

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA**



**“DESARROLLO DE UNA METODOLOGÍA COMPUTACIONAL  
PARA EL ANÁLISIS DE FENÓMENOS FÍSICOS ACOPLADOS EN  
LA OPERACIÓN DE TRANSFORMADORES ELÉCTRICOS”**

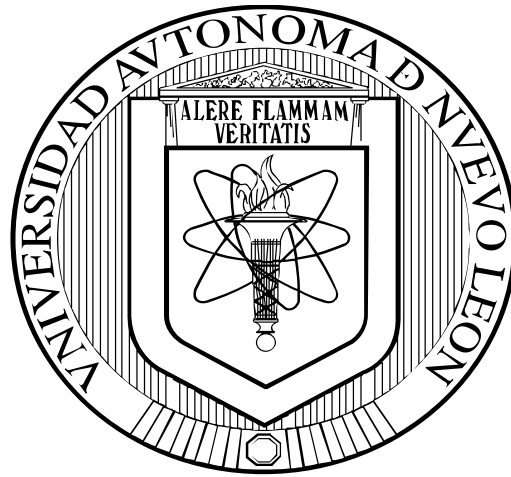
**POR**

**CARLOS RAFAEL UDER CONTRERAS**

**EN OPCION AL GRADO DE MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA  
INGENIERÍA CON ORIENTACIÓN EN ENERGÍAS TÉRMICA Y  
RENOVABLE**

**MAYO 2015**

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA  
SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO**



**TESIS**

**“DESARROLLO DE UNA METODOLOGÍA COMPUTACIONAL  
PARA EL ANÁLISIS DE FENÓMENOS FÍSICOS ACOPLADOS EN  
LA OPERACIÓN DE TRANSFORMADORES ELÉCTRICOS”**

**POR**

**ING. CARLOS RAFAEL UDER CONTRERAS**

**EN OPCION AL GRADO DE MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA  
INGENIERÍA CON ORIENTACIÓN EN ENERGÍAS TÉRMICA Y  
RENOVABLE**

**ASESOR: DR. SANTOS MÉNDEZ DÍAZ  
CO-ASESOR: DR. SIMÓN MARTÍNEZ MARTÍNEZ**

**Mayo, 2015.**

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA  
SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO**



**TESIS**

**“DESARROLLO DE UNA METODOLOGÍA COMPUTACIONAL  
PARA EL ANÁLISIS DE FENÓMENOS FÍSICOS ACOPLADOS EN  
LA OPERACIÓN DE TRANSFORMADORES ELÉCTRICOS”**

**POR: ING. CARLOS RAFAEL UDER CONTRERAS**

**EN OPCION AL GRADO DE MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA  
INGENIERÍA CON ORIENTACIÓN EN ENERGÍAS TÉRMICA Y  
RENOVABLE**

**ASESOR: DR. SANTOS MÉNDEZ DÍAZ  
CO-ASESOR: DR. SIMÓN MARTÍNEZ MARTÍNEZ**

**MAYO, 2015**

# Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

Subdirección de Estudios de Posgrado

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la tesis **“Desarrollo de una metodología computacional para el análisis de fenómenos físicos acoplados en la operación de transformadores eléctricos”** realizada por el alumno Carlos Rafael Uder Contreras con número de matrícula 1654722, sea aceptada para su defensa como opción al grado de Maestría en Ciencias de la Ingeniería con Orientación en Energías Térmica y Renovables.

## El Comité de Tesis



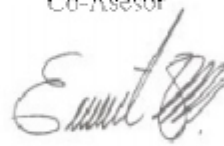
Dr. Santos Méndez Díaz  
Asesor



Dr. Simón Martínez Martínez  
Co-Asesor



Dr. Fausto Alejandro Sánchez Cruz  
Revisor



Dr. Ernesto Vázquez Martínez  
Revisor



Dr. Simón Martínez Martínez  
Subdirección de Estudios de Posgrado

San Nicolás de los Garza, N.L., a 28 de Mayo de 2015.

*A mis padres, mis motores... El mundo es de los audaces.*

# AGRADECIMIENTOS

---

*A María Elena Contreras Chávez y Alberto Uder Aguilar, mis padres. No solo por mi existencia, sino por el amor, apoyo incondicional y el respaldo a las decisiones que me han traído hasta este punto.*

*A Beto, Charo y Elena, mis hermanos. Ni los mejores ni los peores, sino justamente los que a la vida le hubiera pedido si me hubiera dejado elegir.*

*Al Dr. Santos Méndez Díaz, Mi tutor. Por la camaradería en las buenas y una verdadera amistad en las malas. Sus enseñanzas y dedicación dieron sentido y dirección a mis esfuerzos en el proceso de elaboración de este trabajo. Un excelente mentor.*

*Al Dr. Fausto Sánchez por su labor como coordinador de este programa de maestría, sus enseñanzas como profesor, y el apoyo brindado desde el primero hasta el último día de mi paso por la institución.*

*Al Dr. Simón Martínez por su incansable labor como subdirector de posgrado, por sus enseñanzas y experiencias compartidas.*

*A mis profesores M.C. Miguel García Yera, M.C. Guadalupe Evaristo Cedillo Garza, M.C. Jaime Armendáriz Velázquez, Dr. Max Salvador Hernández, Dra. Elvira Martínez García, Dr. Óscar de la Garza de León y Dr. Arturo Morales Fuentes. Por su tolerancia, paciencia y enseñanzas.*

*A los amigos que aquí encontré sin buscar. Rosario R. Altaif, René Mondragón, Ricardo Delgado, Hugo Ramírez, Yonathan Loredó, Adrián Martín, Andrés Patiño, Víctor Madrid, Adolfo Benítez, César Ramírez, Mario Chapa y Jesús Juárez.*

*Al Dr. Luis Alfredo Payán por sus asesorías y tutorías técnicas.*

*A CONACyT, por el apoyo económico que me brindó mediante la beca de estudios de posgrado con clave 302764, a partir del 1 de agosto de 2013 hasta el 31 de diciembre de 2014, para realizar mis estudios de maestría.*

# ÍNDICE GENERAL

---

ABSTRACT .....	XIII
RESUMEN.....	XIV
1. ANTECEDENTES.....	1
1.1. Introducción.....	1
1.2. Motivación.....	2
1.3. Justificación.....	2
1.4. Objetivo general.....	3
1.5. Objetivos particulares.....	3
1.6. Planteamiento del problema.....	4
1.7. Hipótesis.....	4
1.8. Organización de la tesis.....	5
2. MARCO TEÓRICO.....	7
2.1. Ecuaciones de Maxwell.....	7
2.1.1. Ley de Gauss para campos eléctricos.....	7
2.1.2. Ley de Gauss para campos magnéticos.....	9
2.1.3. Ley de Ampere.....	11
2.1.4 Ley de Faraday-Lenz.....	12
2.2. Potencial Eléctrico y Magnético.....	14
2.3. Fundamentos de la transferencia de calor.....	19
2.3.1. Conducción de calor sólidos-interfaz.....	20
2.3.2. Convección de calor interfaz-fluido.....	23
2.3.2.1. Conservación de masa o ecuación de continuidad.....	27
2.3.2.2. Ecuación de momentum.....	29
2.3.2.3. Ecuación de la energía.....	33
2.3.2.4. Parámetros adimensionales.....	37
2.4. Fundamentos de un transformador trifásico.....	38
2.4.1. Descripción de un transformador trifásico.....	38
2.4.2. Principio de operación.....	41
2.4.2.1. Transformador ideal.....	42
2.4.2.2. Transformador real.....	45

2.4.3. Descripción de los elementos esenciales de un transformador.....	48
2.4.3.1. Núcleo.....	48
2.4.3.2. Bobinas.....	48
2.4.3.3. Tanque. ....	49
2.4.3.4. Aislamiento y refrigerante.....	49
2.4.4. Circuito de refrigeración.....	50
2.4.4.1. ONAN. ....	50
2.4.4.2. ONAF.....	51
2.4.4.3. OFAF. ....	52
2.4.4.4. ODAF.....	53
2.4.5. Pérdidas de un transformador trifásico.....	54
2.4.5.1. Pérdidas sin carga.....	54
2.4.5.2. Pérdidas con carga.....	56
2.4.5.2.1. Ecuaciones de campo. ....	57
2.4.5.2.2. Teorema de Poynting.....	62
2.4.5.2.3. Corrientes de Eddy en bobinas.....	66
2.4.5.2.4. Corriente de carga.....	70
3. ESTADO DEL ARTE. ESTUDIOS DE TRANSFORMADORES ELÉCTRICOS.....	72
4. METODOLOGÍA PARA LOS ESTUDIOS ELECTROMAGNÉTICO Y TERMOHIDRÁULICO. ....	97
4.1. Geometría del modelo electromagnético del transformador. ....	98
4.1.1. Mallas FEM 3-D del transformador para estudio electromagnético. ....	98
4.1.2. Simulación computacional del fenómeno electromagnético: Ecuaciones de gobierno y condiciones de frontera. ....	104
4.1.3. Propiedades de los materiales.....	107
4.1.4. Solución electromagnética: Fuentes de calor.....	107
4.1.4.1. Núcleo ferromagnético.....	108
4.1.4.2. Bobinas.....	110
4.1.4.3. Tanque. ....	114
4.1.4.4. Elementos de sujeción y apriete. ....	115
4.1.4.5. Concentrado de pérdidas. ....	116
4.1.4.6. Fuentes de calor para estudio termohidráulico.....	117
4.2. Geometría del modelo termohidráulico del transformador. ....	117



4.2.1. Mallas 3-D del paquete de bobinas para estudio termohidráulico. ....	118
4.2.2. Simulación computacional del fenómeno termohidráulico: Ecuaciones de gobierno y condiciones de frontera. ....	121
4.2.3. Propiedades de los materiales. ....	124
4.2.4. Solución termohidráulica: Campos de velocidad y perfiles de temperatura. ....	124
5. TRANSFORMADOR CASO DE ESTUDIO. ....	127
5.1. Aspectos particulares del transformador. ....	127
5.2. Consideraciones geométricas y de diseño. ....	128
5.2.1. Modelo CAD electromagnético. ....	129
5.2.2. Modelo CAD termohidráulico. ....	130
5.3. Discretización. ....	131
5.3.1. Dominio electromagnético. ....	133
5.3.2. Dominio termohidráulico. ....	140
5.4. Planteamiento de los casos de estudio. ....	145
5.4.1. Modelo electromagnético en ANSYS Workbench EMAG v15. ....	145
5.4.2. Modelo termohidráulico en ANSYS FLUENT v15. ....	151
5.5. Resultados del caso de estudio electromagnético. ....	155
5.5.1. Núcleo. ....	155
5.5.2. Bobinas. ....	160
5.5.2.1. Bobinas de baja tensión. ....	161
5.5.2.2. Bobinas de alta tensión. ....	168
5.5.2. Tanque. ....	174
5.5.3. Tirantes y Herrajes. ....	179
5.6. Resultados del caso de estudio termohidráulico. ....	183
5.6.1. Términos fuente. ....	183
5.6.2. Pérdidas <b><i>I<sup>2</sup>R</i></b> . ....	185
5.6.2. Pérdidas <b><i>I<sup>2</sup>R</i> + <i>Eddy</i></b> . ....	197
5.6.3. Régimen de flujo. ....	209
6. CONCLUSIONES. ....	218
7. TRABAJO FUTURO. ....	223
NOMENCLATURA. ....	224
BIBLIOGRAFÍA. ....	226

## ÍNDICE DE FIGURAS

---

Figura 1. Volumen de control de tamaño diferencial $dx dy dz$ del que entran y salen líneas de campo eléctrico.....	8
Figura 2. Volúmenes de control de tamaño diferencial de tamaño $dx dy dz$ en el que se expresan las líneas de campo entrando y saliendo de los mismos. ....	10
Figura 3. Superficie extruida que muestra la independencia de su forma con respecto a los vectores que la cruzan. ....	11
Figura 4. Secuencia evolutiva temporal del proceso de inducción de una fuerza electromotriz que hace circular a una corriente en un conductor eléctrico.....	13
Figura 5. Regiones de frontera e interfaces en un problema típico de inducción electromagnética [iii]. ....	15
Figura 6. Dominio sólido para estudio de conducción de calor [xxv]. ....	20
Figura 7. Efectos de la transferencia de calor locales y totales en una superficie arbitraria [xxv]. ....	24
Figura 8. Capa límite hidrodinámica a lo largo de una placa plana [xxv].....	25
Figura 9. Capa límite térmica a lo largo de una placa plana con temperatura invariable en la componente x [xxv].....	26
Figura 10. Flujo por convección de calor natural entre dos placas verticales a distinta temperatura [xxvii]. ....	27
Figura 11. Elemento fijo de volumen diferencial $dx dy dz$ a través del cual circula un fluido [xxv].....	28
Figura 12. Elemento fijo de volumen $x$ y $z$ en el que se señala, con flechas, la dirección en que se transporta el componente $x$ de la cantidad de movimiento a través de las superficies [xxv].	29
Figura 13. Transformadores eléctricos monofásicos alimentando a un sistema trifásico .....	39
Figura 14. Arreglo conceptual de un transformador trifásico. ....	40
Figura 15. Diseño conceptual de los elementos principales de un transformador trifásico. ....	41
Figura 16. Elementos básicos para describir el principio la operación de un transformador ideal en condiciones de no-carga. ....	42
Figura 17. Transformador real. ....	46
Figura 18. Circuito equivalente. a) Arriba. b) Abajo.....	46
Figura 19. Diagrama vectorial. a) Lado primario, b) Lado secundario. ....	47
Figura 20. Arreglo de enfriamiento ONAN.....	50
Figura 21. Arreglo elevado de enfriamiento ONAN.....	51
Figura 22. Arreglo de enfriamiento ONAF. ....	52
Figura 23. Arreglo de enfriamiento OFAF. ....	53
Figura 24. Arreglo de enfriamiento ODAF. ....	54
Figura 25. Pérdidas por histéresis. a) Ciclo de histéresis, b) Formas de onda. ....	55
Figura 26. Penetración del campo dentro de un conductor.....	64

Figura 27. Penetración del campo dentro de un conductor.....	67
Figura 28. a) Densidad de flujo magnético perpendicular a un conductor. b) Líneas de fuga de campo en un conductor de una bobina.....	70
Figura 29. (a) vista lateral del dominio. (b) Vista alzada del domino [xxxi]. .....	76
Figura 30. Fracción de dominio que se estudia [xxxi]. .....	77
Figura 31. Curva de magnetización del acero al silicio [xxxi]. .....	78
Figura 32. Modelo geométrico conceptual del transformador usado en el estudio [xxxii]. .....	79
Figura 33. Modelo geométrico simplificado de la bobina analizada [xvii]. .....	86
Figura 34. Esquema del diseño de la bobina de baja tensión [xxi]. .....	93
Figura 35. Contornos de temperatura en el cuarto pase para el modelo 2D y 3D [xxi]. .....	96
Figura 36. Esquema global del acoplamiento electromagnético-termohidráulico. ....	97
Figura 37. Modelo CAD de un transformador trifásico para caso electromagnético. ....	99
Figura 38. Elemento finito bidimensional triangular en coordenadas rectangulares. Los vértices de este elemento discreto son 1, 2 y 3 en orden contrario a las manecillas del reloj. ....	100
Figura 39. a) Estructura del núcleo ferromagnético de un transformador trifásico de tres piernas. b) Manera en que se acoplan las láminas en secuencia escalonada en placas del mismo tamaño. ....	108
Figura 40. a) Fracción proporcional de una placa laminada. b) Elementos discretos de la fracción de la placa a través de los cuales se considera $B$ y $H$ invariables. ....	109
Figura 41. Sección transversal de conductor característico empleado para las bobinas de baja y alta tensión en la que se observa que está compuesta por un número 'n' de conductores rectangulares agrupados. ....	111
Figura 42. Diseño conceptual de un paquete de bobinas de baja y alta tensión real. b) simplificación geométrica de la bobina, utilizada para ahorrar recurso computacional. ....	112
Figura 43. a) Dominios geométricos real y simplificado, sobrepuestos. b) Puntos (rojo) de medida de la densidad de flujo magnético disperso en componente radial a lo largo del eje axial. c) Segmentos (azul) de medición de la densidad de flujo magnético disperso en la componente angular con valor igual al punto (rojo) medido dentro de cada uno de los propios segmentos.....	113
Figura 44. Modelo discreto ideal de un elemento que supone la forma de una de las placas que compone al tanque del transformador.....	115
Figura 45. a) Herrajes. b) Tirantes.....	116
Figura 46. Modelo CAD termohidráulico. Fracción angularmente periódica ( $10^\circ$ ) del paquete de bobinas.....	118
Figura 47. Clúster de nodos para problema unidimensional.....	120
Figura 48. Dos perfiles supuestos: a) Perfil escalón. b) Interpolación lineal. ....	121
Figura 49. Diagrama esquemático de la forma que poseen los canales dentro de las bobinas de baja y alta tensión.....	126
Figura 50. Parte viva de la máquina estudiada con todos los elementos necesarios para su operación. De los diseños CAD bidimensionales de esta máquina se extrajo la información para los modelos CAD tridimensionales utilizados en los estudios que este documento muestra. .	128

Figura 51. Modelo CAD diseñado para el estudio electromagnético (núcleo, bobina de baja tensión, bobina de alta tensión, tirantes, herrajes y tanque contenedor).....	130
Figura 52. Modelo CAD diseñado para el estudio termohidráulico. Izquierda: Conductores de baja y alta tensión. Centro: Fluido refrigerante. Derecha: Papel aislante. ....	131
Figura 53. Formas geométricas que toman las subdivisiones espaciales del modelo geométrico al ser discretizado. a) Tetraedro. b) Pirámide. c) Cuña. d) Hexaedro. ....	132
Figura 54. Malla del núcleo, vista isométrica.....	135
Figura 55. Malla del núcleo, vista frontal.....	136
Figura 56. Malla de los paquetes de bobinas de baja y alta tensión en las tres frases (vistas isométrica y frontal).....	137
Figura 57. Malla de las estructuras de soporte (tirantes en posición horizontal y herrajes en posición vertical, ambos con respecto a la perspectiva isométrica). ....	138
Figura 58. Malla del tanque, vista isométrica exterior. ....	139
Figura 59. Fracción de la malla de los conductores eléctricos de las bobinas de baja y alta tensión. ....	141
Figura 60. Fracción de la malla de los canales de fluido en la zona inferior (entrada del fluido). .....	142
Figura 61. Fracción de la malla de los canales de fluido en la zona superior (salida del fluido). .....	143
Figura 62. Fracción de la malla del sólido que representa el material aislante.....	144
Figura 63. A, C y E: vectores de corriente para fases a b y c. B, D y F: superficies con voltaje igual a cero. ....	148
Figura 64. Condición de frontera de dominio abierto. ....	149
Figura 65. Condición de frontera de pared simétrica en la sección transversal de la máquina. .	150
Figura 66. Condiciones de frontera de dominio termohidráulico. ....	154
Figura 67. Contornos de la distribución de la densidad de flujo magnético (T). ....	156
Figura 68. Flujo magnético neto que cruza cada una de las piernas del núcleo. ....	159
Figura 69. a) Vista superior de bobina conceptual. Componente radial en función de componentes x y z. b) Perspectiva oblicua de los cilindros que representan a las bobinas. ....	161
Figura 70. Contornos de la densidad de flujo magnético en el eje y. ....	162
Figura 71. Contornos de la densidad de flujo magnético en el eje x. ....	162
Figura 72. Contornos de la densidad de flujo magnético en el eje z. ....	163
Figura 73. Espesores radiales y axiales de las láminas que conforman al conductor CTC.....	165
Figura 74. Corrientes de Eddy axiales y radiales inducidas en una estructura laminada. La intensidad de dichas corrientes aumenta al aumentar las dimensiones geométricas del elemento.....	165
Figura 75. Espesores radiales y axiales de las láminas que conforman al conductor CTC de la bobina de alta tensión. ....	168
Figura 76. Contornos de la densidad de flujo magnético en el eje y (componente axial).....	169
Figura 77. Contornos de la densidad de flujo magnético en el eje x. ....	169
Figura 78. Contornos de la densidad de flujo magnético en el eje z. ....	170
Figura 79. Planos tangenciales a las superficies del tanque contenedor. ....	175

Figura 80. Distribución de la intensidad total de campo magnético en la superficie frontal del tanque contenedor. ....	176
Figura 81. Distribución de la intensidad total de campo magnético en las superficies laterales, superior e inferior del tanque contenedor. ....	177
Figura 82. Distribución de la intensidad total de campo magnético en los tirantes. ....	179
Figura 83. Distribución de la intensidad total de campo magnético en los herrajes. ....	180
Figura 84. Espesores variables en los tirantes de la máquina. ....	181
Figura 85. Contornos de temperatura en paquete de bobinas bajo parámetros I2R.....	186
Figura 86. Campo de velocidades en paquete de bobinas bajo parámetros I2R.....	189
Figura 87. Flujos másicos de entrada a los canales principales. ....	190
Figura 88. Contornos de temperatura en paquete de bobinas bajo pérdidas de tipo I2R + Eddy.....	197
Figura 89. Campo de velocidades en paquete de bobinas bajo parámetros I2R + Eddy. ....	200
Figura 90. Zonas de medidas de propiedades pertinentes para cálculo de parámetros adimensionales. ....	210
Figura 91. Campo de velocidades del aceite y distribución de temperatura del cobre. ....	216

## ÍNDICE DE GRÁFICAS

---

Gráfica 1. Distribución de pérdidas de Eddy en la componente radial [xxxiii].	83
Gráfica 2. Distribución de pérdidas de Eddy en la componente axial [xxxiii].	84
Gráfica 3. Distribución total de pérdidas en devanados [xxxiii].	85
Gráfica 4. Fluctuaciones del flujo másico en la dirección principal del fluido en función del parámetro $Re Gr$ para el canal central [xvii].	88
Gráfica 5. Temperatura de la superficie vertical en la pared izquierda del canal central [xvii].	89
Gráfica 6. Número de Nusselt promedio por bloque para la columna de la izquierda [xvii].	90
Gráfica 7. Fluctuación del flujo másico en dirección de la corriente principal en función del parámetro $s$ en el canal central [xvii].	91
Gráfica 8. Fluctuación del flujo másico en la dirección de la corriente para distintos arreglos de bloques [xvii].	91
Gráfica 9. Distribución de pérdidas de calor en la bobina de baja tensión a 75°C [xxi].	94
Gráfica 10. Distribución de flujos para los modelos 2D y 3D [xxi].	95
Gráfica 11. Distribución de temperaturas para los modelos 2D y 3D [xxi].	95
Gráfica 12. Curva de magnetización del acero al Silicio.	146
Gráfica 13. Fuentes de alimentación de corriente.	147
Gráfica 14. Aumento de las pérdidas totales producidas por corrientes de Eddy en las placas o escalones del núcleo en función de su volumen.	157
Gráfica 15. Intervalo temporal de $1/60$ s, discretizado en 20 pasos de tiempo. El tiempo $t = 6.9141e-003$ s muestra la máxima amplitud de onda en la fase B (pierna central).	158
Gráfica 16. Curvas de tendencia de generación de calor. a) Componente X. b) Componente Z. c) Componente radial. d) Componente axial.	166
Gráfica 17. Generación de calor por unidad de volumen de los conductores de la bobina de baja tensión en componentes radial y axial para las fases a y b.	167
Gráfica 18. Curvas de tendencia de generación de calor. a) Componente X. b) Componente Z. c) Componente radial. d) Componente axial.	171
Gráfica 19. Generación de calor por unidad de volumen de los conductores de la bobina de baja tensión en componentes radial y axial para las fases a y b.	173
Gráfica 20. Pérdidas de potencia superficial en placa frontal del tanque.	178
Gráfica 21. a) Términos fuente para bobinas de baja tensión. b) Términos fuente para bobinas de alta tensión.	185
Gráfica 22. Capa 1 de bobina de baja tensión. Azul: Flujo de fluido (%) en función de canal horizontal. Rojo: Temperatura de cobre en función de disco conductor.	194
Gráfica 23. Capa 2 de bobina de baja tensión. Azul: Flujo de fluido (%) en función de canal horizontal. Rojo: Temperatura de cobre en función de disco conductor.	195
Gráfica 24. Bobina de alta tensión. Azul: Flujo de fluido (%) en función de canal horizontal. Rojo: Temperatura de cobre en función de disco conductor.	196

Gráfica 25. Capa 1 de bobina de baja tensión. Azul: Flujo de fluido (%) en función de canal horizontal. Rojo: Temperatura de cobre en función de disco conductor.....	204
Gráfica 26. Capa 2 de bobina de baja tensión. Azul: Flujo de fluido (%) en función de canal horizontal. Rojo: Temperatura de cobre en función de disco conductor.....	205
Gráfica 27. Bobina de alta tensión. Azul: Flujo de fluido (%) en función de canal horizontal. Rojo: Temperatura de cobre en función de disco conductor. ....	206
Gráfica 28. Diferencia de temperaturas reportada bajo pérdidas I <sup>2</sup> R e I <sup>2</sup> R + Eddy. a) Baja tensión, capa 1. b) Baja tensión, capa 2. c) Alta tensión. ....	207
Gráfica 29. Comparativa de la ubicación (número de disco) de los puntos calientes de cada pase entre pérdidas de tipo I <sup>2</sup> R y pérdidas de tipo I <sup>2</sup> R + Eddy. a) Baja tensión, capa 1. b) Baja tensión capa 2. c) Alta tensión.....	208
Gráfica 30. GrRe2 en canales verticales internos y externos. a) Baja tensión, capa 1. b) Baja tensión, capa 2. c) Alta tensión.....	213

## ÍNDICE DE TABLAS

---

Tabla 1. Comparativa de las pérdidas del acero magnético medidas y calculadas [xxx].	78
Tabla 2. $P_k$ pérdidas de corto circuito, $P_{cu}$ pérdidas resistivas del cobre, $P_{dod\_cu}$ pérdidas de Eddy en devanados y $P_v$ pérdidas extrañas en elementos estructurales y tanque [xxxii].	81
Tabla 3. Pérdidas de potencia medidas (columna 2), pérdidas de potencia por impedancia superficial no lineal (columna 3) y pérdidas de potencia por impedancia superficial lineal (columna 4) [xxxii].	81
Tabla 4. Pérdidas de potencia en elementos estructurales [xxxii].	82
Tabla 5. Propiedades de los materiales requeridas por el software para realizar el estudio.	107
Tabla 6. Propiedades de los materiales requeridas por el software para realizar el estudio.	124
Tabla 7. Lista de los rangos de valores de oblicuidad y su calidad correspondiente [i].	133
Tabla 8. Estadísticas generales de la malla electromagnética.	134
Tabla 9. Estadísticas generales de la malla termohidráulica.	140
Tabla 10. Propiedades de los materiales en estudio electromagnético.	145
Tabla 11. Densidad de flujo magnético a distintos valores de intensidad de campo magnético en el Acero al Silicio.	146
Tabla 12. Variaciones de la corriente de carga con respecto al tiempo a 60 Hz.	151
Tabla 13. Propiedades de los materiales sólidos.	152
Tabla 14. Cálculo de las pérdidas totales por corrientes de Eddy de las placas o escalones del transformador en función de la densidad de flujo $T$ .	160
Tabla 15. Recuento global de la potencia disipada por las bobinas.	174
Tabla 16. Recuento global de la energía generada por las paredes del tanque.	178
Tabla 17. Recuento global de la energía generada por las estructuras que dan soporte al núcleo.	181
Tabla 18. Pérdidas de potencia en Fracción simétrica del transformador.	182
Tabla 19. Pérdidas de potencia extrapoladas al transformador completo.	182
Tabla 20. Eficiencia de operación de la máquina.	182
Tabla 21. Concentrado de temperaturas en baja tensión capa 1.	187
Tabla 22. Concentrado de temperaturas en baja tensión capa 2.	187
Tabla 23. Concentrado de temperaturas en alta tensión.	188
Tabla 24. Porcentajes de flujo de fluido que circulan por cada uno de los canales horizontales de la capa 1 de la bobina de baja tensión.	191
Tabla 25. Porcentajes de flujo de fluido que circulan por cada uno de los canales horizontales de la capa 2 de la bobina de baja tensión.	191
Tabla 26. Porcentajes de flujo de fluido que circulan por cada uno de los canales horizontales de la bobina de alta tensión.	192
Tabla 27. Concentrado de temperaturas en baja tensión capa 1.	198
Tabla 28. Concentrado de temperaturas en baja tensión capa 2.	198
Tabla 29. Concentrado de temperaturas en alta tensión.	199



Tabla 30. Porcentajes de flujo de fluido que circulan por cada uno de los canales horizontales de la capa 1 de la bobina de baja tensión.....	201
Tabla 31. Porcentajes de flujo de fluido que circulan por cada uno de los canales horizontales de la capa 2 de la bobina de baja tensión.....	201
Tabla 32. Porcentajes de flujo de fluido que circulan por cada uno de los canales horizontales de la bobina de alta tensión.....	202
Tabla 33. Parámetros adimensionales. Baja tensión, capa 1.....	211
Tabla 34. Parámetros adimensionales. Baja tensión, capa 2.....	211
Tabla 35. Parámetros adimensionales. Alta tensión.....	212

## ABSTRACT

---

The following document explains a methodology that allows to determine the distribution of stray losses on the most diverse and relevant components of a power transformer followed by a study which, in function of the calculated energy losses, approximates the temperature distribution and the velocity field of the refrigerant that appears in the low and high tension windings of the machine. The distribution of the magnetic field intensity inside the transformer was studied conducting a periodic electromagnetic study under nominal current levels in the winding utilizing numerical studies based on the finite element method to afterwards calculate, with the use of analytical procedures, the volumetric heat generation in laminated structures as is the copper in the CTC type conductors of the winding and electrical steel sheets of the core. In turn, in the structural elements as are the limb clamps and crossbars and the tank itself, the power loss in function of the surface impedance that these structures present was calculated. These stray losses were approximated by optimizing the computational resources and by maintaining low meshing density criteria without it compromising the trustworthiness of the results. By knowing the dissipated power by each one of the structural elements of the machine, a numerical study based on the finite volume method was employed to discretize and characterize the velocity field that exists on the vertical and horizontal channels that serve as a hydraulic circuit which remove the heat generated in the windings towards the environment, and as a consequence the distribution of the local temperature in each of the conductors. The magnitude and location of each point with the highest increase in temperature for each of the passes is reported along with the temperature of the global hot spot in the windings of the machine in a ten degrees periodical angular fraction subtracted from the low and high tension coils, for cases in which losses of the  $I^2R$  type are contemplated along with  $I^2R + Eddy$ . Dimensionless correlations were utilized to indicate under which regime (natural convection, forced convection or mixed convection) flows the refrigerant liquid along the vertical and horizontal channels of the windings and, in function of said results, modifications are proposed with the purpose of conclusively reflecting a substantial improvement in the process of heat removal from these types of machines. All said studies were realized utilizing the commercial platforms ANSYS, Emag and Mechanical. Information protected by intellectual property may be provided by the author and/or supervisor.

## RESUMEN

---

El presente documento muestra una metodología que permite determinar la distribución de pérdidas parásitas en los diversos y más relevantes componentes de un transformador trifásico de potencia seguido de un estudio que en función de las pérdidas energéticas calculadas, aproxima la distribución de temperaturas y el campo de velocidades que se presenta en los devanados de baja y alta tensión de la máquina. Realizando un estudio electromagnético periódico bajo niveles de corriente nominal en los devanados, se estudió la distribución de la intensidad del campo magnético dentro de la máquina empleando estudios numéricos basados en el método de elemento finito para posteriormente calcular, mediante el uso de procedimientos analíticos, la generación de calor por unidad de volumen en estructuras laminadas como son el cobre de los conductores tipo CTC de los devanados y las láminas de acero al silicio del núcleo. Por su parte en los elementos estructurales de sujeción como lo son los tirantes y herrajes y el propio tanque contenedor, se calcularon las pérdidas de potencia en función de la impedancia superficial que estas estructuras presentan. Estas pérdidas parásitas fueron aproximadas optimizando los recursos computacionales al mantener los criterios de mallado en niveles de densidad bajos, sin que esto impactara en la confiabilidad de los resultados. Al conocer la potencia disipada por cada uno de los elementos estructurales de la máquina, un estudio numérico basado en el método de volúmenes finitos fue empleado para discretizar y caracterizar el campo de velocidades que existe en los canales verticales y horizontales que funcionan como circuito hidráulico que transporta el calor generado de los conductores devanados hacia el entorno, y como consecuencia la distribución de temperatura local de cada uno de los conductores. Se reporta la ubicación y orden de magnitud de los puntos de mayor elevación de temperatura para cada uno de los pases así como la temperatura del punto caliente global de los devanados de la máquina en una fracción axisimétrica angular de  $10^\circ$  del paquete de bobinas de baja y alta tensión, para casos en los que se contemplan las pérdidas de tipo  $I^2R$  así como las pérdidas  $I^2R + Eddy$ . Se emplearon correlaciones adimensionales que indican bajo qué régimen (convección natural, convección forzada o convección mixta) fluye el fluido refrigerante a lo largo de los canales horizontales y verticales de los devanados y en función de dichos resultados se proponen modificaciones que de manera concluyente pueden reflejar una mejora sustancial en el proceso de remoción de calor de este tipo de máquinas. Todos los estudios realizados fueron ejecutados utilizando las plataformas comerciales ANSYS Emag y Mechanical. La información protegida por propiedad intelectual podrá ser consultada con el autor y/o director de la tesis.

## 1. ANTECEDENTES.

### 1.1. Introducción.

A la luz del mercado energético del siglo XXI, en el cual la competencia industrial entre las empresas que producen los equipos eléctricos es cada vez más intensa, las necesidades de mejora en la calidad y confiabilidad de los sistemas de generación y distribución es cada vez más demandante, mientras que, de manera simultánea se pretende que sean éstos económicamente más rentables. La industria manufacturera de transformadores eléctricos está obligada a elevar la eficiencia y confiabilidad de sus productos mientras se busca la reducción del costo de su producción para alcanzar un balance entre alta eficiencia y bajo costo. La eficiencia de un transformador eléctrico se ve mejorada al reducir tanto las pérdidas con carga como sin carga, mientras que la mejora en su fiabilidad radica principalmente en la precisa evaluación de los flujos magnéticos dispersos, la impedancia de corto circuito y las fuerzas resultantes en los devanados del transformador bajo condiciones de corto circuito, debido a que esto le permite a la máquina evitar sufrir de daños mecánicos y fallas tanto durante pruebas de corto circuito como en el suministro de energía eléctrica en los sistemas.

Las modificaciones a los procedimientos de diseño, selección de materiales, y su fabricación, causan variaciones muy significativas en las mediciones de los parámetros de desempeño de los transformadores, especialmente en las pruebas de pérdidas sin carga. Es por esto que los márgenes de diseño son considerados en todo momento en las etapas de producción de los transformadores. Por otra parte, existe la creciente necesidad en el mercado actual de transformadores de reducir al mínimo los márgenes de diseño sin aumentar el riesgo de violar los valores garantizados de los parámetros de rendimiento del equipo. En consecuencia, no es un motivo de sorpresa que los métodos de evaluación de las características técnicas del transformador sea una incesante búsqueda de mejora continua.

En la actualidad, la industria de los transformadores se ha apoyado de aplicaciones numéricas computacionales con el fin de lograr esa mejora continua en la calidad de los equipos. Para ello se han desarrollado eficientes modelos capaces de estudiar en dominios tridimensionales, fenómenos que resolver analíticamente representan retos de muy alto nivel [ix, xxii]. Por su parte, los métodos numéricos, que respaldan su eficacia en la resolución de modelos matemáticos, más que en los fenómenos físicos, son predicciones teóricas cuyos resultados superan en muchas ocasiones, con creces, los

beneficios que provee la ejecución de estudios experimentales, como la diferencia tan elevada en el costo de la implementación de ambas técnicas o la posibilidad de obtener, con el uso de modelos numéricos, resultados locales en el dominio tridimensional estudiado, a diferencia de estudios experimentales que en su mayoría permiten conocer, únicamente, resultados macroscópicos globales.

Es debido a esto que en la actualidad, el uso de herramientas computacionales representa una solución práctica bastante confiable para el estudio y la comprensión de la interacción que poseen diversos fenómenos multidisciplinarios que toman lugar en la operación nominal de los transformadores eléctricos [iii, vii, xiv, xv, xvii, xviii, xxi].

### **1.2. Motivación.**

Debido a la creciente demanda en el consumo de recursos energéticos, tanto la eficacia de su uso como el tiempo de respuesta que poseen las herramientas y métodos con los que se estudian, son los principales retos de la comunidad científica a nivel mundial. La desmesurada explosión demográfica así como el crecimiento a pasos agigantados de los sectores industriales, exigen en el día a día una mayor estabilidad en los sistemas eléctricos de alimentación y distribución como parte de una evolución conjugada entre las necesidades y las capacidades de suministro global. La intención que sostiene y da sentido a esta investigación radica en el interés por formular una estrategia que permita, de manera confiable y haciendo uso de conocimiento de fenómenos electromagnéticos y termohidráulicos, plantear una solución a la problemática que impone el estudio multifísico de un transformador eléctrico. Si bien, la aportación que se ambiciona es la de plantear una metodología que brinde la posibilidad de acoplar modelos numéricos electromagnéticos que determinan las pérdidas de potencia de los transformadores eléctricos, con modelos numéricos termohidráulicos que resuelvan el problema de transferencia de calor consecuente para así estar en posición de idear sistemas más eficientes, no podemos perder de vista la objetividad con la que deben evaluarse los resultados.

### **1.3. Justificación.**

El presente estudio surge a partir de la necesidad de plantear una metodología que permita estudiar y resolver modelos de estudio multifísicos confiables, en escenarios multidisciplinarios que se suscitan en equipos tales como un

transformador de potencia, con una estructura de análisis secuencial electromagnética termohidráulica, utilizando las herramientas comerciales ANSYS Emag y Mechanical. El desarrollo de una metodología confiable permitirá una interacción bilateral de información por parte de ambos modelos que permitirá identificar la relación que existe entre los fenómenos de orden electromagnético con los de tipo termofluidodinámico en la operación nominal de un transformador eléctrico.

#### **1.4. Objetivo general.**

Elaborar y formalizar una metodología de cómputo que permita, con ciertos ajustes geométricos y fenomenológicos, caracterizar la distribución de temperaturas a lo largo de los devanados de transformadores eléctricos a partir de las pérdidas electromagnéticas que se producen bajo condiciones de carga nominal en un estudio electromagnético de frecuencia oscilatoria, mediante el uso acoplado de las herramientas de software comercial ANSYS Emag y Mechanical.

#### **1.5. Objetivos particulares.**

- Determinar la distribución de la intensidad de campo así como la densidad de flujo magnético, con una variación sujeta a una frecuencia de 60 Hz a lo largo de toda la máquina.
- Proponer una metodología de procesamiento de información respaldada en modelos experimentales, reportados en el estado del arte, para aumentar la confiabilidad de los resultados tales como generación de calor en condiciones de carga del transformador, y su correcta migración a modelos termohidráulicos.
- Ejecutar un estudio de transferencia de calor entre dominios sólidos y fluidos, para identificar los niveles de temperatura en zonas críticas donde se han de suscitar puntos calientes dentro de las bobinas del transformador.
- Realizar una comparativa de los perfiles de temperatura y la ubicación de los puntos calientes de los devanados al estudiar únicamente las pérdidas por corrientes de carga contra la sumatoria de pérdidas de carga y extrañas.
- Identificar el régimen del flujo del fluido que transporta el calor de los conductores devanados de las bobinas hacia el exterior, a través de la red de canales que en estas existe.

### **1.6. Planteamiento del problema.**

En los transformadores eléctricos, el circuito magnético y las bobinas son las principales fuentes de pérdidas y, de la misma manera, responsables de la mayoría de las elevaciones de temperatura resultantes en diversas partes del equipo. Las pérdidas en el núcleo y las bobinas devanadas, y las pérdidas extrañas debido a flujos magnéticos dispersos son los principales responsables de la generación de calor dentro del transformador. La generación de calor dentro del transformador, aunque inherente al fenómeno, debe ser disipada sin dar lugar a que las bobinas del transformador alcancen niveles de temperatura que cause deterioro en sus aislantes. Si dichos aislamientos son sometidos a niveles de temperatura superiores a los que su capacidad les permite soportar durante periodos de tiempo prolongados, éstos pierden sus propiedades dieléctricas; en otras palabras, se acelera el proceso de envejecimiento de dichos materiales acortando la vida útil del transformador [xxxiv].

Existen dos características principales que definen a los materiales aislantes: Su rigidez dieléctrica y su rigidez mecánica. La rigidez dieléctrica del papel aislante no se ve afectada por la sobre elevación en los niveles de temperatura de los elementos conductores del transformador, sin embargo, estos incrementos de temperatura debilitan su estructura tal que se producen lodos que al reaccionar con el aceite, producen gases que disminuyen la rigidez dieléctrica del aceite. Es entonces el deterioro mecánico del material lo que reduce la vida útil de estos aislantes, lo que conlleva a fallas posteriores ahora sí, de tipo eléctricas.

Una estimación de temperatura acertada en las superficies de los conductores devanados de las bobinas es imperativa en el proceso de diseño de transformadores para, con ésta, seleccionar los niveles de densidad de flujo magnético que operarán en el núcleo, así como las densidades de corriente que han de fluir a través de los conductores devanados. Esto es de gran utilidad para realizar adecuaciones a los arreglos de enfriamiento instalados en los mismos equipos asegurando la operación confiable del transformador. La vida de los aislantes puede ser estimada bajo condiciones de sobrecarga para así estar en posición de tomar acciones correctivas por adelantado.

### **1.7. Hipótesis.**

Es posible desarrollar una metodología basada en herramientas computacionales que permita determinar la distribución de pérdidas extrañas totales de un transformador trifásico, así como la distribución espacial de temperatura que producen estas pérdidas. Esto último en una fracción

axisimétrica angularmente periódica del paquete de bobinas de baja y alta tensión, bajo condiciones de operación nominal mediante el uso de simulaciones computacionales multifísicas que incluyan el acoplamiento de fenómenos electromagnéticos y termofluidodinámicos.

### **1.8. Organización de la tesis.**

En el Capítulo 2 se abordan los conceptos fundamentales que describen matemáticamente los fenómenos de transporte presentes en un transformador eléctrico de potencia. Partiendo de las ecuaciones de Maxwell y el planteamiento del potencial vectorial magnético para su resolución. De la misma manera se abordan las leyes de conservación de masa, de cantidad de movimiento, de energía y algunos parámetros adimensionales asociados al flujo de fluido y transferencia de calor. Finalmente, se describe un transformador trifásico; partiendo desde el principio de operación de la máquina, los elementos que describen a un transformador como el que se estudia, los tipos de enfriamiento que utilizan y el tipo de pérdidas que afectan sus estructuras.

En el capítulo 3 se presenta un resumen de las cuestiones más relevantes reportadas en el estado del arte en lo que a estudios electromagnéticos, termohidráulicos y secuencias acopladas respecta, enfocado a transformadores eléctricos.

El capítulo 4 presenta la metodología planteada para ejecutar el estudio, los criterios de mallas ideales, las condiciones de frontera adecuadas y las técnicas de manejo de la información para obtener los resultados esperados.

El capítulo 5 describe, en el transformador caso de estudio, la metodología planteada en el capítulo 4, los modelos geométricos y consiguientemente discretos, el procedimiento secuencial de solución de los modelos electromagnético y termofluidodinámico y los resultados del caso de estudio de estudio electromagnético globales, así como los locales migrados al modelo de convección de calor, para culminar con el tren de estudio termohidráulico, cumpliendo así con los objetivos propuestos.

En el capítulo 6 figuran las discusiones finales de los resultados obtenidos, justificando la hipótesis previamente declarada, cerrando el ciclo del estudio al esclarecer los pormenores de una máquina de estas proporciones.

Posteriormente, en el capítulo 7, se plantean los nuevos objetivos que darán seguimiento a este estudio en trabajos futuros.



Finalmente, se presenta la nomenclatura empleada así como el respaldo bibliográfico que la presente tesis posee.

## 2. MARCO TEÓRICO.

### 2.1. Ecuaciones de Maxwell.

Los estudios de la teoría electromagnética son abarcados por modelos experimentales planteados por Charles-Augustin de Coulomb, Carl Friedrich Gauss (Ley de Gauss para campo eléctrico, Ley de Gauss para campo magnético), André-Marie Ampère (Ley de Ampere) Michael Faraday y Heinrich Emil Lenz (Ley de Faraday-Lenz de la inducción electromagnética) principalmente.

James Clark Maxwell desarrolló los conceptos de campo y corriente de desplazamiento y la unificación del concepto de campo eléctrico y magnético en uno solo denominado campo electromagnético [i, iii, viii, ix, xii, xiii]. La forma final de las ecuaciones que planteó son las siguientes.

#### 2.1.1. Ley de Gauss para campos eléctricos.

En presencia de una carga eléctrica puntual confinada por una superficie esférica,  $S$ , existirán líneas de campo eléctrico fluyendo perpendicularmente de la carga hacia la superficie en todas direcciones de manera homogénea. Por la ley de Coulomb sabemos que el campo eléctrico producido por una carga se determina mediante la expresión:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (2.1.1 - 1)$$

Así pues, el flux eléctrico  $\Phi_E$  representa las líneas de campo eléctrico atravesando una superficie dada, que en este caso particular es la superficie que confina a la carga eléctrica en cuestión.

$$\Phi_E = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot d\vec{A} \quad (2.1.1 - 2)$$

Integrando la expresión se obtiene:

$$\Phi_E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oiint d\vec{S} = \frac{qS}{4\pi\epsilon_0 r^2} ; S = 4\pi r^2 ; \Phi_E = \frac{q(4\pi r^2)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (2.1.1 - 3)$$

Por lo cual, es posible deducir que el flujo de campo eléctrico por unidad de área es:

$$\Phi_E = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (2.1.1 - 4)$$

Para casos en los que se presentan más de una carga puntual, haciendo uso del principio de superposición se dice que:

$$\vec{E}_{1,2} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \quad (2.1.1 - 5)$$

Por lo que podemos expresar:

$$\oiint \vec{E}_{1,2} \cdot d\vec{S} = \oiint \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} + \oiint \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} = \frac{q_1}{\epsilon_0} + \frac{q_2}{\epsilon_0} \quad (2.1.1 - 6)$$

Este principio puede aplicarse a 'n' número de cargas que se encuentren confinadas dentro de la frontera de la superficie. Para  $n > 1$  cargas podemos expresar:

$$\oiint_{s=\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\epsilon_0} ; \quad i \in V \quad (2.1.1 - 7)$$

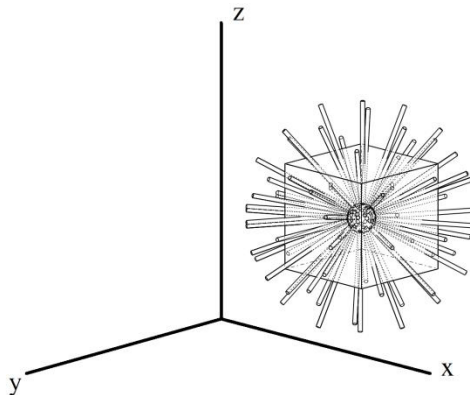


Figura 1. Volumen de control de tamaño diferencial  $dx dy dz$  del que entran y salen líneas de campo eléctrico.

En condiciones de cargas que asemejan un medio continuo en un volumen de control de dimensiones diferenciales  $dx dy dz$  como se muestra en la Figura 1, la carga dentro de este volumen está dada por la expresión:

$$\rho_q(x, y, z) dx dy dz$$

donde  $\rho_q$  representa la densidad de carga volumétrica. Por lo que es posible expresar la siguiente ecuación:

$$\oiint_{s=\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho_q(x, y, z) dx dy dz \quad (2.1.1 - 8)$$

La anterior es la ley de Gauss para flujos de campo eléctricos en superficies cerradas en forma integral. Esta ecuación puede expresarse en forma diferencial empleando el teorema de la divergencia:

$$\oiint_{s=\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dV \quad (2.1.1 - 9)$$

De tal manera que podemos reescribir la ecuación como sigue:

$$\iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dV = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho_q dV \quad (2.1.1 - 10)$$

Y debido a que existirá divergencia en el campo eléctrico únicamente en presencia de cargas eléctricas, se considera una igualdad de volúmenes, por lo que resulta la forma diferencial de la ley de Gauss:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_q}{\epsilon_0} \quad (2.1.1 - 11)$$

La expresión anterior explica que el campo eléctrico  $\vec{E}$  diverge o sale desde una carga  $\rho_q/\epsilon_0$ . Esto, gráficamente, representa vectores que salen de una fuente que los genera en todas direcciones.

### 2.1.2. Ley de Gauss para campos magnéticos.

De la misma manera que los estudios experimentales realizados para determinar la naturaleza de los campos eléctricos conducen a la ley de Gauss para campos eléctricos, también se desarrollaron modelos experimentales para comprender el comportamiento de los campos magnéticos como sigue:

Las líneas de campo magnético, emitidas por imanes permanentes o electroimanes, presentan un comportamiento denominado dipolo magnético. A diferencia de las líneas de campo eléctrico, que se aproximan o alejan de las cargas eléctricas según su polaridad (fuentes o sumideros), las líneas de campo magnético tienen su origen y su fin en un mismo punto.

Con la intención de evaluar la analogía que existe entre las líneas de campo eléctrico y magnético, es preciso emplear una superficie gaussiana en una fracción de un dominio tridimensional donde existe un dipolo magnético. Esta

superficie, independiente de su forma y posición, denominada  $S$ , permite apreciar de manera hipotética como las líneas de campo magnético que entran en ella, son las mismas que salen, como en la Figura 2 se puede apreciar. Es decir

$$\sum_{i=0}^n \text{Líneas ent} - \sum_{i=0}^n \text{Líneas sal} = 0 \quad (2.1.2 - 1)$$

O, dicho de otra manera:

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (2.1.2 - 2)$$

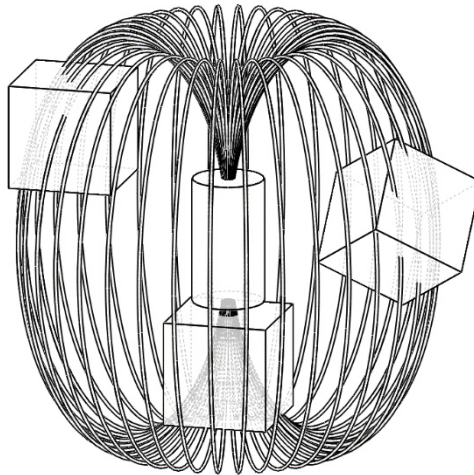


Figura 2. Volúmenes de control de tamaño diferencial de tamaño  $dx dy dz$  en el que se expresan las líneas de campo entrando y saliendo de los mismos.

Así pues, aplicando el teorema de la divergencia replanteamos la ecuación de la siguiente manera:

$$\oiint_{S=\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) dV \quad (2.1.2 - 3)$$

Por lo cual podemos expresar, en forma diferencial, la ecuación de Gauss para campo magnético como:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.1.2 - 4)$$

En este caso la divergencia del campo magnético es cero debido a que no salen ni entran vectores de campo sino que se producen caminos cerrados desde la propia fuente de  $\vec{B}$ .

### 2.1.3. Ley de Ampere.

Los modelos experimentales de Ampere formulan una relación entre las líneas de campo magnético en un ciclo cerrado y dos fuentes que pueden producirlo; un flujo de corriente a través de una superficie cerrada, así como un campo eléctrico variable con el tiempo. La formación de las líneas de campo magnético  $\vec{B}$  siempre formarán ciclos cerrados enclaustrando, como la frontera, a la superficie donde se presentan los flujos respectivos del vector de densidad de corriente  $\vec{J}$  y  $d\vec{E}/dt$ , independientemente de la forma que posea la superficie, como se muestra en la Figura 3. La suma algebraica de las contribuciones que aportan los vectores de corriente o campo eléctrico dictaminan el valor equivalente de  $\vec{B}$ , el cual puede expresarse como:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (2.1.3 - 1)$$

Aplicando el teorema del rotacional podemos obtener la expresión diferencial de la ley de Ampere:

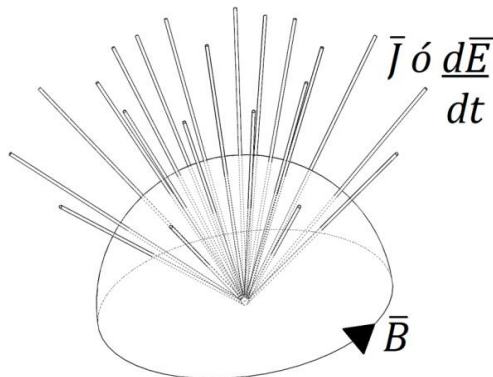


Figura 3. Superficie extruida que muestra la independencia de su forma con respecto a los vectores que la cruzan.

$$\oint_{l=\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oiint_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} \quad (2.1.3 - 2)$$

Y de la definición de flujo eléctrico tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (2.1.3 - 3)$$

Replanteando nuevamente la ecuación (2.1.3 – 1) resulta:

$$\oiint_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \iint_S \mu_0 \vec{J} \cdot d\vec{S} + \iint_S \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (2.1.3 - 4)$$

Integrando los diferenciales de superficie obtenemos dicha expresión diferencial como sigue:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.1.3 - 5)$$

La ecuación anterior explica que en un hilo conductor recto con una densidad de corriente  $\vec{J}$  que lo atraviesa, se producirá un campo magnético rotacional alrededor del alambre y dicho rotor tendrá el mismo sentido que el vector  $\vec{J}$ .

#### 2.1.4 Ley de Faraday-Lenz.

Este modelo, deducido de forma experimental, expone el fenómeno de inducción electromagnética producido por una fuerza electromotriz debido a un campo magnético que fluctúa con el tiempo. La fuerza electromotriz (*fem*) se define como:

$$\epsilon = \oint_{l=\partial S} (\vec{E} + \vec{\nabla} \times \vec{B}) dl = -\frac{d\Phi_m}{dt} \quad (2.1.4 - 1)$$

La ecuación anterior expresa que en cualquier circuito hecho de material conductor de electricidad, al integrar las fuerzas eléctricas y magnéticas a través del circuito cerrado, obtendremos la tasa de cambio temporal del flujo magnético a lo largo del circuito. El flujo magnético es definido como sigue:

$$\Phi_m = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (2.1.4 - 2)$$

Existen dos motivos por los cuales el flujo magnético puede variar; con el tiempo o con el espacio (o ambas), por lo cual se considera que:

$$-\frac{d\Phi_m}{dt} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \oint_{\partial S} \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot d\vec{l} \quad (2.1.4 - 3)$$

En presencia de variaciones únicamente de orden temporal, es posible reacomodar la ecuación de la manera siguiente:

$$\epsilon = \oint_{l=\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (2.1.4 - 4)$$

Esta última expresión no requiere de la presencia de un circuito debido a que no depende de una velocidad relativa, sino de variaciones únicamente temporales en contornos cerrados fijos. En otras palabras, la ecuación dicta que en presencia de un campo magnético variable con el tiempo, existirá un campo eléctrico, que a diferencia de los campos electrostáticos, tendrá una integral de línea con un valor diferente de cero, es decir, un campo eléctrico no conservativo con una fuente de origen magnético en lugar de cargas eléctricas. Por su parte, el signo menos de la ecuación (2.1.4 – 4) se atribuye a experimentos realizados por Heinrich Lenz. Él descubrió la dirección que poseen las corrientes inducidas en circuitos cerrados en presencia de campos magnéticos variables con el tiempo mientras que Michael Faraday únicamente detectó el flujo de corriente debido a la fuerza electromotriz inducida, pasando por alto la dirección de la misma.

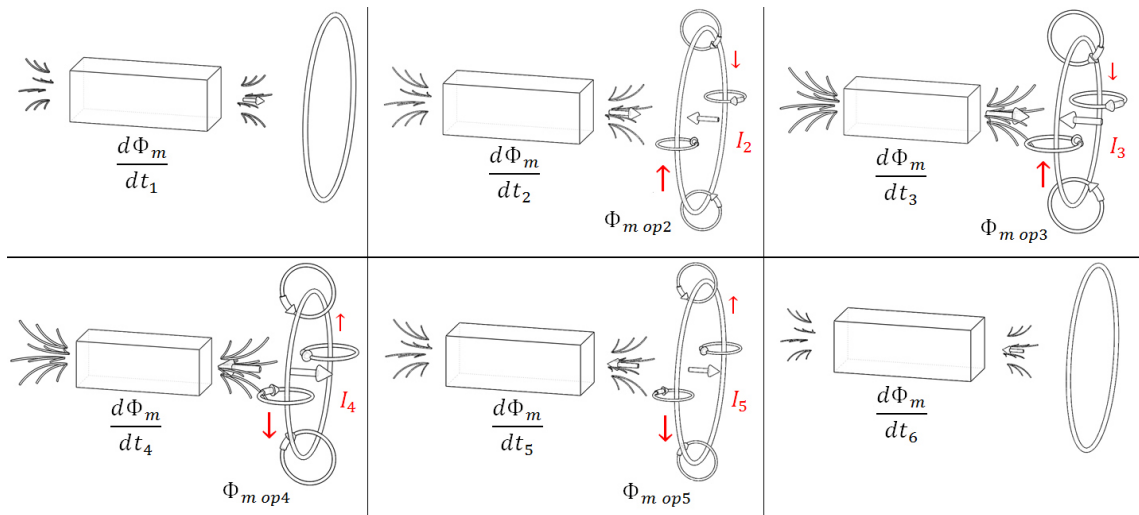


Figura 4. Secuencia evolutiva temporal del proceso de inducción de una fuerza electromotriz que hace circular a una corriente en un conductor eléctrico.

La Figura 4 muestra como un flujo magnético que varía con el tiempo  $d\Phi_m/dt$  induce en un conductor eléctrico un campo magnético opuesto,  $\Phi_{m\ op}$ , este campo que se opone, produce a su vez un campo eléctrico en la frontera de la superficie (el conductor). La integral de línea del campo eléctrico generado



supone una *fem* que da lugar a un flujo de corriente cuya dirección se determina empleando la regla de la mano derecha, en la que el dedo pulgar impone la dirección del flujo magnético  $\Phi_{mop}$  mientras que los dedos restantes curvados indican el sentido de la corriente inducida en el conductor. La forma diferencial de la ley de Faraday-Lenz se obtiene aplicando el teorema del rotacional a la ecuación (2.1.4 – 4):

$$\oint_{l=\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} \quad (2.1.4 - 5)$$

Por lo que se obtiene:

$$\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (2.1.4 - 6)$$

Finalmente, la ecuación resulta como sigue:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.1.4 - 7)$$

Esta última ecuación expresa que al existir una variación del campo  $\vec{B}$ , éste provocará un campo  $\vec{E}$ , o bien la existencia de un campo magnético no estacionario en el espacio libre provocará circulaciones del vector de campo eléctrico a lo largo de líneas cerradas. En presencia de cargas libres como los electrones, dicho campo eléctrico producirá una corriente eléctrica.

## 2.2. Potencial Eléctrico y Magnético.

Partiendo de un dominio espacial de nombre  $\Omega$  en el que coexisten 2 subdominios:  $\Omega_1$  (medio conductor) y  $\Omega_2$  (medio no conductor) así como corrientes fuente en el mismo, como se muestra en la Figura 5, es posible plantear un problema clásico de inducción electromagnética [iii, v, vi, vii]. La frontera de  $\Omega_2$  y por ende  $\Omega$ , denominada  $\Gamma$ , se divide en dos de acuerdo a los dos tipos de condición de frontera ocurrentes en estos problemas: En  $\Gamma_B$  la componente normal de la densidad de flujo se prescribe cero, por su parte en  $\Gamma_H$  la componente tangencial de la intensidad de campo magnético es explícitamente 0. La frontera del dominio  $\Omega_1$  denotada por  $\Gamma_{12}$  representa la zona de interfaz entre el medio conductor y el medio no conductor por lo que en esa zona debe mantenerse una condición que permita la continuidad en dicha interfaz. Las ecuaciones diferenciales a resolver en este tipo de problema, así como sus condiciones de frontera resultan entonces:

$$\left. \begin{aligned}
 \nabla \times \mathbf{H} - \sigma \mathbf{E} &= 0 & (2.2 - 1) \\
 \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 & (2.2 - 2) \\
 \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & (2.2 - 3)
 \end{aligned} \right\} \text{en } \Omega_1$$

$$\left. \begin{aligned}
 \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J}_s & (2.2 - 4) \\
 \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & (2.2 - 5)
 \end{aligned} \right\} \text{en } \Omega_2$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (2.2 - 6) \quad \text{en } \Gamma_B$$

$$\mathbf{H} \times \mathbf{n} = 0 \quad (2.2 - 7) \quad \text{en } \Gamma_H$$

$$\left. \begin{aligned}
 \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}_2 &= 0 & (2.2 - 8) \\
 \mathbf{H}_1 \times \mathbf{n}_1 + \mathbf{H}_2 \times \mathbf{n}_2 &= 0 & (2.2 - 9)
 \end{aligned} \right\} \text{en } \Gamma_{12}$$

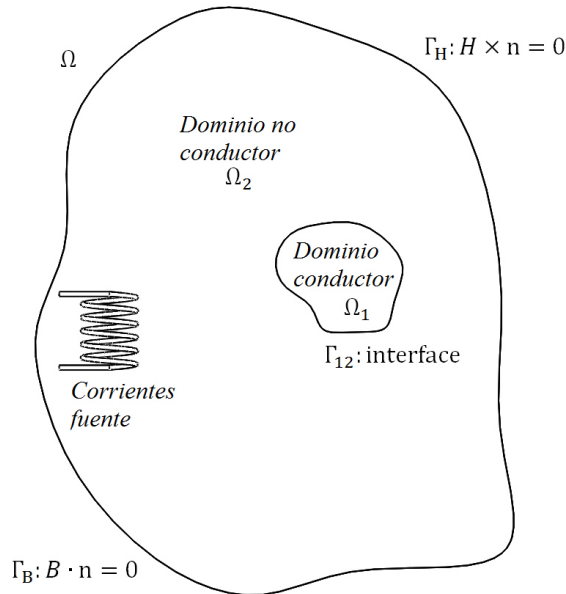


Figura 5. Regiones de frontera e interfaces en un problema típico de inducción electromagnética [iii].

El potencial vectorial magnético [iii] es la representación de un campo vectorial tridimensional que permite conocer las distribuciones de un campo magnético dado. El término  $A, V - A$  presenta una formulación en la cual se utiliza el potencial vectorial magnético  $A$  tanto en medios conductores  $\Omega_1$  como en medios no conductores  $\Omega_2$ , por su parte, el potencial escalar eléctrico  $V$  únicamente en  $\Omega_1$  [vi, vi, vii]. Los vectores de campo se obtienen a partir de dichos potenciales como sigue:

$$B = \nabla \times A \quad (2.2 - 9)$$

$$E = -\frac{\partial B}{\partial t} - \nabla V \quad (2.2 - 10)$$

Estas especificaciones aseguran la satisfacción de las ecuaciones (2.2 - 2) y (2.2 - 3) en  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ . Por su parte, las ecuaciones (2.2 - 1) y (2.2 - 4), derivadas de la ley de Ampere para dominios conductores y no conductores, respectivamente, se modifican como sigue:

$$\nabla \times v_m \nabla \times A + \sigma \frac{\partial A}{\partial t} + \sigma \nabla V = 0 \quad (2.2 - 11) \quad \text{en } \Omega_1$$

$$\nabla \times v_m \nabla \times A = J_s \quad (2.2 - 12) \quad \text{en } \Omega_2$$

Las condiciones de frontera (2.2 - 6) y (2.2 - 7), que imponen valores de la componente normal de la densidad de flujo magnético y la componente tangencial de la intensidad de campo magnético ambos iguales a cero en pro de acotar los potenciales en el dominio de estudio, son expresadas como sigue:

$$n \cdot \nabla \times A = 0 \quad (2.2 - 13) \quad \text{en } \Gamma_B$$

$$v_m \nabla \times A \times n = 0 \quad (2.2 - 14) \quad \text{en } \Gamma_H$$

Mientras que las condiciones en la interfaz conductor/no conductor son:

$$\left. \begin{aligned} n_1 \cdot \nabla \times A_1 + n_2 \cdot \nabla \times A_2 &= 0 \quad (2.2 - 15) \\ v_{m1} \nabla \times A_1 \times n_2 + v_{m2} \nabla \times A_2 \times n_2 &= 0 \quad (2.2 - 16) \end{aligned} \right\} \text{en } \Gamma_{12}$$

Sin embargo, el hecho de que las ecuaciones planteadas hasta este punto definan únicamente el valor del rotacional de  $A$ , hace pensar que éste en realidad puede ser representado como un valor resultante del gradiente de una función escalar arbitraria. Es por esto que, para brindarle singularidad al vector  $A$ , es preciso plantear un ajuste en el cual se defina el valor de su divergencia y

una condición de frontera que se satisfaga el valor en  $A$ . Esto se logra retomando la ecuación (2.2 – 13), definiendo la componente normal de  $B$  como la siguiente condición de frontera:

$$n \times A = 0 \quad (2.2 - 17) \quad \text{en } \Gamma_B$$

Esta expresión define en  $\Gamma_B$  la componente tangencial del gradiente de la función escalar que puede ser añadido sin alterar al campo magnético. Por su parte, la condición de frontera adecuada en  $\Gamma_H$  sería entonces la componente normal del vector potencial. Con lo cual obtenemos las siguientes condiciones de frontera:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times A = B \quad (2.2 - 18) \\ \nabla \cdot A = 0 \quad (2.2 - 19) \end{aligned} \right\} \text{ en } \Omega$$

$$n \times A = 0 \quad (2.2 - 20) \quad \text{en } \Gamma_B$$

$$n \cdot A = 0 \quad (2.2 - 21) \quad \text{en } \Gamma_H$$

Una de las dificultades en la aplicación de las anteriores condiciones que aseguran la singularidad del potencial vectorial magnético,  $A$ , se encuentra en satisfacer el ajuste de Coulomb (2.2 – 19). Para ello, se propone agregar el término  $-\nabla v_m \nabla \cdot A$  en el lado izquierdo de las ecuaciones (2.2 – 11) y (2.2 – 12), donde  $v_m$  representa la reluctividad magnética del material. Después, se prescribe la propiedad de divergencia cero de la densidad de corriente en la ecuación (2.2 – 11). De manera similar, la componente normal de la densidad de corriente en  $\Gamma_{12}$  es cero [iii, iv]. Las ecuaciones diferenciales que ahora se tienen son:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times v_m \nabla \times A - \nabla v_m \nabla \cdot A + \sigma \frac{\partial A}{\partial t} + \sigma \nabla V = 0 \quad (2.2 - 22) \\ \nabla \cdot \left( -\sigma \frac{\partial A}{\partial t} - \sigma \nabla V \right) = 0 \quad (2.2 - 23) \end{aligned} \right\} \text{ en } \Omega_1$$

$$\nabla \times v_m \nabla \times A - \nabla v_m \nabla \cdot A = J_s \quad (2.2 - 24) \quad \text{en } \Omega_2$$

Tomando la divergencia de (2.2 – 22) y (2.2 – 24) y señalando que tanto la ecuación (2.2 – 23) como el término  $J_s$  deben poseer divergencia igual a cero, obtenemos la siguiente expresión:

$$\nabla^2(v_m \nabla \cdot A) = 0 \quad (2.2 - 25) \quad \text{en } \Omega$$

Ahora bien, si fuera posible que se aplicaran condiciones de Dirichlet o Neumann en  $v_m \nabla \cdot A$  a lo largo de  $\Gamma$ , se puede satisfacer por completo el ajuste de Coulomb. De igual manera esto justifica la inclusión de los términos  $-\nabla v_m \nabla \cdot$

$A$  en las ecuaciones (2.2 – 22) y (2.2 – 24) las cuales resultan equivalentes a las ecuaciones (2.2 – 11) y (2.2 – 12). Tomando el valor de la componente normal de la ecuación (2.2 – 24) en  $\Gamma_H$  obtenemos:

$$n \cdot \nabla \times v_m \nabla \times A - \frac{\partial}{\partial n} v_m \nabla \cdot A = 0 \quad (2.2 - 26) \quad \text{en } \Gamma_H$$

Sin embargo, dado que cualquier término fuente de corriente en que atraviese  $\Gamma_H$  violaría la condición de frontera (2.2 – 14), podemos reescribir el primer término así:

$$n \cdot \nabla \times v_m \nabla \times A = -\nabla \cdot (n \times v_m \nabla \times A) \quad (2.2 - 27)$$

Que de cualquier manera equivale a cero según (2.2 – 14), por lo que se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial n} v_m \nabla \cdot A = 0 \quad (2.2 - 28) \quad \text{en } \Gamma_H$$

Es decir, condición de frontera homogénea de Neumann en  $v_m \nabla \cdot A$  a lo largo de  $\Gamma_H$ . Así, para lograr satisfacer el ajuste de Coulomb es necesario implementar condiciones de frontera homogéneas de Dirichlet a lo largo de la interfaz  $\Gamma_B$

$$v_m \nabla \cdot A = 0 \quad (2.2 - 29) \quad \text{en } \Gamma_B$$

En resumen, la solución al problema de valor en la frontera planteado conlleva a potenciales singulares que satisfacen las ecuaciones diferenciales, y las condiciones de frontera y de interfaz (2.2 – 11 a 2.2 – 16) planteadas para el potencial vectorial magnético y potencial escalar eléctrico propuestos en la formulación  $A, V - A$  [i, iii]. Éstas son:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times v_m \nabla \times A - \nabla v_m \nabla \cdot A + \sigma \frac{\partial A}{\partial t} + \sigma \nabla V &= 0 \quad (2.2 - 30) \\ \nabla \cdot \left( -\sigma \frac{\partial A}{\partial t} - \sigma \nabla V \right) &= 0 \quad (2.2 - 31) \end{aligned} \right\} \text{en } \Omega_1$$

$$\nabla \times v_m \nabla \times A - \nabla v_m \nabla \cdot A = J_s \quad (2.2 - 32) \quad \text{en } \Omega_2$$

$$n \times A = 0 \quad (2.2 - 33)$$

$$v_m \nabla \cdot A = 0 \quad (2.2 - 34)$$

} en  $\Gamma_B$

$$v_m \nabla \times A \times n = 0 \quad (2.2 - 35)$$

$$n \cdot A = 0 \quad (2.2 - 36)$$

} en  $\Gamma_H$

$$A_1 = A_2 \quad (2.2 - 37)$$

$$v_{m1} \nabla \times A_1 \times n_1 + v_{m2} \nabla \times A_2 \times n_2 = 0 \quad (2.2 - 38)$$

$$v_{m1} \nabla \cdot A_1 - v_{m2} \nabla \cdot A_2 = 0 \quad (2.2 - 39)$$

$$n \cdot \left( -\sigma \frac{\partial A}{\partial t} - \sigma \nabla V \right) = 0 \quad (2.2 - 40)$$

} en  $\Gamma_{12}$

El cómputo de los campos de corrientes de *Eddy* en dominios tridimensionales es el principal reto a solucionar, por ello la implementación de los potenciales enlistados al final del desglose de la formulación  $A, V - A$ . Con la implementación del potencial vectorial magnético y el potencial escalar eléctrico, es posible derivar los campos magnéticos y campos eléctricos en dominios no conductores y conductores, respectivamente, de manera numérica mediante el método de elemento finito [iii], como se verá en capítulos posteriores. Es preciso hacer mención que los resultados de la evaluación de estas ecuaciones en modelos tridimensionales posteriores, darán como resultado las tasas de generación de calor volumétrica debido a fenómenos electromagnéticos que se estudiarán mediante las ecuaciones de transporte de conservación de masa, de cantidad de movimiento y de energía, que se abordan a continuación.

### 2.3. Fundamentos de la transferencia de calor.

Partiendo de una solución electromagnética, con una distribución de pérdidas de potencia en dominios conductores, el calor generado y el flujo y distribución de dicha energía es el siguiente objetivo a estudiar. Podemos definir entonces la transferencia de calor como la energía en tránsito debido a una diferencia de temperaturas. Es decir, siempre que existan gradientes de temperatura en un cuerpo o en múltiples cuerpos, debe ocurrir un proceso de transporte de calor [xxv, xxvi]. En un volumen de control de tamaño diferencial, donde interactúan diversos cuerpos con propiedades térmicas distintas en un mismo dominio

conformado por un fluido refrigerante, es preciso evaluar el transporte de energía térmica producida por efectos electromagnéticos, desde el centro geométrico de las fuentes hacia la interfaz con el fluido o fronteras locales (modelo de conducción de calor). Hecho esto, es preciso evaluar el transporte de calor entre las fronteras locales de los elementos internos hacia las fronteras del dominio de control y así dimensionar una distribución de temperatura en el dominio total. En otras palabras, debido a la naturaleza del dominio de control y del fenómeno planteado, coexiste la transferencia de calor por procesos conductivos y convectivos en un modelo de transferencia de calor conjugada.

### 2.3.1. Conducción de calor sólidos-interfaz.

El objetivo de realizar un análisis de conducción, es determinar el campo de temperatura en los medios sólidos, a partir de las condiciones impuestas en las fronteras del dominio. Ello permitirá conocer los flujos de calor y las temperaturas de los elementos.

Sea un dominio sólido de tamaño diferencial  $dx dy dz$ , como se muestra en la Figura 6. En este no existe movimiento de volumen relativos (advección). Al existir un gradiente de temperatura, la transferencia de calor ocurrirá en sentidos opuestos a dichos gradientes. Las velocidades de transferencia de calor por conducción perpendiculares a cada una de las superficies  $x$ ,  $y$  y  $z$  se indican con los términos  $q_x$ ,  $q_y$  y  $q_z$  respectivamente. Por su parte, en las superficies opuestas se expresan como sigue:

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \quad (2.3.1 - 1)$$

$$q_{y+dy} = q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \quad (2.3.1 - 2)$$

$$q_{z+dz} = q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz \quad (2.3.1 - 3)$$

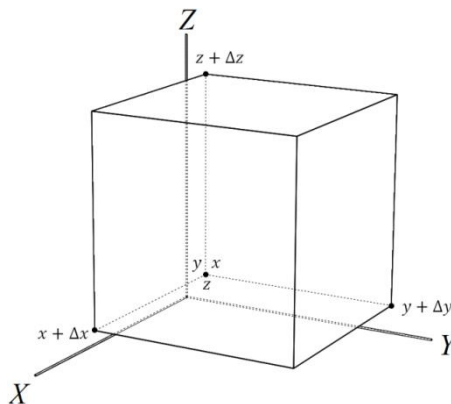


Figura 6. Dominio sólido para estudio de conducción de calor [xxv].

Es preciso considerar también que los cuerpos poseen un término de generación de calor por efectos electromagnéticos, lo que podemos considerar como un término fuente en la ecuación. Esto es:

$$\dot{E}_g = \dot{q} \, dx \, dy \, dz \quad (2.3.1 - 4)$$

El término  $\dot{q}$  representa la rapidez de generación de calor por unidad de volumen. Por otro lado, considerando el término de energía térmica almacenada por el material en el volumen de control obtenemos lo siguiente:

$$\dot{E}_{alm} = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \, dx \, dy \, dz \quad (2.3.1 - 5)$$

donde  $\rho C_p \partial T / \partial t$  es la rapidez de cambio temporal de la energía sensible del medio por unidad de volumen. Señalando la ecuación de la conservación de la energía que expresan que las velocidades de transferencia de calor por conducción constituyen el flujo entrante y el flujo saliente, tenemos la siguiente expresión:

$$\dot{E}_{ent} + \dot{E}_g - \dot{E}_{sale} = \dot{E}_{alm} \quad (2.3.1 - 6)$$

Y al sustituir las ecuaciones (2.3.1 - 4) y (2.3.1 - 5) obtenemos:

$$\begin{aligned} q_x + q_y + q_z + \dot{q} \, dx \, dy \, dz - q_{x+dx} - q_{y+dy} - q_{z+dz} \\ = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \, dx \, dy \, dz \quad (2.3.1 - 7) \end{aligned}$$

Sustituyendo en la anterior las ecuaciones (2.3.1 - 1), (2.3.1 - 2) y (2.3.1 - 3) se sigue que:

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} \, dx - \frac{\partial q_y}{\partial y} \, dy - \frac{\partial q_z}{\partial z} \, dz + \dot{q} \, dx \, dy \, dz = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \, dx \, dy \, dz \quad (2.3.1 - 8)$$

Cabe mencionar que la rapidez de conducción de calor se evalúa a partir de la Ley de Fourier de conducción de calor, que dice

$$q_x = -k \, dy \, dz \, \frac{\partial x}{\partial x} \quad (2.3.1 - 9)$$

$$q_y = -k \, dx \, dz \, \frac{\partial x}{\partial y} \quad (2.3.1 - 10)$$

$$q_z = -k \, dx \, dy \, \frac{\partial x}{\partial z} \quad (2.3.1 - 11)$$



donde cada componente de flujo de calor se multiplica por el área de la superficie diferencial de control apropiada para obtener la rapidez de la transferencia de calor. Al sustituir las ecuaciones (2.3.1 – 9), (2.3.1 – 10) y (2.3.1 – 11) en la ecuación (2.3.1 – 8) y dividir las dimensiones del volumen de control  $dx$ ,  $dy$  y  $dz$  obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.3.1 - 12)$$

La ecuación (2.3.1 – 12) es la forma general de la ecuación de difusión de calor de la cual, al solucionarla, obtenemos la distribución de temperaturas  $T(x, y, z)$  en función del tiempo. Para fines de estudio en estado estable, el término transitorio es despreciado y la ecuación se simplifica como sigue:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \quad (2.3.1 - 13)$$

A partir de la ecuación (2.3.1 – 13) podemos determinar la distribución de temperatura, por fenómenos difusivos, en estado estable, a lo largo de los bloques sólidos del dominio de control, siempre y cuando se impongan en las fronteras, condiciones adecuadas para fenómeno. En éste caso son:

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{n=0} = h [T_s - T_{inf}] \quad (2.3.1 - 14)$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{n=0} = 0 \quad (2.3.1 - 15)$$

La condición de frontera (2.3.1 – 14) representa un balance energético en las superficies de interfaz, señalando que la energía térmica transferida por convección es igual a la transferida por conducción. Por su parte, la condición de frontera (2.3.1 – 15) denota una pared que no transfiere calor. Esto puede comprenderse como una pared adiabática o para fines prácticos, como se verá en este estudio, una pared que representa un plano simétrico de un volumen de control.

### 2.3.2. Convección de calor interfaz-fluido.

El término convección de calor describe la transferencia de energía calorífica que ocurre entre una superficie y un fluido que se mueve sobre ésta [xxv, xxvi, xxvii]. Cuando se habló de procesos de difusión de calor, el fenómeno de convección sólo representaba una posible condición de frontera para la resolución de éstos. En los estudios de convección, el transporte de calor se produce tanto por difusión (de manera microscópica en la interfaz sólido/fluido) como por advección (transporte de calor por movimiento volumétrico global de fluido).

En la Figura 7 observamos un fluido con velocidad  $V$  y una temperatura  $T_\infty$  fluyendo sobre una superficie de forma arbitraria y área  $A_s$  con una temperatura constante de  $T_s$ . Sabemos que, a partir de un gradiente entre  $T_\infty$  y  $T_s$ , tendrá lugar una transferencia de calor por convección con un flujo de calor por unidad de área local  $q''$  como sigue:

$$q'' = h(T_s - T_\infty) \quad (2.3.2 - 1)$$

donde  $h$  es el coeficiente de transferencia de calor local. Dicho coeficiente variará en función del punto en éste que se mida debido a la superficie irregular de la forma. Por esto, para obtener el flujo de calor, es preciso recurrir a una integral de superficie como sigue:

$$q = \int_{A_s} q'' dA_s \quad (2.3.2 - 2)$$

Y contemplando la ecuación (2.3.2 - 1) tenemos:

$$q = (T_s - T_\infty) \int_{A_s} h dA_s \quad (2.3.2 - 3)$$

Definiendo un coeficiente de transferencia de calor promedio obtenemos:

$$q = \bar{h}A_s(T_s - T_\infty) \quad (2.3.2 - 4)$$

De las ecuaciones (2.3.2 - 3) y (2.3.2 - 4) obtenemos una expresión final del coeficiente local de transferencia de calor:

$$\bar{h} = \frac{1}{A_s} \int_{A_s} h dA_s \quad (2.3.2 - 5)$$

Es preciso también introducir los conceptos de capas límite convectivas tanto hidrodinámicas como térmicas para facilitar la comprensión de los perfiles de

temperatura y campos de velocidad en zonas adyacentes a superficies sólidas, como será el caso.

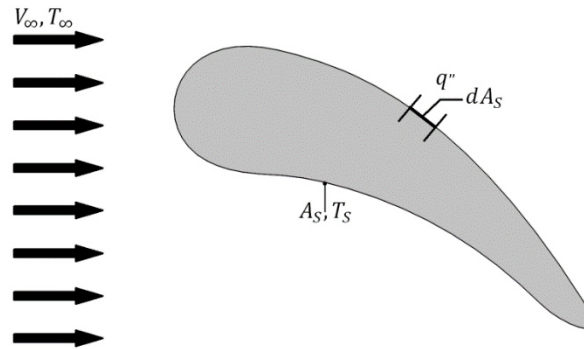


Figura 7. Efectos de la transferencia de calor locales y totales en una superficie arbitraria [xxv].

La capa límite hidrodinámica se define como la zona en la cual, los esfuerzos cortantes entre el fluido en movimiento y el sólido, producen un decremento en la velocidad local de las partículas de fluido [xxv, xxvi]. Este decremento en la velocidad es apreciable en la Figura 8. Entendemos, por lo anterior, que en la zona de interfaz entre sólido/fluido, la velocidad del fluido es  $u_s = 0$  y a lo largo de todo el espesor de la capa límite de longitud  $\delta$ ,  $u < u_\infty$ . El orden de magnitud del espesor de la capa límite hidrodinámica denominada como  $\delta$  se define como  $u = 0.99u_\infty$ . Entonces, podemos definir los perfiles de velocidad de la capa límite como la manera en que  $u$  varía con respecto a  $y$  a través de la capa límite. Así mismo, el espesor de la capa límite tiende a aumentar con respecto a la componente  $x$  debido a la evolución de ésta en dirección del avance del fluido. Debido a su inherente relación con la mecánica de fluidos, es posible relacionarla con los esfuerzos cortantes  $\tau_s$  y así, con los efectos de fricción. Los cuales se describen mediante:

$$C_f \equiv \frac{\tau_s}{\frac{\rho u_\infty^2}{2}} \quad (2.3.2 - 6)$$

donde  $C_f$  denota el coeficiente de fricción local. Este parámetro adimensional permite determinar el arrastre por fricción en superficies siempre y cuando se asuma la presencia de un fluido newtoniano, en cuyo caso el esfuerzo cortante en la superficie está dado por:

$$\tau_s = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (2.3.2 - 7)$$

donde  $\mu$  representa la viscosidad dinámica del fluido.

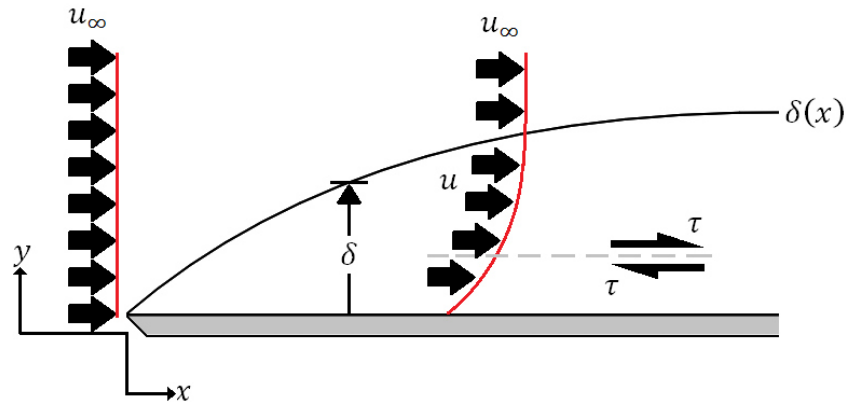


Figura 8. Capa límite hidrodinámica a lo largo de una placa plana [xxv].

De la misma manera que, en el litoral sólido/fluido, se produce la capa límite hidrodinámica, también se produce otro fenómeno denominado capa límite térmica. Esta, por su parte, representa la zona en la cual, la temperatura del fluido  $T_\infty$  y la temperatura de la superficie  $T_s$  presentan gradientes que varían con respecto a la componente  $y$ . En la Figura 9, se aprecia como las partículas de fluido que se encuentran en contacto directo con la superficie del sólido poseen la misma temperatura que éste (equilibrio térmico). A partir de aquí, la zona en la que existe el mencionado gradiente de temperatura se denomina como espesor de capa límite térmica  $\delta_t$  y se define como el valor de  $y$  para el cual la siguiente relación se cumple:

$$\frac{T_s - T}{T_s - T_\infty} \geq 0.99 \quad (2.3.2 - 8)$$

Y conforme la componente  $x$  se incrementa, los efectos del transporte de calor penetran aún más en la corriente libre  $u_\infty$ , aumentando con esto el espesor de la capa límite térmica. Debido a que en la interfaz sólido/fluido, la velocidad de las partículas de fluido es nula, podemos determinar la temperatura de éstas a partir de la ley de Fourier (2.3.1 – 9, 2.3.1 – 10 y 2.3.1 – 11), es decir, únicamente debido a conducción de calor:

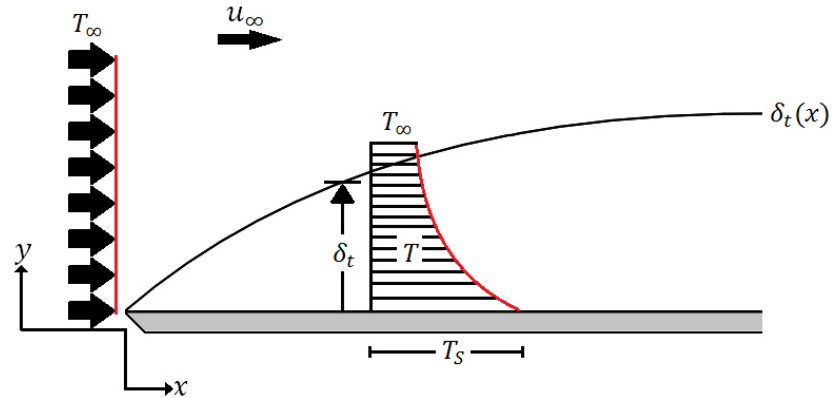


Figura 9. Capa límite térmica a lo largo de una placa plana con temperatura invariable en la componente  $x$  [xxv].

$$q_s'' = -k_f \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (2.3.2 - 9)$$

Combinando la ecuación (2.3.2 – 9) con la Ley de enfriamiento de Newton obtenemos:

$$h = \frac{-k_f \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}}{T_s - T_\infty} \quad (2.3.2 - 10)$$

Debido a que la diferencia de temperaturas  $T_s - T_\infty$  es un valor constante e independiente de la componente  $x$ , mientras  $\delta_t$  se incrementa con el aumento de la longitud en la componente  $x$ , los gradientes de temperatura en la capa límite han de decrecer al incremento de  $x$ . Acorde a esto, la magnitud de  $\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}$  va en decremento con el aumento de  $x$ , y causa a esto vemos que  $q''$  y  $h$  decrecen con el aumento de la longitud en la componente  $x$ . Recapitulando; para el flujo de un fluido sobre cualquier superficie siempre han de existir una capa límite hidrodinámica  $\delta(n)$  debida a la fricción superficial. Sin embargo una capa límite térmica  $\delta_t(n)$  y, dicho sea de paso un proceso de transferencia de calor por convección, existirá únicamente si las temperaturas de la corriente libre y de la superficie son distintas.

Por su parte, en situaciones donde las fuerzas de cuerpo actúan en un fluido en donde existen gradientes de temperatura que provocan movimiento en el mismo debido a los cambios de densidad, se habla de procesos de convección natural. El efecto producido es una fuerza de flotación que induce en el volumen corrientes convectivas. En el más común de los casos, los gradientes de densidad son debidos a gradientes de temperatura y los esfuerzos de cuerpo se

deben a campos gravitacionales que se ejercen sobre los elementos de fluido. Como es posible apreciar en la Figura 10, los campos de velocidad que existen en el fluido son debidos a variaciones en su densidad, causa al gradiente de temperaturas existente entre placas. Las ecuaciones de gobierno de la convección natural, al igual que en cualquier fenómeno de transporte, han de regir y restringir el comportamiento del fluido. Éstas son las ecuaciones de conservación de masa, conservación de cantidad de movimiento y conservación de energía.

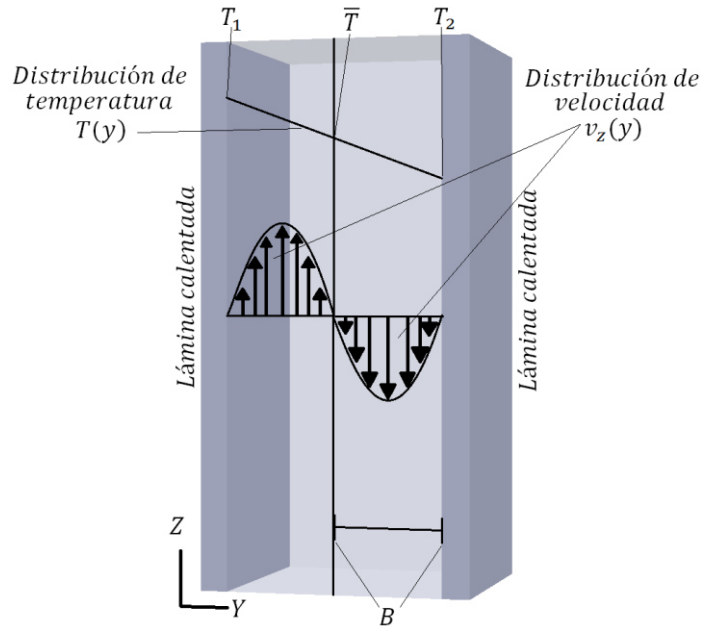


Figura 10. Flujo por convección de calor natural entre dos placas verticales a distinta temperatura [xxvii].

### 2.3.2.1. Conservación de masa o ecuación de continuidad.

Se deduce a partir de un balance de materia en un dominio estacionario de volumen  $\Delta x \Delta y \Delta z$  a través del cual circula un fluido como se aprecia en la Figura 11 [xxv, xxvi, xxvii], es decir, la velocidad de acumulación de materia es igual a la velocidad de entrada de materia menos la velocidad de salida de materia. En dicho volumen de control, se considera un fluido con una velocidad de entrada, en la cara  $x$ , de  $\rho v_x|_x \Delta y \Delta z$  y una velocidad de salida en la cara  $x + \Delta x$  asciende a  $\rho v_x|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z$ . Estos términos son descritos, de manera análoga, para las otras caras. La velocidad de acumulación de materia en el elemento de volumen diferencial es  $(\Delta x \Delta y \Delta z)(\partial \rho / \partial t)$ . El balance de materia queda entonces como sigue:

$$\Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial \rho}{\partial t} = \Delta y \Delta z [(\rho V_x)|_x - (\rho V_x)|_{x+\Delta x}] + \Delta x \Delta z [(\rho V_y)|_y - (\rho V_y)|_{y+\Delta y}] + \Delta x \Delta y [(\rho V_z)|_z - (\rho V_z)|_{z+\Delta z}] \quad (2.3.2.1 - 1)$$

Dividiendo la ecuación por  $(\Delta x \Delta y \Delta z)$  y tomando límites cuando estas dimensiones tienden a cero obtenemos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \left( \frac{\partial}{\partial x} \rho V_x + \frac{\partial}{\partial y} \rho V_y + \frac{\partial}{\partial z} \rho V_z \right) \quad (2.3.2.1 - 2)$$

Reacomodando los términos tal que las derivadas de la densidad se agrupen al lado izquierdo de la igualdad tenemos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + V_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + V_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + V_z \frac{\partial \rho}{\partial z} = -\rho \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) \quad (2.3.2.1 - 3)$$

Por último, para una densidad constante, la ecuación resulta como sigue:

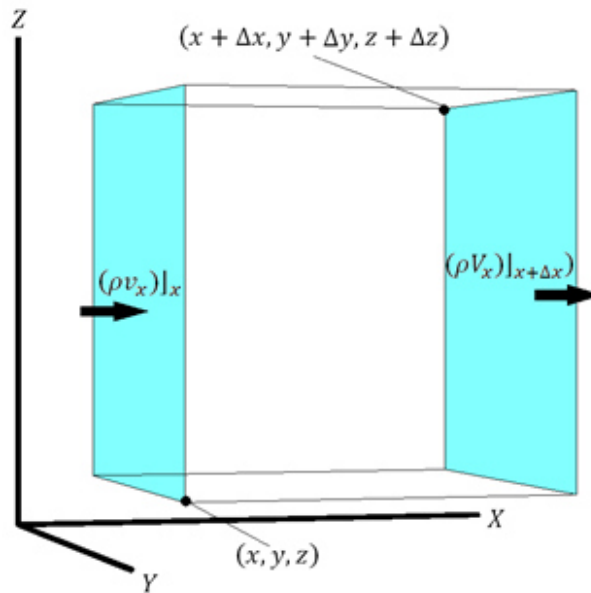


Figura 11. Elemento fijo de volumen diferencial  $dx dy dz$  a través del cual circula un fluido [xxv].

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = (\nabla \cdot V) = 0 \quad (2.3.2.1 - 4)$$

### 2.3.2.2. Ecuación de momentum.

Un balance de cantidad de momentum o movimiento en un volumen de tamaño diferencial  $\Delta x \Delta y \Delta z$ , se conceptualiza como una velocidad de acumulación de cantidad de movimiento igualado a las velocidades de entrada de la cantidad de movimiento menos las velocidades de salida de la cantidad de movimiento más la suma de las fuerzas que actúan sobre el sistema. Como podemos apreciar en la Figura 12.

Es preciso mencionar que, en primera instancia, se habla de un comportamiento no estacionario y con un fluido capaz de moverse, de manera arbitraria, a través de las seis caras del dominio. Considerando únicamente la componente  $x$ , es necesario indicar que la cantidad de movimiento entra y sale del elemento volumétrico de tamaño diferencial por medio de dos mecanismos: por convección debida al flujo global del fluido y por transporte molecular debido a los gradientes de la velocidad.

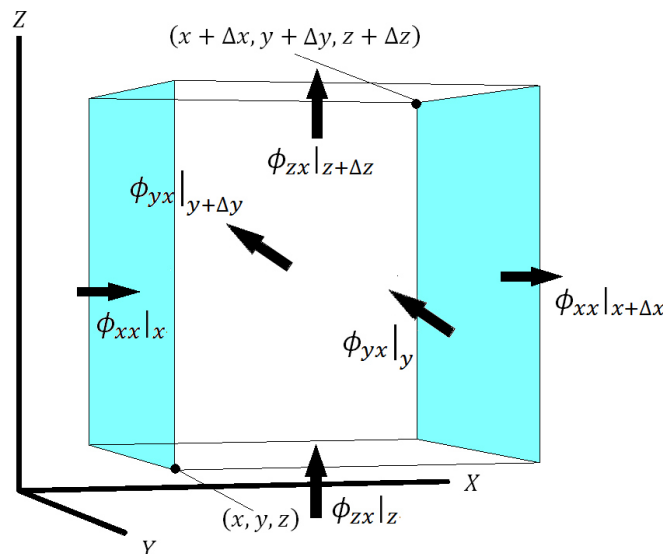


Figura 12. Elemento fijo de volumen  $x$  y  $z$  en el que se señala, con flechas, la dirección en que se transporta el componente  $x$  de la cantidad de movimiento a través de las superficies  $[xx]$ .

La velocidad con que entra por convección en la componente  $x$  la cantidad de movimiento en la cara situada en  $x$  es  $\rho v_x v_x|_x \Delta y \Delta z$ , y la velocidad con la que sale por  $x + \Delta x$  es  $\rho v_x v_x|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z$ . Para las caras restantes escribimos ecuaciones análogas. Por lo que el flujo convectivo neto de la cantidad de movimiento en  $x$  en un elemento de volumen de tamaño diferencial es:



$$\Delta y \Delta z (\rho V_x V_x|_x - \rho V_x V_x|_{x+\Delta x}) + \Delta x \Delta z (\rho V_y V_x|_y - \rho V_y V_x|_{y+\Delta y}) + \Delta x \Delta y (\rho V_z V_x|_z - \rho V_z V_x|_{z+\Delta z}) \quad (2.3.2.2 - 1)$$

Ahora bien, la velocidad con la que la componente  $x$  de la cantidad de movimiento entra debido al transporte molecular por la cara situada en  $x$  es  $\tau_{xx}|_x \Delta y \Delta z$ , y la velocidad con que sale por  $x + \Delta x$  es  $\tau_{xx}|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z$ . Para las caras restantes escribimos ecuaciones análogas tomando en cuenta que el término  $\tau_{yx}$  representa la densidad de flujo de cantidad de movimiento  $x$  a través de una cara perpendicular al eje  $y$ . Sumando todos los términos correspondientes obtenemos:

$$\Delta y \Delta z (\tau_{xx}|_x - \tau_{xx}|_{x+\Delta x}) + \Delta x \Delta z (\tau_{yx}|_y - \tau_{yx}|_{y+\Delta y}) + \Delta x \Delta y (\tau_{zx}|_z - \tau_{zx}|_{z+\Delta z}) \quad (2.3.2.2 - 2)$$

Se observa que estas densidades de flujo de cantidad de movimiento pueden ser consideradas como esfuerzos tal que  $\tau_{xx}$  representa el esfuerzo normal que se ejerce sobre la cara  $x$  y  $\tau_{yx}$  se define como el esfuerzo tangencial que actúa sobre la cara  $x$  en la dirección  $y$  que resulta como consecuencia de las fuerzas viscosas. Por su parte, las principales fuerzas que actúan sobre el sistema, en la mayoría de los casos son las procedentes de la presión a la que está sometido el fluido ( $p$ ) y la fuerza gravitacional por unidad de masa ( $g$ ). Por lo que la resultante de estas fuerzas, en la componente  $x$  queda:

$$\Delta y \Delta z (p|_x - p|_{x+\Delta x}) + \rho g_x \Delta x \Delta y \Delta z \quad (2.3.2.2 - 3)$$

Por último, la velocidad de acumulación de cantidad de movimiento, de la componente  $x$ , en el elemento de volumen diferencial es  $\Delta x \Delta y \Delta z (\partial \rho V_x / \partial t)$ . Reorganizando todas las expresiones dadas hasta este punto, como se planteó el concepto de conservación de cantidad de movimiento en un principio, dividiendo la ecuación resultante por  $\Delta x \Delta y \Delta z$  y tomando límites cuando  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  y  $\Delta z$  tienden a cero, obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho V_x = - \left( \frac{\partial}{\partial x} \rho V_x V_x + \frac{\partial}{\partial y} \rho V_y V_x + \frac{\partial}{\partial z} \rho V_z V_x \right) - \left( \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yx} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zx} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x \quad (2.3.2.2 - 4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho V_y = - \left( \frac{\partial}{\partial x} \rho V_x V_y + \frac{\partial}{\partial y} \rho V_y V_y + \frac{\partial}{\partial z} \rho V_z V_y \right) - \left( \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yy} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zy} \right)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y \quad (2.3.2.2 - 5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho V_z = - \left( \frac{\partial}{\partial x} \rho V_x V_z + \frac{\partial}{\partial y} \rho V_y V_z + \frac{\partial}{\partial z} \rho V_z V_z \right) - \left( \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xz} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yz} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zz} \right) - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z \quad (2.3.2.2 - 6)$$

Dónde:

$\rho V_x, \rho V_y, \rho V_z$ : Tasa de cambio de cantidad de movimiento en las 3 componentes.

$g_x, g_y, g_z$ : Componentes de la aceleración gravitacional  $g$ .

$\partial p / \partial x, \partial p / \partial y, \partial p / \partial z$ : Componentes de un vector  $\nabla p$  o gradiente de presión.

$\rho V_x V_x, \rho V_y V_x, \rho V_z V_x \dots \rho V_x V_z, \rho V_y V_z, \rho V_z V_z$ : Nueve componentes de la densidad de flujo convectivo de cantidad de movimiento  $\rho VV$ .

$\tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz} \dots \tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{zz}$ : Nueve componentes del tensor de esfuerzos  $\tau$ .

En notación vectorial obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho V = -[\nabla \cdot \rho VV] - \nabla p - [\nabla \cdot \tau] + \rho g \quad (2.3.2.2 - 7)$$

Con ayuda de la ecuación de continuidad reordenamos para obtener:

$$\rho \frac{DV_x}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) + \rho g_x \quad (2.3.2.2 - 8)$$

$$\rho \frac{DV_y}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} - \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) + \rho g_y \quad (2.3.2.2 - 9)$$

$$\rho \frac{DV_z}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} - \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) + \rho g_z \quad (2.3.2.2 - 10)$$

Sumando vectorialmente las 3 componentes se llega a:

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p - [\nabla \cdot \tau] + \rho g \quad (2.3.2.2 - 11)$$

Dónde:

$\rho DV/Dt$ : Masa por unidad de volumen, multiplicada por aceleración.

$\nabla p$ : Gradiente de presión sobre el elemento por unidad de volumen.

$[\nabla \cdot \tau]$ : Fuerzas viscosas sobre el elemento por unidad de volumen.

$\rho g$ : Fuerza gravitacional sobre el elemento por unidad de volumen.

La ecuación (2.3.2.2 – 11) llamada ecuación de movimiento, expresada en esta forma establece que un elemento de volumen que se mueve en un fluido es acelerado por las fuerzas que se ejercen sobre él. Así pues, con el fin de comprender los términos representados por los tensores de esfuerzos, es preciso representar los distintos esfuerzos en función de los gradientes de velocidad y las propiedades de los fluidos, que dicho sea de paso, en este caso particular es un fluido Newtoniano. Estas expresiones son:

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot V) \quad (2.3.2.2 - 12)$$

$$\tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot V) \quad (2.3.2.2 - 13)$$

$$\tau_{zz} = 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot V) \quad (2.3.2.2 - 14)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) \quad (2.3.2.2 - 15)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = -\mu \left( \frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \right) \quad (2.3.2.2 - 16)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = -\mu \left( \frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) \quad (2.3.2.2 - 17)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.3.2.2 – 12)-(2.3.2.2 – 17) en (2.3.2.2 – 8)-(2.3.2.2 – 10) se obtienen las ecuaciones generales de movimiento para fluidos Newtonianos con valores de densidad y viscosidad variables:

$$\begin{aligned} \rho \frac{DV_x}{Dt} = & -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ 2\mu \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot V) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) \right] + \rho g_x \quad (2.3.2.2 - 18) \end{aligned}$$

$$\rho \frac{DV_y}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ 2\mu \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot V) \right]$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \right] + \rho g_y \quad (2.3.2.2 - 19)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{DV_z}{Dt} = & -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left[ 2\mu \frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot V) \right] + \rho g_z \quad (2.3.2.2 - 20) \end{aligned}$$

### 2.3.2.3. Ecuación de la energía.

De igual forma que se generalizan los balances de cantidad de movimiento aplicados a un dominio de volumen de tamaño diferencial para obtener las ecuaciones de movimiento, es preciso ahora, generalizar los balances de energía aplicados a un dominio de volumen de tamaño diferencial con el fin de obtener la ecuación de energía. Para hacer esto partimos nuevamente de un elemento estacionario de volumen, a través del cual fluye un líquido y, recordando la ley de la conservación de la energía podemos expresar que la velocidad de acumulación de energía cinética e interna es igual a la velocidad de entrada de energía cinética e interna por convección, menos la velocidad de salida de la energía cinética e interna por convección, más la velocidad neta de adición de calor por conducción, menos la velocidad neta de trabajo comunicado por el sistema a los alrededores [xxv, xxvi, xxvii]. Éste es el primer principio de la termodinámica expresado para un sistema abierto transitorio. Comenzamos entonces describiendo la velocidad de acumulación de energía cinética en el interior del dominio  $\Delta x \Delta y \Delta z$  como sigue:

$$\Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \hat{U} + \frac{1}{2} \rho V^2 \right) \quad (2.3.2.3 - 1)$$

Siendo  $\hat{U}$  la energía interna por unidad de masa de fluido contenido en el elemento y  $V$  la velocidad local del fluido. La velocidad de entrada de energía interna y cinética en el elemento por convección está dada por:

$$\begin{aligned} & \Delta y \Delta z \left\{ V_x \left( \rho \hat{U} + \frac{1}{2} \rho V^2 \right) \Big|_x - V_x \left( \rho \hat{U} + \frac{1}{2} \rho V^2 \right) \Big|_{x+\Delta x} \right\} \\ & + \Delta x \Delta z \left\{ V_y \left( \rho \hat{U} + \frac{1}{2} \rho V^2 \right) \Big|_y - V_y \left( \rho \hat{U} + \frac{1}{2} \rho V^2 \right) \Big|_{y+\Delta y} \right\} \\ & + \Delta x \Delta y \left\{ V_z \left( \rho \hat{U} + \frac{1}{2} \rho V^2 \right) \Big|_z - V_z \left( \rho \hat{U} + \frac{1}{2} \rho V^2 \right) \Big|_{z+\Delta z} \right\} \quad (2.3.2.3 - 2) \end{aligned}$$

Y la velocidad neta de entrada de energía por conducción es:

$$\begin{aligned} & \Delta y \Delta z \{q_x|_x - q_x|_{x+\Delta x}\} + \Delta x \Delta z \{q_y|_y - q_y|_{y+\Delta y}\} \\ & + \Delta x \Delta y \{q_z|_z - q_z|_{z+\Delta z}\} \quad (2.3.2.3 - 3) \end{aligned}$$

Dónde  $q_x, q_y, q_z$ : Componentes  $x, y, z$  del vector densidad de flujo de calor  $q$ . Por su parte, la velocidad en que se produce un trabajo contra esfuerzos gravitacionales en función de la masa,  $g$ , se define como:

$$-\rho \Delta x \Delta y \Delta z (V_x g_x + V_y g_y + V_z g_z) \quad (2.3.2.3 - 4)$$

Ahora. Contra la presión estática,  $p$ , ejercida en las caras del dominio:

$$\begin{aligned} & \Delta y \Delta z \{(pV_x)|_{x+\Delta x} - (pV_x)|_x\} + \Delta x \Delta z \{(pV_y)|_{y+\Delta y} - (pV_y)|_y\} \\ & + \Delta x \Delta y \{(pV_z)|_{z+\Delta z} - (pV_z)|_z\} \quad (2.3.2.3 - 5) \end{aligned}$$

Por último, el trabajo producido contra las fuerzas viscosas es:

$$\begin{aligned} & \Delta y \Delta z \{(\tau_{xx}V_x + \tau_{xy}V_y + \tau_{xz}V_z)|_{x+\Delta x} - (\tau_{xx}V_x + \tau_{xy}V_y + \tau_{xz}V_z)|_x\} \\ & + \Delta x \Delta z \{(\tau_{yx}V_x + \tau_{yy}V_y + \tau_{yz}V_z)|_{y+\Delta y} - (\tau_{yx}V_x + \tau_{yy}V_y + \tau_{yz}V_z)|_y\} \\ & + \Delta x \Delta y \{(\tau_{zx}V_x + \tau_{zy}V_y + \tau_{zz}V_z)|_{z+\Delta z} \\ & - (\tau_{zx}V_x + \tau_{zy}V_y + \tau_{zz}V_z)|_z\} \quad (2.3.2.3 - 6) \end{aligned}$$

Ordenando todos los términos, según la expresión inicial, dividiendo la ecuación entre  $\Delta x \Delta y \Delta z$  y tomando límites de la expresión que resulta cuando  $\Delta x, \Delta y$  y  $\Delta z$  tienden a cero, obtenemos la ecuación de la energía en función de energías cinética e interna:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \hat{U} + \frac{1}{2} \rho V^2 \right) \\ & = - \left( \frac{\partial}{\partial x} V_x \left( \rho \hat{U} + \frac{1}{2} \rho V^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} V_y \left( \rho \hat{U} + \frac{1}{2} \rho V^2 \right) + \frac{\partial}{\partial z} V_z \left( \rho \hat{U} + \frac{1}{2} \rho V^2 \right) \right) \\ & - \left( \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) + \rho (V_x g_x + V_y g_y + V_z g_z) - \left( \frac{\partial}{\partial x} p V_x + \frac{\partial}{\partial y} p V_y + \frac{\partial}{\partial z} p V_z \right) \\ & - \left( \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xx} V_x + \tau_{xy} V_y + \tau_{xz} V_z) + \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{yx} V_x + \tau_{yy} V_y + \tau_{yz} V_z) \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{zx} V_x + \tau_{zy} V_y + \tau_{zz} V_z) \right) \quad (2.3.2.3 - 7) \end{aligned}$$

Empleando notación vectorial-tensorial, la ecuación anterior se reduce a:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \hat{U} + \frac{1}{2} V^2 \right) = - \left( \nabla \cdot \rho V \left( \hat{U} + \frac{1}{2} V^2 \right) \right) - (\nabla \cdot q) + \rho(V \cdot g) - (\nabla \cdot pV) - (\nabla \cdot [\tau \cdot V]) \quad (2.3.2.3 - 8)$$

Dónde:

$\partial/\partial t (\hat{U} + V^2/2)$ : Velocidad de ganancia de energía por unidad de volumen.

$(\nabla \cdot \rho v (\hat{U} + V^2/2))$ : Velocidad de entrada de energía por unidad de volumen debido a la convección.

$(\nabla \cdot q)$ : Velocidad de entrada de energía por unidad de volumen debido a la conducción.

$\rho(V \cdot g)$ : Velocidad de trabajo comunicado al fluido por unidad de volumen debido a las fuerzas de gravitación.

$(\nabla \cdot pV)$ : Velocidad de trabajo comunicado al fluido por unidad de volumen debido a las fuerzas de presión.

$(\nabla \cdot [\tau \cdot V])$ : Velocidad de trabajo comunicado al fluido por unidad de volumen debido a las fuerzas viscosas.

Reorganizando los términos en función de la derivada material, resulta:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( \hat{U} + \frac{1}{2} V^2 \right) = -(\nabla \cdot q) + \rho(V \cdot g) - (\nabla \cdot pV) - (\nabla \cdot [\tau \cdot V]) \quad (2.3.2.3 - 9)$$

La ecuación (2.3.2.3 - 9) describe una variación en la energía a partir de la suma de  $\hat{U} + \frac{1}{2} V^2$ . Una simplificación de esta ecuación, que nos permita establecer, únicamente las variaciones de la energía en función de  $\hat{U}$  es:

$$\rho \frac{D\hat{U}}{Dt} = -(\nabla \cdot q) - p(\nabla \cdot V) - (\tau : \nabla V) \quad (2.3.2.3 - 10)$$

En la cual, el primer término de la ecuación representan la velocidad de ganancia de energía interna por unidad de volumen. El segundo describe la velocidad de entrada de energía interna por unidad de volumen debido a la conducción y el tercer y cuarto término la velocidad reversible de aumento de energía interna por unidad de volumen debido a la compresión y la velocidad irreversible del aumento de energía interna por unidad de volumen debido a la disipación viscosa. Sin embargo, para los estudios que se pretenden, resulta más conveniente plantear una ecuación de variación de energía en función de la temperatura. Por lo cual consideramos  $\hat{U}$  en función de  $\hat{V}$  y  $T$ .

$$d\hat{U} = \left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{V}}\right)_T d\hat{V} + \left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial T}\right)_{\hat{V}} dT = \left[-p + T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{\hat{V}}\right] d\hat{V} + \hat{C}_v dT \quad (2.3.2.3 - 11)$$

Con  $\hat{C}_v$  representando el calor específico a volumen constante por unidad de masa. Por lo que el producto de  $\rho$  por la derivada sustancial de la energía interna será:

$$\rho \frac{D\hat{U}}{Dt} = \left[-p + T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{\hat{V}}\right] \rho \frac{D\hat{V}}{Dt} + \rho \hat{C}_v \frac{DT}{Dt} \quad (2.3.2.3 - 12)$$

Retomando la ecuación de continuidad, vemos que el término  $\rho(D\hat{V}/Dt)$  puede modificarse como sigue:

$$\rho \frac{D\hat{V}}{Dt} = \rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho}\right) = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = (\nabla \cdot V) \quad (2.3.2.3 - 13)$$

Si contemplamos todo lo anterior, podemos modificar entonces la ecuación (2.3.2.3 – 10) tal que ésta quede de la siguiente manera:

$$\rho \hat{C}_v \frac{DT}{Dt} = -(\nabla \cdot q) - T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{\hat{V}} (\nabla \cdot V) - (\tau : \nabla V) \quad (2.3.2.3 - 14)$$

La ecuación anterior, describe también las variaciones de la energía, pero en esta ocasión en función de la temperatura. Por último, es preciso mencionar que para fines de este estudio, se considera a  $q$  en función de los gradientes de temperatura, la conductividad calorífica  $k$  como un valor constante. Además un comportamiento de fluido incompresible ( $\rho = 0$ ,  $\hat{C}_p = \hat{C}_v$  y  $(\nabla \cdot v) = 0$ ), y una variación únicamente espacial, despreciando el término temporal. Agregando también un término de generación interna de calor  $\dot{q}$  proveniente de fenómenos electromagnéticos, queda entonces:

$$\rho C_p V \cdot \nabla T = k \nabla^2 T + \dot{q} \quad (2.3.2.3 - 15)$$

El desarrollo de las leyes de conservación de masa, de cantidad de momentum y de energía, así como las ecuaciones a las que dichas leyes guían, son la base de los estudios del proceso de transferencia de calor conjugada planteados en los objetivos de este documento. Su relevancia se hace presente al ser estas las ecuaciones de transporte de calor resueltas numéricamente, mediante el método de volúmenes finitos, a niveles de convergencia que satisfagan en la mayor medida posible, junto con las ecuaciones de Maxwell, el problema de valor en la frontera que un transformador eléctrico supone.

#### 2.3.2.4. Parámetros adimensionales.

Los siguientes parámetros adimensionales poseen interpretaciones físicas que relacionan situaciones muy particulares recurrentes en fenómenos de transporte por convección natural [xxv, xxvi, xxvii]. Éstos son los más relevantes:

*Numero de Reynolds.* Es un número adimensional que relaciona, en un cociente, las fuerzas inerciales y las fuerzas viscosas de un flujo de fluido y permite determinar si el régimen del movimiento de dicho fluido se considera laminar o turbulento. Se define como:

$$Re = \frac{VL}{\nu} \quad (2.3.2.4 - 1)$$

*Número de Grashof.* Este número adimensional proporciona una relación entre los efectos de flotación y las fuerzas viscosas que actúan sobre un fluido, y se define como:

$$Gr = \frac{g\beta(T_s - T_\infty)L^3}{\nu^2} \quad (2.3.2.4 - 2)$$

donde  $g$  es la aceleración gravitacional,  $\beta$  es el coeficiente de expansión térmica,  $T_s$  es la temperatura de la superficie,  $T_\infty$  es la temperatura del ambiente,  $L$  es la longitud característica y  $\nu$  la viscosidad cinemática.

*Número de Prandtl.* Este número adimensional proporciona una relación entre la difusión de la cantidad de movimiento y la difusividad térmica, y es definido como:

$$Pr = \frac{C_p\mu}{k} = \frac{\nu}{\alpha} \quad (2.3.2.4 - 3)$$

donde  $C_p$  es el calor específico a presión constante,  $\mu$  es la viscosidad dinámica,  $k$  es la conductividad térmica y  $\alpha$  la difusividad térmica.

*Número de Nusselt.* Éste número representa un gradiente de temperatura adimensional en una superficie, y se define como:

$$Nu = \frac{hL}{k_f} \quad (2.3.2.4 - 4)$$

donde  $h$  representa el coeficiente de transferencia de calor y  $k_f$  la conductividad térmica del fluido.



*Número de Rayleigh.* Este número adimensional representa una medida del balance entre las fuerzas que promueven la convección natural con respecto a las que se le oponen, y es definido como:

$$Ra_x = Gr_x Pr = \frac{g\beta(T_s - T_\infty)L^3}{\nu\alpha} \quad (2.3.2.4 - 5)$$

donde  $Gr_x$  representa el número de Grashof asociado a un punto dado  $x$  de la superficie.

## 2.4. Fundamentos de un transformador trifásico.

Un transformador de potencia es una máquina eléctrica estática que, a partir de un proceso de inducción electromagnética, transmite energía eléctrica desde un nivel de voltaje alterno a otro sin cambiar la frecuencia de operación. Estos equipos interconectan circuitos que operan a distintos niveles de voltaje, lo cual es uno de los principales factores para el uso universal de la corriente alterna en sistemas de transmisión y distribución de energía eléctrica. Por lo tanto, los transformadores eléctricos aseguran que los varios elementos de los sistemas eléctricos de potencia como lo son los generadores, líneas de transmisión, redes de distribución y la carga misma, puedan todos operar a su nivel de voltaje óptimo [xii, xxx]. Los transformadores eléctricos son dispositivos de conversión electromagnética en los cuales la energía eléctrica es recibida en su bobina primaria para ser convertida en energía magnética. Dicha energía es reconvertida en energía eléctrica nuevamente en otro circuito (bobina secundaria, bobina terciaria, etc.) por lo cual se dice que no existe una conexión entre los devanados sino un acople magnético. Estos dispositivos son denominados transformadores elevadores o reductores (step-up o step-down en Ingles) dependiendo si el nivel de voltaje es inferior o superior en la bobina secundaria. Así mismo, un mismo transformador puede ser utilizado como elevador o reductor según sea la necesidad de alimentación de energía, por lo tanto las bobinas son denominadas como bobina de alto voltaje/bajo voltaje o bobina de alta tensión/baja tensión en lugar de primaria o secundaria.

### 2.4.1. Descripción de un transformador trifásico.

Un sistema trifásico puede ser representado como tres transformadores monofásicos independientes entre ellos,

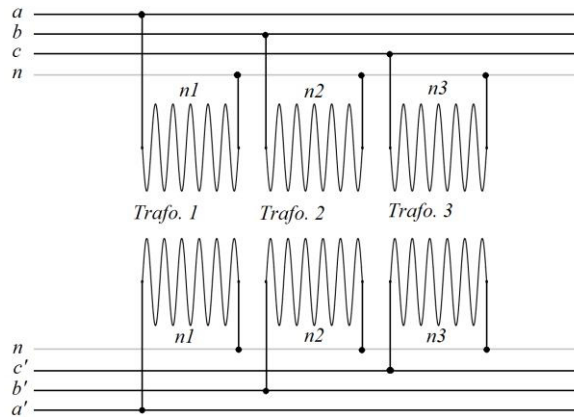


Figura 13. Transformadores eléctricos monofásicos alimentando a un sistema trifásico

por lo tanto los circuitos magnéticos son completamente independientes, sin que se produzca interferencia alguna entre los flujos respectivos, como se aprecia en la Figura 13. Sin embargo, existen los equipos de transformación trifásica compuestos por un único núcleo magnético en el que se erigen tres o más columnas alrededor de las cuales se sitúan las bobinas de alta y baja tensión de cada una de las tres fases, constituyendo así un transformador trifásico. Si la transformación se realiza mediante un transformador trifásico, con un núcleo común, es posible apreciar en la Figura 14-a) que en la columna central fluye un flujo  $\Phi_{m a,b,c}$  que en cada instante representa la suma de los 3 flujos sinusoidales, iguales en orden de magnitud y desfasados  $120^\circ$  entre sí (Figura 14-d)). El flujo  $\Phi_{m a,b,c}$  entonces será nulo, y en consecuencia, es posible prescindir de dicha columna como se aprecia en la Figura 14-b) y debido a que esa disposición en las columnas del núcleo resulta ineficiente, éste último se construye sobre un mismo plano, como en la Figura 14-c).

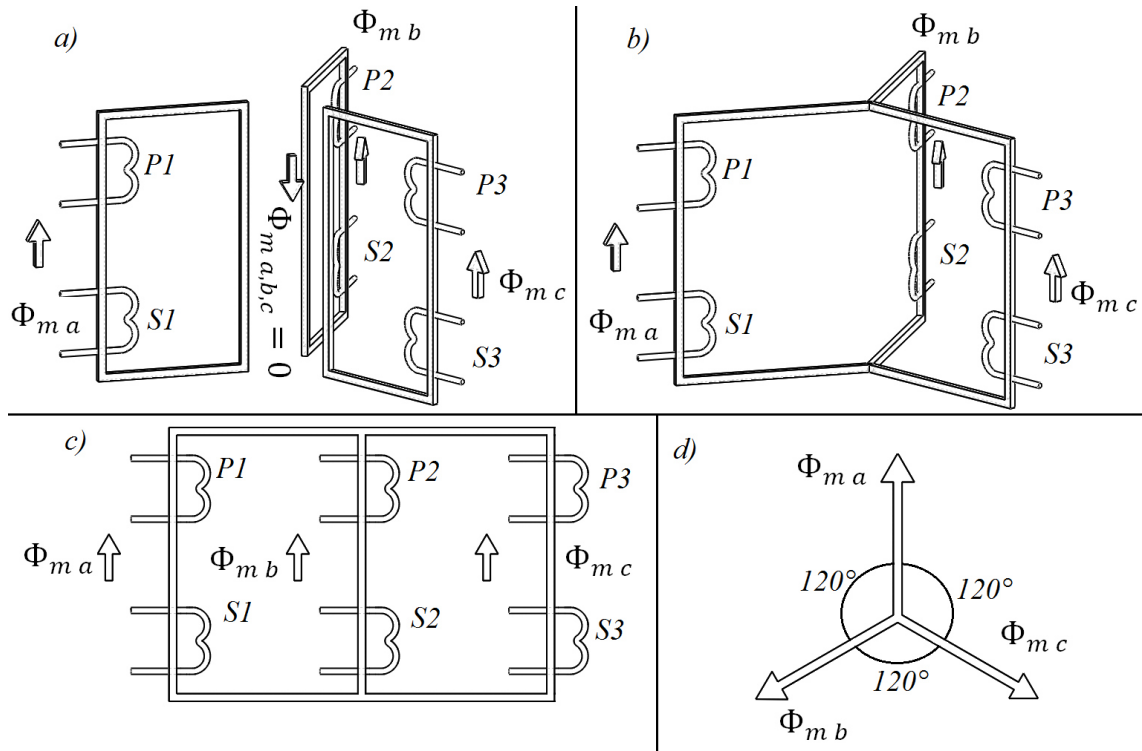


Figura 14. Arreglo conceptual de un transformador trifásico.

Un transformador trifásico, entonces, se compone de un núcleo ferromagnético que posee tres columnas verticales, las cuales serán denominadas de este punto en adelante como “piernas” a, b y c, así como dos columnas horizontales que unen en la zona inferior y superior a las piernas; éstos serán denominados “yugos” inferior y superior, las respectivas bobinas de baja y alta tensión las cuales serán denominadas bobina BT y AT a, b y c para cada una de las fases, cuatro elementos estructurales que brindan soporte estructural al arreglo del núcleo en ambas caras de los yugos denominados “herrajes” así como 3 elementos de sujeción que soportan al mismo núcleo a lo largo de las 3 piernas denominados “tirantes” y por último, el “tanque” contenedor de la máquina. Todos los elementos mencionados se muestran de manera conceptual en la Figura 15.

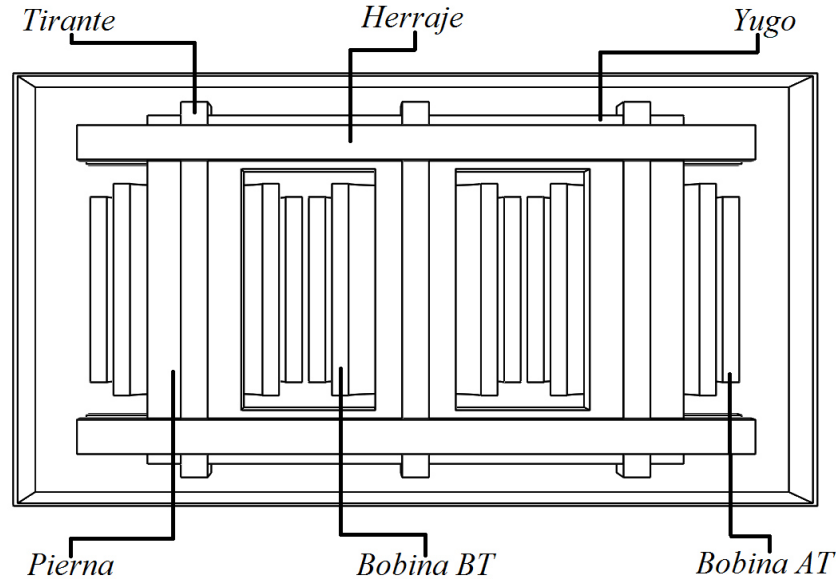


Figura 15. Diseño conceptual de los elementos principales de un transformador trifásico.

El diseño conceptual del transformador, así como su nomenclatura, representará el dominio de control del estudio electromagnético. El principio de operación de la máquina se estudia a continuación.

#### 2.4.2. Principio de operación.

El proceso que realizan los transformadores eléctricos se basa, principalmente, en tres de las cuatro ecuaciones de Maxwell: La ley de Ampere del electromagnetismo (2.1.3 – 5) que explica la formación y desarrollo de los campos magnéticos a partir de flujos de corriente, la Ley de Faraday-Lenz (2.1.4 – 7) que expone los principios de la inducción electromagnética de corrientes eléctricas y la Ley de Gauss para campos magnéticos (2.1.2 – 4) como una restricción que demanda el principio de conservación de los campos magnéticos en forma dipolar.

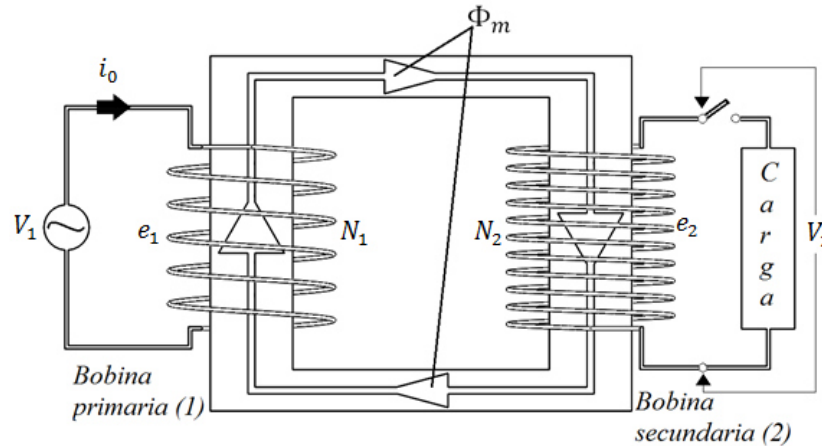


Figura 16. Elementos básicos para describir el principio la operación de un transformador ideal en condiciones de no-carga.

En el modelo conceptual del transformador de la Figura 16 ocurren dos fenómenos. La bobina primaria produce un campo magnético que fluye a través del núcleo ferromagnético y la bobina secundaria convierte el flujo magnético del núcleo, en una corriente eléctrica.

#### 2.4.2.1. Transformador ideal.

Como se dijo antes, los transformadores eléctricos operan bajo el principio de inducción electromagnética, acorde al cual un voltaje es inducido en una bobina acoplada a un flujo magnético variable. En la Figura 16 se aprecia un transformador monofásico compuesto por dos bobinas devanadas alrededor de un núcleo ferromagnético y acopladas por un flujo mutuo  $\Phi_m$ . La máquina se encuentra en estado de no-carga y está conectada a una fuente de voltaje sinusoidal que opera a 60 ciclos por segundo. A través del devanado primario circula una corriente  $i_0$  desde la fuente, generando el flujo  $\Phi_m$  en el núcleo el cual se asume completamente confinado en el núcleo (sin flujos errantes). Las bobinas 1 y 2 poseen  $N_1$  y  $N_2$  número de vueltas respectivamente. El valor instantáneo de la fem inducida en la bobina uno es:

$$e_1 = N_1 \frac{d\Phi_m}{dt} \quad (2.4.2.1 - 1)$$

Asumiendo que la bobina posee resistencia cero (con una reactancia de flujos errantes despreciada), tenemos:

$$v_1 = e_1 \quad (2.4.2.1 - 2)$$

Debido a que el valor del voltaje  $v_1$  es sinusoidalmente variable con el tiempo, el flujo  $\Phi_m$  ha de variar igualmente con la frecuencia de operación  $f$ , por lo tanto:

$$\Phi_m = \Phi_{mp} \sin \omega t \quad (2.4.2.1 - 3)$$

donde  $\Phi_{mp}$  representa el valor máximo del flujo  $\Phi_m$  y  $\omega$  la frecuencia angular  $2\pi f$  rad/seg. Sustituyendo el valor de  $\Phi_m$  en (2.4.2.1 - 1) obtenemos:

$$e_1 = N_1 \omega \Phi_{mp} \cos \omega t \quad (2.4.2.1 - 4)$$

El valor eficaz o r.m.s. (Root Mean Square) de el voltaje inducido,  $E_1$ , se obtiene dividiendo el valor máximo de la ecuación (2.4.2.1 - 4) entre  $\sqrt{2}$

$$E_1 = 4.44 \Phi_{mp} f N_1 \quad (2.4.2.1 - 5)$$

La ecuación (2.4.2.1 - 5) es conocida como la ecuación *fem* de los transformadores. Para un número dado de vueltas y una frecuencia constante, tanto el flujo como la densidad de éste en el núcleo son enteramente determinados por el voltaje aplicado. Por su parte, el voltaje inducido en la bobina dos debido al flujo mutuo  $\Phi_m$  esta dado por:

$$e_2 = N_2 \frac{d\Phi_m}{dt} \quad (2.4.2.1 - 6)$$

Por lo tanto, es posible determinar la relación que existe entre los voltajes 1 y 2 el cual se puede derivar de las ecuaciones (2.4.2.1 - 1) y (2.4.2.1 - 6)

$$e_1/e_2 = N_1/N_2 = a \quad (2.4.2.1 - 7)$$

Siendo  $a$  el valor conocido como relación de transformación. El valor eficaz del voltaje inducido en la bobina dos es:

$$E_2 = 4.44 \Phi_{mp} f N_2 \quad (2.4.2.1 - 8)$$

La corriente de excitación que fluye en la bobina uno,  $i_0$ , se considera únicamente de magnetización debido a que el material del núcleo ferromagnético se asume libre de histéresis además de propiedades lineales. En circunstancias, en la Figura 16, de carga conectada a la bobina dos, se establece un flujo de corriente a lo largo de dicha bobina en función de la ley de Faraday-Lenz de tal manera que la fuerza magnetomotriz ( $fmm$ )  $i_2 N_2$  se opone al flujo mutuo  $\Phi_m$ . Sabemos pues que tratándose de un transformador ideal, sin pérdidas resistivas en la bobina primaria,  $v_1 = e_1$ , y por lo tanto para un valor de voltaje aplicado constante, el voltaje inducido y el correspondiente flujo

magnético deben permanecer constantes. Esto es posible de lograr sólo si por la bobina uno fluye más corriente ( $i'_1$ ) para neutralizar los efectos de desmagnetización de los Amper-vueltas de la bobina dos. Podemos expresar entonces, en notación r.m.s, que:

$$I'_1 N_1 = I_2 N_2 \quad (2.4.2.1 - 9)$$

Es decir, la corriente total de la bobina uno representa la suma vectorial de la corriente de no-carga (corriente únicamente de magnetización  $I_m$  ya que las pérdidas en el núcleo son despreciadas) y la corriente de carga ( $I'_1$ )

$$I_1 = I'_1 + I_m \quad (2.4.2.1 - 10)$$

Para un material magnético infinitamente permeable, la corriente de magnetización  $I_m = 0$ , por lo que la ecuación (2.4.2.1 - 9) queda como:

$$I_1 N_1 = I_2 N_2 \quad (2.4.2.1 - 11)$$

Esto es, para un transformador ideal, despreciando su corriente de no-carga, el valor de Ampere-vueltas de la bobina uno es igual al valor de Ampere-vueltas de la bobina dos. El mismo resultado puede ser obtenido aplicando la Ley de Ampere (2.1.3 - 1) despreciando la presencia de campos eléctricos, que especifica que la  $fmm$  alrededor de un ciclo cerrado está dada por:

$$\oint H \cdot dl = i \quad (2.4.2.1 - 12)$$

Siendo  $i$  la corriente enclaustrada por la integral de línea de la intensidad de campo magnético  $H$ . Para medios materiales:

$$\oint H \cdot dl = \oint (B/\mu_r) \cdot dl = i_1 N_1 - i_2 N_2 \quad (2.4.2.1 - 13)$$

Si el valor de la permeabilidad relativa se asume infinito, el valor de la integral será entonces cero. Así, en notación r.m.s., se dice que:

$$I_1 N_1 - I_2 N_2 = 0 \quad (2.4.2.1 - 14)$$

Finalmente, para un transformador ideal (cero resistencia eléctrica en bobinas, sin pérdidas extrañas, permeabilidad magnética infinita y pérdidas en el núcleo inexistentes) las relaciones quedan como siguen:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{I_2}{I_1} = a \quad (2.4.2.1 - 15)$$

La ecuación (2.4.2.1 – 15) resulta en una potencia de entrada igual a la potencia de salida (a la misma frecuencia pero voltajes y corrientes distintos). Sabemos de antemano que ninguna máquina posee una eficiencia del 100% y que las pérdidas de potencia son inherentes a cualquier transductor. Por lo anterior, en la siguiente sección se comentarán las pérdidas de potencia del circuito magnético y del circuito eléctrico de un transformador.

#### 2.4.2.2. Transformador real.

El análisis desarrollado contemplando un transformador ideal representa únicamente una forma de entender los fundamentos de un transformador eléctrico ya que dicha máquina ideal no existe. La Figura 17 muestra de manera conceptual a un transformador real. Las pérdidas presentes en un transformador eléctrico son denominadas pérdidas de histéresis, pérdidas de *Eddy* y pérdidas de carga y son éstas las que impiden la existencia del transformador ideal.

La corriente de no-carga total  $I_0$  se compone de la corriente de magnetización ( $I_m$ ) responsable de producir el flujo magnético en el núcleo  $\Phi_m$ , así como de la corriente de pérdidas en el núcleo ( $I_c$ ) cuya existencia es responsable de la caída de potencia de la fuente para alimentar las pérdidas. La corriente de pérdidas del núcleo  $I_c$  se sintoniza en fase con el voltaje inducido y se adelanta a la corriente de magnetización  $I_m$  por  $90^\circ$ . Si el circuito de la bobina secundaria permanece abierto, entonces el transformador presenta un comportamiento altamente inductivo por lo cual la corriente de no-carga se retrasa al voltaje aplicado por un ángulo poco menor a  $90^\circ$  ( $I_m$  es usualmente mucho mayor que  $I_c$ ). En el circuito esquemático equivalente mostrado en la Figura 18-a) la componente de magnetización es representada por medio de la reactancia inductiva (oposición ofrecida al paso de la corriente alterna por inductores)  $X_m$  mientras que la componente de pérdidas se indica a través de la resistencia  $R_c$ . Sean  $R_1$  y  $R_2$  las resistencias de las bobinas uno y dos respectivamente. En un transformador real, no todo el flujo de acople de la bobina primaria vincula a la bobina secundaria. Esta componente de flujo es proporcional a la corriente primaria produciendo una caída de voltaje que se representa por la reactancia inductiva  $X_{L1}$  (reactancia de fuga) y se comporta como una componente en serie en la bobina primaria de un transformador ideal. De manera similar, una reactancia  $X_{L2}$  es añadida en serie en el circuito de la bobina secundaria del transformador ideal para tomar en cuenta la caída de voltaje debido al flujo que vincula únicamente a la bobina secundaria. Es posible omitir el concepto de transformador ideal en un circuito equivalente si, y solo si, todos los elementos son referidos únicamente al circuito primario o secundario del transformador. Es



decir, como se observa en la Figura 18-b), las cantidades son referidas al circuito primario como sigue:

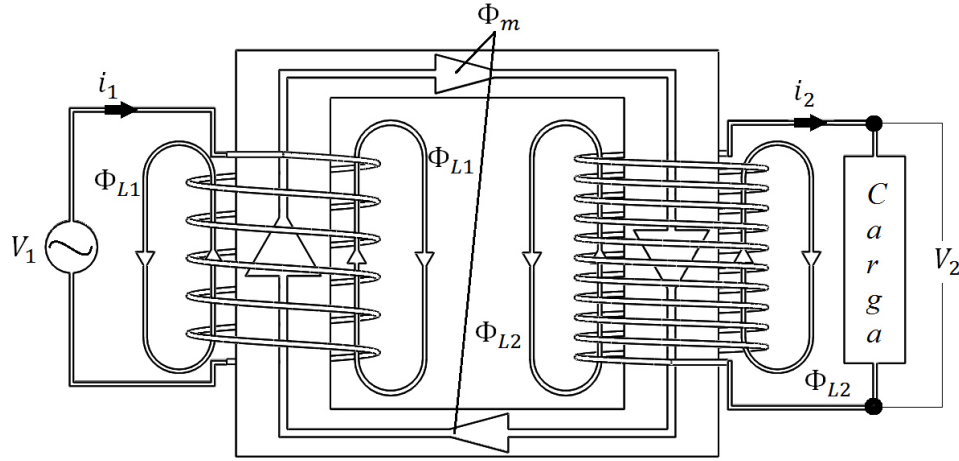


Figura 17. Transformador real.

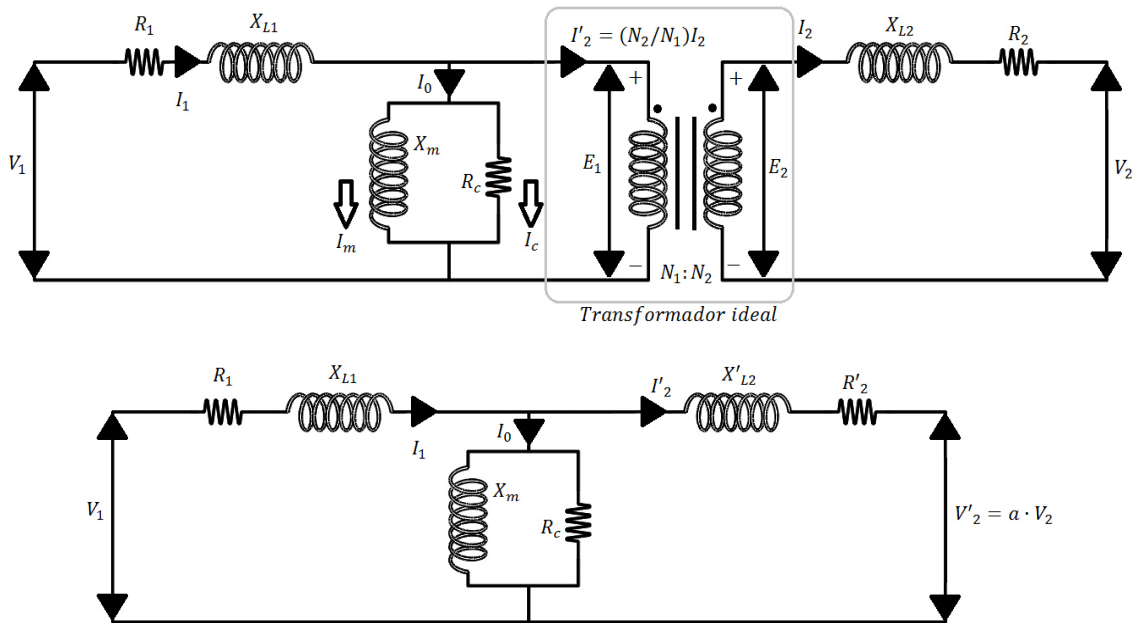


Figura 18. Circuito equivalente. a) Arriba. b) Abajo.

$$X'_{L2} = X_{L2}(N_1/N_2)^2 \quad (2.4.2.2 - 1)$$

$$R'_2 = R_2(N_1/N_2)^2 \quad (2.4.2.2 - 2)$$

La polaridad de los voltajes en el circuito de la Figura 18 depende de la dirección en la cual se encuentran devanados los conductores de las bobinas. Por medio de los puntos que se encuentran en las bobinas se indica el fin de la misma tal que las terminales con punto sean positivas al mismo tiempo, causando esto que la caída de voltaje vaya de la zona marcada con punto a la terminal sin marca. Las curvas de magnetización de los materiales ferromagnéticos utilizados en los núcleos de los transformadores son no lineales, por lo que éstos tienden a producir ondas armónicas de orden superior al de la frecuencia de operación del transformador en su corriente de magnetización; sin embargo, en los diagramas vectoriales de los transformadores se asumen propiedades de magnetización lineales (no se consideran las ondas armónicas). De la Figura 18-a) es posible expresar los voltajes primario y secundario como sigue:

$$V_1 = E_1 + (R_1 + jX_{L1})I_1 \quad (2.4.2.2 - 3)$$

$$V_2 = E_2 - (R_2 + jX_{L2})I_2 \quad (2.4.2.2 - 4)$$

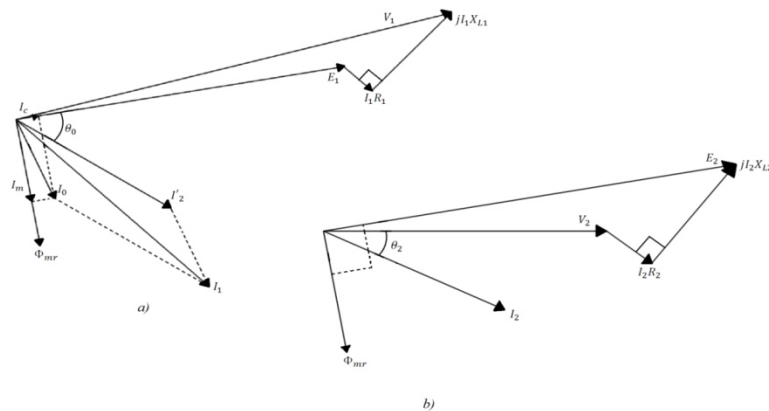


Figura 19. Diagrama vectorial. a) Lado primario, b) Lado secundario.

Los diagramas vectoriales de voltaje y corriente de los circuitos primario y secundario se aprecian en la Figura 19. el voltaje  $V_2$  se contempla como un vector de referencia a lo largo del eje  $x$ . El ángulo del factor de potencia de la carga se representa por  $\theta_2$ . Los voltajes inducidos se encuentran en fase y se adelantan al valor r.m.s del flujo mutuo  $\Phi_{mr}$  por  $90^\circ$ , de acuerdo a las ecuaciones (2.4.2.1 – 1) y (2.4.2.1 – 6). La corriente de magnetización  $I_m$  (componente de la corriente de no-carga  $I_0$ ) está en fase con  $\Phi_{mr}$  mientras que

la corriente  $I_c$  se adelanta a  $\Phi_{mr}$  por  $90^\circ$ , estando en fase con el voltaje inducido  $E_1$ .

### 2.4.3. Descripción de los elementos esenciales de un transformador.

Un transformador trifásico se compone de las siguientes partes principales:

- Núcleo ferromagnético
- Bobinas
- Tanque
- Aislamiento y refrigerante

Entre otros, siendo éstos los de mayor relevancia para el estudio.

#### 2.4.3.1. Núcleo.

El núcleo de un transformador es el sistema de láminas que constituyen el circuito magnético con todos los componentes que entran en su construcción. En su clasificación figura el tipo “transformador de núcleo” en el cual la bobina cubre las piernas del transformador, así como el “transformador acorazado” en el que las bobinas están parcialmente cubiertas por el núcleo. Independientemente de su tipo, los núcleos están constituidos siempre por chapas de acero especial. Laminaciones de 0.2 a 0.5 *mm* de espesor de diversos materiales que han ido mejorando con el paso del tiempo. Diferentes grados de acero al silicio han sido desarrollados, como lo son (cronológicamente ordenados) “non-oriented”, “hot-rolled grain oriented”, “cold-rolled grain oriented” (CRGO), “Hi-B”, “Mechanically scribed” y “laser scribed” (los últimos 3 son versiones mejoradas del grado CRGO). La densidad de flujo de saturación de los grados CRGO ha permanecido relativamente constante, oscilando los 2.0 *T* sin embargo, los avances tecnológicos en los procesos de producción y manufactura de diversos grados de acero al silicio han repercutido en significantes mejorías en características tales como *Watt/kg* y *Volt – Ampere/kg* en la dirección del laminado. El aislamiento en las láminas de acero en transformadores de gran capacidad se realiza mediante el uso de barniz.

#### 2.4.3.2. Bobinas.

En los transformadores de gran potencia se usa, por lo general, conductores cubiertos de papel dieléctrico de tipo CTC (conductor transpuesto continuo). Éstos consisten en un cierto número de cables rectangulares que conforman un solo ensamble. Cada hebra es transpuesta en cada vuelta a cada posición en el cable y es posteriormente cubierta con el papel dieléctrico aislante. Esta

transposición reduce de manera efectiva los niveles de inductancia en el cable así como altos niveles de corrientes de *Eddy* inducidas en las bobinas. Los conductores con papel aislante térmicamente mejorado soportan puntos de sobreelevación de temperatura de hasta 110 °C, recurrentes en condiciones de sobrecarga.

Las bobinas poseen en su interior ductos por los cuales fluye el aceite para remover el calor de los conductores. Estos ductos se extienden en las componentes radiales y longitudinales de la bobina. Para lograr la formación de estos ductos y canales se utilizan espaciadores cada determinado número de vueltas en función de la potencia del transformador y el arreglo de la bobina.

#### **2.4.3.3. Tanque.**

Los transformadores de altos niveles de potencia son sumergidos en aceite dieléctrico dentro de un contenedor metálico denominado tanque. Al calentarse el aceite se da inicio a un proceso de recirculación de fluido refrigerante debido al cambio de densidades producto de la sobreelevación de temperatura. Para transformadores de alta capacidad se instalan, acoplados al tanque, radiadores rectangulares por los cuales el fluido refrigerante intercambia el calor de la parte viva del transformador hacia el entorno, sin embargo, las paredes de dicho tanque también son partícipes del proceso de transporte de energía térmica.

#### **2.4.3.4. Aislamiento y refrigerante.**

Las estructuras de aislamiento internas de las bobinas se componen de los ductos de aceite formados por cilindros espaciadores aislantes. Cartones comprimidos hechos con materiales de alta calidad son utilizados en transformadores de alto voltaje, así como diversos elementos estructurales de pequeñas proporciones.

El aceite mineral es utilizado en la gran mayoría de transformadores eléctricos como medio aislante y refrigerante. Diversos estudios han probado la eficacia del aceite mineral como aislante dieléctrico soportando niveles de tensión de hasta 1,000 KV. La rigidez dieléctrica que presentan el carbón y el papel impregnado de aceite mineral es la razón principal para justificar su uso a nivel global.

#### 2.4.4. Circuito de refrigeración.

Los arreglos de enfriamiento que poseen estas máquinas eléctricas varían en función de los niveles de operación, estos son:

##### 2.4.4.1. ONAN.

Para bajos niveles de potencia, regularmente se utiliza un arreglo denominado “aire natural aceite natura” (ONAN por sus siglas en inglés), ya que la superficie del tanque contenedor suele ser suficiente para disipar el calor del interior de la máquina. Para mayores niveles de potencia y, dicho sea de paso, mayo calor generado, se hace precisa la instalación de radiadores o tubos montados directamente en el tanque o en una estructura aparte denominada “banco de radiadores”. El aceite se mantiene en una circulación constante debido a las fuerzas de flotación que actúan sobre éste, en un ciclo cerrado (sin renovación de fluido) como se aprecia en la Figura 20. El calor generado es entonces transportado de la zona interna de la máquina hacia los radiadores. Un gradiente de temperatura existente entre el aire que circula entre éstos y el aceite produce el transporte de calor, reduciendo la gravedad específica del aceite el cual baja y regresa nuevamente a la zona del tanque.

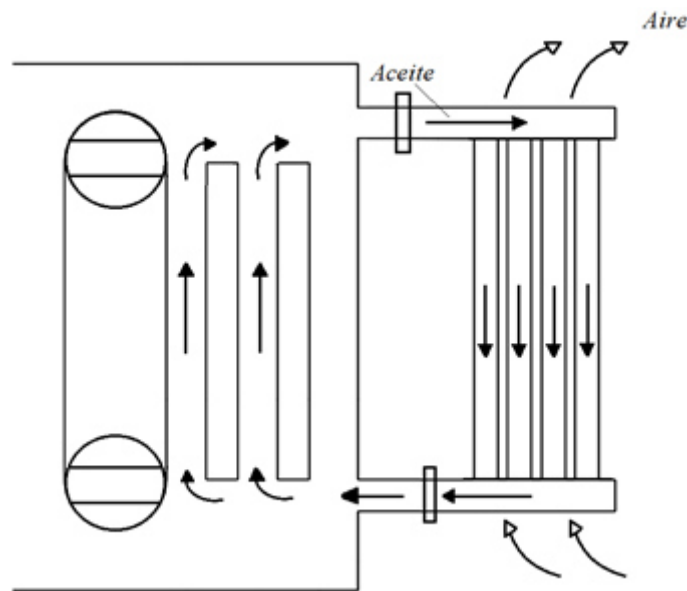


Figura 20. Arreglo de enfriamiento ONAN.

En los arreglos que emplean bancos de radiadores, se colocan los cabezales superiores del radiador en puntos más elevados como se aprecia en la Figura 21. Con esta disposición, el efecto de flotación de ciclo de enfriamiento

incrementa, lo que produce un incremento en la tasa de flujo de aceite y de disipación de calor en el intercambiador.

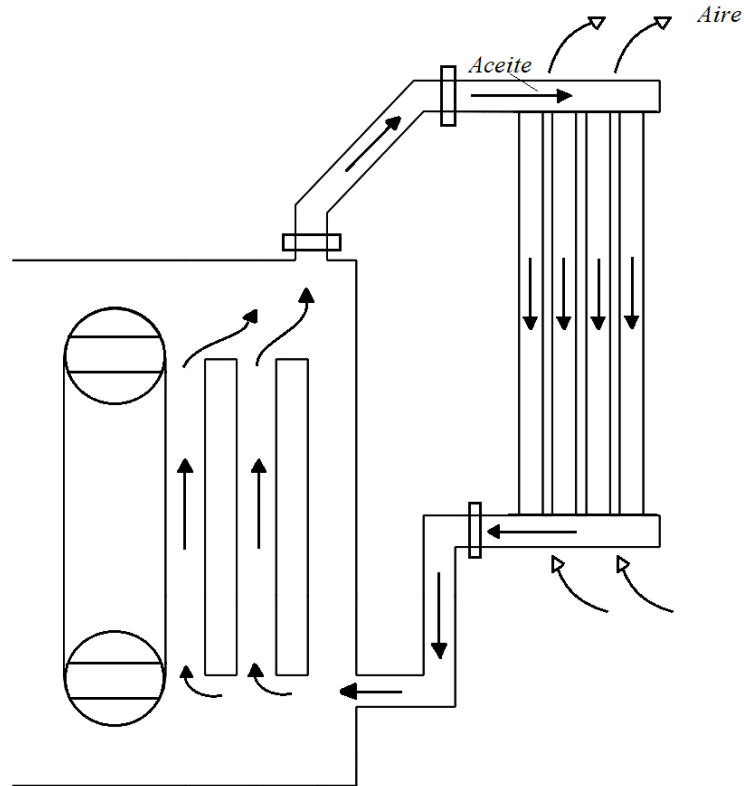


Figura 21. Arreglo elevado de enfriamiento ONAN.

#### 2.4.4.2. ONAF.

Debido al aumento de la potencia de un transformador, se produce, también, un aumento en las pérdidas totales y la necesidad de que sean éstas disipadas. En pro de incrementar el transporte de calor, es preciso incrementar el coeficiente de transferencia de calor que existe entre la superficie del intercambiador (radiador) y el fluido circundante (aire). Aplicando a ecuación (2.3.2 – 1) al radiador,  $T_s$  representa la temperatura de la superficie del intercambiador y debido a que la caída de temperatura es muy baja en el espesor de la placa del radiador, puede asumirse la temperatura de la superficie como la del aceite mismo. Al utilizar ventiladores se logra incrementar el flujo de aire a través de los radiadores, el coeficiente de transferencia de calor incrementa de manera significativa, pudiendo así reducir el número de intercambiadores de calor que compone al banco de radiadores. Este arreglo de enfriamiento es denominado ONAF (Oil Natural Air Forced por sus siglas en inglés). La Figura 22 muestra un

diseño conceptual de un transformador con un arreglo de enfriamiento de régimen ONAF.

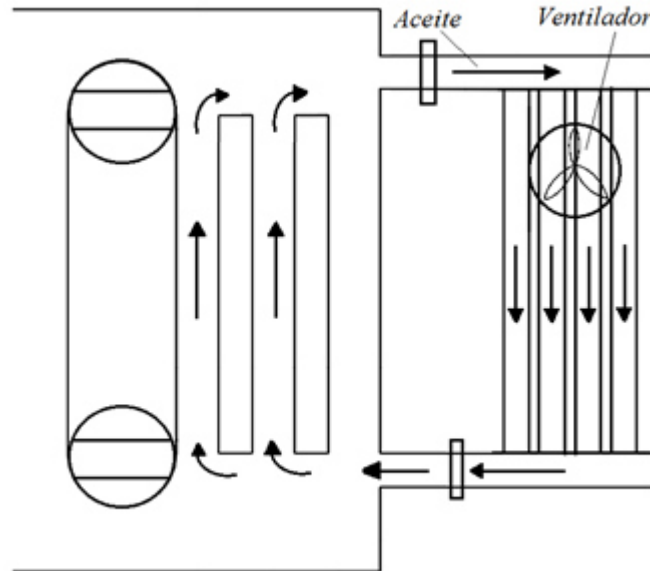


Figura 22. Arreglo de enfriamiento ONAF.

#### 2.4.4.3. OFAF.

El proceso de enfriamiento que se lleva a cabo dentro de las bobinas bajo el régimen ONAN u ONAF, está en función del balance natural entre la resistencia viscosa y el termosifón que se produce. Normalmente la tasa de flujo producido es baja y en consecuencia la capacidad de disipar calor también lo es. Es posible definir la capacidad de transferir calor como:

$$Q = \dot{m}C_p(T_{salida} - T_{entrada}) \quad (2.4.4.3 - 1)$$

donde  $Q$  es el flujo de calor en  $W$ ,  $\dot{m}$  el flujo másico en  $kg/s$ ,  $C_p$  el calor específico en  $J/(kg^\circ C)$  y las temperaturas  $T_{salida}$  y  $T_{entrada}$  en  $^\circ C$ . En función de los términos de la ecuación anterior, la única manera de aumentar el flujo de calor es aumentando el flujo másico  $\dot{m}$  mediante el uso de una bomba para hacer circular, de manera forzada, la masa de aceite como se muestra en la Figura 23. En éste régimen es preciso también mantener la operación de los ventiladores que aumentan el flujo de aire entre los radiadores. Este régimen de flujo se denomina OFAF (Oil Forced Air Forced por sus siglas en inglés).

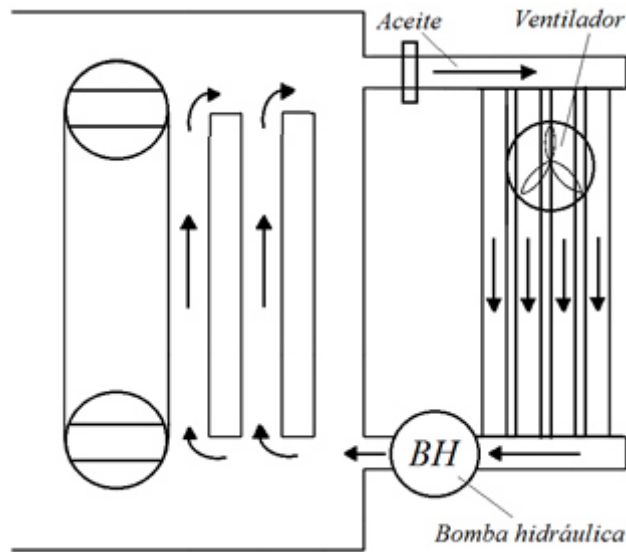


Figura 23. Arreglo de enfriamiento ODAF.

#### 2.4.4.4. ODAF.

Al hacer circular, de manera forzada, el fluido refrigerante en la máquina colocando una bomba que aumenta la presión en la salida del radiador, es necesario tomar en cuenta que no toda la masa de fluido frío pasará a lo largo de los canales de las bobinas y el núcleo, formando este caminos divergentes de los deseados; esto conlleva a una mezcla de aceite frío proveniente de la bomba y aceite caliente proveniente de las bobinas, dentro del volumen del tanque reduciendo así la eficiencia de los radiadores. Una manera de mejorar el proceso de remoción de calor de la parte viva mediante el régimen ODAF es instalando, además de la bomba en la salida del radiador, direccionadores que fijen el flujo del aceite a través de caminos establecidos en la etapa de diseño. Este arreglo de refrigeración se denomina ODAF (Oil Directed Air Forced por sus siglas en inglés) y se ilustra en la Figura 24. Generalmente, entre mayor es la capacidad de la bomba (y mayor la velocidad del aceite) es mayor la tasa de disipación de calor. Esto permite a las máquinas trabajar a mayores niveles de potencia generando mayor densidad de pérdidas (uso de densidades de corriente mayor en las bobinas y/o mayores niveles de densidad de flujo magnético en el núcleo). El uso de este arreglo de refrigeración permite reducir el tamaño de los transformadores manteniendo los niveles de potencia de operación.



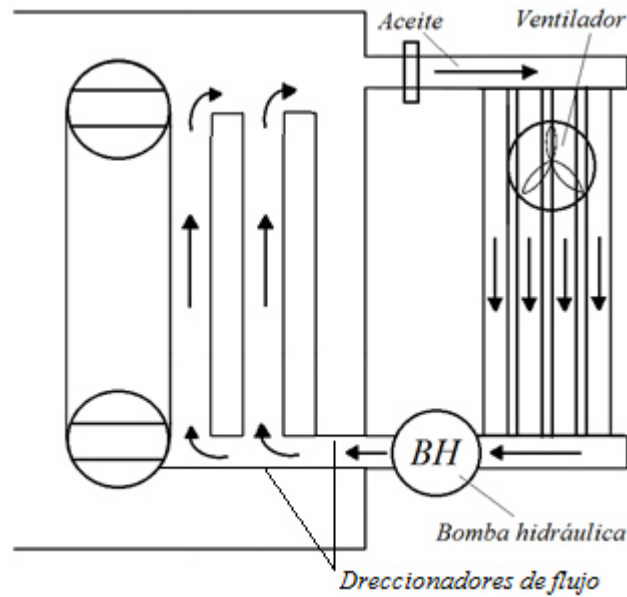


Figura 24. Arreglo de enfriamiento ODAF.

#### 2.4.5. Pérdidas de un transformador trifásico.

Las pérdidas de un transformador eléctrico se clasifican de la siguiente manera:

- Pérdidas sin carga
- Pérdidas con carga

Una explicación detallada de ambas se presenta a continuación.

##### 2.4.5.1. Pérdidas sin carga.

Las pérdidas del núcleo representan la potencia disipada en el núcleo magnético sujeto a una fuerza magnética variable con el tiempo. Las pérdidas de núcleo incluyen las pérdidas por histéresis y pérdidas por corrientes de *Eddy* en las láminas del núcleo.

Las pérdidas por histéresis y por corrientes de *Eddy* aparecen debido a variaciones sucesivas de la magnetización en el núcleo excitado por un voltaje sinusoidal a una frecuencia dada (*ciclos/segundo*). Las pérdidas por corrientes de *Eddy* ocurren debido a recirculaciones cíclicas de corriente producidas por corrientes inducidas en las láminas en respuesta a un flujo magnético variable. Éstas son proporcionales al espesor de las láminas, a la frecuencia de operación y al flujo magnético que las atraviesa. Las pérdidas por histéresis son

proporcionales al área del ciclo de histéresis del material que conforma al núcleo. Un ciclo de histéresis característico se muestra en la Figura 25-a).

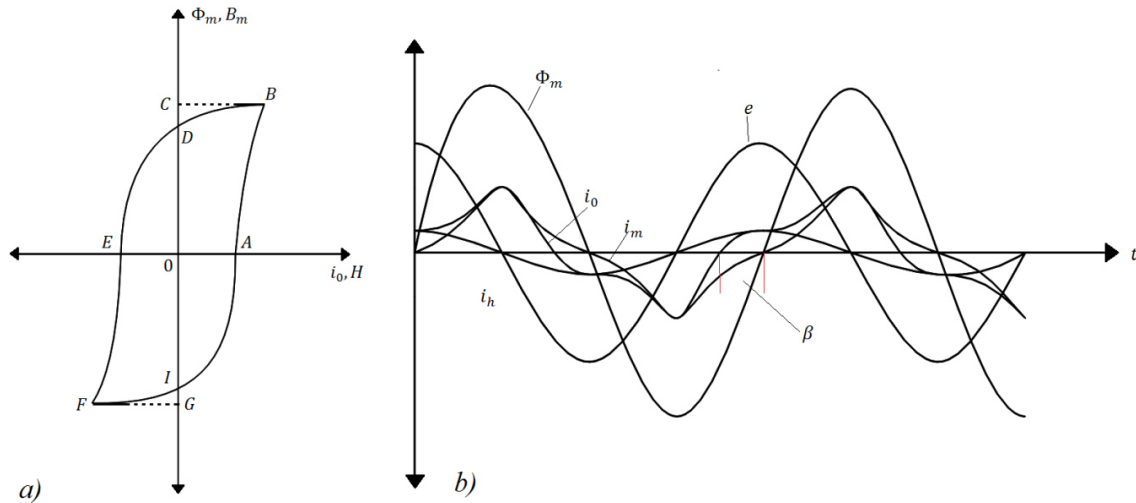


Figura 25. Pérdidas por histéresis. a) Ciclo de histéresis, b) Formas de onda.

Según se vio en la ecuación (2.4.2.1 – 1), el voltaje inducido  $e$  se adelanta al flujo magnético  $\Phi_m$  por  $90^\circ$ , debido al fenómeno de histéresis, la corriente de excitación  $i_0$  se adelanta a  $\Phi_m$  el equivalente al ángulo de histéresis  $\beta$  como se muestra en la Figura 25-b). La energía que se imprime o recupera entonces del circuito magnético se define como:

$$\text{Energía} = \int e i_0 dt = \int N \frac{d\Phi_m}{dt} i_0 dt = \int N i_0 d\Phi_m \quad (2.4.5.1 - 1)$$

Considerando el primer cuadrante del ciclo de histéresis en la Figura 25-a), el área  $OABCD0$  representa la energía alimentada. El voltaje inducido así como la corriente poseen una polaridad positiva para la línea  $AB$ . Para la línea  $BD$ , la energía representada por el área  $BCD$  es regresada a la fuente ya que las dos cantidades poseen signos opuestos otorgando un valor negativo de energía, así pues, el área  $ABD0$  representa la pérdida de energía en el primer cuadrante mientras que el área  $ABDEFIA$  representa la pérdida total por histéresis en un ciclo y debido a que este valor permanece constante en todo el ciclo, entonces las pérdidas de histéresis resultan proporcionales a la frecuencia de operación. La corriente no-sinusoidal  $i_0$  se compone de las corrientes de magnetización no-sinusoidal  $i_m$  y la corriente de aportación de histéresis  $i_h$  ( $i_h$  se localiza en fase con  $e$ ). Las pérdidas de Eddy y las pérdidas por histéresis se definen como:

$$P_{Eddy} = k_1 f^2 d^2 B_{rms}^2 \quad (2.4.5.1 - 2)$$

$$P_{Histéresis} = k_2 f B_{mp}^n \quad (2.4.5.1 - 3)$$

donde  $d$  representa el espesor de la lámina,  $k_1$  y  $k_2$  son constantes adimensionales que dependen del material,  $B_{rms}$  es el valor efectivo de la densidad de flujo magnético correspondiente al voltaje r.m.s.,  $B_{mp}$  es el valor pico de la densidad del flujo magnético y  $n$  representa la constante de steinmetz, la cual depende también del material, sin embargo estas ecuaciones asumen la inexistencia de un dominio material.

Las pérdidas de histéresis entonces son debidas a la naturaleza irreversible de las características magnéticas (curva de magnetización  $B - H$ ) cuando  $H$  es repetidamente ciclada entre  $-H_m$  y  $H_m$ . Sin embargo, estas pérdidas pueden incrementar debido a imperfecciones en el material (impurezas o dislocaciones en su estructura cristalográfica) y tensiones internas en el material.

Por su parte, las pérdidas de *Eddy* en una lámina pueden determinarse usando la ecuación (2.4.5.1 - 2) asumiendo un flujo magnético uniforme a lo largo del espesor de la lámina. En dominios materiales, las pérdidas de *Eddy* por unidad de volumen expresada en términos del valor r.m.s de la densidad máxima de flujo  $B$  son:

$$P_E = \frac{d^2}{12\rho_e} \left( \frac{dB}{dt} \right)^2 \quad (2.4.5.1 - 4)$$

donde  $\rho_e$  representa la resistividad del medio. Para variaciones sinusoidales de  $B$ , se sustituye  $d/dt$  por  $j\omega$  y la expresión anterior se convierte en:

$$P_E = \frac{\pi^2 d^2 f^2 B_0^2}{6\rho_e} \quad (2.4.5.1 - 5)$$

Esta ecuación resulta numéricamente igual a la ecuación (2.4.5.2.3 - 15) que modela las pérdidas volumétricas de *Eddy* en materiales laminados de bajo espesor, desarrollada en 2.4.5.2.3.

#### 2.4.5.2. Pérdidas con carga.

Las pérdidas con carga de un transformador hacen referencia a aquellas que se presentan cuando existe una impedancia conectada al circuito secundario. Estas pérdidas incluyen a las pérdidas de tipo  $I^2R$  en los conductores eléctricos (bobinas, barras de bus, derivaciones, etc.), pérdidas de *Eddy* en conductores debido a corrientes de *Eddy* inducidas y pérdidas extrañas inducidas por fugas de flujo magnético en el tanque y elementos de sujeción como tirantes y

herrajes. Las pérdidas con carga son, entonces, la suma de las pérdidas resistivas por el flujo de corriente en las bobinas más las pérdidas resistivas en elementos estructurales debido a flujos errantes que escapan del núcleo ferromagnético. Sin embargo, todas las pérdidas con carga son directa o indirectamente de tipo resistivas debido a que ya sea por el flujo de corriente en devanados o por corrientes inducidas por flujos magnéticos errantes en diversos elementos estructurales, en ambas existe un flujo de corriente fluyendo en materiales conductores eléctricos. En estos elementos conductores por los cuales circula una corriente eléctrica, parte de la energía cinética de los electrones es transformada en calor debido a los choques microscópicos que sufren éstos con los átomos del material conductor. Es decir, el movimiento de los electrones provoca continuas colisiones con los núcleos atómicos y en consecuencia una pérdida de energía cinética que promueve un aumento de temperatura en el conductor.

#### 2.4.5.2.1. Ecuaciones de campo.

La forma diferencial de las ecuaciones de Maxwell (2.1.1 – 11), (2.1.2 – 4), (2.1.3 – 5) y (2.1.4 – 7) [viii, xii] así como las relaciones constitutivas:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (2.4.5.2.1 - 1)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (2.4.5.2.1 - 2)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (2.4.5.2.1 - 3)$$

donde  $\sigma$ ,  $\mu$  y  $\varepsilon$  representan la conductividad eléctrica (mhos/m), permeabilidad magnética (henrios/m) y permitividad eléctrica (faradios/m) respectivamente, explican la existencia de pérdidas de potencia en los transformadores eléctricos. Sin embargo, al tratarse de frecuencias de operación de potencia, el término que describe las corrientes de desplazamiento de la Ley de Ampere (2.1.3 – 5) para el análisis de corrientes de *Eddy* en elementos conductores es despreciable por lo cual la ecuación se reescribe como:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (2.4.5.2.1 - 4)$$

La ecuación de conservación de carga se define como:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.4.5.2.1 - 5)$$

Sin embargo, acotándose a las condiciones de operación de un transformador de potencia (frecuencia de 60 Hz) se dice que la densidad de la carga volumétrica  $\rho$  no varía, resultando:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (2.4.5.2.1 - 6)$$

A partir de las ecuaciones que modelan la Ley de Faraday-Lenz (2.1.4 – 7) y la adecuación de la Ley de Ampere (2.4.5.2.1 – 4) es posible determinar la ecuación de difusión de campo magnético. Comenzamos por aplicar un rotacional en ambos lados de la ecuación (2.4.5.2.1 – 4) además empleando la relación (2.4.5.2.1 – 1) obtenemos:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \sigma \mathbf{E} \quad (2.4.5.2.1 - 7)$$

Aplicando algebra vectorial se obtiene:

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}) - \nabla^2 \mathbf{H} = \sigma \nabla \times \mathbf{E} \quad (2.4.5.2.1 - 8)$$

y mediante la relación (2.4.5.2.1 – 2) la Ley de Gauss para campos magnéticos (2.1.2 – 4) se reacomoda como:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot \mu \mathbf{H} = \mu \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (2.4.5.2.1 - 9)$$

De la cual es posible apreciar que la divergencia de  $\mathbf{H}$  es explícitamente cero

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (2.4.5.2.1 - 10)$$

Utilizando las ecuaciones (2.1.4 – 7) y (2.4.5.2.1 – 10), es posible reescribir (2.4.5.2.1 – 8) como:

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.4.5.2.1 - 11)$$

O también como:

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (2.4.5.2.1 - 12)$$

La cual es, como se mencionó antes, la ecuación de difusión de campos magnéticos en el dominio del tiempo. Por otro lado, en el dominio de los fasores, la ecuación (2.1.4 – 7) puede escribirse como:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B} \quad (2.4.5.2.1 - 13)$$

donde  $j\omega$  aparece debido a que la derivada parcial de una cantidad de campo sinusoidal con respecto al tiempo es equivalente a multiplicar el fasor correspondiente por  $j\omega$ . Utilizando la relación (2.4.5.2.1 – 2) se obtiene:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \quad (2.4.5.2.1 - 14)$$

Aplicando el rotacional a ambos lados de la ecuación resulta:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\nabla \times \mathbf{H} \quad (2.4.5.2.1 - 15)$$

Sustituyendo el término  $\nabla \times \mathbf{H}$  según la ecuación (2.4.5.2.1 – 4):

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{J} \quad (2.4.5.2.1 - 16)$$

De manera similar al procedimiento empleado para obtener la ecuación de difusión (2.4.5.2.1 – 12) y tomando en cuenta el hecho de que  $\nabla \cdot \mathbf{E} = (1/\epsilon)\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho/\epsilon = 0$  (debido a que no existe una carga volumétrica) se obtiene:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{J} \quad (2.4.5.2.1 - 17)$$

Sustituyendo el valor de  $\mathbf{J}$  de la relación (2.4.5.2.1 – 1) resulta la ecuación de difusión en el dominio de los fasores como sigue:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = j\omega\mu\sigma\mathbf{E} \quad (2.4.5.2.1 - 18)$$

Asumiendo que el vector de campo  $\mathbf{E}$  tiene componente únicamente a lo largo del eje  $x$  y que las variaciones de  $E_x$  están en función solamente del eje  $z$ , la ecuación (2.4.5.2.1 – 18) resulta:

$$\frac{d^2 E_x}{dz^2} = j\omega\mu\sigma E_x \quad (2.4.5.2.1 - 19)$$

Con una solución de tipo:

$$E_x = E_{xp} e^{-\gamma z} + E_{xp} e^{+\gamma z} \quad (2.4.5.2.1 - 20)$$

donde  $E_{xp}$  es el factor de amplitud y por su parte  $\gamma$  representa la constante de propagación expresable en términos de la constante de atenuación  $\alpha$  y la constante de fase  $\beta$ :

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad (2.4.5.2.1 - 21)$$

Sustituyendo  $E_x$  de la ecuación (2.4.5.2.1 – 20) en (2.4.5.2.1 – 19) resulta:

$$E_{xp}\gamma^2 e^{-\gamma z} + E_{xp}\gamma^2 e^{+\gamma z} = j\omega\mu\sigma(E_{xp}e^{-\gamma z} + E_{xp}e^{+\gamma z}) \quad (2.4.5.2.1 - 22)$$

Que resulta en:

$$\gamma^2 = j\omega\mu\sigma \quad \therefore \quad \gamma = \pm\sqrt{j\omega\mu\sigma} \quad (2.4.5.2.1 - 23)$$

Así pues, si el campo eléctrico  $E_x$  incide en la superficie de un material conductor eléctrico en  $z = 0$  y dicho campo es atenuado dentro del conductor mencionado ( $z > 0$ ), únicamente la solución positiva es tomada en cuenta para  $\gamma$

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu\sigma} = \sqrt{\omega\mu\sigma} \times \sqrt{1\angle 90^\circ} = \sqrt{\omega\mu\sigma} \times 1\angle 45^\circ$$

$$\therefore \gamma = (1 + j)\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \quad (2.4.5.2.1 - 24)$$

Sustituyendo el valor de la frecuencia angular  $\omega = 2\pi f$  resulta:

$$\gamma = (1 + j)\sqrt{\pi f\mu\sigma} \quad (2.4.5.2.1 - 26)$$

Por lo cual se dice que:

$$\alpha = \beta = \sqrt{\pi f\mu\sigma} \quad (2.4.5.2.1 - 27)$$

La expresión de la intensidad de campo eléctrico que se extiende a lo largo de la componente  $x$  y que penetra al conductor en la dirección  $+z$ , mostrada en la ecuación (2.4.5.2.1 - 20), se convierte en:

$$E_x = E_{xp} e^{-\gamma z} \quad (2.4.5.2.1 - 28)$$

Expresada en el dominio del tiempo, y sustituyendo los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  de la ecuación (2.4.5.2.1 - 27) resulta:

$$E_x = E_{xp} e^{-z\sqrt{\pi f\mu\sigma}} \cos(\omega t - z\sqrt{\pi f\mu\sigma}) \quad (2.4.5.2.1 - 29)$$

La superficie del conductor está representada por  $z = 0$ , así que se asume que  $z > 0$  y  $z < 0$  representan la región interna del conductor y la zona dieléctrica libre de pérdidas, respectivamente. La fuente del campo en la superficie del conductor que establece líneas de campo magnético en su interior es:

$$(E_x)_{z=0} = E_{xp} \cos \omega t \quad (2.4.5.2.1 - 30)$$

Retomando, nuevamente, la relación que existe entre el vector de densidad de corriente y la intensidad de campo eléctrico, plasmada en (2.4.5.2.1 - 1), es posible expresar:

$$J_x = \sigma E_x = \sigma E_{xp} e^{-z\sqrt{\pi f\mu\sigma}} \cos(\omega t - z\sqrt{\pi f\mu\sigma}) \quad (2.4.5.2.1 - 31)$$

Las ecuaciones (2.4.5.2.1 – 30) y (2.4.5.2.1 – 31) exponen que dentro del conductor pero lejos de la superficie, existirá un decrecimiento exponencial en la intensidad del campo eléctrico y por ende, de la conducción de la densidad de corriente. A una distancia de penetración de  $z = 1/\sqrt{\pi f \mu \sigma}$  el factor exponencial se convierte en  $e^{-1}$  (= 0.368), indicando que a esa distancia, el orden de magnitud de la intensidad del campo eléctrico se reduce al 36.8% del valor que existe en la superficie. Esta distancia es llamada **profundidad de piel** o **profundidad de penetración**:

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}} \quad (2.4.5.2.1 - 32)$$

Todos los campos en las superficies de materiales con buena conducción eléctrica decaen rápidamente al tiempo de que penetran algunos valores de  $\delta$ . Mediante las ecuaciones (2.4.5.2.1 – 27) y (2.4.5.2.1 – 32) se plantea la relación:

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\beta}; \gamma = \alpha + j\beta \therefore \gamma = \frac{1}{\delta} + \frac{j}{\delta} = (1 + j) \times \frac{1}{\delta} \quad (2.4.5.2.1 - 33)$$

El valor de la profundidad de piel es un parámetro muy importante al determinar el comportamiento de un conductor eléctrico sujeto a campos electromagnéticos periódicos. Si dichos conductores eléctricos superan el espesor que indica la profundidad de piel para sus propiedades electromagnéticas el comportamiento de las líneas de campo magnético que los atraviesan decrecen de manera exponencial en su interior. Para materiales tales como el acero estructural, cuya permeabilidad magnética relativa  $\mu_r = 100$  y la conductividad eléctrica es de  $\sigma = 5.88235e^6 \text{ mhos/m}$ , sometido a un campo electromagnético de frecuencia  $f = 60 \text{ Hz}$ , la profundidad de piel es:

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{(\pi)(60)(4\pi e^{-7})(100)(5.88235e^6)}} = 0.00269 \text{ m}$$

Es decir, tratándose de acero estructural con las propiedades antes mencionadas y sometido a un campo electromagnético que oscila a  $60 \text{ Hz}$ , a una profundidad de  $2.69 \text{ mm}$  en la componente  $z$ , el valor de la intensidad del campo eléctrico  $E_x$  decaerá a un 36.8% de su valor superficial y por consecuencia, la densidad de corrientes inducidas.

Este valor resulta relevante en capítulos posteriores ya que la profundidad de piel impacta directamente en el criterio de mallado utilizado en dominios virtuales para resolución de problemas de valor en la frontera.



### 2.4.5.2.2. Teorema de Poynting.

El teorema de Poynting es la aplicación de la ley de conservación de energía para campos electromagnéticos. Sujeto a las condiciones de operación de un transformador trifásico (las corrientes de desplazamiento son despreciadas) este teorema es expresado matemáticamente así:

$$-\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_v \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dv + \int_v \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dv \quad (2.4.5.2.2 - 1)$$

donde  $v$  representa el volumen encerrado por la superficie  $S$  y  $\mathbf{n}$  el vector normal a la superficie. Empleando la relación (2.4.5.2.1 - 1) la ecuación anterior resulta:

$$-\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_v \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dv + \frac{1}{\sigma} \int_v |\mathbf{J}|^2 dv \quad (2.4.5.2.2 - 2)$$

En la ecuación (2.4.5.2.2 - 2) se puede apreciar que el flujo de entrada de potencia es igual a la suma de la potencia absorbida por el campo magnético más la pérdida óhmica o resistiva. El vector de Poynting está dado por:

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (2.4.5.2.2 - 3)$$

Retomando la ecuación (2.4.5.2.1 - 14) y asumiendo que el campo  $\mathbf{E}$  posee únicamente componente  $x$  y varía solo en función de  $z$ , dicha ecuación se reescribe como:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -j\omega\mu H_y, \quad H_x = 0, \quad H_z = 0 \quad (2.4.5.2.2 - 4)$$

Sustituyendo el valor de  $E_x$  de la ecuación (2.4.5.2.1 - 28), resulta:

$$H_y = \frac{1}{-j\omega\mu} \times \frac{\partial}{\partial z} (E_{xp} e^{-\gamma z}) = \frac{\gamma E_x}{j\omega\mu} \quad (2.4.5.2.2 - 5)$$

La razón de  $E_x$  a  $H_y$  se define como la **impedancia intrínseca**

$$\eta = \frac{E_x}{H_y} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} \quad (2.4.5.2.2 - 6)$$

Sustituyendo el valor de  $\gamma$  de la ecuación (2.4.5.2.1 - 24) se obtiene

$$\eta = \frac{j\omega\mu}{\sqrt{j\omega\mu\sigma}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} \quad (2.4.5.2.2 - 7)$$

Usando la ecuación (2.4.5.2.1 – 32) la ecuación anterior se puede replantear como:

$$\eta = \sqrt{j} \left[ \frac{1}{\delta} \sqrt{\frac{2}{\sigma}} \right] \frac{1}{\sqrt{\sigma}} = \frac{\sqrt{1 \angle 90^\circ} \times \sqrt{2}}{\sigma \delta} = \frac{\sqrt{2} \angle 45^\circ}{\sigma \delta} \quad (2.4.5.2.2 - 8)$$

Ahora bien, la ecuación (2.4.5.2.1 – 29) puede ser replanteada en términos de la profundidad de piel como sigue:

$$E_x = E_{xp} e^{-z/\delta} \cos(\omega t - z/\delta) \quad (2.4.5.2.2 - 9)$$

Utilizando las ecuaciones (2.4.5.2.2 – 6) y (2.4.5.2.2 – 8),  $H_y$  puede expresarse como:

$$H_y = \frac{\sigma \delta}{\sqrt{2}} E_{xp} e^{-z/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (2.4.5.2.2 - 10)$$

Debido a que  $\mathbf{E}$  está en la componente  $x$  y  $\mathbf{H}$  en la componente  $y$ , el vector Poynting, el cual resulta del producto cruz entre los vectores  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$ , tendrá la dirección  $z$  según la ecuación (2.4.5.2.2 – 3)

$$P_z = E_x H_y = \frac{\sigma \delta}{\sqrt{2}} E_{xp}^2 e^{-2z/\delta} \cos(\omega t - z/\delta) \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (2.4.5.2.2 - 11)$$

Empleando identidades trigonométricas, la ecuación se simplifica como:

$$P_z = \frac{\sigma \delta}{\sqrt{2}} E_{xp}^2 e^{-2z/\delta} \left[ \frac{1}{2} \left\{ \cos\left(2\omega t - \frac{2z}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{4}{\pi}\right) \right\} \right] \quad (2.4.5.2.2 - 12)$$

De ahí, es posible observar que a una distancia  $z = \delta$  la densidad de potencia es de únicamente 0.135 ( $e^{-2}$ ) veces el valor que existe en la superficie. Al emplear metodologías computacionales para analizar las corrientes de *Eddy* inducidas en elemento estructurales no laminados existe la necesidad de contemplar dominios discretos que permitan evaluar el comportamiento del campo electromagnético en espesores menores al valor correspondiente de  $\delta$ . si se considera un conductor eléctrico con un campo eléctrico  $E_{xp}$  y su correspondiente vector de densidad de corriente  $J_{xp}$  en la superficie como se muestra en la Figura 26. Los campos poseen una magnitud de 1 p.u. (valor adimensional por unidad) en la superficie. La pérdida total en la altura  $h$  y espesor  $b$  esta dado por el valor de potencia que cruza la superficie dentro del área  $h \times b$

$$\begin{aligned}
 P &= \int_S (P_z)_{avg} dS \\
 &= \iint_{00}^{bh} \left[ \frac{\sigma \delta}{4} E_{xp}^2 e^{-2z/\delta} \right]_{z=0} dx dy = \frac{\sigma \delta b h}{4} E_{xp}^2 = \frac{\delta b h}{4 \sigma} J_{xp}^2 \quad (2.4.5.2.2) \\
 &- 13)
 \end{aligned}$$

El valor total de corriente inducida en un conductor se determina al integrar la densidad de corriente sobre la infinita profundidad del conductor.

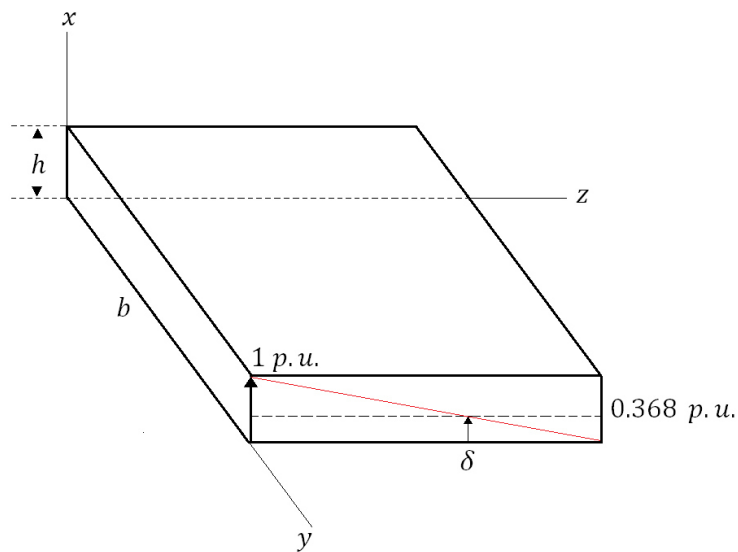


Figura 26. Penetración del campo dentro de un conductor.

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_{00}^{\infty b} J_x dy dz = \iint_{00}^{\infty b} \frac{E_x}{\sigma} dy dz = \iint_{00}^{\infty b} \frac{E_{xp} e^{-\gamma z}}{\sigma} dy dz \\
 &= \iint_{00}^{\infty b} J_{xp} e^{-\frac{(1+j)z}{\delta}} dy dz = \frac{J_{xp} b \delta}{\sqrt{2} \angle 45^\circ} \quad (2.4.5.2.2 - 14)
 \end{aligned}$$

Si se asume que la corriente calculada está uniformemente distribuida en un  $\delta$ , la densidad de corriente uniforme puede ser expresada en el dominio del tiempo como:

$$J_u = \frac{J_{xp}}{\sqrt{2}} \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{4} \right) \quad (2.4.5.2.2 - 15)$$

Las pérdidas óhmicas (resistivas) totales son:

$$P_{avg} = \frac{1}{\sigma} \int_v J_u^2 dv = \frac{1}{\sigma} \left[ \frac{J_{xp}^2}{2} \cos^2 \left( \omega t - \frac{\pi}{4} \right) \right] bh\delta \quad (2.4.5.2.2 - 16)$$

Debido a que el valor promedio de un término cosenoidal de un número entero de periodos es cero, resulta:

$$P_{avg} = \frac{\delta bh}{4\sigma} J_{xp}^2 \quad (2.4.5.2.2 - 17)$$

Que resulta numéricamente igual al valor de la ecuación (2.4.5.2.2 – 13), de tal manera que las pérdidas totales de potencia de un conductor pueden ser determinadas asumiendo que la corriente se encuentra uniformemente distribuida en un valor de  $\delta$ . Este hecho resulta de alta relevancia a la hora de ejecutar estudios numéricos computacionales de tipo electromagnético ya que obliga a que, para obtener valores confiables, los elementos discretos posean al menos el tamaño del valor de la profundidad de piel del material ( $\delta$ ) en la componente perpendicular a los campos  $E$  y  $H$ . Sin embargo, contemplar la discretización de dominios de grandes dimensiones que satisfagan el tamaño de elemento que  $\delta$  impone, la mayoría de los casos conlleva a recursos computacionales imposibles. Por ello, las pérdidas de potencia que se producen en elementos de grandes dimensiones puede ser determinadas, también, empleando el concepto de **impedancia de superficie**. La impedancia intrínseca puede ser reescrita a partir de la ecuación (2.4.5.2.2 – 6) como:

$$\eta = R + jX = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} = 1\angle 45^\circ \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} + j\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} \quad (2.4.5.2.2 - 18)$$

La parte real de la impedancia, llamada **resistencia de superficie** se define como:

$$R = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} \quad (2.4.5.2.2 - 19)$$

Una vez que se conoce el valor r.m.s. del valor de la componente tangencial de la intensidad del campo magnético ( $H_{rms}$ ) en la superficie característica (como las superficies internas de un tanque contenedor), las pérdidas de potencia por unidad de superficie se calculan mediante la siguiente ecuación:

$$P = RH_{rms}^2 = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} H_{rms}^2 \quad (2.4.5.2.2 - 20)$$

De esta manera, en presencia de elementos estructurales de considerables dimensiones en la componente perpendicular a los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$ , se pueden determinar las pérdidas específicas de potencia integrando la pérdida superficial debida a la impedancia de superficie, a lo largo del espesor de la estructura. Esto resulta de gran utilidad a la hora de evaluar la generación de calor por corrientes parásitas inducidas en elementos estructurales de grandes espesores. Con una correcta evaluación de la impedancia que la superficie posee y en conocimiento del espesor, se logra incrementar drásticamente los tiempos de evaluación de las pérdidas, con un recurso computacional mucho menor y un alto nivel de confiabilidad en los resultados. Sin embargo esta metodología no presenta utilidad ante estructuras que poseen un espesor perpendicular al campo magnético menor que el valor su valor de profundidad de piel ( $\delta$ ), para casos de estructuras que poseen formas laminadas de bajo espesor se emplea la metodología descrita en la siguiente subsección.

#### 2.4.5.2.3. Corrientes de Eddy en bobinas.

Un conductor eléctrico situado en las bobinas que se encuentran en posicionadas dentro de un campo magnético variable a lo largo de la componente  $y$ , como se muestra en la Figura 27, con un valor máximo de amplitud  $H_0$  y una longitud infinita en la componente  $x$ , desarrolla una densidad de corriente  $J_x$  y un campo magnético  $H_y$  en función de  $z$ , reescribiendo la ecuación de difusión (2.4.5.2.1 – 12) para variaciones sinusoidales del campo, resulta:

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = j\omega\mu\sigma H_y \quad (2.4.5.2.3 - 1)$$

Con una solución de tipo:

$$H_y = C_1 e^{\gamma z} + C_2 e^{-\gamma z} \quad (2.4.5.2.3 - 2)$$

donde  $\gamma$  posee el mismo valor que el definido en (2.4.5.2.1 – 26). En la ecuación (2.4.5.2.3 – 2) es posible apreciar que existen dos términos los cuales representan ondas que fluyen en las direcciones  $-z$  y  $+z$ . Ambos campos, uno en cada superficie perpendicular a la componente  $z$ , con un valor pico de  $H_0$ , penetran en el conductor a lo largo del eje  $z$  en direcciones opuestas. Las condiciones de frontera de este planteamiento son:

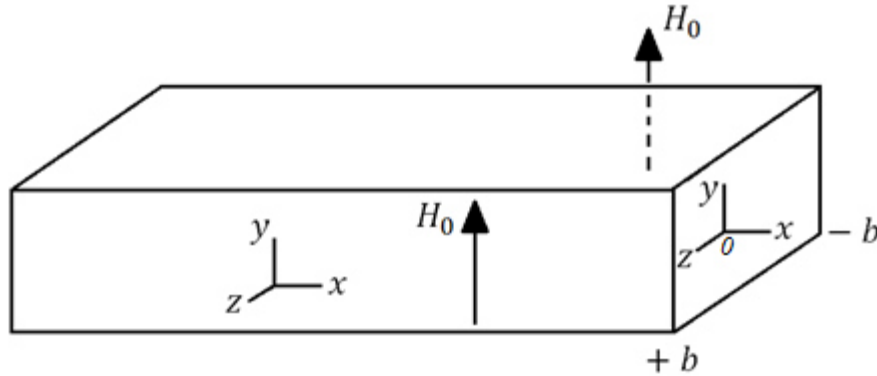


Figura 27. Penetración del campo dentro de un conductor.

$$H_y|_{z=+b} = H_0 ; H_y|_{z=-b} = H_0 \quad (2.4.5.2.3 - 3)$$

Por lo cual, las constantes de integración resultan:

$$C_1 = C_2 = \frac{H_0 e^{\gamma b} - H_0 e^{-\gamma b}}{e^{2\gamma b} - e^{-2\gamma b}} = \frac{H_0}{e^{\gamma b} + e^{-\gamma b}} \quad (2.4.5.2.3 - 4)$$

Sustituyendo éstas en la ecuación (2.4.5.2.3 - 2) se obtiene:

$$H_y = \frac{H_0(e^{\gamma z} + e^{-\gamma z})}{e^{\gamma b} + e^{-\gamma b}} = H_0 \frac{\sinh \gamma z}{\cosh \gamma b} \quad (2.4.5.2.3 - 5)$$

Retomando la ecuación de la Ley de Ampere que desprezicia las corrientes de desplazamiento (2.4.5.2.1 - 4) y recordando que las componentes en  $x$  y en  $z$  de la intensidad de campo magnético son nulas, la densidad de corriente se define como:

$$J_x = -\frac{dH_y}{dz} = -\gamma H_0 \frac{\sinh \gamma z}{\cosh \gamma b} \quad (2.4.5.2.3 - 6)$$

Por lo tanto, las pérdidas producidas por unidad de superficie (plano  $x - y$ ) del conductor en términos del valor pico de la densidad de corriente ( $|J_x|$ ) están dadas por:

$$P_e = \frac{1}{2\sigma} \int_{-b}^{+b} |J_x|^2 dz \quad (2.4.5.2.3 - 7)$$

Sustituyendo en la ecuación (2.4.5.2.3 - 6) el valor de  $\gamma$  según (2.4.5.2.1 - 33), ( $|J_x|$ ) resulta como:

$$\begin{aligned}
 |J_x| &= \left| -\gamma H_0 \frac{\sinh \gamma z}{\cosh \gamma b} \right| = H_0 \left| -\frac{1+j}{\delta} \frac{\sinh(1+j)z/\delta}{\cosh(1+j)b/\delta} \right| \\
 &= \frac{\sqrt{2}H_0}{\delta} \left[ \frac{\cosh(2z/\delta) - \cos(2z/\delta)}{\cosh(2b/\delta) + \cos(2b/\delta)} \right]^{1/2} \quad (2.4.5.2.3 - 8)
 \end{aligned}$$

Sustituyendo la magnitud de la densidad de corriente en (2.4.5.2.3 – 7) resulta:

$$\begin{aligned}
 P_e &= \frac{1}{2\sigma} \frac{2H_0^2}{\delta^2} \int_{-b}^{+b} \frac{\cosh(2z/\delta) - \cos(2z/\delta)}{\cosh(2b/\delta) + \cos(2b/\delta)} dz \\
 &= \frac{H_0^2}{\sigma\delta} \left[ \frac{\sinh(2b/\delta) - \sin(2b/\delta)}{\cosh(2b/\delta) + \cos(2b/\delta)} \right] \quad (2.4.5.2.3 - 9)
 \end{aligned}$$

O también

$$P_e = \frac{H_0^2}{\sigma\delta} \left[ \frac{e^\xi - e^{-\xi} - 2 \sin \xi}{e^\xi + e^{-\xi} + 2 \cos \xi} \right] \quad (2.4.5.2.3 - 10)$$

donde  $\xi = 2b/\delta$ . Cuando  $2b \gg \delta$ , es decir,  $\xi \gg 1$ , la ecuación (2.4.5.2.3 – 10) se reduce a:

$$P_e \approx \frac{H_0^2}{\sigma\delta} \quad (2.4.5.2.3 - 11)$$

La ecuación (2.4.5.2.3 – 11) expresa las pérdidas por corrientes de *Eddy* por unidad de superficie para elementos que poseen una longitud, en la componente perpendicular a los campos aplicados, mucho más grande que el valor de su profundidad de piel. En tal caso, con el campo incidiendo en ambas superficies del conductor, este se comporta como dos mitades infinitas de espacio por lo que la ecuación (2.4.5.2.3 – 11) es dos veces el valor de la ecuación (2.4.5.2.2 – 20). Para elementos conductores de tal magnitud de espesor, las corrientes inducidas tienden a confinarse en las capas superficiales debido a sus campos inherentes. Sin embargo, en presencia de materiales que poseen espesores mucho menores a su profundidad de penetración  $\delta$ , como es el caso de materiales laminados que componen a los devanados (y a las placas aisladas del núcleo), donde  $2b \ll \delta$ , es decir,  $\xi \ll 1$ , la ecuación (2.4.5.2.3 – 10) se simplifica como sigue:

$$P_e = \frac{H_0^2}{\sigma\delta} \left[ \frac{\left(1 + \xi + \frac{\xi^2}{2!} + \frac{\xi^3}{3!} \dots\right) - \left(1 - \xi + \frac{\xi^2}{2!} - \frac{\xi^3}{3!} \dots\right) - 2\left(\xi - \frac{\xi^3}{3!} \dots\right)}{\left(1 + \xi + \frac{\xi^2}{2!} + \frac{\xi^3}{3!} \dots\right) + \left(1 - \xi + \frac{\xi^2}{2!} - \frac{\xi^3}{3!} \dots\right) + 2\left(1 - \frac{\xi^2}{2!} \dots\right)} \right]$$

$$= \frac{H_0^2}{\sigma\delta} \left[ \frac{\left(4\frac{\xi^3}{3!} + \dots\right)}{4 + 4\frac{\xi^4}{4!} + \dots} \right] \quad (2.4.5.2.3 - 12)$$

Despreciando los términos de orden superior y sustituyendo la expresión de  $\delta$  de la ecuación (2.4.5.2.1 – 32) resulta:

$$P_e = \frac{H_0^2 \xi^3}{\sigma\delta} \frac{1}{6} = \frac{H_0^2 8b^3}{\sigma\delta} \frac{1}{6\delta^3} = \frac{H_0^2 8b^3 \omega^2 \mu^2 \sigma^2}{\sigma} \frac{1}{24} = \frac{1}{3} (\mu H_0)^2 \sigma \omega^2 b^3 \quad (2.4.5.2.3 - 13)$$

Sustituyendo el espesor de la lámina como  $b = w/2$  se obtiene

$$P_e = \frac{1}{3} B_0^2 \sigma \omega^2 \left(\frac{w}{2}\right)^3 = \frac{\omega^2 B_0^2 w^3 \sigma}{24} \quad (2.4.5.2.3 - 14)$$

La ecuación (2.4.5.2.3 – 14) modela las pérdidas de *Eddy* en materiales laminados por unidad de superficie, y debido a que el volumen tiende a ser conocido en estos elementos, es posible extrapolar las pérdidas superficiales a pérdidas volumétricas dividiendo la ecuación (2.4.5.2.3 – 14) por  $w$ , con lo que resulta:

$$P_E = \frac{\omega^2 B_0^2 w^2 \sigma}{24} \quad (2.4.5.2.3 - 15)$$

Sin embargo, esta ecuación modela las pérdidas volumétricas de *Eddy* contemplando únicamente el flujo de campo magnético en una dirección, como se muestra en la Figura 28-a), por lo cual es preciso contemplar las pérdidas que se generan de manera perpendicular a las calculadas en la ecuación (2.4.5.2.3 – 15), ya que de existir una fuga de campo magnético hacia las bobinas, este incide en las láminas conductoras como se aprecia en la Figura 28-b).

Así, el flujo de campo magnético incidente en el conductor es resuelto por medio de las componentes  $B_y$  y  $B_x$ , y de igual manera las pérdidas de potencia son calculadas de manera independiente mediante las ecuaciones:

$$(P_E)_{axial} = \frac{\omega^2 B_y^2 w^2 \sigma}{24} \quad (2.4.5.2.3 - 16)$$



$$(P_E)_{radial} = \frac{\omega^2 B_x^2 t^2 \sigma}{24} \quad (2.4.5.2.3 - 17)$$

Las pérdidas axiales y radiales son añadidas posteriormente de manera separada. Esto es posible debido a que las corrientes de *Eddy* asociadas con estas componentes, que son perpendiculares, no se superponen (existe un ángulo geométrico de 90° entre ellas).

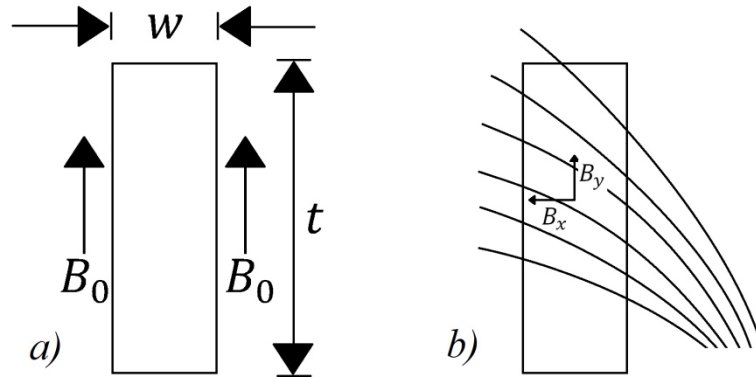


Figura 28. a) Densidad de flujo magnético perpendicular a un conductor. b) Líneas de fuga de campo en un conductor de una bobina.

Mediante las ecuaciones antes planteadas, pueden ser determinadas entonces las pérdidas parásitas en materiales laminados que poseen espesores menores a la profundidad de piel de los materiales. Esta cuestión es de nuevo benéfica en fases posteriores del estudio referidas al proceso de discretización de dominio.

#### 2.4.5.2.4. Corriente de carga.

La corriente de carga representa el vector de densidad de corriente que fluye teóricamente, de manera uniforme, a largo del área de conducción del devanado. Éstas producen las fugas de campo magnético dentro de la máquina y son responsables de las pérdidas de tipo “corriente directa” denominadas **pérdidas  $I^2R$** . A partir del teorema de Poynting (2.4.5.2.2 – 2) que representa la ley de conservación de energía para campos electromagnéticos, es posible desarrollar una expresión que cuantifique la potencia por unidad de volumen que, únicamente, las pérdidas  $I^2R$  generan en los devanados (en este caso se omite la energía consumida por el circuito electromagnético), de la siguiente manera:

$$P_{I^2R} = \frac{1}{\sigma} \int_v \left| \frac{I_{load}}{A} \right|^2 dv \quad (2.4.5.2.4 - 1)$$

Por lo que la ecuación resulta como:

$$P_{I^2R} = \rho \times J_{load}^2 \times v \quad (2.4.5.2.4 - 2)$$

donde  $\rho$  representa la resistividad eléctrica del material y  $v$  el volumen del material conductor.

Así pues, se han mostrado las ecuaciones para los casos que han de resolverse en el transformador caso de estudio, ellos son:

- Estructuras ferromagnéticas de espesores superior a su valor de profundidad de piel ( $z \gg \delta$ ) (2.4.5.2.2 – 20).
- Estructuras ferromagnéticas de espesores inferiores a su valor de profundidad de piel ( $z \ll \delta$ ) (2.4.5.2.3 – 16) y (2.4.5.2.3 – 17).
- Barras de bus o conductores de corriente (2.4.5.2.4 – 2).

El uso adecuado de estas ecuaciones, planteado en el siguiente capítulo como parte de una herramienta que mejore los procedimientos de estudio de generación de corrientes de *Eddy*, permitirá reducir la densidad de elementos discretos del dominio así como los tiempos de solución sin impactar en la veracidad de los resultados.

### 3. ESTADO DEL ARTE. ESTUDIOS DE TRANSFORMADORES ELÉCTRICOS.

Existe una enorme cantidad de posibles referencias en la literatura acerca de la operación de un transformador, la mayoría de éstos acotados a aspectos muy particulares de las máquinas, pero todos siempre considerando un proceso acoplado entre modelos térmicos y electromagnéticos. J. Smolka, O. Bíró y A. Nowak [ix] dividen la literatura en dos tipos, los análisis generales y específicos. En los estudios generales reportan los trabajos de Simon A. Ryder [x, xi] los cuales están enfocados a determinar los límites máximos de temperatura que se producen en las bobinas y en el núcleo, respectivamente, partiendo de asumir dichos elementos estructurales y el medio que los circunda como parte de un circuito térmico equivalente análogo a un circuito eléctrico para modelar las ecuaciones del flujo de calor en transformadores de potencia sumergidos en aceite dieléctrico refrigerante. Los algoritmos utilizados en estas aproximaciones son, computacionalmente hablando, bastante efectivos, y pueden ser utilizados como parte de una primera aproximación durante el proceso de diseño de la máquina, sin embargo Simon A. Ryder concluye en [xii] que el método de la analogía de circuitos térmicos y eléctricos puede no ser aplicable para todos los tipos de construcción y tamaños de transformadores.

Por otro lado, en el tipo de estudios específicos reportados por los autores de [ix], describen los resultados numéricos de los problemas relacionados a los transformadores eléctricos. Algunos ejemplos son los estudios realizados por O. Bíró y K. Preis en [iii], donde presentan una recopilación de las diversas formulaciones de potenciales vectoriales magnéticos para el estudio de corrientes de *Eddy* en medios conductores. A partir de las ecuaciones de Maxwell, y asegurando mantener la singularidad del potencial vectorial magnético mediante la definición del rotacional y la divergencia de dicho potencial a un valor específico, concluyen en las ecuaciones que han de modelar la distribución de campo magnético en estado estable, de manera numérica. De la misma manera, el mismo O. Bíró propone en [xiii] el uso del potencial vectorial magnético en la zona libre de formación de corrientes parásitas (medio no conductor) mientras que se usa el potencial vectorial de corriente en los medios conductores. Expone la aproximación de los potenciales vectoriales a partir de las aristas de los elementos discretos y los potenciales escalares a partir de los vértices. El uso de estos modelos es empleado para determinar las corrientes parásitas en materiales ferromagnéticos laminados como lo son los núcleos que se encuentran en los transformadores eléctricos, tal es el caso de los estudios realizados por J. Pávó, I. Sebestyén, S. Gyimóthy

y O. Bíró en [xiv] que proponen el cálculo de la distribución de campo magnético usando el método de elementos finitos para después determinar en la etapa de postprocesamiento y mediante 3 métodos distintos las pérdidas de potencia en un mismo caso reportado en la literatura, presentando tanto las variaciones que existen contra las mediciones experimentales, así como la complejidad y el uso de recursos computacionales que requiere cada uno de los métodos. Sin embargo, es en otro estudio realizado posteriormente por I. Sebestyén, S. Gylmóthy, J. Pávó y O. Bíró que, retomando los resultados de la implementación del método considerado óptimo en [xiv], proponen en el estudio [xxxi] un modelo conformado por dos etapas; la primera se enfoca a determinar la distribución del campo magnético en el modelo asumiendo una estructura no laminada, con propiedades ferromagnéticas no lineales y conductividades eléctricas anisotrópicas para así, en la segunda etapa, determinar las pérdidas de calor por unidad de volumen utilizando los resultados previos pero en esta ocasión contemplando propiedades ferromagnéticas lineales en los materiales con permeabilidades magnéticas espacialmente homogéneas basadas en los resultados obtenidos a partir de la curva de magnetización no lineal del material.

Existen también trabajos indexados en los que se enlistan las metodologías y resultados de estudios enfocados a pérdidas por corrientes de *Eddy* en cuerpos metálicos de transformadores de potencia de gran tamaño como lo son los elementos estructurales de sujeción y el tanque contenedor. En los estudios realizados por C. Guérin, G. Meunier y G. Tanneau [xv] se exponen estudios de cálculos computacionales de las pérdidas de potencia por corrientes de *Eddy* en los herrajes y tanque a partir de la determinación de la impedancia de superficie de dichos elementos en función de curvas de magnetización rectangulares, pero es en el trabajo de L. Kralj y D. Miljavec [xxxii] donde realizan una comparativa de las pérdidas en elementos estructurales y tanque entre las mediciones experimentales y los valores calculados usando características no lineales en la curva de magnetización con la que se determinó la impedancia de superficie así como los valores calculados con una impedancia obtenida a partir de una curva de magnetización lineal. Por su parte, P. S. Georgilakis, D. Doulamis, N.D. Hatzargyriou, S. D. Kollias en [xvi] hicieron uso de una combinación de redes neuronales y algoritmos genéticos para minimizar las pérdidas generadas en núcleos de tipo devanado.

En la literatura existen también estudios enfocados a determinar las pérdidas en los devanados de los transformadores. La principal contribución a las pérdidas en esta zona está dada por las pérdidas resistivas del material al paso de la corriente y en función de la resistencia de dichas bobinas. Sin embargo, la inclusión de las pérdidas extrañas en las bobinas debido a corrientes parásitas

inducidas en éstas permite aproximar de una manera más adecuada tanto el orden de magnitud como la posición de las zonas de mayor elevación de temperatura. J. Wijaya, W. Guo, T. Czaszejko, D. Martin, N. Lelekakis y D. Susa presentan en [xxxiii] los resultados de un estudio que plantea el procedimiento mencionado con el cual demuestran las variaciones que existentes en las pérdidas totales de los devanados en función de su eje longitudinal debido a flujos magnéticos dispersos.

Es posible encontrar también investigaciones enfocadas al modelado de las condiciones de enfriamiento bajo diferentes tipos de construcción de transformadores. J.M. Mufuta y E. Van Den Bulck en [xvii] y [xviii] consideran un análisis detallado del proceso de enfriamiento en un transformador con bobinas de tipo disco bajo un régimen de convección mixta. En sus resultados, proponen la modificación de la orientación de los canales de flujo para mejorar el circuito de refrigeración en las zonas críticas. Así mismo, J. Zhang y X. Li presentan en [xix] un modelo térmico-termohidráulico acoplado desarrollado para investigar la ubicación y magnitud del punto caliente y una distribución de temperaturas en un dominio bidimensional representativo de una bobina devanada de tipo discos de un transformador de potencia mientras que K. Sheltami, G. Refai-Ahmed y M. H. Shwehdi en [xx] presentan un estudio térmico en el cual, un transformador eléctrico de distribución es sometido a pruebas de estrés térmico bajo tres condiciones medioambientales distintas entre sí (parámetros ambientales de tres ciudades en tres países distintos). Los autores dan pie a una discusión acerca del desarrollo de estándares especiales que regulen los equipos eléctricos de potencia en condiciones de intemperie.

Por su parte, F. Torriano, P. Picher y M. Chaaban en [xxi] emplean un estudio de transferencia de calor conjugada para determinar el flujo y la distribución de temperaturas en una sección angular de un transformador trifásico con bobinas de tipo disco demostrando, en sus resultados, la importancia de la tercer componente espacial debido a espaciadores entre conductores y seccionadores que direccionan el fluido por lo que concluyen que el estudio no puede ser considerado axisimétrica en un plano bidimensional.

Las aproximaciones mencionadas anteriormente consideran únicamente una física de estudio para describir fenómenos bastante complejos. El uso de estas metodologías resulta bastante útil para aplicaciones como cálculos de pérdidas en elementos estructurales u optimización de formas o configuraciones de enfriamiento, así como la estimación de la ubicación de los puntos calientes.

Existen también modelos y procedimientos que usan los estudios previos como componentes en metodologías acopladas, tal es el del estudio realizado por K.

Preis, O. Bíró, G. Buchgraber e I. Ticar [xxii] quienes realizan un estudio basado en una metodología que calcula la distribución de campo magnético y por consiguiente la distribución de temperaturas, acoplando el término de generación de calor volumétrica de la formulación electromagnético como el término fuente de la ecuación de la energía del modelo térmico. Sin embargo, estudios explícitos como el anterior son muy escasos.

Debido a que los transformadores eléctricos de potencia se diseñan y construyen en base a necesidades específicas de los clientes que los requieren, éstos no son producidos en masa. Esta situación coloca en una posición complicada al caso de estudio que se analiza ya que, aun cuando la revisión del estado del arte permite nutrir de conocimientos la investigación con respecto a las tendencias de los métodos de estudio, resulta poco práctica la validación de la metodología comparada contra dicha revisión bibliográfica por la complejidad que representa reproducir todos y cada uno de los casos de estudio reportados. Las dimensiones de los elementos de estudio resultan de órdenes de magnitud volumétricos bastante elevados y, por consiguiente, discretizar dichos dominios para buscar la validación del método resulta casi imposible. En el caso que se presenta en este estudio, los resultados serán respaldados por parámetros obtenidos mediante mediciones experimentales obtenidas en pruebas de laboratorio ejecutadas por parte del fabricante de la máquina. Sin embargo, a continuación se ahondará en los estudios reportados en la literatura de los cuales se tomaron las metodologías de estudios para la realización de esta investigación como parte de una recopilación de resultados para identificar las tendencias que han de tener los resultados esperados.

En [xxxi] Imre Sebestyén, Szabolcs Gyimóthy, József Pávó y Oszcár Bíró presentan un estudio electromagnético armónico utilizando el método de elementos finitos mediante el cual se determinan las pérdidas volumétricas de calor en materiales ferromagnéticos laminados. La geometría del modelo estudiado se describe en la Figura 29, este modelo se compone de 320 láminas de acero al silicio con un espesor de 0.5 mm, en total las dimensiones del núcleo son 160 mm, 510 mm y 160 mm en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$ . Los diámetros interno y externo de las bobinas de excitación son 160 y 266.6 mm respectivamente, el sentido de las laminaciones es normal a la flecha indicada en la Figura 29. Debido a la naturaleza del fenómeno, es posible estudiar una fracción representativa de 1/8 del dominio, como se muestra en la Figura 30. La curva de magnetización del núcleo ferromagnético se muestra en la Figura 31, y su conductividad eléctrica es de 2.5 MS/m.

En la primera fase del estudio, se contempla el modelo no laminado con una conductividad eléctrica anisotrópica igual a cero en la componente normal a las

láminas del núcleo y una curva de magnetización (permeabilidad magnética no lineal) por lo que se realiza un análisis periódico temporal en el cual la curva de magnetización B-H constituye la relación entre las amplitudes de los armónicos de las cantidades de los campo.

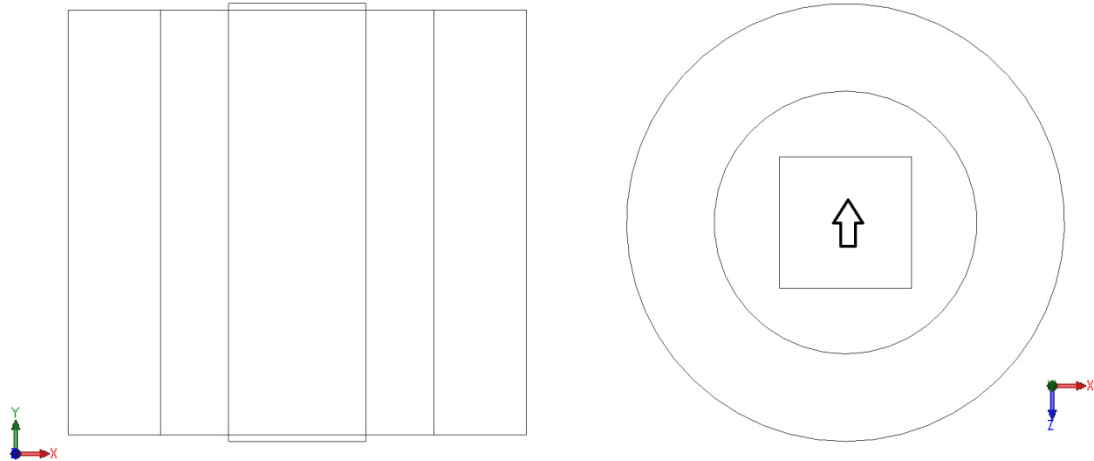


Figura 29. (a) vista lateral del dominio. (b) Vista alzada del dominio [xxxi].

En la segunda fase, las propiedades de cada una de las láminas son sustituidas por propiedades equivalentes no homogéneas. Es decir, en esta ocasión cada uno de los elementos resultantes del proceso de discretización posee propiedades magnéticas lineales (permeabilidad relativa). Esta propiedad se determina a partir de la curva de magnetización no lineal B-H acorde al campo magnético local obtenido de la solución anisotrópica.

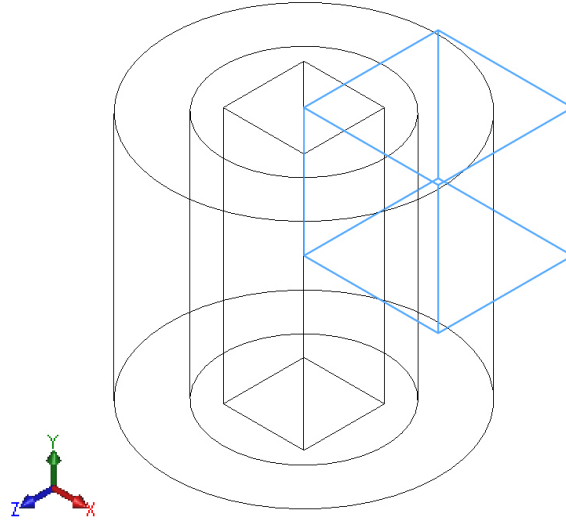


Figura 30. Fracción de dominio que se estudia [xxxi].

En el estudio se reporta que las pérdidas de potencia en materiales ferromagnéticos consisten en la suma de las pérdidas dinámicas y la contribución de histéresis. Estas pérdidas juntas pueden determinarse mediante el uso de la curva de pérdidas específicas provista por el productor del acero y es obtenida a partir de mediciones experimentales de una sola lámina. Asumiendo que el efecto piel es despreciable debido al corto espesor de la lámina y contemplando un campo magnético sinusoidal, las pérdidas de potencia en materiales ferromagnéticos se describen mediante la siguiente ecuación:

$$P_{ec} = \frac{\pi^2}{6} \sigma d^2 f^2 B_{max}^2 \quad (3 - 1)$$

donde  $P_{ec}$  representa las pérdidas por corrientes de *Eddy* calculadas en una sola lámina,  $\sigma$  representa la conductividad eléctrica del material,  $d^2$  el cuadrado del espesor de cada una de las láminas,  $f^2$  es el cuadrado de la frecuencia de la corriente alterna y  $B_{max}^2$  el cuadrado del valor máximo de la densidad de campo magnético.

Los valores computados, mediante el método numérico, del núcleo ferromagnético se comparan en la Tabla 1. En dicha tabla se plasman los valores obtenidos y los valores medidos en pruebas de laboratorio a once distintos niveles de intensidad de corriente alimentando a la bobina de excitación.



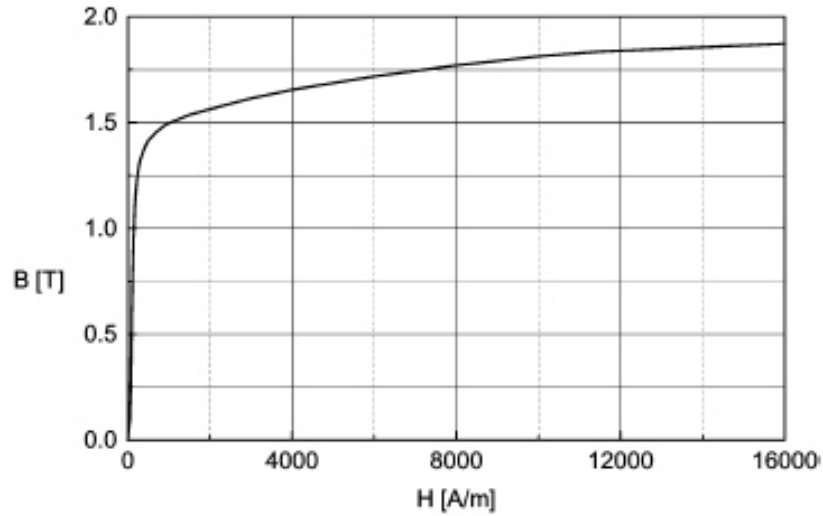


Figura 31. Curva de magnetización del acero al silicio [xxxi].

En la Tabla 1 se enlistan los resultados obtenidos y se comparan contra las mediciones experimentales, dicha comparativa demuestra la eficacia que posee dicho método en la columna del Error Relativo. Es posible apreciar que bajo dicho modelo, el error relativo decrece al incrementar la corriente de excitación. Esta tendencia se debe al aumento en la relevancia de las corrientes de *Eddy* causadas por flujos magnéticos dispersos que se suscitan a mayores niveles de saturación.

Tabla 1. Comparativa de las pérdidas del acero magnético medidas y calculadas [xxxi].

$I (A)$	$P_{medida} (W)$	$P_{calculada} (W)$	Error relativo (%)
6.95	6.77	5.01	-26.00
10.13	14.13	9.85	-30.29
19.84	66.78	40.42	-39.47
30.08	160.52	110.3	-31.29
40.14	331.47	240.22	-27.53
49.81	469.14	455.63	-2.88
60.77	946.97	861.37	-9.04
80.54	2270.07	2194.26	-3.34
100.5	4439.07	4595.26	3.52
122.2	7932.43	8329.59	5.01
148.46	12352.24	12183.43	-1.37

En [xxxii], Lenart Kralj y Damijan Miljavec plantean un problema de flujos magnéticos dispersos en las paredes del tanque y elementos estructurales de

sujeción del núcleo del transformador. Se describe un estudio armónico tridimensional realizado mediante el método de elemento finito usado para determinar las fugas de campo en condiciones de carga nominal de un transformador de potencia. Sus resultados fueron validados mediante pruebas de corto circuito realizadas experimentalmente.

Para el estudio se despreciaron todas las conexiones entre las bobinas, el tanque y demás elementos del transformador. Esto con el fin de simplificar el proceso (Figura 32), estando consientes de la baja variación que producirá en los resultados finales debido al orden de magnitud de pérdidas que los elementos de tamaño despreciable generan.

La metodología utilizada en el estudio demanda determinar la impedancia superficial de cada uno de los elementos metálicos incluidos en el diseño discretizado con el que se realizaron las simulaciones computacionales de campo magnético periódico. Estas simulaciones se realizaron con el software comercial CEDRAT FLUX 3D.

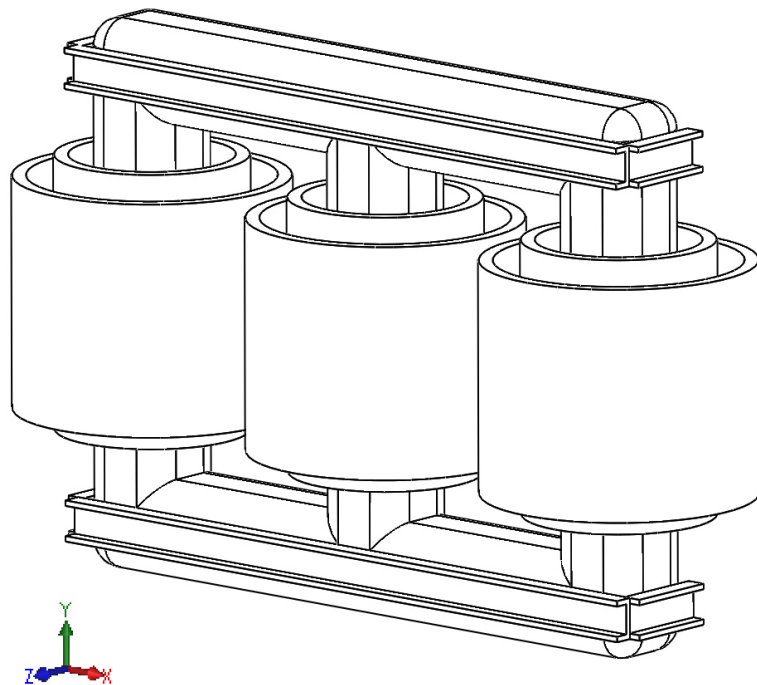


Figura 32. Modelo geométrico conceptual del transformador usado en el estudio [xxxii].

La impedancia de superficie representa la interacción entre el campo eléctrico y el campo magnético en la superficie del conductor. En este estudio se determina la impedancia superficial a partir de dos métodos, en el primero se

determina la impedancia superficial considerando propiedades lineales como se aprecia en la siguiente ecuación:

$$Z_{sl} = \frac{E_s}{H_s} = \frac{1 + i}{\delta\sigma} \quad (3 - 2)$$

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu}} \quad (3 - 3)$$

donde  $Z_{sl}$  representa la impedancia lineal de superficie,  $E_s$  el campo eléctrico calculado en la superficie de los elementos,  $H_s$  la intensidad de campo magnético calculada en la superficie de los elementos,  $i$  que representa una magnitud en términos fasoriales que denotan una oscilación característica de la corriente alterna,  $\delta$  representa la profundidad de penetración,  $\omega$  la frecuencia de la corriente eléctrica,  $\sigma$  la conductividad eléctrica y por último  $\mu$  la permeabilidad magnética relativa. Asumiendo que la intensidad del campo magnético no decrece en el espesor de la placa debido a que esta es muy delgada, se determinan las pérdidas en los elementos a partir de la integral superficial de la parte real de la impedancia:

$$P_{sl} = \frac{1}{2} \iint_{A_s} \text{Re}(Z_{sl}) \cdot |H_s|^2 dA \quad (3 - 4)$$

En el segundo método se contempla la no linealidad magnética y conductiva de los elementos de un transformador, por lo que se recalcula la impedancia de superficie de la siguiente manera:

$$Z_{snl} = \sqrt{\frac{3}{4}} 1.69 \frac{1}{\sigma\delta_{Ag}} (1 + 0.5i) \quad (3 - 5)$$

$$\delta_{Ag} = \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma} \frac{H_s}{B(H_s)}} \quad (3 - 6)$$

donde el cociente entre  $B(H_s)$  y  $H_s$  representa la permeabilidad relativa superficial local en cada punto de la superficie estudiada. Después se determina una última impedancia denominada  $Z_n$  que representa un valor ponderado de las impedancias lineales y no lineales en función de:

$$f(H_s) = \frac{1}{1 + \frac{H_s}{H_k}} \quad (3 - 7)$$

donde  $H_s$  representa la intensidad de campo magnético calculada y  $H_k$  un valor de intensidad de campo magnético de referencia (que en el caso de estudio asciende a 600 A/m). De esta manera es posible determinar el valor de  $Z_n$  como sigue:

$$Z_{sn} = f(H_s)Z_{sl} + (1 - f(H_s))Z_{snl} \quad (3 - 8)$$

Las pérdidas, en esta ocasión, son calculadas como sigue:

$$P_{sn} = \frac{1}{2} \iint_{A_s} Re(Z_{sn}) \cdot |H_s|^2 dA \quad (3 - 9)$$

Las corrientes de Eddy  $P_v$  fueron medidas en 3 distintos transformadores, todos de la compañía Etra 33 [xxxii]. Estos equipos se enlistan en la Tabla 2.

Tabla 2.  $P_k$  pérdidas de corto circuito,  $P_{cu}$  pérdidas resistivas del cobre,  $P_{dod_{cu}}$  pérdidas de Eddy en devanados y  $P_v$  pérdidas extrañas en elementos estructurales y tanque [xxxii].

No.	Model	$P_k$ (kW)	$P_{cu}$ (kW)	$P_{dod_{cu}}$ (kW)	$P_v$ (kW)
1	RT 10000-22.5/11.5	44.2	38.3	4.3	1.6
2	RT 25000-33/6.3	120	90.7	11.5	17.8
3	NT 40000-110/6.3	171	133.1	20.9	17

En la Tabla 3 se presentan las contribuciones de las pérdidas calculadas mediante ambos métodos  $P_{sl}$  y  $P_{sn}$  (lineal y no lineal) de cada elemento y se comparan contra las pérdidas medidas  $P_v$ . En ella se aprecia la superioridad de la precisión que presenta el modelo no lineal ante el modelo lineal.

Tabla 3. Pérdidas de potencia medidas (columna 2), pérdidas de potencia por impedancia superficial no lineal (columna 3) y pérdidas de potencia por impedancia superficial lineal (columna 4) [xxxii].

No.	$P_v$ (kW)	$P_{sn}$ (kW)	$P_{sl}$ (kW)
1	1.6	1.35	0.985
2	17.8	14.97	8.575
3	17	14.43	8.43

Debido a la calidad de los resultados obtenidos según el comportamiento lineal y no lineal mostrado en la Tabla 3, la comparativa de pérdidas locales se realiza únicamente entre valores medidos y valores calculados contemplando

propiedades no lineales en el material. En la Tabla 4 se presentan los resultados obtenidos en los elementos que fueron estudiados.

Tabla 4. Pérdidas de potencia en elementos estructurales [xxxii].

No.	Herraje inferior (kW)	Herraje superior (kW)	Herraje cruzado (kW)	Tanque (kW)	$P_{sn}$ (kW)	$P_v$ (kW)
1	0.16	0.08	0.03	1.08	1.35	1.6
2	2.54	1.24	1.31	9.97	14.97	17.8
3	2.26	1.5	1.21	9.46	14.43	17

Es posible concluir, a partir de la comparativa de resultados que los métodos reportados por los autores arrojan, que los modelos propuestos brindan un buen margen de confiabilidad tratándose de un fenómeno que presenta un alto nivel de complejidad para analizar. Si bien los resultados presentan niveles de incertidumbre que pasan de ser despreciables, ésta es una de las aproximaciones más adecuadas para el caso de estudio.

En [xxxiii] Jaury Wijaya, Wenyu Guo, Tadeusz Czaszejko, Daniel Martin, Nick Lelekakis y Dejan Susa reportan un estudio multifísico en el cual se determina la temperatura de una bobina de tipo disco a partir de un análisis electromagnético armónico bidimensional mediante el método de elemento finito usando el software comercial COMSOL.

El transformador estudiado posee una potencia nominal de 66 MVA con niveles de voltaje de 225/26.4 KV. Funciona bajo régimen de enfriamiento tanto ONAN como ONAF. Para acotar el estudio se caracterizó únicamente la bobina de baja tensión la cual se compone de 78 discos y 232 vueltas. El estudio contempló el cálculo analítico de las pérdidas resistivas de la bobina y las pérdidas por corrientes de *Eddy* inducidas en el devanado debido a flujos magnéticos dispersos, siendo éstas últimas determinadas numéricamente.

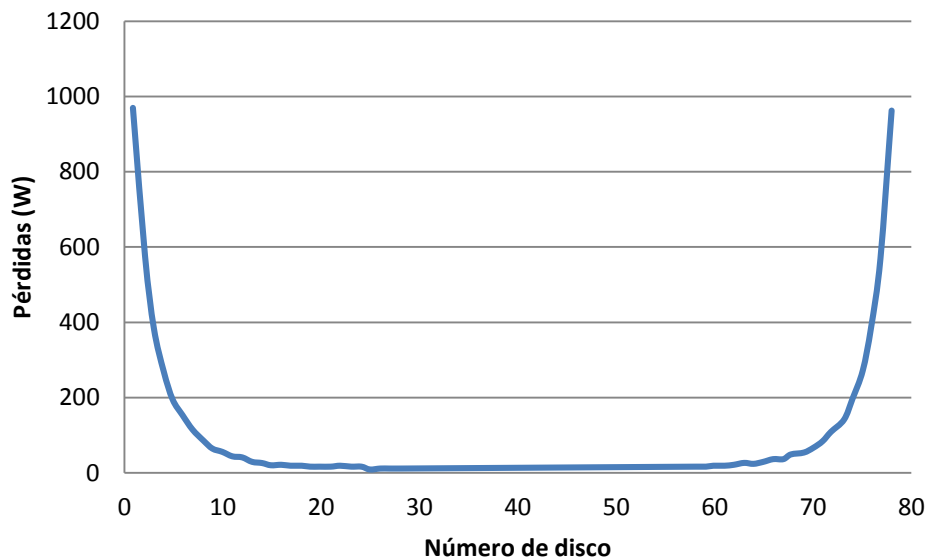
El dominio se discretizó de tal manera que se omitió la existencia de cada uno de los conductores independientes que compone a cada uno de los discos, y en su lugar se consideró cada elemento como una sola sección rectangular en las que el objetivo es determinar la densidad de campo magnético en el centro de dicho cuerpo. De manera semi-analítica se calcularon las pérdidas de *Eddy* en las bobinas mediante la siguiente ecuación:

$$P_{EC} = \frac{\pi^2 f^2 T^2 B^2}{3\rho} \quad (3 - 10)$$

donde  $T$  representa la dimensión del conductor perpendicular a la dirección de las líneas de campo magnético  $B$ , y  $\rho$  cuantifica la resistividad del material en  $\Omega m$ . Dichas pérdidas se presentan en las Gráficas 1 y 2.

La incidencia de las líneas de campo magnético, en un estudio bidimensional, se consideran para las componentes  $r$  y  $z$ , de tal manera que éstas resultas estimadas de manera insuficiente. Una aproximación más adecuada requiere un estudio tridimensional que permita conocer las líneas de campo magnético que cruzan el volumen del conductor en la componente angular  $\theta$ .

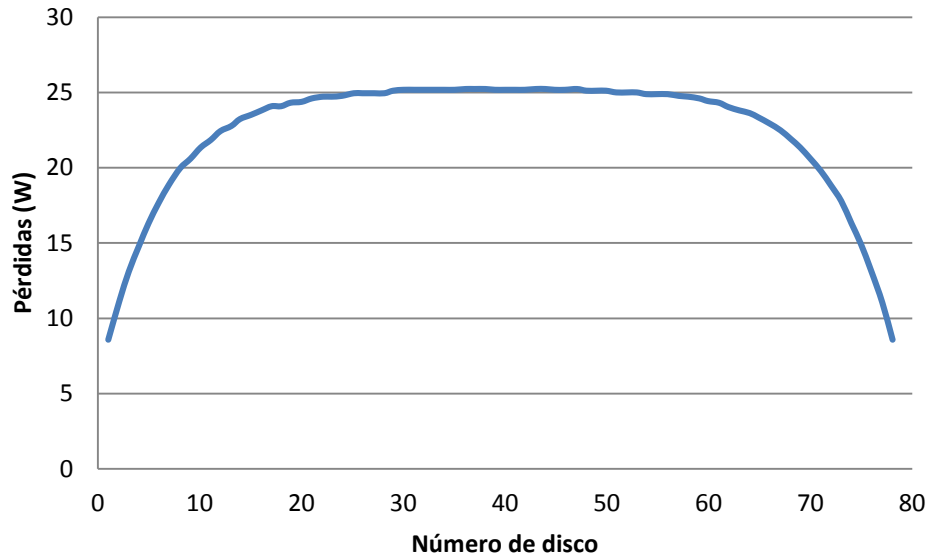
En las Gráficas 1 y 2 se aprecia que el flujo magnético y por consiguiente la distribución de pérdidas de potencia por corrientes de *Eddy* en las componentes radiales y axiales de las bobinas, respectivamente. Es posible observar en ambas gráficas que las pérdidas de potencia por corrientes de *Eddy* son superiores en las partes más bajas y altas de las bobinas. Así mismo podemos observar que las pérdidas calculadas para la componente radial son significativamente mayores que las pérdidas axiales en los extremos.



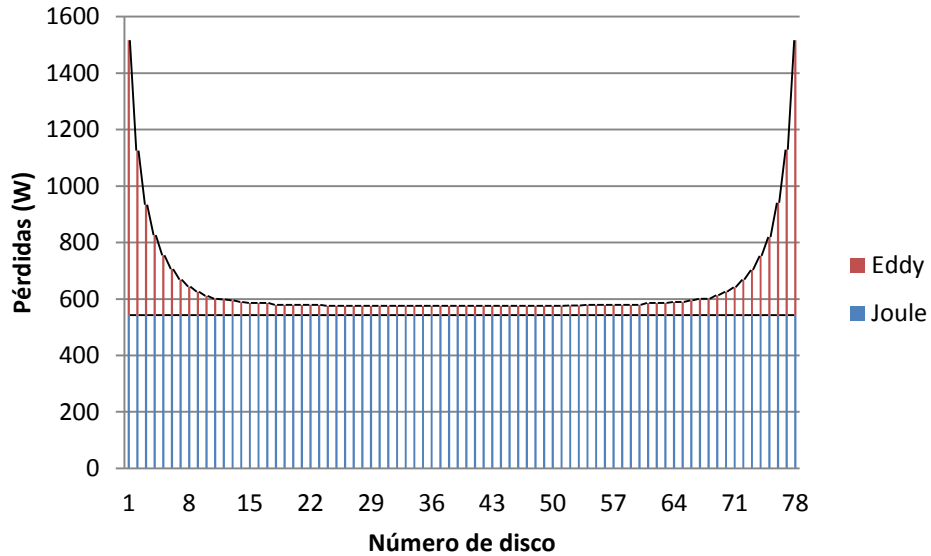
Gráfica 1. Distribución de pérdidas de Eddy en la componente radial [xxxiii].

La distribución de las pérdidas totales bajo condiciones de carga obtenidas de la suma de las pérdidas resistivas  $I^2R$  y las pérdidas calculadas a través de simulaciones numéricas, para cada uno de los discos de los devanados se muestran en la Gráfica 3. La aportación de las pérdidas de *Eddy* en los discos inferiores y superiores es muy significativa, principalmente debido a altos

niveles de densidad de campo magnético radial en los confines de la bobina. Este fenómeno es de vital importancia para determinar las zonas de mayor elevación de temperatura ya que no solo implica un aumento en el calor total generado sino también en una distribución de calor no homogénea, a diferencia de la distribución homogénea que produce contemplar únicamente las pérdidas resistivas en los devanados.



Gráfica 2. Distribución de pérdidas de Eddy en la componente axial [xxxiii].



Gráfica 3. Distribución total de pérdidas en devanados [xxxiii].

En [xvii], Jean-Michel Mufuta, Eric Van Den Bulck reportan un estudio del enfriamiento de los elementos de una bobina de tipo disco, haciendo una caracterización del flujo por medio del método de volúmenes finito utilizando software comercial.

El modelo geométrico del devanado se aprecia en la Figura 33, representando ésta una simplificación de un devanado de baja tensión con canales de enfriamiento principales en la dirección vertical y con canales secundarios que permiten el flujo del fluido en la dirección horizontal, interconectando los tres canales principales. La superficie de los conductores (diez por columna), así como el flujo de calor por unidad de área también se presentan idealizados como constante a lo largo de toda su superficie



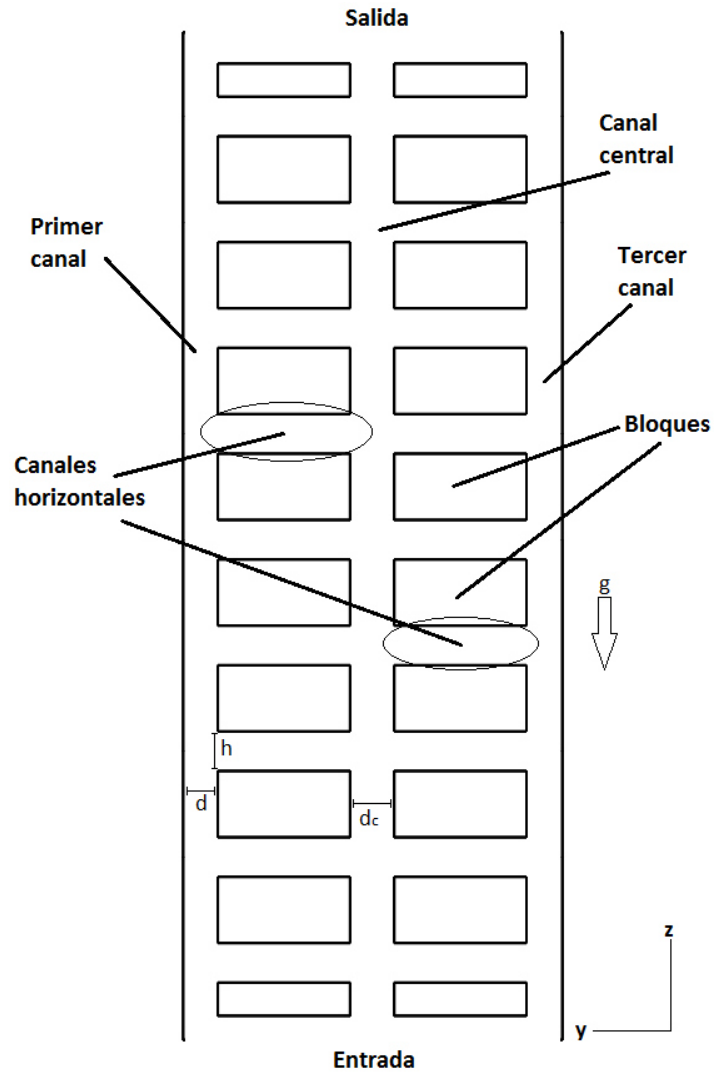


Figura 33. Modelo geométrico simplificado de la bobina analizada [xvii].

Las velocidades del fluido son también constantes a lo largo de toda la sección denominada Entrada para cada uno de los canales verticales.

En régimen de convección mixta y natural, el espaciamiento entre los bloques conductores así como la cantidad de bloques contemplados tienen una gran influencia en el flujo de calor transferido debido a que las capas límites térmicas de cada uno de los bloques por separado, interactúan entre sí.

El parámetro geométrico es la relación de canales, que se define como  $s = h/d$ . El dominio de cálculo es entonces un arreglo bidimensional de dos columnas de 15 x 25 mm (únicamente los bloques poseen dimensiones invariantes). La corriente principal del fluido posee dirección ascendente, removiendo a su paso

el calor emitido por los bloques. El fluido es aceite de transformador, incompresible y newtoniano. Los números adimensionales de *Reynolds* y *Grashof* son los parámetros hidráulicos y térmicos respectivamente, ambos con relevancia significativa en el perfil de velocidades, el cual toma todos los parámetros mencionados anteriormente en cuenta.

Las condiciones de frontera del modelo son:

- Velocidad:  $z = 0; W = W_{in}$ . En la salida  $z = z_f; \partial/\partial z$  de  $P, V, W$  y  $T = 0$ . Condición de no deslizamiento en interfaz sólido fluido.
- Temperatura:

$$Q_{blc} = \text{constante (108 Watts/bloque)}$$

$$\text{entrada: } T = T_0 = \text{constante (50°C)}$$

Las propiedades de todos los materiales tanto sólidos como fluidos fueron provistas por una empresa productora de equipos transformadores.

Los números de *Reynolds* y *Grashof* se definen como:

$$Re = \frac{W_{in} \times d_h}{\nu} \quad (3 - 11)$$

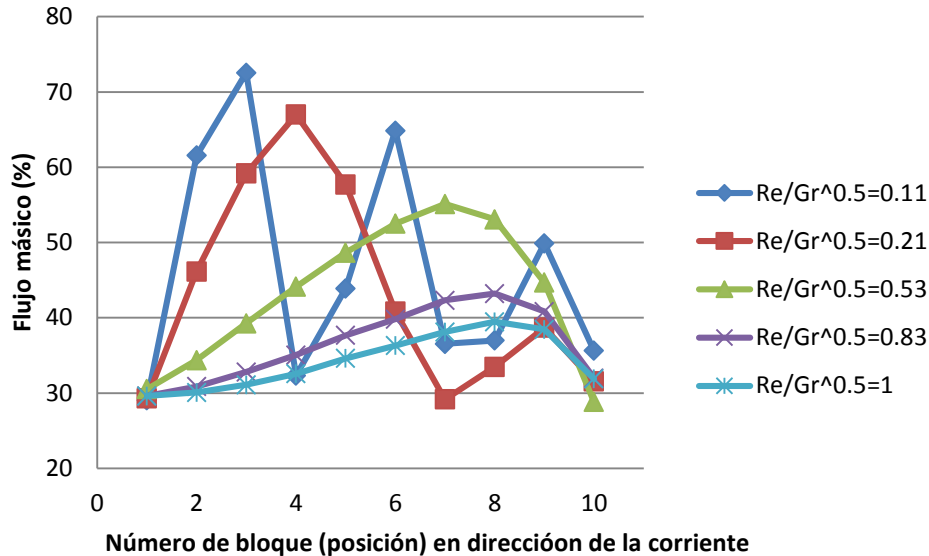
$$Gr = \frac{g \times \beta \times \Delta T \times d^3}{\nu^2} \quad (3 - 12)$$

Las propiedades del fluido son calculadas en base a temperaturas promedio del fluido en el dominio de control. Otros parámetros considerados son el espaciado vertical  $s$  entre los bloques y el número total de bloques considerados en el arreglo. Los rangos de los parámetros considerados son:

$$0.3 < s < 2.4, \quad 0.1 < \frac{Re}{Gr^{1/2}} < 1, \quad 3 < N < 15$$

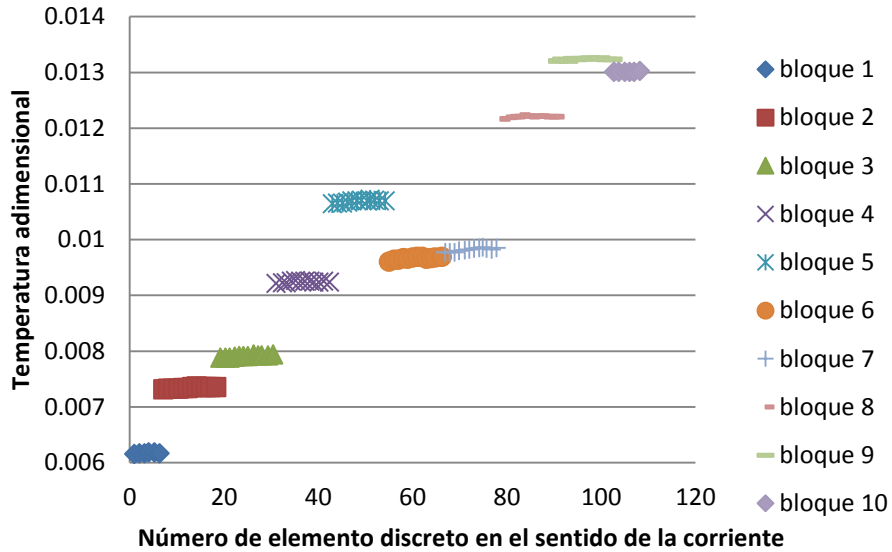
El rango del número de *Reynolds* va de  $10 < Re < 120$ .

Entre los resultados es posible observar en la Gráfica 4 las fluctuaciones del flujo másico calculado sobre la dirección principal del fluido para el canal central, como un porcentaje del flujo másico total entrando al dominio. Los 5 distintos valores de la relación entre  $Re$  y la raíz de  $Gr$  van de 0.11 a 1 con la intención de puntualizar la influencia que poseen las condiciones térmicas del modelo. Lo anterior variando el número de Reynolds de  $8 < Re < 150$ .



Gráfica 4. Fluctuaciones del flujo másico en la dirección principal del fluido en función del parámetro  $Re/Gr$  para el canal central [xvii].

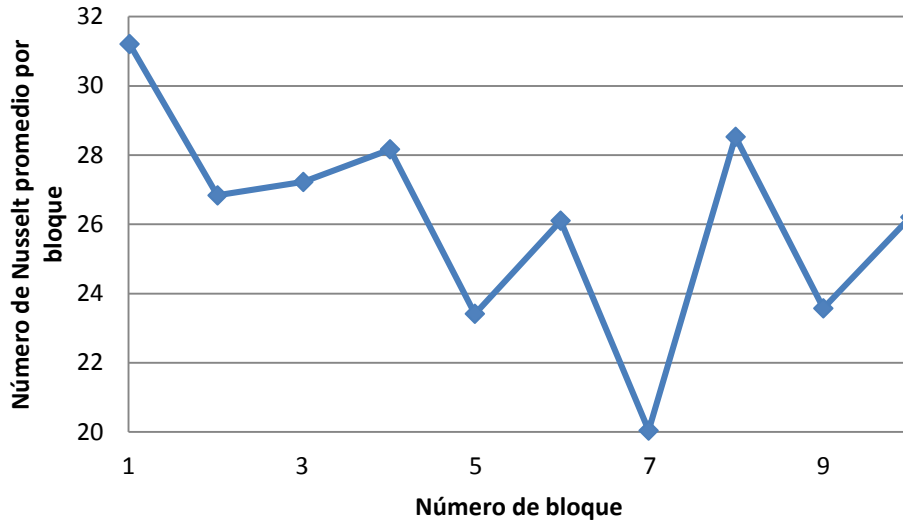
De la gráfica anterior se destaca el caso de  $Re/Gr^{1/2} = 0.21$  que posee un flujo másico porcentual máximo de 66% (aprox.) y un medio periodo localizado en el bloque 7. En una situación en la que los canales verticales no se encontraran conectados por los horizontales que los cortan, el porcentaje del flujo másico se mantendría equitativo para los tres canales (33% c/u aprox.). El parámetro denominado medio periodo se define como el número de bloques correspondientes a la distancia necesaria para que la tasa de flujo másico supere el valor mínimo inicial (33% para cada canal), alcance un valor máximo (66% en este caso) y regrese al valor mínimo. El incremento de la tasa de flujo másico, para este caso, indica un exceso en el flujo igual al 33% proveniente de los canales verticales laterales que, en condiciones de disipación de calor simétrica, ambos canales proveen un 16.5% aprox. Este excedente es el responsable de la remoción de calor en los canales horizontales. Con el incremento del valor de  $Re/Gr^{1/2}$ , los efectos de flotación decrecen y la amplitud de la fluctuación decrece también, invariablemente, lo que significa que existe menos flujo moviéndose a través de los canales horizontales. Para valores pequeños de  $Re/Gr^{1/2}$ , el flujo másico fluctúa más que en el caso de valores altos. Por su parte, la Gráfica 5 representa una medida adimensional, con  $Re/Gr^{1/2} = 0.21$ , de la temperatura en la superficie de los bloques en la cara de la izquierda del canal central en función del número del elemento discreto de cada uno de los bloques en la dirección principal del fluido.



Gráfica 5. Temperatura de la superficie vertical en la pared izquierda del canal central [xvii].

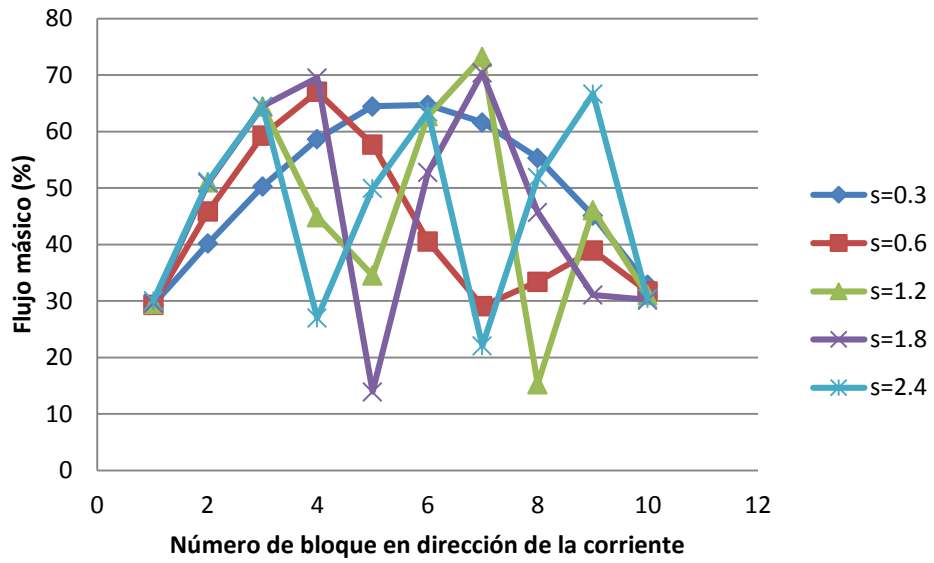
Existe un incremento de temperatura del primer bloque hasta el sexto, y después decrece y se incrementa nuevamente. Este comportamiento corresponde a las fluctuaciones másicas del arreglo. Se puede apreciar que el bloque número 5 posee una temperatura más elevada que el número 6 dado que el flujo másico pasando por sus paredes en el canal central es de mayor orden de magnitud que el resto del flujo en la dirección de la corriente.

En la Gráfica 6 se muestra, para cada uno de los bloques, un valor ponderado del número de *Nusselt*. Éste no se estabiliza en un valor constante como lo haría un una placa plana constante. El comportamiento de dicha gráfica se justifica, nuevamente, por las fluctuaciones registradas en el flujo másico. La curva presentada muestra un decremento del primero hasta el bloque número 7, lo cual corresponde al medio periodo mencionado anteriormente, después el valor de *Nusselt* se incrementa a partir del bloque 8 y vuelve a decrecer.

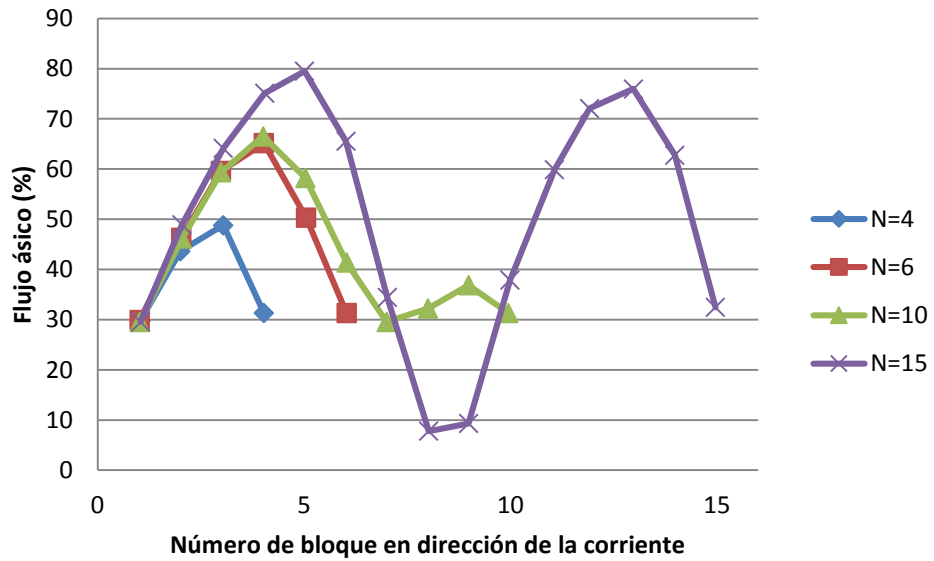


Gráfica 6. Número de Nusselt promedio por bloque para la columna de la izquierda [xvii].

Entre los parámetros geométricos que se estudiaron, el primero es el de la aspecto  $s = d/h$ , para lo cual se realizaron simulaciones en las que se evalúa el valor de  $s$  en 0.3, 0.6, 1.2, 1.8 y 2.4, como parte de una estrategia para determinar la influencia que tienen dimensiones de los canales en los patrones del flujo y conocer cuál es la distribución geométrica óptima para el sistema de refrigeración. Al igual que para las variaciones de la relación  $Re/Gr^{1/2}$ , donde las fluctuaciones se expresaron en términos de amplitud y periodo, en la Gráfica 7 se aprecia la existencia de un único medio periodo para un valor de  $s = 0.3$ , mientras que las fluctuaciones crecen y decrecen en repetidas ocasiones para un valor de  $s = 2.4$ . La relación de aspecto  $s$  óptima es aquella que permita un balance entre el flujo transversal a lo largo de los canales horizontales como el flujo en los canales verticales, en otras palabras, que la oscilación debe poseer periodos cortos y una amplitud medida en el canal central ya que al incrementarse la amplitud en este, el flujo másico en los canales laterales se ve afectado de manera opuesta. El último parámetro a considerar es el del número de bloques en el arreglo ya que este modelo simplificado se limita únicamente a una pequeña porción del dominio que puede llegar a representar a la bobina (número de discos). Es entonces relevante variar el número de discos  $N$  para extrapolar los resultados a configuraciones reales y conocer los patrones de flujo de fluido, por lo que los valores de  $N$  con que se estudió el dominio son 4, 6, 10 y 15 por columna. Las fluctuaciones parecen conservarse y repetirse de manera periódica con el aumento de los bloques en la dirección de la corriente como se aprecia en la Gráfica 8.



Gráfica 7. Fluctuación del flujo másico en dirección de la corriente principal en función del parámetro  $s$  en el canal central [xvii].



Gráfica 8. Fluctuación del flujo másico en la dirección de la corriente para distintos arreglos de bloques [xvii].

El estudio demuestra la interacción que existe entre las fuerzas de flotación y las fuerzas inerciales en el dominio del aceite. Se determinó la influencia de diversos parámetros como la relación de aspecto entre los canales horizontales y verticales, así como el número de boques que comprende el modelo. Se determinó, también, los perfiles del flujo en los canales horizontales y como este flujo resulta inversamente proporcional al parámetro  $Re/Gr^{1/2}$ . De la misma manera se observó que el espaciado vertical entre los bloques produce variaciones en el flujo dado que a mayor espacio la oscilación del periodo de la tasa del flujo másico se ve acortado y por último, se demostró que las fluctuaciones pueden ser extrapoladas a arreglos que contienen mayor número de bloques. Sin embargo, el autor deja en claro que la veracidad de estos resultados puede variar en función de otros parámetros de igual importancia en modelos como este, tal es el caso del espesor de dichos canales, la existencia de fuentes de calor no homogéneas en el dominio (tal es el caso de las corrientes parásitas inducidas en los devanados de los transformadores) así como las recirculaciones que puedan tomar lugar en los canales de enfriamiento horizontales al contemplar una tercera dimensión en el modelo.

Por último, en [xxi], F. Torriano, P. Pitcher, M. Chaaban presentan un estudio de transferencia de calor conjugada en una fracción de 10 grados en la componente angular y su totalidad en la componente axial y radial de una bobina de baja tensión de tipo disco (Figura 34). El objetivo es determinar el flujo de fluido y la distribución de temperaturas de la fracción de una bobina de 66 MVA, 225/26.4 KV comparándolos contra los resultados previamente obtenidos del mismo modelo estudiado únicamente en dos dimensiones. La bobina se compone de 78 discos que se encuentran divididos en cuatro pases. El primer pase se compone de 21 discos mientras que los pases restantes de 19. El aceite entra a la bobina por los canales axiales tanto interno como externo pero al pasar al segundo pase, el fluido es redireccionado en su totalidad al canal externo, de manera sucesiva se produce este cambio de dirección a cada cambio de pase. Los conductores, de cobre, tienen una sección transversal de 2.1 x 14.3 mm, los ductos horizontales de enfriamiento tienen una altura de 4.1 mm y un espesor aproximado de 94 mm y los canales interno y externo poseen 8.9 mm y 6.44 mm, respectivamente. La altura total de la bobina es de 1511 mm.

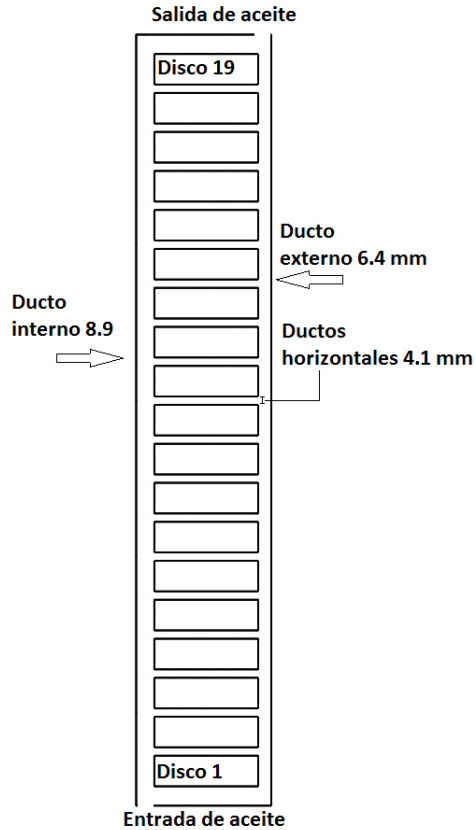


Figura 34. Esquema del diseño de la bobina de baja tensión [xxi].

Las propiedades de los materiales en el estudio son:

$$k_f = 0.1508 - 7.101e^{-5}T_f \text{ W/m K}$$

$$\rho_f = 1098.72 - 0.712T_f \text{ kg/m}^3$$

$$\mu_f = 0.08467 - 4e^{-4}T_f + 5e^{-7}T_f^2 \text{ Pa s}$$

$$Cp_f = 807.163 + 3.58T_f \text{ J/kg K}$$

$$k_c = 401 \text{ W/m K}$$

$$k_p = 0.19 \text{ W/m K}$$

$$\rho_c = 8933 \text{ kg/m}^3$$

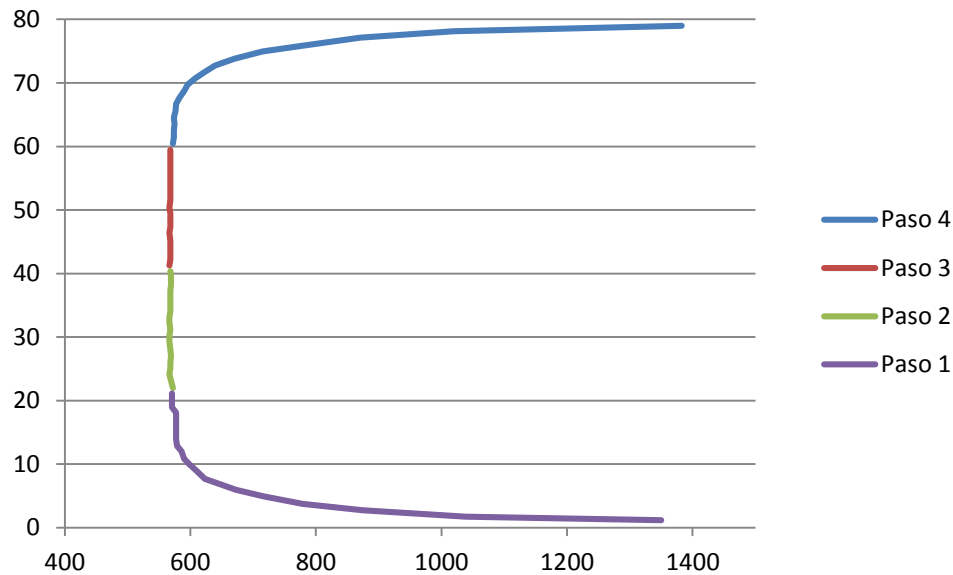


$$\rho_p = 930 \text{ kg/m}^3$$

$$Cp_c = 385 \text{ J/kg K}$$

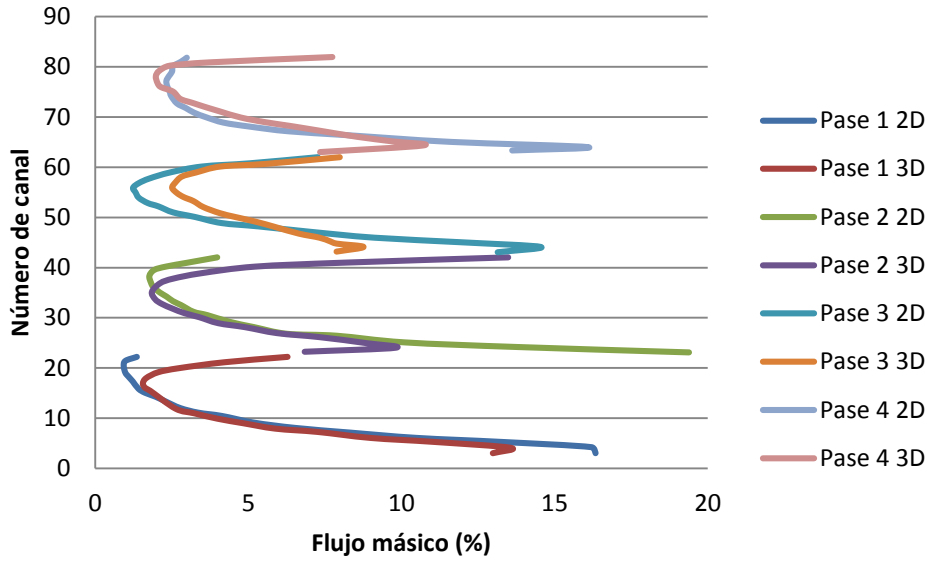
$$Cp_p = 1340 \text{ J/kg K}$$

Las pérdidas de orden electromagnético, compuestas por pérdidas  $I^2R$  y pérdidas de *Eddy* en devanados fueron tomadas también de un caso reportado en el estado del arte [xviii] y se presentan en la Gráfica 9.

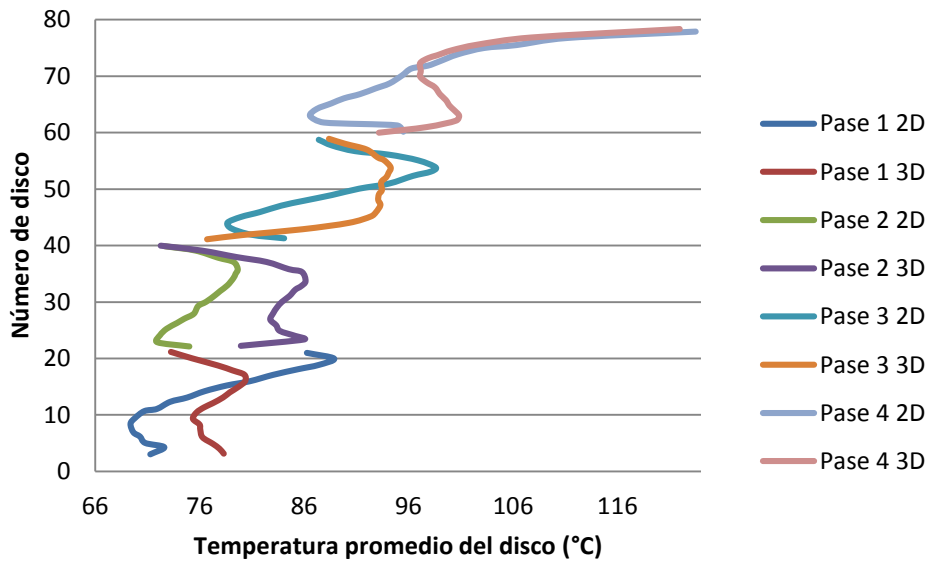


Gráfica 9. Distribución de pérdidas de calor en la bobina de baja tensión a 75°C [xxi].

Entre los resultados de este estudio figura la comparativa de los perfiles de temperatura de cada uno de los discos de los 4 pasos en la bobina así como el flujo másico que fluye en cada uno de los canales horizontales en la sección angular de la bobina para los modelos de dos y tres dimensiones. Las Gráficas 10 y 11 pueden ser justificadas debido a la variación que existe entre la configuración bidimensional y tridimensional de los números de Reynolds y Grashof, consecuentemente los regímenes de flujo no son idénticos.



Gráfica 10. Distribución de flujos para los modelos 2D y 3D [xxi].



Gráfica 11. Distribución de temperaturas para los modelos 2D y 3D [xxi].

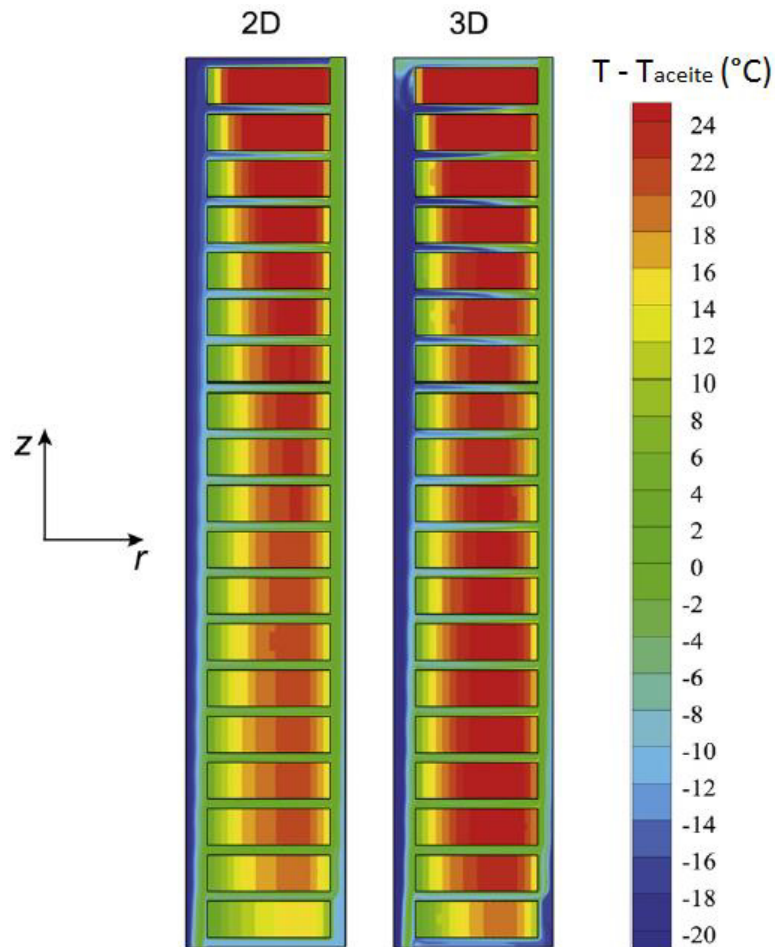


Figura 35. Contornos de temperatura en el cuarto pase para el modelo 2D y 3D [xxi].

Se concluye del estudio de transferencia de calor conjugada que el flujo de fluido no puede considerarse axisimétrico en la bobina, debido a las velocidades obtenidas en la componente angular así como los gradientes de temperatura en la misma ocasionados por los espaciadores de los devanados. Éstos últimos, al no estar en contacto con el fluido en algunas secciones, llegan a alcanzar la temperatura del cobre mismo en diversas zonas (Figura 35), sin embargo estas conjeturas, según el autor, deben ser validadas experimentalmente tomando como referencia de las zonas de mayor temperatura, los resultados obtenidos en este estudio.

## 4. METODOLOGÍA PARA LOS ESTUDIOS ELECTROMAGNÉTICO Y TERMOHIDRÁULICO.

El estudio que se presenta en este documento se compone de un proceso multifísico que se desarrolla dentro de un transformador eléctrico trifásico. Estas máquinas operan bajo principios electromagnéticos que desencadenan una serie de sobreelevaciones de temperatura en sus estructuras por lo cual, se considera que existe una codependencia entre estos fenómenos; a mayores niveles de operación en aspectos electromagnéticos, mayores niveles de temperatura son alcanzados. En este capítulo se expone, en 2 partes, una metodología que permita conocer la distribución espacial de la generación de calor que sufren los elementos conductores de electricidad en la máquina (4.1. Simulación computacional del fenómeno electromagnético), así como un estudio en el que se determine la temperatura de los devanados de la máquina (4.2. Simulación computacional del fenómeno termohidráulico); utilizando tanto herramientas numéricas computacionales comerciales de la plataforma ANSYS como métodos de procesamiento propuestos. Un esquema general de la metodología se muestra en la Figura 36.

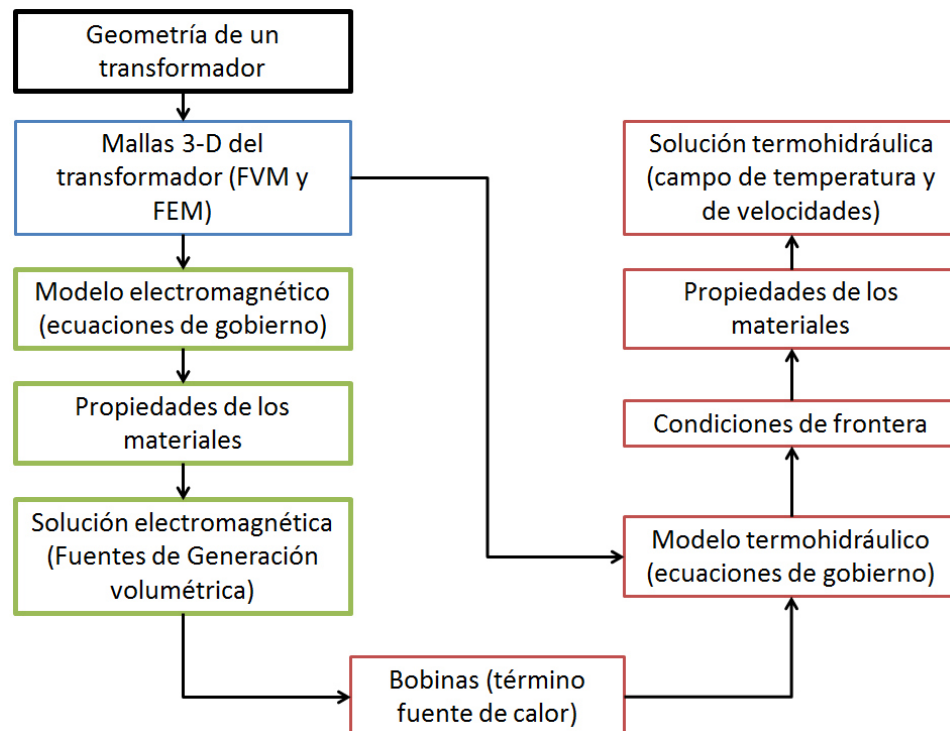


Figura 36. Esquema global del acoplamiento electromagnético-termohidráulico.

#### 4.1. Geometría del modelo electromagnético del transformador.

En modelos de orden electromagnético es preciso contemplar todos y cada uno de los cuerpos que poseen propiedades electromagnéticas tal que los campos generados interactúen con ellos. Al tratarse de estudios que pretenden determinar las fuentes de calor dentro de la máquina, es preciso modelar a todos aquellos elementos que por su proximidad a zonas críticas, así como por su tamaño, supongan valores de órdenes de magnitud relevantes pero ponderando siempre la relación costo-beneficio que dicta el consumo de recurso computacional al manejar modelos complejos y de grandes dimensiones. En función del comportamiento estimado del fenómeno, así como de la configuración estructural de la máquina, es imprescindible hacer uso de simplificaciones de tipo geométrico que permitan facilitar el procesado y manejo de la información con la que se cuenta, asegurando siempre que estas suposiciones no arriesguen la calidad de los resultados. Dicho esto, el proceso de modelado geométrico se realiza tomando en cuenta comportamientos característicos de operación de esta máquina, de esta manera es posible simplificar las formas geométricas utilizando condiciones de frontera adecuadas que permitan modelar el estudio de manera correcta.

Los componentes mínimos necesarios que debe incluir el modelo CAD de un transformador trifásico para el estudio que se pretende son:

- Núcleo ferromagnético.
- Bobinas de baja y alta tensión.
- Elementos de sujeción y soporte.
- Tanque contenedor.

Estos se muestran en la Figura 37.

##### 4.1.1. Mallas FEM 3-D del transformador para estudio electromagnético.

El método de elemento finito (FEM por sus siglas en inglés) es una técnica numérica utilizada para resolver problemas de valor en la frontera gobernados por una o varias ecuaciones diferenciales y un conjunto de condiciones de frontera. La idea principal tras este método es la representación del dominio mediante subdominios más pequeños denominados **elementos finitos**. La distribución del valor de las incógnitas principales dentro de un elemento es interpolada basándose en los valores de los nodos (se utilizan elementos nodales proporcionados) así como los valores en las aristas, en caso de que se utilicen elementos vectoriales. La interpolación o función de “*forma*” debe ser un conjunto completo de polinomios. La exactitud de la solución que provee el

dominio discreto depende, entre otros factores, del orden de estos polinomios los cuales pueden ser lineales, cuadráticos o de orden superior. La solución numérica obtendrá valores de la incógnita principal en los nodos o en las aristas del dominio discreto. La solución es obtenida tras resolver un sistema de ecuaciones lineales o no lineales según el tipo de problema. Para formar dicho sistema de ecuaciones, las ecuaciones diferenciales de gobierno y las condiciones de frontera correspondientes deben ser primeramente convertidas a una formulación integro-diferencial utilizando un método de residual ponderado, tal es el caso de la aproximación de *Galerkin* [xxix]. Esta formulación integro-diferencial es aplicada a un solo elemento y con el uso de funciones de interpolación apropiadas se obtienen las ecuaciones respectivas de los elementos.

## INFORMACIÓN PROTEGIDA PROPIEDAD INTELECTUAL

Figura 37. Modelo CAD de un transformador trifásico para caso electromagnético.

Al acoplar todos los elementos resulta un sistema global de matrices que representa el dominio discreto completo del problema de valor en la frontera. El método de *Galerkin* consiste en formar un residual directamente de la ecuación diferencial asociada al problema de valor en la frontera que se estudia, es decir,

el residual se obtiene al transferir todos los términos de la ecuación diferencial hacia un costado. El objetivo es encontrar una combinación lineal en una función base aproximada cuyo residuo tenga componente igual a cero, esto significa que al integrar sobre el dominio del elemento el producto punto del residuo por cada función base el resultado debe ser lo más aproximado a cero posible. Un ejemplo en el que se muestra el procedimiento para determinar el potencial vectorial magnético es mostrado a continuación [xxx]. El potencial vectorial magnético  $A$  es aproximado mediante la siguiente función de forma lineal:

$$A = s_1 + s_2 \cdot x + s_3 \cdot y \quad (4.1.1 - 1)$$

Las incógnitas  $s_1$ ,  $s_2$  y  $s_3$  son calculadas a partir de los valores de los potenciales vectoriales magnéticos  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$  en los tres nodos del elemento mostrado en la Figura 38. Esto significa que las incógnitas  $s_1$ ,  $s_2$  y  $s_3$  de la ecuación anterior se deducen de la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$A_1 = s_1 + s_2 \cdot x_1 + s_3 \cdot y_1 \quad (4.1.1 - 2)$$

$$A_2 = s_1 + s_2 \cdot x_2 + s_3 \cdot y_2 \quad (4.1.1 - 3)$$

$$A_3 = s_1 + s_2 \cdot x_3 + s_3 \cdot y_3 \quad (4.1.1 - 4)$$

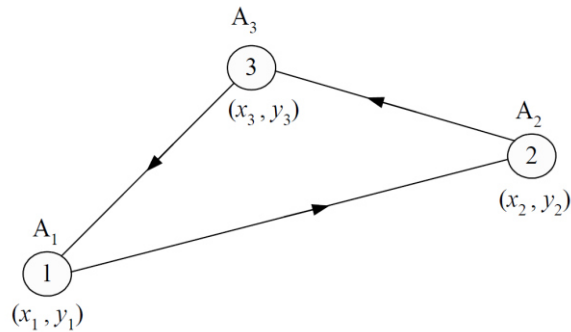


Figura 38. Elemento finito bidimensional triangular en coordenadas rectangulares. Los vértices de este elemento discreto son 1, 2 y 3 en orden contrario a las manecillas del reloj.

El sistema de ecuaciones lineal anterior se resuelve utilizando la regla de Cramer por lo que la solución resulta como:

$$s_1 = \frac{(x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2) \cdot A_1 + (x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3) \cdot A_2}{2 \cdot \Delta} + \frac{(x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1) A_3}{2 \cdot \Delta} \quad (4.1.1 - 5)$$

donde  $\Delta$  es el área del elemento finito triangular de la Figura 38, el cual se calcula como:

$$\Delta = \frac{|(x_2 - x_3) \cdot (y_3 - y_1) - (y_2 - y_3) \cdot (x_3 - x_1)|}{2} \quad (4.1.1 - 6)$$

De manera similar,  $s_2$  y  $s_3$  se obtienen de las siguientes ecuaciones:

$$s_2 = \frac{(y_2 - y_3) \cdot A_1 + (y_3 - y_1) \cdot A_2 + (y_1 - y_2) \cdot A_3}{2 \cdot \Delta} \quad (4.1.1 - 7)$$

$$s_3 = \frac{(x_3 - x_2) \cdot A_1 + (x_1 - x_3) \cdot A_2 + (x_2 - x_x) \cdot A_3}{2 \cdot \Delta} \quad (4.1.1 - 8)$$

Sustituyendo (4.1.1 - 5), (4.1.1 - 7) y (4.1.1 - 8) en (4.1.1 - 1), obtenemos:

$$A = \frac{(x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2) \cdot A_1 + (x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3) \cdot A_2 + (x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1) A_3}{2 \cdot \Delta} + \left[ \frac{(y_2 - y_3) \cdot A_1 + (y_3 - y_1) \cdot A_2 + (y_1 - y_2) \cdot A_3}{2 \cdot \Delta} \right] \cdot x + \left[ \frac{(x_3 - x_2) \cdot A_1 + (x_1 - x_3) \cdot A_2 + (x_2 - x_x) \cdot A_3}{2 \cdot \Delta} \right] \cdot y \quad (4.1.1 - 9)$$

La densidad de flujo magnético para  $x$  y  $y$  está dada por  $B_x = \partial A / \partial x$  y  $B_y = \partial A / \partial y$ , respectivamente. Combinando estas relaciones con la ecuación (4.1.1 - 9), la densidad de flujo  $B_x$  y  $B_y$  resultan como sigue:

$$B_x = \frac{(x_3 - x_2) \cdot A_1 + (x_1 - x_3) \cdot A_2 + (x_2 - x_1) \cdot A_3}{2 \cdot \Delta} \quad (4.1.1 - 10)$$

$$B_y = \frac{(y_3 - y_2) \cdot A_1 + (y_1 - y_3) \cdot A_2 + (y_2 - y_1) \cdot A_3}{2 \cdot \Delta} \quad (4.1.1 - 11)$$

La ecuación de Poisson bidimensional para problemas magnetostáticos dice que:

$$v_m \cdot \nabla^2 A = -J \quad (4.1.1 - 12)$$

La solución de la ecuación de Poisson es equivalente a minimizar la siguiente función de funciones relacionado con la energía:



$$F = \iint \left\{ \frac{\nu_m}{2} \cdot \left[ \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial A}{\partial y} \right)^2 \right] - J \cdot A \right\} \cdot dx \cdot dy \quad (4.1.1 - 13)$$

La minimización de (4.1.1 – 13) con respecto al valor de cada vértice  $A_k$  siendo  $k = 1,2,3$  (Figura 38), resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial A_k} = 0 &\Rightarrow \iint \left\{ \nu_m \cdot \left[ \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial A_k} \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial A}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial A_k} \left( \frac{\partial A}{\partial y} \right) \right] - J \cdot \frac{\partial A}{\partial A_k} \right\} \cdot dx \cdot dy \\ &= 0 \\ &\Rightarrow \iint \nu_m \cdot \left[ \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial A_k} \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial A}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial A_k} \left( \frac{\partial A}{\partial y} \right) \right] \cdot dx \cdot dy \\ &= \iint J \cdot \frac{\partial A}{\partial A_k} \cdot dx \cdot dy \quad , \quad \forall k = 1,2,3 \end{aligned} \quad (4.1.1 - 14)$$

Comenzando por la ecuación (4.1.1 – 9) obtenemos:

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{(y_2 - y_3) \cdot A_1 + (y_3 - y_1) \cdot A_2 + (y_1 - y_2) \cdot A_3}{2 \cdot \Delta} \quad (4.1.1 - 15)$$

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{(x_3 - x_2) \cdot A_1 + (x_1 - x_3) \cdot A_2 + (x_2 - x_1) \cdot A_3}{2 \cdot \Delta} \quad (4.1.1 - 16)$$

Derivando las ecuaciones anteriores con respecto a  $A_1$ , resulta:

$$\frac{\partial}{\partial A_1} \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right) = \frac{(y_2 - y_3)}{2 \cdot \Delta} \quad (4.1.1 - 17)$$

$$\frac{\partial}{\partial A_1} \left( \frac{\partial A}{\partial y} \right) = \frac{(x_3 - x_2)}{2 \cdot \Delta} \quad (4.1.1 - 18)$$

La primer integral de la ecuación (4.1.1 – 14), para el caso de  $k = 1$ , escalculada sustituyendo las ecuaciones (4.1.1 – 15) a (4.1.1 – 18) en la ecuación (4.1.1 – 14), con lo cual resulta:

$$\begin{aligned} &\iint \nu_m \cdot \left[ \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial A_1} \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial A}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial A_1} \left( \frac{\partial A}{\partial y} \right) \right] \cdot dx \cdot dy = \\ &\frac{1}{4 \cdot \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \Delta} \cdot \left\{ \begin{aligned} &[(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2] \cdot A_1 + \\ &[(y_3 - y_1) \cdot (y_2 - y_3) + (x_3 - x_1) \cdot (x_2 - x_3)] \cdot A_2 + \\ &[(y_1 - y_3) \cdot (y_2 - y_3) + (x_1 - x_2) \cdot (x_2 - x_3)] \cdot A_3 \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (4.1.1 - 19)$$

Para esto, se hizo uso de la propiedad  $\iint dx \cdot dy = \Delta$ , donde  $\Delta$  representa el área del triángulo (Figura 38) y además, la relación  $\nu = 1/(\mu_0 \cdot \mu_r)$ .

Por su parte, la segunda integral de la ecuación (4.1.1 – 14) se resuelve como:

$$\iint J \cdot \frac{\partial A}{\partial A_k} \cdot dx \cdot dy = \frac{J \cdot \Delta}{3} , \quad \forall k = 1,2,3. \quad (4.1.1 - 20)$$

Para el caso en que  $k = 1$ , la ecuación (4.1.1 – 14) se simplifica sustituyendo (4.1.1 – 19) y (4.1.1 – 20) como sigue:

$$\begin{aligned} \iint v_m \cdot \left[ \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial A_1} \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial A}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial A_1} \left( \frac{\partial A}{\partial y} \right) \right] \cdot dx \cdot dy &= \iint J \cdot \frac{\partial A}{\partial A_1} \cdot dx \cdot dy \Rightarrow \\ \frac{1}{4 \cdot \mu_r \cdot \Delta} \cdot \left\{ \begin{array}{l} [(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2] \cdot A_1 + \\ [(y_3 - y_1) \cdot (y_2 - y_3) + (x_3 - x_1) \cdot (x_2 - x_3)] \cdot A_2 + \\ [(y_1 - y_3) \cdot (y_2 - y_3) + (x_1 - x_2) \cdot (x_2 - x_3)] \cdot A_3 \end{array} \right\} & \\ = \frac{\mu_0 \cdot J \cdot \Delta}{3} & \quad (4.1.1 - 21) \end{aligned}$$

De manera similar, para  $k = 2$  y  $k = 3$  resulta:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4 \cdot \mu_r \cdot \Delta} \cdot \left\{ \begin{array}{l} [(y_3 - y_1) \cdot (y_2 - y_3) + (x_3 - x_1) \cdot (x_2 - x_3)] \cdot A_1 + \\ [(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2] \cdot A_2 + \\ [(y_3 - y_1) \cdot (y_1 - y_2) + (x_3 - x_1) \cdot (x_1 - x_2)] \cdot A_3 \end{array} \right\} & \\ = \frac{\mu_0 \cdot J \cdot \Delta}{3} & \quad (4.1.1 - 22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4 \cdot \mu_r \cdot \Delta} \cdot \left\{ \begin{array}{l} [(y_1 - y_2) \cdot (y_2 - y_3) + (x_1 - x_2) \cdot (x_2 - x_3)] \cdot A_1 + \\ [(y_3 - y_1) \cdot (y_1 - y_2) + (x_3 - x_1) \cdot (x_1 - x_2)] \cdot A_2 + \\ [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2] \cdot A_3 \end{array} \right\} & \\ = \frac{\mu_0 \cdot J \cdot \Delta}{3} & \quad (4.1.1 - 23) \end{aligned}$$

Ahora bien, las ecuaciones (4.1.1 – 21), (4.1.1 – 22) y (4.1.1 – 23) se reescriben como sigue:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{33} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_2 \end{bmatrix} = \frac{\mu_0 \cdot J \cdot \Delta}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.1.1 - 24)$$

Dónde:

$$K_{12} = K_{21} = \frac{1}{4 \cdot \mu_r \cdot \Delta} [(y_3 - y_1) \cdot (y_2 - y_3) + (x_3 - x_1) \cdot (x_2 - x_3)] \quad (4.1.1 - 25a)$$

$$K_{23} = K_{32} = \frac{1}{4 \cdot \mu_r \cdot \Delta} [(y_3 - y_1) \cdot (y_1 - y_2) + (x_3 - x_1) \cdot (x_1 - x_2)] \quad (4.1.1 - 25b)$$

$$K_{13} = K_{31} = \frac{1}{4 \cdot \mu_r \cdot \Delta} [(y_1 - y_2) \cdot (y_2 - y_3) + (x_1 - x_2) \cdot (x_2 - x_3)] \quad (4.1.1 - 25c)$$

$$\begin{aligned} K_{11} &= \frac{1}{4 \cdot \mu_r \cdot \Delta} [(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2] \\ &= -K_{13} - K_{12} \end{aligned} \quad (4.1.1 - 25d)$$

$$K_{22} = \frac{1}{4 \cdot \mu_r \cdot \Delta} [(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2] = -K_{12} - K_{23} \quad (4.1.1 - 25e)$$

$$K_{33} = \frac{1}{4 \cdot \mu_r \cdot \Delta} [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2] = -K_{23} - K_{13} \quad (4.1.1 - 25f)$$

De esta manera, en lugar de resolver la ecuación diferencial (4.1.1 – 12), al resolver el sistema de ecuaciones (4.1.1 – 24) se obtiene una solución aproximada del potencial vectorial magnético empleando el método de elemento finito.

#### 4.1.2. Simulación computacional del fenómeno electromagnético: Ecuaciones de gobierno y condiciones de frontera.

La plataforma ANSYS usa las ecuaciones de Maxwell; (2.1.1 – 11), (2.1.2 – 4), (2.1.3 – 5) y (2.1.4 – 7), como base de los estudios de campos electromagnéticos. Las incógnitas principales (grados de libertad o DOF por sus siglas en inglés) que el método numérico “Elemento Finito” calcula son los potenciales magnético, (2.2 – 9), y eléctrico (2.2 – 10). Para la solución de estos potenciales, el software ofrece diversas formulaciones que son depuradas según el tipo de estudio empleado el cual, para este caso en particular, se empleó la formulación  $A, V - A$  descrita en 2.2 [ii].

Considerando campos electromagnéticos periódicos y omitiendo corrientes de desplazamiento inducidas, las ecuaciones de maxwell para ser estudiadas son:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.1.2 - 4)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.1.4 - 7)$$

$$\nabla \times H = J \quad (2.2 - 4)$$

Así como las relaciones constitutivas:

$$J = \sigma E \quad (2.4.5.2.1 - 1)$$

$$B = \mu H \quad (2.4.5.2.1 - 2)$$

En el dominio completo  $\Omega$  de un problema de campos electromagnéticos ejemplificado en la Figura 5, se busca una solución que satisfaga la ecuación (2.2 - 4) a través de (2.1.4 - 7). La solución es obtenida introduciendo potenciales que permitan que el campo magnético  $B$  y el campo eléctrico  $E$  se expresen como:

$$B = \nabla \times A \quad (2.2 - 9)$$

$$E = -\frac{\partial B}{\partial t} - \nabla V \quad (2.2 - 10)$$

donde  $A$  representa el potencial vectorial magnético y  $V$  el potencial escalar eléctrico. Estas especificaciones aseguran la satisfacción de las ecuaciones de la Ley de Gauss (2.1.2 - 4) y la Ley de Faraday-Lenz (2.1.4 - 7), mientras que la ecuación de la Ley de Ampere (2.2 - 4) junto con la relación constitutiva (2.4.5.2.1 - 2) y la propiedad de divergencia cero del vector de densidad de corriente permanecen desconocidas aún. Por lo cual, para ser resueltas, así como asegurar la singularidad del vector potencial  $A$ , se emplea la condición de ajuste de Coulomb:

$$\nabla \cdot A = 0 \quad (2.2 - 19)$$

De todo lo anterior resulta el siguiente conjunto de ecuaciones de gobierno en dominios conductores  $\Omega_1$ :

$$\nabla \times v_m \nabla \times A - \nabla v_m \nabla \cdot A + \sigma \frac{\partial A}{\partial t} + \sigma \nabla V = 0 \quad (2.2 - 30)$$

$$\nabla \cdot \left( -\sigma \frac{\partial A}{\partial t} - \sigma \nabla V \right) = 0 \quad (2.2 - 31)$$

Y en dominios no conductores  $\Omega_2$ :

$$\nabla \times v_m \nabla \times A - \nabla v_m \nabla \cdot A = J_s \quad (2.2 - 32)$$

Mientras que la condición de frontera adecuada utilizada para problemas de este tipo es derivada de las condiciones de frontera (2.2 – 33 a 2.2 – 36), tanto para superficies que confinan el dominio como paredes de simetría:

$$A(x, y, z)|_s = A_s = 0 \quad (4.1.1 - 1)$$

donde  $A_s$  representa el valor del potencial vectorial magnético, para todas las componentes, en la superficie de la frontera y simetría, declarada explícita e invariablemente como cero. Esta condición impone restricciones en la dirección de la densidad de flujo magnético en las fronteras. Es decir, el flujo magnético en el modelo fluye paralelo a las superficies donde se impone esta condición. Cuando se emplea en planos de simetría debe existir una simetría en órdenes de magnitud de los campos magnéticos y en las fuentes de corriente.

El modelo requiere únicamente, para poder determinar la distribución espacial de la intensidad de campo y la densidad de flujo  $H$  y  $B$ , la existencia de un vector de corriente fuente  $J_s$ , el cual se prescribe en las bobinas inductoras de la máquina, respetando el ángulo de que existe entre cada una de las seis fuentes:

$$J_{sa} = \frac{I_{load BTa}}{A_{cond}} \quad (4.1.1 - 2)$$

$$J_{sb} = \frac{I_{load BTb}}{A_{cond}} \quad (4.1.1 - 3)$$

$$J_{sc} = \frac{I_{load BTc}}{A_{cond}} \quad (4.1.1 - 4)$$

$$J_{sa} = \frac{I_{load ATa}}{A_{cond}} \quad (4.1.1 - 2)$$

$$J_{sb} = \frac{I_{load ATb}}{A_{cond}} \quad (4.1.1 - 3)$$

$$J_{sc} = \frac{I_{load ATc}}{A_{cond}} \quad (4.1.1 - 4)$$

donde  $I_{load a}$ ,  $I_{load b}$  e  $I_{load c}$  representan las corrientes nominales de carga para cada una de las fases del devanado primario y secundario, y  $A_{cond}$  denota el área de conducción efectiva de la bobina.

#### 4.1.3. Propiedades de los materiales.

Las propiedades que requiere un estudio electromagnético se limitan únicamente a aquellas que influyen directamente en los términos de las ecuaciones de gobierno del fenómeno. El dominio global de estudio  $\Omega$  posee 2 sub-dominios que se clasifican en medios conductores eléctricos  $\Omega_1$  así como medios no conductores eléctricos  $\Omega_2$ . Para el estudio de estos dos sub-dominios como un conjunto total se requieren las propiedades según la Tabla 5. Sin embargo, en dicha tabla se presentan sólo las propiedades que pueden ser consideradas como lineales. Si bien esto no es del todo correcto, acorde al estado del arte y a resultados esperados que se apegan a la razón provista por el conocimiento del tema, la diferencia que supone la variación entre propiedades lineales y no lineales, no modifica en gran medida el resultado final mientras que si aumenta de sobremanera el tiempo de procesamiento computacional.

Tabla 5. Propiedades de los materiales requeridas por el software para realizar el estudio.

	Medios conductores $\Omega_1$	Medios no conductores $\Omega_2$
Resistividad eléctrica ( $\rho_e$ )	SI	N/A
Permeabilidad magnética ( $\mu_m$ )	SI	SI

Sin embargo, en el caso particular del núcleo ferromagnético que posee una permeabilidad magnética en función de una curva de magnetización, se emplean propiedades no lineales basadas en una tabla característica del material que describe el flujo magnético desarrollado por el propio material en función de una intensidad de campo aplicada  $B(H)$ .

#### 4.1.4. Solución electromagnética: Fuentes de calor.

La solución del modelo electromagnético en un dominio discreto supone la posibilidad de conocer órdenes de magnitud locales de la distribución global de la intensidad de campo magnético  $H$  a lo largo de todos los elementos de la máquina y, en consecuencia, la densidad del flujo magnético  $B$  en los mismos. El software comercial ANSYS brinda la posibilidad de calcular, empleando algoritmos internos, distribuciones de corrientes inducidas así como energía generada por elementos a partir de las pérdidas extrañas incidentes en éstos, sin embargo, debido que un transformador eléctrico trifásico posee grandes dimensiones geométricas y las proporciones de algunos de los elementos que se estudian son de tamaños considerablemente menores, se ha optado por un

postprocesamiento externo como parte del desarrollo de una herramienta propuesta que tiene por objetivo determinar, a partir de la distribución vectorial de campo, las pérdidas ocurrientes en los elementos de la máquina. Todo esto utilizando información calculada a nivel elemental de la malla y de manera personalizada para cada uno de los elementos de la máquina, en función de sus proporciones, posición, y propiedades electromagnéticas.

#### 4.1.4.1. Núcleo ferromagnético.

Como se explicó de manera anticipada, el núcleo de un transformador eléctrico está conformado por tres o más piernas y dos yugos. Esta estructura está compuesta por láminas de materiales ferromagnéticos de espesores de 0.23 a 0.5 mm agrupadas en varias decenas del mismo tamaño formando placas o escalones. Las placas por su parte, se agrupan de manera tal que el crecimiento tanto del largo como del ancho de dicha placa asciende conforme se avanza al centro de la pierna o yugo en cuestión. Esto se aprecia en la Figura 39. El número de láminas varía en función de parámetros estructurales del diseño.

## INFORMACIÓN PROTEGIDA PROPIEDAD INTELECTUAL

Figura 39. a) Estructura del núcleo ferromagnético de un transformador trifásico de tres piernas. b) Manera en que se acoplan las láminas en secuencia escalonada en placas del mismo tamaño.

Por este motivo, se emplea una metodología de discretización hexaédrica para todas y cada una de las placas del núcleo. Esto con el fin de dividir, en un sólo

elemento discreto en la componente que señala la profundidad, a cada una de las placas. Todos y cada uno de los elementos discretos que componen a todas y cada una de las placas, contiene el valor numérico de los vectores  $H$  y  $B(H)$  de manera que es posible asumir que dicho elemento discreto posee la intensidad de campo y, dicho sea de paso, la densidad de flujo magnético, que poseen las láminas que componen a la placa en total. Dicho de otra manera, se asume que tanto  $H$  como  $B(H)$  se mantienen invariantes a lo largo de todas las láminas que posee cada placa, como se observa en la Figura 40. Esta aproximación resulta adecuada dado que el campo magnético que incide en materiales con altas permeabilidades magnéticas no presenta esfuerzos de ningún tipo al pasar a través de dicho material con estas proporciones. Al poseer valores elementales del campo magnético en elementos discretos hexaédricos es posible determinar las pérdidas de *Eddy* inducidas en el núcleo ferromagnético. El procedimiento requiere poseer tanto el valor de la variable  $B(H)$  como el volumen del elemento discreto y, con estos, es posible calcular sus pérdidas mediante la ecuación (2.4.5.2.3 – 15) [xii, xxxi] de la forma:

$$P_E = \frac{\omega^2 B_{elem}^2 w_{lámina}^2 \sigma_{nucleo}}{24} \times V_{lámina} \times N_{láminas} \quad (4.1.4.1 - 1)$$

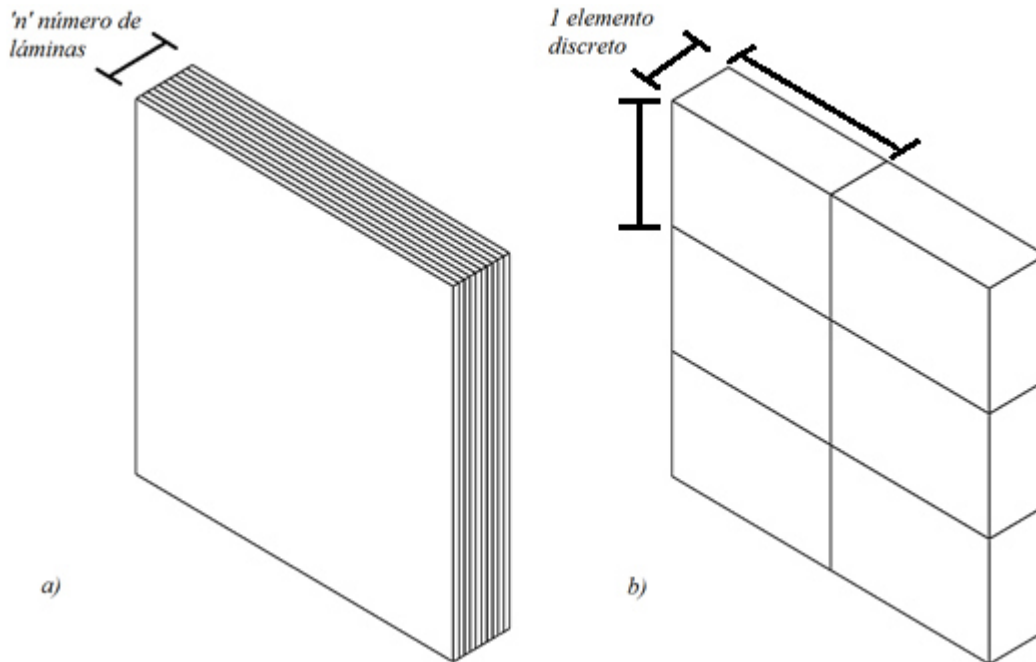


Figura 40. a) Fracción proporcional de una placa laminada. b) Elementos discretos de la fracción de la placa a través de los cuales se considera  $B$  y  $H$  invariantes.



donde  $\omega^2$  equivale al cuadrado de la frecuencia angular,  $B_{elem}^2$  es el cuadrado del valor de la densidad de flujo magnético del elemento,  $w_{lámina}^2$  el cuadrado del valor del espesor de cada lámina,  $\sigma_{nucleo}$  la conductividad eléctrica del material que compone el núcleo,  $V_{lámina}$  el volumen de cada una de las láminas y  $N_{láminas}$  el número de láminas que posee el elemento, por lo cual resulta más sencillo emplear directamente el volumen del elemento ya que este es el resultado del producto entre el volumen de cada una de las láminas y el número de láminas. Por esto, la ecuación se reescribe como:

$$P_E = \frac{\omega^2 B_{elem}^2 w_{lámina}^2 \sigma_{nucleo}}{24} \times V_{elem} \quad (4.1.4.1 - 2)$$

Aplicando este procedimiento a todos los elementos discretos de los que el núcleo se conforma, es posible determinar las pérdidas por corrientes de *Eddy* que surgen en el núcleo.

#### 4.1.4.2. Bobinas.

El procedimiento propuesto para determinar las pérdidas de *Eddy* en las bobinas emplea la misma ecuación que el modelo anterior ya que estos elementos son también estructuras laminadas que, agrupadas, componen el hilo conductor aislado con el cual se devanan las bobinas de este tipo de equipos, como se muestra en la Figura 41. El procedimiento no requiere la discretización de los conductores devanados como realmente existen en la máquina, ya que el software comercial ANSYS permite que se indique el cuerpo que funge como bobina aún siendo éste un cilindro y no un helicoides. Esta ventaja da lugar a emplear una forma simplificada como se muestra en la Figura 42. Esto es posible ya que para determinar la intensidad de campo magnético  $H$  en el dominio, el software requiere tanto la corriente de carga  $I_{Load}$  de cada una de las bobinas de baja tensión, como del área de conducción efectiva de la bobina y su número de vueltas. Al ser capaces de indicar estos parámetros de manera variable (sin importar la forma del volumen del cuerpo que representa a la bobina) solo se hace preciso que dicho cuerpo no exceda la altura ni los radios internos y externos de las bobinas reales.

El uso de las bobinas simplificadas (Figura 42-b)) facilita la resolución del problema tanto geométrica como numéricamente, sin embargo en la etapa del postprocesamiento la información debe ser extraída de manera consistente con la geometría real (Figura 42-a)).

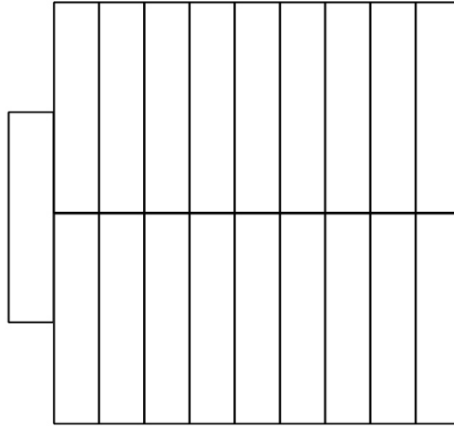


Figura 41. Sección transversal de conductor característico empleado para las bobinas de baja y alta tensión en la que se observa que está compuesta por un número 'n' de conductores rectangulares agrupados.

Para obtener el valor de las pérdidas de *Eddy* en cada uno de los conductores que componen las bobinas tanto de baja como de alta tensión, es preciso medir la densidad de flujo magnético que fuga desde el núcleo e incide en éstas, y ya que la altura, el radio interno y radio externo así como la separación que suponen el modelo simplificado y el modelo real son iguales, se hace factible realizar puntos de medición de las propiedades vectoriales pertinentes en las zonas donde existen realmente los conductores a lo largo del modelo simplificado tal como se muestra en la Figura 43-a). En ella, es posible apreciar que tanto el modelo real como la simplificación coinciden en todas sus dimensiones y varían únicamente en que el modelo simplificado no presenta físicamente a cada uno de los conductores de baja y alta tensión. Para medir el flujo magnético que incidiría en los conductores (de haberlos contemplado geoméricamente) en la dirección radial de la bobina, se proponen mediciones en los puntos de convergencia mostrados en la Figura 43-b) para cada uno de los conductores del circuito paralelo de la baja tensión y únicamente el conductor central de la alta tensión, asumiendo que este valor posee un valor representativo para los cinco conductores. Así mismo, para contemplar junto con la radial, las variaciones que la densidad de flujo presenta en la dirección angular de dicha bobina, se proponen las mediciones mostradas en la Figura 43-b) a lo largo de las zonas mostradas en la Figura 43-c). En esta figura se muestran las zonas en las que se propone medir la densidad del flujo de tal manera que la zona delimitada por los segmentos posea una densidad de flujo igual al punto medido dentro de dicho segmento. Cada uno de estos segmentos

delimita una zona angular de  $18^\circ$  y se extiende en la totalidad de la bobina en la componente axial.

## INFORMACIÓN PROTEGIDA PROPIEDAD INTELECTUAL

Figura 42. Diseño conceptual de un paquete de bobinas de baja y alta tensión real. b) simplificación geométrica de la bobina, utilizada para ahorrar recurso computacional.

Una vez identificadas las zonas donde se han de realizar las mediciones del campo, es posible proceder a determinar las pérdidas de *Eddy* en los conductores de las bobinas. Para esto es preciso emplear las ecuaciones (2.4.5.2.3 – 16) y (2.4.5.2.3 – 17), las cuales, modelan la generación de corrientes de *Eddy* de la componente axial y radial respectivamente [xii, xxxiii], para cada uno de los conductores por unidad de volumen. Las ecuaciones se aplican como sigue:

## INFORMACIÓN PROTEGIDA PROPIEDAD INTELECTUAL

Figura 43. a) Dominios geométricos real y simplificado, sobrepuestos. b) Puntos (rojo) de medida de la densidad de flujo magnético disperso en componente radial a lo largo del eje axial. c) Segmentos (azul) de medición de la densidad de flujo magnético disperso en la componente angular con valor igual al punto (rojo) medido dentro de cada uno de los propios segmentos.

$$(P_E)_{axial} = \frac{\omega^2 B y_{elem}^2 w_{lámina}^2 \sigma_{bobina}}{24} \times V_{elem} \quad (4.1.4.2 - 1)$$

$$(P_E)_{radial} = \frac{\omega^2 B x_{elem}^2 t_{lámina}^2 \sigma_{bobina}}{24} \times V_{elem} \quad (4.1.4.2 - 2)$$

donde  $\omega^2$  es el cuadrado del valor de la frecuencia angular,  $B y_{elem}^2$  y  $B x_{elem}^2$  representan el cuadrado del valor de la densidad de flujo magnético en las componentes axial y radial respectivamente, que inciden en el elemento discreto,  $w_{lámina}^2$  y  $t_{lámina}^2$  el cuadrado de la dimensión perpendicular a la componente en que incide el campo,  $\sigma_{bobina}$  la resistividad eléctrica del material que compone al conductor y  $V_{elem}$  el volumen de la fracción de 10° de conductor real de la Figura 41.

#### 4.1.4.3. Tanque.

Las placas que, en conjunto, conforman al tanque contenedor de un transformador son elementos de grandes dimensiones superficiales que confinan a la máquina, de espesores relativamente grande en función de la profundidad de piel  $\delta$  que presentan los materiales que regularmente los compone (2.4.5.2.1 – 32), es por este motivo que la metodología propuesta para determinar la inducción de corrientes extrañas producidas por fugas de campo magnético provenientes del núcleo hacia estos elementos se realice empleando el modelo mostrado en la ecuación (2.4.5.2.2 – 20) [xii, xxxii]. Para realizarlo, es preciso que cada uno de los elementos discretos de estas estructuras sea de tipo hexaédrico. Al conocer la intensidad de campo magnético  $H$  a nivel elemental se procede a determinar la impedancia superficial de los mismos y, de esta manera, es posible obtener las pérdidas por unidad de superficie local del dominio. En función del espesor de cada elemento, se determinan las pérdidas totales generadas. La importancia del uso de Hexaedros en esta zona del dominio radica en que el producto que resulta entre impedancia superficial y la intensidad de campo es, posteriormente, integrado a lo largo del espesor de la placa del tanque, y en pro de tratar con superficies internas simples, es preciso que la malla se realice bajo éstas condiciones, como se muestra en la Figura 44. La ecuación pertinente, una vez teniendo los valores de  $H$  y de la superficie interna, es:

$$P = RH_{rms}^2 = \sqrt{\frac{\omega\mu_{tanque}}{2\sigma_{tanque}}} H_{elem}^2 \times A_{int_{elem}} \quad (4.1.4.3 - 1)$$

donde  $\omega$  representa la frecuencia angular,  $\mu_{tanque}$  y  $\sigma_{tanque}$  la permeabilidad magnética y conductividad eléctrica, respectivamente, del material del cual está hecho el tanque,  $H_{elem}^2$  el cuadrado del valor de la intensidad de campo magnético a nivel elemental y  $A_{int_{elem}}$  el área interna del elemento.

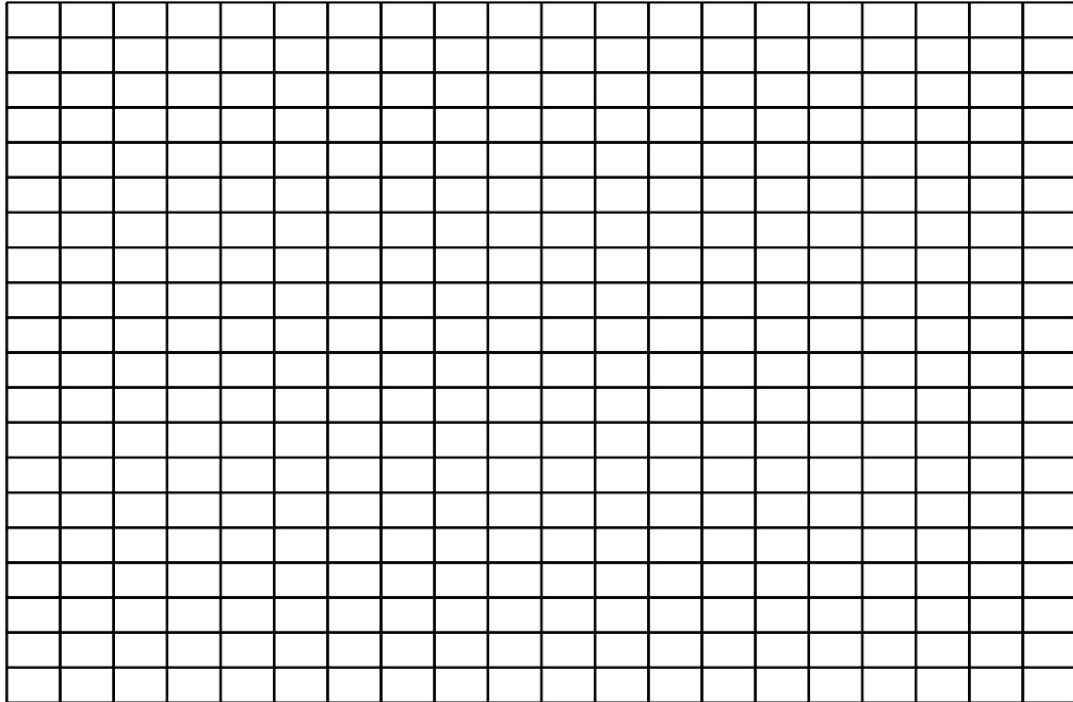


Figura 44. Modelo discreto ideal de un elemento que supone la forma de una de las placas que compone al tanque del transformador.

El mismo procedimiento es aplicado a cada una de las paredes y de las tapas superior e inferior del tanque, las cuales, no son placas planas de espesor constante como se contemplan en el modelo geométrico empleado en este estudio, pero como ya se mencionó antes, el asumirlas como tales beneficia la versatilidad y simplicidad del estudio, mejorando los tiempos de cómputo y el manejo de la información. Es preciso también contemplar orificios que se encuentran en la placa frontal del tanque por las cuales el fluido refrigerante pasa a los radiadores donde se disipa al ambiente el calor desde la parte viva. Esta situación modifica la simetría de los elementos mostrada en la Figura 44 únicamente en esa placa. Sin embargo, al discretizar las zonas, es preciso mantener un tamaño de elementos constante de tal manera que un valor característico de superficie interna pueda ser utilizado.

#### 4.1.4.4. Elementos de sujeción y apriete.

Estos elementos suponen un caso de estudio idéntico al mencionado en el tanque [xii, xxxii], por lo cual la metodología es también la misma, a pesar de sus diferencias geométricas. El motivo por el que se emplea la misma

metodología es debido a que se propone trabajar con una longitud característica que marque la pauta en cuanto a dimensiones y a interacción con líneas de campo magnético incidentes. Elementos de este tipo se muestran en la Figura 45.

## INFORMACIÓN PROTEGIDA PROPIEDAD INTELECTUAL

Figura 45. a) Herrajes. b) Tirantes.

En el caso particular de los herrajes, la superficie interna a través de la cual se integra el valor de la pérdida superficial del elemento, es constante para todas las caras que los conforma. Los tirantes, por su parte, poseen espesores distintos en la base, en las placas que se extienden verticalmente, y en los soportes superiores, sin embargo, en base a las pruebas de concepto, se sabe que la intensidad de campo magnético más alta se detecta en las zonas verticales. Aun así, las pérdidas por unidad de superficie deben ser calculadas de manera independiente para cada elemento en función de su forma geométrica y las componentes de las líneas de campo que fluyen paralelas a la superficie de la que se calcula la impedancia superficial.

### **4.1.4.5. Concentrado de pérdidas.**

La metodología propuesta con anterioridad cuantifica las pérdidas extrañas, planteadas en los objetivos. Por otro lado, es preciso añadir a estas las pérdidas de tipo  $I^2R$  que se generan en las bobinas debido al flujo de la

corriente de carga. Una vez calculadas mediante la ecuación (2.4.5.2.4 – 2), es posible considerar que las pérdidas por corrientes de carga y por corrientes de *Eddy* han sido satisfactoriamente determinadas. La suma de estas pérdidas nos permite conocer la energía eléctrica y magnética que irreversiblemente es convertida en calor dentro de la máquina.

#### **4.1.4.6. Fuentes de calor para estudio termohidráulico.**

La metodología multifísica que se propone está acotada únicamente a evaluar las pérdidas de carga (omitiendo las pérdidas por histéresis en el núcleo). De la misma manera, el caso termohidráulico está acotado a una sección de la máquina en la que solamente se estudia de manera conjugada, la transferencia de calor del paquete de bobinas de baja y alta tensión. Por esto, las pérdidas resistivas y de *Eddy* de la bobina serán el único valor de pérdidas contemplado como parámetro de entrada del modelo termohidráulico.

#### **4.2. Geometría del modelo termohidráulico del transformador.**

Para un estudio de transferencia de calor conjugada hay que tomar en cuenta cuales han de ser las condiciones bajo las cuales se estudiará la máquina, así como el régimen de enfriamiento. El estudio de transferencia de calor conjugada de una máquina de este tipo supone un enorme consumo de computo debido a las dimensiones que posee además de la complejidad que representa su diseño y la relación de aspecto que existe entre algunas zonas críticas de flujo de calor con respecto a grandes espacios que el dominio geométrico posee, tal es el caso de la diferencia de dimensiones que existe entre los canales internos de los devanados con respecto al volumen total que posee el tanque donde el núcleo y las bobinas se sumergen. Es por esto que, de igual manera que en el estudio electromagnético, se hace preciso recurrir a simplificaciones geométricas que permitan modelar el transformador de una forma en que los resultados puedan ser extrapolados más allá de los confines del dominio empleado para el estudio, utilizando condiciones de frontera que permitan acotar el modelo a cuestiones más prácticas y simples que, aun así, permitan obtener la información requerida para determinar el campo de velocidades y de temperaturas que se produce en el paquete de bobinas de baja y alta tensión de un transformador trifásico.

Los componentes que debe incluir el modelo CAD termohidráulico, para realizar un estudio de transferencia de calor conjugada en una fracción angular



periódica de 10 grados (como fracción característica del cilindro completo que representa el paquete de bobinas), son los siguientes:

- Conductores eléctricos (fuente de calor).
- Aislantes (sólidos que aíslan los conductores y direccionan el flujo de fluido)
- Fluido dieléctrico refrigerante.

La compatibilidad entre los conductores del modelo electromagnético y termohidráulico (diferente forma geométrica) se logró mediante migración de información a zonas exactas utilizando funciones definidas por usuario.

## INFORMACIÓN PROTEGIDA PROPIEDAD INTELECTUAL

Figura 46. Modelo CAD termohidráulico. Fracción angularmente periódica (10°) del paquete de bobinas.

### **4.2.1. Mallas 3-D del paquete de bobinas para estudio termohidráulico.**

La formulación de volumen de control representa una subdivisión del dominio en un número finito de elementos, lo cual supone la existencia de un volumen de control rodeando a cada punto de la malla. Después las ecuaciones

diferenciales son integradas sobre cada volumen de control. Las porciones representativas de los perfiles que representan la variación de las incógnitas principales entre los puntos de la malla son utilizadas para evaluar las integrales requeridas. Lo que resulta en la discretización de las ecuaciones que contienen el valor de la incógnita principal para un grupo de puntos en la malla. La ecuación discreta obtenida mediante este método supone el principio de conservación para las variables estudiadas dentro del cada volumen de control tal como lo hace una ecuación diferencial en un volumen de control de tamaño infinitesimal. Las ventajas de la formulación de volumen de control se hacen notar en que la solución resultante implica que la conservación integral de cantidades como la masa, la cantidad de movimiento y la energía se logra de manera satisfactoria sobre cada elemento o volumen de control independiente.

Al resolver las ecuaciones discretas para obtener el valor en los nodos de la malla de la variable dependiente, los resultados pueden verse desde la perspectiva del método de elemento finito, es decir, la variación asumida de la incógnita principal en los nodos de la malla o las aristas en casos de elementos vectoriales, y la función de interpolación de forma entre los nodos o las aristas son consideradas como una solución aproximada. Para el caso de la aproximación de volumen de control, se busca la solución en forma de los valores de los nodos únicamente, las fórmulas de interpolación se consideran como relaciones auxiliares necesarias para evaluar las integrales requeridas en la formulación. Una vez que las ecuaciones discretas son derivadas, la suposición de los perfiles puede ser descartada. Para ejemplificar un problema simple [xxviii] es posible resolver la ecuación diferencial de conducción de calor unidimensional en estado permanente, gobernado por:

$$\frac{d}{dx} \left( k \frac{dT}{dx} \right) + S = 0 \quad (4.2.1 - 1)$$

donde  $S$  en este contexto representa un término fuente de calor. En orden de obtener la ecuación discreta, es preciso emplear una discretización como la que se muestra en la Figura 47. El nodo central lleva por nombre  $P$  mientras que sus nodos vecinos son  $E$  (Este) y  $W$  (Oeste). Las líneas discontinuas representan las fronteras del volumen de control. Las letras  $e$  y  $w$  expresan dichas fronteras para Este y Oeste, respectivamente. Con el fin de mantener al mínimo la complejidad del problema demostrativo, el espesor que existe en las componentes  $y$  y  $z$  se asume como unitario por lo que el volumen de control posee dimensiones de  $\Delta x \times 1 \times 1$ . Al integrar la ecuación (4.2.1 – 1) a través del volumen de control se obtiene:

$$\left(k \frac{dT}{dx}\right)_e - \left(k \frac{dT}{dx}\right)_w + \int_w^e S dx = 0 \quad (4.2.1 - 2)$$

Posteriormente, es necesario emplear una función de interpolación, dependiendo el tipo de forma empleada serán los resultados obtenidos. En la Figura 48 se muestran dos perfiles de interpolación. La conjetura más simple es que el valor de la temperatura  $T$  en un nodo se extiende a lo largo de todo el volumen de control que lo rodea, lo que produce una función escalón en la distribución de los nodos, por lo cual es posible apreciar que no se define un valor de  $T$  para las fronteras de cada elemento  $e$  o  $w$  (Figura 48-a)). Para el caso de la Figura 48-b), se emplea una interpolación lineal entre los valores de los nodos por lo cual resulta ese perfil ascendente de temperaturas apreciable en la misma figura.

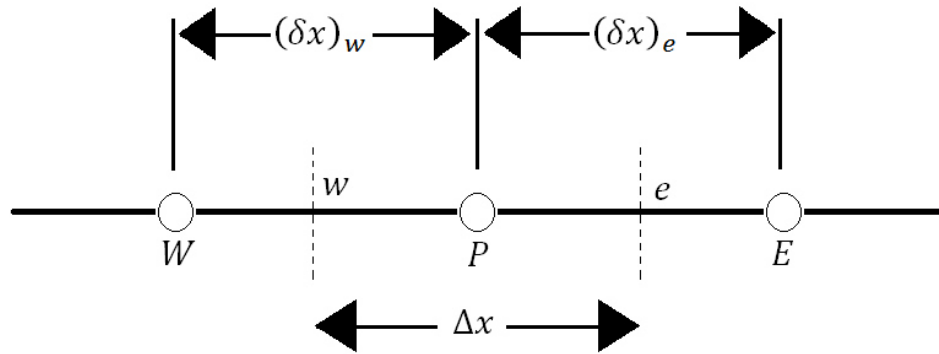


Figura 47. Clúster de nodos para problema unidimensional.

Al evaluar las derivadas  $dT/dx$  en la ecuación (4.2.1 - 2) del perfil de interpolación lineal, la ecuación resulta como:

$$\frac{k_e(T_E - T_P)}{(\delta x)_e} - \frac{k_w(T_P - T_W)}{(\delta x)_w} + \bar{S} \Delta x = 0 \quad (4.2.1 - 3)$$

donde  $\bar{S}$  representa el valor promedio de  $S$  a través de el volumen de control. La ecuación anterior puede reescribirse como:

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + b \quad (4.2.1 - 4)$$

donde

$$a_E = \frac{k_e}{(\delta x)_e} \quad (4.2.1 - 5a)$$

$$a_W = \frac{k_w}{(\delta x)_w} \quad (4.2.1 - 5b)$$

$$a_P = a_E + a_W \quad (4.2.1 - 5c)$$

$$b = \bar{S} \Delta x \quad (4.2.1 - 5d)$$

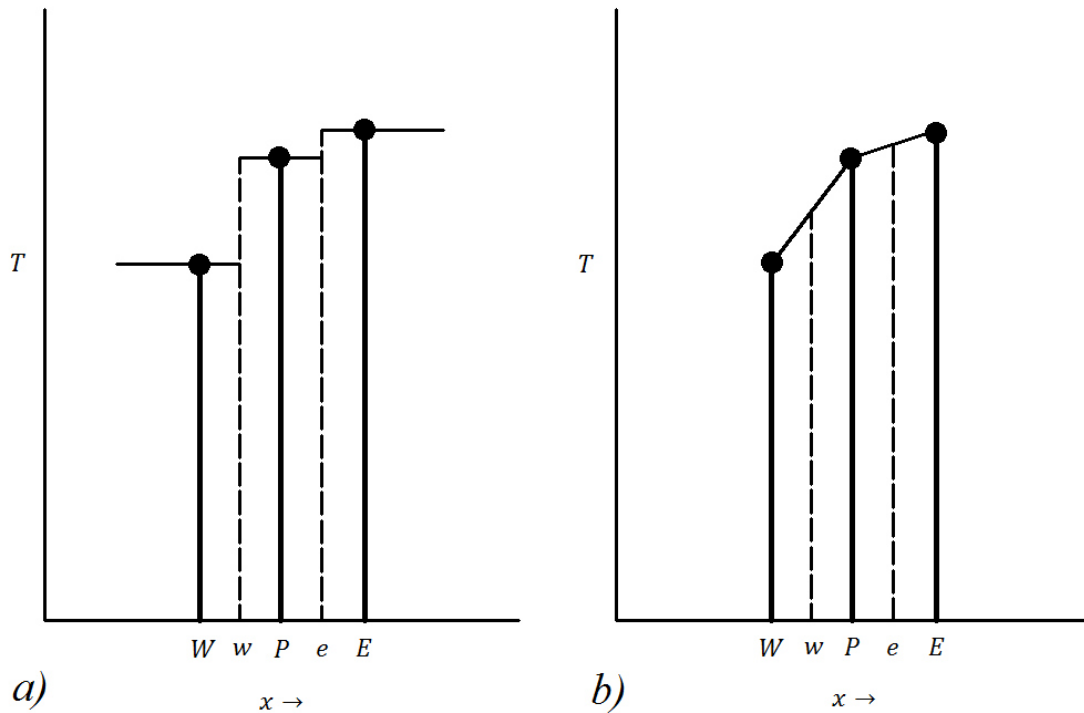


Figura 48. Dos perfiles supuestos: a) Perfil escalón. b) Interpolación lineal.

De esta manera es planteada la formulación matemática del método de volúmenes finitos con la cual, tras una “n” cantidad de iteraciones, se obtienen los valores que satisfacen a las ecuaciones de transporte en cada uno de los elementos discretos.

**4.2.2. Simulación computacional del fenómeno termohidráulico:  
Ecuaciones de gobierno y condiciones de frontera.**

El estudio del problema de flujo de fluido está definido por las leyes de conservación de masa, cantidad de movimiento y energía. Estas leyes (expresadas en términos de ecuaciones diferenciales parciales) son discretizadas en elementos que poseen un valor constante de volumen y

resueltas por el software ANSYS como se explica a continuación [i]. La ecuación de continuidad proveniente de la ley de conservación de masa (2.3.2.1 – 4), que el software emplea para estudios de estado permanente es:

$$\frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} = 0 \quad (4.2.2 - 1)$$

donde  $V_x$ ,  $V_y$  y  $V_z$  son las componentes de la velocidad en las tres dimensiones y  $\rho$  la densidad de fluido. Para el caso de las ecuaciones de cantidad de movimiento (2.3.2.2 – 18, 2.3.2.2 – 19 y 2.3.2.2 – 20) que el software usa, en un fluido Newtoniano en estado permanente y propiedades constantes, resultan como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho V_x V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_y V_x)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho V_z V_x)}{\partial z} \\ = \rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{V_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{V_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{V_x}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (4.2.2 - 2a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho V_x V_y)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_y V_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho V_z V_y)}{\partial z} \\ = \rho g_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{V_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{V_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{V_y}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (4.2.2 - 2b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho V_x V_z)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_y V_z)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho V_z V_z)}{\partial z} \\ = \rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{V_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{V_z}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{V_z}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (4.2.2 - 2c)$$

donde  $g_x$ ,  $g_y$  y  $g_z$  son las componentes de la aceleración debido a la gravedad y  $\mu$  la viscosidad dinámica. Por último la ecuación de la energía (2.3.2.3 – 15) para casos donde se estudian fluidos incompresibles en estado permanente toma la forma de una ecuación de transporte térmico para temperaturas estáticas como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (\rho V_x C_p T) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho V_y C_p T) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho V_z C_p T) \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + Q_v \end{aligned} \quad (4.2.2 - 3)$$

donde  $C_p$  representa el calor específico del material,  $T$  la temperatura y  $k$  la conductividad térmica del material. En pro de determinar los campos de temperatura en el interior de dominios sólidos, la ecuación de conducción de calor (2.3.1 – 13) se resuelve como:

$$\nabla \cdot (k\nabla T) = Q_v \quad (4.2.2 - 4)$$

Las condiciones de frontera empleadas en estudios termohidráulicos como es el caso de estudio analizado son cuatro:

Velocidad de entrada constante: Impone la velocidad que el fluido posee a la entrada o entradas del dominio discreto

$$V_n = ' a' m/s \quad (4.2.2 - 5)$$

donde  $V_n$  representa la velocidad del fluido en la componente normal a la superficie o superficies asignadas como entrada.

Salida de presión con valor de cero: Representa una pared en la cual la presión manométrica es explícitamente cero.

Pared adiabática (superficies sólidas): representa las zonas del dominio donde el flujo de calor se considera nulo en función de conjeturas previas o procedimientos que faciliten el modelado del problema, es decir:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (4.2.2 - 6)$$

La ecuación anterior expresa matemáticamente la inexistencia de gradientes de temperatura en dicha pared.

Pared simétrica: Esta condición asume como cero los flujos superficiales de cualquier variable a lo largo de dicha superficie, tanto flujos convectivos como difusivos. Las componentes de velocidad normales y los gradientes normales de todas las variables de flujo son cero. Se expresa matemáticamente como:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (4.2.2 - 7)$$

$$\left. \frac{\partial u_x}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial u_y}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (4.2.2 - 8)$$

El modelo termohidráulico requiere además que se definan las velocidades y temperaturas del fluido a las entradas, así como una presión manométrica de valor cero a la salida, los términos fuente de calor y los flujos de calor y

componentes de la velocidad (existentes o nulos) en las paredes correspondientes.

#### 4.2.3. Propiedades de los materiales.

Las propiedades de los materiales utilizados varían en función de la naturaleza de cada uno de ellos, los requerimientos que el software impone dependen de si el material en cuestión es sólido o fluido. Dichas propiedades están enlistadas en la Tabla 6. Cabe mencionar que para los estudios en los cuales se toman en cuenta las fuerzas de flotación (convección natural) así como las fuerzas inerciales (convección forzada) en un único modelo de convección mixta, como es el estudio que se modela en este documento, debe ser contemplada la relación que poseen las propiedades de dichos materiales en función de la temperatura; es por esto que se emplean dichas propiedades de forma polinomial.

Tabla 6. Propiedades de los materiales requeridas por el software para realizar el estudio.

	Sólido	Fluido
Densidad ( $\rho$ )	Cte.	Polinomio
Viscosidad ( $\mu$ )	N/A	Polinomio
Calor específico ( $C_p$ )	Cte.	Polinomio
Conductividad térmica ( $k$ )	Cte.	Polinomio

#### 4.2.4. Solución termohidráulica: Campos de velocidad y perfiles de temperatura.

La solución aproximada de un modelo termohidráulico brinda la posibilidad de determinar comportamientos muy particulares del modelo que se estudia, entre éstos figuran el efecto de los separadores radiales y axiales del cual podría derivar un estudio de optimización del número de discos por pase y determinar la ubicación de las arandelas guía para mejorar la distribución de flujo de aceite en la bobina. El objetivo entonces es determinar las velocidades del fluido y las temperaturas locales entre los canales de los devanados y los mismos conductores para estimar las caídas de presión del flujo y las temperaturas del punto caliente.

El orden cronológico de las acciones que se proponen realizar es el siguiente:

1. Comparativa del campo de velocidades y distribución de temperaturas producidos por una distribución uniforme de las pérdidas en los devanados (únicamente pérdidas óhmicas) contra los obtenidos en un estudio contemplando las pérdidas no uniformes (pérdidas óhmicas + pérdidas de *Eddy*).
2. Determinar la tasa de flujo de aceite que fluye a través de cada canal horizontal en función del flujo que entra a cada pase tanto de alta como de baja tensión (pérdidas uniformes vs pérdidas no uniformes).
3. Aproximar la temperatura del fluido a la entrada y a la salida de cada uno de los pases de baja y alta tensión, así como la temperatura promedio de los conductores de dicho pase y la ubicación del punto caliente (pérdidas uniformes vs pérdidas no uniformes).
4. Determinar la importancia que suponen las pérdidas extrañas en un estudio termohidráulico y evaluar que tan significativa resulta esta aportación.
5. Comparar las fuerzas de flotación contra las fuerzas inerciales del fluido en las zonas de temperatura crítica en cada pase para poder evaluar la importancia de la distribución de los canales y su eficacia.

Todo, en las bobinas de baja y alta tensión, en fracciones divididas denominadas **pases**, de manera local. Como se muestra de forma esquemática en la Figura 49.

Para el caso del postprocesamiento de este modelo, no es necesario el uso de otras herramientas analíticas o computacionales para determinar los resultados, tal es el caso de la tasa de generación de calor obtenida en el modelo electromagnético. El uso de software que facilita el manejo de la información, en este modelo será únicamente empleado para la obtención de gráficos y tablas que faciliten la comprensión de los resultados obtenidos. Los criterios de mallado para la correcta estimación de las variables con las que se pretenden obtener los resultados enlistados anteriormente son los siguientes:

- En el fluido: Imprescindible es el uso de hexaedros que posean alturas perpendiculares a las paredes del dominio sólido de fracciones milimétricas para así cuantificar de manera correcta tanto los esfuerzos cortantes que se producen en la capa límite hidrodinámica, como los perfiles de temperatura que ostenta la capa límite térmica.
- En el dominio sólido: preferentemente hexaedros. Al tratarse de problemas que suponen únicamente transferencia de calor por conducción, no existen esfuerzos que requieran niveles de mallados muy finos. Sin embargo, en pro de mantener una distribución



elemental homogénea y de buena calidad se pretende que la malla sea globalmente hexaédrica

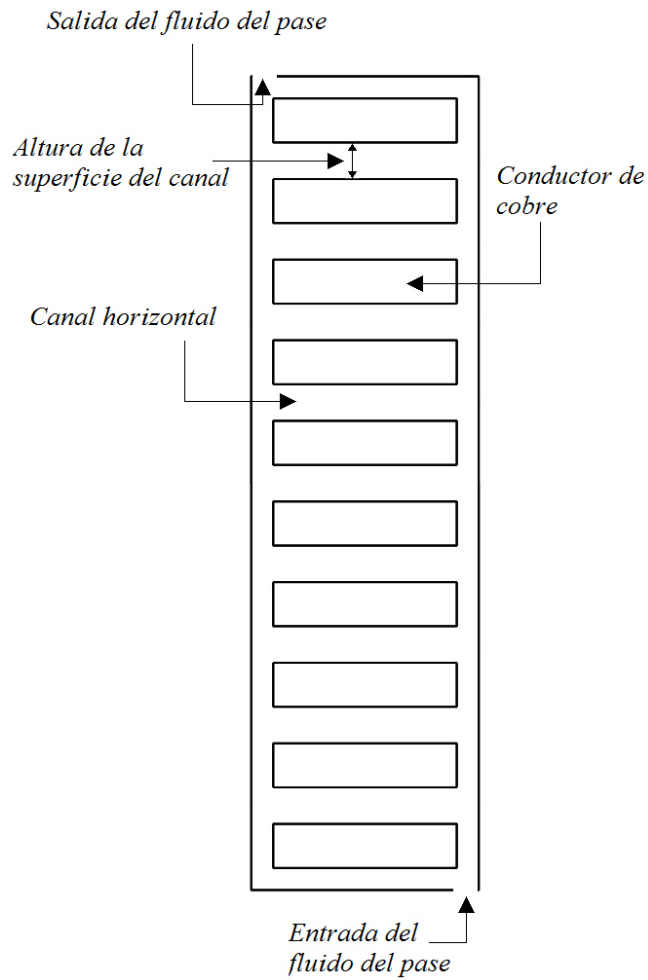


Figura 49. Diagrama esquemático de la forma que poseen los canales dentro de las bobinas de baja y alta tensión.

## 5. TRANSFORMADOR CASO DE ESTUDIO.

Se presentarán las particularidades de la máquina estudiada. De igual manera se expondrán los planteamientos de los casos de estudio electromagnético y termohidráulico incluyendo las propiedades de los materiales, los parámetros de entrada y condiciones de frontera aplicadas para ambos modelos. Finalmente serán mostrados los resultados obtenidos acompañados de las respectivas discusiones que los esclarecen.

### 5.1. Aspectos particulares del transformador.

LA INFORMACIÓN CONTENIDA EN ESTA SECCIÓN SE HA OMITIDO PARA PROTEGER LA PROPIEDAD INTELECTUAL. PARA ACCEDER A DICHA INFORMACIÓN DEBERÁ CONTACTARSE AL AUTOR DE LA TESIS.



Figura 50. Parte viva de la máquina estudiada con todos los elementos necesarios para su operación. De los diseños CAD bidimensionales de esta máquina se extrajo la información para los modelos CAD tridimensionales utilizados en los estudios que este documento muestra.

## 5.2. Consideraciones geométricas y de diseño.

El nivel de simplificaciones a los que fueron sometidos los modelos CAD 3D empleados en la simulación electromagnética y termohidráulica no fueron los mismos. Ello debido a que en el modelo electromagnético se planteó una metodología semi-analítica que permitió el prescindir de nivel de detalles máximo a la hora del diseño mientras que para el modelo termohidráulico es fundamental el contar con una geometría adecuada para el modelado de los fenómenos de transporte termohidráulicos.

### 5.2.1. Modelo CAD electromagnético.

En el diseño de los modelos virtuales para la simulación de fenómenos electromagnéticos se emplearon las siguientes simplificaciones:

- El núcleo ferromagnético se conforma de escalones y no de láminas.
- Las uniones de las piernas y los yugos no están amitradas, sino que ambas poseen terminaciones de  $45^\circ$  para asegurar una superficie de contacto total entre ambos elementos.
- Las estructuras que aprietan al núcleo verticalmente (tirantes) así como los herrajes que sujetan al mismo, horizontalmente, fueron diseñados con superficies lisas constantes pasando por alto cualquier detalle, perforación o protuberancia que produce la tornillería que en ellos existe. Esto debido a que un excesivo nivel de detalle no aporta información que justifique el contemplar las pequeñas irregularidades de la estructura.
- Las bobinas, tanto de baja como de alta tensión, fueron simplificadas a cilindros con dimensiones axiales y radiales similares a las siluetas que forman el contorno exterior de dichas piezas. Esta simplificación es posible debido a que las pérdidas por unidad de volumen no serán calculada en estos elementos, sino post-procesadas en función de la forma y dimensiones reales de los devanados instalados en la máquina.
- El tanque fue diseñado como un cubo, respetando sus dimensiones estructurales pero pasando por alto todas las perturbaciones que impiden que posea superficies planas.
- No se contemplaron interconexiones, derivaciones ni bornes de salida o entrada de la máquina. Por lo cual el circuito eléctrico inicia y termina en la misma bobina sin modelar conexiones o arreglos físicos ni fuentes de alimentación externas.
- La parte viva de la máquina se encuentra más cerca de una de las placas del tanque que de la otra, debido a las terminales y derivaciones que de ahí surgen. Este detalle fue contemplado en el modelo CAD.
- Se omitieron todas las puntas o terminaciones redondeadas para facilitar el procedimiento de mallado.
- 

Cada una de estas modificaciones empleadas supone una desviación en la construcción real, sin embargo, está ampliamente demostrado en el estado del arte que son necesarias para obtener resultados adecuados. Todas las estructuras mencionadas poseen dimensiones y volúmenes muy aproximados a los que la máquina presenta en su construcción real. El modelo virtual del dominio electromagnético se presenta en la Figura 51.

## INFORMACIÓN PROTEGIDA PROPIEDAD INTELECTUAL

Figura 51. Modelo CAD diseñado para el estudio electromagnético (núcleo, bobina de baja tensión, bobina de alta tensión, tirantes, herrajes y tanque contenedor).

### **5.2.2. Modelo CAD termohidráulico.**

Para la simulación de fenómenos termohidráulicos (Figura 52), las modificaciones de los modelos virtuales se mantuvieron al mínimo. A continuación son enlistadas:

- Se modeló únicamente una fracción angular de  $10^\circ$  que funge como una porción de volumen característico de todo el paquete de bobinas de baja y alta tensión debido a su estructura periódica.

- Los conductores de cobre se diseñaron como figuras rectangulares, omitiendo los redondeos que presentan en las esquinas del cable tipo CTC.
- El volumen del papel aislante alrededor de los conductores agrupados radial y axialmente se omitió, contemplando a los grupos paralelos (axiales y radiales) de conductor como una pieza sólida de cobre. Esto debido a que se estima que la temperatura del papel sea igual a la del cobre mismo.
- Se omitieron todo tipo de chaflanes o terminaciones redondeadas para facilitar el proceso de construcción de malla.

## INFORMACIÓN PROTEGIDA PROPIEDAD INTELECTUAL

Figura 52. Modelo CAD diseñado para el estudio termohidráulico. Izquierda: Conductores de baja y alta tensión. Centro: Fluido refrigerante. Derecha: Papel aislante.

### **5.3. Discretización.**

Los elementos discretos que se pueden generar al realizar una malla tridimensional en el software comercial ANSYS son de 4 tipos o formas como se muestran en la Figura 53. Estos son [i]:

- Tetraedros. Elementos tridimensionales de 4 caras planas.
- Pirámides. Elementos tridimensionales de 5 caras planas.
- Cuñas. Elementos tridimensionales de 5 caras planas.
- Hexaedros. Elementos tridimensionales de 6 caras planas.

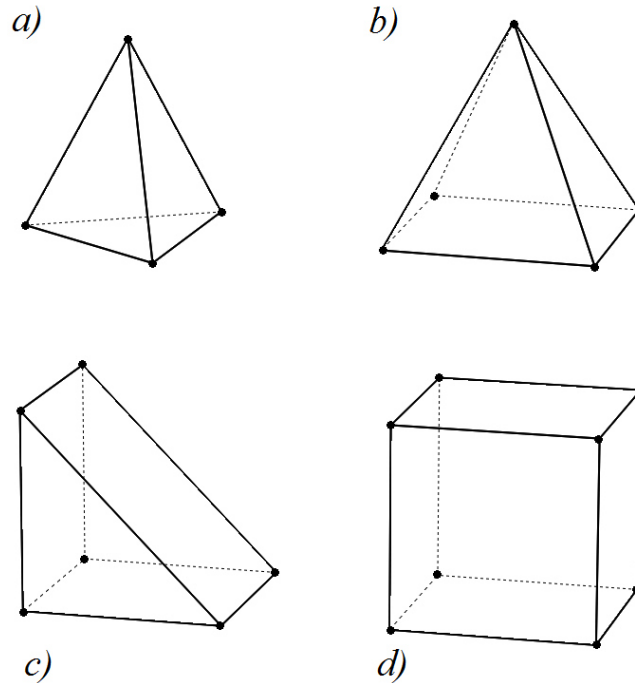


Figura 53. Formas geométricas que toman las subdivisiones espaciales del modelo geométrico al ser discretizado. a) Tetraedro. b) Pirámide. c) Cuña. d) Hexaedro.

Para evaluar la distorsión geométrica que poseen los elementos discretizados con respecto a los ideales, existen diversos parámetros que pueden ser empleados. Uno de estos métodos es el parámetro de oblicuidad o **Skewness** por su nombre en inglés. Dicho parámetro determina, de manera adimensional en una escala de 0 a 1, que tan cerca a la forma ideal es la forma del elemento generado, siendo el valor de cero una celda equilátera perfecta, mientras que el 1 indica un elemento completamente distorsionado. La oblicuidad o skewness se cuantifica empleando el método basado en volúmenes equiláteros por medio de la siguiente ecuación:

$$Skewness = \frac{\text{tamaño óptimo del elemento} - \text{tamaño del elemento}}{\text{tamaño óptimo del elemento}} \quad (5.3 - 1)$$

siendo el tamaño óptimo del elemento el tamaño de un elemento equilátero con el mismo circunradio. Los elementos que presentan altos niveles en este parámetro se consideran malos o inaceptables debido a que las ecuaciones de gobierno del fenómeno que se estudia, se resuelven asumiendo que el elemento discreto posee características equiláteras o equiángulas. La Tabla 7 muestra los rangos de valores que definen el nivel de confiabilidad otorgado por los elementos según su nivel de oblicuidad [i].

Tabla 7. Lista de los rangos de valores de oblicuidad y su calidad correspondiente [i].

<i>Skewness</i>	<b>Calidad del elemento</b>
1	Distorsionado
$0.9 < 1$	Malo
0.75 - 0.9	Pobre
0.5 - 0.75	Suficiente
0.25 - 0.5	Bueno
$>0 - 0.25$	Excelente
0	Equilátero

### 5.3.1. Dominio electromagnético.

La necesidad de elementos hexaédricos en las zonas de dominio sólidas del modelo electromagnético fue descrita en el Capítulo 4. Para lograrlo se realizaron, sin modificar la forma global de las geometrías, cortes en diversas secciones de los modelos CAD con el único fin de llevar la calidad de la malla a los niveles adecuados.

Las características globales de la malla electromagnética se aprecian en la Tabla 8. Además de las estructuras sólidas que la máquina presenta, es preciso incluir el dominio interno de fluido (aire/aceite) que existe el tanque para que así el método numérico pueda tener continuidad en los cálculos. Es decir, los dominios de fluido que presentan propiedades paramagnéticas no producen una modificación en la distribución del campo magnético. De la misma manera, se diseñó y discretizó un dominio de fluido de un metro normal a todas las caras del tanque, con el fin de no truncar la solución en un volumen reducido tal que los resultados no fueran veraces.



Tabla 8. Estadísticas generales de la malla electromagnética.

Zona	Tipo de malla	Número de elementos	Calidad del peor elemento	calidad del mejor elemento	Calidad promedio
Núcleo	Estructurada (Hexaedros)	201 296	0.89	1.30E-10	9.19E-02
Bobinas	Estructurada (Hexaedros)	177 120	0.02	1.66E-02	1.66E-02
Tirantes y Herrajes	Estructurada (Hexaedros)	17 910	0.3	3.04E-02	0.18
Tanque	Estructurada (Hexaedros)	14 400	1.32E-10	1.30E-10	1.31E-10
Fluido interior	No estructurada (Mixta)	1 310 974	0.99	6.72E-04	0.32
Fluido exterior	No estructurada (Mixta)	40 363	0.99	2.45E-03	0.72
Dominio global	N/A	1 762 063	0.99	1.30E-10	0.25

Esta malla fue realizada enfocando todos los esfuerzos y recursos computacionales para generar una malla de alta calidad en los dominios sólidos en los que se producen las pérdidas electromagnéticas. No se aplicó un criterio de mallado estructurado en los dominios de fluido, ya que fueron discretizados en función de las estructuras circundantes a dicho fluido. Como resultado se obtuvo una malla de calidad media en las zonas fluidas. En el dominio de fluido las líneas de flujo magnético no presentan ningún tipo de esfuerzo al atravesarlo debido a su permeabilidad magnética igual a la del vacío, lo que se traduce como una zona libre de deformaciones de campo magnético. Es por esto que la confiabilidad de los resultados al atravesar las zonas que poseen elementos de mala calidad no se ve comprometida.

En las Figuras 54, 55, 56, 57 y 58, es posible apreciar los dominios discretos de las zonas de interés.

INFORMACIÓN PROTEGIDA  
PROPIEDAD INTELECTUAL

Figura 54. Malla del núcleo, vista isométrica.

INFORMACIÓN PROTEGIDA  
PROPIEDAD INTELECTUAL

Figura 55. Malla del núcleo, vista frontal.

INFORMACIÓN PROTEGIDA  
PROPIEDAD INTELECTUAL

Figura 56. Malla de los paquetes de bobinas de baja y alta tensión en las tres frases (vistas isométrica y frontal).

INFORMACIÓN PROTEGIDA  
PROPIEDAD INTELECTUAL

Figura 57. Malla de las estructuras de soporte (tirantes en posición horizontal y herrajes en posición vertical, ambos con respecto a la perspectiva isométrica).

INFORMACIÓN PROTEGIDA  
PROPIEDAD INTELECTUAL

Figura 58. Malla del tanque, vista isométrica exterior.

### 5.3.2. Dominio termohidráulico.

Este modelo ha sido diseñado para la correcta medición de la distribución de velocidades y de temperatura en las zonas del dominio fluido. Debido a que, numéricamente, resulta más complejo obtener soluciones en dichos dominios causa a los esfuerzos de corte producto de fuerzas inerciales y de cuerpo, así como a la dependencia que presentan las propiedades del fluido en función de la temperatura, además de la importancia que supone la correcta evaluación de capas límite tanto hidrodinámicas como térmicas. Por ello, en función de los criterios de mallados enlistados en el capítulo 4 para mallas termohidráulicas, se discretizó el dominio referente al estudio termohidráulico reportando las siguientes estadísticas de calidad de malla [i] mostradas en la Tabla 9.

Tabla 9. Estadísticas generales de la malla termohidráulica.

Zona	Tipo de malla	Número de elementos	Calidad del peor elemento	calidad del mejor elemento	Calidad promedio
Fluido	Estructurada (Hexaedros)	3 868 380	0.58	1.24E-03	1.95E-02
Conductor	Estructurada (Hexaedros)	1 476 000	3.55E-02	4.66E-04	1.81E-02
Aislante	No estructurada (Mixta)	10 657 877	0.99	2.82E-04	0.33
Dominio global	N/A	16 002 257	0.99	2.82E-04	0.29

Para la generación de esta malla, fue preciso enfocarse en los elementos que representan tanto los conductores como los canales de fluido distribuidos en todo el dominio, sin dejar de lado la intención de mantener la calidad aceptable en las zonas que funcionan como aislante. En las Figuras 59, 60, 61 y 62 se presentan los modelos mallados en función del dominio (conductor, fluido y aislante).

INFORMACIÓN PROTEGIDA  
PROPIEDAD INTELECTUAL

Figura 59. Fracción de la malla de los conductores eléctricos de las bobinas de baja y alta tensión.



INFORMACIÓN PROTEGIDA  
PROPIEDAD INTELECTUAL

Figura 60. Fracción de la malla de los canales de fluido en la zona inferior (entrada del fluido).

INFORMACIÓN PROTEGIDA  
PROPIEDAD INTELECTUAL

Figura 61. Fracción de la malla de los canales de fluido en la zona superior (salida del fluido).

INFORMACIÓN PROTEGIDA  
PROPIEDAD INTELECTUAL

Figura 62. Fracción de la malla del sólido que representa el material aislante.

#### 5.4. Planteamiento de los casos de estudio.

Ambos casos de estudio se resolvieron empleando el software numérico comercial ANSYS. Éstos fueron planteados como sigue:

##### 5.4.1. Modelo electromagnético en ANSYS Workbench EMAG v15.

Como parte fundamental del estudio numérico, es preciso definir las propiedades de los materiales. Éstas son mostradas en la Tabla 10. En ella es posible apreciar que los materiales de naturaleza fluida (aceite y aire) no toman partido en el desarrollo del fenómeno, sino que representan únicamente un medio en el que los campos se mueven.

Tabla 10. Propiedades de los materiales en estudio electromagnético.

Material	Zona	Resistividad ( $\rho_e$ )	Permeabilidad relativa ( $\mu_r$ )
Acero al silicio	Núcleo	4.72E-07	Curva de magnetización
Cobre	Bobinas devanadas	2.10E-08	1
Acero estructural	Herrajes y Tanque	2.00E-07	100
Acero inoxidable	Tirantes	8.80E-07	1
Fluido	Aire	N/A	1
Fluido	Aceite	N/A	1

Para el caso del Acero al silicio, material del que está compuesto el núcleo del transformador, es preciso incluir los valores que representan su curva de magnetización característica ya que, en presencia de campos magnéticos, este material tiene un comportamiento no lineal; estos valores se muestran en la Tabla 11 y la Gráfica 12. Este estudio es de carácter periódico debido a que los términos de corrientes fuente están sujetos a una variación de tipo sinusoidal, como sucede con la corriente alterna. Por esto, se consideró que al modelar una fracción representativa del intervalo periódico, se contaría con una adecuada representación del dominio temporal. Este intervalo característico, para una frecuencia de 60 Hz, es de tan sólo 0.016667 s (1/60 s). Los parámetros que fungen como corriente de entrada son entonces:

$$I_{aBT} = 2406 \times \sin(360 \times 60 \times t + 0) \quad (5.4.1 - 1)$$

$$I_{bBT} = 2406 \times \sin(360 \times 60 \times t + 120) \quad (5.4.1 - 2)$$

$$I_{cBT} = 2406 \times \sin(360 \times 60 \times t + 240) \quad (5.4.1 - 3)$$

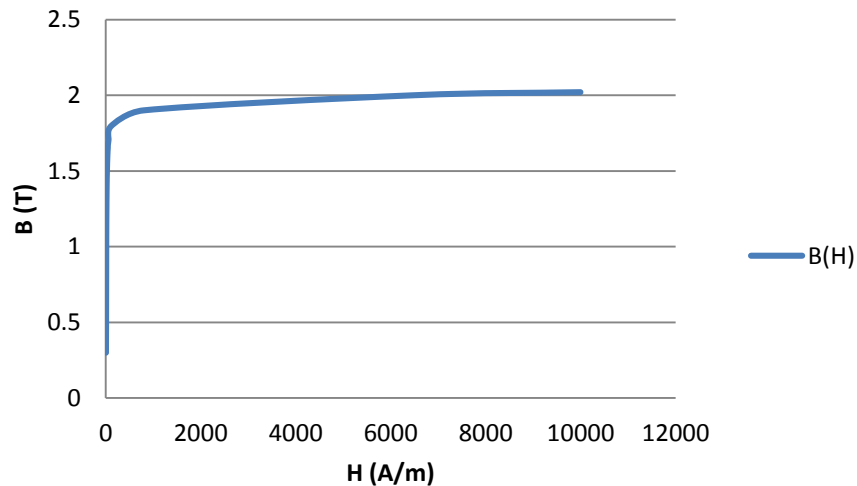
$$I_{aAT} = -438.6 \times \sin(360 \times 60 \times t + 0) \quad (5.4.1 - 4)$$

$$I_{bAT} = -438.6 \times \sin(360 \times 60 \times t + 120) \quad (5.4.1 - 5)$$

$$I_{cAT} = -438.6 \times \sin(360 \times 60 \times t + 240) \quad (5.4.1 - 6)$$

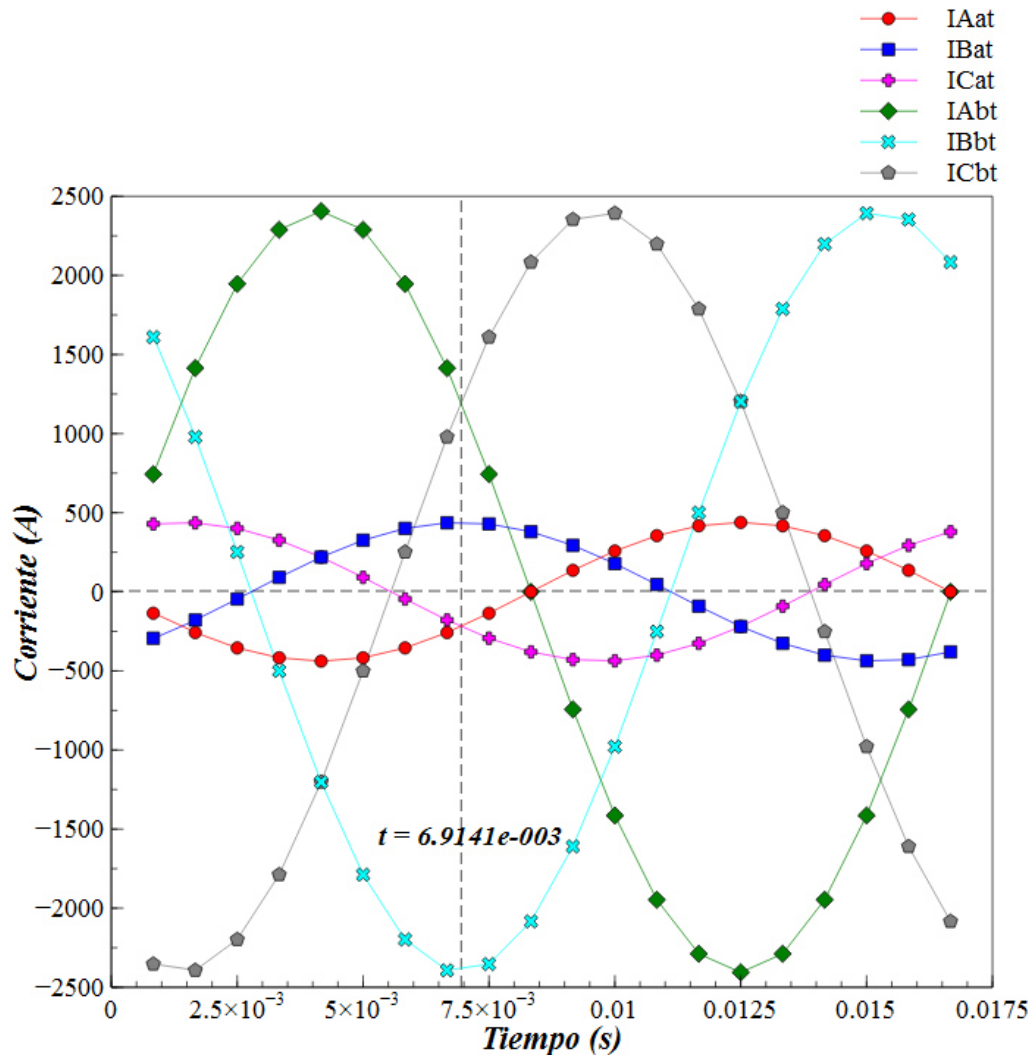
Tabla 11. Densidad de flujo magnético a distintos valores de intensidad de campo magnético en el Acero al Silicio.

<i>H</i>	<i>B(H)</i>
5.8	0.3
7	0.4
8.9	0.6
11.5	1
12.8	1.1
14.3	1.2
20	1.4
26	1.5
36	1.6
44	1.65
58	1.7
128	1.8
800	1.9
6500	2
10000	2.02



Gráfica 12. Curva de magnetización del acero al Silicio.

El comportamiento de las corrientes fuente se aprecia en la Gráfica 13.



Gráfica 13. Fuentes de alimentación de corriente.

Por otro lado, para promover el flujo de la corriente en las bobinas de baja y alta tensión, se prescribe un valor de voltaje  $V = 0$  en las caras opuestas de las bobinas para así producir la diferencia de potencial en los devanados. Esto se muestra en la Figura 63.

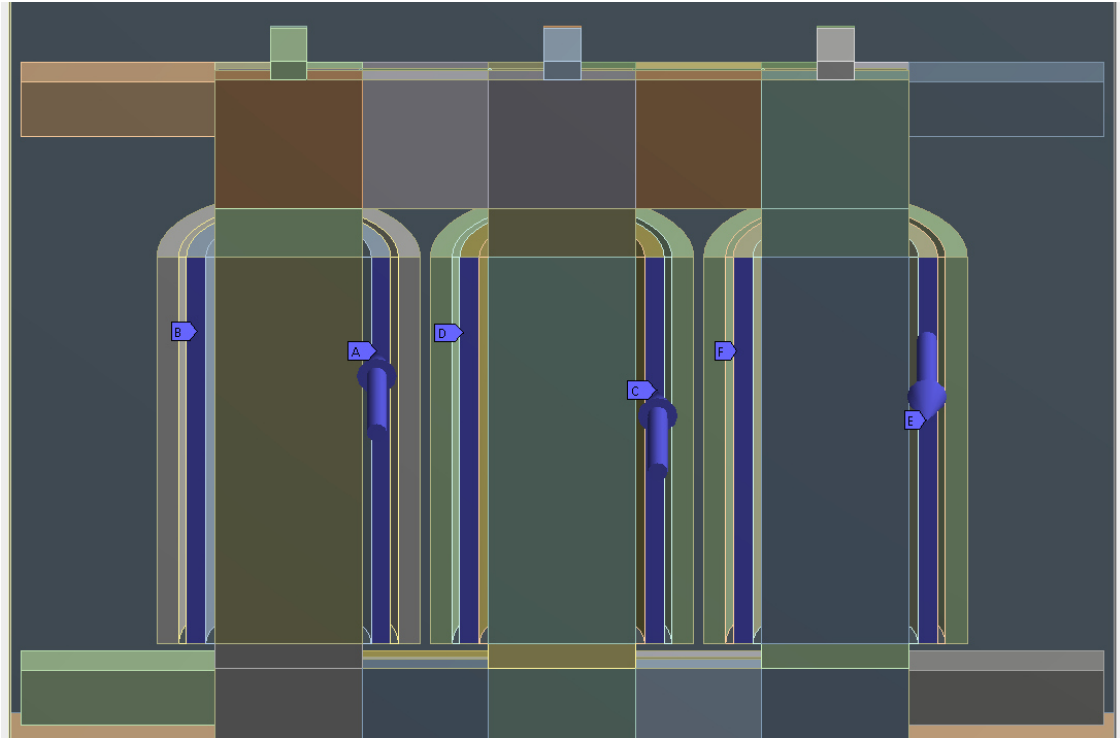


Figura 63. A, C y E: vectores de corriente para fases a b y c. B, D y F: superficies con voltaje igual a cero.

Las condiciones de frontera del estudio, desarrolladas en el Capítulo 2 (2.2 – 33, 2.2 – 34, 2.2 – 35, 2.2 – 36), se indican en el software como se mostró en la ecuación (4.1.1 – 1) para las paredes exteriores del dominio total (Figura 64):

$$A(x, y, z)|_s = A_s = 0 \quad (5.4.1 - 4)$$

Esto representa un confinamiento del campo conservativo dentro del dominio de estudio en las paredes del dominio abierto. Para el caso de la superficie que representa la fracción de simetría (Figura 65) la condición de frontera es matemáticamente igual a la anterior:

$$A(x, y, z)|_{sym} = A_{sym} = 0 \quad (5.4.1 - 5)$$

De igual manera, esta condición representa una zona de confinamiento para las líneas de campo que alcanzan esta superficie sin que se vean afectadas sino redireccionadas hacia dentro del dominio de estudio.

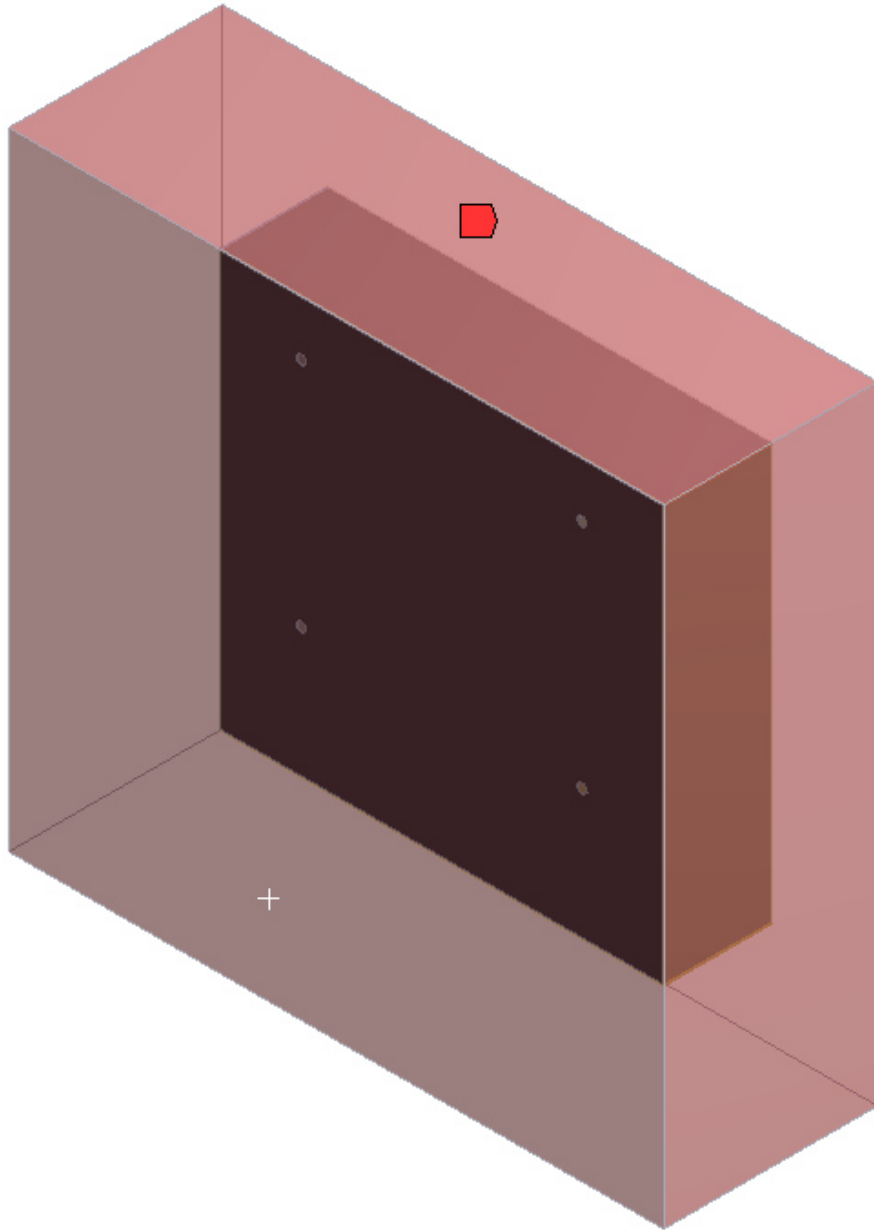


Figura 64. Condición de frontera de dominio abierto.



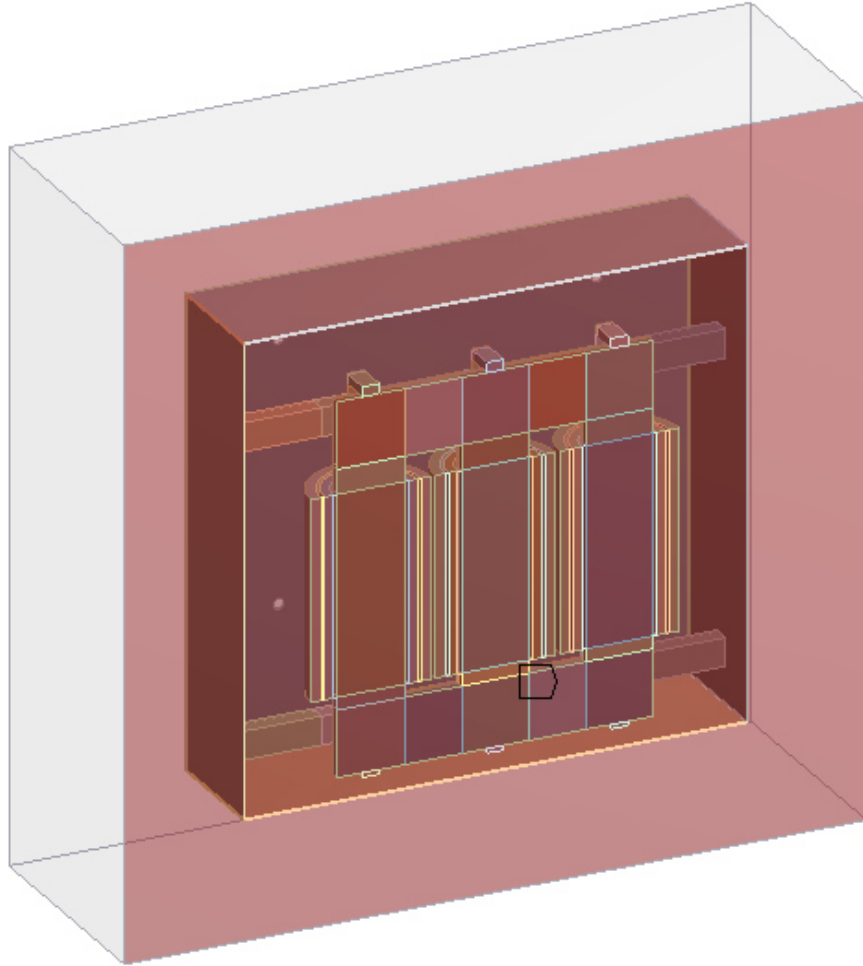


Figura 65. Condición de frontera de pared simétrica en la sección transversal de la máquina.

Por último, el control de los pasos de tiempo se utilizó para la variación de la corriente empleada en el modelo. Como se mencionó anteriormente, el estudio se ejecutó contemplando solo lo que se comprende como una fracción periódica característica de la corriente alterna ( $1/60\text{ s}$ ). Dicho intervalo de tiempo fue discretizado en 20 fracciones o sub pasos de tiempo los cuales, representan un valor variable de la corriente que fluye en las bobinas con respecto al tiempo (Tabla 12).

Tabla 12. Variaciones de la corriente de carga con respecto al tiempo a 60 Hz

<i>Sub step</i>	<i>Tiempo (s)</i>	<i>IAat (A)</i>	<i>IBat (A)</i>	<i>ICat (A)</i>	<i>IAbt (A)</i>	<i>IBbt (A)</i>	<i>ICbt (A)</i>
1	0.0008333333	-135.53	-293.48	429.02	743.49	1609.93	-2353.42
2	0.0016666667	-257.80	-178.39	436.20	1414.21	978.61	-2392.82
3	0.0025	-354.83	-45.85	400.68	1946.49	251.50	-2197.99
4	0.0033333333	-417.13	91.19	325.94	2288.24	-500.24	-1788.01
5	0.0041666667	-438.60	219.30	219.30	2406.00	-1203.00	-1203.00
6	0.005	-417.13	325.94	91.19	2288.24	-1788.01	-500.24
7	0.0058333333	-354.83	400.68	-45.85	1946.49	-2197.99	251.50
8	0.0066666667	-257.80	436.20	-178.39	1414.21	-2392.82	978.61
9	0.0075	-135.53	429.02	-293.48	743.49	-2353.42	1609.93
10	0.0083333333	0.00	379.84	-379.84	0.00	-2083.66	2083.66
11	0.0091666667	135.53	293.48	-429.02	-743.49	-1609.93	2353.42
12	0.01	257.80	178.39	-436.20	-1414.21	-978.61	2392.82
13	0.0108333333	354.83	45.85	-400.68	-1946.49	-251.50	2197.99
14	0.0116666667	417.13	-91.19	-325.94	-2288.24	500.24	1788.01
15	0.0125	438.60	-219.30	-219.30	-2406.00	1203.00	1203.00
16	0.0133333333	417.13	-325.94	-91.19	-2288.24	1788.01	500.24
17	0.0141666667	354.83	-400.68	45.85	-1946.49	2197.99	-251.50
18	0.015	257.80	-436.20	178.39	-1414.21	2392.82	-978.61
19	0.0158333333	135.53	-429.02	293.48	-743.49	2353.42	-1609.93
20	0.0166666667	0.00	-379.84	379.84	0.00	2083.66	-2083.66

#### 5.4.2. Modelo termohidráulico en ANSYS FLUENT v15.

Como se explicó antes, este modelo corresponde a una fracción periódica de 10° del paquete de bobinas de baja y alta tensión del transformador caso de estudio (Figura 66). Este modelo busca aproximar el comportamiento del fluido refrigerante a lo largo de los canales verticales y horizontales de dicha fracción simétrica del paquete de bobinas. El estudio se rige bajo los efectos de la convección forzada debido a que se asume una velocidad de entrada al dominio para solventar el efecto producto del termosifón generado debido a la diferencia de densidades que provoca la diferencia de temperaturas en los elementos de la máquina. Sin embargo, se contempla entre los aspectos generales del modelo la codependencia de las propiedades del fluido en función de la temperatura, así como los efectos que producen las fuerzas de flotación del fluido y la gravedad ejercida en el dominio. Las tasas de generación de calor que se emplean representan una comparativa entre el caso que contempla las pérdidas de  $Eddy + I^2R$  contra el caso que contempla únicamente las pérdidas  $I^2R$ . Estos resultados serán obtenidos a partir del modelo electromagnético y

migrados hacia el modelo termohidráulico mediante la opción de funciones definidas por usuario (UDF's, por sus siglas en inglés). Dichos valores forman parte del término de generación volumétrica de calor de la ecuación de la energía (4.2.2 – 3) como sigue:

$$\dot{Q}_{vol} = \left[ \frac{\omega^2 B_z^2 w^2 \sigma}{24} \right] + \left[ \frac{\omega^2 B_r^2 t^2 \sigma}{24} \right] + [\rho \times J_{load}^2] \quad (5.4.2 - 1)$$

El primer y segundo término de la ecuación (5.4.2 – 1) corresponden a las pérdidas de *Eddy* que se inducen en los conductores de baja y alta tensión, en las componentes radiales y axiales de la bobina. El tercer término representa la generación volumétrica del conductor debido al flujo de corriente de carga en los devanados.

Las propiedades de los materiales sólidos empleados en el estudio se muestran en la Tabla 13.

Tabla 13. Propiedades de los materiales sólidos.

<i>Material</i>	<i>Conductividad térmica (k)</i>	<i>Densidad (<math>\rho</math>)</i>	<i>Calor específico (Cp)</i>
Papel	0.1	930	1 340
Cobre	401	8 933	385

Mientras que para el fluido, las propiedades fueron empleadas en función de polinomios que dependen de la temperatura descritos en el estado del arte [xxiv] planteados según los resultados de pruebas experimentales realizadas al fluido. Estos polinomios son:

$$\rho = 1075.4 - 0.682T \quad (5.4.2 - 2)$$

$$k = 0.191 - 3.25e^{-4}T + 4.36e^{-7}T^2 \quad (5.4.2 - 3)$$

$$Cp = 616.84 + 4.24T \quad (5.4.2 - 4)$$

$$\mu = 0.0831 - 3.97e^{-4}T + 5.1e^{-7}T^2 \quad (5.4.2 - 5)$$

El esquema bajo el cual se resuelve el acoplamiento de la presión y la velocidad para calcular el campo de velocidades es el denominado **SIMPLE** (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations) [xxviii]. Este esquema emplea el uso de un valor inicial de presión asumido, denominado  $p^*$ , mediante el cual se resuelven las ecuaciones de cantidad de movimiento en pro de obtener las

componentes de las velocidad  $u^*$ ,  $v^*$  y  $w^*$  que, dicho sea de paso, representan valores inciertos que se desprenden de un valor de presión inicial asumida. Con los valores de las componentes de velocidad en función de  $p^*$ , se define una ecuación para la corrección de la presión  $p'$  a partir de la ecuación de continuidad. En función de la suma algebraica de  $p'$  y  $p^*$  se determina el valor corregido de  $p$ . Con este nuevo valor de la presión se recalculan las componentes de la velocidad  $u$ ,  $v$  y  $w$  mediante las ecuaciones de corrección de la velocidad. Una vez realizado este procedimiento, es posible determinar el valor de otras cantidades, tal es el caso de la temperatura mediante la cual se obtienen los valores locales de la densidad y viscosidad (cantidades que influyen en el campo de velocidades del fluido). Hecho esto, el valor corregido de la presión  $p$  pasa a ser tomado en la siguiente iteración como  $p^*$  para así repetir el procedimiento hasta alcanzar la convergencia de la ecuación de continuidad.

Por su parte, en materia de discretización espacial, los gradientes se resolvieron mediante el método denominado **Least squares cell based**, el cual asume la variación de los valores de la solución de manera lineal. Dicho de otra manera, el valor de las propiedades a calcular se determina en función del cociente entre el valor de la suma algebraica de dicha propiedad sobre el incremento espacial que los separa. Por otro lado, los valores que se refieren a la presión, la cantidad de movimiento y la energía, son evaluados mediante el método **Second Order Upwind**. Este método de interpolación utiliza tres puntos de interpolación cuadrática ponderada aguas arriba, es decir, para el caso de evaluar una propiedad en un nodo  $P$  en cuyas fronteras del elemento fluye la componente  $u_w$  (componente proveniente de la dirección oeste) y  $u_e$  (componente que fluye con dirección al este), un ajuste cuadrático entre los nodos  $WW$  (dos nodos previos al nodo  $P$  moviéndose en el sentido oeste),  $W$  (nodo previo en dirección oeste) y  $P$  (nodo central) son empleados para evaluar la propiedad en la frontera que existe entre los nodos  $W$  y  $P$ , y de igual manera, con los nodos  $W$ ,  $P$  y  $E$  (nodo siguiente en dirección hacia el este) se realiza un ajuste cuadrático para determinar el valor en la frontera que existe entre los nodos  $P$  y  $E$ .

Las condiciones de frontera adecuadas para este modelo demandan una entrada de fluido a los canales internos de la bobina. Este parámetro, reportado en el estado del arte [xxi], es como sigue:

$$V_{in} = 0.03 \text{ m/s} \quad (5.4.2 - 6)$$

Esta velocidad, asociada con las dimensiones del canal de entrada, simula el comportamiento que posee el flujo de fluido debido al proceso derivado de la

convección natural; régimen bajo el que se estudia la operación de la máquina (ONAN). La condición de frontera en la salida de la bobina es:

$$p = 0$$

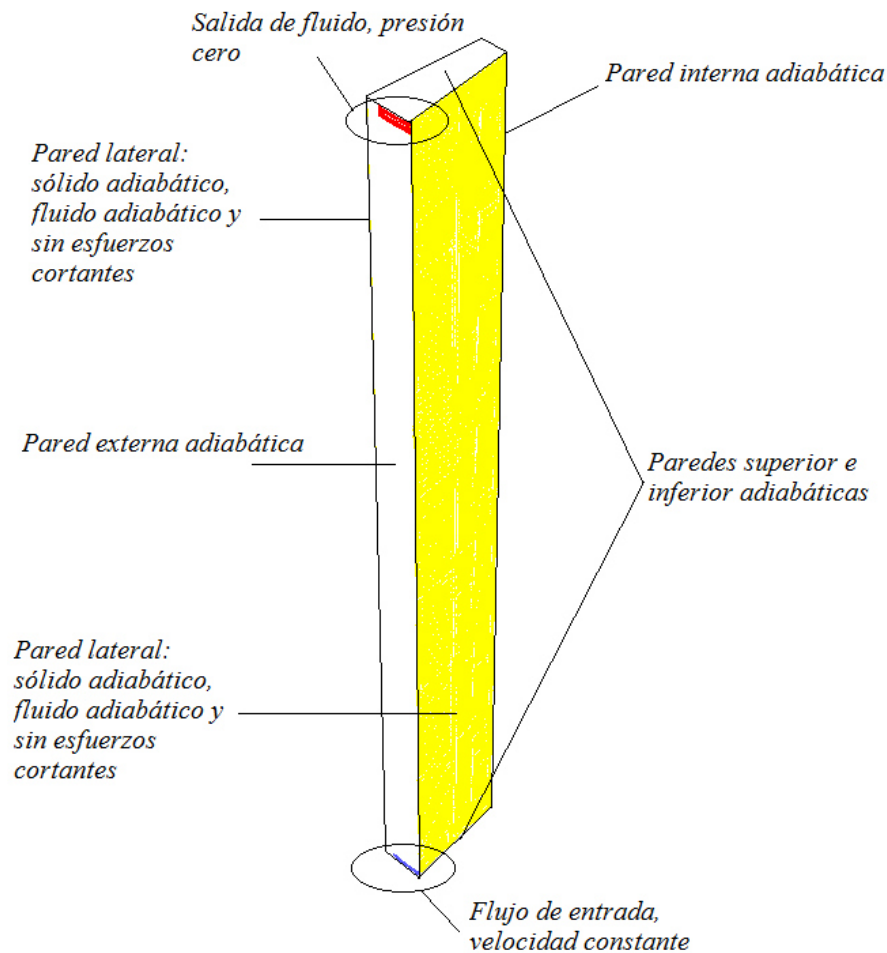


Figura 66. Condiciones de frontera de dominio termohidráulico.

Para todas las paredes sólidas externas del dominio, como se mencionó en el capítulo 4, se consideraron comportamientos adiabáticos (4.2.2 – 6), mientras que en las paredes que representan superficies donde el fluido refrigerante avanza de manera paralela a éstas, además de la condición adiabática, también se especificaron invariaciones en la velocidad del fluido: (4.2.2 – 7) y (4.2.2 – 8).

### 5.5. Resultados del caso de estudio electromagnético.

Los resultados obtenidos tras realizar el proceso de simulación numérica computacional, reportan únicamente la distribución de las líneas de campo magnético a través de la máquina, de la que se deriva la densidad de flujo. Mediante herramientas computacionales de desarrollo propio se realizó el filtrado y postprocesado de información. Al evaluar los valores locales de la intensidad del campo magnético y la densidad de flujo del mismo en los elementos de la máquina en función de las ecuaciones pertinentes para cada elemento estudiado, se determinó la tasa de generación local de cada elemento y de manera global en cada estructura. Es preciso mencionar que todos los datos postprocesados, fueron extraídos en el instante de tiempo  $t = 6.9141e - 003 s$  (línea discontinua vertical de la Gráfica 13) ya que en ese momento puntual, la variación periódica sinusoidal es máxima en la pierna central, lo cual significa que el campo magnético se encuentra concentrado en el centro geométrico de la máquina.

#### 5.5.1. Núcleo.

En función de la curva de magnetización que modela el comportamiento de la densidad de flujo producido a cada valor de intensidad de campo magnético inducido en el material del que está conformada la estructura (Tabla 11, Gráfica 12), es posible apreciar en la Figura 67 que la saturación del núcleo alcanza aproximadamente 2 Teslas en la pierna central (valor máximo) para un tiempo  $t = 6.9141e - 003 s$ . Este análisis permite determinar los valores de las fuentes de calor en la estructura a nivel de elementos discretos mediante la ecuación (4.1.4.1 – 2). La generación de calor debido a pérdidas producidas por corrientes de *Eddy* en materiales laminados, modelada mediante la ecuación (4.1.4.1 – 2) está estrechamente ligada tanto a la densidad de flujo que fluye por los elementos ferromagnéticos como por el volumen de los mismos. La Gráfica 14 muestra como el aumento de las pérdidas totales en cada elemento discreto (recordando que cada uno de estos elementos representa, en la dirección que denota la profundidad, el espesor de todas las láminas que conforman a cada escalón del núcleo) aumenta de manera lineal en función de su espesor. El espesor de cada uno de los escalones varía en función del número de láminas que posee el mismo, teniendo todas y cada una de las láminas utilizadas un espesor de  $0.00023 m$ , mientras que en su mayoría los escalones poseen distintos números e láminas, como se aprecia en la Tabla 14.

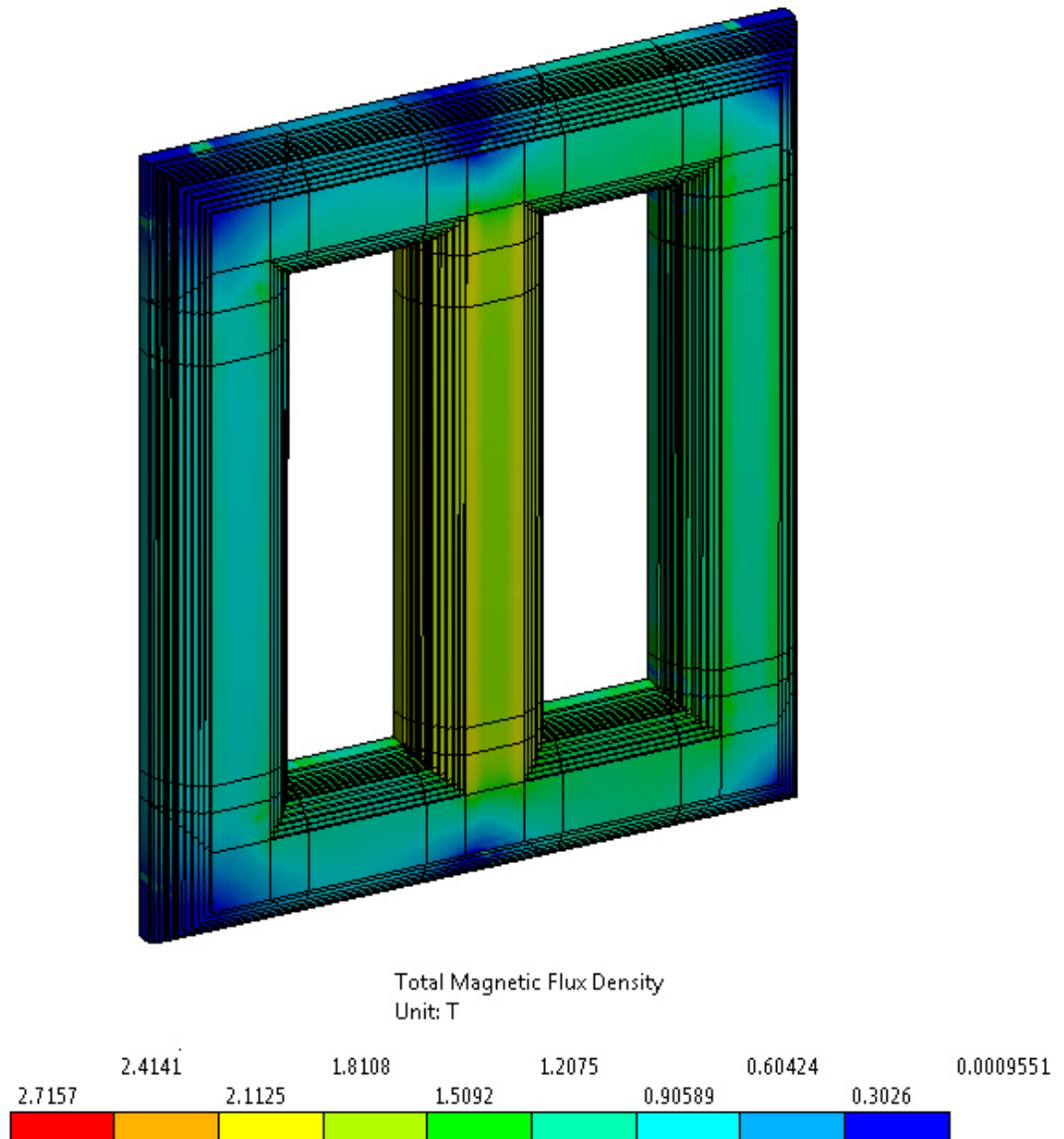
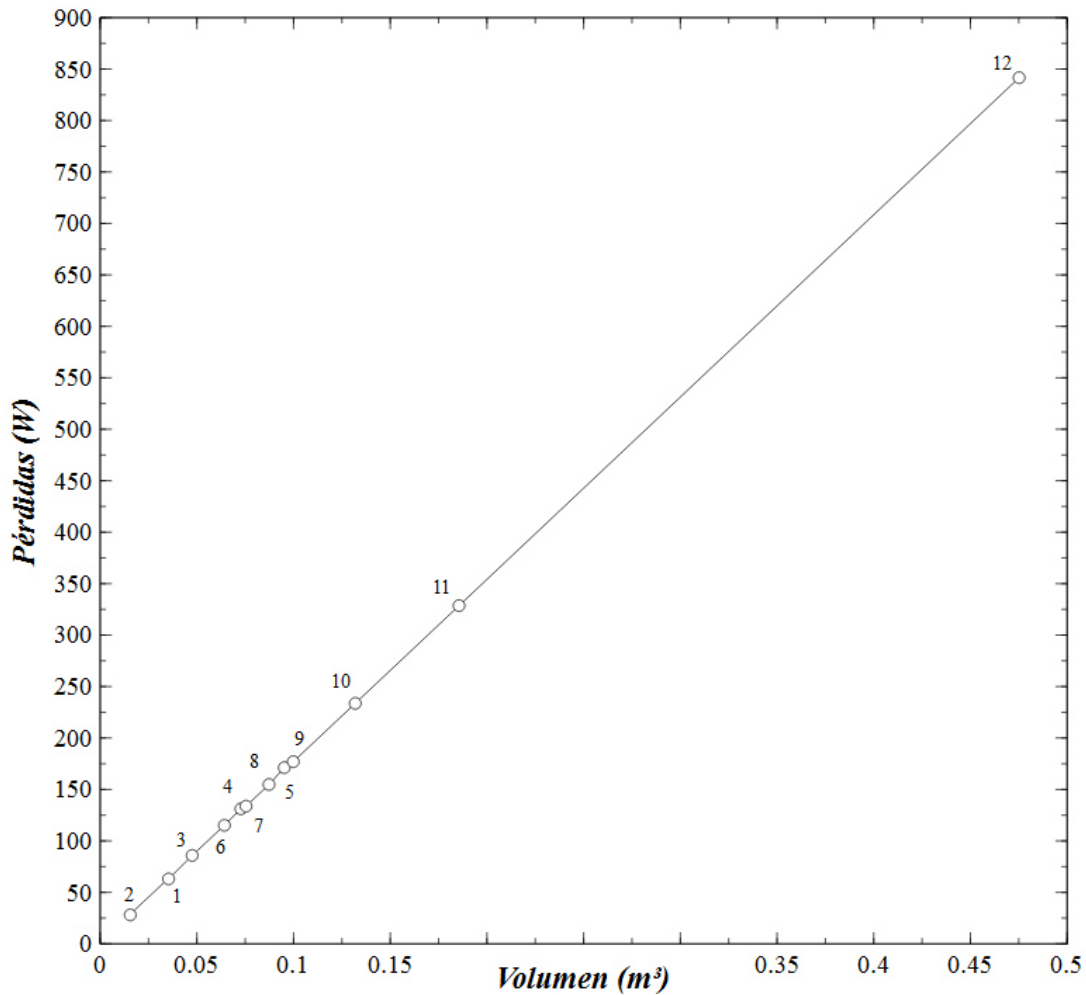


Figura 67. Contornos de la distribución de la densidad de flujo magnético (T).

En la misma Tabla 14 se aprecian los valores mínimo, máximo y promedio de la densidad de flujo que existen en la estructura: Mínimo de  $0.0088\ T$ , máximo de  $1.9463\ T$  y promedio estadístico de  $1.08075\ T$ . Como ya se mencionó, a partir de dicha densidad de flujo se determinó el valor de pérdida total de cada elemento, como se muestra en la última columna de la misma tabla.



Gráfica 14. Aumento de las pérdidas totales producidas por corrientes de Eddy en las placas o escalones del núcleo en función de su volumen.

En la Figura 74 se muestra una forma conceptual de la generación de corrientes de *Eddy* en materiales laminados y como estas corrientes varían su intensidad en función del espesor perpendicular a las líneas de campo magnético que atraviesan el material. Para el instante de tiempo estudiado ( $t = 6.9141e - 003$  s), las corrientes de carga en los devanados de baja tensión poseen valores de intensidad aproximados como sigue:

$$IA_{bt} = 2406 \cdot \sin(360 \cdot 60 \cdot 6.9141e - 003 + 0) = 1226.76 \text{ A}$$

$$IB_{bt} = 2406 \cdot \sin(360 \cdot 60 \cdot 6.9141e - 003 + 120) = -2405.84 \text{ A}$$



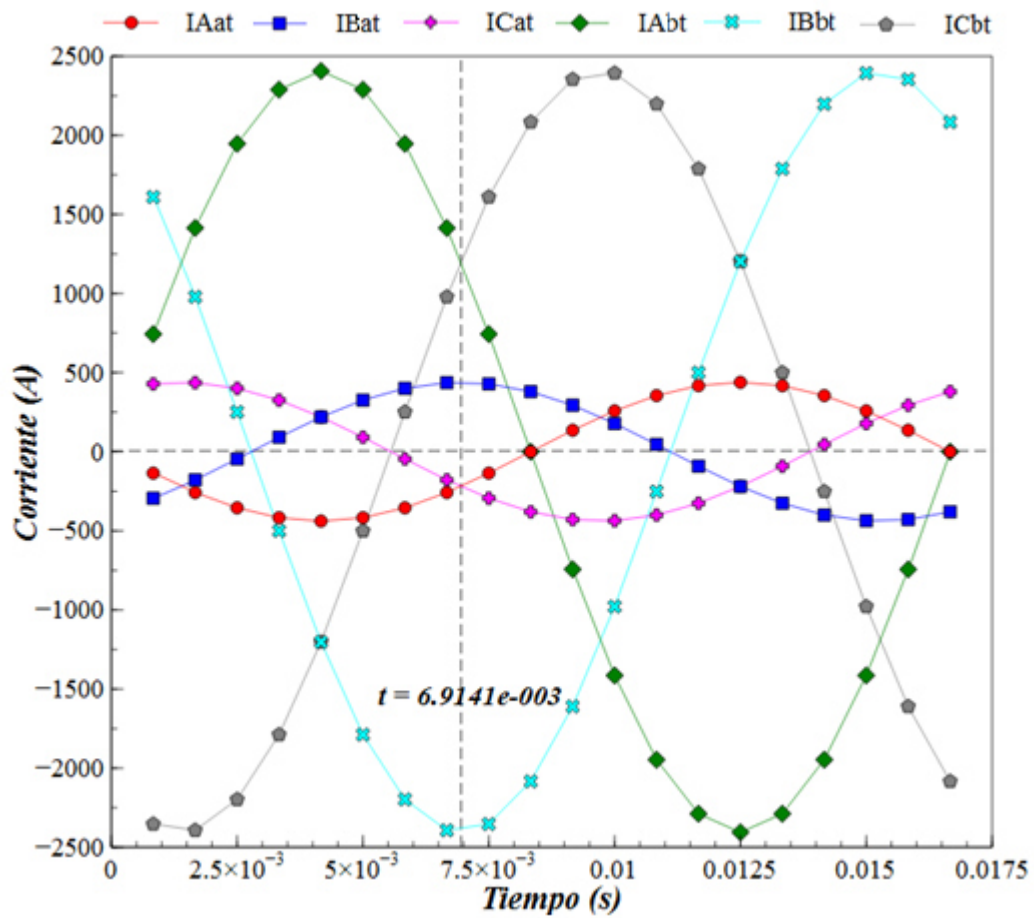
$$I_{C_{bt}} = 2406 \cdot \sin(360 \cdot 60 \cdot 6.9141e - 003 + 240) = 1179.09 \text{ A}$$

$$I_{A_{at}} = -438.6 \cdot \sin(360 \cdot 60 \cdot 6.9141e - 003 + 0) = -223.631 \text{ A}$$

$$I_{B_{at}} = -438.6 \cdot \sin(360 \cdot 60 \cdot 6.9141e - 003 + 120) = 438.571 \text{ A}$$

$$I_{C_{at}} = -438.6 \cdot \sin(360 \cdot 60 \cdot 6.9141e - 003 + 0) = -214.941 \text{ A}$$

Esto se aprecia en la Gráfica 13.



Gráfica 15. Intervalo temporal de  $1/60 \text{ s}$ , discretizado en 20 pasos de tiempo. El tiempo  $t = 6.9141e - 003 \text{ s}$  muestra la máxima amplitud de onda en la fase B (pierna central).

Estas corrientes inducen un campo magnético  $H$  que a su vez genera, en función de la curva de saturación del acero al silicio, una densidad de flujo magnético  $B$ . Al integrar los vectores de la densidad de flujo magnético  $\vec{B}(x, y, z)$  a través de la superficie que corta en el centro geométrico del núcleo a de cada una de las piernas del mismo (Figura 68), mediante la ecuación (2.1.4 – 2), se obtuvieron los valores del flujo magnético neto,  $\Phi_m$ , para cada una de las piernas en el instante de tiempo analizado.

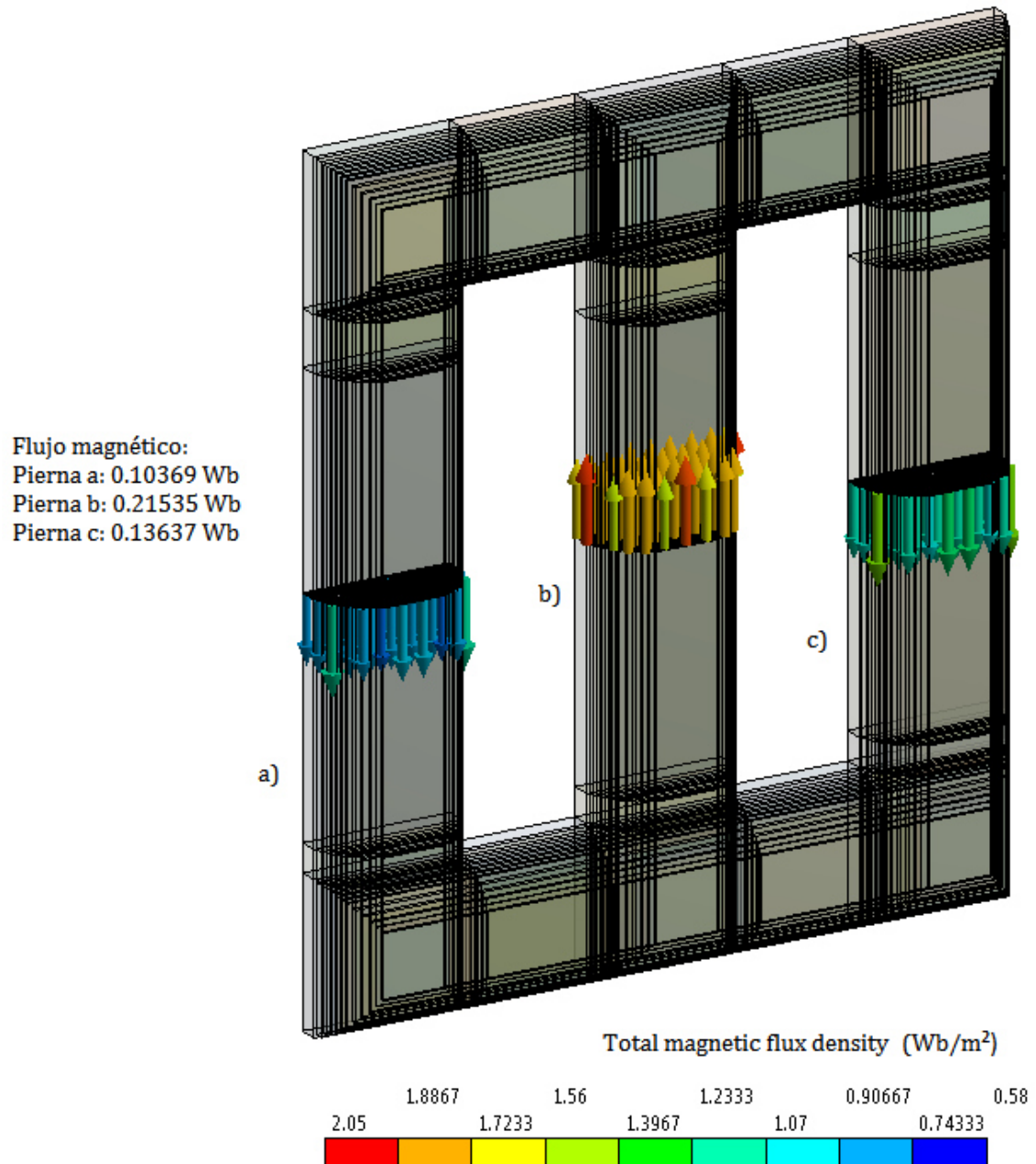


Figura 68. Flujo magnético neto que cruza cada una de las piernas del núcleo.

El valor global de las pérdidas totales ( $W$ ) de la Tabla 14 representa únicamente la potencia producida por la fracción simétrica de la estructura. En recuentos globales posteriores se determinan los valores extrapolados a un núcleo completo.

Tabla 14. Cálculo de las pérdidas totales por corrientes de Eddy de las placas o escalones del transformador en función de la densidad de flujo  $T$ .

<i>Placa o escalón</i>	<i>Láminas por placa</i>	<i>Espesor de placa (mm)</i>	$B_{min} (T)$	$B_{max} (T)$	$B_{prom} (T)$	<i>Pérdidas totales (W)</i>
1	55	12.7	0.0775	1.8063	1.094	63.078
2	21	4.8	0.0718	1.8264	1.1	28.11
3	56	12.9	0.0489	1.8269	1.097	85.872
4	77	17.6	0.0392	1.8282	1.095	131.174
5	90	20.8	0.0334	1.8312	1.092	171.212
6	56	12.8	0.0301	1.8375	1.089	115.179
7	63	14.4	0.0272	1.8396	1.078	133.745
8	70	16	0.0205	1.8612	1.074	154.798
9	77	17.6	0.0204	1.8796	1.07	176.956
10	97	22.4	0.0175	1.8941	1.065	233.651
11	132	30.44	0.0159	1.9059	1.06	328.604
12	327	72.5	0.0088	1.9463	1.055	841.6
Global	1121	254.94	0.0088	1.9463	1.08075	2463.98

### 5.5.2. Bobinas.

Como ya se explicó con anterioridad, las pérdidas en estas estructuras se dividen en pérdidas de tipo  $I^2R$  y pérdidas extrañas por corrientes de *Eddy*. Las primeras fueron calculadas mediante la ecuación (2.4.5.2.4 – 2), lo que resulta en una distribución homogénea a lo largo de todo el conductor. Por su parte, las pérdidas por corrientes de *Eddy*, calculadas a partir de las ecuaciones (4.1.4.2 – 1) y (4.1.4.2 – 2), presentan una variación espacial en función de las líneas de campo magnético que atraviesan las estructuras. Debido a que las pérdidas extrañas deben ser calculadas en función de las componentes axial y radial, (4.1.4.2 – 1) y (4.1.4.2 – 2) respectivamente, fue preciso determinar las componentes de los vectores de la densidad de flujo magnético en las bobinas, representando la dirección del eje  $y$  a la componente axial de la forma cilíndrica de los devanados, mientras que a partir de los valores obtenidos en los ejes  $x$  y

z, se calculó la componente resultante radial, como se muestra en la Figura 69, para cada uno de los elementos discretos de la bobina.

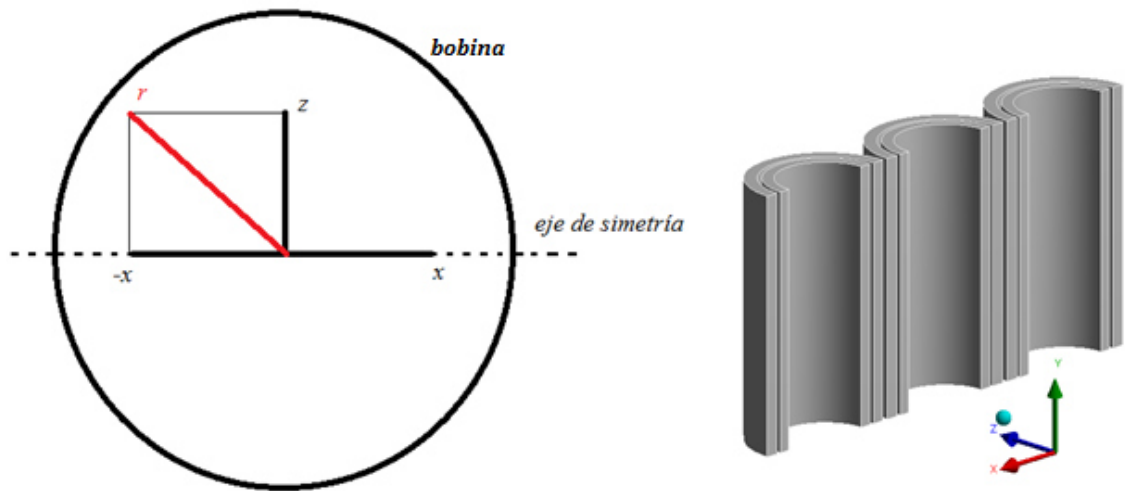


Figura 69. a) Vista superior de bobina conceptual. Componente radial en función de componentes  $x$  y  $z$ . b) Perspectiva oblicua de los cilindros que representan a las bobinas.

Una vez calculada la distribución de la densidad de flujo magnético direccional de las componentes radial y axial se evaluó, en los puntos de convergencia de las bobinas simplificadas (cilíndricas) y las bobinas explícitas, los valores requeridos para determinar la generación de calor por unidad de volumen en cada uno de los conductores, como se planteó en el capítulo 4.

#### 5.5.2.1. Bobinas de baja tensión.

Para determinar la generación de calor por unidad de volumen se determinó la densidad de flujo magnético a lo largo de las 10 líneas que comprenden toda la longitud axial del cilindro, en 42 puntos uniformemente separados para, posteriormente, calcular las pérdidas totales de potencia en función del volumen que comprende el 10% ( $18^\circ$ ) de la zona discreta que abarca cada una de las líneas de medición, como se mostró en la Figura 43. Los resultados extraídos de la fase A (lateral), son considerados similares a los que el estudio produce para la fase C, debido a que se seleccionó un instante de tiempo en el que las amplitudes de onda de las fases en cuestión fueran lo más simétricas posible (Gráfica 15). La distribución direccional de la densidad de flujo magnético en las bobinas de baja tensión se aprecia en las Figuras 70, 71 y 72.

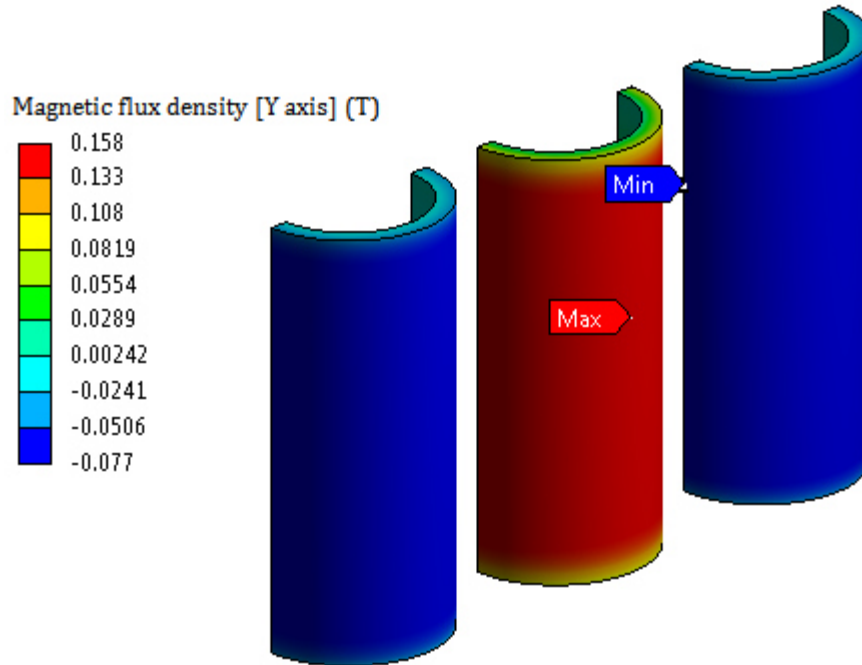


Figura 70. Contornos de la densidad de flujo magnético en el eje y.



Figura 71. Contornos de la densidad de flujo magnético en el eje x.

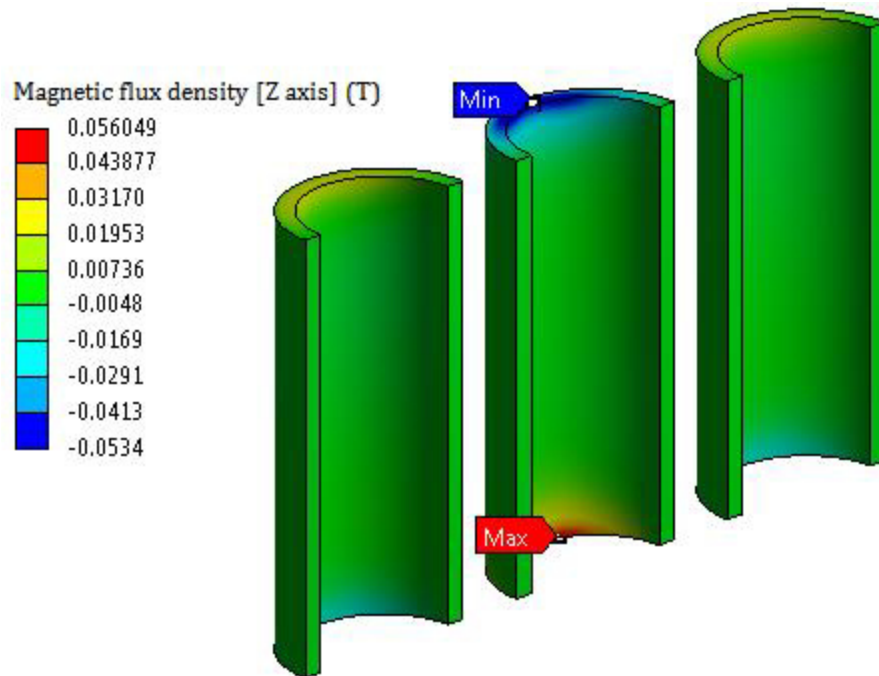


Figura 72. Contornos de la densidad de flujo magnético en el eje z.

Debido a que los contornos mostrados en las Figuras 70, 71 y 72 hacen referencia a valores direccionales, el posible signo que precede al valor en la escala de colores únicamente denota dirección a lo largo de la componente analizada. En la Figura 70, que muestra la distribución de la densidad de flujo magnético que favorece al eje  $y$ , es notable la diferencia en el orden de magnitud de  $B$  en el devanado de la fase central al existir valores máximos en las intensidades de corriente en dicha bobina. De manera similar, en las Figuras 71 y 72, la distribución de  $B$  en la bobina central aloja los valores máximos y mínimos en la escala. Es preciso remarcar la similitud de los valores máximos y mínimos de las escalas, ya que el signo de estas denota únicamente la dirección del vector con respecto a la componente que lo rige; en resumidas cuentas las tendencias de la distribución obtenida en el eje  $x$  denota valores máximos en los extremos laterales (superficies cercanamente perpendiculares a la componente  $x$ ) de la bobina central mientras que para la distribución paralela al eje  $z$  los resultados más relevantes son perceptibles en la cara frontal del devanado central (superficie que se aproxima a un plano perpendicular a  $z$ ). Es factible prever que, efectivamente, para las bobinas de baja tensión la tasa de generación de calor por unidad de volumen será superior en la estructura central (fase b).

Una vez conocidos los valores de las propiedades  $\vec{B}(x)$  y  $\vec{B}(z)$  se determinó  $\vec{B}(r)$  mediante la ecuación:

$$\vec{B}(r) = \sqrt{(\vec{B}(x))^2 + (\vec{B}(z))^2 + \vec{B}(x) \cdot \vec{B}(z) \cdot \cos \theta} \quad (5.5.2 - 1)$$

siendo  $\theta = 90^\circ$ . Por su parte, la componente  $\vec{B}(y)$  representa la densidad de flujo magnético direccional en la componente axial. La generación de calor en las bobinas devanadas, calculadas mediante las ecuaciones de gobierno de la generación de calor por corrientes de *Eddy* en estructuras laminadas (4.1.4.2 – 1) y (4.1.4.2 – 2), aproximan la tasa de generación de calor por unidad de volumen en función del espesor en la componente perpendicular a las líneas de flujo magnético disperso que inciden en el elemento. Para la componente radial, el espesor utilizado es de  $0.005 \text{ m}$  mientras que para la componente axial, el espesor es de  $0.0016 \text{ m}$ . Como se muestra en la Figura 73. Las Gráficas 16-a), -b), -c) y -d) exhiben las tendencias de la tasa de generación de calor en los elementos en función de los parámetros geométricos únicamente de las bobinas de baja tensión. En el caso de las Gráficas 16-a) y -b), presentan las tendencias de generación de calor en las componentes  $x$  y  $z$ , respectivamente. Sin embargo, como se explicó antes, estas tendencias no son útiles debido a que las geometrías de las bobinas corresponden a estructuras cilíndricas. Por este motivo, se hizo preciso determinar, mediante las dos anteriores, la curva de tendencia de generación de calor por unidad de volumen en función de la densidad de flujo magnético direccional en la componente radial contemplando un espesor de  $0.005 \text{ m}$ , como se muestra en la Gráfica 16-c). La existencia de valores negativos en la componente radial denota únicamente el cuadrante a través del cual se mueve el vector  $\vec{B}(r)$ , siendo los valores positivos inherentes al cuadrante  $x, z$  y los valores negativos al cuadrante  $-x, z$ . Por último, la Gráfica 16-d) muestra la curva de tendencia de generación de calor en la componente axial de las bobinas. Al comparar las Gráficas 16-c) y -d), es posible observar que las pérdidas por unidad de volumen de la componente radial superan por un orden de magnitud ( $\cong 1.5 \times 10^5$ ) a su equivalente axial ( $\cong 3.5 \times 10^4$ ). Lo anterior debido a que las corrientes de *Eddy* generadas en los conductores formaron ciclos de mayor intensidad en la componente radial que en la axial, esto por ser la dimensión perpendicular a la componente radial, de mayores proporciones que la dimensión perpendicular a la componente axial, como se muestra de manera conceptual en la Figura 74.

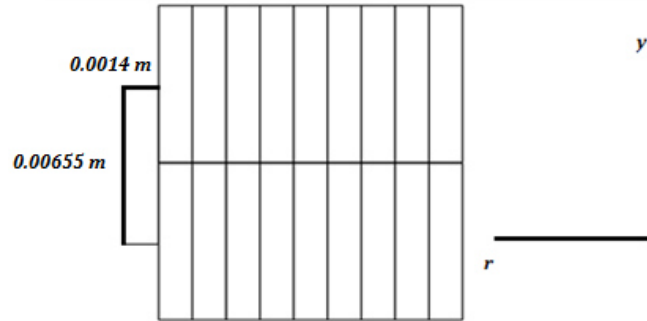


Figura 73. Espesores radiales y axiales de las láminas que conforman al conductor CTC.

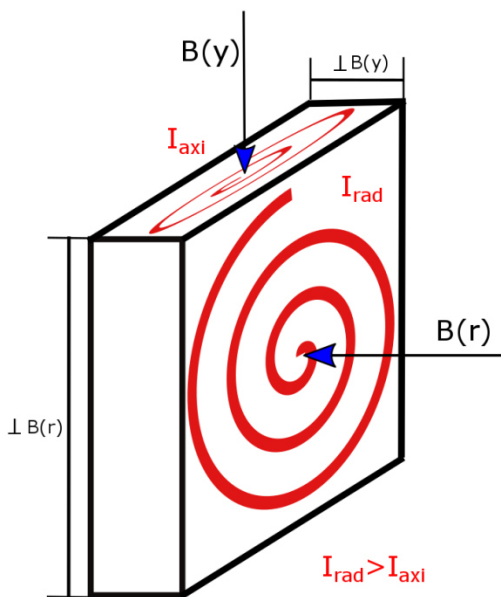
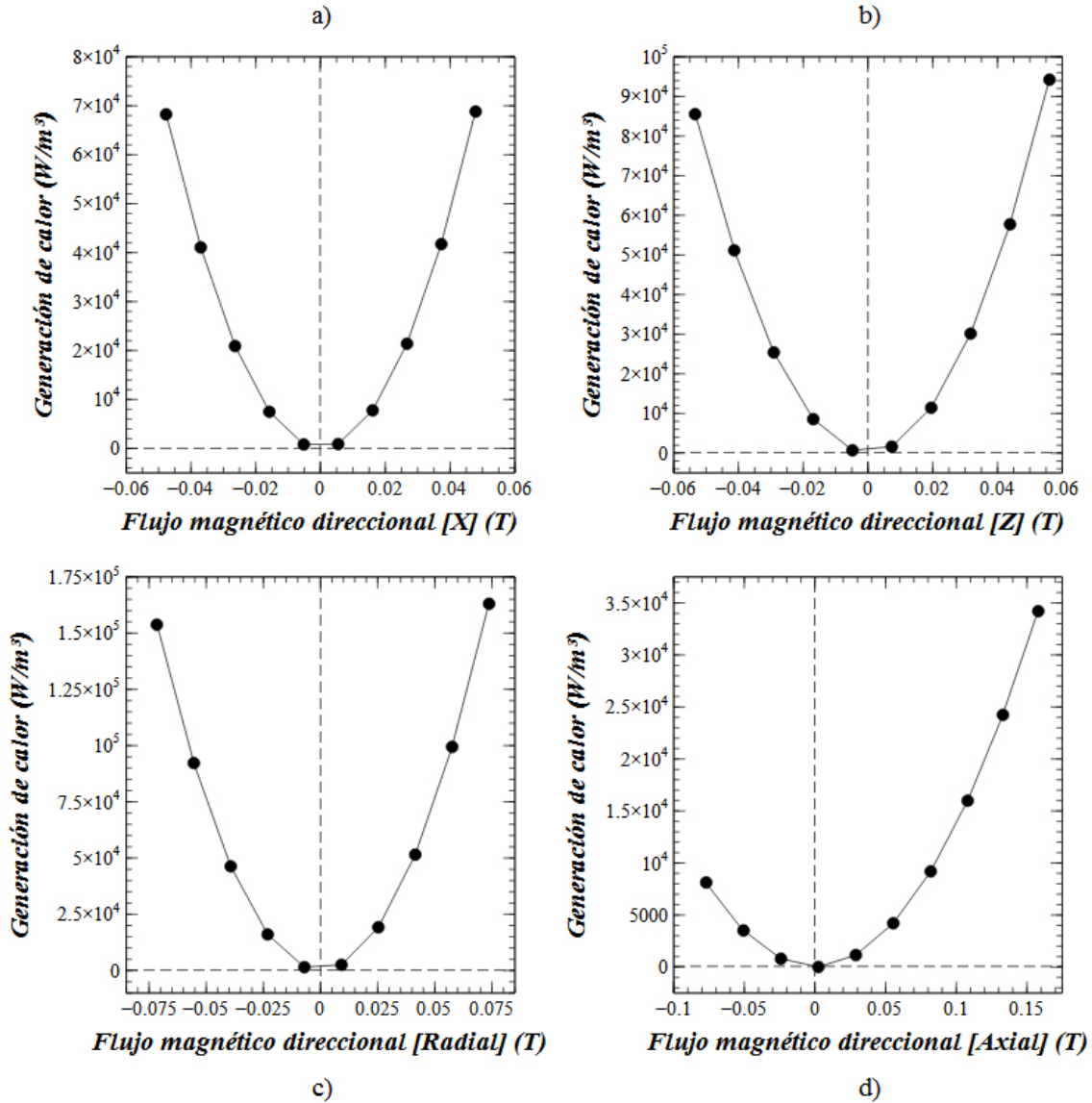


Figura 74. Corrientes de Eddy axiales y radiales inducidas en una estructura laminada. La intensidad de dichas corrientes aumenta al aumentar las dimensiones geométricas del elemento.

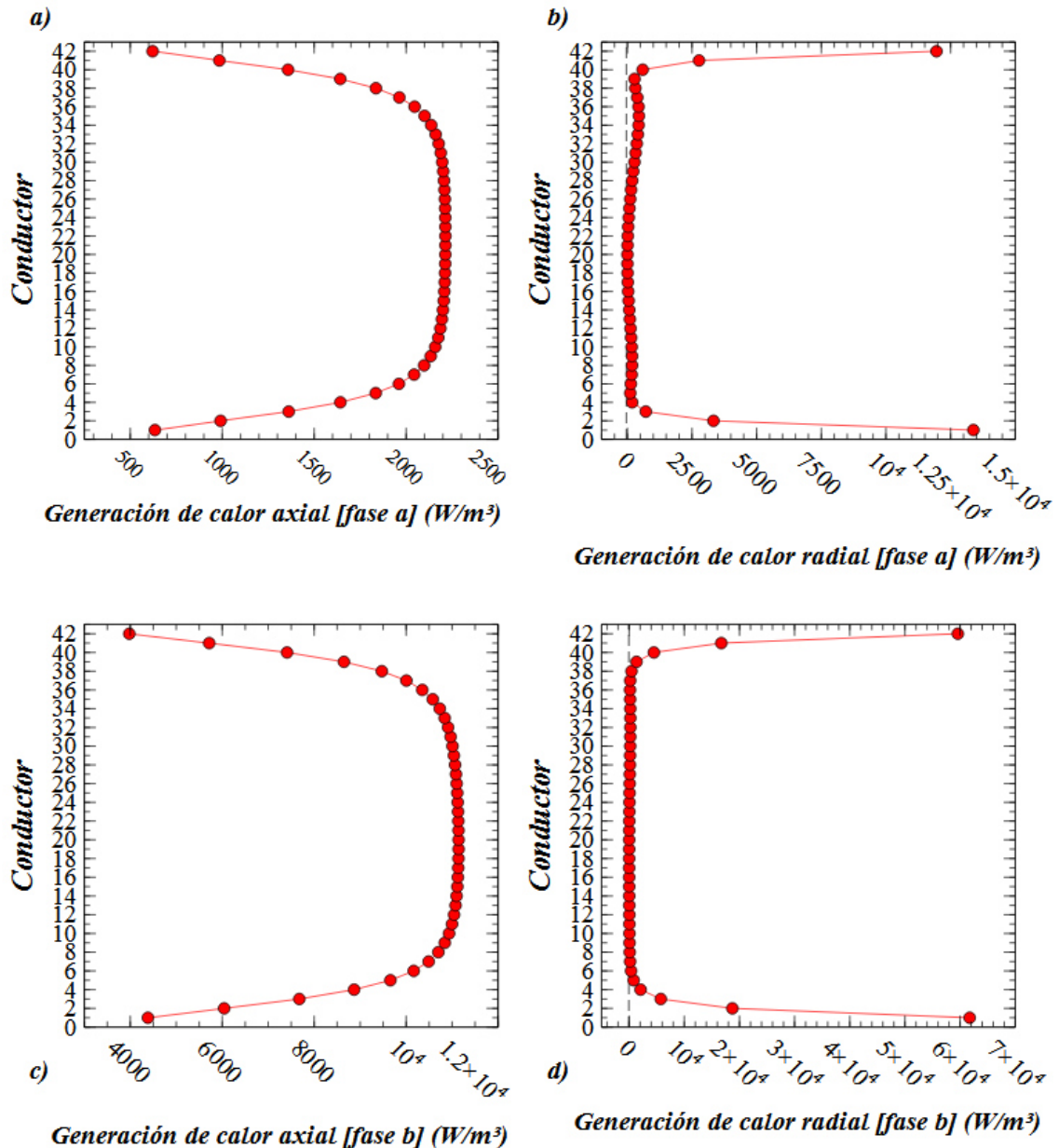




Gráfica 16. Curvas de tendencia de generación de calor. a) Componente X. b) Componente Z. c) Componente radial. d) Componente axial.

Finalmente, se presenta un perfil de generación de calor para cada uno de los conductores de las fases a y b, realizando un promedio estadístico de las tasas de generación de calor por unidad de volumen de las diez zonas de medición local de la densidad de flujo magnético. Estos se ilustran en las Gráficas 17-a), -b), -c) y -d). Las Gráficas 17-a) y -b) presentan la generación de calor por unidad de volumen para cada conductor de las componentes axial y radial, respectivamente, para la bobina de baja tensión de la fase a. Por su parte, las Gráficas 17-c) y -d) lo hacen para la bobina de baja tensión de la fase b. En ellas es posible apreciar que para las bobinas de baja tensión, las curvas son similares independientemente de la fase en la que estén posicionadas, siendo

superiores los valores en el centro de los cilindros para la generación de calor volumétrica debida a corrientes parásitas producidas por flujos magnéticos errantes en la dirección axial. Mientras que la generación de calor volumétrica producida por corrientes de *Eddy* originadas por flujos magnéticos errantes en la componente radial afecta de manera superior a los discos de los extremos, tanto superior como inferior, de las tres bobinas.



Gráfica 17. Generación de calor por unidad de volumen de los conductores de la bobina de baja tensión en componentes radial y axial para las fases a y b.

Las pérdidas totales de potencia ( $W$ ) de las bobinas de baja tensión se enlistan en la Tabla 15

### 5.5.2.2. Bobinas de alta tensión.

El procedimiento empleado en las bobinas de baja tensión es repetido en las estructuras devanadas de alta tensión. Estas estructuras, conformadas por dos grupos paralelos de 240 vueltas, con 5 capas compuestas únicamente por un conductor en la componente tanto axial como radial, poseen 17 láminas de  $1.6 \times 5 \text{ mm}$ . La forma del conductor CTC que poseen estas bobinas se muestra en la Figura 75.

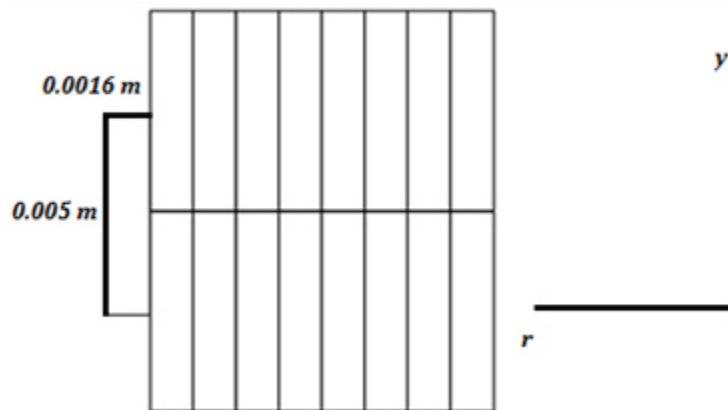


Figura 75. Espesores radiales y axiales de las láminas que conforman al conductor CTC de la bobina de alta tensión.

Las 10 líneas que se extienden a lo largo de la totalidad de la componente axial de la bobina, fueron de la misma manera las zonas de medición de la densidad de flujo magnético direccional. Para estas bobinas se realizaron mediciones en 96 puntos equidistantes, como se ilustra también en la Figura 43. Al igual que en el caso de la bobina de baja tensión, se estudiarán únicamente 2 fases: la fase a (que posee los mismos valores que la fase c) y la fase b. en las Figuras 76, 77 y 78 se ilustran los contornos de la densidad de flujo magnético direccional para las componentes  $y$ ,  $x$  y  $z$ , respectivamente.

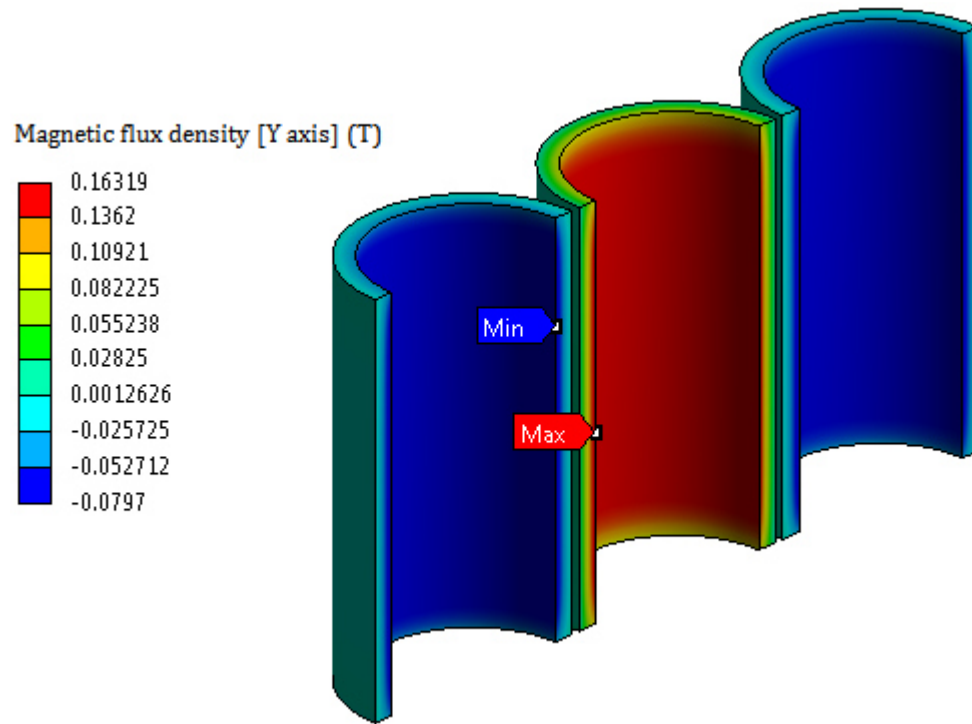


Figura 76. Contornos de la densidad de flujo magnético en el eje y (componente axial).

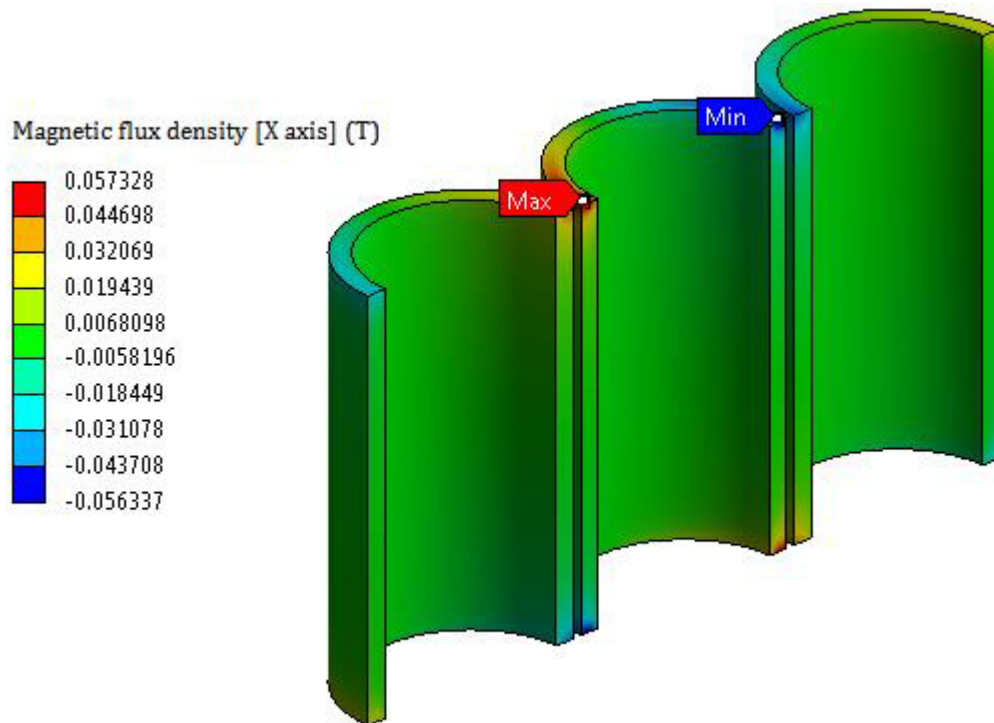


Figura 77. Contornos de la densidad de flujo magnético en el eje x.

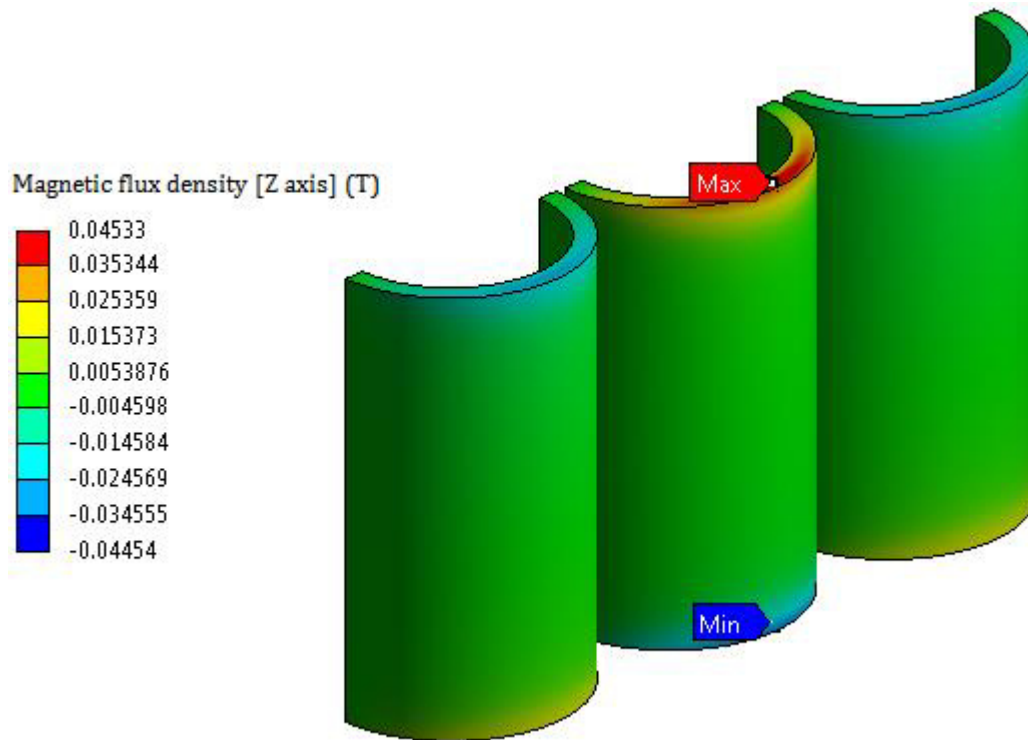
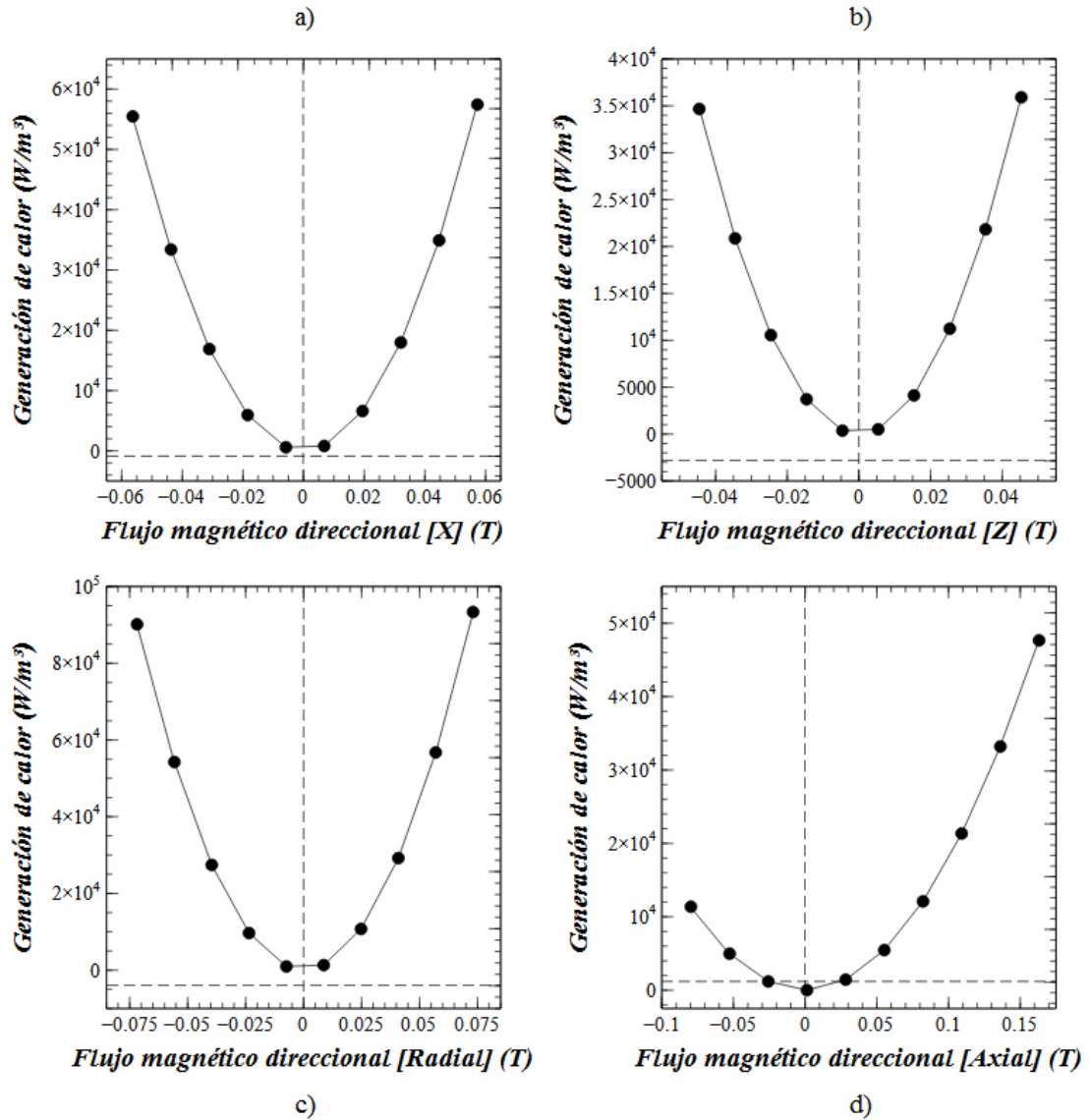


Figura 78. Contornos de la densidad de flujo magnético en el eje z.

De manera similar al caso de las bobinas de baja tensión, los contornos de la distribución direccional, en la componente  $y$ , de la densidad de flujo magnético en las bobinas de alta tensión muestra valores absolutos mayores en la fase b, siendo, axialmente, la bobina central la más afectada por las líneas errantes de campo magnético. Los valores obtenidos en las componentes  $x$  y  $z$ , muestran también tendencias similares a la baja tensión. Los extremos axiales de ambas bobinas laterales muestran, en zonas geométricas que favorecen a las líneas de campo en función de la componente radial (componente  $x$  a los extremos izquierdo y derecho de las bobinas y componente  $z$  en el punto más profundo de la misma) valores superiores con respecto al centro axial de los cilindros. Al ser los valores de  $x$  y  $z$  componentes del vector radial, es de esperarse que dicho vector posea niveles superiores pertinentes a la densidad de flujo. Evaluando los órdenes de magnitud mostrados gráficamente en los contornos anteriores y utilizando nuevamente la ecuación (5.5.2 – 1) para determinar la componente radial del vector  $\vec{B}$ , además retomando los parámetros geométricos de las bobinas de alta tensión, podemos determinar mediante las ecuaciones (4.1.4.2 – 1) y (4.1.4.2 – 2) las curvas de tendencia de generación de calor particulares para las bobinas de alta tensión del caso de estudio en función de

la densidad de flujo magnético inducida. Estas son las Gráficas 18-a), -b), -c) y -d).

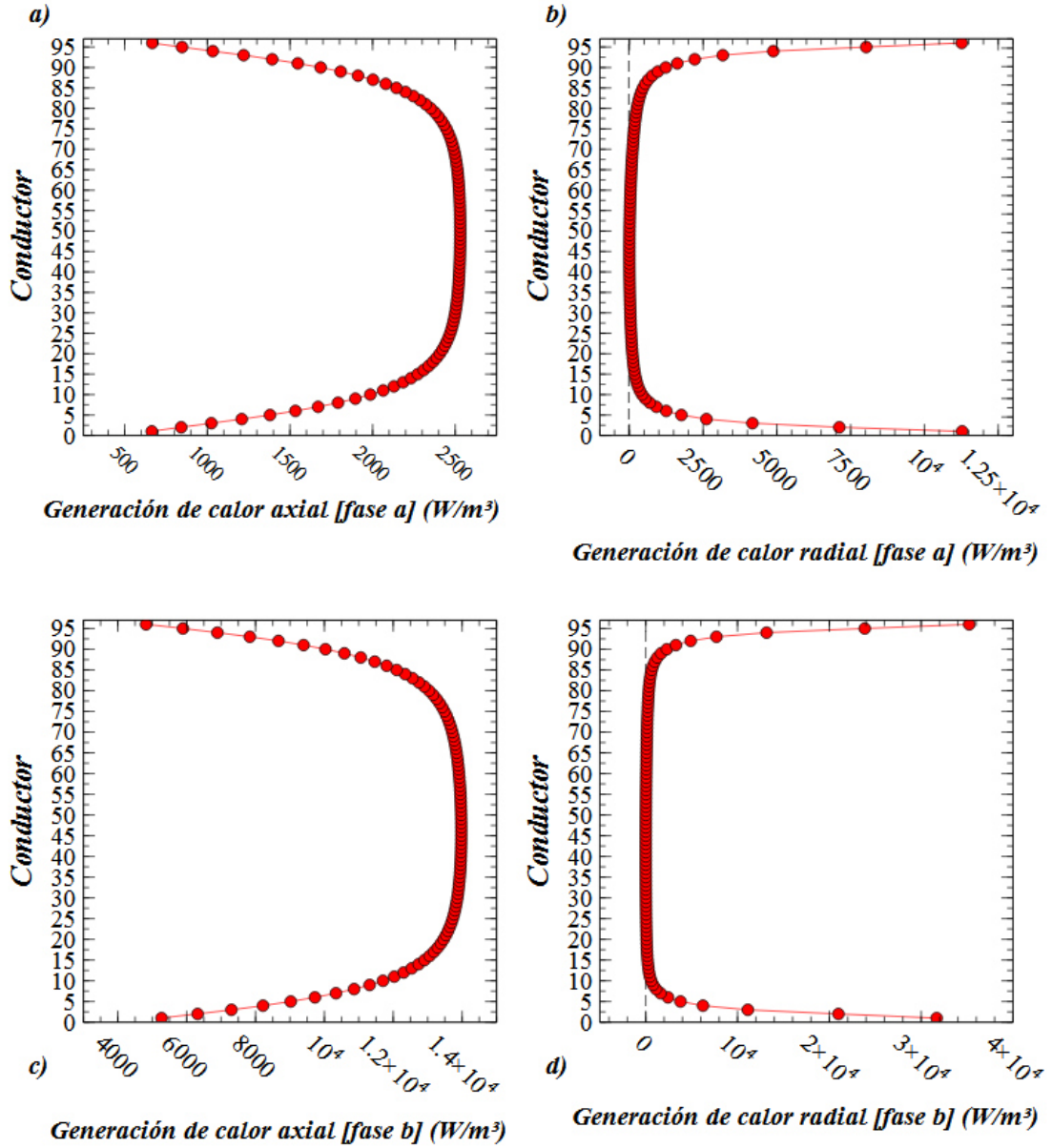


Gráfica 18. Curvas de tendencia de generación de calor. a) Componente X. b) Componente Z. c) Componente radial. d) Componente axial.

Estas Gráficas fortalecen la tendencias mostradas en el caso de la baja tensión, ratificando, de manera contundente, que al ser nuevamente el espesor perpendicular a la componente radial superior al espesor perpendicular de la componente axial, las tasas de generación volumétrica por corrientes de *Eddy* inducidas debido flujos magnéticos dispersos poseen intensidades superiores al aumentar las dimensiones geométricas de los materiales laminados (Figura 74).

La tasa de generación de calor por unidad de volumen para cada uno de los discos de las bobinas de alta tensión se ilustra en las Gráficas 19-a), -b), -c) y -d). Su cálculo fue también realizado mediante un promedio estadístico de los valores de generación de calor por unidad de volumen local en los diez grupos de puntos de medida. Estas Gráficas señalan un comportamiento similar a las bobinas de baja tensión. Las tendencias denotan mayores niveles de pérdidas en zonas longitudinalmente centrales para las líneas de campo magnético que fluyen en trayectorias axiales (Gráficas 19-a) y -c)), mientras que las líneas de flujo que abordan radialmente a las bobinas presentan niveles de calor generado superior en los extremos superior e inferior de los devanados (Gráficas 19-b) y -d)).

Los cálculos de las pérdidas totales, tanto de tipo  $I^2R$  como de *Eddy*, se muestran en la Tabla 15. En ella se aprecia el orden de magnitud total de la potencia disipada por las bobinas tanto de alta como de baja tensión, para cada una de las fases a, b y c. Las pérdidas  $I^2R$  son iguales entre las bobinas de baja tensión, de igual manera son iguales las mostradas en la alta tensión. Entre ellas varían en función del orden de magnitud de la corriente de carga según la relación de transformación que posee la máquina. Las pérdidas de *Eddy* son iguales (para el instante de tiempo  $t = 6.9141e - 003 s$ ) en las bobinas de las fases a y c ( $ATa = ATc < BTa = BTc$ ) mientras que en la fase b las pérdidas de *Eddy* son las de menor orden de magnitud ( $ATb < BTb$ ), como se aprecia en la Tabla 15. Esto debido a que para el instante de tiempo estudiado, la pierna central del núcleo posee una mayor densidad de flujo magnético que las piernas laterales, lo que da pie a una mayor dispersión de líneas de campo en las estructuras centrales.



Gráfica 19. Generación de calor por unidad de volumen de los conductores de la bobina de baja tensión en componentes radial y axial para las fases a y b.



Tabla 15. Recuento global de la potencia disipada por las bobinas.

<i>Bobina</i>	$P_{I^2R} (W)$	$P_{Eddy} (W)$	<i>Pérdidas totales [I2R+EDDY] (W)</i>
BT a	4274.07	186.59	4460.67
BT b	4274.07	919.15	5193.22
BT c	4274.07	186.59	4460.67
AT a	4979.34	298.91	5278.25
AT b	4979.34	1448.81	6428.15
AT c	4979.34	298.91	5278.25
Global	27760.246	3338.95	31099.20

La Tabla 15 engloba las pérdidas totales únicamente de la fracción simétrica de las bobinas de la máquina.

### 5.5.2. Tanque.

A pesar de ser una estructura relativamente regular (un tanque con espesores variables para las paredes frontales laterales y superior e inferior), debido a la existencia de los orificios por los cuales el fluido refrigerante fluye hacia los intercambiadores de calor exteriores, la malla no se generó con elementos de las mismas proporciones, por lo cual fue preciso postprocesar la información recabada en estas estructuras (intensidad de campo magnético) en más de un grupo de elementos por placa de la estructura. Para calcular la generación de calor por unidad de volumen que estas estructuras aportan a las pérdidas globales de la máquina, se hizo uso de la ecuación (4.1.4.3 – 1), que defiende como premisa el hecho de que es posible determinar la generación de calor por unidad de superficie en un elemento para después esta ser integrada a lo largo del espesor del mismo. Por tal motivo es necesario tanto el vector de intensidad de campo magnético en la superficie de las zonas de interés, como de la misma superficie interna que dicho elemento posee. Una vez conocida esta información, fue posible determinar el valor de  $\dot{q}$  en la fracción simétrica del tanque. Los contornos que presentan las Figuras 80 y 81 muestran los valores totales  $\vec{H}(x, y, z)$  en las estructuras laterales, superior e inferior y la placa frontal del tanque. Cabe mencionar que para determinar el calor generado del tanque, se utilizaron valores direccionales también, es decir, los valores de  $\vec{H}(x)$  y  $\vec{H}(z)$  para las placas superior e inferior,  $\vec{H}(y)$  y  $\vec{H}(z)$  para las placas laterales y por último  $\vec{H}(x)$  y  $\vec{H}(y)$  para la placa frontal como se muestra en la Figura 79, ya que el calor producido depende de las componentes tangenciales a las estructuras.

## INFORMACIÓN PROTEGIDA PROPIEDAD INTELECTUAL

Figura 79. Planos tangenciales a las superficies del tanque contenedor.

La distribución de la intensidad de campo magnético que se reporta en las Figuras 80 y 81, aún representando la sumatoria vectorial de las componentes de  $\vec{H}(x)$ ,  $\vec{H}(y)$  y  $\vec{H}(z)$ ; denota una clara intensificación de flujos magnéticos errantes en las zonas verticalmente centrales de las estructuras del tanque. En la Gráfica 20 se presenta la equivalencia de dichas líneas de campo en valores de potencia disipada por unidad de superficie únicamente para la placa frontal que, por la naturaleza de sus dimensiones, posee una mayor cantidad de potencia disipada. En la misma Gráfica podemos apreciar como en la zona de entrada de fluido proveniente de los radiadores donde el aceite baja su temperatura, existen pequeñas zonas donde las pérdidas de potencia por unidad de superficie se elevan a niveles muy superiores que el resto de la estructura, esto debido a la baja permeabilidad magnética relativa que posee el aceite con respecto a la del tanque, provocando una modificación en la trayectoria de las líneas de campo ascendentes y descendentes, manteniéndose éstas en zona de alta permeabilidad magnética  $\mu_m$ .

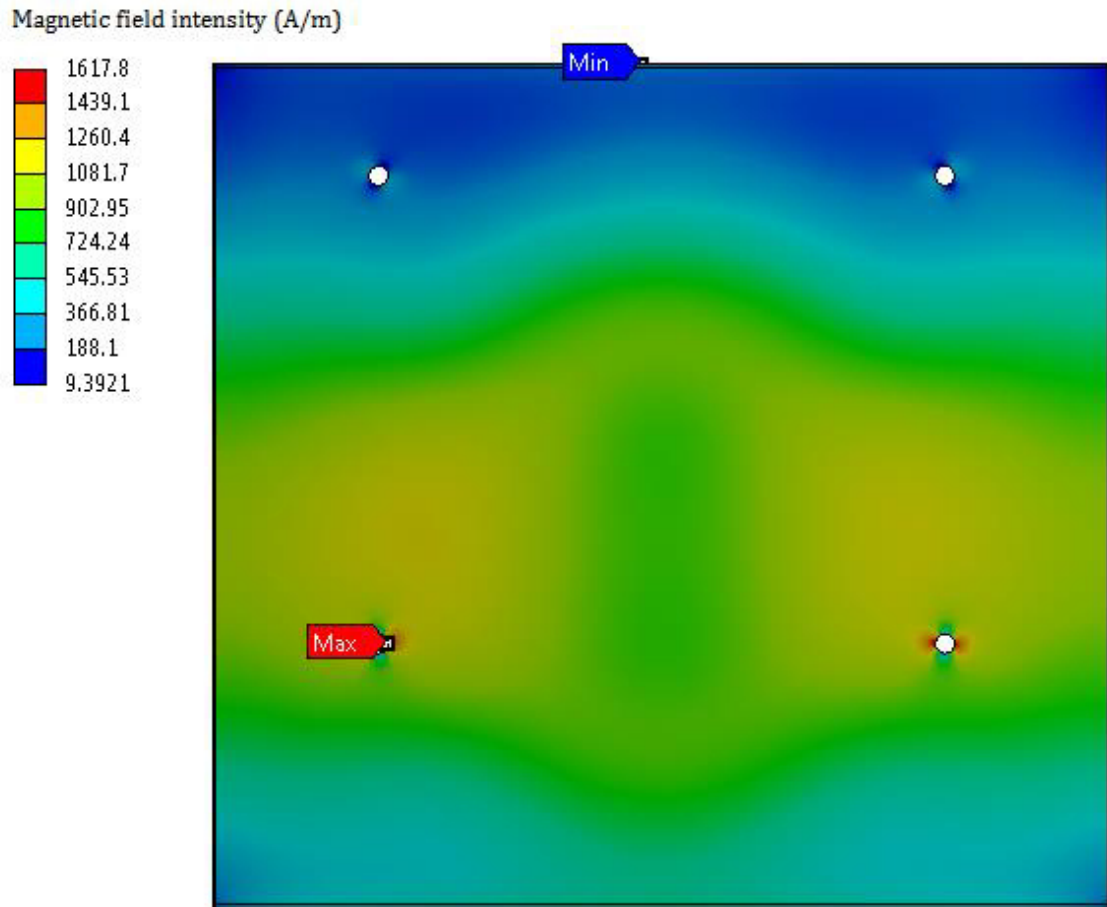


Figura 80. Distribución de la intensidad total de campo magnético en la superficie frontal del tanque contenedor.

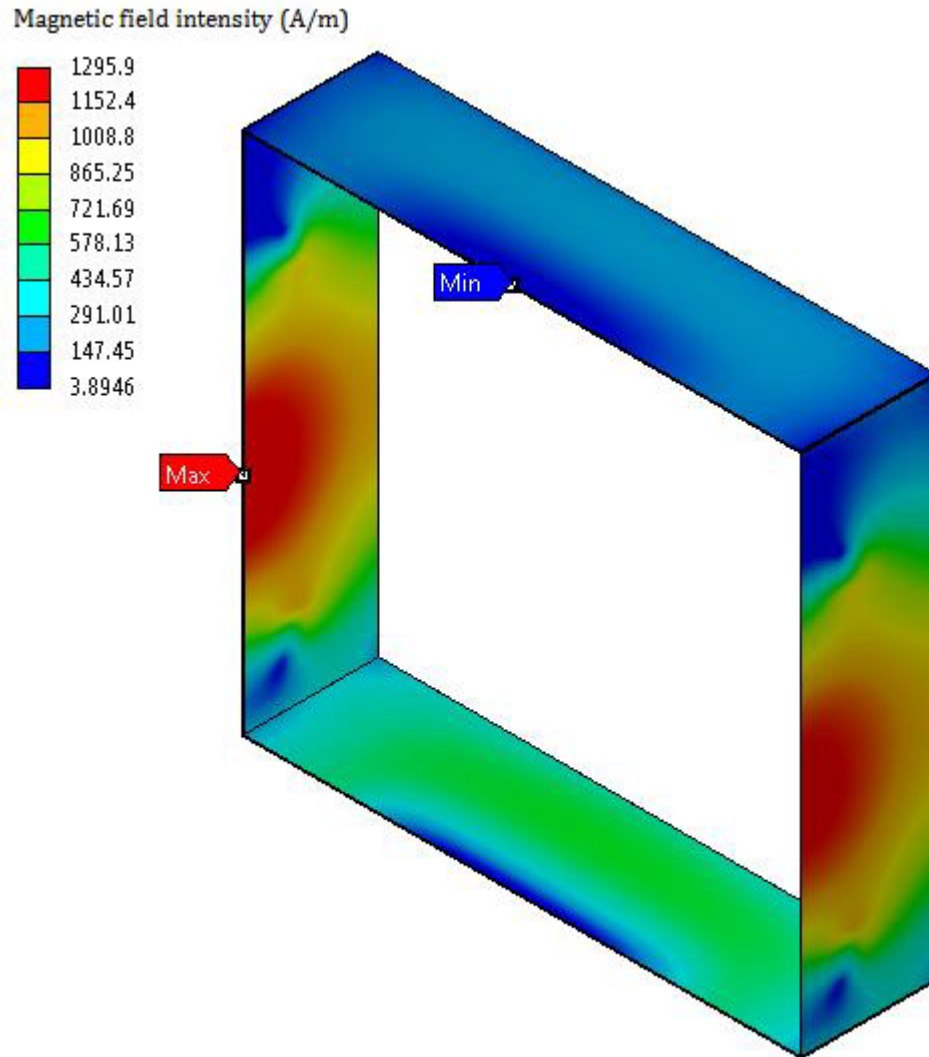
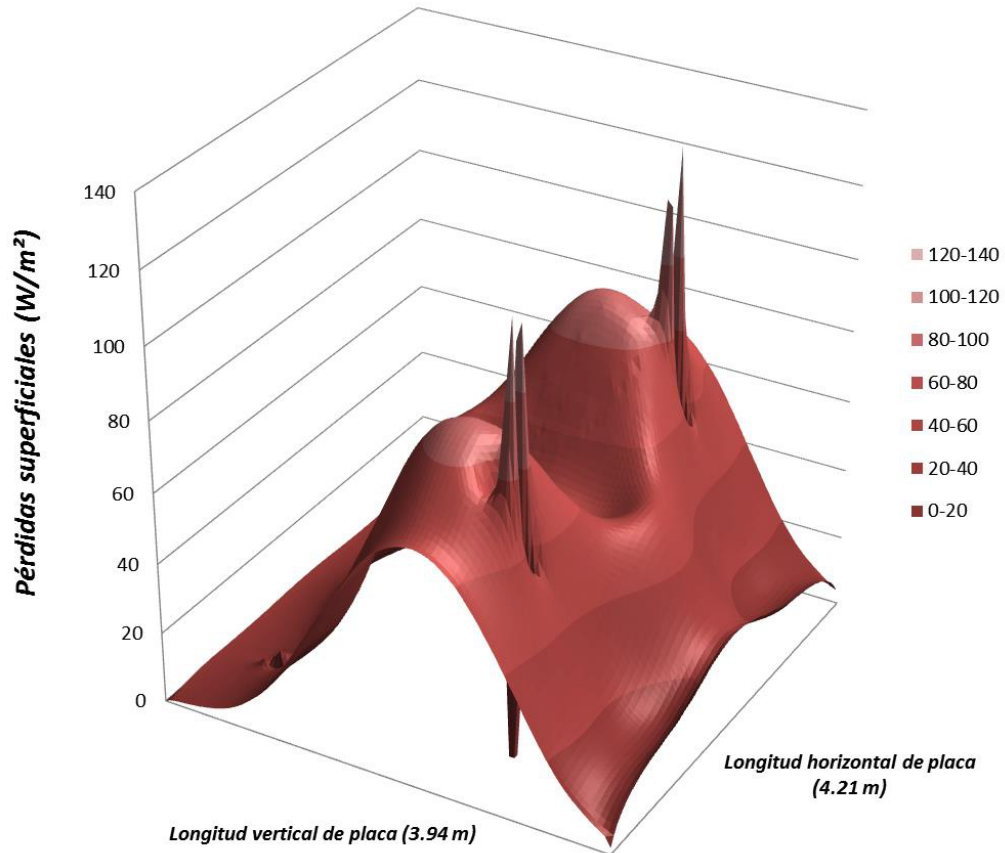


Figura 81. Distribución de la intensidad total de campo magnético en las superficies laterales, superior e inferior del tanque contenedor.

La placa frontal posee un espesor de  $0.095\text{ m}$ . En función de la superficie que cada elemento discreto posee en el espesor mencionado, al integrar el valor de la potencia disipada por unidad de superficie a lo largo de la profundidad del elemento se obtiene como resultado la potencia total disipada por cada elemento discreto. En la Tabla 16 se ilustran las pérdidas de potencia debido al calentamiento del elemento por las corrientes parásitas inducidas en función de la componente de las líneas de campo magnético que fluyen a través del tanque. En dicha tabla se contemplan las pérdidas de la fracción simétrica de la estructura del tanque, únicamente.



Gráfica 20. Pérdidas de potencia superficial en placa frontal del tanque.

Tabla 16. Recuento global de la energía generada por las paredes del tanque.

<i>Estructura</i>	<i>Espesor de placa (m)</i>	$P_{H(x)}$ (W)	$P_{H(y)}$ (W)	$P_{H(z)}$ (W)	<i>pérdidas totales (W)</i>
Placa frontal	0.0095	4.42	199.19	N/A	203.61
placas laterales	0.0079	N/A	103.74	6.78	110.52
Placas superior e inferior	0.0125	5.96	N/A	0.011	5.97
Global	-	10.38	302.93	6.79	320.10

### 5.5.3. Tirantes y Herrajes.

En lo que a estas estructuras respecta, la metodología empleada, al igual que en el caso del tanque, se basa en determinar la impedancia de superficie de cada estructura a nivel elemental para posteriormente integrar en su espesor las pérdidas superficiales obtenidas localmente. Tras el estudio numérico, al medir el vector  $\vec{H}(x, y, z)$  en cada estructura se obtuvieron las distribuciones de campo como se muestra en las Figuras 82 y 83. La medición de  $\vec{H}(x, y, z)$  en los tirantes verticales no se realizó en esta ocasión separando las componentes ya que debido a la zona geométrica donde se encuentra, las componentes de  $\vec{H}(x)$  y  $\vec{H}(z)$  resultan despreciables puesto que reposan en una zona donde el flujo magnético posee una dirección forzosamente en ascenso o descenso. En el caso de los herrajes horizontales si se utilizaron las componentes que resultan tangenciales a las superficies de las mismas. Para fines prácticos se muestran los valores totales tanto de  $\vec{H}(x, y, z)$  como de  $\dot{q}$  en las estructuras.

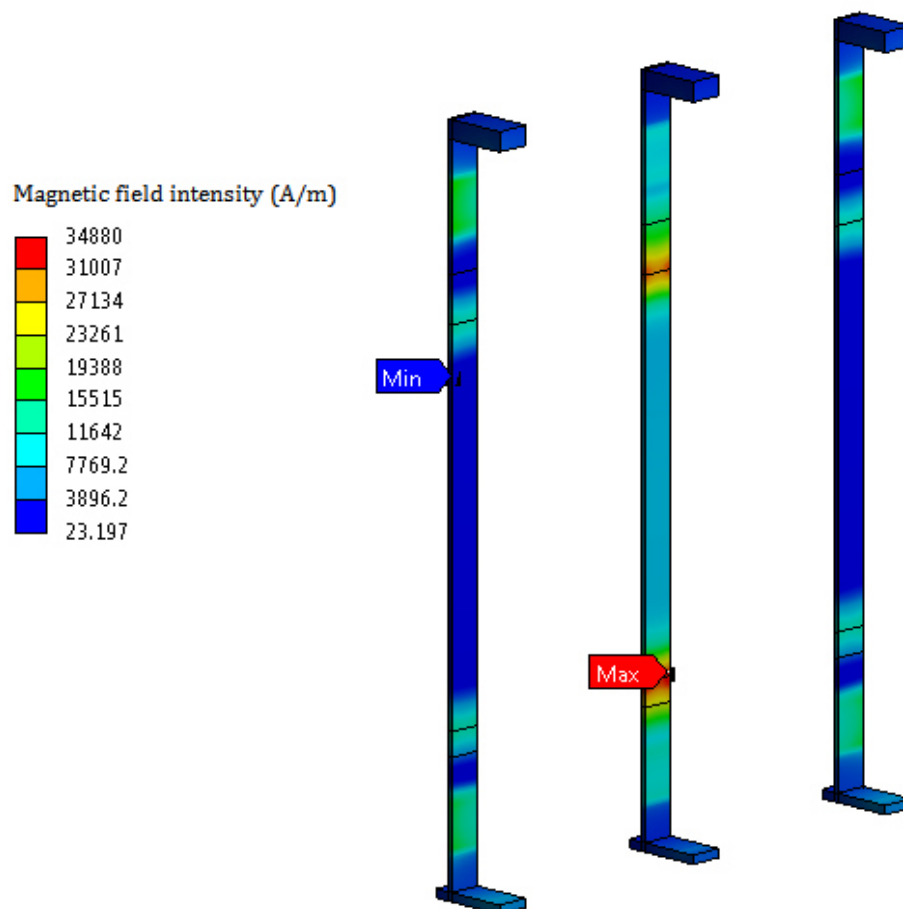


Figura 82. Distribución de la intensidad total de campo magnético en los tirantes.

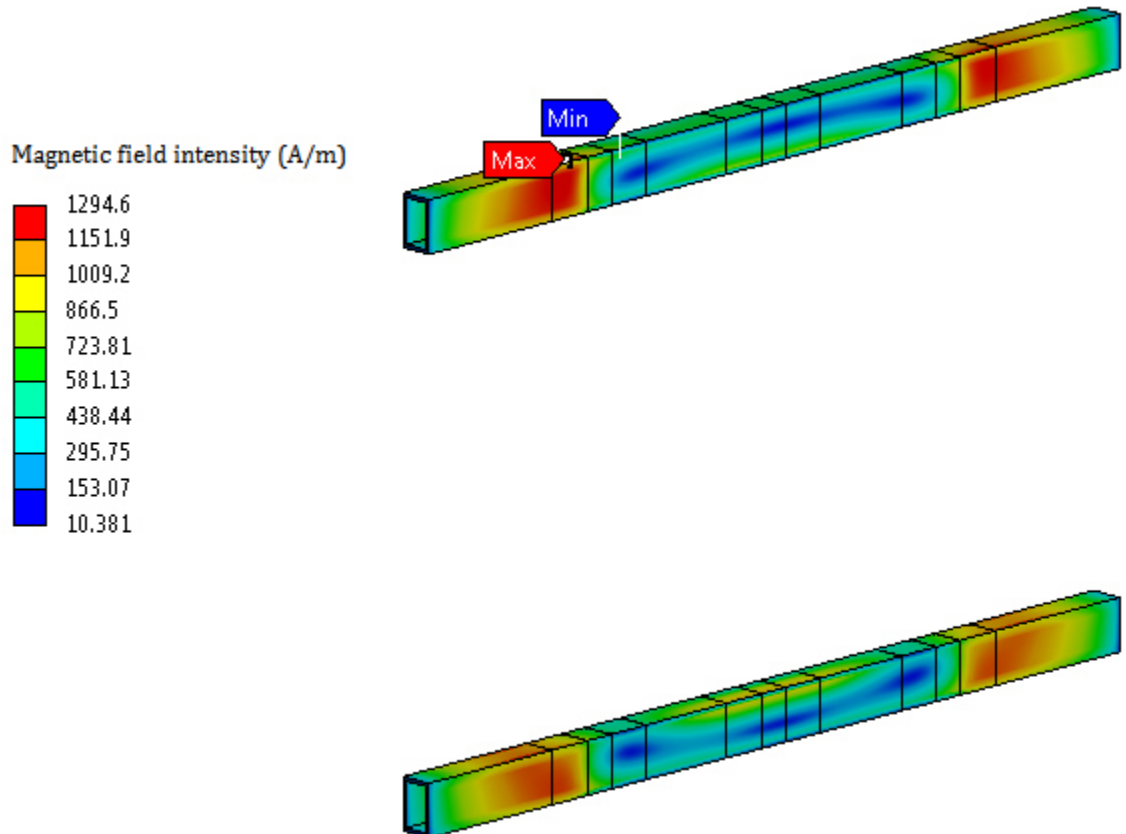


Figura 83. Distribución de la intensidad total de campo magnético en los herrajes.

En función de la distribución de campo magnético obtenida en cada uno de los elementos discretos y retomando los parámetros geométricos de las estructuras para determinar las superficies perpendiculares a través de las cuales se ha de integrar el valor de la impedancia superficial de cada elemento, se estimó el valor de las pérdidas totales en las estructuras en función de la ecuación (4.1.4.3 – 1). Para los herrajes, representados como barras huecas de espesor constante en las cuatro placas que lo componen, la superficie característica resultó de un valor invariante  $S_{int} = 0.00029 \text{ m}^2$  mientras que para los tirantes se utilizaron 3 superficies características dependiendo de la zona de estudio. En la Figura 84 se aprecia como los tirantes poseen 3 espesores distintos clasificados como superior, medio e inferior. La parte superior, con componentes tangenciales en  $x$  y  $z$  mide perpendicularmente a este plano  $0.084 \text{ m}$ ; el espesor medio, perpendicular al eje  $x$  así como al eje  $y$ , mide  $0.017 \text{ m}$  y finalmente el espesor inferior, perpendicular al plano formado por los ejes  $x$  y  $z$ , nuevamente, mide  $0.038 \text{ m}$ . Las superficies para cada uno de ellos fueron variables en función de ciertos cortes realizados al modelo CAD para

facilitar el procedimiento de mallado (al igual que en la placa frontal del tanque donde se originan los orificios por los que el fluido circula a los radiadores) por lo cual hubo mucha diversidad en el parámetro de superficie interna  $S_{int}$  en estas dos estructuras.

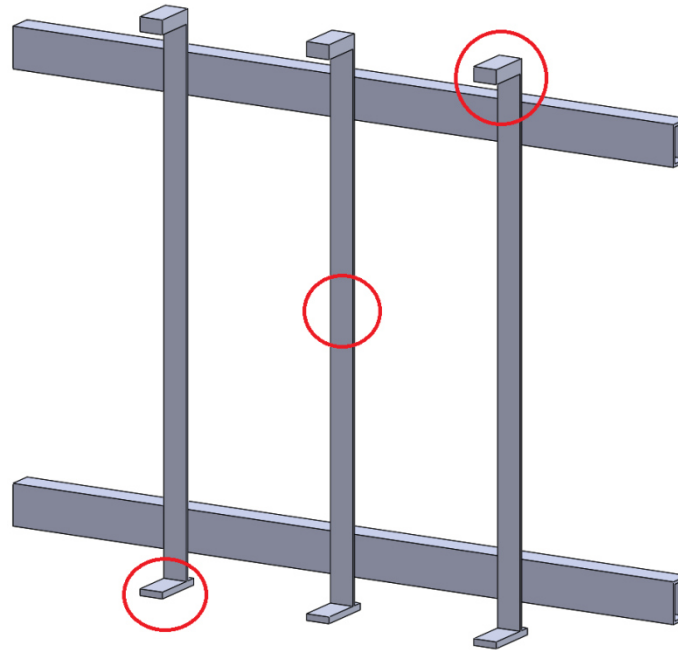


Figura 84. Espesores variables en los tirantes de la máquina.

En la Tabla 17 se presentan los resultados de las pérdidas de potencia totales por corrientes de *Eddy* inducidas en la fracción simétrica de estas estructuras.

Tabla 17. Recuento global de la energía generada por las estructuras que dan soporte al núcleo.

<i>Estructura</i>	$P_{H(x)}$ (W)	$P_{H(y)}$ (W)	$P_{H(z)}$ (W)	<i>pérdidas totales</i> (W)
Tirante	0.37	255.99	817.32	2147.38
Herraje	73.67	6.41	23.87	207.88
Global	74.04	262.4	841.2	1177.63

Las pérdidas de potencia debidas a corrientes de *Eddy* que fluyen en materiales ferromagnéticos en presencia de campos electromagnéticos



temporalmente variables, calculadas mediante las ecuaciones propuestas y el estudio previamente planteado, nos permite sumarizar el comportamiento del transformador trifásico de potencia caso de estudio, bajo operación nominal en un instante de tiempo  $t = 6.9141e - 003 s$  en la Tabla 18.

Tabla 18. Pérdidas de potencia en Fracción simétrica del transformador.

<b>PÉRDIDAS EN ELEMENTOS [Dominio simétrico de estudio] (kW)</b>						
NÚCLEO	BOBINAS		TIRANTES	HERRAJES	TANQUE	TOTAL
	EXTRAÑAS	$I^2R$				
2.465	3.339	27.760	1.074	0.104	0.320	35.062

Tomando en consideración el hecho de que la fracción de la máquina utilizada para el estudio corresponde a una sección simétrica, podemos extrapolar los resultados al dominio completo como se presenta en la Tabla 19

Tabla 19. Pérdidas de potencia extrapoladas al transformador completo.

<b>PÉRDIDAS EN ELEMENTOS (kW)</b>						
NÚCLEO	BOBINAS		TIRANTES	HERRAJES	TANQUE	TOTAL
	EXTRAÑAS	$I^2R$				
4.93	6.678	55.52	2.147	0.208	0.64	70.124

En base a la Tabla 19 de pérdidas totales de la máquina completa, se plantea un valor de eficiencia electromagnética de la máquina como se muestra en la Tabla 20.

Tabla 20. Eficiencia de operación de la máquina.

$P_{in}$ TRAFO. (kW)	$P_{out}$ TRAFO. (kW)	EFICIENCIA (%)
50,000	49,929.876	99.86

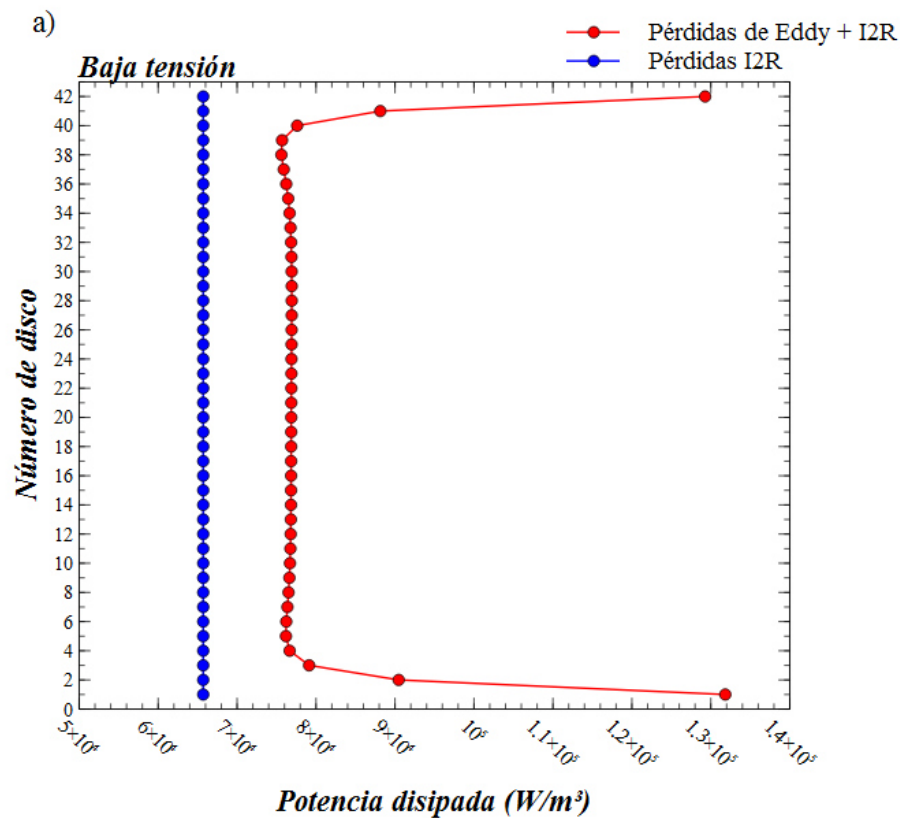
## 5.6. Resultados del caso de estudio termohidráulico.

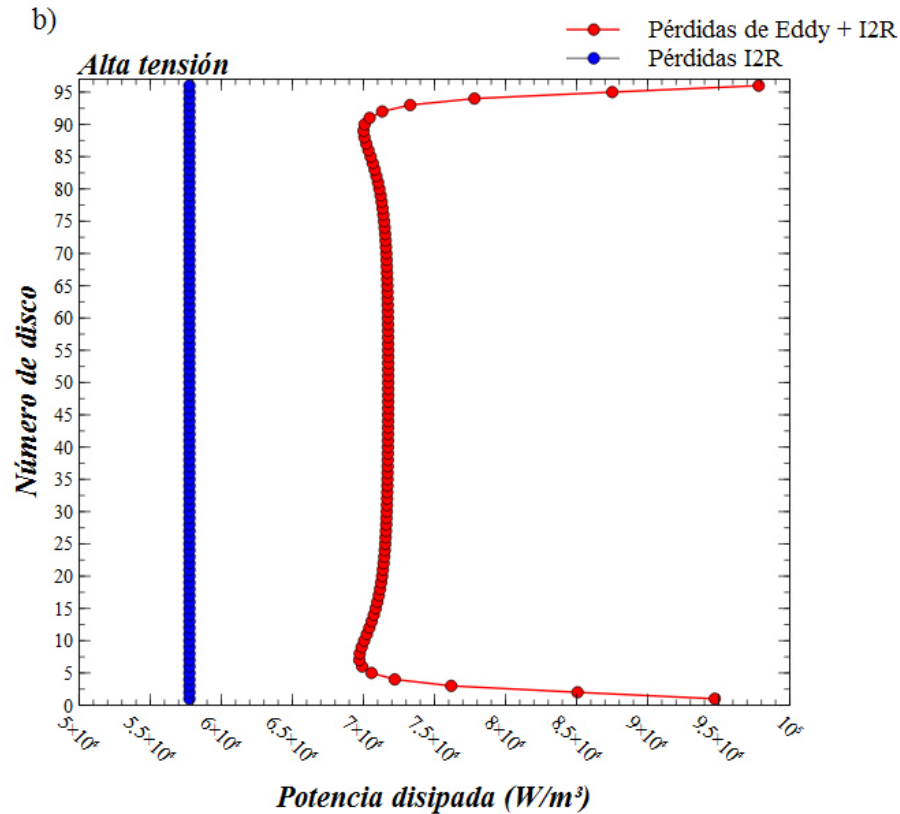
Como se indicó al inicio de este capítulo, se presenta el proceso termofluidodinámico que se suscita en el interior del paquete de bobinas de baja y alta tensión. Los esfuerzos fueron enfocados en obtener tanto los campos de velocidad como los perfiles de temperatura de las bobinas, despreciando el calor que entra o sale de dichos cuerpos. La intención general fue conocer el aumento de temperatura en los conductores así como las velocidades y flujo de fluido en los canales verticales y horizontales de la máquina, como parte de una estrategia para facilitar la previsión de puntos calientes debido tanto a fenómenos electromagnéticos como a zonas de estancamiento y altas caídas de presión en los canales. Este estudio comienza por realizar una comparativa entre la distribución de temperatura y el campo de velocidades que producen las pérdidas generadas únicamente por la corriente de carga que fluye a través de los devanados contra los mismos resultados cuando son incluidas las pérdidas extrañas originadas por corrientes de *Eddy*; con el fin de formar un criterio acerca de la relevancia de éstas últimas. Finalmente, se muestra una comparativa, haciendo uso de números adimensionales, entre las velocidades del fluido en las zonas de temperatura más elevada en cada uno de los pases como una estrategia para determinar la naturaleza del flujo de fluido a lo largo de la red de canales de enfriamiento que las bobinas devanadas poseen.

### 5.6.1. Términos fuente.

Para ejecutar el estudio, fue previamente necesario determinar las pérdidas ocurrientes en los devanados de una máquina de estas proporciones. Sabemos que dichas pérdidas se dividen entre pérdidas por corriente de carga  $P_{I^2R}$  y pérdidas extrañas  $P_{Eddy}$ . Los términos fuente de calor utilizados para el estudio que a continuación se da a conocer fueron determinados mediante el análisis electromagnético; seleccionando como objetivo a modelar, los resultados originados en el paquete central de bobinas de alta tensión (fase b). La decisión de optar por estos resultados y no por los de las fases vecinas radica en que es en esta donde se reportaron los niveles de potencia disipada superiores para el intervalo de tiempo característico que se estudió. Dichos términos fuentes se muestran en las Gráficas 21-a) y -b). Estas gráficas presentan los términos fuentes empleados para cada uno de los casos de estudio; el eje  $x$  denota la tasa de generación de calor por unidad de volumen mientras que el eje  $y$  representa el disco de cobre en un conteo ascendente de las vueltas de conductor que posee la bobina. La función azul (pérdidas homogéneas) se evaluará en el caso de estudio de pérdidas  $I^2R$  solamente, mientras que la función roja indica la sumatoria de las pérdidas totales de los devanados, estas

son  $P_{I^2R} + P_{Eddy\_Radiales} + P_{Eddy\_Axiales}$ , en un mismo valor puntual dependiente de la posición (altura) en la que se encuentre ubicado el conductor. La Gráfica 21-a) posee la información de la bobina de baja tensión para ambas capas, por su parte la Gráfica 21-b) presenta la información enfocada a la bobina de alta tensión. Estos valores fueron indicados en los casos de estudio mediante el uso de funciones definidas por usuario (UDF por sus siglas en inglés) para agilizar su inclusión. Como se aprecia en dichas Gráficas, las pérdidas por corrientes de carga  $I^2R$  son constantes a lo largo de toda la bobina, por su parte las de tipo  $I^2R + Eddy$  son coherentes a las que resultaron del estudio previo.





Gráfica 21. a) Términos fuente para bobinas de baja tensión. b) Términos fuente para bobinas de alta tensión.

### 5.6.2. Pérdidas $I^2R$ .

Una vez discretizado el modelo CAD del caso de estudio, con las condiciones de frontera adecuadas planteadas y utilizando como término de generación de calor volumétrica los resultados mostrados en la Gráficas 21-a) y -b) para la bobina de baja tensión y alta tensión, respectivamente, se planteó el primer caso de estudio el cual obedece a las pérdidas  $I^2R$  únicamente (función azul). La Figura 85 presenta los perfiles de temperatura obtenidos a lo largo del paquete de bobinas en general y particularmente en la zona más caliente de los devanados.

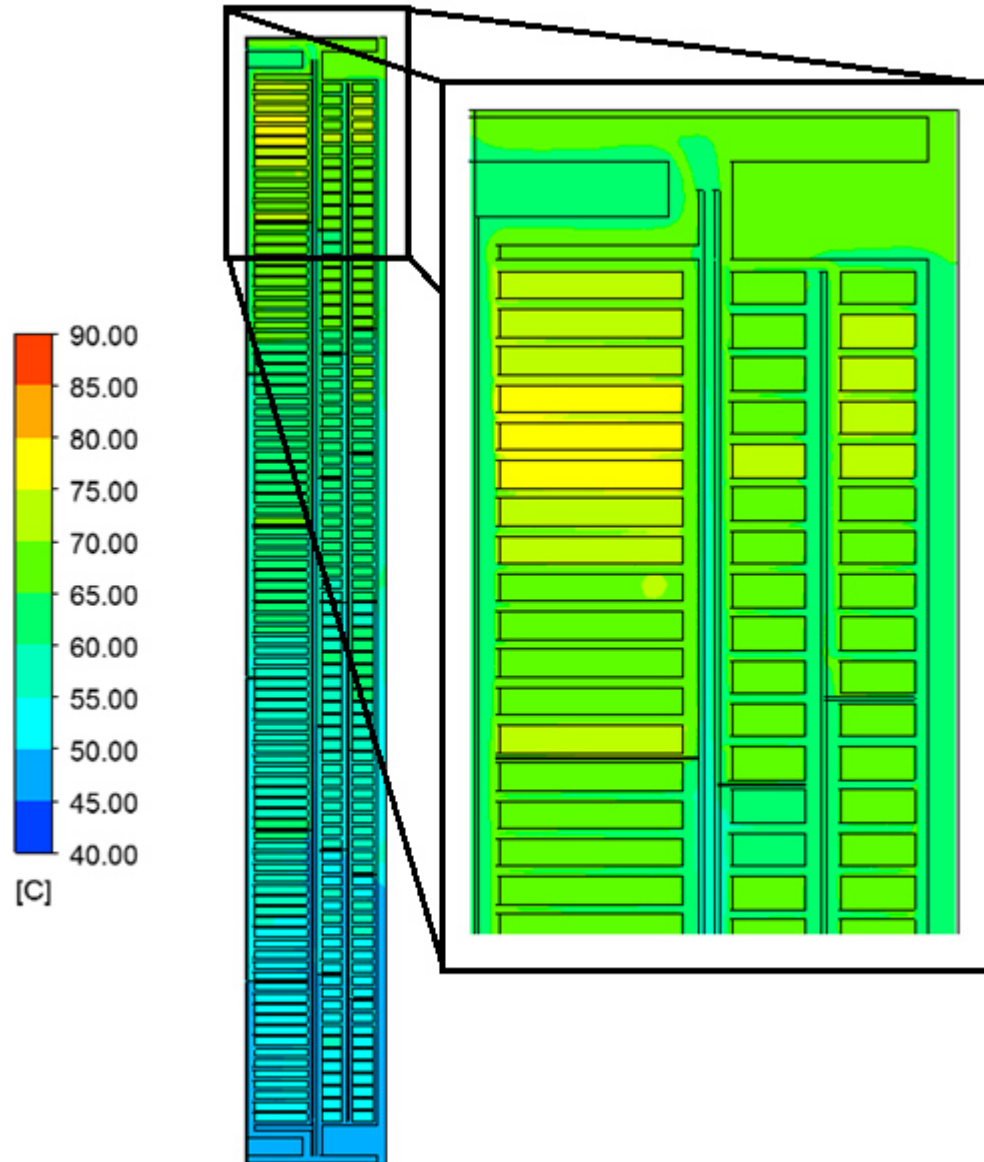


Figura 85. Contornos de temperatura en paquete de bobinas bajo parámetros  $I^2R$ .

La Figura 85 ubica el punto más caliente del cobre para los devanados de alta tensión en el disco número 92 (pase 7, disco 9) con una temperatura de  $77.97^{\circ}\text{C}$ . Por su parte los devanados de baja tensión; en la capa interna (columna diestra) aparece en el disco número 81 (pase 8, disco 7) con una temperatura de  $73.27^{\circ}\text{C}$  y en la capa externa (columna siniestra) se ubica en el disco número 80 (pase 8, disco 8) con una temperatura de  $70.27^{\circ}\text{C}$ . Las temperaturas, tanto promedio como de puntos calientes para cada uno de los pases se pueden apreciar en las Tablas 21, 22 y 23. En dichas tablas también se observa el incremento de temperatura ( $\Delta T$ ) que existe para cada uno de los

pases, tomando como referencia la temperatura promedio de los discos en comparación con la temperatura del aceite en la salida del pase que engloba a dichos conductores.

Tabla 21. Concentrado de temperaturas en baja tensión capa 1.

<b>Baja tensión Capa 1</b>					
Pase	$T_{oil\_salida}$ (°C)	$T_{avg\_discos}$ (°C)	$\Delta T$ (°C)	$T_{HS}$	Ubicación Hot Spot
1	49.55	53.57	4.02	55.08	Disco 9
2	51.89	54.88	2.99	55.81	Disco 7
3	54.28	57.08	2.8	58.19	Disco 7
4	57.06	60.41	3.35	62.94	Disco 8
5	59.87	62.73	2.86	64.69	Disco 8
6	62.03	64.84	2.81	66.12	Disco 7
7	64.22	66.86	2.64	68.6	Disco 6
8	66.52	69.92	3.4	73.27	Disco 7
Global	66.52	61.29	—————	73.27	Disco 81

Tabla 22. Concentrado de temperaturas en baja tensión capa 2.

<b>Baja tensión Capa 2 (b)</b>					
Pase	$T_{oil\_salida}$ (°C)	$T_{avg\_discos}$ (°C)	$\Delta T$ (°C)	$T_{HS}$	Ubicación Hot Spot
1	49.83	53.21	3.38	55.25	Disco 7
2	52.21	54.82	2.61	57.04	Disco 5
3	54.36	57.06	2.7	58.53	Disco 7
4	56.57	59.21	2.64	60.31	Disco 6
5	58.64	61.23	2.59	62.27	Disco 7
6	60.86	63.44	2.58	64.48	Disco 6
7	62.94	65.54	2.6	66.59	Disco 7
8	65.87	67.97	2.1	70.28	Disco 8
Global	65.87	60.31	—————	70.28	Disco 80

Tabla 23. Concentrado de temperaturas en alta tensión.

<i>Alta tensión</i>					
Pase	$T_{oil\_salida}$ (°C)	$T_{avg\_discos}$ (°C)	$\Delta T$ (°C)	$T_{HS}$	Ubicación Hot Spot
1	49.69	52.74	3.05	53.71	Disco 5
2	52.53	55.96	3.43	62.01	Disco 14
3	53.39	58.02	4.63	62.73	Disco 1
4	58.24	61.28	3.04	64.46	Disco 14
5	60.99	63.51	2.52	66.26	Disco 1
6	63.81	66.79	2.98	69.83	Disco 14
7	66.15	72.77	6.62	77.98	Disco 9
Global	66.15	61.58	—————	77.98	Disco 92

Estos valores de temperatura son el producto de proceso de transferencia de calor, predominantemente convectivo, que toma lugar debido al flujo del fluido refrigerante a través de todos los canales. La Figura 86 presenta los contornos del campo de velocidades de la sección angular estudiada de manera general y particularmente las velocidades que el fluido alcanza en la zona donde el dominio comienza, al centro del paquete de bobinas y finalmente en la zona superior donde el fluido abandona la zona de los devanados. El aceite entra al volumen de control a una velocidad constante de  $0.03 \text{ m/s}$ ; justo en la zona de la bifurcación de los canales se dividen entre la entrada a la bobina de alta tensión, al canal central y a los de baja tensión, se presenta una zona de aumento de velocidad que asciende a los  $0.058 \text{ m/s}$ . La velocidad de entrada a cada uno de los ductos principales de alimentación de fluido es de  $0.031 \text{ m/s}$  para el ducto vertical de alta tensión que posee un área de  $0.000658 \text{ m}^2$ . La velocidad del fluido a través del canal vertical que alimenta a ambas capas de la bobina de baja tensión, con un área de  $0.000278 \text{ m}^2$ , es de  $0.0491 \text{ m/s}$ . En las inmediaciones longitudinales de la bobina, para la zona de alta tensión a la entrar al pase 4 por el canal interno, con un área de  $0.000344 \text{ m}^2$ , el fluido alcanza una velocidad de  $0.0592 \text{ m/s}$ , mientras que para los canales de entrada de fluido a los pases 5 de ambas capas de la bobina de baja tensión (ambos canales externos), con áreas de  $0.000254 \text{ m}^2$  y  $0.000278 \text{ m}^2$  en la capa 1 y 2, respectivamente, las velocidades ascienden a  $0.0246$  y  $0.0247 \text{ m/s}$ . En la zona superior se registran velocidades de  $0.031$  y  $0.0466 \text{ m/s}$  en la salida de los canales de alta tensión y baja tensión respectivamente. Las variaciones de la velocidad del fluido suceden debido a las variaciones del diámetro hidráulico que existen entre los ductos verticales, recordando que al tratarse de una fracción periódica angular, existe un aumento en el área de los canales con forme se avanza en dirección opuesta al origen. La importancia de los canales

horizontales radica en permitir que el flujo circule también horizontalmente entre los conductores, por lo cual se determinó la fracción porcentual de flujo de fluido que circula a través de cada uno de estos canales a lo largo de todos los pases para el paquete de bobinas. Estos resultados se aprecian en las Tablas 24, 25 y 26.

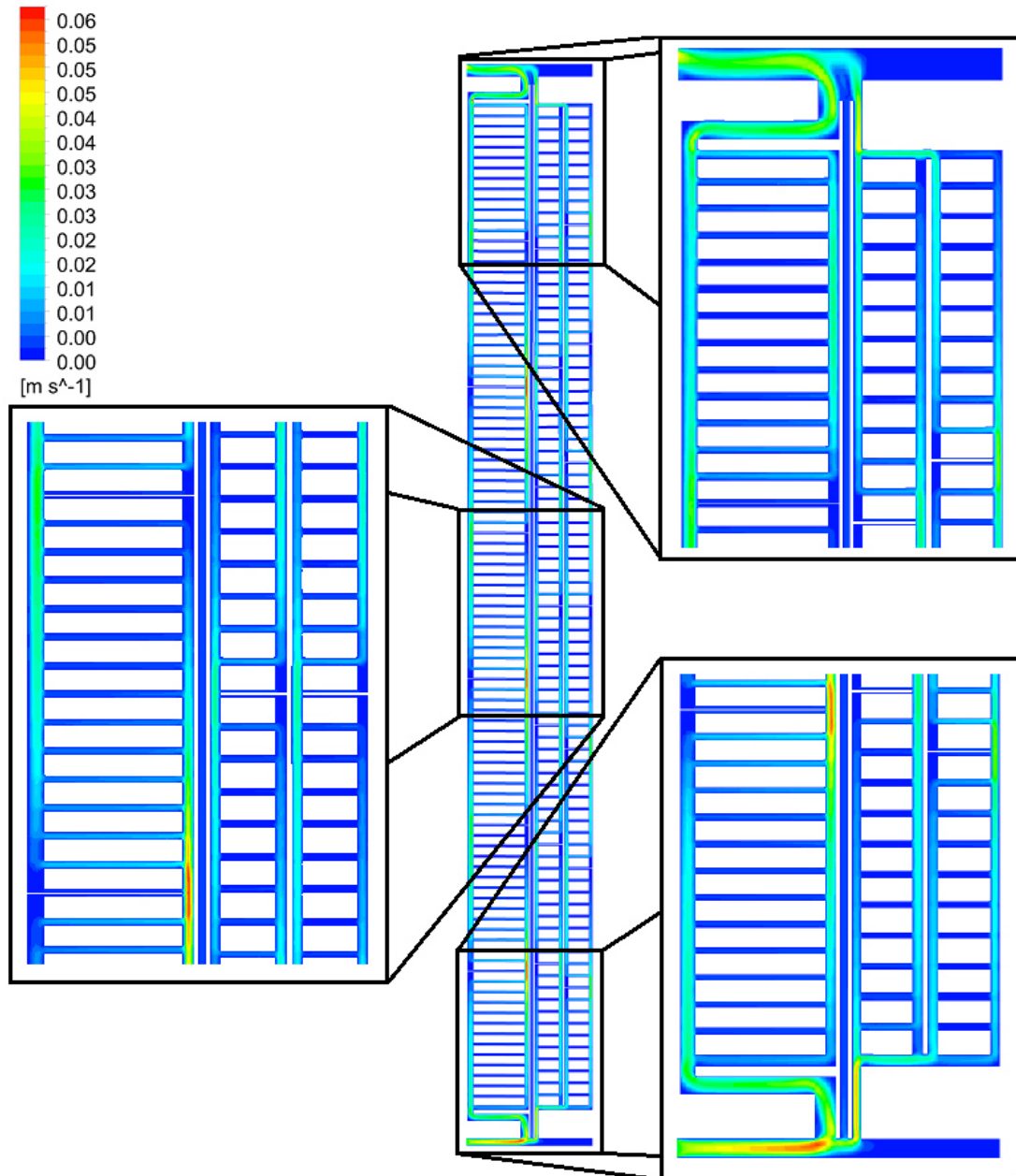


Figura 86. Campo de velocidades en paquete de bobinas bajo parámetros  $I^2R$ .



El flujo másico que se presenta en los encabezados de cada una de las Tablas 24, 25 y 26 representa el flujo que entra en la separación de los canales de baja y alta tensión mostrados en la Figura 87 (la zona inferior). Para la entrada del volumen de control de baja tensión se considera un mismo flujo másico de referencia  $0.00802 \text{ kg/s}$  con el cual se aproximaron los porcentajes correspondientes para cada canal horizontal. Al canal de alta tensión ingresa un flujo másico de  $0.01174 \text{ kg/s}$ . El flujo másico total que entra a la red hidráulica del paquete de bobinas es de  $0.021073 \text{ kg/s}$ , finalmente se presenta un flujo en el canal que separa los devanados de baja y alta tensión de  $1.313 \times 10^3 \text{ kg/s}$ .

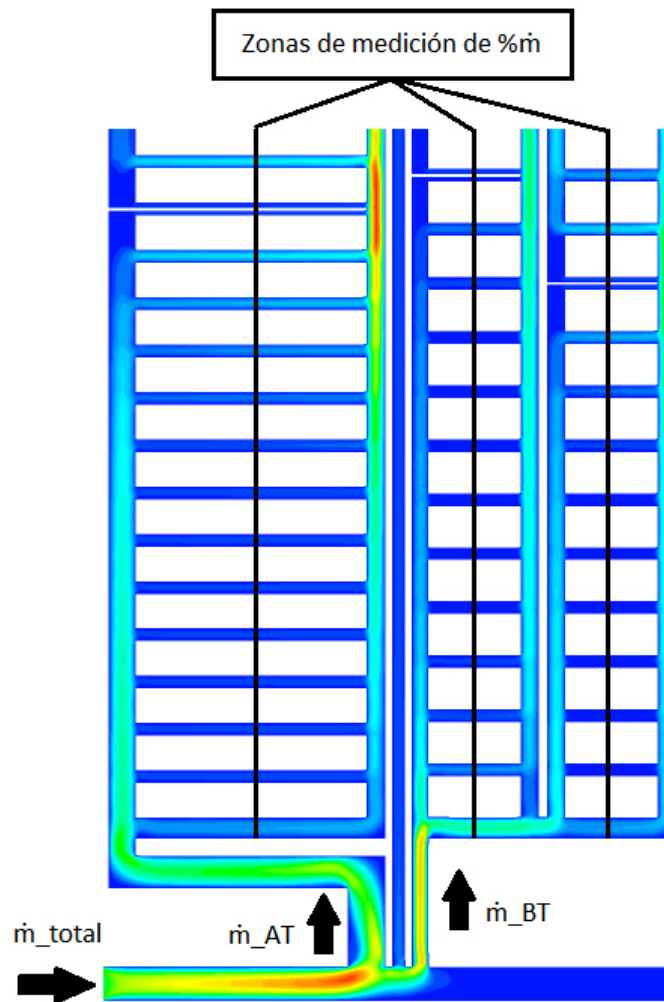


Figura 87. Flujos másicos de entrada a los canales principales.

Tabla 24. Porcentajes de flujo de fluido que circulan por cada uno de los canales horizontales de la capa 1 de la bobina de baja tensión.

<i>Tasa de flujo de fluido en capa 1 de BT respecto a entrada (<math>\dot{m} = 0.00802 \text{ kg/s}</math>) [%]</i>								
<i>Canal</i>	<i>Pase 1</i>	<i>Pase 2</i>	<i>Pase 3</i>	<i>Pase 4</i>	<i>Pase 5</i>	<i>Pase 6</i>	<i>Pase 7</i>	<i>Pase 8</i>
1	15.73	1.69	1.38	1.57	1.42	1.54	1.37	<b>1.52</b>
2	1.88	14.07	10.82	12.51	11.58	12.68	10.92	12.35
3	1.52	8.71	6.54	7.67	6.85	7.95	6.44	7.69
4	<b>1.35</b>	5.45	4.00	4.73	4.17	5.01	4.01	4.82
5	1.36	3.50	2.63	3.00	2.64	3.27	2.70	3.11
6	1.57	2.36	2.01	2.00	1.78	2.30	<b>2.08</b>	2.12
7	2.07	<b>1.81</b>	<b>1.96</b>	1.46	1.30	<b>1.94</b>	<b>2.00</b>	<b>1.65</b>
8	3.10	<b>1.74</b>	<b>2.56</b>	<b>1.28</b>	<b>1.16</b>	<b>2.15</b>	2.57	<b>1.57</b>
9	<b>5.40</b>	2.26	4.27	<b>1.41</b>	<b>1.35</b>	3.07	4.26	1.91
10	<b>10.46</b>	3.68	8.43	1.89	1.99	5.22	8.30	2.85
11	1.44	<b>0.60</b>	<b>1.26</b>	2.87	3.50	<b>0.74</b>	<b>1.23</b>	6.28
12	-	-	-	4.84	7.02	-	-	-
13	-	-	-	<b>0.66</b>	<b>1.11</b>	-	-	-

Tabla 25. Porcentajes de flujo de fluido que circulan por cada uno de los canales horizontales de la capa 2 de la bobina de baja tensión.

<i>Tasa de flujo de fluido en capa 2 de BT respecto a entrada (<math>\dot{m} = 0.00802 \text{ kg/s}</math>) [%]</i>								
<i>Canal</i>	<i>Pase 1</i>	<i>Pase 2</i>	<i>Pase 3</i>	<i>Pase 4</i>	<i>Pase 5</i>	<i>Pase 6</i>	<i>Pase 7</i>	<i>Pase 8</i>
1	57.77	2.02	2.00	1.85	2.02	1.80	2.04	1.79
2	10.06	15.03	14.60	13.74	14.87	13.20	14.92	13.59
3	6.02	9.06	8.87	8.35	9.09	8.68	9.14	8.31
4	3.72	5.57	5.64	5.24	5.80	5.46	5.84	5.13
5	2.40	<b>3.64</b>	3.78	3.47	3.91	3.64	3.93	3.26
6	1.65	<b>2.61</b>	2.84	<b>2.60</b>	2.90	<b>2.68</b>	2.93	2.18
7	<b>1.31</b>	2.21	<b>2.54</b>	<b>2.41</b>	<b>2.53</b>	<b>2.42</b>	<b>2.57</b>	1.63
8	<b>1.32</b>	2.58	<b>2.90</b>	2.97	<b>2.81</b>	2.92	<b>2.81</b>	<b>1.48</b>
9	1.70	3.97	4.13	4.67	3.92	4.58	3.86	<b>1.74</b>
10	2.56	7.38	6.90	8.64	6.43	8.56	6.25	2.56
11	4.23	<b>0.99</b>	<b>0.85</b>	<b>1.11</b>	<b>0.80</b>	<b>1.11</b>	<b>0.77</b>	4.42
12	7.57	-	-	-	-	-	-	8.59
13	<b>0.94</b>	-	-	-	-	-	-	46.58

Tabla 26. Porcentajes de flujo de fluido que circulan por cada uno de los canales horizontales de la bobina de alta tensión.

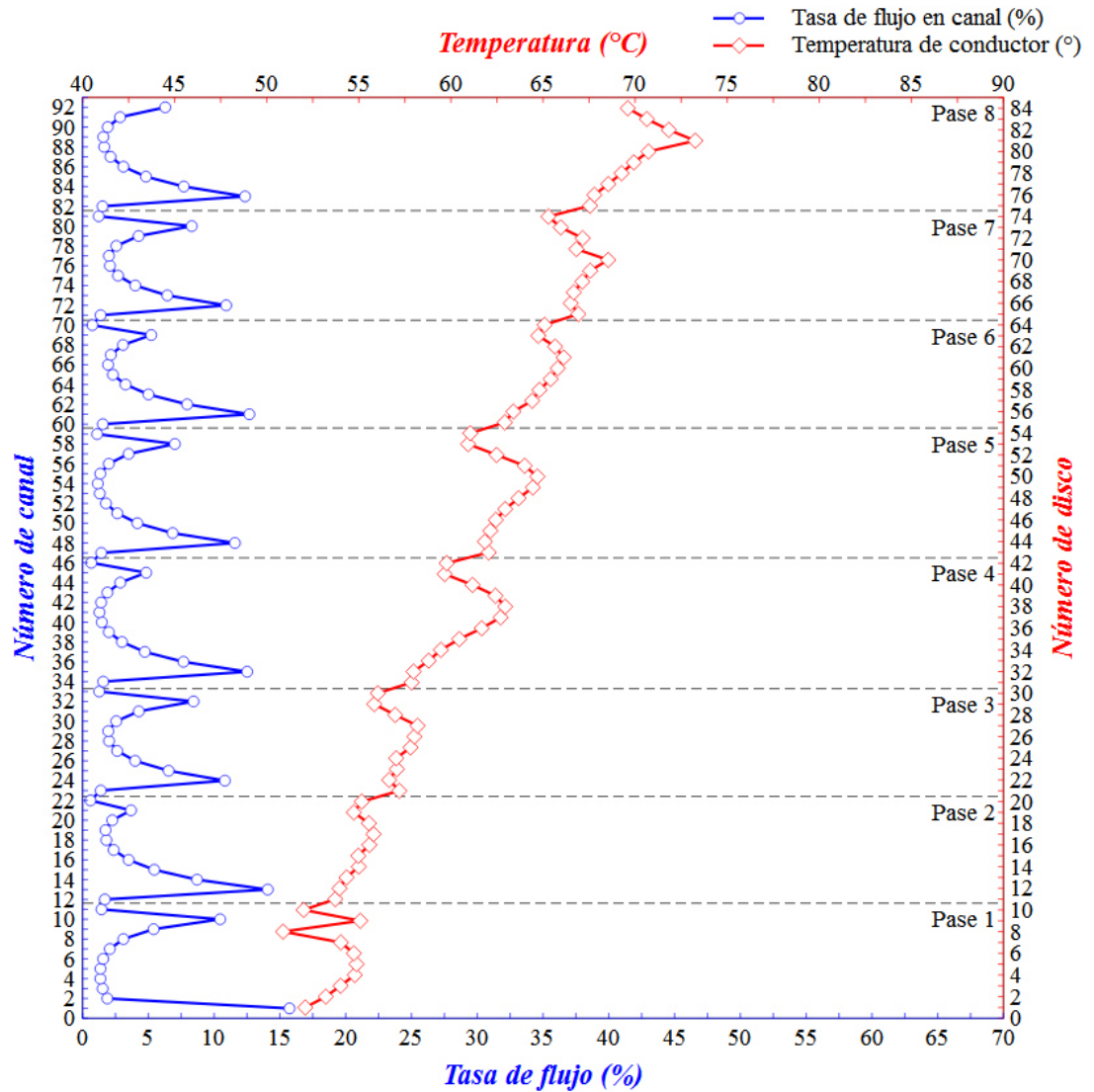
<i>Tasa de flujo de fluido AT respecto a entrada (<math>\dot{m} = 0.01174 \text{ kg/s}</math>) [%]</i>							
<i>Canal</i>	<i>Pase 1</i>	<i>Pase 2</i>	<i>Pase 3</i>	<i>Pase 4</i>	<i>Pase 5</i>	<i>Pase 6</i>	<i>Pase 7</i>
1	18.77	1.70	<b>1.38</b>	1.67	<b>1.46</b>	1.64	1.41
2	4.48	19.35	<b>14.55</b>	16.74	<b>14.60</b>	16.47	14.02
3	4.21	15.82	10.61	13.74	11.13	13.74	10.49
4	4.00	13.01	8.18	11.37	8.75	11.53	7.94
5	<b>3.91</b>	10.68	6.54	9.43	7.05	9.64	5.94
6	<b>3.97</b>	8.77	5.43	7.85	5.85	8.09	4.24
7	4.22	7.23	4.74	6.62	5.05	6.85	2.64
8	4.74	5.98	4.39	5.71	4.60	5.90	0.94
9	5.64	4.98	4.39	5.07	4.48	5.21	<b>0.89</b>
10	7.10	4.16	4.78	4.69	4.74	4.77	<b>2.75</b>
11	9.39	3.50	5.69	4.57	5.47	4.57	4.65
12	12.89	2.97	7.30	4.69	6.85	4.58	6.72
13	18.24	2.55	9.93	5.04	9.17	4.78	9.13
14	<b>1.72</b>	<b>2.23</b>	14.16	<b>5.62</b>	12.94	<b>5.11</b>	23.48
15	-	<b>0.33</b>	<b>1.21</b>	<b>0.43</b>	<b>1.13</b>	<b>0.40</b>	-

Consecuentemente, en las Gráficas 22, 23 y 24 se presentan las distribuciones de temperaturas de cada uno de los discos de las bobinas así como la tasa de flujo de aceite que fluye a través de los canales horizontales para la capa 1 de la bobina de baja tensión, capa 2 de la misma y finalmente de la alta tensión. Los arreglos presentan información independiente en los ejes  $y$  izquierdo y  $x$  inferior a la observable en los ejes  $y$  derecho y  $x$  superior. La escuadra inferior izquierda marca el origen del conteo ascendente de los canales y lateralmente se presenta el valor porcentual de flujo de fluido que circula a través de dicho canal (con referencia al flujo másico de entrada a la bobina de alta o baja, según sea el caso). Por su parte, la escuadra superior derecha expresa de manera descendente el conteo de discos conductores de la bobina mientras que lateralmente exhibe la temperatura de cada uno de esos discos (temperatura del cobre). Las líneas punteadas que aparecen horizontalmente en todas y cada una de las Gráficas representan el cambio de pase al avanzar verticalmente en la componente  $y$ . En las tres Gráficas es posible apreciar como al inicio y al final de cada pase (a excepción de los pases 1 y  $n$ ), donde figuran los canales superior e inferior previos al cambio de pase con menor sección trasversal, la fracción de flujo de fluido decae drásticamente. Por otro

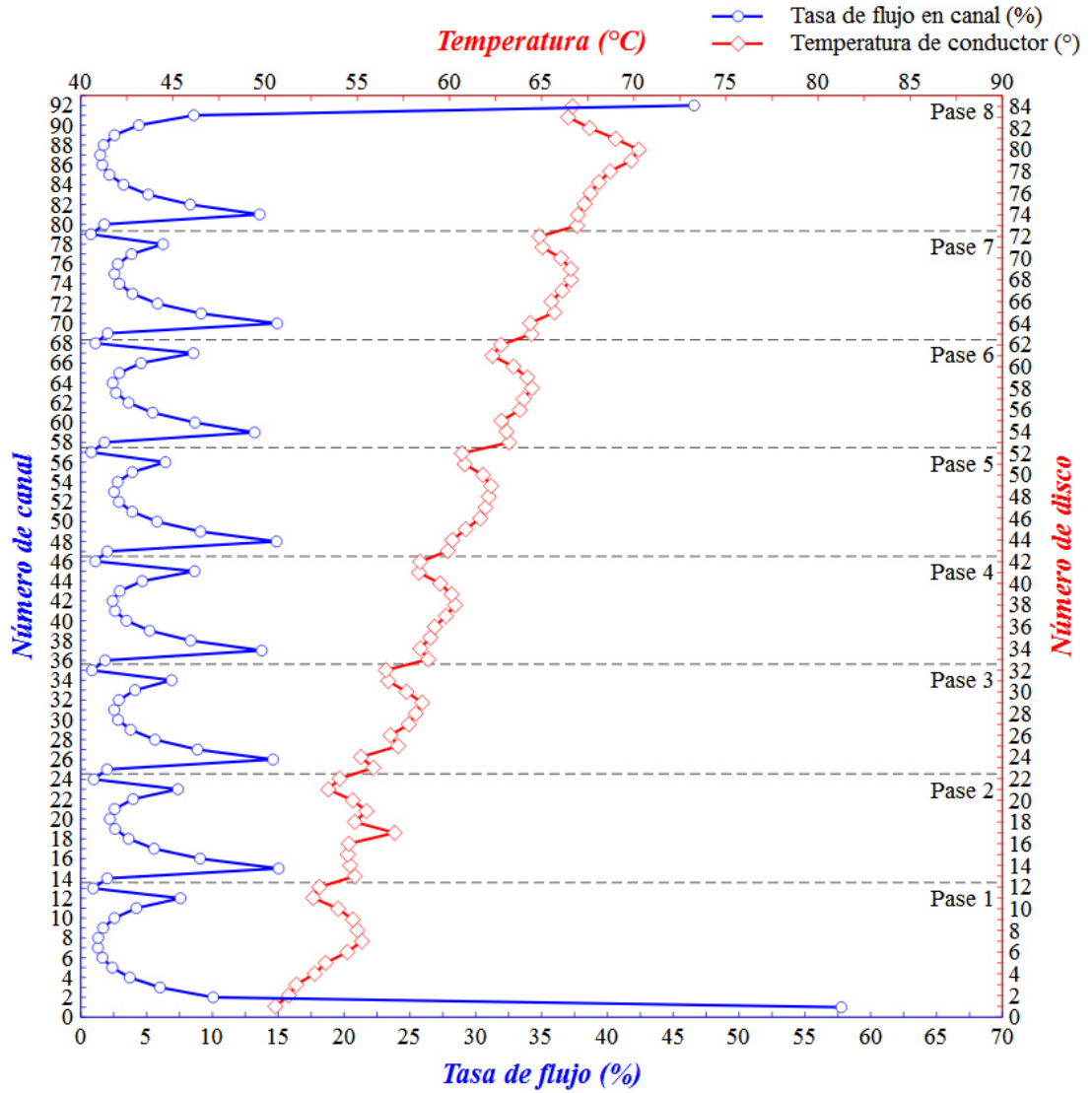
lado, a pesar de que la tasa de generación de calor volumétrica que las bobinas poseen tanto en la baja como en la alta tensión es uniforme para la baja y alta tensión, el incremento de la temperatura con respecto a la componente axial se hace evidente. En ambas capas de la bobina de baja tensión, en la cual los conductores no difieren mucho en sus longitudes radial y axial (relación de aspecto  $r:y = 2.2345$ ), la localización de los conductores con mayor temperatura para cada pase se ubican en las proximidades centrales de este último, zona que a pesar de mostrar decrementos en la fracción de flujo másico que circula horizontalmente, no presentan los valores de flujo de fluido mínimo para dicho pase.

En las Tablas 24, 25 y 26, las cantidades que se exhiben en color rojo señalan a los canales horizontales que rodean inferior y superiormente al punto caliente de cada pase, mientras que los datos encerrados en recuadros denotan el canal horizontal a través del cual fluye la menor cantidad de fluido refrigerante, para cada pase. En las Tablas 24 y 25 se aprecia que la relación de aspecto  $r:y = 2.2345$  de los conductores de baja tensión le resta importancia al flujo horizontal a la hora de localizar el punto caliente de cada pase, ello debido a que únicamente en el pase ocho de la capa dos de la bobina de baja tensión existe una convergencia entre el canal horizontal de menor caudal másico y el conductor con mayor temperatura; cuestión que si bien no descarta la relevancia de la capacidad de remoción de calor de los canales horizontales, si conlleva a pensar que la remoción de calor muestra más dependencia al flujo vertical.

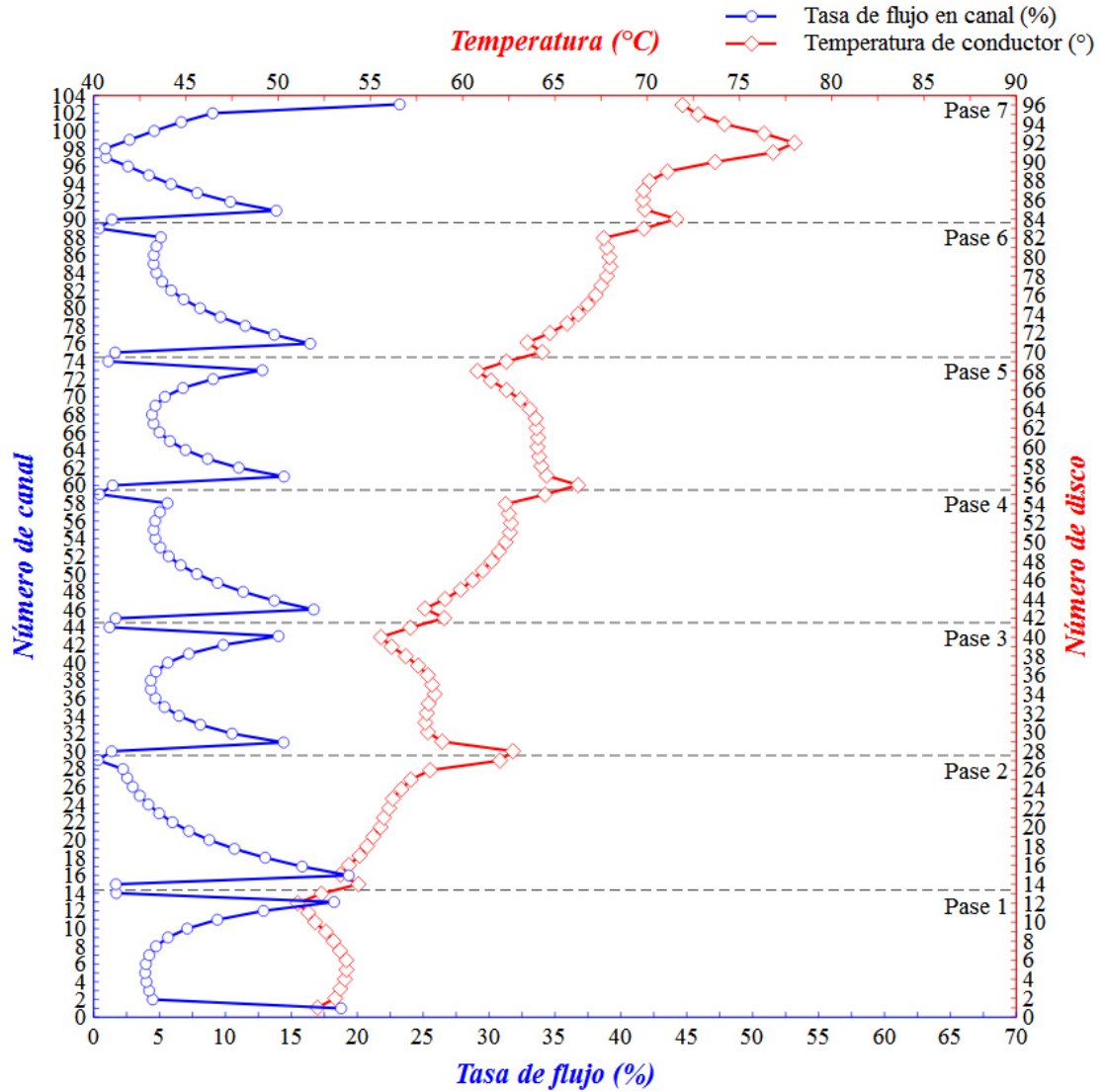
Las condiciones reportadas de la bobina de alta tensión son distintas a las de la bobina de baja tensión. En la bobina de alta tensión, para los pases 2, 4, 6 y 7, la existencia del punto caliente está ligada a la fracción de flujo de fluido de menor magnitud. Los 5 conductores de cobre de los devanados de alta tensión, que si bien no están físicamente juntos sino que son separados por capas de papel aislante, no poseen canales horizontales entre conductores como lo es en la bobina de baja tensión (de ahí el haber contemplado ambas capas de manera independiente en la bobina de baja tensión). Por ello, la relación de aspecto en los discos de alta tensión resulta de  $r:y = 6.6878$ . Causa a este elevado incremento en la relación de aspecto, es factible considerar la relevancia geométrica que los canales horizontales imponen. La remoción de calor en las superficies paralelas a los canales orientados verticalmente resulta de menor relevancia que la provista por los efectos de enfriamiento que produce el flujo paralelo a las superficies horizontales de los conductores.



Gráfica 22. Capa 1 de bobina de baja tensión. Azul: Flujo de fluido (%) en función de canal horizontal. Rojo: Temperatura de cobre en función de disco conductor.



Gráfica 23. Capa 2 de bobina de baja tensión. Azul: Flujo de fluido (%) en función de canal horizontal. Rojo: Temperatura de cobre en función de disco conductor.



Gráfica 24. Bobina de alta tensión. Azul: Flujo de fluido (%) en función de canal horizontal. Rojo: Temperatura de cobre en función de disco conductor.

### 5.6.2. Pérdidas $I^2R + Eddy$ .

Este caso de estudio tiene por objetivo modelar tanto las pérdidas por corriente de carga  $I^2R$  como las pérdidas extrañas simultáneamente, con una función de generación de calor que obedece a la presentada en las gráficas 21-a) y -b) (función roja) para las bobinas de alta y la baja tensión. La Figura 88 muestra los perfiles de temperatura obtenidos tras el modelado ahora de las pérdidas totales.

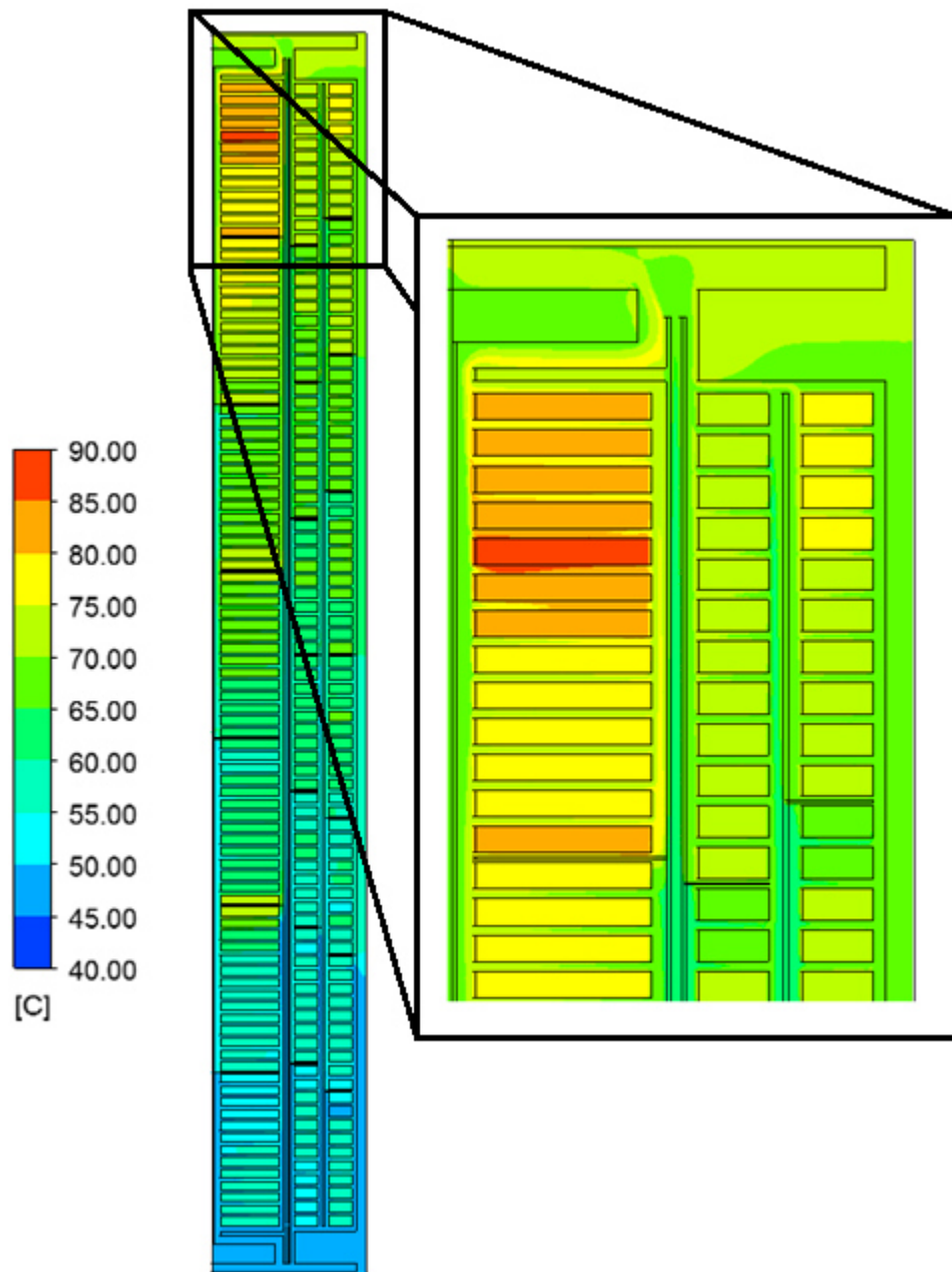


Figura 88. Contornos de temperatura en paquete de bobinas bajo pérdidas de tipo  $I^2R + Eddy$ .



Los puntos más calientes de las bobinas se encuentran ubicados como sigue: Para la bobina de alta tensión, éste radica en el disco número 92 (pase 7, disco 9) y asciende a 86.88 °C. En la baja tensión; la capa 1 localiza dicho punto en el disco 81 (pase 8, disco 7) con una temperatura de 77.77 °C mientras que para la capa 2, este se encuentra en el disco número 80 (pase 8, disco 8) y mantiene una temperatura de 74.67 °C. Al igual que en el estudio previo, se presentan concentrados en las Tablas 27, 28 y 29 los niveles de temperatura más relevantes del estudio.

Tabla 27. Concentrado de temperaturas en baja tensión capa 1.

<b>Baja tensión Capa 1 (a)</b>					
Pase	$T_{oil\_salida}$ (°C)	$T_{avg\_discos}$ (°C)	$\Delta T$ (°C)	$T_{HS}$	Ubicación Hot Spot
1	49.97	55.11	5.14	59.18	Disco 8
2	52.81	56.86	4.05	58.01	Disco 8
3	55.48	58.95	3.47	61.46	Disco 3
4	58.69	62.9	4.21	65.26	Disco 8
5	61.86	65.61	3.75	67.64	Disco 8
6	64.53	68.43	3.9	68.92	Disco 7
7	67.13	70.74	3.61	72.16	Disco 6
8	70.13	64.74	4.61	77.78	Disco 7
Global	70.13	64.16	—————	80.76	Disco 81

Tabla 28. Concentrado de temperaturas en baja tensión capa 2.

<b>Baja tensión Capa 2 (b)</b>					
Pase	$T_{oil\_salida}$ (°C)	$T_{avg\_discos}$ (°C)	$\Delta T$ (°C)	$T_{HS}$	Ubicación Hot Spot
1	50.51	55.08	4.57	58.71	Disco 8
2	53.14	56.4	3.26	58.57	Disco 5
3	55.71	59.26	3.55	60.78	Disco 7
4	58.33	61.8	3.47	62.98	Disco 6
5	60.82	64.33	3.51	65.45	Disco 7
6	63.47	66.91	3.44	68.03	Disco 7
7	65.96	69.45	3.49	70.54	Disco 7
8	69.55	72.72	3.17	74.67	Disco 8
Global	69.55	63.24	—————	74.67	Disco 80

Tabla 29. Concentrado de temperaturas en alta tensión.

<i>Alta tensión</i>					
Pase	$T_{oil\_salida}$ (°C)	$T_{avg\_discos}$ (°C)	$\Delta T$ (°C)	$T_{HS}$	Ubicación Hot Spot
1	50.86	54.81	3.95	56.29	Disco 2
2	54.92	60.37	5.45	73.53	Disco 14
3	58.71	61.76	3.05	71.04	Disco 1
4	62.55	66.51	3.96	71.46	Disco 14
5	66.29	69.07	2.78	73.62	Disco 1
6	69.96	73.88	3.92	78.78	Disco 14
7	73.17	80.95	7.78	86.89	Disco 9
Global	73.17	66.77	—————	86.89	Disco 92

En la Figura 89 se presenta el campo de velocidades resultante del caso de estudio que engloba todas las pérdidas de la bobina. Se aprecia que las zonas donde el fluido alcanza valores máximos de velocidad no varían con respecto al caso de estudio  $I^2R$ , más sin embargo, si lo hacen su magnitudes. El fluido ingresa al dominio a la misma velocidad constante empleada en el caso de estudio pasado,  $0.03\text{ m/s}$ . De igual manera, son las velocidades en los cambios de pase en los ductos internos verticales de la bobina de alta tensión donde se reportan las velocidades más altas con niveles de hasta  $0.071\text{ m/s}$ . Para poder realizar una comparativa de las variaciones de flujo de fluido en la red hidráulica del paquete de bobinas, se analizó también en este caso de estudio la fracción porcentual de flujo másico que circula a través de cada canal horizontal a lo largo de todos los pases de ambas bobinas. Estos resultados permiten comprender la importancia que representan la inclusión de las pérdidas extrañas de los devanados en la distribución de flujo de fluido en ductos tanto verticales como horizontales. Esta información se presenta en las Tablas 30, 31 y 32.

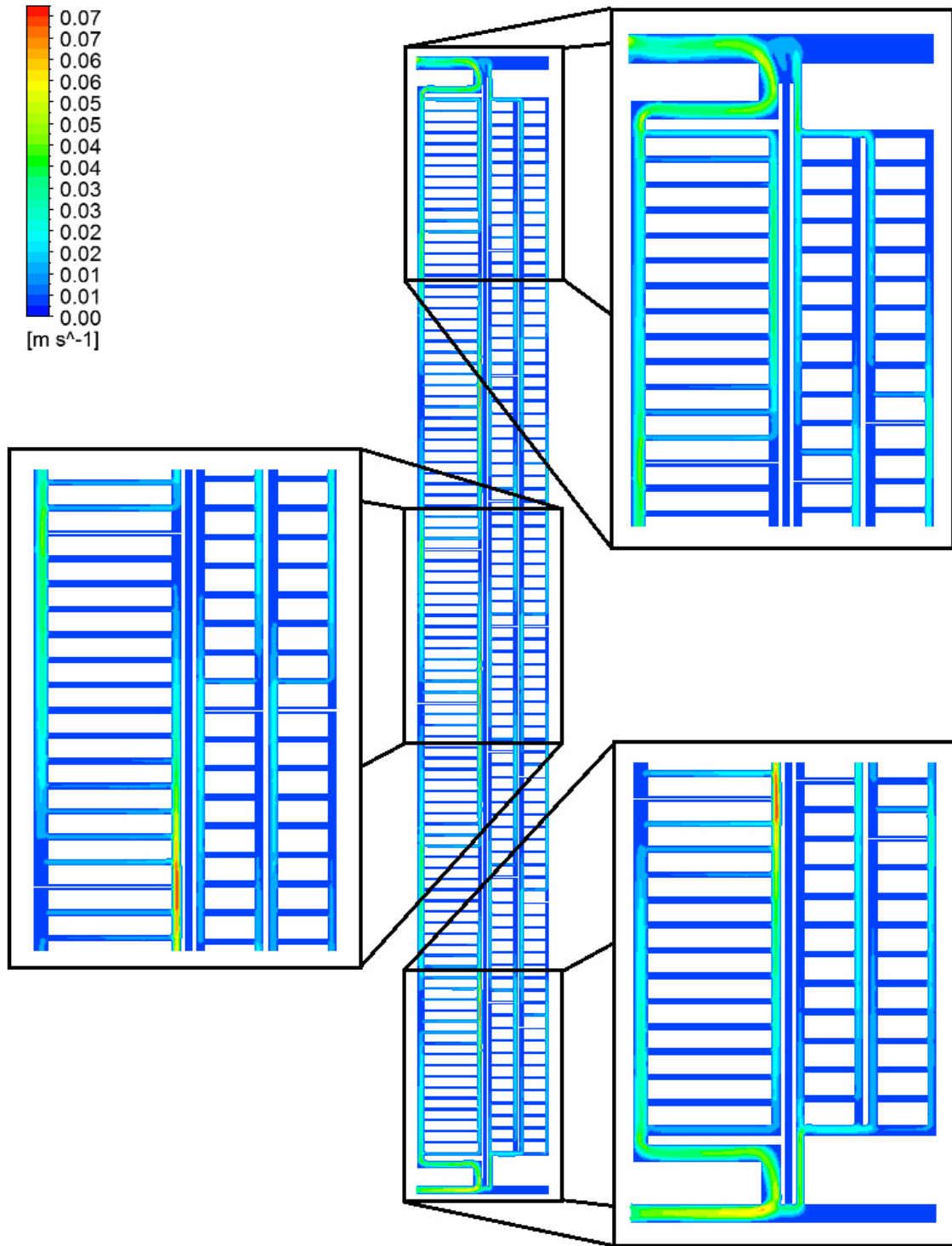


Figura 89. Campo de velocidades en paquete de bobinas bajo parámetros  $I^2R + Eddy$ .

Tabla 30. Porcentajes de flujo de fluido que circulan por cada uno de los canales horizontales de la capa 1 de la bobina de baja tensión.

<i>Tasa de flujo de fluido en capa 1 de BT respecto a entrada (<math>\dot{m} = 0.00671 \text{ kg/s}</math>) [%]</i>								
<i>Canal</i>	<i>Pase 1</i>	<i>Pase 2</i>	<i>Pase 3</i>	<i>Pase 4</i>	<i>Pase 5</i>	<i>Pase 6</i>	<i>Pase 7</i>	<i>Pase 8</i>
1	16.49	1.73	1.77	1.63	1.80	1.65	1.69	<b>1.61</b>
2	2.46	14.10	13.51	12.43	14.06	13.25	12.98	12.77
3	2.06	9.08	<b>8.03</b>	7.55	8.15	8.33	7.59	8.00
4	1.80	5.88	<b>4.66</b>	4.69	4.88	5.28	4.68	5.05
5	1.69	3.90	2.80	3.01	3.06	3.47	3.07	3.29
6	1.78	2.68	2.01	2.05	2.03	2.43	<b>2.21</b>	2.26
7	2.15	1.95	1.71	1.55	1.42	<b>1.97</b>	<b>1.85</b>	<b>1.75</b>
8	<b>2.97</b>	<b>1.63</b>	1.88	<b>1.38</b>	<b>1.13</b>	<b>1.99</b>	2.00	<b>1.64</b>
9	<b>4.58</b>	<b>1.70</b>	2.77	<b>1.50</b>	<b>1.08</b>	2.53	2.92	1.90
10	8.29	2.30	5.38	1.92	1.29	3.93	5.53	2.66
11	<b>1.21</b>	<b>0.48</b>	<b>0.91</b>	2.75	1.94	<b>0.61</b>	<b>0.90</b>	4.49
12	-	-	-	4.37	3.85	-	-	-
13	-	-	-	<b>0.63</b>	<b>0.73</b>	-	-	-

Tabla 31. Porcentajes de flujo de fluido que circulan por cada uno de los canales horizontales de la capa 2 de la bobina de baja tensión.

<i>Tasa de flujo de fluido en capa 2 de BT respecto a entrada (<math>\dot{m} = 0.00671 \text{ kg/s}</math>) [%]</i>								
<i>Canal</i>	<i>Pase 1</i>	<i>Pase 2</i>	<i>Pase 3</i>	<i>Pase 4</i>	<i>Pase 5</i>	<i>Pase 6</i>	<i>Pase 7</i>	<i>Pase 8</i>
1	60.40	2.31	2.23	2.10	2.28	2.10	2.30	2.17
2	10.33	17.78	16.08	15.27	16.44	15.10	16.46	15.95
3	6.22	10.68	9.70	9.27	10.06	9.90	10.08	9.69
4	3.87	6.50	6.10	5.85	6.45	6.21	6.45	5.97
5	2.53	<b>4.16</b>	4.09	3.88	4.37	4.08	4.35	3.81
6	1.77	<b>2.81</b>	3.02	<b>2.86</b>	3.16	2.91	3.17	2.56
7	1.40	2.08	<b>2.57</b>	<b>2.47</b>	<b>2.57</b>	<b>2.40</b>	<b>2.59</b>	1.87
8	<b>1.37</b>	1.94	<b>2.66</b>	2.69	<b>2.49</b>	<b>2.53</b>	<b>2.51</b>	<b>1.58</b>
9	<b>1.67</b>	2.45	3.36	3.75	2.94	3.44	2.94	<b>1.68</b>
10	2.28	4.15	5.07	6.51	4.21	5.99	4.11	2.24
11	3.32	<b>0.65</b>	<b>0.63</b>	<b>0.87</b>	<b>0.55</b>	<b>0.86</b>	<b>0.56</b>	3.54
12	5.40	-	-	-	-	-	-	6.67
13	<b>0.70</b>	-	-	-	-	-	-	43.56

Tabla 32. Porcentajes de flujo de fluido que circulan por cada uno de los canales horizontales de la bobina de alta tensión.

<i>Tasa de flujo de fluido AT respecto a entrada (<math>\dot{m} = 0.01397 \text{ kg/s}</math>) [%]</i>							
<i>Canal</i>	<i>Pase 1</i>	<i>Pase 2</i>	<i>Pase 3</i>	<i>Pase 4</i>	<i>Pase 5</i>	<i>Pase 6</i>	<i>Pase 7</i>
1	19.31	1.67	<b>1.67</b>	1.60	<b>1.62</b>	1.58	1.57
2	<b>4.89</b>	19.10	<b>16.19</b>	15.91	<b>15.92</b>	15.81	15.24
3	<b>4.56</b>	15.94	11.25	13.23	11.86	13.42	11.16
4	4.26	13.37	8.51	11.11	9.18	11.46	8.39
5	4.08	11.14	6.72	9.32	7.31	9.74	6.28
6	4.05	9.25	5.51	7.84	5.99	8.28	4.54
7	4.22	7.68	4.72	6.68	5.09	7.09	2.90
8	4.66	6.35	4.28	5.82	4.53	6.16	1.14
9	5.48	5.20	4.17	5.23	4.30	5.47	<b>0.77</b>
10	6.85	4.21	4.43	4.89	4.41	4.99	<b>2.72</b>
11	9.04	3.35	5.17	4.79	4.96	4.72	4.78
12	12.45	2.55	6.58	4.93	6.10	4.62	7.15
13	17.78	1.73	8.98	5.30	8.13	4.64	9.97
14	<b>1.72</b>	<b>1.31</b>	12.95	<b>5.85</b>	11.60	<b>4.65</b>	25.84
15	-	<b>0.43</b>	<b>1.15</b>	<b>0.47</b>	<b>1.05</b>	<b>0.38</b>	-

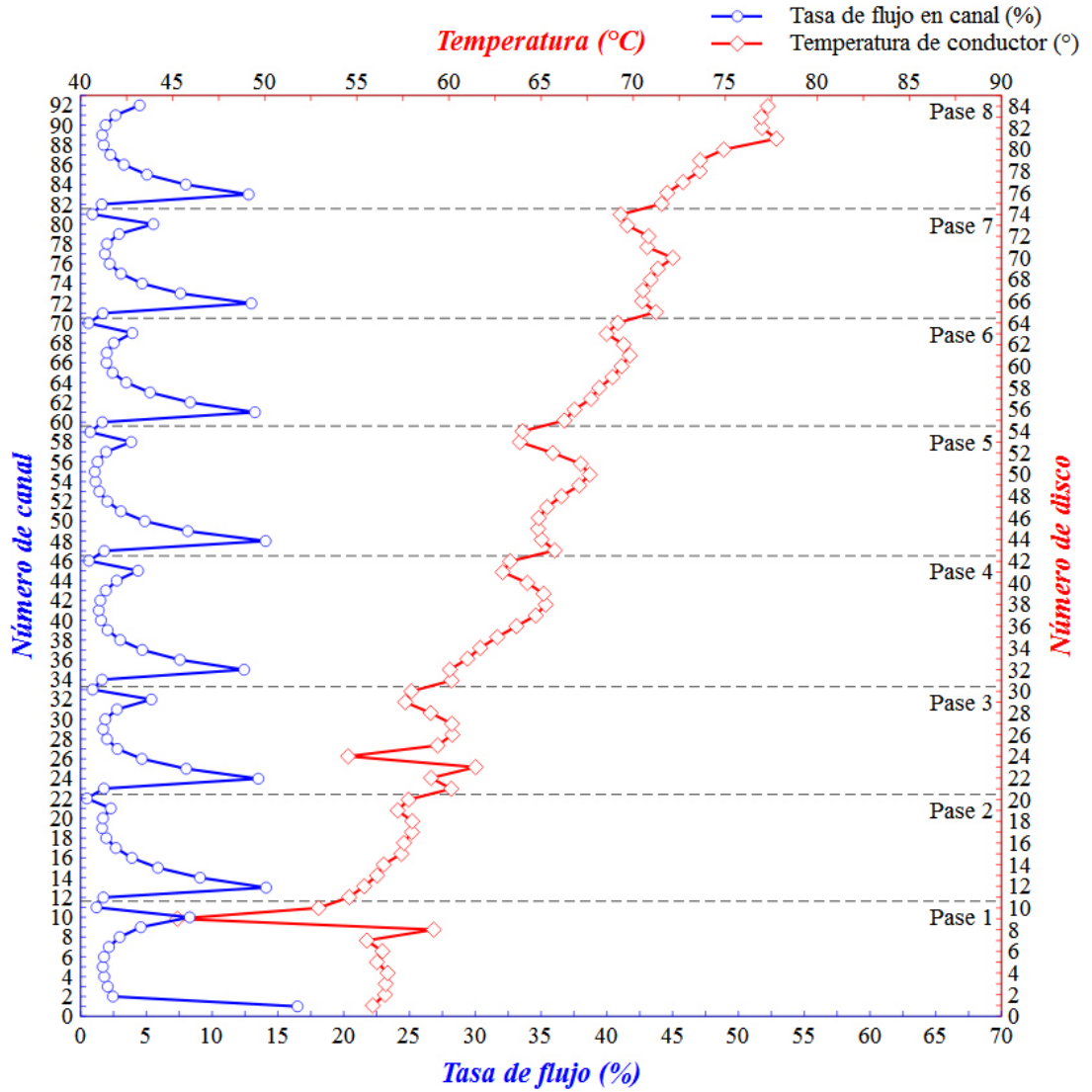
Con el objetivo de comparar el efecto de las corrientes parásitas inducidas en los devanados y el impacto que estas suponen en la distribución de temperatura y flujo de fluido, se presentan en las Gráficas 25, 26 y 27 los resultados termohidráulicos de las devanados y red de canales del paquete de bobinas de baja y alta tensión. En ellas se observa que nuevamente los pases centrales con canales superior e inferior de menor sección transversal (pases 2 a  $n - 1$ ), poseen tasas de flujo másico menores que el resto de los canales que poseen mayor sección transversal. Fijando la atención en los canales horizontales que poseen la misma sección transversal, es posible vislumbrar que los perfiles de flujo de fluido (magnitud) forman curvas cóncavas como contraparte de los perfiles convexos que generan los perfiles de temperatura del mismo pase. Este comportamiento ocurre en las tres zonas (ambas capas de la bobina de baja tensión y la bobina de alta tensión) sugiriendo un aumento de temperatura en el cobre al existir bajas de caudal de refrigerante fluyendo entre los canales horizontales a dicho conductor. Este comportamiento lo presentó, en menores magnitudes de temperatura, el caso de estudio  $I^2R$ .

Al observar detalladamente las Tablas 30, 31 y 32, resaltan nuevamente las relaciones presentes entre la posición del punto caliente que presenta cada pase con respecto al flujo másico que existe en los canales horizontales.

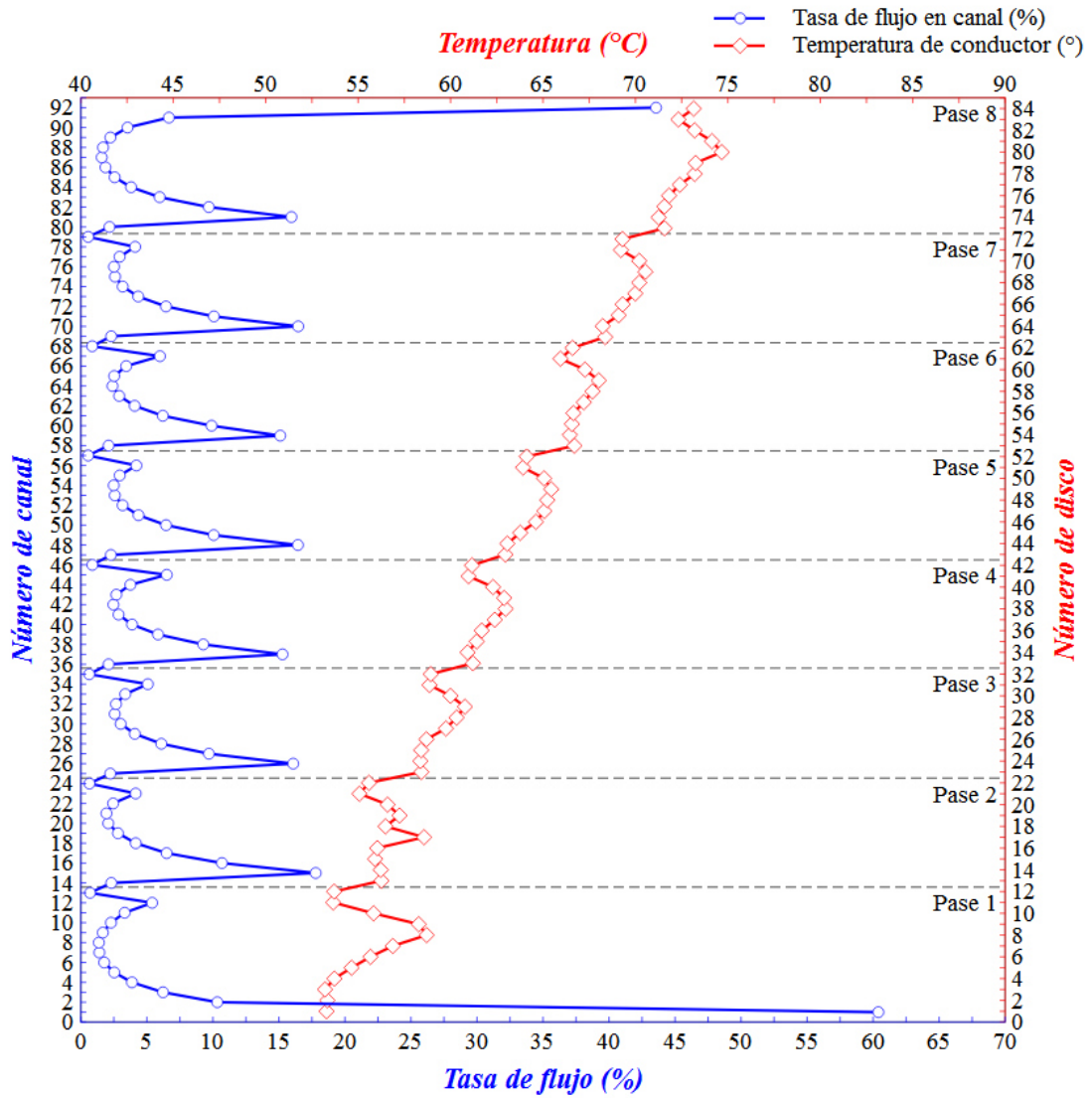
La capa uno de la bobina de baja tensión, no presenta relación alguna entre la ubicación del conductor más caliente registrado en cada uno de los 8 pases que posee, con el canal horizontal que ostenta la fracción de flujo de fluido horizontal de menor magnitud. Por su parte la capa dos de la misma bobina localiza una sola coincidencia entre el menor caudal másico horizontal y el punto caliente del pase en cuestión que, dicho sea de paso, es nuevamente en el pase ocho, conductor 8; como lo fue en el estudio termohidráulico de las pérdidas  $P_{I^2R}$ .

La bobina de alta tensión no es ajena a la similitud de resultados que presentan las bobinas de baja tensión en los casos  $P_{I^2R}$  y  $P_{I^2R+Eddy}$ . Los canales de menor flujo másico horizontal registrados en los pases 2, 4, 6 y 7 (mismos que en caso de estudio  $P_{I^2R}$ ) interactúan con los puntos de mayor temperatura para cada uno de esos pases.

Estos resultados reiteran las conjeturas planteadas en el caso de estudio  $P_{I^2R}$ . A pesar de existir temperaturas de mayor magnitud en los conductores de las bobinas de baja y alta tensión en el caso  $P_{I^2R+Eddy}$  y existir variaciones en las fracciones de flujo de fluido en los canales horizontales debido a estos aumentos de temperatura causados por las pérdidas volumétricas no homogéneas entre los conductores, la ubicación de las zonas de mayor temperatura son coincidentes en la gran mayoría de los pases, para ambos casos de estudio. Esto deja claro que la relación de aspecto de los discos conductores de baja tensión  $r:y = 2.2345$  promueve una capacidad de remover calor favorable a los canales verticales mientras que la relación de aspecto de los conductores de alta tensión  $r:y = 6.6878$  vuelve de crucial importancia el caudal másico que fluye horizontalmente.

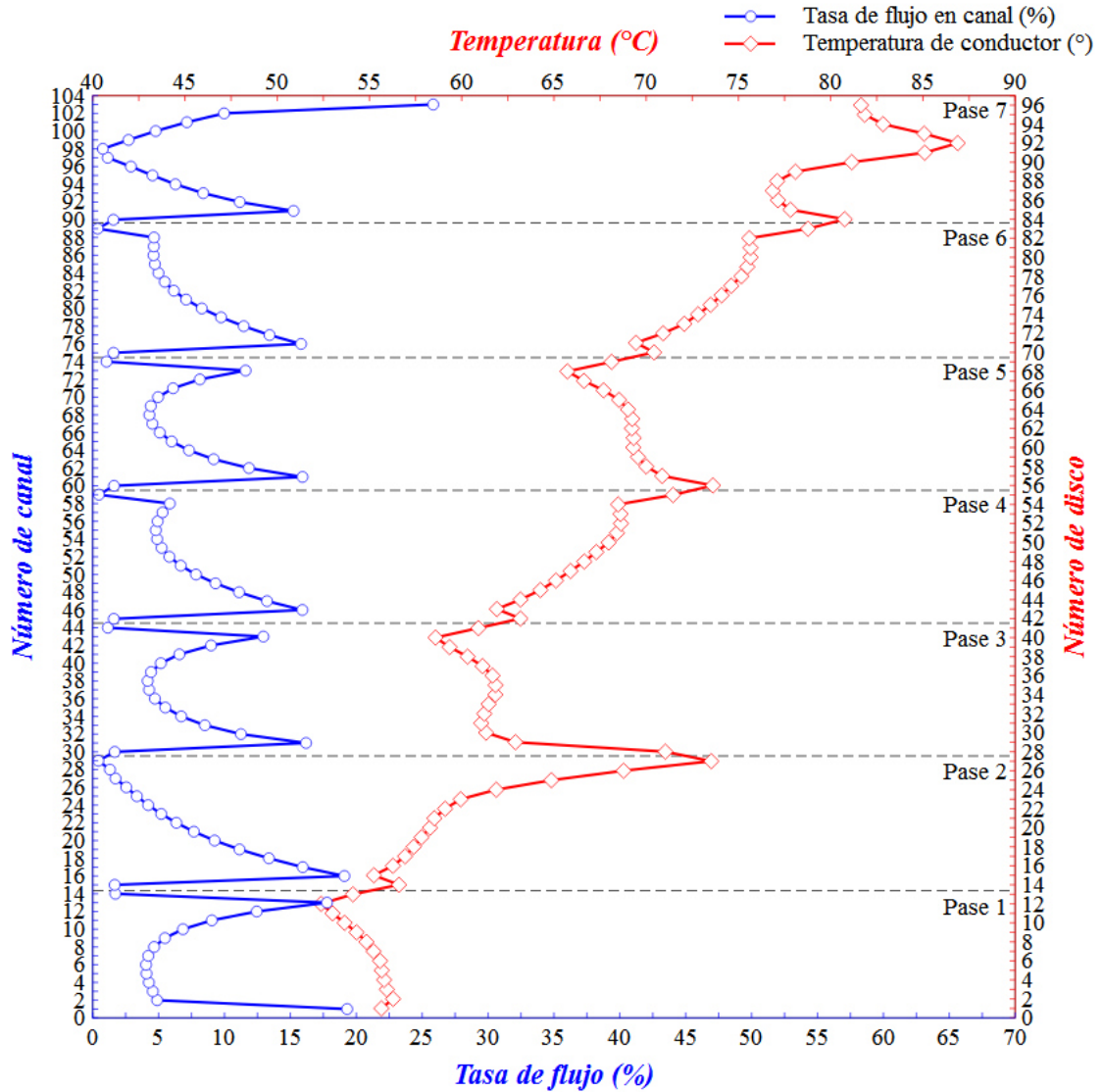


Gráfica 25. Capa 1 de bobina de baja tensión. Azul: Flujo de fluido (%) en función de canal horizontal. Rojo: Temperatura de cobre en función de disco conductor.



Gráfica 26. Capa 2 de bobina de baja tensión. Azul: Flujo de fluido (%) en función de canal horizontal. Rojo: Temperatura de cobre en función de disco conductor.

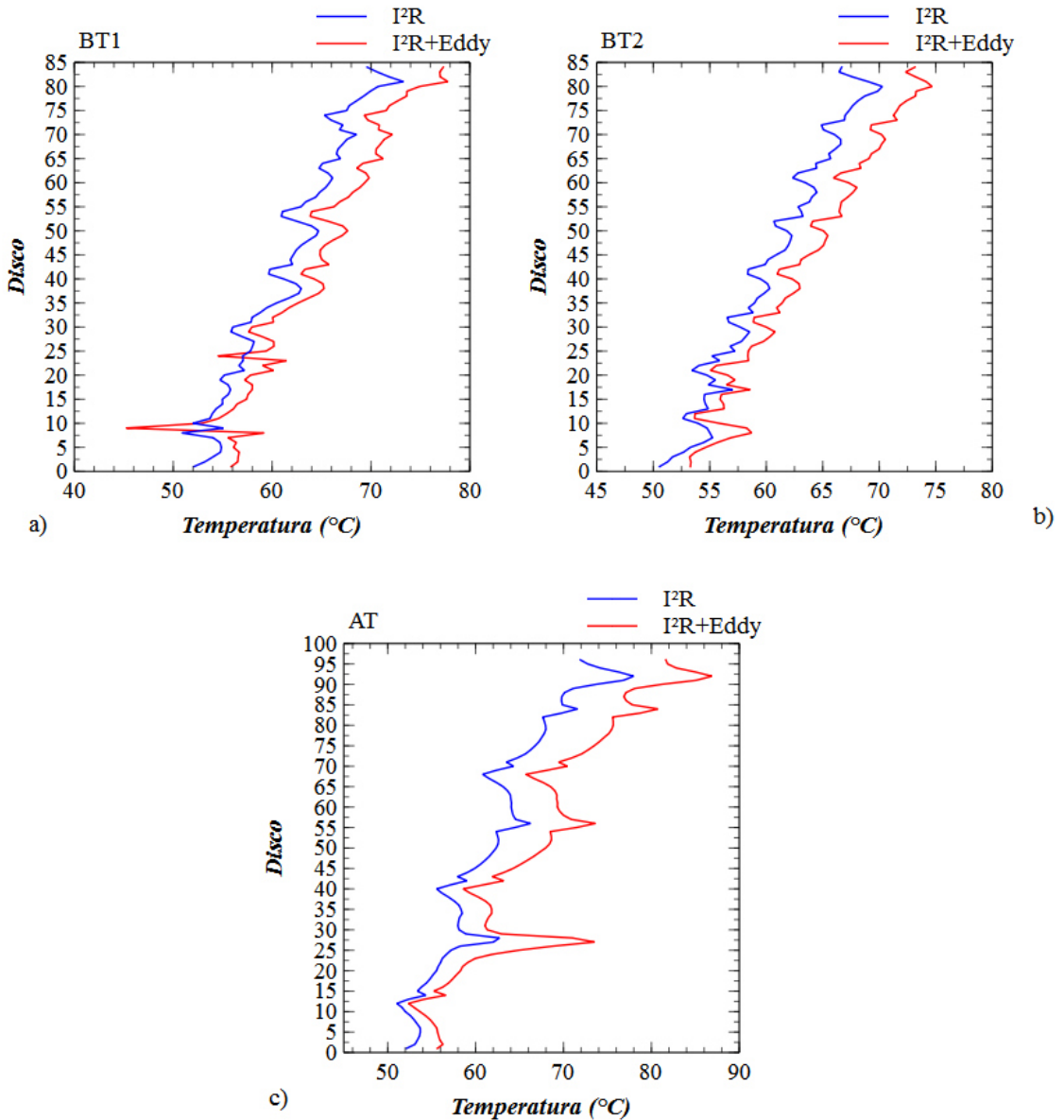




Gráfica 27. Bobina de alta tensión. Azul: Flujo de fluido (%) en función de canal horizontal. Rojo: Temperatura de cobre en función de disco conductor.

Las Gráficas 22, 23, 24, 25, 26 y 27 hacen posible comparar los alcances de temperatura que la máquina presenta en sus devanados de baja y alta tensión al contemplar las pérdidas de potencia debido únicamente a la corriente de carga contra las pérdidas de potencia globales (pérdidas extrañas aunadas a las pérdidas por corrientes de carga). Solamente en 2 conductores, en la capa 1 de la bobina de baja tensión, la temperatura resultó ser superior en el estudio que contempló las pérdidas  $I^2R$ . Esto ocurrió en el disco 9 del pase 1 y el disco 4 del pase 3. En el resto de los conductores el  $\Delta T$  ( $T_{I^2R+Eddy} - T_{I^2R}$ ) resulta positivo, ello significa que las temperaturas alcanzadas contemplando las

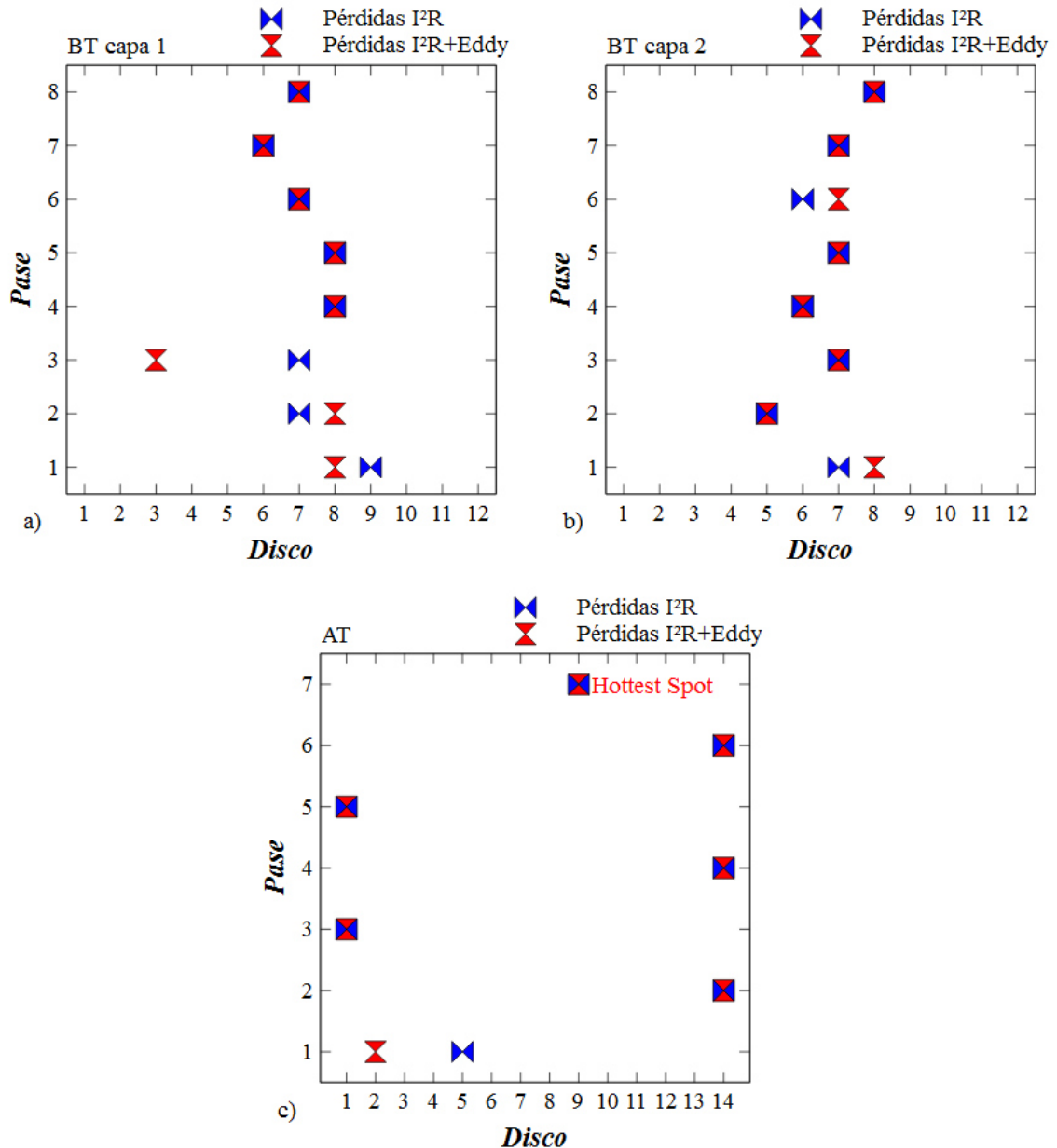
pérdidas  $I^2R + Eddy$  son, en la gran mayoría de los casos, superiores. Esto se puede apreciar en las Gráficas 28-a), -b) y -c).



Gráfica 28. Diferencia de temperaturas reportada bajo pérdidas  $I^2R$  e  $I^2R + Eddy$ . a) Baja tensión, capa 1. b) Baja tensión, capa 2. c) Alta tensión.

Si bien la inclusión de las pérdidas  $P_{I^2R+Eddy}$  supone un aumento importante en la temperatura sobre las pérdidas  $P_{I^2R}$ , como expone la Gráfica 28; la ubicación de los puntos calientes, independientemente de la temperatura que posean, van

de la mano de la distribución de los canales de las bobinas, como se aprecia en la Gráfica 29. Es en esta gráfica donde se observa que en la mayoría de los casos, el punto de temperatura más elevado que existe en cada pase es geoméricamente el mismo, sin importar si se considera la potencia disipada de tipo  $I^2R$  o la potencia  $I^2R + Eddy$ .



Gráfica 29. Comparativa de la ubicación (número de disco) de los puntos calientes de cada pase entre pérdidas de tipo  $I^2R$  y pérdidas de tipo  $I^2R + Eddy$ . a) Baja tensión, capa 1. b) Baja tensión capa 2. c) Alta tensión.

En esta última gráfica también se aprecia que el punto caliente global de las bobinas estudiadas está en el disco número 9 del pase 7 (disco 92) de la bobina de alta tensión, con una temperatura de  $77.98^{\circ}\text{C}$  bajo pérdidas  $I^2R$  y con  $86.89^{\circ}\text{C}$  bajo pérdidas  $I^2R + Eddy$ .

A partir de las Gráficas 28, es posible concluir que es de suma importancia contemplar, en estudios de este orden, las pérdidas extrañas en los devanados tanto de baja como de alta tensión; ya que los incrementos de temperatura registrados son lo suficientemente altos como para degradar los aislantes dieléctricos de la máquina si no son estimados de manera adecuada. Por su parte, de la Gráfica 29 se concluye que la ubicación de los puntos calientes locales en cada pase y la ubicación del punto caliente global (Hottest Spot en la gráfica 29-c)) no se ve afectado por la inclusión de las pérdidas extrañas. Éstas últimas solo demostraron alterar la magnitud de la temperatura brindando una estimación más adecuada de su magnitud, pero es la distribución de canales tanto verticales como horizontales (diámetros hidráulicos y redireccionadores de aceite) la que dictó la ubicación de los puntos calientes y el Hottest Spot.

### 5.6.3. Régimen de flujo.

A pesar de que las condiciones de operación de la máquina fueron descritas y contempladas para el estudio como ONAN, se empleó una condición de frontera de velocidad de entrada de flujo a  $0.03\text{ m/s}$  como un valor muy aproximado a la velocidad que posee el fluido al entrar a la zona acanalada de las bobinas debido al movimiento global que genera la celda convectiva producto de la variación de la densidad del aceite refrigerante [xxi]. Por lo anterior, se considera la existencia de fuerzas inerciales en el fluido al interior de la red de canales dentro del paquete de bobinas. Una medida útil para comparar la interacción que presentan las fuerzas inerciales con las fuerzas de flotación ejercidas en el fluido refrigerante es mediante el uso de parámetros adimensionales que describan estos comportamientos. Los parámetros empleados fueron los números de *Reynolds* ( $Re$ ) para las fuerzas inerciales y de *Grashof* ( $Gr$ ) para los efectos de flotación producto del termosifón. El cálculo de estos parámetros se realizó en las inmediaciones de las zonas con mayores niveles de temperatura registrada en cada uno de los pases tanto de baja como de alta tensión, en los canales verticales en dirección ascendente, como lo demuestra la Figura 90.

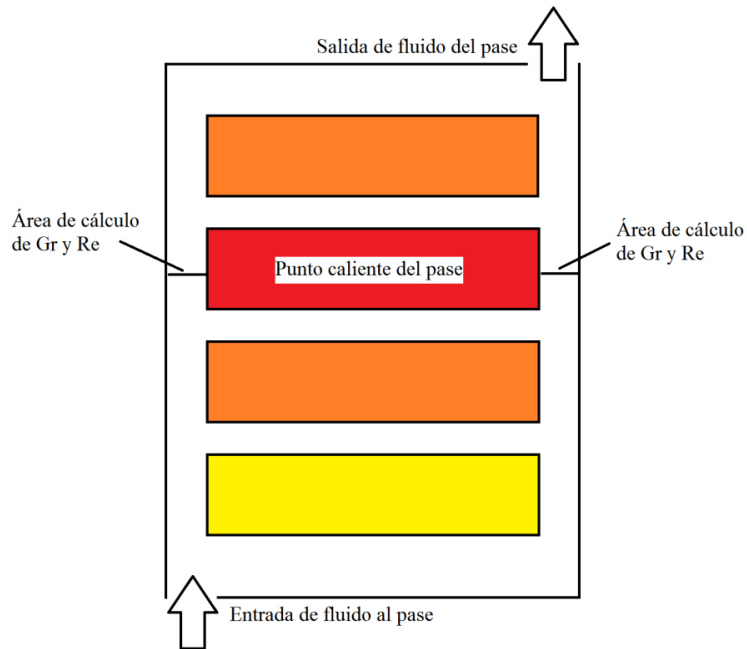


Figura 90. Zonas de medidas de propiedades pertinentes para cálculo de parámetros adimensionales.

Al correlacionar los números adimensionales de  $Re$  y  $Gr$  en la ecuación siguiente, en función del resultado del cociente podemos definir el régimen de flujo como sigue:

$$Gr/Re^2 > 1 \rightarrow \text{Fuerzas de flotación dominantes.}$$

$$Gr/Re^2 < 1 \rightarrow \text{Fuerzas inerciales dominantes.}$$

$$Gr/Re^2 \cong 1 \rightarrow \text{Equilibrio entre fuerzas de flotación y fuerzas inerciales.}$$

Los valores de la correlación  $Gr/Re^2$  únicamente en las zonas aledañas a los puntos calientes de los pases se enlistan en las Tablas 33, 34 y 35.

Tabla 33. Parámetros adimensionales. Baja tensión, capa 1.

<i>BT Capa 1</i>						
<i>Pase</i>	$T_{HS}$	<i>Ubicación</i>	<i>Canal</i>	<i>Re</i>	<i>Gr</i>	$Gr/Re^2$
1	59.18	Disco 8	<i>Interno</i>	14.40	2930.62	14.12
			<i>Externo</i>	5.21	3289.46	121.02
2	58.1	Disco 8	<i>Interno</i>	2.02	2745.35	667.27
			<i>Externo</i>	15.95	1695.46	6.66
3	61.46	Disco 3	<i>Interno</i>	11.33	1858.09	14.46
			<i>Externo</i>	8.56	2878.52	39.23
4	65.26	Disco 8	<i>Interno</i>	5.40	3084.66	105.58
			<i>Externo</i>	13.93	2406.47	12.38
5	67.64	Disco 8	<i>Interno</i>	18.59	2017.72	5.83
			<i>Externo</i>	3.59	3266.76	253.04
6	69.82	Disco 7	<i>Interno</i>	4.58	2894.96	137.98
			<i>Externo</i>	15.44	2047.46	8.58
7	72.16	Disco 6	<i>Interno</i>	17.04	1841.71	6.33
			<i>Externo</i>	5.57	2990.17	96.23
8	77.78	Disco 7	<i>Interno</i>	5.63	4096.05	129.12
			<i>Externo</i>	15.39	3247.04	13.71

Tabla 34. Parámetros adimensionales. Baja tensión, capa 2.

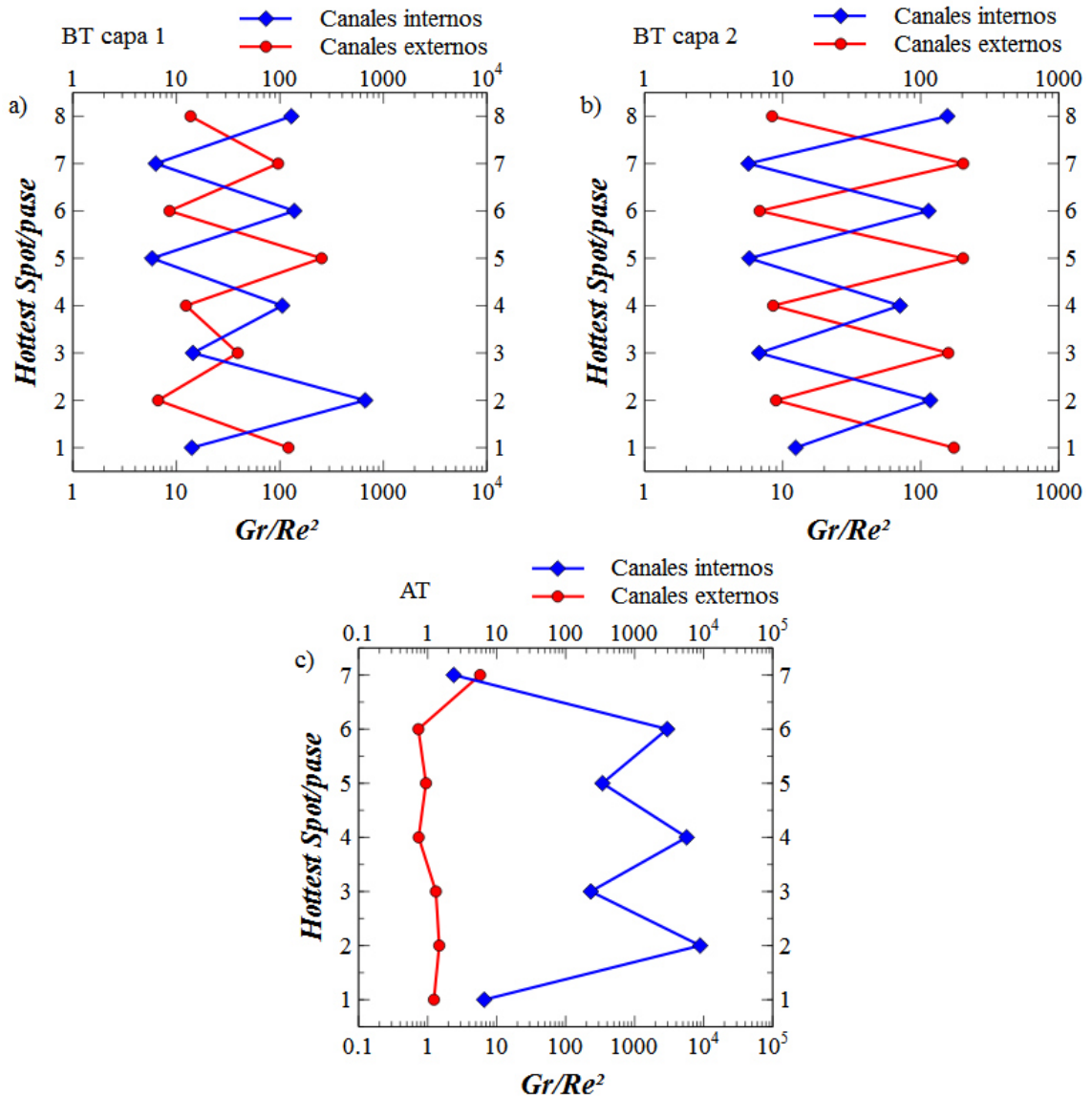
<i>BT Capa 2</i>						
<i>Pase</i>	$T_{HS}$	<i>Ubicación</i>	<i>Canal</i>	<i>Re</i>	<i>Gr</i>	$Gr/Re^2$
1	58.71	Disco 8	<i>Interno</i>	15.23	2887.2	12.43
			<i>Externo</i>	4.15	3001.38	174.01
2	58.57	Disco 5	<i>Interno</i>	5.02	2957.28	117.22
			<i>Externo</i>	13.44	1616.02	8.94
3	60.78	Disco 7	<i>Interno</i>	16.6	1862.51	6.75
			<i>Externo</i>	3.81	2313.01	158.62
4	62.98	Disco 6	<i>Interno</i>	6.11	2647.66	70.77
			<i>Externo</i>	13.25	1498.54	8.53
5	65.45	Disco 7	<i>Interno</i>	17.84	1824.21	5.72
			<i>Externo</i>	3.44	2409.85	202.76
6	68.03	Disco 7	<i>Interno</i>	4.96	2817.33	114.14
			<i>Externo</i>	14.97	1526.65	6.81
7	70.54	Disco 7	<i>Interno</i>	18.49	1934.98	5.65
			<i>Externo</i>	3.55	2563.02	203.29

8	74.67	Disco 8	<i>Interno</i>	4.8	3596.45	156.15
			<i>Externo</i>	15.95	2134.48	8.38

Tabla 35. Parámetros adimensionales. Alta tensión.

<i>AT</i>						
<i>Pase</i>	$T_{HS}$	<i>Ubicación</i>	<i>Canal</i>	<i>Re</i>	<i>Gr</i>	$Gr/Re^2$
1	56.29	Disco 2	<i>Interno</i>	14.54	1399.19	6.61
			<i>Externo</i>	34.82	1496.71	1.23
2	73.53	Disco 14	<i>Interno</i>	0.56	2827.05	8892.89
			<i>Externo</i>	47.73	3356.75	1.47
3	71.04	Disco 1	<i>Interno</i>	1.62	608.87	231.49
			<i>Externo</i>	47.24	2938.62	1.31
4	71.46	Disco 14	<i>Interno</i>	0.62	2204.11	5664.77
			<i>Externo</i>	50.11	1863.74	0.74
5	73.62	Disco 1	<i>Interno</i>	1.52	796.46	341.43
			<i>Externo</i>	49.61	2328.41	0.94
6	78.78	Disco 14	<i>Interno</i>	0.93	2581.62	2964.08
			<i>Externo</i>	52.49	2025.11	0.73
7	86.89	Disco 9	<i>Interno</i>	35.98	3094.06	2.38
			<i>Externo</i>	26.45	4031.99	5.75

Los resultados de la correlación  $Gr/Re^2$  reportados en las tablas anteriores, se presentan nuevamente en las Gráficas 30-a), -b) y -c). En ellas se muestra la variación de  $Gr/Re^2$  con respecto al punto caliente que posee cada pase para visualizar las tendencias de las fuerzas dominantes a lo largo del paquete de bobinas.



Gráfica 30.  $Gr/Re^2$  en canales verticales internos y externos. a) Baja tensión, capa 1. b) Baja tensión, capa 2. c) Alta tensión.

El comportamiento zigzagueante observado en las Gráficas 30 para las dos capas de la bobina de baja tensión es consistente con la locación de la entrada al pase posterior, es decir, el aumento del valor de  $Gr/Re^2$  para los puntos calientes de ambas capas de la baja tensión en el pase uno, se localiza en el canal vertical externo; mientras que el valor de  $Gr/Re^2$  registrado en el canal interno, el cual posee el ducto de salida al pase posterior, presenta un orden de magnitud menor. Al avanzar a lo largo del eje axial de la fracción periódica del devanado vemos que las tendencias anteriores son inversas en el pase dos con respecto al pase uno, pues son ahora los canales externos los que poseen valores de  $Gr/Re^2$  inferiores por más de un orden de magnitud a los registrados



en los canales internos, continuando con la misma tendencia de variación a lo largo de los 6 pases restantes. Recordando que los puntos calientes registrados en todos los pases de ambas capas de la bobina de baja tensión se encuentran en zonas relativamente centradas a dichos pases, es claro que las variaciones zigzagueantes existen debido a la reorientación que toma el curso del fluido gracias a los redireccionadores entre los pases. Esto se aprecia en la Figura 91; haciéndose evidente el aumento en la velocidad del aceite en el canal vertical que posee la interconexión hidráulica al pase posterior.

Por su parte, la bobina de alta tensión, que posee siete pases, presenta una tendencia también en zigzag en los canales verticales del lado interno mientras que en los canales verticales externos presenta un comportamiento mucho más constante. Los puntos calientes de la bobina de alta tensión están ubicados al principio y al final de cada pase con excepción del pase siete (disco 2 en pase 1, disco 14 en pase 2, disco 1 en pase 3, disco 14 en pase 4, disco 1 en pase 5, disco 14 en pase 6 y disco 9 en pase 7). La existencia de los puntos calientes en los conductores ubicados al inicio o final de los pases de la bobina de alta tensión se debe al hecho de que los canales internos manejan flujos másicos y velocidades muy por debajo de las registradas en la zona del punto caliente pero del costado exterior, ello debido a la reducción del diámetro hidráulico presente en cada uno de los canales inicial y final de los pases 2, 3, 4, 5 y 6. En la Figura 91 se aprecia que para los puntos calientes del pase 2 y 3 de la bobina de alta tensión (ubicados en los discos 14 y 1, respectivamente) el redireccionador de fluido se encuentra ubicado en el canal vertical externo, por lo que los canales verticales internos presentan muy bajos niveles de flujo másico, menor aún en el pase 2, produciendo un número de *Reynolds* excesivamente bajo, de apenas 0.56 contra un número de *Grashof* de 2827.05, lo que se traduce en un dominio total de fuerzas de flotación por sobre las fuerzas inerciales  $Gr/Re^2 = 8892.89$ . Apenas al cambio del pase dos al tres a través del canal exterior, nos encontramos al conductor de mayor temperatura en la posición uno. Figurando el canal inferior al primer conductor como uno de los que ven reducido su diámetro hidráulico, el número de *Reynolds* del costado interno (lado opuesto al cambio de sección) asciende a 1.62, mientras que el respectivo número de *Grashof* resulta de 608.87, lo que se traduce en  $Gr/Re^2 = 231.492$  que si bien es un valor que aun favorece a las fuerzas de flotación sobre las fuerzas inerciales, resulta un orden de magnitud inferior al del pase anterior. Este comportamiento resulta similar en los canales internos en pases superiores por la misma condición descrita en los pases 2 y 3 (pases pares de  $Gr/Re^2 \cong 10^4$  y pases impares de  $Gr/Re^2 \cong 200$ ).

Para los canales del costado externo de la bobina de alta tensión, el resultado de la correlación  $Gr/Re^2$  se mantiene muy constante en valores apenas superiores a 1 (ligeramente inferior en los pases 4, 5 y 6) debido a una situación inversa al canal interno. El punto caliente del pase uno, localizado al principio de dicho pase, posee un flujo dominante en el canal vertical externo a esa altura. En el pase dos, el punto caliente, ubicado en el disco 14, posee el redireccionador de aceite ubicado precisamente en el canal vertical externo y a pesar de que el pase posterior (pase 3) redirecciona el aceite a través del canal vertical interno, al tener este pase el punto caliente al principio del mismo (disco 1) el flujo de aceite en la zona del punto caliente se mantiene alto debido al ingreso del aceite del pase previo. Por este motivo se concluye que los esfuerzos inerciales están en balance con los esfuerzos de flotación, para el canal vertical externo de la bobina de alta tensión  $Gr/Re^2 \cong 1$ . Esta tendencia que se describió para los pases 1, 2 y 3 es constante en los pases restantes 4, 5, 6 y 7.

En resumidas cuentas, la distribución de los canales en sentido zigzag favorece en gran medida al flujo de fluido para el costado externo de la bobina de alta tensión. Sin embargo, la existencia de canales horizontales de menor diámetro hidráulico al inicio y al final de los pases 2, 3, 4, 5, 6 perjudica las condiciones de flujo en el costado interno. La bobina de baja tensión, por su parte, demostró verse en menor medida afectada por la reducción de los diámetros hidráulicos en los canales horizontales inferior y superior en cada pase. Si bien estos no resultan ser los responsables de la aparición de los puntos calientes, se prevé que el aumento en su sección transversal mantendría una fracción de flujo de fluido más balanceada tanto en canales internos como externos, aún con los cambios impuestos por los redireccionadores. Un flujo de fluido más eficiente supone entonces una mayor remoción de calor.

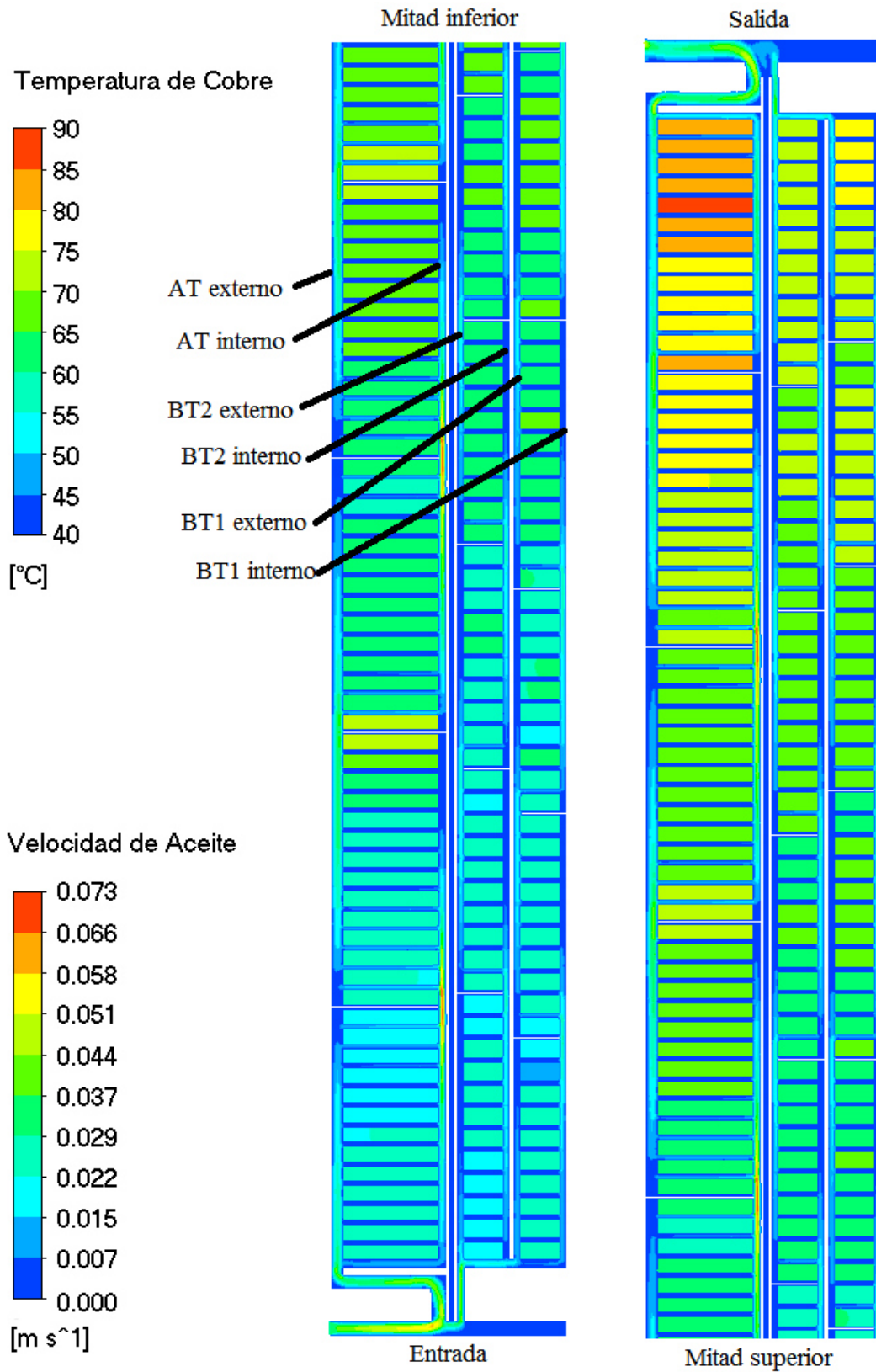


Figura 91. Campo de velocidades del aceite y distribución de temperatura del cobre.

La distribución de canales horizontales resulta un parámetro de diseño primordial a la hora del dimensionamiento de una máquina de este tipo. Si bien la configuración tipo Zigzag de los redireccionadores de aceite entre los pases presume una mejor distribución del fluido refrigerante, la existencia de canales horizontales de menor sección transversal al inicio y final de los pases produce un decremento en la velocidad del fluido en esas zonas. El aumento de los esfuerzos cortantes debido a la reducción de la sección transversal de los canales inicial y final impide que el aceite se mueva bajo el primer disco así como sobre el último, siendo estas zonas las que presentaron las mayores elevaciones de temperatura de cobre en la bobina de alta tensión y, en menor medida, también mermó la red hidráulica de la bobina de baja tensión. Es decir, debido a esta reducción del diámetro de los canales extremos en los pases, se produce una caída en los flujos máxicos de los mismos. Al aumentar la sección transversal de los canales horizontales inicial y final en todos los pases, se prevé una distribución más eficaz del flujo de aceite, logrando con ello, una muy probable reducción en las temperaturas críticas registradas en cada pase (puntos calientes del pase) y de la misma manera en el punto caliente global (Hottest Spot)

## 6. CONCLUSIONES.

El presente trabajo describe el desarrollo de una metodología de cómputo que permite determinar la distribución de temperaturas a lo largo de los devanados de baja y alta tensión debido a la circulación de aceite refrigerante a través de canales en un transformador trifásico de potencia. Esto se logra a partir del cálculo de las pérdidas originadas electromagnéticamente que se producen bajo condiciones de carga y no carga en un estudio electromagnético periódico.

La metodología de simulación propuesta consiste en un estudio electromagnético periódico de un transformador trifásico de potencia operando bajo condiciones de plena carga para obtener una distribución de la intensidad de campo magnético a lo largo de la máquina en todas sus estructuras. A partir de esta distribución, se obtiene el valor de pérdidas de potencia en todos y cada uno de los elementos susceptibles a inducción de corrientes de *Eddy* utilizando modelos analíticos que acortan los tiempos de solución de los estudios. Una vez con la distribución espacial de pérdidas de potencia de toda la máquina, se genera una función que modele la tasa de generación volumétrica de calor por fenómenos electromagnéticos en los conductores de las bobinas de baja y alta tensión para ser empleada como término fuente en un estudio de transferencia de calor conjugada donde el objetivo ahora es estudiar la manera en que el calor, aproximado en el estudio anterior, es disipado mediante el sistema de refrigeración que los devanados poseen en condiciones de flujo de fluido de régimen ONAN; para así caracterizar la distribución de flujo de aceite y la temperatura de los conductores de cobre y sus aislantes, así como la ubicación de los puntos calientes locales en los pases de las bobinas y el punto caliente global.

Se ha empleado para el modelado computacional del transformador, una máquina trifásica de 50 MVA's, 7.2/24 kV a una frecuencia de 60 Hz (bobinas de baja y alta tensión únicamente) operando bajo régimen de enfriamiento ONAN.

Los modelos electromagnéticos realizados bajo los criterios de mallado propuestos del modelo CAD mostraron resultados congruentes con respecto a la distribución de las líneas de campo magnético reportada en el estado del arte; de los cuales se sustrajo y evaluó la información pertinente para determinar las pérdidas por corrientes de *Eddy* inducidas en los elementos estructurales contemplados.

La máquina, caracterizada en un instante de tiempo que promueve un flujo magnético máximo en la pierna central del núcleo

( $t = 6.9141e - 003 s$ ) registró una eficiencia global aproximada al 99.86% teniendo la mayor cantidad de pérdidas de potencia por inducción de corrientes de *Eddy* en las bobinas devanadas (6.678 kW); la segunda mayor cantidad de pérdidas de este tipo registrada se localiza en el núcleo ferromagnético (4.93 kW) y en menores cantidades en el resto de los elementos de sujeción y apriete de la parte viva (2.355 kW) y el tanque contenedor (0.64 kW). La tasa de incertidumbre que estos resultados poseen es debida a las simplificaciones geométricas empleadas para mantener alcanzable los objetivos planteados, sin embargo, la distribución espacial del campo magnético así como los niveles de intensidad de corrientes parásitas desarrolladas por los elementos, son la pauta necesaria para optimizar la ubicación de las estructuras así como su forma y las propiedades de los materiales que los compone, para así reducir los niveles de potencia que las pérdidas extrañas suponen.

El acoplamiento de los fenómenos, mediante información sustraída a partir de los modelos electromagnéticos, e implementada en modelos termohidráulicos, se realizó con éxito utilizando funciones definidas por usuario. Dichas funciones facilitaron el modelado de casos de estudio que contemplan las pérdidas extrañas ocurrientes en las bobinas devanadas de los transformadores aunadas a las pérdidas inherentes al flujo de corrientes de carga a través de conductores eléctricos.

Los estudios termohidráulicos presentados muestran, en una comparativa de los perfiles de temperatura de los conductores de cobre, la relevancia que supone la inclusión de las pérdidas totales de los devanados (pérdidas por corrientes de carga y pérdidas por corrientes de *Eddy* en cobre) y los niveles de sobreelevación de temperatura que produce la inducción de corrientes parásitas en dichas zonas.

Los incrementos de temperatura que supone el despreciar o incluir las pérdidas extrañas en las bobinas, a pesar que la potencia originada por pérdidas extrañas posee una distribución no homogénea mucho más agresiva solo en los extremos inicial y final de la componente axial de la estructura, el aumento de la temperatura se hizo evidente en la mayoría de los conductores eléctricos de los devanados (99.24% del cobre) con incrementos que llegan a ser de hasta los 8.28 °C para la capa uno y 6.47 °C para la capa dos, ambas de la bobina de baja tensión, y de 11.51 °C para la bobina de alta tensión.

Al analizar el flujo entre los canales horizontales que las bobinas de baja y alta tensión poseen para aumentar el área de transferencia de calor y mejorar la remoción de calor del cobre, se hace evidente que la distribución de canales con direccionadores de flujo que varían su posición en cada pase (secuencia

zigzag) producen, en la tasa de flujo de fluido horizontal y en las temperaturas de los conductores que se intercalan entre dichos canales, una variación que asemeja a un funciones cóncava y convexa encontradas, es decir, el aumento del flujo horizontal produce una reducción en la temperatura del cobre, mientras que la caída del flujo horizontal genera un alza en la temperatura.

Finalmente, al observar la correlación de los parámetros adimensionales que modelan la intensidad de las fuerzas inerciales y las fuerzas de flotación en una ecuación que determina la tasa de flujo de calor por convección natural contra la que ocurre por efectos de convección forzada ( $Gr/Re^2$ ), se observa que para la bobina de alta tensión, cuyos puntos calientes existentes en cada pase localizados al inicio o al final del conteo de los conductores en seis de los siete pases que posee, los esfuerzos cortantes a los que es sometido el fluido refrigerante en los canales circundantes a dichos puntos calientes son muy superiores causa a la reducción de su diámetro (canales previos y posteriores a los cambios de pase). La existencia de estos canales de sección transversal menor a los demás conlleva a un aumento en los esfuerzos cortantes a los que el fluido es sometido, reduciendo las velocidades locales así como el flujo másico, desencadenando una baja en el coeficiente de transferencia de calor de los conductores vecinos a canales de menor área. Este aumento de esfuerzos cortantes, reduce entonces el flujo de fluido y el coeficiente de transferencia de calor, aumentando la temperatura de los elementos y poniendo en riesgo la integridad del papel que funge como aislante dieléctrico el cual, al ver reducida su resistencia mecánica, sufre también de bajas en su resistencia eléctrica.

Por lo anterior, se demuestra que fue factible determinar la distribución de la intensidad de campo así como la densidad de flujo magnético, con una variación sujeta a una frecuencia de 60 Hz en los elementos estructurales del transformador bajo las simplificaciones geométricas utilizadas y con las condiciones de frontera y parámetros de entrada propuestos.

La metodología de procesamiento de información respaldada en modelos experimentales reportados en el estado del arte, para aumentar la veracidad de los resultados tales como generación de calor en condiciones de carga del transformador fue satisfactoriamente probada en este estudio, permitiendo determinar las pérdidas de potencia en la máquina, así como una correcta migración de la información pertinente a modelos termohidráulicos posteriores.

El estudio de transferencia de calor conjugada realizado para identificar los niveles de temperatura en zonas críticas donde se han de suscitar puntos calientes dentro de las bobinas devanadas del transformador resultó en un

modelo confiable, coherente con tendencias reportadas en el estado del arte, de suma importancia para afianzar las técnicas de diseño y dimensionamiento de máquinas de este tipo.

La comparativa de los perfiles de temperatura y la ubicación de los puntos calientes de los devanados que se realizó al estudiar únicamente las pérdidas por corrientes de carga contra la sumatoria de pérdidas de carga y extrañas dejó en claro la relevancia que estas últimas suponen. Los casos de estudio permitieron conocer que el incremento de temperatura de los conductores es de proporciones transcendentales y, aun cuando contemplar las pérdidas extrañas no modifica la ubicación de los puntos calientes, resulta de vital importancia monitorear la formación de corrientes de *Eddy* debido a los aumentos que suponen en el cobre y los aislantes, como aquí se mostró.

Tras Identificar el régimen del flujo del fluido que transporta el calor de los conductores devanados de mayor temperatura desde las bobinas hacia el exterior a través de la red de canales que en éstas existe; se demostró que la sección transversal de los canales horizontales superior e inferior en los pases de ambas bobinas produce caídas en las tasas de flujo másico, lo que deriva en zonas de aumento de temperatura debido al decremento en las fuerzas inerciales contempladas como condición de frontera de este modelo, ante las fuerzas de flotación producto del transporte convectivo de calor.

Si bien las pérdidas producidas por el circuito magnético son consideradas inherentes al fenómeno, y las pérdidas del circuito eléctrico podrían ser subsanadas solo aumentando la sección transversal de los conductores para reducir su resistencia eléctrica, esto último elevaría el costo de producción de la máquina así como sus dimensiones. Por ello, la propuesta más relevante que este estudio concluye es derivada a partir de los resultados termohidráulicos reportados. Se aprecia que es de vital importancia plantear un proceso de optimización de la red de canales horizontales a través de la máquina para reducir los esfuerzos cortantes que se producen al existir cambios de diámetro hidráulico en ductos. Un redimensionamiento de canales horizontales y verticales que permita mantener una relación de  $Gr/Re^2 \cong 1$  representaría una condición de operación mucho más factible para el flujo de aceite entre los ductos, evitando el aumento de temperatura debido a caídas de flujo; tal fue el caso del ducto vertical externo de la bobina de alta tensión.



En conclusión, el estudio que se presentó cumple como una estrategia para determinar las zonas donde las temperaturas alcanzan puntos críticos, como herramienta computacional que facilita la ejecución de estudios experimentales, prediciendo la ubicación de los puntos calientes para la instalación de sensores de temperatura en ubicaciones óptimas que aseguren la confiabilidad de las pruebas a las que este tipo de máquinas es sometido para evaluar su desempeño.

Se ha demostrado que es posible desarrollar una metodología que permita determinar la distribución de pérdidas anómalas totales de un transformador trifásico, así como la distribución espacial de temperatura que producen estas pérdidas. Esto último en una fracción axisimétrica angularmente periódica del paquete de bobinas de baja y alta tensión, bajo condiciones de operación nominal mediante el uso de simulaciones computacionales multifísicas que incluyan el acoplamiento de fenómenos electromagnéticos y termofluidodinámicos, como una herramienta confiable para la predicción de los puntos calientes de la máquina y así acortar los periodos de ubicación y medición experimental de los factores que reducen la vida operacional de los aislantes dieléctricos de los conductores.

## 7. TRABAJO FUTURO.

Con el fin de enriquecer la utilidad de la metodología descrita en este documento así como acrecentar sus alcances, se pretende ampliar a un modelo termohidráulico completo; que contemple todos los elementos hidrodinámicos de la máquina, empleando como términos fuente de calor los obtenidos en estudios electromagnéticos tal como el aquí descrito, analizando el comportamiento del fluido refrigerante no solo en el interior del paquete de bobinas de baja y alta tensión sino su interacción con el resto de los elementos estructurales que también suministran calor al sistema y como el líquido refrigerante transporta esa energía a los intercambiadores de calor posicionados en el exterior del tanque, formando la celda convectiva que funge como la premisa de operación de transformadores que trabajan bajo el régimen de enfriamiento ONAN.

Consolidar el trabajo presentado mediante la comparativa de resultados empleando las metodologías planteadas contra información obtenida experimentalmente para verificar su veracidad y exactitud, como parte de un abanico de estudios que modelen diversos comportamientos además de la operación nominal del transformador, como lo son las condiciones bajo descargas atmosféricas o inducción de corrientes geomagnéticas y como estas condiciones adversas impactan en el comportamiento de la máquina.

## NOMENCLATURA

$A$	Potencial vectorial magnético ( $Wb/m$ )
$a$	Relación de transformación (adimensional)
$\alpha$	Difusividad térmica ( $k/\rho * C_p$ )
$B$	Densidad de flujo magnético ( $T, Wb/m^2$ )
$\beta$	Coefficiente de expansión volumétrica ( $^{\circ}C^{-1}$ )
$\beta_e$	ángulo de histéresis ( $^{\circ}$ )
$C_p$	Calor específico ( $J/kg * K$ )
$D$	Densidad de flujo eléctrico ( $C/m^2$ )
$\delta$	Capa límite (m)
$\delta_e$	Profundidad de piel (m)
$E$	Intensidad de campo eléctrico ( $V/m$ )
$\epsilon_0$	Permitividad eléctrica del vacío ( $8.854e^{-12} F/m$ )
$\epsilon$	Fuerza electromotriz, fem (V)
$f$	Frecuencia (Hz, 1/s)
$g$	Aceleración gravitacional ( $m/s^2$ )
$H$	Intensidad de campo magnético ( $A/m$ )
$h$	Coefficiente de transferencia de calor ( $W/m^2 * ^{\circ}C$ )
$I$	Intensidad de corriente (A)
$J$	Densidad de corriente eléctrica ( $A/m^2$ )
$k$	Conductividad térmica ( $W/m^{\circ}C$ )
$\nabla$	Operador diferencial espacial ( $\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$ )
$\mu$	Viscosidad dinámica ( $kg/m * s, Pa * s$ )
$\mu_0$	Permeabilidad magnética del vacío ( $4\pi e^{-7} N/A^2$ )
$\mu_m$	Permeabilidad magnética absoluta ( $N/A^2$ )
$\mu_r$	Permeabilidad magnética relativa ( $\mu_m/\mu_0$ )
$N$	número de vueltas de conductor
$\nu_m$	Reluctividad magnetica ( $A^2/N$ )
$\nu$	Viscosidad cinemática ( $m^2/s$ )
$p$	Presión (Pa)
$\Phi_e$	Flujo eléctrico ( $V * m$ )
$\Phi_m$	Flujo magnético ( $Wb$ )
$q''$	Flux de calor ( $W/m^2$ )
$\dot{q}$	Generación de calor ( $W/m^3$ )
$q_e$	Carga eléctrica (C, $6.2415e^{18}$ electrones)
$R$	Resistencia eléctrica ( $\Omega$ )
$\rho$	Densidad másica ( $kg/m^3$ )
$\rho_e$	Resistividad eléctrica ( $\Omega * m$ )
$\rho_q$	Densidad de carga volumétrica ( $C/m^3$ )
$\sigma$	Conductividad eléctrica ( $S/m$ )

---

$s$	<i>Tiempo (s)</i>
$T$	<i>Temperatura (°C)</i>
$\tau_{xx}$	<i>Esfuerzo normal (Pa)</i>
$\tau_{xy}$	<i>Esfuerzo tangencial (Pa)</i>
$u$	<i>Componente x de vector de velocidad (m/s)</i>
$\hat{U}$	<i>Energía interna (J/m<sup>3</sup>)</i>
$V$	<i>Potencial escalar eléctrico (V), Voltaje (V)</i>
$v$	<i>Componente y del vector de velocidad (m/s)</i>
$V$	<i>Velocidad (m/s)</i>
$w$	<i>Componente z del vector de velocidad (m/s)</i>
$\omega$	<i>Frecuencia angular (<math>2 * \pi * f</math>)</i>
$X$	<i>Reactancia (<math>j\Omega</math>)</i>
$Z$	<i>Impedancia (<math>j\Omega</math>)</i>
$j$	<i>Unidad imaginaria (<math>\sqrt{-1}</math>)</i>

## BIBLIOGRAFÍA

- [i] “*Theory Reference for the Mechanical APDL and Mechanical Applications*”.
- [ii] “*Low Frequency Electromagnetics Analysis Guide*”.
- [iii] “*On the Use of Magnetic Vector Potential in the Finite Element Analysis of Three-Dimensional Eddy Currents*”. **Oszkar Bíró, Kurt Preis**. IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS, VOL. 25, NO. 4, JULY 1989.
- [iv] “*Alternative Vector Potential Formulations of 3-D Magnetostatic Field Problems*”. **Z. J. Csendes, J. Weiss, S. R. H. Hool**. IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS, VOL. MAG. 18, NO. 2, MARCH 1982.
- [v] “*Three-Dimensional Vector Potential Analysis for Machine Field Problems*”. **M. V. K. Chari, A. Konrad, M. A. Palmo, J. D’angelo**. IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS, VOL. MAG. 18, NO. 2, MARCH 1982.
- [vi] “*Methods for Eddy Currents Computations in Three Dimensions*”. **C. S. Biddlecombe, E. A. Heighway, J. Simkin, C. W. Trowbridge**. IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS, VOL. MAG. 18, NO. 2, MARCH 1982.
- [vii] “*Magnetic vector potential and Electric Scalar Potential in Three-Dimensional Eddy Current Problem*” **Toshiya Morisue**. IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS, VOL. MAG. 18, NO. 2, MARCH 1982.
- [viii] “*Teoría Electromagnética*”. **Hayt Buck**, Mc Graw Hill, Octava edición, ISBN: 978-607-15-0783-9.
- [ix] “*Numerical Simulation and Experimental Validation of Coupled Flow, Heat Transfer and Electromagnetic Problems in Electrical Transformers*”. **Jacek Smolka, Oszkár Bíró, Andrzej J. Nowak**. Archives of Computational Methods in Engineering, Journal No. 11831, ISSN 1886-1784, Springer, May 2009.
- [x] “*A Simple Method for Calculating Winding Temperature Gradient in Power Transformers*” **Simon A. Ryder**. IEEE TRANSACTIONS ON POWER DELIVERY, Vol. 17, No. 4, OCTOBER 2002.
- [xi] “*A Simple Method for Calculating Core Temperature Gradient in Power Transformers*” **Simon A. Ryder**. IEEE TRANSACTIONS ON POWER DELIVERY, Vol. 19, No. 2, APRIL 2004.
- [xii] “*Transformer Engineering. Design, Technology, and Diagnostics*” **S. V. Kulkarni, S. A. Khaparde**. 2<sup>nd</sup> Edition, CRC Press, ISBN: 978-1-4398-5377-11
- [xiii] “*Edge element formulations of eddy current problems*” **Oskár Bíró**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, ELSEVIER, DICEMBER 1997.

- [xiv] “*Approximate prediction of losses in transformer plates*” **József Pávó, Imre Sebestyén, Szabolcs Gyimóthy, Oszkár Bíró**. INTERNATIONAL JOURNAL FOR COMPUTATION AND MATHEMATICS IN ELECTRICAL AND ELECTRONIC ENGINEERING, Vol. 22, No. 3, 2003.
- [xv] “*Surface Impedance for 3D Non-linear Eddy Current Problems – Application to Loss Computation in Transformers*” **Christophe Guérin, Gérard Meunier**. IEEE TRANSACTIONS ON POWER DELIVERY, Vol. 32, No. 3, MAY 1996.
- [xvi] “*A Novel Iron Loss Reduction Technique for Distribution Transformers Based on a Combined Genetic Algorithm—Neural Network Approach*” **Pavlos S. Georgilakis, Nikolaos D. Doulamis, Anastasios D. Doulamis, Nikos D. Hatziaargyriou, Stefanos D. Kollias**. IEEE TRANSACTIONS ON SYSTEMS, MAN, AND CYBERNETICS-PART C: APPLICATIONS AND REVIEWES, Vol. 31, No. 1, FEBRUARY 2001.
- [xvii] “*Modeling of the mixed convection in the windings of a disc-type power transformer*” **Jean-Michel Mufuta, Eric Van Den Bulck**. APPLIED THERMAL ENGINEERING, SEPTEMBER 1998.
- [xviii] “*Modeling of mass flow distribution around an array of rectangular blocks in-line arranged and simulating the cross-section of a winding disc-type transformer*” **Jean-Michel Mufuta, Eric Van Den Bulck**. APPLIED THERMAL ENGINEERING, OCTOBER 1999.
- [xix] “*Oil Cooling for Disk-Type Transformer Windings—Part 1: Theory and Model Development*” **Jiahui Zhang, Xianguo Li**. IEEE TRANSACTIONS ON POWER DELIVERY, Vol. 21, No. 3, JULY 2006.
- [xx] “*Thermal Management of High Power Transformer in Different Outdoor Environment Conditions*”. **Khalid Sheltami, Gemal Refai-Ahmed, M. H. Shwehdi**. Inter Society Conference on Thermal Phenomena, IEEE, 2004.
- [xxi] “*Numerical Investigation of 3D Flow and Thermal Effects in a Disc-Type Transformer Winding*” **F. Torriano, P. Pitcher, M. Chaaban**. APPLIED THERMAL ENGINEERING, NOVEMBER 2011.
- [xxii] “*Thermal-Electromagnetic Coupling in the Finite-Element Simulation of Power Transformers*” **Kurt Preis, Oszkár Bíró, Gerhard Buchgraber, Igor Ticar**. IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS, Vol. 42, No. 4, APRIL 2006.
- [xxiii] “*Optimization of Transformer Overload Using Advanced Thermal Modeling*” **P. Picher, F. Torriano, M. Chaaban, S. Gravel, C. Rajotte, B. Girard**. INTERNATIONAL CONFERENCE ON LARGE HIGH VOLTAGE ELECTRIC SYSTEMS, CIGRE. PARIS, FRANCE, 2010.
- [xxiv] “*Numerical Modeling of a Plane Radiator Used in a Power Transformer Cooling System*” **H. Nabati, J. Mahmoudi**. To be published in the Journal of Applied Energy.

[xxv] *“Fundamentals of Heat and Mass Transfer”* **Frank P. Incropera, David P. Dewitt**. 4th edition, Wiley, ISBN: 978-0471304609

[xxvi] *“Convection Heat Transfer”* **Adrian Bejan**. Wiley, ISBN: 978-0470900376

[xxvii] *“Fenómenos de Transporte”* **R. Byron Bird, Warren E. Stewart, Edwin N. Lightfoot**. Reverté, ISBN: 978-968-6708-17-2.

[xxviii] *“Numerical Heat Transfer and Fluid Flow”* **Suhas Patankar**. CRC Press, ISBN: 978-0891165224.

[xxix] *“Introduction to the Finite Element Method in Electromagnetics”* **Anastasis C. Polycarpou**, Morgan & Claypool, ISBN: 978-1598290462.

[xxx] *“Spotlight on Modern Transformers”* **Pavlos S. Georgilakis**, Springer, 978-1-84882-667-0

[xxxii] *“Calculation of Losses in Laminated Ferromagnetic Materials”* **Imre Sebestyén, Szabolcs Gyimóthy, József Pávó, Oszár Bíró**. IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS, Vol. 40, No. 2, MARCH 2004.

[xxxiii] *“Stray Losses in Power Transformer Tank Walls and Construction Parts”* **Lenart Kralj, Damijan Miljavec**. XIX INTERNATIONAL CONFERENCE ON ELECTRICAL MACHINES – ICEM 2010, ROME

[xxxiiii] *“Temperature Distribution in a Disc-Type Transformer Winding”* **Jaury Wijaya, Wenyu Guo, Tadeusz Czaszejko, Daniel Martin, Nick Lelekakis, Dejan Susa**. 7<sup>th</sup> Conference on Industrial Electronics and Applications ICIEA. 2012.

[xxxv] *“IEEE Standard Requirements for Liquid-Immersed Power Transformers”* **IEEE Std C57.12.10™ – 2010**.