{27}, 0) = \frac{2999}{27}$ .

De manera que al actualizar la solución óptimo binivel para el escenario  $b'$ , éste es  $(\frac{29}{9}, \frac{239}{27}, 0)$ , encontrado con la metodología, coincide con la solución óptimo binivel obtenido desde una perspectiva geométrica como se puede ver en la figura 4.8.

Además se observa que las restricciones de atadura son  $R_3 : 20x_1 + 3x_2 + 13y \leq 91$  y  $R_4 : 2x_1 + 3x_2 + 4y \leq 33$ . generando la región inducida tal como se muestra en la figura 4.9.

Por último, vamos a analizar de manera similar la afectación de la solución óptima en el escenario del extremo derecho de los coeficientes intervalo,

es decir, cuando  $\bar{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 93 \\ 35 \end{pmatrix}$ .

Haciendo énfasis en la eficiencia de la metodología se corroborará la robustez analizando el escenario anterior. La solución robusta ya se obtuvo anteriormente, la cual es  $(x_{1\bar{b}}^*, x_{2\bar{b}}^*, y_{\bar{b}}^*) = (\frac{29}{9}, \frac{230}{27}, 0)$ . De aquí considere  $y_{\bar{b}}^* = 0$ .

Como la región inducida se mantiene entonces las restricciones de atadura son las mismas para el escenario  $\bar{b}$ , esto es;  $R_3 : 20x_1 + 3x_2 + 13y \leq 93$  y  $R_4 : 2x_1 + 3x_2 + 4y \leq 35$ . Resolviendo el sistema de ecuaciones formado por



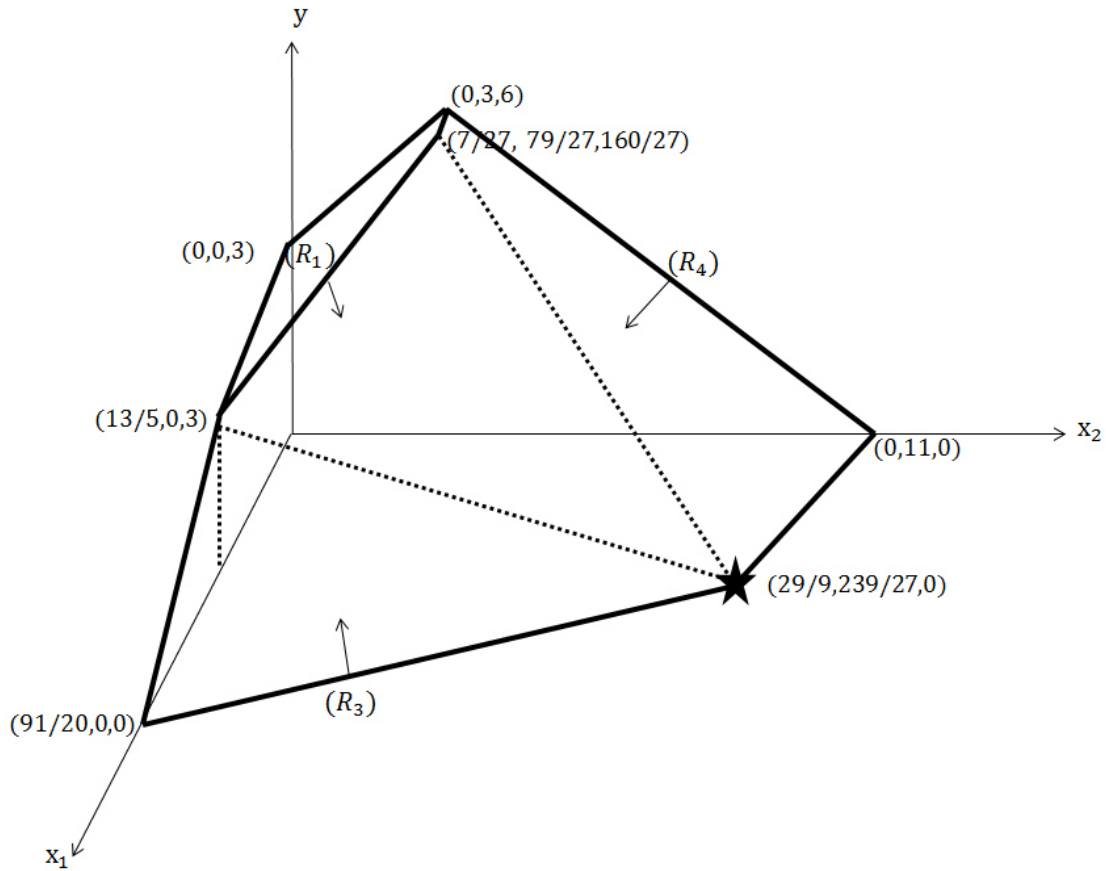


Figura 4.8: Ilustración del escenario  $b'$

las restricciones de atadura se obtiene  $(x_{1b'}^*, x_{2b'}^*) = (\frac{29}{9}, \frac{257}{27})$ .

El siguiente paso es resolver el problema lineal del nivel inferior considerando  $x_{1b'}^*$  y  $x_{2b'}^*$  para obtener  $y_b^* = 0$ . Por último, se evalúa  $F(x_{1b'}^*, x_{2b'}^*, y_b^*) = F(\frac{29}{9}, \frac{257}{27}, 0) = \frac{3179}{27}$ ,

De manera que al actualizar la solución óptimo binivel para el escenario  $\bar{b}$ , ésto es  $(\frac{29}{9}, \frac{257}{27}, 0)$ , encontrado con la metodología, coincide con la solución óptimo binivel obtenido desde una perspectiva geométrica como se puede ver en la figura 4.10.

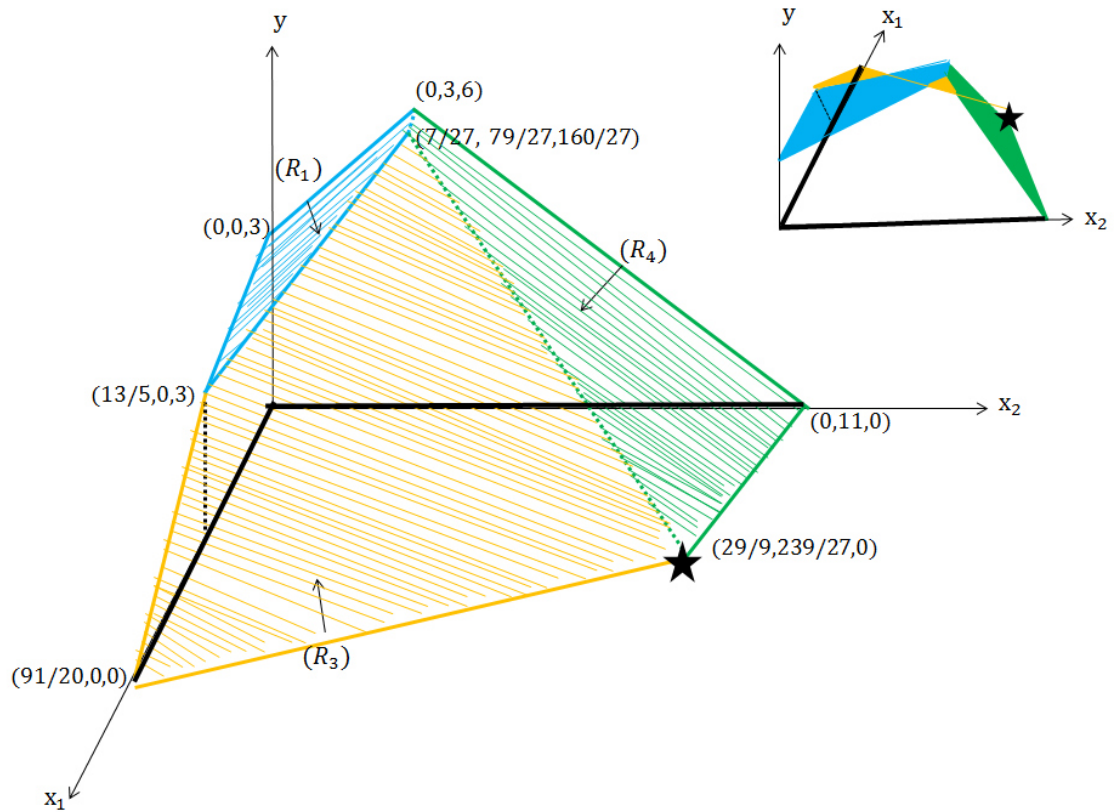


Figura 4.9: Ilustración del escenario  $b'$ , con IR en color azul, verde y amarillo

Además se observa que las restricciones de atadura son  $R_3 : 20x_1 + 3x_2 + 13y \leq 93$  y  $R_4 : 2x_1 + 3x_2 + 4y \leq 35$ , generando la región inducida tal como se muestra en la figura 4.11.

La eficiencia de resolver el problema binivel basado en el análisis de las restricciones de atadura se debe principalmente a que los coeficientes intervalo se encuentran únicamente en los lados derechos de dichas restricciones. Este hecho permite mantener la estructura de la región factible del nivel inferior, y por consecuencia la región inducida. Entonces, sabiendo que la forma de la función objetivo del líder no varía, es decir, mantiene su pendiente entonces siempre se alcanzará el mismo vértice en la solución óptima.

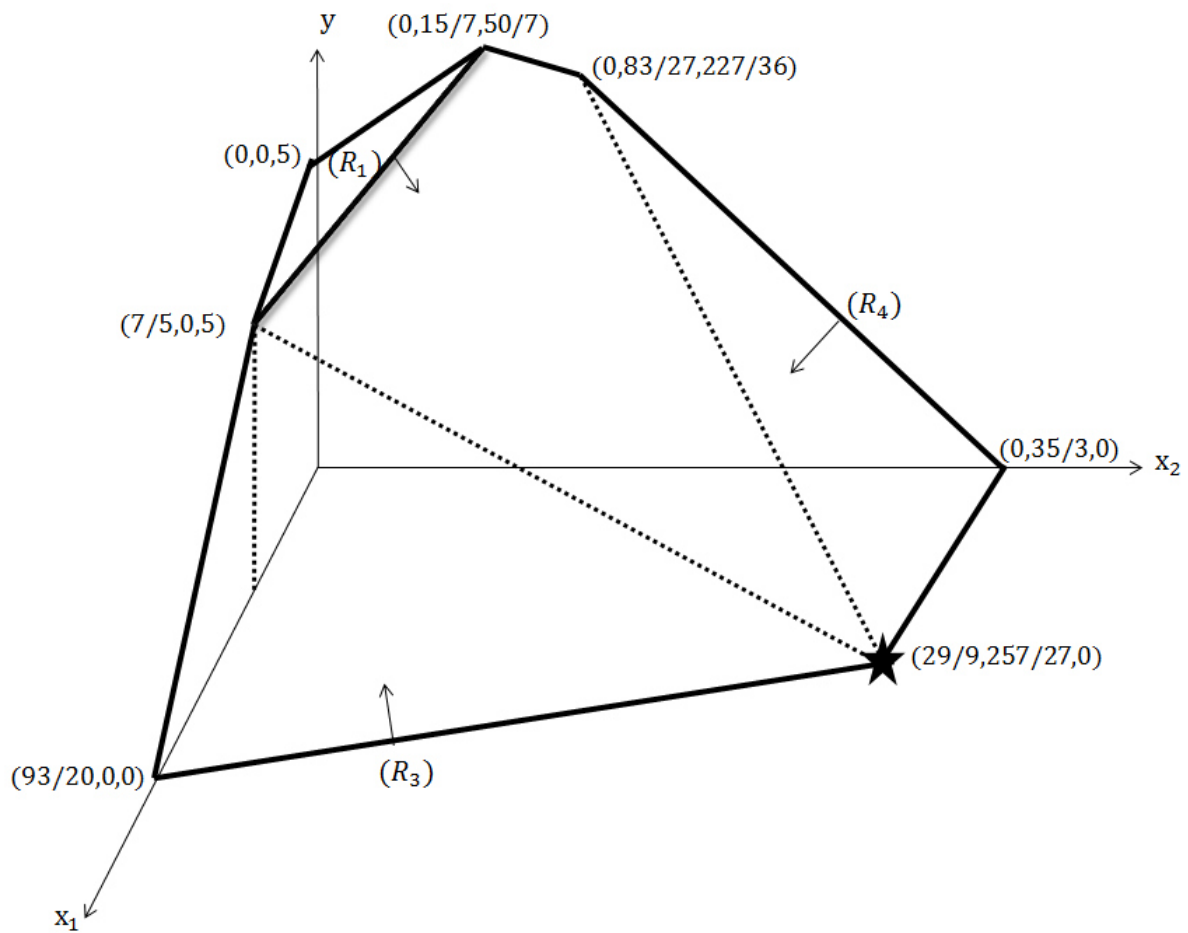


Figura 4.10: Ilustración del escenario  $\bar{b}$

Para cerrar con esta idea, se va a demostrar el hecho de que el óptimo del problema binivel descrito en (3.1.1.)-(3.1.3) está dado por la intersección de las mismas restricciones, sin importar el escenario en cuestión.

**Lema 4.4.1.** *El punto óptimo  $(x^*, y^*)_b$  para cualquier escenario  $b \in [\underline{b}, \bar{b}]$  del problema de LBPIC siempre conserva las mismas restricciones de atadura.*

Demostración: ...

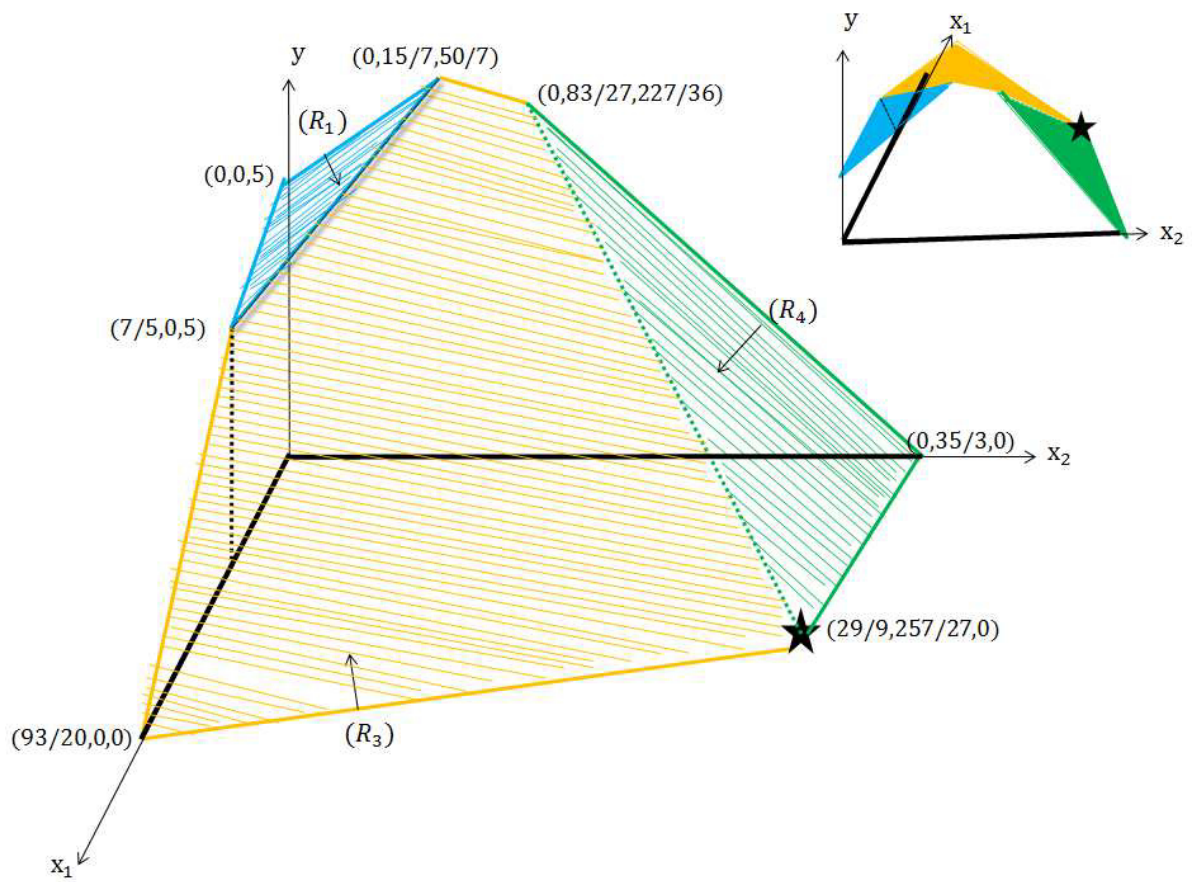


Figura 4.11: Ilustración del escenario  $\bar{b}$ , con IR en color azul, verde y amarillo

# Capítulo 5

## Conclusiones y trabajo futuro

---

En ésta investigación se estudiaron los problemas lineales de programación binivel con coeficientes intervalo en los lados derechos de las restricciones del problema del nivel inferior. Además se identificaron algunas propiedades importantes que tienen impacto en la metodología propuesta de solución. También se introdujeron las soluciones robustas para el mismo problema, dichas soluciones también son soluciones factibles para cualquier escenario. Como ya se mencionó, se presentó una metodología eficiente para encontrar la solución óptima binivel del escenario real a partir de la solución robusta binivel.

### 5.1. Conclusiones

En LBPIC es interesante ver como la jerarquía e independencia en la toma de decisiones afectan significativamente para la resolución del problema. Además, un problema de LBPIC puede presentar infinitos escenarios abriendo el abanico de posibilidades del tomador de decisiones, lo cual complica de

gran manera la forma de resolución del problema. Sin embargo, la naturaleza de la estructura de estos problema permiten que se considere otro panorama al tomador de decisiones, ya sea por escenarios sin perder de vista el problema global; o bien, conformarse con soluciones sub-óptimas pero factibles en cualquier escenario. La importancia de estos problemas recae por ejemplo, cuando se tienen dos compañías las cuales vigilan sus intereses de manera independiente pero al mismo tiempo cuidan la relación comercial.

La gran aplicabilidad e importancia de estos problemas nos motivó a analizar problemas de éste tipo. Por otro lado, se puntualiza enfatizando en los aportes y logros alcanzados en esta investigación. Como consecuencia del estudio realizado se obtuvieron algunas de las conclusiones descritas a continuación:

- \* Definición del problema LBPIC en los lados derechos de las restricciones del seguidor con variables restringidas de signo, así como también la introducción de los conceptos necesarios para su estudio siguiendo la notación descrita por [8].
- \* Introducción conceptos necesarios para tener bien definida la factibilidad binivel para el tipo de problemas descrito en ésta tesis.
- \* Se definió la solución factible binivel robusta; la cual es solución óptima binivel para el peor escenario y es solución factible para cualquier escenario.
- \* Como consecuencia del logro anterior, también se definió apropiadamente la región inducida robusta binivel.
- \* El problema (3.1.1)-(3.1.3) es equivalente al problema (3.1.4).
- \* Se demostró que la *RIR* brinda una solución factible para cualquier escenario.
- \* También se propuso una metodología para encontrar la solución óptima binivel del escenario real partiendo de la solución robusta binivel sin necesidad de resolver desde el inicio el escenario real.

- \* La metodología propuesta está sustentada con varios ejemplos ilustrativos que muestran el adecuado funcionamiento de dicha metodología.
- \* La metodología propone reducir el costo computacional, así como también bajar los costos de inversión en los recursos e incrementar sus ganancias al obtener la solución óptima del escenario real. Ésto se justifica porque sólo hay que resolver el problema binivel del escenario más chico y aplicando la metodología propuesta se actualiza la solución encontrando la nueva solución binivel escenario real sin necesidad de resolver éste problema binivel. El análisis pertinente para llevar a cabo ésta actualización consiste solamente en cinco pasos, lo cual baja sustancialmente el costo computacional.

## 5.2. Trabajo futuro

Algunas de las líneas de investigación que se identificaron que pueden mencionarse como trabajo futuro son:

- \* Demostrar el lema: El punto óptimo  $(x^*, y^*)_{\underline{b}}$ ,  $\forall b \in [\underline{b}, \bar{b}]$  del problema LBPIC siempre conserva las mismas restricciones de atadura.
- \* Desarrollar un algoritmo el cual este basado en la metodología y del hecho que la región inducible se mantiene, esto es, sólo se alarga o se acorta.
- \* Comparar la calidad de solución de la metodología con algoritmos conocidos.
- \* Validar la metodología en cuánto al costo de cómputo comparado con otros algoritmos existentes.

## BIBLIOGRAFÍA



# Bibliografía

- [1] Camacho, F., González, E., 2013. *Un modelo para enviar, recibir y distribuir ayuda en especie después de haber ocurrido un desastre natural*. Celerinet, vol.1(1).
- [2] Ríos, R., Kalashnikov, V., 2003. *La optimización binivel: estudio de un caso en la industria de gas natural*. Ingenierías, vol.6(20), pp.47-52.
- [3] Vital, A., 2012. *Técnicas de programación binivel para el diseño de redes*. Tesis de maestría. Puebla, México. Universidad de las Américas Puebla.
- [4] Kalashnikova, N., 2003. *Structure of demand and equilibrium in oligopolistic models with piecewise quadrati cost functions*. Journal of business and economics research, vol.1(10), pp.57-67.
- [5] Moitre, D., García, G., Sauchelli, V., 2005. *Optimización dinámica binivel de centrales hidroeléctricas de bombeo en un pool competitivo*. Revista IEEE América Latina, vol.3(2), pp.62-67.
- [6] Codina, E., García, R., Marín, A., Verástegui, D., 2003. *Programación matemática binivel en planificación del transporte urbano*. Estudios de construcción y transportes , N°(99), pp.127-149.
- [7] Agudelo, L., López, J., Muñoz., N., 2014. *Análisis de vulnerabilidad de sistemas de potencia mediante programación binivel*. Revista de información tecnológica, vol.25(3), pp.103-114.
- [8] Bard, J., 1984. *Optimality conditions for the bilevel programming problem*. Naval research logistics quarterly, vol.31(1), pp.13-26.

- [9] Dempe, S., 2002. *Foundations of bilevel programming*. Kluwer academic publishers, Dordrecht, Boston, London.
- [10] Hansen, P., Jaumard, B., Savard, G., 1992. *New branch-and-bound rules for linear bilevel programming*. Journal on Scientific and Statistical Computing, vol.13, pp.1194-1217.
- [11] Shaocheng, T., 1994. *Interval number and fuzzy number linear programming*. Fuzzy sets and systems, vol.66(3), pp.301-306.
- [12] Fiedler, M., Nedoma, J., Ramik, J., Zimmermann, K., 2006. *Linear optimization problems with inexact data*. Springer link, New York, USA.
- [13] Levin, V., 1994. *Boolean linear programming with interval coefficients*. Automation and remote control, vol.55(7), pp.1019-1028.
- [14] Inuiguchi, M., Sakawa, M., 1995. *Minimax regret solution to linear programming problems with an interval objective function*. European journal of operational research, vol.86(3), pp.526-536.
- [15] Ramadan, K., 1996. *Linear programming with interval coefficients*. Thesis of master. Ontario, Canada. Carleton University.
- [16] Chinneck, J., Ramadan, K., 2000. *Linear programming with interval coefficients*. Journal of the operational research society, vol.51(2), pp.209-220.
- [17] Gabrel, V., Murat, C., Remli, N., 2010. *Linear programming with interval right hand sides*. International transactions in operational research, vol.17, pp.397-408.
- [18] Calvete, H., Galé, C., 2012. *Linear bilevel programming with interval coefficients*. Journal of computational and applied mathematics, vol.236(15), pp.3751-3762.
- [19] Mishmast, H., Hamidi, F., 2014. *Upper and lower bounds for the optimal values of the interval bilevel linear programming problem*. Applied mathematical modelling, ISSN en tramite.
- [20] Arroyave, G., Isaza, P., Jarillo, E; 1994. *Análisis de sensibilidad en los proyectos de inversión en salud*. Salud pública de México, vol.36(3), pp.318-327.

- [21] Gil, L., Bugeda, G., Oñate, E; 1998. *Análisis de sensibilidad de formas en problemas estructurales con comportamiento no lineal del material*. Revista internacional de métodos numéricos para cálculo y diseño en ingeniería, vol.14(3), pp.403-420.
- [22] Barreira, P., Aguilera, F., Gómez, M; 2012. *Propuesta de un análisis de sensibilidad para validar modelos prospectivos de simulación de crecimiento urbano basados en autómatas celulares*. Revista internacional de ciencia y tecnología de la información geográfica, N°(12), pp.303-328.
- [23] López, H., Restrepo, M., 2008. *Programación lineal flexible con restricciones difusas*. Revista ingeniería e investigación, vol.28(1), pp.162-168.
- [24] Llana, J., 2008. *Dualidad en la programación lineal en subconjuntos difusos*. Trabajos de investigación operativa, vol.3(1), pp.29-42.
- [25] Prékopa, A., 1995. *Stochastic programming*. Kluwer academic publishers, Dordrecht, The Netherlands.
- [26] Quinteros, M., Alonso, A., Escudero, L., Guignard, M., Weintraub, A., 2006. *Una aplicación de programación estocástica en un problema de gestión forestal*. Revista ingeniería de sistemas, vol.20, pp.67-95.
- [27] Alarcón, S., 1998. *La programación estocástica discreta como instrumento de planificación de plantaciones de olivos en Castilla-la Mancha*. Revista española de economía agraria, N°(183), pp.173-200.
- [28] Stackelberg, H., 1952. *The theory of the market economy*. Oxford university press.
- [29] Bracken, J., McGill, J., 1973. *Mathematical programs with optimization problems in the constraints*. Operations Research, vol.21(1), pp.37-44.
- [30] Bracken, J., McGill, J., 1974. *Defense applications of mathematical programs with optimization problems in the constraints*. Operations Research, vol.22(5), pp.1086-1096.
- [31] Elster, K., 1993. *Modern mathematical methods of optimization*. Akademie-verlag, Berlin.
- [32] Dempe, S., 1992. *A necessary and a sufficient optimality condition for bilevel programming problems*. Optimization, vol.25, pp.341-354.

- [33] Bard, J., 1983. *An algorithm for the general bilevel programming problem*. Mathematics of operations research, vol.8, pp.260-272.
- [34] Klatte, D., Kummer, B., 1984. *Stability properties of infima and optimal solutions of parametric optimization problems*. Nondifferentiable optimization: motivations and applications, Laxenburg.
- [35] Anandalingam, G., Friesz, T., 1992. *Hierarchical optimization*. Annals of operations research, vol.34.
- [36] Bard, J., 1998. *Practical bilevel optimization: algorithms and applications*. Kluwer academic publishers, Dordrecht.
- [37] Luo, Z., Pang, J., Ralph, D., 1996. *Mathematical programs with equilibrium constraints*. Cambridge university press, Cambridge.
- [38] Migdalas, A., Pardalos, P., Värbrand, P., 1998. *Multilevel optimization: algorithms and applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- [39] Outrata, J., Kočvara, M., Zowe, J., 1998. *Nonsmooth approach to optimization problems with equilibrium constraints*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.