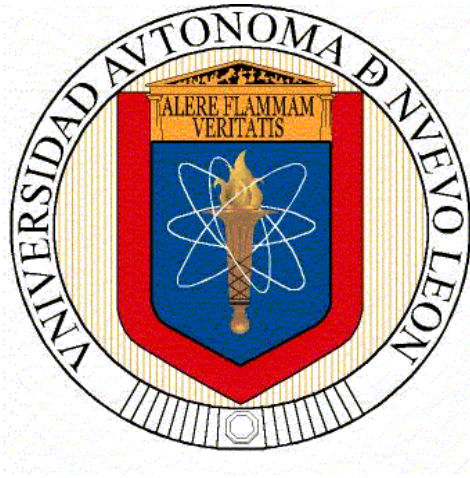


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA



SINTONIZANDO A LA FRECUENCIA PORTADORA CON EL
MÉTODO DE PRONY

POR

RODOLFO BETANZOS CERQUEDA

EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA
INGENIERÍA ELÉCTRICA

MAYO 2015

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO**



TESIS

**SINTONIZANDO A LA FRECUENCIA PORTADORA CON EL
MÉTODO DE PRONY**

**POR
ING. RODOLFO BETANZOS CERQUEDA**

**EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA
INGENIERÍA ELÉCTRICA**

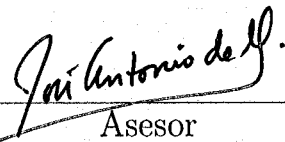
SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN

MAYO DE 2015

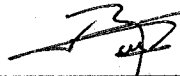
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

Los miembros del comité de tesis recomendamos que la tesis
"Sintonizando a la frecuencia portadora con el método de Prony"
realizada por el alumno Ing. Rodolfo Betanzos Cerqueda, con
matrícula 1649873, sea aceptada por su defensa como opción al grado de
Maestro en Ciencias de Ingeniería Eléctrica.

El Comité de Tesis



Asesor
Dr. José Antonio de la O Serna



Revisor
Dr. José Ramón Rodríguez Cruz

Revisor
Dr. César Vargas Rosales

Vo. Bo.
Dr. Simón Martínez Martínez
Subdirector de Estudios de Posgrado

San Nicolás de los Garza, Nuevo León, Mayo del 2015

El presente trabajo se lo dedico a mi familia, que siempre han creído en mi y me han brindado su apoyo incondicional, estoy muy agradecido con cada uno de ustedes : Papá, mamá, pelenca, pelenquita y mi cuñado, los quiero mucho.

Agradecimientos.

Primeramente agradeciendo a Dios por darme la segunda oportunidad de tener la dicha de vivir, por no abandonarme en los momentos más difíciles y brindarme instantes de alegría que hacen que mi vida tenga sentido.

A mi familia, por el ánimo que inyectaron en mí siempre que hablé con ellos por teléfono, porque siempre me alientan a no rendirme ante cualquier situación, porque se que siempre cuento con el apoyo de cada uno de ellos aún cuando exista distancia de por medio. A Estefania, por también alentarme a terminar esta etapa en mi vida y muchas veces entender mis malos ratos.

A mi asesor, el Dr. José Antonio de la O Serna, por sus consejos tanto personales como académicos, por ser un guía en los momentos difíciles y no abandonarme en las etapas de frustración durante el desarrollo del presente trabajo, por alentarme siempre a buscar la verdad en la investigación.

A la Dra. Norma Patricia Puente Ramírez, Dr. José Ramón Rodríguez Cruz, Dr. Ignacio L. Ayala Ortiz y Dr. David A. Díaz Romero, gracias por las pláticas, consejos y por compartirme un poco de su conocimiento y experiencia, al final por ayudarme a obtener las bases académicas necesarias para el desarrollo del presente trabajo.

Al Dr. César Vargas Rosales, que como asesor externo de la presente tesis proporcionó todo el apoyo necesario a través de sus puntos de vista, comentarios y correcciones. Muchas gracias por externarme sus ideas y así poder abrir más el panorama del presente trabajo de investigación.

A mis compañeros de generación, que entre todos nos apoyamos más de una vez tanto en lo académico como en lo personal, que espero no perder el contacto con ellos porque forman parte importante de esta etapa de mi vida.

A mi compañero y amigo Victor Monárrez Martínez, que durante el tiempo en que rentamos juntos la casa me brindó su amistad y apoyo incondicional, de igual manera a sus papás que más de una vez me tendieron la mano.

A CONACYT y a la UANL-FIME , que gracias a las facilidades y apoyo brindado, hoy hacen posible la culminación de mis estudios de maestría.

Índice General

Índice General	vii
Índice de Tablas	ix
Índice de Figuras	x
1 Introducción.	3
1.1 Planteamiento del problema.	4
1.2 Antecedentes.	7
1.3 Propuesta.	9
1.4 Objetivo.	10
1.5 Metodología.	10
1.6 Justificación.	11
1.7 Estructura de la tesis.	14
2 Modulación	15
2.1 Sistema de comunicación digital	15
2.2 QAM.	17
2.3 16-QAM.	19
2.4 Densidad espectral de potencia 16-QAM.	20
2.5 Demodulación coherente.	22
2.6 Filtrado e Interferencia Intersimbólica.	24
3 Método propuesto.	29
3.1 Prony.	29
4 Resultados.	39
4.1 Introducción.	39
4.2 Ventana Rectangular, RRC y Ventana de Tukey	40
4.3 Estimador de Prony con frecuencia de portadora constante y variable.	46

4.4	Estimador de Prony con frecuencia de portadora constante y variable con presencia de AWGN.	50
4.5	Conclusiones.	55
5	Conclusiones.	57
A	Herramientas matemáticas	59
B	Comparación de Frecuencias+Variaciones contra Frecuencias estimadas con el método de Prony.	67
	Bibliografía	71

Índice de Tablas

B.0.1Frec.+Variación de 0.5 Hz vs Estimados de Prony.	68
B.0.2Frec.+Variación de 3.0 Hz vs Estimados de Prony.	68
B.0.3Frecuencia vs Estimados de Prony. Ruido EbNo:30dB	69
B.0.4Frecuencia vs Estimados de Prony. Ruido EbNo:10dB	69
B.0.5Frec.+Variación de 3.0Hz vs Estimados de Prony. Ruido EbNo:30dB	70
B.0.6Frec.+Variación de 3.0Hz vs Estimados de Prony. Ruido EbNo:10dB	70

Índice de Figuras

1.1	<i>Efecto de desplazamiento en fase y frecuencia de portadora.</i>	12
2.1	<i>Elementos básicos de un sistema de comunicación digital</i>	16
2.2	<i>Elementos básicos de un modulador QAM.</i>	18
2.3	<i>Constelación rectangular señal 16-QAM</i>	20
2.4	<i>Densidad espectral de potencia 16-QAM cuadrada y filtrada con RRC</i>	21
2.5	<i>Demodulador coherente QAM</i>	22
2.6	<i>Respuestas impulsional y frecuencial filtro RC</i>	26
2.7	<i>Respuestas filtro RC</i>	27
2.8	<i>Respuestas tiempo y frecuencia filtro RC</i>	28
2.9	<i>Constelación 16-QAM</i>	28
3.1	<i>Estimación frecuencias con método de Prony</i>	37
4.1	<i>Señal transmitida y recibida sistema de comunicación digital 16QAM</i>	40
4.2	<i>RRC y FFT de señal modulada</i>	41
4.3	<i>Estimados de frecuencia método de Prony con RRC</i>	42
4.4	<i>Dominio temporal y en frecuencia ventana Rectangular</i>	43
4.5	<i>FFT modulada y estimados de frec. método de Prony con ventana Rectangular</i>	43
4.6	<i>Dominio temporal y en frecuencia Ventana Tukey y Rectangular.</i> . . .	45
4.7	<i>FFT modulada y estimados de frec. método de Prony con ventana Tukey</i>	45
4.8	<i>Frecuencia sin desplazamiento y frecuencia estimada de Prony</i>	46
4.9	<i>Intervalos constantes de frecuencia</i>	47
4.10	<i>Frecuencia+Variación de 0.5 Hz vs Estimados de Prony.</i>	48
4.11	<i>Frecuencia+Variación de 3.0 Hz vs Estimados de Prony.</i>	48
4.12	<i>Frecuencia vs Estimados de Prony. Ruido EbNo:30dB</i>	50
4.13	<i>Frecuencia vs Estimados de Prony. Ruido EbNo:10dB</i>	51
4.14	<i>Frecuencia+Variación de 3.0Hz vs Estimados de Prony. Ruido EbNo:30dB</i>	52
4.15	<i>Frecuencia+Variación de 3.0Hz vs Estimados de Prony. Ruido EbNo:10dB</i>	52
4.16	<i>Curva BER para estimador de frecuencia método de Prony 16QAM</i> .	53

Acrónimos

- ASK:** Amplitude-shift keying – Modulación por desplazamiento de amplitud.
- AWGN:** Additive white Gaussian noise – Ruido blanco Gaussiano aditivo.
- BER:** Bit Error Rate – Tasa de error binario.
- dB:** Decibel.
- EbNo:** Relación energía por bit/Densidad espectral de potencia de ruido.
- IF:** Intermediate frequency – Frecuencia intermedia.
- ISI:** Intersymbol interference – Interferencia intersimbólica.
- LO:** Local Oscillator – Oscilador local.
- LPF:** Low pass filter – Filtro pasa bajos.
- PAM:** Pulse Amplitude-Modulation – Modulación por amplitud de pulsos.
- PSD:** Power spectral density – Densidad espectral de potencia.
- PSK:** Phase Shift Keying – Modulación por desplazamiento de fase.
- QAM:** Quadrature Amplitude Modulation – Modulación de amplitud en cuadratura.
- RC filter:** Raised cosine – Filtro de coseno levantado.
- RRC filter:** Root raised cosine – Filtro de raíz coseno levantado.
- SEP:** Sistemas eléctricos de potencia.
- SNR:** Signal to noise relation – Relación señal a ruido.

Capítulo 1

Introducción.

En los Sistemas de Comunicación existe la necesidad de realizar la medición, estimación y control de la señal que se tiene en la entrada del sistema para protegerlo de variaciones no deseadas de frecuencia. Es bien sabido que en los sistemas de comunicación los valores de frecuencia a la salida del transmisor no son los mismos que los que se tienen en la entrada del receptor. La frecuencia portadora sufre variaciones indeseables [14].

En todo sistema de comunicación, de manera ideal la frecuencia a la cual se transmitió la señal, debe ser la misma que se tiene en el demodulador en todo momento, sin embargo como se mencionó antes, ningún sistema de comunicación está exento de fluctuaciones, por lo tanto el receptor debe de acoplarse a la frecuencia de la señal que está recibiendo.

Cuando en el demodulador se tienen señales que no son ortogonales debido a una variación de frecuencia, la estimación de la señal (gráficamente representada por su constelación en coordenadas) se ve fallida debido al cambio angular de las coordenadas de referencia [15].

En cuanto a los Sistemas Eléctricos de Potencia (SEP), las variaciones de frecuencia se pueden interpretar como una advertencia de un posible colapso y se deben de tomar acciones en cuanto el sistema comience a oscilar para lograr que el mismo regrese a su estado estable [1].

Los métodos que están basados en un modelo que supone una frecuencia constante, son afectados de manera significativa por sus variaciones o fluctuaciones.

Debido a esto, bajo condiciones de fluctuación de frecuencia, es muy importante estimar con suficiente precisión dichas variaciones dinámicas.

1.1 Planteamiento del problema.

La sincronización se refiere a la recuperación de los parámetros de referencia de la señal recibida y al uso de estos parámetros para lograr la demodulación y la detección de los datos de la señal. Como se sabe, en los sistemas de comunicación la tarea final de los receptores es producir una réplica exacta de la secuencia de símbolos o señal que fue transmitida. Tanto en los sistemas de comunicación como en los SEP, la sincronización es de suma importancia.

Hablando de los sistemas de comunicación inalámbrica, en este caso Sistema Global para las Comunicaciones Móviles o GSM (Global System for Mobile communications), el proceso de sincronización de portadora que se lleva a cabo en la Estación Móvil o MS (Mobile Station) es vital para asegurar un correcto funcionamiento del sistema. Se requiere un monitoreo constante de las estaciones base al rededor de las estaciones móviles, debido a esto se desea un sistema de sincronización robusto y con una baja complejidad computacional. Estos sistemas de comunicación incorporan modulaciones como 16QAM y 32QAM para mejorar su transferencia de datos. Existe la necesidad trabajar con niveles de SNR aceptables. El efecto Doppler y la inestabilidad en los osciladores generan un desplazamiento en la frecuencia de la portadora. Antes que la MS pueda establecer una relación con la Estación Base o BTS (Base Station), el desplazamiento de frecuencia necesita ser estimado de manera precisa para inmediatamente ajustar el oscilador en la MS. En un sistema GSM, periódicamente se transmiten Ráfagas de Corrección de Frecuencias o FB (Frequency Correction Bursts) las cuales proveen la información necesaria para la sincronización, las portadoras del canal de control de difusión o BCCH (Broadcast Control Channel) proporcionan la información necesaria para la sincronización ya que es ahí donde las FB son transmitidas. Cuando la MS se encuentra operando, el BCCH es monitoreado para detectar la FB (una senoidal compleja cuyo valor de frecuencia está por encima de la frecuencia portadora). Para lograr la sincronización de frecuencia primero se debe llevar a cabo la detección de FB y después la estimación de la frecuencia de portadora desplazada por medio de la senoidal compleja de la FB. Después de la detección exitosa y estimación de la desviación, el oscilador local de la MS se sintoniza con el fin de establecer la sincronización de frecuencia.

El monitoreo constante de las Estaciones Base o BTS (Base Station) al rededor de la MS requiere la detección FB o FBD (FB Detection) y la estimación de desplazamiento de frecuencia o FOE (Frequency Offset Estimation) durante la operación del sistema [39].

El párrafo anterior simplifica una aplicación en donde existe la necesidad de una rápida y precisa sincronización, al igual que [40], todos los procesos se llevan a cabo en cuestión de milisegundos y se hablan de desplazamientos de frecuencia de partes por millón. Es en este sentido en que el método de Prony propuesto se toma como una alternativa a los métodos comunes utilizados como los Lazos de Enganche de Fase o PLL (Phase Locked Loop) los cuales se toman un poco mas de tiempo en realizar la sincronización debido a que la señal entrante tiene que ser comparada, filtrada y finalmente a través de un Oscilador Controlado por Voltaje o VCO (Voltage Controlled Oscillator) ajustar la señal para que el error en la comparación tienda a minimzarse. Cabe destacar que el proceso antes descrito se repite infinidad de veces hasta que el voltaje de control, o sea la señal de error, haga que la frecuencia del VCO se estabilice en un punto igual al promedio de la frecuencia de la señal de entrada al circuito. Si la frecuencia de la señal de entrada es suficientemente cercana a la frecuencia central del PLL, el oscilador loca quedará de cierta manera enclavado en frecuencia con la señal de entrada, pero generalmente siempre existirá una pequeña diferencia de fase entre ambas para mantener la tensión de error suficiente y obligar al oscilador local VCO a operar a esa frecuencia.

Debido a la variación de frecuencia se tiene la problemática de que al realizar el proceso de demodulación, esta fluctuación de frecuencia genera una oblicuidad en las señales utilizadas para este proceso, este fenómeno de oblicuidad se traduce en una realización incorrecta del proceso de demodulación.

Su solución requiere una buena estimación de la frecuencia real la cual nos permite recuperar la ortogonalidad requerida en la demodulación.

1.2 Antecedentes.

Las oscilaciones en un SEP involucran variaciones de amplitud, fase y frecuencia, dichos parámetros proporcionan información relevante acerca de la condición de operación en la cual se encuentra el sistema.

En los SEP, el uso del método de Prony de manera tradicional, proporciona las estimaciones de las amplitudes y frecuencias de los modos de oscilación electromecánicas. Recientemente se han realizado trabajos de investigación en los cuales el método de Prony se utilizó como estimador de frecuencia y el filtro de Fourier sincronizado se utilizó para estimar la amplitud y la fase. El método de Prony presentó más ventajas y mejor rendimiento en cuando a los valores estimados de amplitud y fase [1].

Otros investigadores proponen algoritmos para la estimación de la frecuencia fundamental para señales de SEP, en los cuales se emplean filtros seno y coseno además una ventana variable para la eliminación de armónicas, las señales filtradas son elevadas al cuadrado para mejorar el rendimiento de la estimación hecha por el método mencionado [2, 6].

En el área de la salud, la Tomografía a través de Impedancia Eléctrica con Multifrecuencias o MFEIT (Multi-frequency Electrical Impedance Tomography) se refiere a una técnica de obtención de imágenes recientemente desarrollada en la cual existe la necesidad de llevar a cabo un proceso de demodulación que cumpla con dos características: rapidez y precisión. Este método obtiene la conductividad y permitividad de cierta área o tejido corporal midiendo las impedancias que existe entre los electrodos colocados al rededor del área en cuestión.

Es rápido, barato, portátil y sensible a los cambios fisiológicos que afectan a las propiedades de impedancia eléctrica. Usualmente el método MFEIT es aplicado a tejidos biológicos, en donde la calidad de la imagen se ve mejorada en función de la cantidad de información es obtenida con los electrodos. MFEIT requiere un demodulador a partir del cual se puedan obtener la fases y amplitudes.

En el trabajo de investigación [40] se utilizó un sistema MFEIT controlado por un Arreglo de Compuertas Lógicas Programables o FPGA (Field Programmable Gate Array) el cual utiliza el método de Prony para llevar a cabo el proceso de demodulación. Se llevaron a cabo comparaciones entre el método de Prony y el método de Cuadratura con las mismas señales de entrada y las mismas frecuencias. El método de Prony converge de manera mas rápida que el método de cuadratura durante la demodulación de fase y amplitud utilizando pocos recursos del hardware en el que fué implementado (FPGA). Cabe destacar que se sigue trabajando en mejoras para la eliminación del ruido.

En [41] se implementa el método de Estimación de Frecuencia con Deducción de Fase o PDFE (Phase Deduction Frequency Estimator), que al igual que el método de Prony, hace uso de mínimos cuadrados y la matriz pseudoinversa. Se realizó una comparación entre el método de Prony y el método PDFE a diferentes niveles de SNR y bajo las mismas condiciones de frecuencias de muestro y número de muestras. A un nivel de SNR por arriba de los 13dB el método de estimación PDFE mostró mejores resultados que el método de Prony, los resultados tendieron más hacia la cota de Cramer-Rao.

1.3 Propuesta.

Utilizando los principios de comunicaciones y SEP, se propone el uso del método de Prony aplicado a un sistema de comunicación con un esquema de modulación por Amplitud en Cuadratura o QAM (Quadrature Amplitude Modulation) para someterlo a criterios de evaluación que involucran la presencia de una variación en la frecuencia y de Ruido Gaussiano Blanco Aditivo o AWGN (Additive White Gaussian Noise).

Dado que las fluctuaciones de frecuencia provocan una pérdida en la ortogonalidad en las señales utilizadas para la demodulación, se presenta un problema de oblicuidad en las señales a la entrada del demodulador. A través de la inversa de la matriz de Gram se garantiza el par de bases biortogonales que mitigan el problema de oblicuidad.

Se tiene como hipótesis que el método de Prony, bajo ciertas condiciones de operación, al utilizar los principios de la biortogonalidad, es capaz de realizar buenos estimados de frecuencia en casos en donde las señales presentes en el demodulador pierden la propiedad de ortogonalidad debido a las fluctuaciones de frecuencia.

1.4 Objetivo.

El presente trabajo de investigación tiene como objetivo, primero evaluar el método de Prony en condiciones ideales, esto es, en ausencia de variación dinámica de frecuencia, en seguida con la presencia de ruido aditivo Gaussiano en la señal transmitida, y finalmente el peor de los casos donde existe una variación de frecuencia en el oscilador del transmisor además de un AWGN corrompiendo la señal.

En base a los resultados obtenidos, determinar qué tan robusto es el método propuesto ante situaciones de variación dinámica de la frecuencia y presencia de ruido.

1.5 Metodología.

Para la realización de este trabajo, se siguió la siguiente metodología:

- Realizar una revisión bibliográfica referente a las comunicaciones digitales, proceso de modulación/demodulación, modulación QAM y principales métodos de estimación de fase y frecuencia.

- Evaluar el método de Prony aplicado al área de las comunicaciones digitales y SEP para la estimación de la frecuencia del lado de la recepción.
- Correr simulaciones en Matlab para la evaluación del método de Prony como estimador de frecuencia en escenarios que involucren desplazamientos de frecuencias en la portadora y la inclusión de AWGN y sus respectivos niveles de BER

1.6 Justificación.

Hoy en día los medios de comunicación inalámbricos forman parte de la solución a las necesidades presentes en la vida diaria a tal punto que es casi imposible prescindir de ellos. Actualmente la demanda de servicios, que no dejan de crecer, se han visto cubiertos casi en su totalidad gracias a soluciones las cuales involucran procesos de comunicación. Hemos llegado a tiempos en donde los entornos en donde vivimos cada vez se vuelven más poblados, con más infraestructura creciendo rápidamente y consecuentemente con niveles de ruido y contaminación cada vez más altos. Las comunicaciones se ven afectadas en gran medida por el ruido existente en el canal de comunicación. Debido a esto se presenta la problemática de que las frecuencias a las que trabajan los osciladores ubicados en el sitio donde se genera y a partir del cual se envía la información sufren cierto desplazamiento y los valores de dichas frecuencias que llegan al sitio donde se recibe dicha información no son los mismos, provocando un error al momento de decifrar o decodificar la información. La tecnología empleada en los diferentes dispositivos que utilizamos para solventar nuestras necesidades requiere velocidades de procesamiento cada vez más rápidas y con una mayor precisión.

Actualmente existen mecanismos empleados en el sitio receptor que ayudan a compensar ese desplazamiento que se genera en el sitio transmisor y así trabajar a las mismas frecuencias, esto es, la información obtenida en el sitio receptor o destino se presenta con menos probabilidad de error, de esa manera podemos decir que la información obtenida es más confiable.

Si el oscilador local en el receptor no está sincronizado a la frecuencia de la señal recibida, en este caso una señal 64 QAM con su respectiva constelación, los datos no pueden ser recuperados correctamente a partir de la señal recibida.

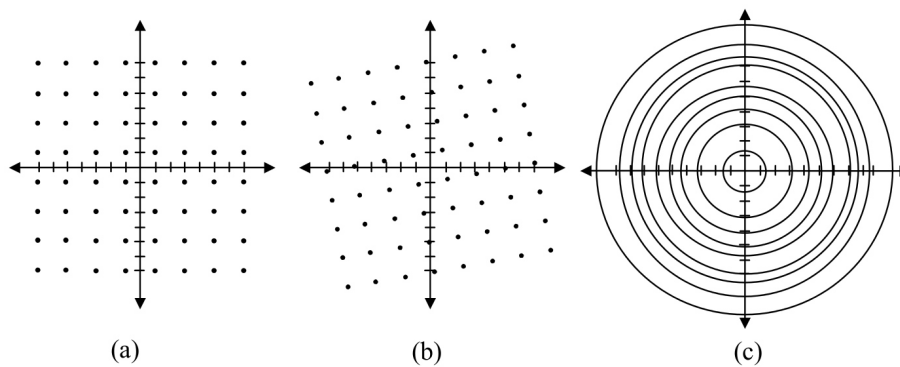


Figura 1.1: *Efecto de desplazamiento en fase y frecuencia de portadora.*

La figura (1.1) muestra el efecto de desplazamiento de fase y de frecuencia en el oscilador local. La figura (1.1a) muestra una constelación QAM-64 que ha sido demodulada con un oscilador local que tiene ningún desplazamiento de fase o frecuencia es decir de manera ideal. La figura (1.1b) muestra la misma constelación, excepto que el oscilador local tiene un desplazamiento de fase de diez grados. En este caso, la constelación gira diez grados los cuales causan errores de bit moviendo algunos de los puntos de la constelación a través de líneas de decisión. La figura (1.1c) muestra la misma constelación, excepto que el oscilador local tiene un desplazamiento en la

frecuencia. En este caso, los puntos de constelación no permanecen en la misma posición ya que la fase está cambiando constantemente. Por lo tanto, los puntos de constelación trazan un patrón circular como los cambios de fase con el tiempo.

En el presente trabajo se presenta al método de Prony como una alternativa a los Lazos de Enganche de Fase o PLL (Phase Locked Loop) que actualmente se utilizan como métodos para compensar los desplazamientos. El principio de funcionamiento de los PLLs es básicamente la señal de entrada al PLL (que es la viene con cierto desplazamiento) se compara con una señal de referencia, se filtra y en base al resultado de esa comparación y con la ayuda de otro circuito llamado Oscilador Controlado por Voltaje o VCO (Voltage Controlled Oscillator) se ajusta esa señal de entrada para minimizar el error generado en esa comparación. Este proceso se repite gran cantidad de veces hasta que el valor del error se minimice al máximo. Es importante destacar que el valor del error nunca será nulo ya que el PLL siempre estará operando para llevar a cabo el ajuste.

El método de Prony toma un número de muestras de la señal que llega al receptor con cierto desplazamiento, utilizando métodos matemáticos (raíces de polinomios, mínimos cuadrados, matriz pseudoinversa) se corrige (compensa) el desplazamiento y se obtiene una señal sincronizada la cual presenta menos probabilidad de error al momento de obtener la información (demodulación). Es importante mencionar que el método propuesto no está exento de errores y es afectado por el ruido así como también existen ciertas condiciones que debe cumplir la señal de entrada para poder aplicar este método los cuales se describen más a fondo en los próximos capítulos.

1.7 Estructura de la tesis.

La estructura de la presente tesis es como sigue:

En el capítulo dos, se hace referencia a la modulación QAM, su representación matemática, elementos básicos de un modulador QAM. Se habla acerca de la Densidad Espectral de Potencia o PSD (Power Spectral Density) para un sistema 16 QAM y la distribución de dicha potencia de la señal en el dominio de la frecuencia. Se toman en cuenta conceptos de filtro de Raíz de Coseno Levantado o RRC (Root Raised Cosine), ventana rectangular y ventana de Tukey para el proceso de revestimiento e Interferencia Intersimbólica o ISI (Intersymbol Interference), así como la deomodulación coherente.

En el capítulo tres, se ve de manera matemática el método de Prony, utilizado para la estimación de frecuencia.

El capítulo cuatro, se presentan gráficas y resultados de las simulaciones realizadas para un sistema de comunicación 16QAM con parámetros de SEP, de igual manera se toman en cuenta ciertas condiciones para la aplicación del método y diferentes valores de ruido y variaciones de la frecuencia aplicados a la señal de entrada al demodulador.

El capítulo cinco, se presentan las conclusiones obtenidas del presente trabajo de investigación.

Los *Apéndices* contienen herramientas matemáticas más utilizadas para la realización de la investigación y los valores numéricos obtenidos en las simulaciones.

Capítulo 2

Modulación

2.1 Sistema de comunicación digital

En un sistema de comunicación digital, la secuencia de datos binarios o *secuencia de información*, entra a un *modulador digital*, que convierte dicha secuencia de información en una secuencia de formas de ondas eléctricas que se transmiten a través del canal de comunicación. Cada forma de onda es elegida mediante el código binario correspondiente a un conjunto finito de señales.

En el lado de la recepción, el *demodulador digital* procesa cada señal recibida (la cual ha sido afectada por algún tipo de ruido) reduciéndola a un parámetro *estimado* a partir del cual un *decodificador* reconstruye la información binaria, la cual, si todo se realizó correctamente, corresponde al código generado por el codificador.

La medida de confiabilidad en la operación tanto del demodulador como el decodificador es la frecuencia con que ocurren errores en la decodificación de la secuencia de la información.

Dependiendo de la naturaleza del canal de comunicación que se utilizará en el proceso de comunicación, la información puede ser afectada por algún tipo de ruido, atenuación, distorsión, etc., es por eso que es necesario generar un tipo de señal que represente la secuencia de datos que se requiere transmitir, pero además que sea compatible con las características del canal de comunicación para que sea lo menos corrompida por el mismo, es decir, que el ancho de banda de la señal transmitida coincida lo mejor posible con el ancho de banda del canal de comunicación. Esto se logra en el proceso de *modulación* donde la secuencia de información es montada sobre una señal de mayor frecuencia (portadora) para su transmisión. Usualmente la señal a la salida del modulador es de tipo *pasabanda*, la cual es adecuada para la transmisión haciendo uso del ancho de banda del canal a utilizar.

En la figura (2.1) se muestran los elementos básicos de un sistema de comunicación digital.

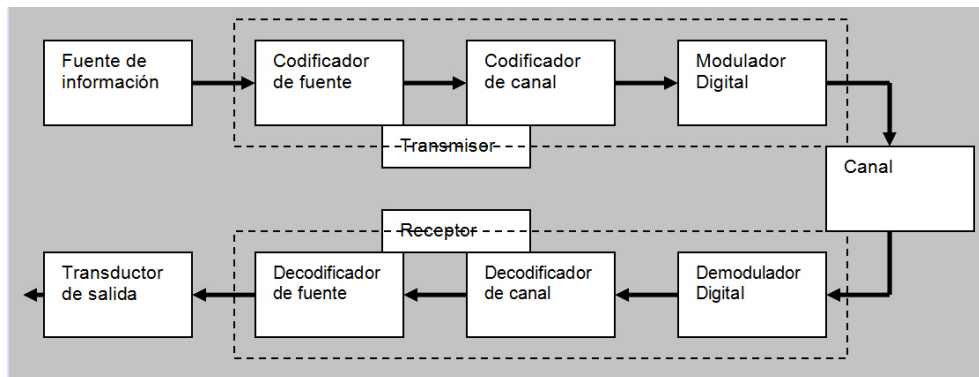


Figura 2.1: *Elementos básicos de un sistema de comunicación digital*

2.2 QAM.

La modulación QAM se puede ver como una combinación de una modulación por Desplazamiento de Amplitud o ASK (Amplitude Shift Keying) junto con una modulación por Desplazamiento de Fase o PSK (Phase Shift Keying), eso significa que la información digital se realiza tanto en la fase como en amplitud de la señal portadora. La representación de banda base equivalente de las señales QAM $u_m(t)$ se puede expresar como:

$$u_m(t) = (A_m^I + jA_m^Q)g(t) \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (2.2.1)$$

donde $A_m^I, A_m^Q \in \{\pm 1\Delta, \pm 3\Delta, \dots, \pm(\sqrt{M} - 1)\Delta\}$ (Δ es una constante cuyo valor es determinado por la potencia transmitida promedio) se refieren a las amplitudes en *fase* A_m^I y en *cuadratura* A_m^Q , las cuales corresponden a los M posibles símbolos en el espacio bidimensional generado por la frecuencia portadora.

La función $g(t)$ es un impulso de señal de valor real cuya forma influye en el espectro de la señal transmitida. Las señales $u_m(t)$ de la ecuación (2.2.1) pueden ser expresadas en su forma polar como:

$$u_m(t) = A_m e^{j\theta_m} g(t) \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (2.2.2)$$

donde A_m y θ_m denotan la amplitud y la fase del m^{th} símbolo, y están dados por:

$$\begin{aligned} A_m &= \sqrt{(A_m^I)^2 + (A_m^Q)^2} \\ \theta_m &= \tan^{-1} \left(\frac{A_m^Q}{A_m^I} \right) \quad m = 1, 2, \dots, M \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

la señal banda base de la ecuación (2.2.2) se transmite con una señal pasabanda $s_m(t)$

la cual es elegida de entre una de las M posibles formas de onda de señalización.

$$s_m(t) = \text{Re} \{ u_m(t) e^{j2\pi f_c t} \} = A_m g(t) \cos(2\pi f_c t + \theta_m) \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (2.2.4)$$

donde f_c es la frecuencia portadora.

De igual manera, la señal QAM pasabanda de la ecuación (2.2.4) puede ser expresada en términos equivalentes de sus componentes en cuadratura:

$$s_m(t) = A_m^I g(t) \cos 2\pi f_c t - A_m^Q g(t) \sin 2\pi f_c t \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (2.2.5)$$

ésta representación es la más utilizada en el diagrama a bloques de un modulador QAM, como el que se muestra en la figura (2.2).

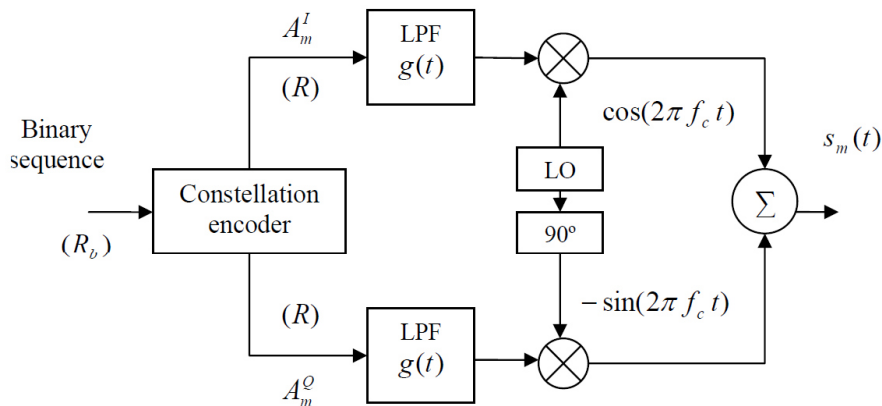


Figura 2.2: Elementos básicos de un modulador QAM.

Las componentes I y Q son entonces direccionadas hacia los filtros pasa bajos o LPF (Low Pass Filter) $g(t)$ para limitar el ancho de banda de la transmisión. Finalmente las señales en cuadratura modulan las portadoras I y Q para la transmisión. La señal transmitida pasabanda $s(t)$ la cual es la sumatoria de todos los símbolos representados por las M posibles formas de onda QAM se puede representar como [35]:

$$s(t) = Re \left\{ \left(\sum_n I_n g(t - nT) \right) e^{j2\pi f_c t} \right\} \quad (2.2.6)$$

donde la velocidad de transmisión es $R = 1/T$ símbolos/segundo e I_n representa la secuencia de símbolos de información discreta y es de tipo complejo para QAM.

2.3 16-QAM.

16-QAM resulta cuando $M = 16$ para M -ary QAM. QAM transmite $K = \log_2 M$ bits de información durante cada periodo simbólico.

Para 16-QAM, existen 16 posibles símbolos cada uno conteniendo 4 bits, dos bits para la componente I y dos bits para la componente Q . El diagrama de la constelación rectangular correspondiente a una señal 16-QAM se muestra en la figura (2.3).

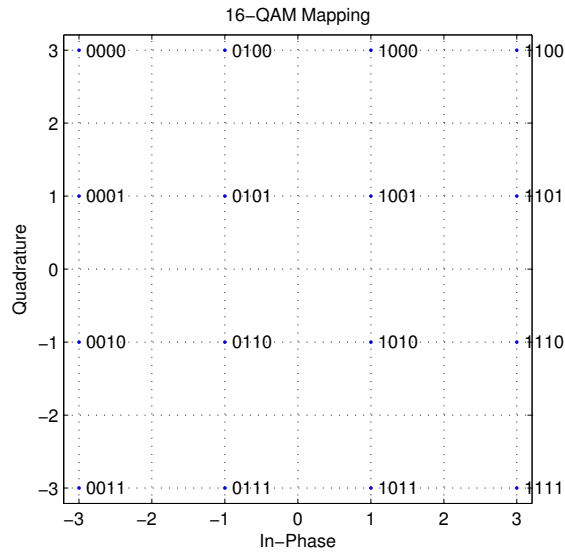


Figura 2.3: *Constelación rectangular señal 16-QAM*

Los 16 símbolos ubicados en la constelación están espaciados de manera igual y cada uno representa una única combinación de amplitud y fase.

2.4 Densidad espectral de potencia 16-QAM.

La transformada de Fourier existe para señales con energía finita, para señales con energía infinita usualmente se utiliza la PSD para caracterizar la distribución de la potencia de la señal en el dominio de la frecuencia.

La transición instantánea entre los puntos de la constelación de la figura (2.3) da como resultado una señal modulada con componentes extendiéndose hacia el infinito. Como se muestra en la figura (2.4).

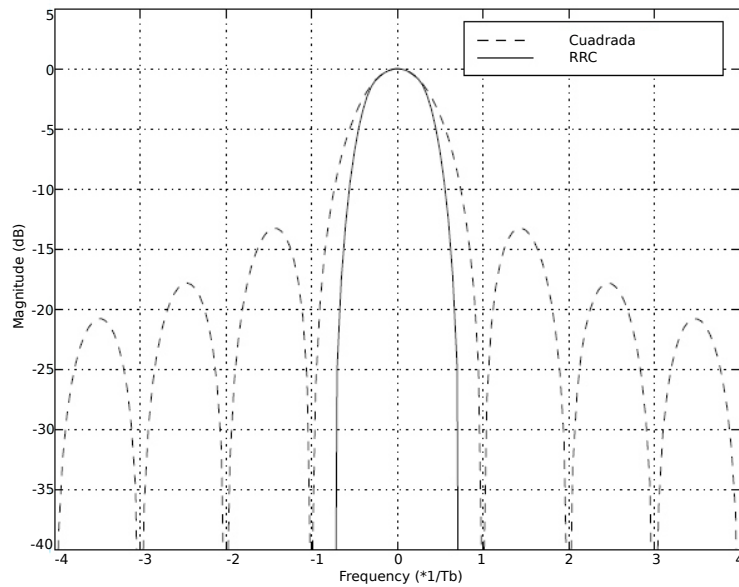


Figura 2.4: *Densidad espectral de potencia 16-QAM cuadrada y filtrada con RRC*

Para reducir la interferencia del canal adyacente, la señal debe ser pre-filtrada antes de la transmisión para restringir el espacio espectral ocupado por el lóbulo principal, un tipo de filtro que se utiliza para limitar el ancho de banda en la transmisión es el filtro Raíz de Coseno Levantado o RRC (Root Raised Cosine).

Lo que se muestra en la figura (2.4) es el efecto del filtro RRC en el espectro de una señal 16-QAM, el prefiltrado remueve los lóbulos laterales de la señal, lo cual reduce la interferencia hacia canales adyacentes.

2.5 Demodulación coherente.

Dado que la información es transportada en la fase y amplitud de la portadora modulada por la señal de QAM, se supone que el receptor es capaz de generar una portadora de referencia con frecuencia y fase idénticas a las de la portadora generada en el transmisor. Cuando el receptor usa la fase conocida de la portadora para detectar las señales se denomina demodulación/detección coherente [36]. En la figura (2.5) se observa el diagrama de un demodulador coherente.

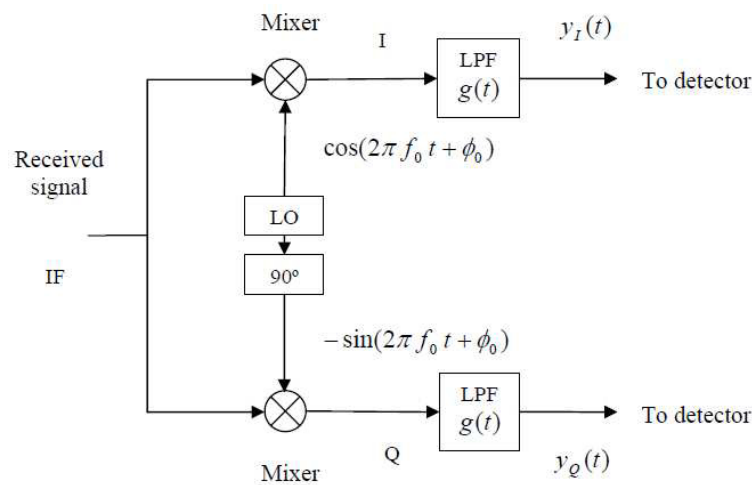


Figura 2.5: *Demodulador coherente QAM*

En el receptor, la señal de alta frecuencia recibida es primero convertida a una Frecuencia Intermedia o IF (Intermediate Frequency) inferior. El demodulador realiza la mayoría de los procesos a una frecuencia en banda base. El mezclador en el demodulador coherente convierte la señal IF a una señal en banda base, multiplicando la señal de entrada IF con una referencia de portadora generada localmente y el producto se pasa a través de un LPF. El filtro elimina el ruido.

Estos filtros también actúan como filtros adaptados cuyas respuestas impulsionales coinciden con la señal transmitida para proporcionar el máximo valor de Relación Señal a Ruido o SNR (Signal to Noise Relation) a su salida [35].

Asumiendo que el canal de comunicación sólo está siendo corrompido por ruido Gaussiano, la señal recibida $r(t)$ puede expresarse como:

$$r(t) = s(t) + v(t) \quad (2.5.1)$$

donde $s(t)$ hace referencia a la señal transmitida y $v(t)$ se refiere al ruido aditivo.

Ignorando el ruido, $r(t)$ se simplifica a:

$$r(t) = u_I(t)\cos(2\pi f_c t + \phi_c) - u_Q(t)\sin(2\pi f_c t + \phi_c) \quad (2.5.2)$$

donde $u_I(t)$ y $u_Q(t)$ representan las amplitudes I y Q de la señal, f_c y ϕ_c son la frecuencia y la fase de la portadora respectivamente. Esta señal es demodulada por dos portadoras de referencia

$$\begin{aligned} c_I &= \cos(2\pi f_0 t + \phi_0) \\ c_Q &= -\sin(2\pi f_0 t + \phi_0) \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

donde f_0 y ϕ_0 son la frecuencia y la fase de la portadora generada localmente.

Multiplicando $r(t)$ con $c_I(t)$ seguido por la etapa de filtrado, la componente en I queda:

$$y_I(t) = \frac{1}{2}u_I(t)\cos[2\pi(f_c - f_0)t + (\phi_c - \phi_0)] - \frac{1}{2}u_Q(t)\sin[2\pi(f_c - f_0)t + (\phi_c - \phi_0)] \quad (2.5.4)$$

de manera similar para la componente en Q :

$$y_Q(t) = \frac{1}{2}u_Q(t)\cos [2\pi(f_c - f_0)t + (\phi_c - \phi_0)] + \frac{1}{2}u_I(t)\sin [2\pi(f_c - f_0)t + (\phi_c - \phi_0)] \quad (2.5.5)$$

Se puede observar que en las ecuaciones (2.5.4) y (2.5.5) si $f_c = f_0$ y $\phi_c = \phi_0$, la señal de salida del demodulador QAM es la misma que la señal en banda base transmitida $u_I(t)$ y $u_Q(t)$.

Bajo condiciones ideales de operación, el Oscilador Local o LO (Local Oscillator) que genera la señal portadora para la demodulación en el receptor es idéntico al que se encuentra en el transmisor en fase y frecuencia. Pero el oscilador local en el receptor generalmente no está sincronizado en fase con el que se encuentra en el transmisor, por otra parte, el error de fase $2\pi(f_c - f_0)t + (\phi_c - \phi_0)$ reducirá el nivel de voltaje de señal por el factor $\cos [2\pi(f_c - f_0)t + (\phi_c - \phi_0)]$ y en potencia por el factor $\cos^2 [2\pi(f_c - f_0)t + (\phi_c - \phi_0)]$, debido a que los niveles promedio de potencia de $u_I(t)$ y $u_Q(t)$ son similares, un pequeño error de fase causa una gran degradación en su comportamiento, así, la precisión en la fase significa un alto requerimiento para los sistemas QAM.

2.6 Filtrado e Interferencia Intersimbólica.

El prefiltrado permite reducir el ancho de banda de la señal transmitida sin perder el contenido de la señal, esto mejora la eficiencia espectral de la señal como se mencionó anteriormente.

Por otra parte el proceso de filtrado conlleva la dispersión de los símbolos en el tiempo, esta dispersión en el tiempo causa que parte de la energía del símbolo se solape con los símbolos vecinos dando paso a la ISI. El fenómeno de ISI puede causar errores en la detección del símbolo correcto, aumentando el valor del parámetro de la Tasa de Error Binario o BER (Bit Error Rate).

Para conseguir un mínimo o cero ISI, la función de transferencia del filtro del sistema debe ser una respuesta de frecuencia de tipo "Nyquist", para este tipo de filtro, el tiempo de respuesta cruza por cero con un periodo que corresponde a la separación del símbolo, mediante el muestreo de la secuencia de símbolos en el momento preciso del símbolo, la energía dispersa de símbolos adyacentes no afecta el valor del símbolo actual, una representación de este tipo de filtro es el filtro de Coseno Levantado o RC (Raised Cosine).

La respuesta impulsional del filtro RC $h_{RC}(t)$ y respuesta frecuencial $H_{RC}(f)$ puede ser expresada como [37]:

$$h_{RC}(t) = \text{sinc}(\pi t/T) \frac{\cos(\pi r t/T)}{1 - (2r t/T)^2} \quad (2.6.1)$$

$$H_{RC}(f) = \begin{cases} T & |f| \leq \frac{1-r}{2T} \\ \frac{T}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{\pi T}{r} \left(|f| - \frac{1-r}{2T}\right)\right) \right] & \frac{1-r}{2T} < |f| \leq \frac{1+r}{2T} \\ 0 & \frac{1+r}{2T} < |f| \end{cases} \quad (2.6.2)$$

donde r es llamado *rolloff factor* el cual determina en ancho de banda del filtro y toma valores en el rango de $0 \leq r \leq 1$, estos valores representan cierto balance entre el límite de transición del filtro y la magnitud de la respuesta impulsional del filtro.

T representa el periodo simbólico y es proporcional al inverso de la velocidad de símbolo R , esto es $T = 1/R$.

A continuación se ilustran las respuestas impulsional y frecuencial del filtro RC para valores de $r = 0, 0.5, 1$.

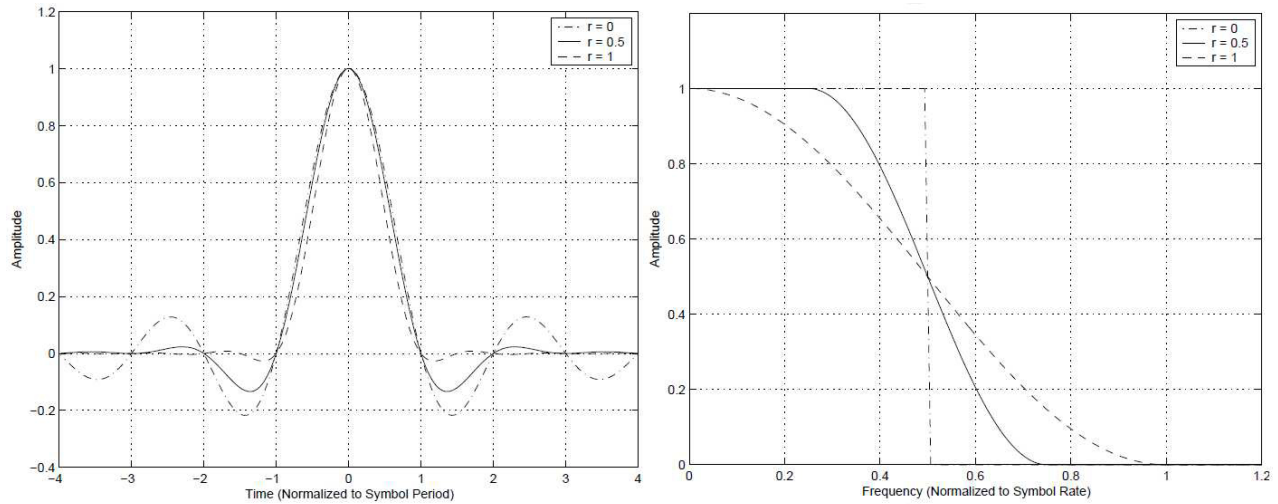


Figura 2.6: *Respuestas impulsional y frecuencial filtro RC*

Usualmente la operación de filtrado se reduce con la aplicación de un par de filtros RRC, situando un filtro en el transmisor para mantener el ancho de banda constante y el otro filtro situado en el receptor para realizar la detección acoplada (match filter) optimizando el valor de SNR.

El filtro RRC tiene una función de transferencia que es igual a la raíz cuadrada de la función de transferencia del filtro RC, sus respuestas impulsional $h_{RRC}(t)$ y frecuencial $H_{RRC}(f)$ quedan [37]:

$$h_{RRC}(t) = \frac{4r}{\pi\sqrt{T}} \frac{\cos[(1+r)\pi t/T] + \frac{1}{4rt/T} \sin[(1-r)\pi t/T]}{1 - (4rt/T)^2} \quad (2.6.3)$$

$$H_{RRC}(f) = \begin{cases} \sqrt{T} & |f| \leq \frac{1-r}{2T} \\ \sqrt{\frac{T}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{\pi T}{r} \left(|f| - \frac{1-r}{2T} \right) \right) \right]} & \frac{1-r}{2T} < |f| \leq \frac{1+r}{2T} \\ 0 & \frac{1+r}{2T} < |f| \end{cases} \quad (2.6.4)$$

En las figuras (2.7) y (2.8) se ilustran las respuestas del filtro RRC utilizados en un sistema de comunicación con un esquema de modulación 16-QAM así como la constelación que se obtiene a partir de la señal recibida, figura (2.9).

Se observa que utilizando los filtros RRC tanto del lado del transmisor como en el receptor, se obtiene una correcta demodulación de la señal.

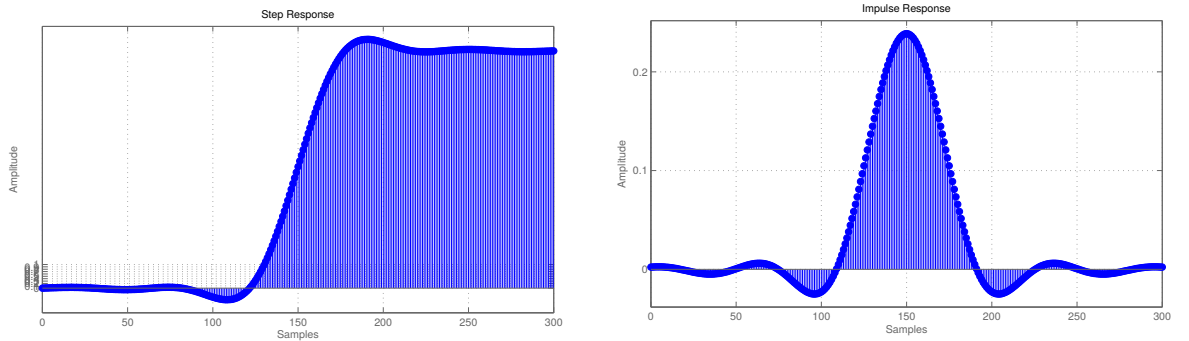


Figura 2.7: *Respuestas filtro RC*

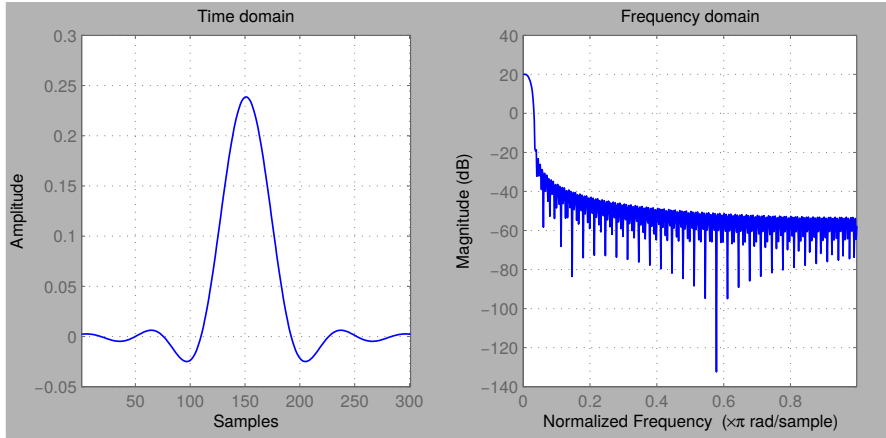


Figura 2.8: *Respuestas tiempo y frecuencia filtro RC*

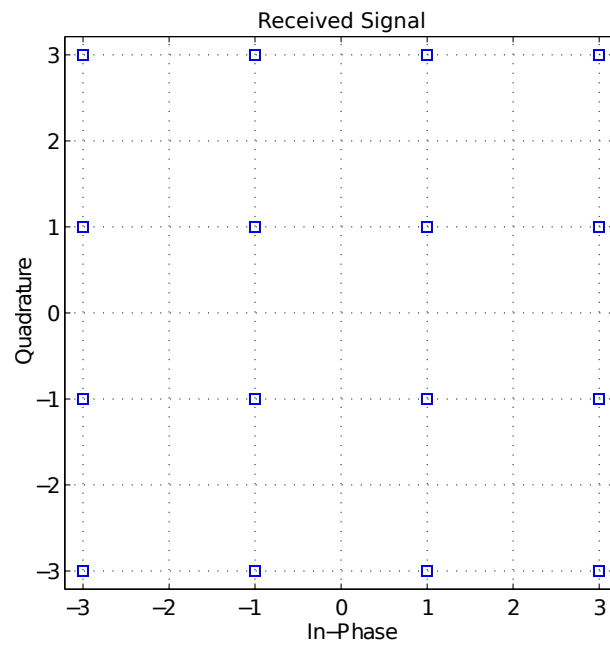


Figura 2.9: *Constelación 16-QAM*

Capítulo 3

Método propuesto.

3.1 Prony.

El método de Prony tuvo sus orígenes en 1775 en la École Polytechnique, donde le Baron de Prony realizaba estudios acerca de los efectos de la presión del vapor de alcohol. En 1990 este método fue introducido en el área de los SEP y se usa para analizar señales oscilatorias en los sistemas de potencia.

El método de Prony además de estimar los parámetros de amplitud, fase y frecuencia de una señal, también estima el coeficiente de amortiguamiento en señales amortiguadas exponencialmente. Este método está diseñado para estimar directamente los parámetros de los términos exponenciales ajustando la función [38]:

$$\hat{y}(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \phi_i) \quad (3.1.1)$$

para una medición observada para $y(t)$, donde $y(t)$ consiste en N muestras.

$$y(t_k) = y(k), \quad k = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (3.1.2)$$

que están uniformemente espaciadas por un intervalo de tiempo Δt .

El método de Prony puede ser resumido como:

- Construir un modelo de predicción lineal discreto a partir de la señal medida.
- Encontrar las raíces del polinomio característico del modelo.
- Usar de las raíces como las frecuencias modales complejas para la señal, determinar la amplitud y fase para cada modo.

La ecuación (3.1.1) puede ser escrita en forma exponencial compleja como:

$$\hat{y}(t) = \sum_{i=1}^n B_i e^{\lambda_i t} \quad (3.1.3)$$

esta expresión puede ser trasladada a:

$$\hat{y}(k) = \sum_{i=1}^n B_i z_i^k \quad (3.1.4)$$

donde:

$$z_i = e^{\lambda_i \Delta t} \quad (3.1.5)$$

k hace referencia a los modos contenidos en el modelo de señal, λ_i representa los eigenvalores, B_i es una matriz cuya relación se describe en (3.1.9) la cual produce la igualdad $\hat{y}(k) = y(k)$ para todo k . Δt es el intervalo de tiempo al cual están espaciadas las N muestras.

Los eigenvalores λ del sistema pueden ser encontrados a partir de los modos discretos por:

$$\lambda_i = \frac{\ln(z_i)}{\Delta t} \quad (3.1.6)$$

z_i son las raíces del polinomio de n orden

$$z^n - (a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n z^0) = 0 \quad (3.1.7)$$

donde los coeficientes a_i son desconocidos y deben ser calculados a partir del vector medido como:

$$\begin{bmatrix} y(n-1) & y(n-2) & \dots & y(0) \\ y(n-0) & y(n-1) & \dots & y(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y(N-2) & y(N-3) & \dots & y(N-n-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(n+0) \\ y(n+1) \\ \vdots \\ \vdots \\ y(N-1) \end{bmatrix} \quad (3.1.8)$$

La ecuación (3.1.8) es un sistema de N ecuaciones con n incógnitas y se tiene una solución a través del método de mínimos cuadrados para encontrar el mejor ajuste.

Una vez que z_i ha sido encontrada con las raíces de la ecuación (3.1.7), los eigenvalores λ_i pueden ser calculados a partir de la ecuación (3.1.6).

El siguiente paso es encontrar B_i que produce $\hat{y}(k) = y(k)$ para todo k a través de la siguiente relación:

$$\begin{bmatrix} z_1^0 & z_2^0 & \dots & z_n^0 \\ z_1^1 & z_2^1 & \dots & z_n^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_1^{N-1} & z_2^{N-1} & \dots & z_n^{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ \vdots \\ y(N-1) \end{bmatrix} \quad (3.1.9)$$

la cual puede ser simplificada a:

$$ZB = Y \quad (3.1.10)$$

La matriz B es de dimensión nxN , para ello la ecuación (3.1.10) tiene que ser resuelta de igual manera a través del método de mínimos cuadrados.

La señal estimada $\hat{y}(t)$ es calculada a partir de la ecuación (3.1.3). La ecuación resultante $\hat{y}(t)$ no será una réplica exacta de $y(t)$.

Los parámetros del modelo de Prony se determinan de las relaciones [31] :

$$\begin{aligned} A_i &= |B_i| & \sigma_i &= \ln \frac{|z_i|}{\Delta t} \\ \phi_i &= \tan^{-1} \left(\frac{\mathcal{I}[B_i]}{\mathcal{R}[B_i]} \right) & f_i &= \tan^{-1} \left(\frac{1}{2\pi \Delta t} \frac{\mathcal{I}[z_i]}{\mathcal{R}[z_i]} \right) \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

donde A_i es la amplitud, ϕ_i la fase, σ_i el coeficiente de amortiguamiento y f_i la frecuencia. Δt representa los intervalos de tiempo entre muestras.

Debido a su naturaleza adaptativa, el método de Prony se comporta como un buen estimador bajo condiciones de oscilación.

Prony, junto con su estimador de fase, proporciona estimados instantáneos de amortiguamiento y frecuencia que son muy útiles para evaluar la estabilidad del sistema de potencia.

En análisis de oscilaciones de potencia, el método de Prony se usa para analizar grandes segmentos de oscilación. Pero este mismo modelo de señal se puede aplicar a un segmento de señal de un ciclo.

En una primera etapa de adaptación, este método estima el mejor amortiguamiento y frecuencia para el modelo de señal y en una segunda etapa, el mejor fasor sobre la ventana de tiempo considerada.

En lo que sigue, se explica cómo se implementó el método de Prony para segmentos

cortos de señal, este método está basado en el siguiente modelo de señal [1]:

$$s(t) = \sum_{k=1}^K A_k e^{\sigma_k t} \cos(2\pi f_k t + \varphi_k) \quad (3.1.12)$$

el cual, en términos de funciones exponenciales complejas, se convierte

$$s(t) = \sum_{k=1}^K \operatorname{Re} \{ A_k e^{j\varphi_k} e^{(\sigma_k + j2\pi f_k)t} \} \quad (3.1.13)$$

donde $R_k = A_k e^{j\varphi_k}$ son los residuos y $p_k = \sigma_k + j\omega_k$ son los valores propios. Escribiendo el k th componente de la siguiente manera

$$a_k(t) = A_k e^{\sigma_k t} \quad (3.1.14)$$

$$\varphi_k(t) = e^{j[2\pi(f_k^{nom} + \Delta f_k)t + \varphi_k]} \quad (3.1.15)$$

donde f_k^{nom} es la frecuencia nominal que interesa y Δf_k es su correspondiente desplazamiento.

El modelo de señal de Prony está determinado por fasores dinámicos, con amplitudes exponenciales y fase lineal, si la señal es muestreada en instantes $t_n = nT_s$, donde T_s es el tiempo de muestreo, entonces el modelo de señal digital de Prony está dado por

$$s(n) = \sum_{k=1}^K \operatorname{Re} \{ R_k (r_k e^{j\theta_k})^n \} = \sum_{k=1}^K \operatorname{Re} \{ R_k z_k^n \} \quad (3.1.16)$$

donde R_k son los residuos de la ecuación (3.1.13) y $z_k = r_k e^{j\theta_k}$ la señal con eigenvalores en el plano z , con $r_k = e^{\sigma_k T_s}$ y $\theta_k = 2\pi f_k T_s$.

En la ecuación (3.1.16) se puede observar la solución homogénea de la ecuación en diferencias.

$$s(n) = - \sum_{k=1}^{2K} a_k s(n-k) \quad (3.1.17)$$

con el polinomio característico

$$z^{2K} + a_1 z^{2K-1} + a_2 z^{2K-2} + \dots + a_{2K-1} z + a_{2K} = 0 \quad (3.1.18)$$

Dada una señal $s(n)$, el método de Prony estima los coeficientes de predicción \hat{a}_k que se aproximan de una mejor manera a la combinación lineal en la ecuación (3.1.17) a través de mínimos cuadrados. Usando esos estimados, los eigenvalores \hat{z}_k son obtenidos encontrando las raíces de la ecuación característica (3.1.18) con \hat{a}_k y finalmente los residuos estimados son obtenidos utilizando nuevamente mínimos cuadrados para aproximar el modelo de señal en (3.1.16) dada la señal $s(n)$.

El modelo lineal de señal puede ser escrito como

$$\hat{S}_n = [S_{n-1} \quad S_{n-2} \quad \dots \quad S_{n-2K}] \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{a}_{2K} \end{bmatrix} = \sum \hat{a} \quad (3.1.19)$$

donde cada vector S_{n-k} de longitud N en la matriz \sum contiene las muestras negativas de la secuencia de la señal retrazada por k

$$S_{n-k} = -[s(n-k) \quad s(n-k+1) \quad \dots \quad s(n-k+N-1)]^T \quad (3.1.20)$$

Los estimados de los coeficientes son dados por las ecuaciones normales

$$\hat{a} = \left(\sum^T \sum \right)^{-1} \sum^T s_n \quad (3.1.21)$$

donde \sum es la matriz que contiene las señales retrazadas de la ecuación (3.1.19) y $s(n)$ es la señal dada. Una vez que los eigenvalores \hat{z}_k son encontrados en las raíces

de la ecuación (3.1.18), el segundo modelo de señal puede ser escrito como

$$\hat{S}_n = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \hat{z}_1 & \hat{z}_1^* & \dots & \hat{z}_k & \hat{z}_k^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{R}_1 \\ \hat{R}_1^* \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{R}_k \\ \hat{R}_k^* \end{bmatrix} \quad (3.1.22)$$

donde el vector

$$\hat{z}_k = [z_k^0 \quad z_k^1 \quad \dots \quad z_k^{N-1}]^T \quad (3.1.23)$$

contiene las series del k th eigenvalor y \hat{z}_k^* es su complejo conjugado.

Finalmente, los residuos estimados los cuales corresponden al fasor en cada frecuencia, son dados por la ecuación normal

$$\hat{R} = (Z^H Z)^{-1} Z^H s_n \quad (3.1.24)$$

donde H es el operador Hermitiano de la matriz compleja Z .

Los sistemas lineales responden con un valor propio a la potencia n , λ^n , donde este valor propio puede ser complejo, de la forma $\lambda \in \mathbb{C}$. En el presente trabajo, el método de Prony se toma como un estimador de frecuencia de una señal que proviene de un sistema lineal, donde su componente predominante es de la forma $\lambda = r e^{j\theta}$, donde r hace referencia al factor de decaimiento y el ángulo θ al factor de la frecuencia. Se sabe que la señal casi siempre llegará muy cerca del plano de la frecuencia fundamental mas no en el plano de la misma.

En el modelo de señal de Prony los eigenvalores son la solución de una ecuación en diferencias del sistema lineal, como sólo se necesitan dos raíces complejas, una conjugada compleja de la otra, la ecuación en diferencias será de orden número dos.

Entonces la ecuación en diferencias será de la forma:

$$y(n) = \sum \alpha_k y_{n-k} + x_n \quad (3.1.25)$$

donde $\alpha_k \in \mathbb{R}$ ya que una raíz es el conjugado complejo de la otra.

Y el modelo de señal será:

$$y(n) = \alpha_1 y(n-1) + \alpha_2 y(n-2) + x_n \quad (3.1.26)$$

Partiendo del hecho de que la señal recibida es $y(n)$, se realiza una matriz B la cual está formada por dos columnas o vectores cuya longitud es igual al número de muestras tomadas por cada ciclo de estimación, los cuales contienen los valores desplazados de la señal de entrada. El modelo queda:

$$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ y(n) \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ y(n-1) & y(n-2) \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \quad (3.1.27)$$

Para saber el valor de los estimados

$$\begin{bmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\alpha}_2 \end{bmatrix} = B^\dagger y(n) \quad (3.1.28)$$

donde la pseudoinversa B^\dagger de la matriz B es : $B^\dagger = (B^H B)^{-1} B^H$.

Los estimados $\hat{\alpha}_1$ y $\hat{\alpha}_2$ serán los coeficientes de una ecuación cuadrática que va a ser de la forma

$$z^2 - \alpha_1 z - \alpha_2 = 0 \quad (3.1.29)$$

De la ecuación (3.1.29) se obtienen las raíces complejas, las cuales contienen los valores de \hat{r} y $\hat{\theta}$ para cada instante de estimación. En este caso, sólo se utiliza el valor del parámetro $\hat{\theta}$ que representa la frecuencia, el cual se toma en cuenta para la generación de las señales utilizadas para la demodulación. La aplicación de la biortogonalidad radica en que se busca evitar el problema de oblicuidad al momento de calcular los estimados o coeficientes.

En la figura (3.1) se observa que las frecuencias estimadas con el método de Prony utilizado en un sistema de comunicación 16-QAM, bajo condiciones de ausencia de ruido, no distan mucho de las frecuencias originales, sin embargo también se observa que no es un estimador perfecto, ya que existe cierto error en la estimación.

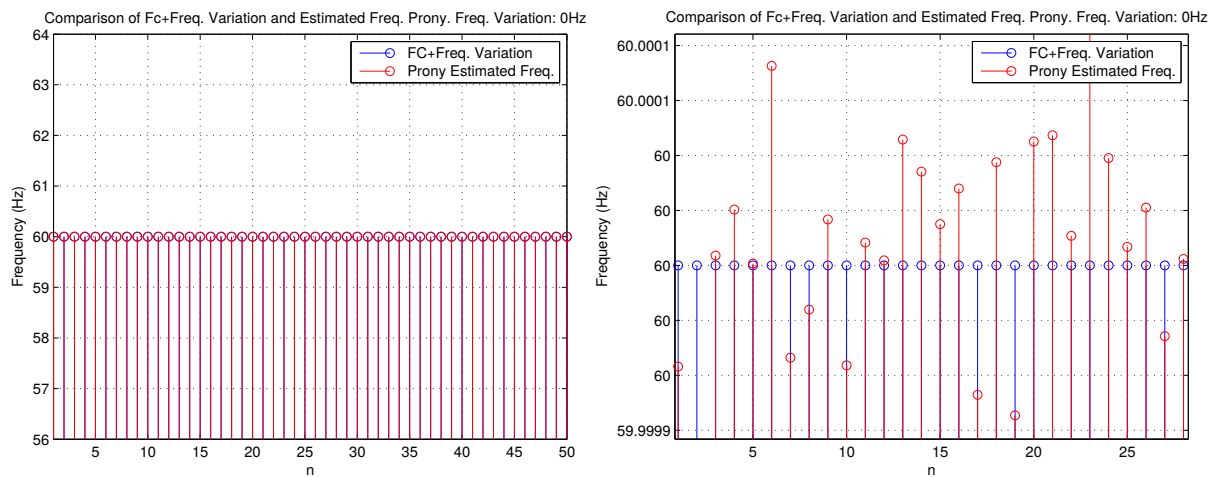


Figura 3.1: *Estimación frecuencias con método de Prony*

Capítulo 4

Resultados.

4.1 Introducción.

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos para los casos de análisis de un sistema de comunicación digital 16-QAM.

En primera instancia se realizó un sistema de comunicación con ausencia de cualquier estimador, sólo se confirmó que la señal transmitida y la señal recibida fueran iguales, esto es, no se hizo variar en lo absoluto la frecuencia y en el demodulador, la frecuencia de modulación se asumió como conocida. Esto con el fin de tomar este esquema de modulación como base para los siguientes análisis.

Se hizo un análisis del uso del filtro RRC, Ventana Rectangular y de Tukey. Analizados los resultados obtenidos con el uso de las tres opciones antes mencionadas para el revestimiento de la señal, se procedió a introducir ruido y a analizar los resultados, todo lo anterior con la frecuencia aún invariante.

Posteriormente se procedió a introducir cierto desplazamiento frecuencial a la señal portadora y de la misma manera las señales fueron analizadas con el método de Prony para estimar la frecuencia.

4.2 Ventana Rectangular, RRC y Ventana de Tukey

Las constelaciones de las señales transmitida y recibida sin presencia de ruido se muestra a continuación.

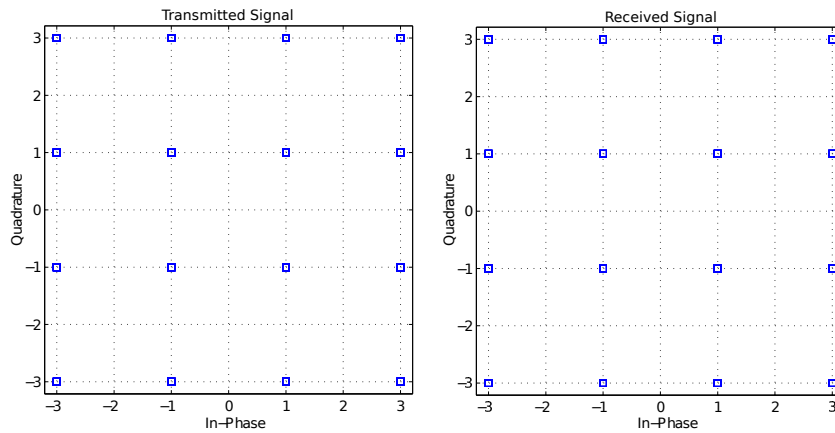


Figura 4.1: *Señal transmitida y recibida sistema de comunicación digital 16QAM*

El método de estimación de frecuencia de Prony tiene ciertas condiciones que deben cumplirse para su correcto funcionamiento:

- La señal debe provenir de un sistema lineal.

- Durante el intervalo de estimación, se debe de tener un valor de amplitud y fase constante para que éste no interfiera con la estimación de frecuencia, tal como en un sistema lineal.

Como se mencionó en el capítulo dos, el uso del filtro de raíz de coseno levantado es de gran utilidad al momento de restringir el ancho espectral de la señal. Tomando en cuenta esta idea, se consideró el uso del filtro RRC en el sistema de comunicación para revestir la señal. Si bien en el dominio de la frecuencia es el óptimo debido a que el espectro generado por la señal revestida con este tipo de filtro es muy angosto, los estimados de la frecuencia portadora que fueron obtenidos utilizando el método de Prony junto con un filtro RRC no fueron exitosos.

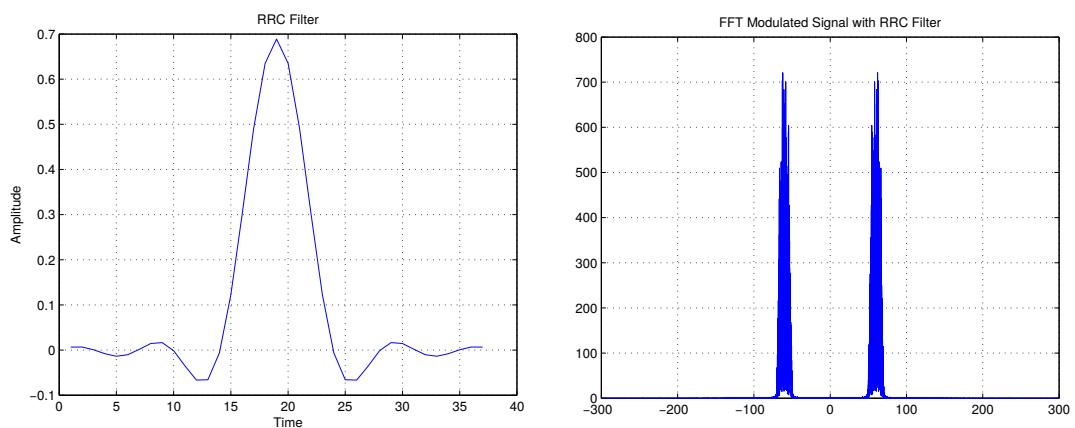


Figura 4.2: *RRC y FFT de señal modulada*

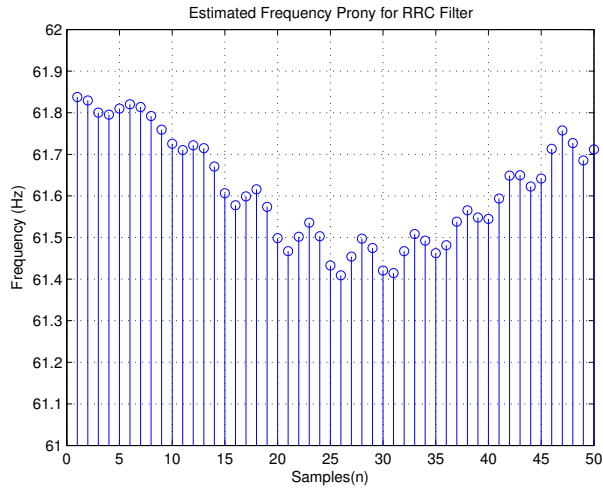


Figura 4.3: *Estimados de frecuencia método de Prony con RRC*

En las figuras (4.2) y (4.3) se observan el dominio frecuencial de la señal modulada la cual es la óptima por poseer un espectro angosto, y los estimados de la frecuencia los cuales no son buenos a razón de que distan mucho de la frecuencia de la portadora, para este caso 60Hz, esto es, debido a que dentro de cada segmento del RRC se presenta una superposición de símbolos, entonces cuando se analiza un segmento, lo que se está tomando en cuenta es la suma de esos símbolos.

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos con el uso del filtro RRC, se realizó un enventaneado con una rectangular. Usando la ventana rectangular se obtuvieron buenos estimados de la frecuencia de la señal portadora porque como se puede observar en las figuras (4.4) y (4.5) los valores de la señal estimada se mantienen muy cercanos a los valores de la señal portadora, en este caso 60 Hz.

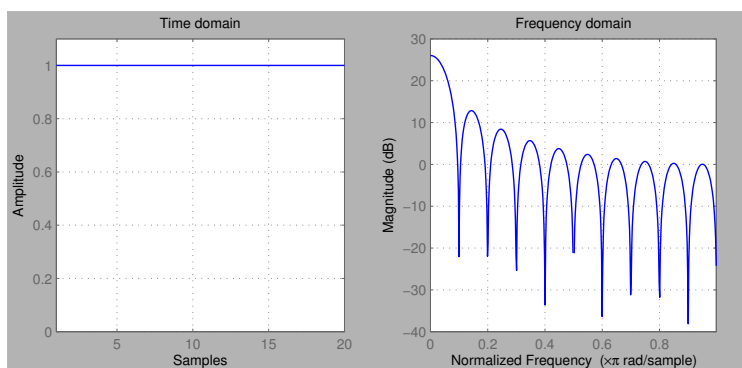


Figura 4.4: *Dominio temporal y en frecuencia ventana Rectangular*

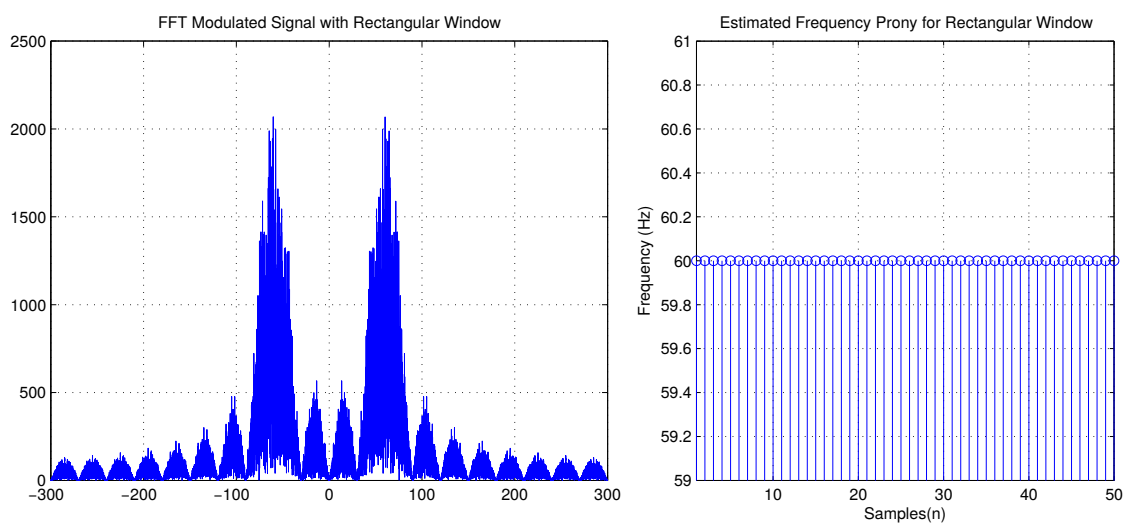


Figura 4.5: *FFT modulada y estimados de frec. método de Prony con ventana Rectangular*

Sin embargo, debido a que con el uso de la ventana rectangular se realiza la convolución de los pulsos con el espectro de la respuesta en frecuencia de la ventana rectangular lo cual genera un seno cardinal, se obtuvo una señal con un ancho espectral muy amplio en comparación con la señal obtenida cuando se utilizó el filtro RRC.

Hasta este punto el uso de la ventana rectangular representó la mejor opción para ser utilizada en el sistema de comunicación 16QAM propuesto, sin embargo aun estaba presente el detalle del ancho espectral.

Existe una solución intermedia entre el filtro RRC y la ventana rectangular, es decir, entre aquel cuyo espectro generado es muy angosto (sin embargo los resultados de la estimación no fueron exitosos por razones explicadas en párrafos anteriores) y aquel cuyo espectro generado es muy amplio (con buenos resultados de estimación por razones que de igual manera fueron explicadas en párrafos anteriores en la misma sección), la ventana de Tukey.

Como se observa en la figura (4.6), en comparación con la ventana rectangular, los lóbulos laterales y secundarios generados por la ventana de Tukey vistos desde el dominio de la frecuencia son significativamente más pequeños comparados con los de la ventana rectangular, sin embargo, la anchura del lóbulo principal de la ventana de Tukey es más grande en comparación con el de la ventana rectangular por la suavidad de la ventana. Si bien existen rangos donde se dan variaciones de amplitud y fase, sólo se utiliza en los intervalos donde no existen tales transiciones.

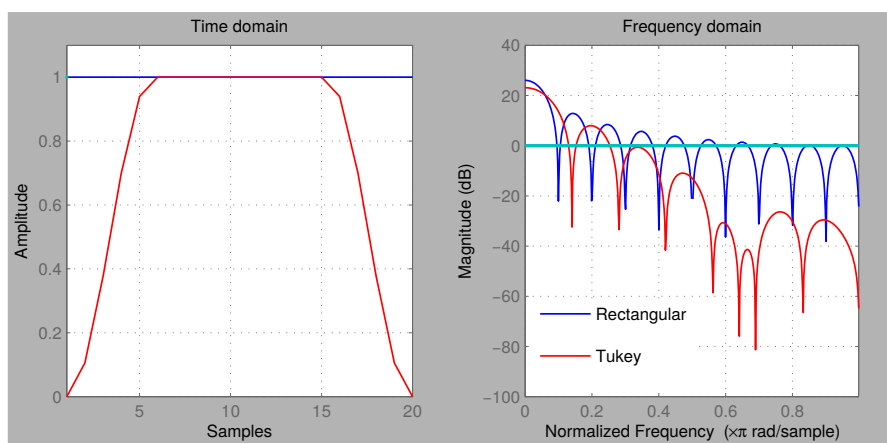


Figura 4.6: *Dominio temporal y en frecuencia Ventana Tukey y Rectangular.*

Bajo este principio, la figura (4.7) muestra que los resultados fueron satisfactorios, el estimador de Prony mantiene la frecuencia estimada muy cerca al valor original, además de que en el aspecto frecuencial se tiene una mejora con respecto a los resultados obtenidos cuando se utiliza la ventana rectangular.

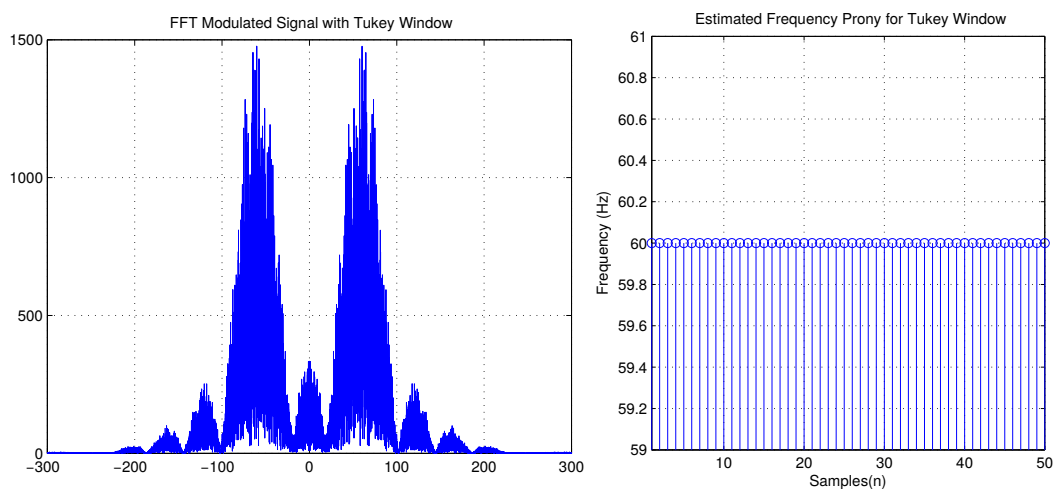


Figura 4.7: *FFT modulada y estimados de frec. método de Prony con ventana Tukey*

4.3 Estimador de Prony con frecuencia de portadora constante y variable.

Utilizando una ventana de Tukey con frecuencia constante, no existe discrepancia en los valores de la frecuencia estimada de Prony. Como resultado se obtuvo una correcta demodulación, figura (4.8).

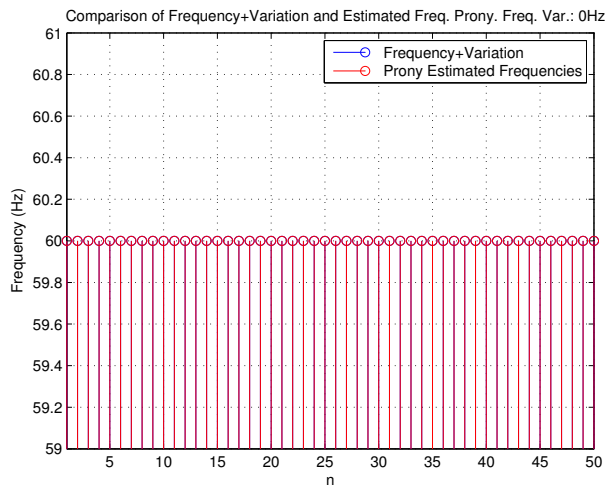


Figura 4.8: *Frecuencia sin desplazamiento y frecuencia estimada de Prony*

Para frecuencias constantes, el estimador frecuencial de Prony opera satisfactoriamente, es decir, no existe alguna desviación o diferencia entre la frecuencia de la portadora y los estimados.

Cuando existe cierta variación de frecuencia en el oscilador local del transmisor, la frecuencia de portadora se ve afectada en medida de dicha variación. Tomando en cuenta esto, la variación de frecuencia genera una rampa formada por varios valores los cuales están presentes en todo el intervalo de muestras utilizado para la estimación, esta rampa se sustituye por una señal constante, es decir, al final se tiene una señal escalonada, en este caso se tomó un promedio de dichos valores de las muestras que forman la rampa para asegurar un valor constante y cumplir con la condición del método de Prony de intervalos de amplitud y fase constantes.

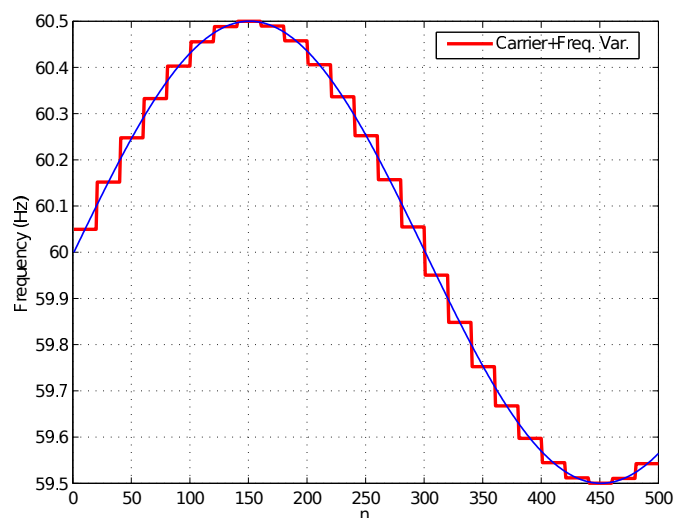


Figura 4.9: *Intervalos constantes de frecuencia*

En la figura (4.9) se muestra un ejemplo de cómo se tomó la variación de frecuencia en el oscilador del transmisor cuando se utiliza el método de Prony, en vez de tener una rampa de valores en un intervalo de estimación, se sustituyó por un promedio de dichos valores dando lugar a un valor constante para todo el intervalo, amplitud y fase constante.

En las siguientes figuras se observa que el método de Prony opera de manera exitosa en condiciones en las cuales existe cierto desplazamiento en la frecuencia.

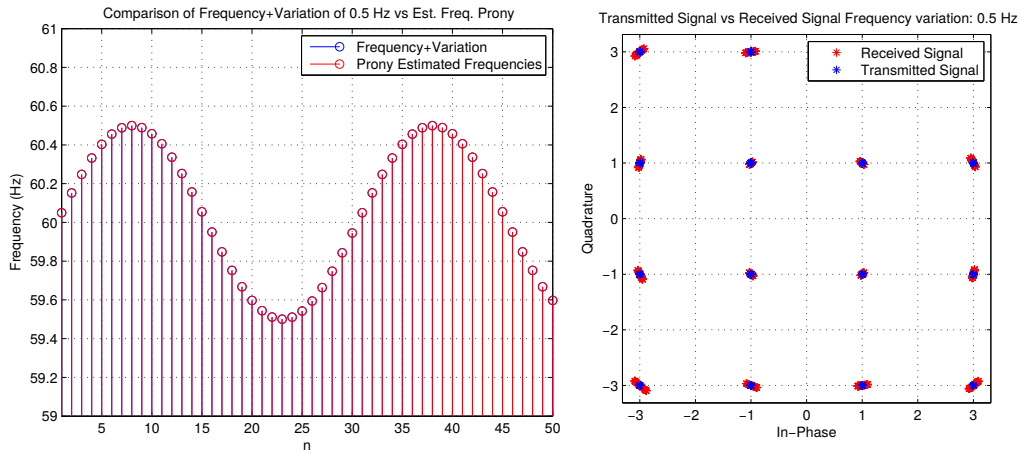


Figura 4.10: *Frecuencia+Variación de 0.5 Hz vs Estimados de Prony.*

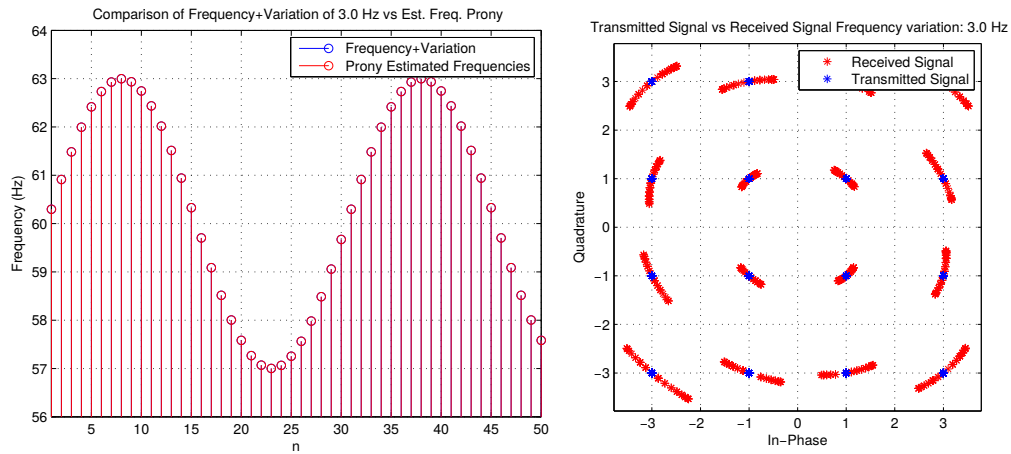


Figura 4.11: *Frecuencia+Variación de 3.0 Hz vs Estimados de Prony.*

Los valores de las frecuencias estimadas con el método de Prony en diferentes instantes, no distan mucho de los valores de la frecuencia de la portadora adquiridos con la presencia de variación de frecuencia, gráficamente se puede percibir que dichas frecuencias se encuentran en planos muy cercanos.

En lo referente a las constelaciones que representan los puntos de la señal recibida, existe un fenómeno de "giro" o "rotación" en las mismas debido a la variación frecuencial en el oscilador, este fenómeno se presenta en mayor magnitud conforme la variación dinámica de frecuencia va creciendo y afectando a la frecuencia de la portadora debido a que, para la obtención de los estimados, se está realizando el producto punto a frecuencias diferentes y lo que se proyecta o se grafica en la constelación es la diferencia o error frecuencial.

4.4 Estimador de Prony con frecuencia de portadora constante y variable con presencia de AWGN.

En un sistema de comunicación, el ruido representa un problema de estimación a razón de que la señal que llega al demodulador no viene dentro del subespacio donde se realiza la demodulación. Esto es, en la medida en que el ruido crece, la señal recibida se aleja del plano donde se realiza la demodulación, creando así un error en la estimación. Los resultados anteriores se ubican en un escenario en el cual el ruido estuvo ausente. En esta etapa, la señal transmitida fue afectada por un AWGN, de igual manera se tomaron en cuenta las situaciones en las que la frecuencia se mantiene constante y en las que se tiene un desplazamiento de frecuencia.

El caso más sencillo, cuando no existe variación dinámica de frecuencia en el oscilador local del transmisor, fue simulado ahora con presencia de AWGN.

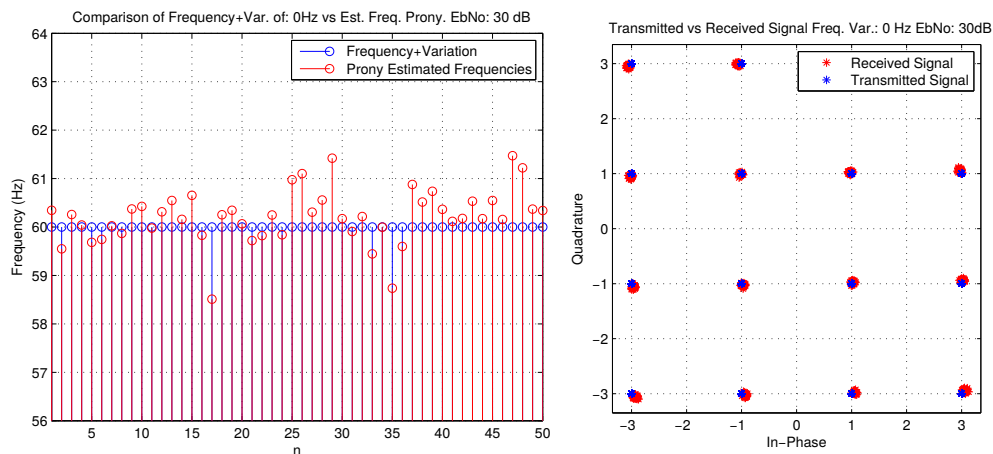


Figura 4.12: *Frecuencia vs Estimados de Prony. Ruido EbNo:30dB*

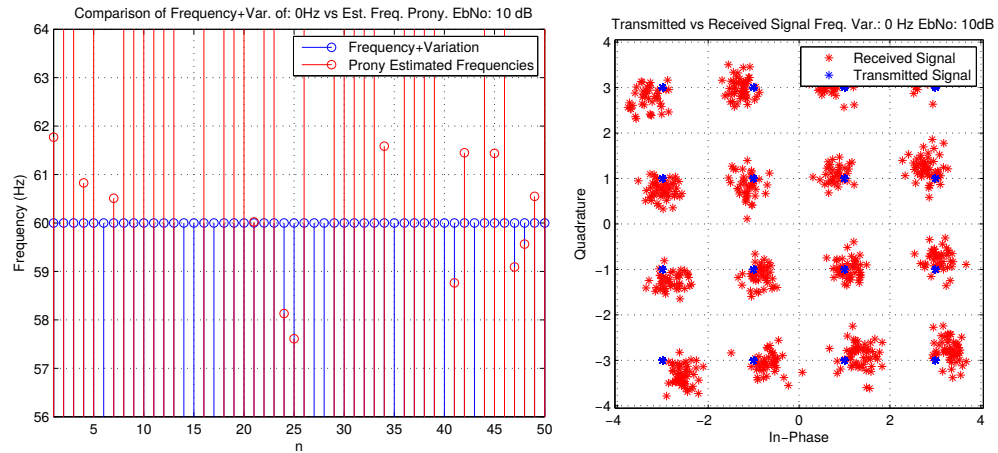


Figura 4.13: *Frecuencia vs Estimados de Prony. Ruido EbNo:10dB*

Debido a la presencia de ruido en el sistema, se puede observar que para valores de EbNo mayores o iguales a de 30dB, los valores de las frecuencias estimadas con el método de Prony, si bien no se ubicaron muy cerca del plano donde se encuentran los valores de las frecuencia tampoco se alejaron tanto (ver figura 4.12). Los resultados obtenidos para valores de EbNo menores o iguales a 20dB se observan en la figura (4.13). Así mismo, en el diagrama de constelación generado por la señal recibida, se observa la presencia de ruido pero sin tener cierto movimiento de "giro" en la constelación, debido a la ausencia de fluctuación en la frecuencia.

Se analizó otro caso, donde se mantienen los mismo niveles de EbNo en el sistema de comunicación pero se agregaron diferentes valores en la variación de la frecuencia. Los resultados obtenidos en los cuales los puntos correspondientes a una coordenada cualquiera de la constelación, los cuales se encuentran separados o esparcidos en gran cantidad al rededor del punto de la constelación, "invaden" la región de probabilidad de la coordenada adyacente, dando lugar a valores crecientes del parámetro BER.

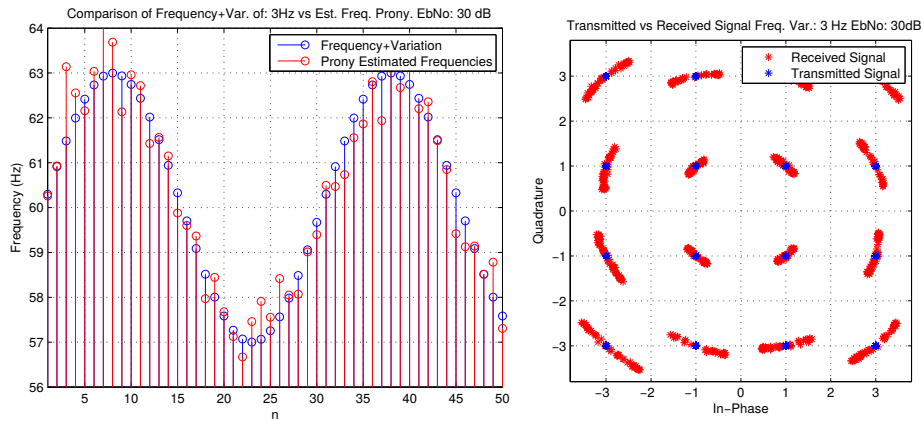


Figura 4.14: *Frecuencia+Variación de 3.0Hz vs Estimados de Prony. Ruido $E_bN_0:30dB$*

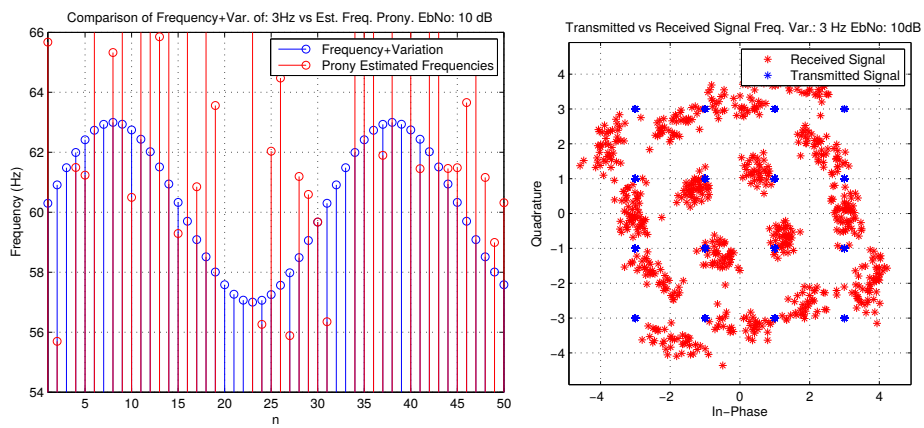


Figura 4.15: *Frecuencia+Variación de 3.0Hz vs Estimados de Prony. Ruido $E_bN_0:10dB$*

Como se observa en las figuras (4.14) y (4.15), los puntos de la constelación que se genera a partir de la señal recibida, se esparcen cada vez más al rededor del punto original en proporción al ruido. Aunado a esto, la presencia cierta fluctuación en la frecuencia crea cierto giro en la constelación, generando valores del parámetro BER que van creciendo en función del aumento del valor del ruido y variación dinámica de la frecuencia.

La figura (4.16) hace referencia a distintos valores de BER obtenidos en las simulaciones del sistema para diferentes valores de variación de frecuencia y E_b/N_0 .

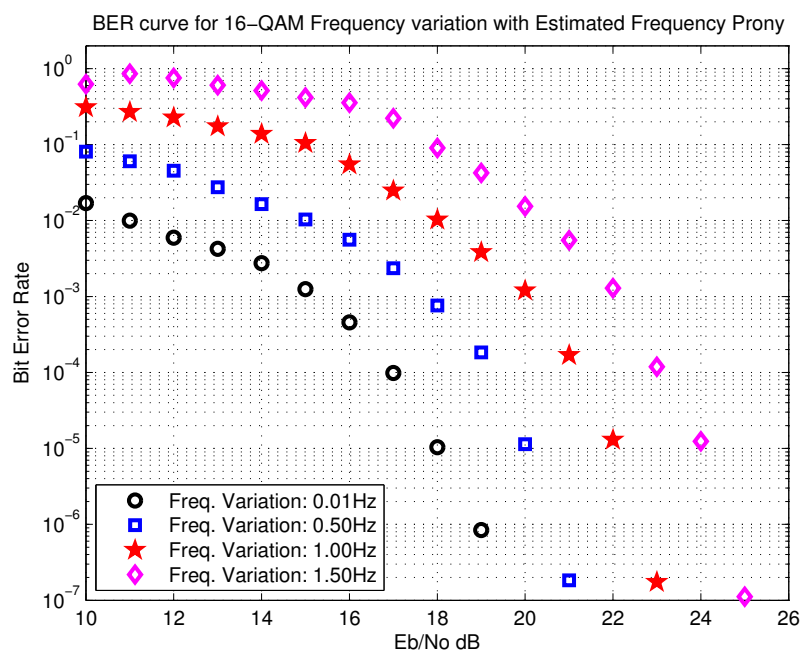


Figura 4.16: Curva BER para estimador de frecuencia método de Prony 16QAM

Para valores de E_b/N_0 menores de 10dB se tienen valores de BER muy altos, lo cual no es tolerable para la correcta operación del sistema, para valores entre 10dB y 24dB se tienen valores de BER graficados en los cuales sistema opera con cierta probabilidad de error, para valores de 26dB en adelante, el sistema opera de manera exitosa, cabe destacar que los valores pueden variar debido a que los valores presentes en la gráfica fueron tomados del promedio una repetición de 100 veces para cada experimento (combinación de fluctuaciones de frecuencia VS E_b/N_0).

4.5 Conclusiones.

Para la aplicación del método de Prony en el presente trabajo de investigación, se asume un intervalo con amplitud y fase constante, si en un intervalo se toma en cuenta una transición de amplitud y fase, el estimador de frecuencia de Prony se ve afectado.

Existen algunas situaciones en donde las oscilaciones de amplitudes son cuasi constantes y las variaciones son muy suaves, en el caso de un sistema de comunicación 16-QAM, estas transiciones no lo son.

Debido a que la frecuencia estimada está cambiando por la presencia de una variación en la frecuencia, las señales que involucran a las frecuencias estimadas, y las cuales se utilizan en el proceso de demodulación, no son ortogonales y presentan una oblicuidad.

El hecho de biortogonalizar implica corregir por la matriz inversa de Gram, cuando los vectores son ortogonales los mismos vectores definen la inversa y sólo se realiza la Hermitiana y el producto punto para obtener las coordenadas.

Cuando la base es oblicua, los vectores no son ortogonales y necesitan ser multiplicados por una inversa, ahora la pseudoinversa va a estar dada por una combinación lineal de éstos y los coeficientes de la combinación lineal los proporciona la matriz.

Con mínimos cuadrados se obtienen los mejores estimados que se aproximen a la señal original, tratando de predecir los coeficientes para la señal.

Utilizando una hipótesis de modelo de ecuación de segundo orden en el método de Prony, se obtienen muy buenos estimados, es decir se asume que en el espectro predominante de la señal al rededor del 95% de la energía de la misma se encuentra en la frecuencia fundamental o frecuencia de portadora, según sea el caso del sistema. La calidad de la estimación fasorial no se debe medir en el plano fasorial, se debe de medir en que tan bueno es ese fasor para la reconstrucción de la señal original.

Si bien en el presente trabajo se tomó una frecuencia con un valor bajo con respecto a las utilizadas en los sistemas de comunicación, para valores de frecuencias de portadora mas altos el método se tendría que aplicar en instantes mas pequeños lo cual se traduce en una reducción de los periodos.

Capítulo 5

Conclusiones.

En el presente trabajo se implementaron las nociones o principios de las comunicaciones y los SEP, se ha descrito el método de Prony como estimador de frecuencia, las condiciones bajo las cuales el método es capaz de operar de manera exitosa, las condiciones bajo las cuales opera de manera satisfactoria aunque con algunas probabilidades de error en la estimación y finalmente aquellas en las que el método no es apto para operar como estimador frecuencial.

Se utilizó el método de Prony solamente para la estimación de la frecuencia, no se aplicó de la manera tradicional donde se toman segmentos largos y se ven oscilaciones electromecánicas de larga duración, el método se aplicó para un ciclo y se realizó un sistema de comunicación utilizando los parámetros necesarios requeridos para la medición fasorial.

La presencia de ruido en el sistema implica un incremento considerable en los errores de estimación del plano frecuencial, las probabilidades de error se hacen notar más dando lugar a valores mas grandes de BER, en las simulaciones realizadas para la obtención de resultados en el presente trabajo se manejaron valores de ruido con un EbNo que van desde los 10 dB hasta los 30 dB, para valores mayores a los 30dB se tuvo un BER de 0 , para valores entre 10 y 26 dB se obtuvieron valores de BER que van de 10^0 a 10^{-7} , para valores menores a 10dB los valores de BER no son recomendables para la correcta demodulación de la señal.

Desde el punto de vista de SEP, se puede ver a un sistema QAM como el peor de los casos en un SEP donde se tienen transiciones de amplitud y fase muy grandes y rápidas además de valores de ruido muy grandes.

Apéndice A

Herramientas matemáticas

A.1. Producto Punto para señales análogas

Definición A.1.A. El producto punto (producto interno) de dos funciones en el dominio del tiempo $x(t)$ y $y(t)$ está dado por:

$$\langle x, y \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\overline{y(t)}dt \quad (\text{A.0.1})$$

Definición A.1.B. Sean $X(\omega)$ y $Y(\omega)$ las transformadas de Fourier de $x(t)$ y $y(t)$ respectivamente, el producto interno en el dominio de la frecuencia está definido por:

$$\langle X, Y \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\overline{Y(\omega)}d\omega \quad (\text{A.0.2})$$

Lema A.1. *El producto interno de dos señales en el dominio del tiempo es idéntico al producto punto de sus espectros en el dominio de la frecuencia, i. e. $\langle x, y \rangle = \langle X, Y \rangle$*

Demostración: La prueba es directa de la fórmula de Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\bar{y}(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\bar{Y}(\omega)d\omega \quad (\text{A.0.3})$$

A.2. Producto Punto para señales discretas

Definición A.2.A. El producto punto de dos secuencias en el dominio del tiempo $x(nT_m)$ y $y(nT_m)$ está dado por:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{-\infty}^{\infty} x(nT_m)\bar{y}(nT_m) \quad (\text{A.0.4})$$

Definición A.2.B. Sean $X(\theta)$ y $Y(\theta)$ las transformadas de Fourier de $x(nT_m)$ y $y(nT_m)$ respectivamente, el producto interno en el dominio de la frecuencia está definido por:

$$\langle X, Y \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\theta)\bar{Y}(\theta)d\theta \quad (\text{A.0.5})$$

Lema A.2. *El producto punto de dos señales discretas en el dominio del tiempo*

es idéntico al producto punto de sus espectros en el dominio de la frecuencia, i. e.

$\langle x, y \rangle = \langle X, Y \rangle$ *Demostración:* La prueba es directa de la fórmula de Parseval

$$\sum_{-\infty}^{\infty} x(nT_m)\bar{y}(nT_m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\theta)\bar{Y}(\theta)d\theta \quad (\text{A.0.6})$$

A.3. Ortogonalidad

Definición A.3. Se dice que dos funciones $x(t)$ y $y(t)$, o secuencias $x(nT_m)$ y $y(nT_m)$ en el caso discreto, son ortogonales si su producto interno es cero.

$$\langle x, y \rangle = \langle X, Y \rangle = 0 \quad (\text{A.0.7})$$

A.4. Mínimos cuadrados

Teorema A.4. Sean $f(t)$ una señal real perteneciente a $(-\infty, \infty)$, y $\hat{f}(t)$ la aproximación a $f(t)$ dada por:

$$\hat{f}(t) = \sum_{k=1}^n a_k y_k(t) \quad (\text{A.0.8})$$

la cual está construida por una combinación lineal de n señales $y_k(t)$ las cuales son linealmente independientes.

Los coeficientes óptimos de \hat{a}_k que minimizan el criterio

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(t) - \sum_{k=1}^n a_k y_k(t) \right|^2 \quad (\text{A.0.9})$$

son tal que el error es ortogonal a las señales $y_k(t)$:

$$\langle f - \hat{f}, y_i \rangle = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{A.0.10})$$

Demostración: El criterio es mínimo si:

$$\frac{\partial J}{\partial a_i} = -2 \int_{-\infty}^{\infty} \left[f(t) - \sum_{k=1}^n a_k y_k(t) \right] y_i(t) dt = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{A.0.11})$$

A.5. Matriz de Gram de un sistema de vectores

Se presentará la matriz de Gram para un sistema de vectores en un espacio con producto punto y sus propiedades. **Definición A.5.** Sea V un espacio vectorial con

producto interno, y $\mathcal{A} = (a_1, \dots, a_m)$ un sistema de vectores en V . La *matriz de Gram* del sistema \mathcal{A} es la matriz de todos los productos internos de los vectores del sistema:

$$G(a_{a_1, \dots, a_m}) = (\langle a_i, a_j \rangle) \quad ; \quad 1 \leq i \leq m \quad 1 \leq j \leq m \quad (\text{A.0.12})$$

Ejemplo. En el espacio $\text{Pol}(\mathcal{R})$ con el producto interno

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$$

consideremos el sistema de vectores e_0, e_1, e_2 donde

$$e_0(x) = 1, \quad e_1(x) = x, \quad e_2(x) = x^2$$

calculando los productos internos:

$$\langle e_0, e_0 \rangle = 1, \quad \langle e_0, e_1 \rangle = 0, \quad \langle e_0, e_2 \rangle = \frac{1}{3},$$

$$\langle e_1, e_0 \rangle = 0, \quad \langle e_1, e_1 \rangle = \frac{1}{3}, \quad \langle e_1, e_2 \rangle = 0,$$

$$\langle e_2, e_0 \rangle = \frac{1}{3}, \quad \langle e_2, e_1 \rangle = 0, \quad \langle e_2, e_2 \rangle = \frac{1}{5}$$

$$G(e_0, e_1, e_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

A.5.1. Propiedades de la matriz de Gram. 1.- En caso real, la matriz de Gram es simétrica:

$$G(a_{a_1, \dots, a_m})^T = G(a_{a_1, \dots, a_m}) \quad (\text{A.0.13})$$

2.- En caso complejo, la matriz de Gram es hermitiana:

$$G(a_{a_1, \dots, a_m})^H = G(a_{a_1, \dots, a_m}) \quad (\text{A.0.14})$$

3.- Un sistema de vectores es ortogonal si su matriz de Gram es diagonal. 4.- Un

sistema de vectores es ortonormal si su matriz de Gram es la matriz identidad.

A.5.2. Cálculo de la matriz de Gram en el caso de dimensión finita Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n , ε una base ortonormal, $\mathcal{A} = (a_1, \dots, a_m)$ un sistema de vectores en V . Tomando a A como la matriz del sistema \mathcal{A} en la base ε . Es decir, las columnas de A son $(a_1)_\varepsilon, \dots, (a_m)_\varepsilon$. Entonces

$$G(A) = A^T A \quad (\text{A.0.15})$$

Ejemplo. En el espacio \mathcal{R}^4 consideremos el sistema de vectores

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

En este caso la matriz del sistema $\mathcal{A} = (a_1 a_2 a_3)$ es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

y la matriz de Gram es

$$G(A) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 11 & -11 \\ 11 & 14 & -1 \\ -22 & -1 & 61 \end{bmatrix}$$

Apéndice B

Comparación de

Frecuencias+Variaciones contra

Frecuencias estimadas con el método
de Prony.

Sample(n)	Frec.+Variación (Hz)	Frec. estimada Prony.(Hz)
1	60.049637413893620	60.049637413893650
2	60.151947773946816	60.151947773946840
3	60.247617287152220	60.247617287152240
4	60.332464736709504	60.332464736709525
5	60.402781881929780	60.402781881929820
6	60.455495526147810	60.455495526147780
7	60.488301830163150	60.488301830163200
8	60.499767001068236	60.499767001068210
9	60.489389955878460	60.489389955878410
10	60.457624221263260	60.457624221263290
...
100	60.457624221263260	60.457624221263290
...
500	59.597218118070220	59.597218118070200
...
750	59.945157660666520	59.999890315321394

Tabla B.0.1: Frec.+Variación de 0.5 Hz vs Estimados de Prony.

Sample(n)	Frec.+Variación (Hz)	Frec. estimada Prony.(Hz)
1	60.297824483361680	60.297824483361660
2	60.911686643680880	60.911686643680910
3	61.485703722913360	61.485703722913340
4	61.994788420257066	61.994788420257066
5	62.416691291578710	62.416691291578670
6	62.732973156886920	62.732973156886920
7	62.929810980978960	62.929810980978935
8	62.998602006409350	62.998602006409320
9	62.936339735270780	62.936339735270780
10	62.745745327579570	62.745745327579590
...
100	62.745745327579570	62.745745327579580
...
500	57.583308708421306	57.583308708421306
...
750	59.670945963999124	59.670945963999130

Tabla B.0.2: Frec.+Variación de 3.0 Hz vs Estimados de Prony.

Sample(n)	Frecuencia (Hz)	Frec. estimada Prony.(Hz)
1	60.0000000000	60.238073481209690
2	60.0000000000	60.273769524658510
3	60.0000000000	60.519656072580500
4	60.0000000000	60.314406496632586
5	60.0000000000	60.379333433678640
6	60.0000000000	58.008213516141200
7	60.0000000000	59.967234467146916
8	60.0000000000	60.742899544738265
9	60.0000000000	59.787548632283110
10	60.0000000000	60.626516271341930
...
100	60.0000000000	60.232934115983100
...
500	60.0000000000	61.232542752734250
...
750	60.0000000000	59.674526429153540

Tabla B.0.3: Frecuencia vs Estimados de Prony. Ruido EbNo:30dB

Sample(n)	Frecuencia (Hz)	Frec. estimada Prony.(Hz)
1	60.0000000000	61.254573348546100
2	60.0000000000	61.519592593180940
3	60.0000000000	61.035332882937745
4	60.0000000000	73.558148912284310
5	60.0000000000	55.483269602574390
6	60.0000000000	50.059582909505444
7	60.0000000000	51.012877546325420
8	60.0000000000	59.428727787758300
9	60.0000000000	59.088096251779160
10	60.0000000000	65.992182784351190
...
100	60.0000000000	62.685958757393923
...
500	60.0000000000	60.641148356626360
...
750	60.0000000000	59.674526429153540

Tabla B.0.4: Frecuencia vs Estimados de Prony. Ruido EbNo:10dB

Sample(n)	Frec.+Variación (Hz)	Frec. estimada Prony.(Hz)
1	60.297824483361680	59.975187515588836
2	60.911686643680880	61.208817262739900
3	61.485703722913360	61.114569953745864
4	61.994788420257066	62.351205361087080
5	62.416691291578710	64.407558136662970
6	62.732973156886920	61.973533441049085
7	62.929810980978960	63.313450454531300
8	62.998602006409350	64.144776776553580
9	62.936339735270780	63.025305775877920
10	62.745745327579576	61.963950781574890
...
100	62.745745327579523	62.788066561212690
...
500	57.583308708421353	57.438386700052240
...
750	59.670945963999102	60.153103519348136

Tabla B.0.5: Frec.+Variación de 3.0Hz vs Estimados de Prony. Ruido EbNo:30dB

Sample(n)	Frec.+Variación (Hz)	Frec. estimada Prony.(Hz)
1	60.297824483361680	64.787698434151600
2	60.911686643680880	72.092508908459150
3	61.485703722913360	74.424531652019650
4	61.994788420257066	62.230533398835256
5	62.416691291578710	69.951187336315260
6	62.732973156886920	63.422098970212740
7	62.929810980978960	66.883154168228770
8	62.998602006409350	86.830822417583590
9	62.936339735270780	70.923100264199520
10	62.745745327579578	58.771025395654380
...
100	62.745745327579556	64.544817665422470
...
500	57.583308708421356	38.236766191514620
...
750	59.670945963999145	63.258824824125060

Tabla B.0.6: Frec.+Variación de 3.0Hz vs Estimados de Prony. Ruido EbNo:10dB

Bibliografía

- [1] José Antonio de la O Serna. Synchrophasor estimation using prony's method. *Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions*, pages 2119 – 2128, 2013.
- [2] Soon-Ryul Nam ; Dong-Gyu Lee ; Sang-Hee Kang ; Seon-Ju Ahn ; Joon-Ho Choi. Fundamental frequency estimation in power systems using complex prony analysis. *Journal of Electrical Engineering and Technology*, pages 154 – 160, 2011.
- [3] Donald W. Tufts ; Paul D. Fiore. Simple, effective estimation of frequency based on prony's method. *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1996. ICASSP-96. Conference Proceedings., 1996 IEEE International Conference*, pages 2801 – 2804 vol. 5, 7-10 May 1996.
- [4] A.A.(Louis) Beex ; Peijun Shan. A time-varying prony method for instantaneous frequency estimation at low snr. *Circuits and Systems, 1999. ISCAS '99. Proceedings of the 1999 IEEE International Symposium*, pages 5 – 8 vol.3, Jul 1999.
- [5] Md. Shamim Reza ; Mihai Ciobotaru ; Vassilios G. Agelidis. Power quality analysis using piecewise adaptive prony's method. *Industrial Technology (ICIT), 2012 IEEE International Conference*, pages 926 – 931, 19-21 March 2012.
- [6] Soon-Ryul Nam ; Seung-Hwa Kang ; Liu-Ming Jing ; Sang-Hee Kang ; Sang-Won Min. A novel method based on prony analysis for fundamental frequency estimation in power systems. *TENCON Spring Conference, 2013 IEEE*, pages 327 – 331, 17-19 April 2013.
- [7] Lobos T ; Rezmer J ; Schegner P. Parameter estimation of distorted signals using prony method. *Power Tech Conference Proceedings, 2003 IEEE Bologna*, 23-26 June 2003.

- [8] Sun S.Y. ; Shu H.C. ; Dong J. ; Liu Z.J. Analysis of low frequency oscillation mode based on pmu and prony method. *Electric Power Conference, 2008. EPEC 2008. IEEE Canada*, pages 1 – 4, 6-7 Oct. 2008.
- [9] Asim Husain ; Shivi Chaturvedi. Prony method for the analysis of electrical power quality. *Department of Electronics and Communication Engineering, Associate professor, B.B.D.U.*
- [10] Satnam Singh. Application of prony analysis to characterize pulsed corona reactor measurements.
- [11] Pablo W. Hidalgo Lascano. Métodos de prony y pisarenko para análisis espectral.
- [12] Tadeusz Lobos ; Jacek Rezmer. Spectral estimation of distorted signals using prony method. *Institute of Electrical Engineering Fundamentals, Wroclaw University of Technology, Poland.*
- [13] José Antonio de la O Serna. Estimación del fasor dinámico en oscilaciones de sistemas de potencia. *Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica-UANL*, pages 62 – 74, Julio-Septiembre 2008.
- [14] Hikmet Sari ; Saïd Moridi. New phase and frequency detectors for carrier recovery in psk and qam systems. *Communications, IEEE Transactions*, pages 1035 – 1043, 06 agosto 2002.
- [15] A. Mouaki Benani ; F. Gagnon. Comparison of carrier recovery techniques in m-qam digital communication systems. *Electrical and Computer Engineering, 2000 Canadian Conference*, pages 73 – 77 vol.1, 07 Mar 2000-10 Mar 2000.
- [16] Pooi Yuen Kam. Maximum likelihood carrier phase recovery for linear suppressed-carrier digital data modulations. *Communications, IEEE Transactions*, pages 522 – 527, 06 enero 2003.
- [17] Sithamparanathan Kandeepan ; R. J. Evans. Bias-free phase tracking with linear and nonlinear systems. *Wireless Communications, IEEE Transactions*, pages 3779 – 3789, 14 octubre 2010.
- [18] Le Wang ; Zhugang Wang ; Weiming Xiong. A fast and highly accurate carrier acquisition for deep space applications. *Image and Signal Processing (CISP), 2012 5th International Congress*, pages 1695 – 1698, 16-18 Oct. 2012.
- [19] Krzysztof Duda ; Tomas P. Zielinski. Efficacy of the frequency and damping estimation of a real-value sinusoid. *Part 44 in a series of tutorials on instrumentation and measurement*, pages 48 – 58, April 2013.

- [20] National Instruments. Carrier recovery. *NI Tutorial 5523*, pages 1 – 3, Nov 07, 2006.
- [21] Yizheng Liao. Phase and frequency estimation: High-accuracy and low-complexity techniques.
- [22] Walter Rudin. *Análisis real*. McGraw Hill, 2 edition, 1999.
- [23] David Poole. *Álgebra lineal. Una introducción moderna*. Cengage Learning, 2 edition, 2007.
- [24] Egor Maximenko. *Matriz de Gram para un sistema de vectores*. http://esfm.egormaximenko.com/linalg/Gram_matrix.pdf, 2011.
- [25] Krzysztof Wesolowski. *Introduction to digital communication systems*. Poznań University of Technology.
- [26] Michael Joost. Theory of root-raised cosine filter. *Research and Development*, pages 1 – 11, December 2010.
- [27] Dimitri Bertsekas ; Robert Gallager. *Data Networks*. Prentice Hall, Inc, 1987.
- [28] John G. Proakis ; Dimitris G. Manolakis. *Digital Signal Processing*. Pearson Education, Inc, 2007.
- [29] John G. Proakis ; Masoud Salehi. *Digital Communications*. McGrae Hill, 2008.
- [30] L. Scharf. *Statistical Signal Processing: Detection, Estimation and Time Series Analysis*. Adison-Wesley Publishing Company, 1991.
- [31] Manuel Antonio Andrade Soto. *Aplicación de los Métodos de Identificación de Hilbert y Prony al Estudio de Fenómenos Oscilatorios en Sistemas Eléctricos de Potencia*. Tesis de maestria, 2002.
- [32] M. Uzunoglu ; C. Kocatepe ; R. Yumurtaci ; K. Gulez. The effects of harmonics on voltage stability. *EEJ Trans. Inst. Elect. Eng. Jpn.*, pages 616 – 621.
- [33] R. C. Dugan ; M. F. Granaghan ; S. Santoso ; H. W. Beaty. *Electrical Power Systems Quality*. McGraw Hill, 2 edition, 2004.
- [34] M. A. Platas J de la O. Dynamic harmonic analysis through taylor-fourier transform. *IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement.*, pages 804 – 813, March 2011.
- [35] J. G. Proakis. *Digital Communications*. McGraw Hill, 3 edition, 1995.

- [36] B. Sklar. *Digital Communications: Fundamentals and Applications*. Prentice Hall Inc., 1998.
- [37] A. Bateman. *Digital Communications: Design for the real world*. Addison-Wesley Longman Limited, 1999.
- [38] Mariesa Crow. *Computational Methods for Electric Power Systems*. CRC Press.
- [39] Harald Kröll ; Christian Benkeser ; Qiuting Huang ; Andreas Burg. Low-complexity frequency synchronization for gsm systems: Algorithms and implementation. *Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT), 4th International Congress on.*, pages 168 – 173, 3-5 Oct. 2012.
- [40] Yi Zeng ; Lijun Xu ; Zhang Cao ; Shuilong Ma. Fpga-based implementation of prony demodulation in the multi-frequency eit system. *Instrumentation and Measurement Technology Conference (I2MTC), IEEE*, pages 1 – 5, 10-12 May 2011.
- [41] Jiang lin Zhang ; Shan-wei Lu ; Sheng-bo Dong ; Jun Zhang. A fast and accurate frequency acquisition method. *Microwave, Antenna, Propagation and EMC Technologies for Wireless Communications, 2007 International Symposium on*, pages 1023 – 1026, 16-17 Aug. 2007.